Universitat Jaume I

Departament de Matemàtiques

Grupos de funciones continuas

Memoria presentada por Ana Mª Ródenas Camacho, para optar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas, elaborada bajo la dirección del Dr. Jorge Galindo Pastor y del Dr. Salvador Hernández Muñoz.

Castellón, febrero de 2006

Agradecimientos

Han sido tantas las personas que son culpables, si puedo decirlo así, de que haya podido llegar hasta aquí que no sé muy bien por dónde empezar...

Quizás no sea tan difícil... En primer lugar, quiero agradecer el apoyo de mis padres. Ellos fueron los que desde un principio depositaron toda su confianza en mí, los que me han proporcionado afecto, calor y valor, los que más han sufrido mis desánimos, mi mal humor y mis ausencias durante estos últimos años. Sin duda, este trabajo es POR Y PARA ellos. A partir de aquí, la lista es larga... Al resto de mi familia, por supuesto, y en especial se la dedico a la memoria de mis abuelos, a los que no están y a la que queda, porque sé que en todo momento han velado por mí. A mis amigos. Por todos ellos va.

También es mi deseo agradecer de todo corazón ***a todos y cada uno*** de los miembros del departamento de Matemáticas de la Universitat Jaume I de Castelló, encabezado por Pilar y Cristina, que durante estos años me han hecho sentir una más; esté donde esté, siempre llevaré conmigo sus consejos, su apoyo, su cariño y, ¿por qué no?, los *"profundos"* temas de conversación de los cafés... Han sido para mí como una segunda familia; de hecho, ha habido semanas en las que los veía más a ellos que a la mía propia... Quisiera hacer mención al área de Análisis Matemático, y muy especialmente a Sergio Macario, Manuel Sanchis y Juanjo Font, como también a mi compañero de despacho Manuel Forner, todos dispuestos siempre a echar una mano y a escuchar que no es poco, y a Irene, mi gran e incondicional amiga, la que siempre ha estado ahí en los buenos y en los malos momentos, animándome de todas las formas posibles. Gracias a todos.

Por último y no por ello menos importante, quiero agradecer a mis dos directores de tesis, Jorge Galindo y Salvador Hernández, todo el apoyo mostrado hacia mí durante estos años. Sin su ayuda, sin sus consejos, sin su

confianza, sin su dedicación, este trabajo hubiera sido, sino imposible, sí difícil de llevar a cabo. Cada uno me ha aportado sus conocimientos, su forma de ver la investigación, las Matemáticas, la vida... Sí, porque cuando se trabaja codo a codo con alguien, se acaba aprendiendo cosas que van más allá de lo estrictamente profesional, y puedo decir que de Jorge y Salva he aprendido mucho. Me siento muy orgullosa de haber podido trabajar con ellos, de ser una hija más del grupo, de haber recibido tanto a cambio de tan poco. Si algo soy en este difícil mundo, eso se lo debo a ellos.

A mis padres

Índice general

Introducción

La presente memoria se enmarca dentro del estudio de las relaciones topológicas entre dos espacios topológicos Hausdorff a partir de las vinculaciones algebraicas, topológicas o de otra clase que pueda haber entre los correspondientes grupos de funciones continuas evaluadas en un grupo topológico. Pondremos especial atención en la representación de aplicaciones entre grupos de funciones continuas de un espacio topológico en el grupo específico $\mathbb{T}$ y también entre grupos de funciones continuas de un grupo topológico en el mismo grupo $\mathbb{T}$.

Resumen histórico

Podemos situar la investigación en álgebra topológica en dos áreas: los grupos topológicos y los grupos de funciones. La teoría de los grupos topológicos nace como un intento de enlazar dos ramas de las matemáticas: la teoría (algebraica) de grupos y la topología. La convergencia de éstas fue el resultado de la influencia de la teoría de los grupos de Lie y de varias clases de grupos de transformaciones. Entre los temas que se incluyen en esta rama y que están relacionados con la tesis podemos citar la teoría de la compactación de Bohr de los grupos maximalmente casi-periódicos en el sentido de von Neumann, la teoría de dualidad de Pontryagin (es remarcable el hecho fundamental en el desarrollo de esta teoría que todo grupo topológico abeliano y localmente compacto es maximalmente casi-periódico), los grupos nucleares, la teoría de la dimensión y los grupos (localmente) pseudocompactos.

Dentro del álgebra topológica y más concretamente, dentro del apartado de los espacios de funciones, destaca como un gran capítulo el estudio de los espacios de funciones reales continuas definidas en un espacio topológico X. En efecto, las distintas estructuras algebraicas en los espacios $C(X)$ inducidas por las correspondientes de $\mathbb{R}$, en conjunción con diversas topologías, han dado lugar a un elenco de potentes resultados matemáticos, como pueda ser el teorema de Stone-Weierstrass.

Si se considera $C(X)$ como espacio vectorial y se le dota de la topología de la convergencia puntual o de la topología compacta abierta se obtiene un espacio vectorial topológico localmente convexo, y como tal, cabe estudiar la reflexividad. En [71], Hernández y Uspenskij analizaron la reflexividad en el sentido de Pontryagin de los grupos de la forma $C(X)$ dotados de la topología de la convergencia puntual. Ciertamente, si X es compacto, se añade un importante aspecto a su estructura: $C(X)$ con la topología de la convergencia uniforme en los compactos es entonces un espacio de Banach.

La importancia de los espacios $C(X)$ así como la del grupo topológico multiplicativo de los complejos de módulo 1, $\mathbb{T}$, que a continuación comentaremos, nos lleva, en parte, a plantearnos el estudio de los grupos de la forma $C(X, \mathbb{T})$, donde X es un espacio topológico, y la operación del grupo está dada por la multiplicación puntual de funciones continuas, es decir la inducida por la operación de $\mathbb{T}$.

El toro $\mathbb{T}$ es un grupo topológico abeliano compacto y conexo, que dentro del análisis armónico abstracto, juega un papel muy destacado, ya que la teoría de la dualidad de Pontryagin, por ejemplo, se basa en los caracteres de un grupo que en definitiva, son los homomorfismos continuos de dicho grupo en $\mathbb{T}$. También es fundamental en otras áreas de investigación, como puedan ser la topología algebraica y los sistemas dinámicos.

Es precisamente $\mathbb{T}$ uno de los grupos sobre los que tiene lugar el análisis de Fourier, junto a los enteros y la recta real. Sin embargo, entre los años treinta y cincuenta del siglo pasado, un número cada vez más grande de matemáticos se unieron a la creencia de que el marco más apropiado para el desarrollo de la teoría del análisis de Fourier era el formado por los grupos topológicos abelianos localmente compactos. La relativa facilidad con la que los conceptos y teoremas básicos podían ser transferidos a ese contexto general, pudo ser uno de los factores que contribuyó a acrecentar el sentimiento de algunos de que esta extensión era una disolución de la teoría clásica. Además, por aquella época existían temas clásicos que condujeron casi inevitablemente a esta extensión de la teoría. Por ejemplo, Bohr se dió cuenta a principios del siglo pasado de que el teorema de factorización para enteros positivos nos permitía considerar toda serie de Dirichlet ordinaria como una serie de potencias de infinitas variables, periódica en cada una de ellas, esto es, como una función sobre el toro de dimensión infinita $\mathbb{T}^\omega$. Conocer los subgrupos cerrados de $\mathbb{T}^\omega$ fue una cuestión que cobró interés y como consecuencia, el estudio los grupos abelianos compactos métricos.

Paralelamente a $C(X, \mathbb{T})$ podemos hablar del grupo topológico abeliano libre $A(X)$, al cual remitiremos en ciertas ocasiones a lo largo de la tesis. De hecho, si X es un espacio topológico compacto y $C(X, \mathbb{T})$ está dotado de la topología compacta abierta, entonces el conjunto de los homomorfismos continuos de $A(X)$ en $\mathbb{T}$ con la misma topología (el así llamado *grupo dual* de $A(X)$) es isomorfo topológicamente a $C(X, \mathbb{T})$. Los grupos topológicos libres fueron introducidos por A. A. Markov en [89] con la idea clara de aplicar la construcción bien conocida de los grupos libres desde la teoría de grupos a la teoría de los grupos topológicos. Es fácil dar una definición de un grupo topológico libre desde el punto de vista de las categorías como un tipo de objeto proyectivo en la categoría de los grupos topológicos y homomorfismos continuos, pero la prueba de existencia de dichos objetos dista mucho de ser trivial. Ésta es sólo la primera dificultad en el camino de estudiar los grupos topológicos libres. Después de la prueba completa de la existencia ([90]), otros autores como Kakutani, Nakayama y Graev, mejoraron la construcción original. El acercamiento de Graev ([64]) parece que es el más provechoso y constructivo. Los grupos topológicos libres se han convertido en una herramienta poderosa para investigar grupos topológicos generales y éstos, a su vez, pueden servir como fuente de ejemplos y como instrumento para probar teoremas.

Hay numerosos trabajos que hablan sobre los grupos topológicos libres, entre otros [94], [100] ó [113]. Recordamos la definición de grupo topológico libre. Para ello, sea X un espacio topológico completamente regular y supongamos que G es un grupo topológico que contiene a X como un subespacio. Siguiendo lo descrito por Markov en [90], se dice que G es el *grupo topológico libre* sobre X si X genera algebraicamente a G y el par (X, G) satisface la siguiente condición:

Toda función continua $\phi : X \to H$ de X en un grupo topológico H se puede extender a un homomorfismo continuo $\hat{\phi} : G \to H$.

La notación habitual para G es $F(X)$ y si todos los grupos implicados son abelianos, G recibe el nombre de *grupo topológico abeliano libre* sobre X y se designa por $A(X)$.

Las funciones que toman valores en un grupo cualquiera G han sido consideradas en diferentes contextos (ver, por ejemplo, [56], donde se sigue el estudio sobre teoremas del tipo Stone-Weierstrass para funciones continuas G-evaluadas). En concreto, cuando $G = \mathbb{T}$, Varopoulos en [116] y otros autores han investigado el grupo $C(X, \mathbb{T})$ de todas las funciones continuas sobre un espacio compacto X en $\mathbb{T}$ en conexión con ciertas cuestiones de interpolación de funciones en grupos localmente compactos abelianos. Más tarde, Carey and Grundling [32] han considerado la amenabilidad de algunos grupos de funciones continuas que toman valores en el grupo unitario $U(n)$. Por otra parte, los espacios de funciones evaluadas en un espacio vectorial y que están definidas sobre espacios compactos han sido tratados largamente en el análisis funcional. Por ello, parece claro que el hecho de obtener un mejor entendimiento de las propiedades de los grupos de funciones continuas puede ser útil en otros ámbitos de investigación. Una de las cuestiones en la que hemos puesto nuestra atención es la siguiente pregunta general: ¿qué tipo de isomorfismos definidos entre $C(X, G)$ y $C(Y, G)$ induce un homeomorfismo natural entre los espacios X e Y? La respuesta a esta pregunta está relacionada con resultados clásicos cuando G es el cuerpo de los reales o de los complejos (ver por ejemplo, [21], [23], [48] ó [79]), y también es conocida en el caso en que G es un espacio de Banach (en [9], [69]). Además, la cuestión ha sido estudiada cuando G es un cuerpo no Arquimediano ([5] ó [20]) o el grupo de los enteros $\mathbb{Z}$ ([42] ó [43]). En particular, cuando $G = \mathbb{Z}$, ya en 1965, Mkrowa descubrió que la estructura de anillo de $C(X, \mathbb{Z})$ determinaba la topología de X, si éste era un espacio $\mathbb{N}$-compacto; sin embargo, con la estructura de grupo de $C(X, \mathbb{Z})$ no ocurre lo mismo en general. En [42], Eda y Ohta demuestran, entre otras cosas, un interesante resultado que afirma que, si X e Y son espacios compactos 0-dimensionales, entonces $C(X, \mathbb{Z})$ y $C(Y, \mathbb{Z})$ son isomorfos si y sólo si los pesos topológicos de X y de Y coinciden, es decir, $w(X) = w(Y)$. A su vez, en este trabajo estudian las posibles relaciones entre las propiedads topológicas de X y las algebraicas de $C(X, \mathbb{Z})$. Poco tiempo después, Eda, Ohta y Kamo mejoran algunos resultados de [42] en dos direcciones, ya que estudian los grupos del tipo $C(X, A)$ con A un grupo abeliano y obtienen más información sobre propiedades de grupo de $C(X, \mathbb{Z})$ a partir de las propiedades topológicas de X. Sin embargo, poco se conoce si únicamente se supone que G es un grupo topológico. Esta cuestión fue propuesta por Yang en [121] pero ahí hay un error en su acercamiento que invalida los resultados obtenidos en su trabajo (véase [122]). Poco tiempo después, el mismo Yang retomó el tema y obtuvo nuevos resultados pero con hipótesis más restrictivas ([123]).

Pero en lo que más hemos hecho hincapié en esta memoria, es en los grupos de funciones continuas evaluadas en $\mathbb{T}$ y en la manera de obtener información a partir del grupo topológico $C(X, \mathbb{T})$ sobre el espacio topológico X, cuando éste tiene la propiedad de ser compacto, k- y μ-espacio, completamente regular u otras propiedades. De hecho, si denotamos por $C(X)$ y $C(Y)$ a los anillos de funciones continuas complejas o reales sobre espacios completamente regulares X e Y, la deducción de relaciones topológicas entre X e Y a partir de las relaciones algebraicas, topológico-algebraicas y de otro tipo entre $C(X)$ y $C(Y)$ tiene una gran historia y una amplia literatura.

El primero de estos teoremas que se refieren a dichas relaciones es el resultado de Banach (1932) que afirma que para espacios métricos compactos X e Y, si los espacios de Banach con la norma supremo $C(X)$ y $C(Y)$ son linealmente isométricos, entonces X e Y son homeomorfos y la isometría lineal T entre ellos tiene la siguiente forma: existen un homeomorfismo $h : Y \to X$ y una aplicación $a \in C(Y)$ cumpliendo $|a(y)| = 1$ tales que

$$(Tf)(y) = a(y)f(h(y))$$

para toda $f \in C(X)$ e $y \in Y$. Generalmente, una aplicación $T : C(X) \to C(Y)$ de la forma $f \mapsto a(f \circ h)$ recibe el nombre de *aplicación composición con peso*, siendo dicha aplicación a el peso. Por tanto, el teorema de Banach afirma que toda isometría lineal de la forma de T es una aplicación composición con peso idénticamente 1 en valor absoluto. Más aún, la conexión topológico-algebraica entre $C(X)$ y $C(Y)$ ha dado lugar a un enlace topológico entre X e Y. Stone (1937) generalizó el resultado de Banach a espacios arbitrarios X e Y y dió forma a lo que ahora conocemos como teorema de Banach-Stone. Este teorema a solas ha generado multitud de resultados de forma similar. Behrends lo elabora en detalle desde el punto de vista de las M-estructuras y tiene una excelente bibliografía ([24]). Si debilitamos la relación geométrica entre entre $C(X)$ y $C(Y)$, el homeomorfismo entre X e Y se tambalea: si X es cualquier espacio métrico compacto no numerable, entonces $C(X)$ es homeomorfo linealmente a $C([0, 1])$ (Teorema de Milutin, véase por ejemplo [119]). Pero si no debilitamos demasiado la relación geométrica y T es una biyección lineal tal que $||T||||T^{-1}|| < 2$, entonces X e Y aún deben ser homeomorfos, pero si $||T||||T^{-1}|| = 2$, el homeomorfismo falla (vèase [30], [31] ó [34]). Si T es un isomorfismo de álgebras, volvemos a obtener un homeomorfismo. Más aún, esta afinidad algebraica entre $C(X)$ y $C(Y)$ simplifica la forma del isomorfismo de anillos: debe ser una aplicación composición de peso $a = 1$, esto es, $Tf = f \circ h$. Una hipótesis puramente algebraica sobre $C(X)$ y $C(Y)$ nos lleva a una conclusión topológica sobre X e Y. En ausencia de la compacidad de los espacios X e Y, el hecho de que isomorfismo implique homeomorfismo no se da, pero las realcompactaciones de X e Y sí que son homeomorfas. Si T no es inyectiva, aún así, ha de ser una aplicación peso ([61], pg.143). Debido al papel que juegan los operadores composición en los resultados mencionados (y en otros), éstos han sido investigados no sólo entre espacios de funciones continuas si no que también en otra clase de espacios de funciones. Stone desplazó el foco de atención de las conexiones topológico-algebraicas a una combinación de propiedades de orden y algebraicas. Él probó que si $C(X)$ y $C(Y)$ son isomorfos como *lattice-ordered groups*, entonces los espacios compactos X e Y son homeomorfos. Sin embargo, Kaplansky eliminó las hipótesis algebraicas y obtuvo un resultado puramente topológico de orden. Enfocando el problema desde el punto de vista de los retículos, probó que $C(X)$ caracteriza a X. De hecho, para espacios topológicos cualesquiera, tenemos que $C(X)$ y $C(Y)$ son isomorfos como anillos si y sólo si son isomorfos como semigrupos multiplicativos o como retículos ([37], [38], [68], [109]); en la clase de espacios realcompactos, la estructura de anillo, de semigrupo multiplicativo o de retículo de $C(X)$ determinan todas ellas al espacio topológico X.

Una aplicación aditiva $T : C(X) \to C(Y)$ se dice que es *separadora*, si $fg = 0$ implica $(Tf)(Tg) = 0$. Estas aplicaciones, bajo el nombre de *disjointness preserving maps* y definidas entre retículos vectoriales generales, han sido consideradas por numerosos autores, por ejemplo [1], [2], [3], [4], [99], así como [20], en el desarrollo de un teorema de Banach-Stone para funciones continuas tomando valores en un cuerpo, y [23], ya bajo el nombre de *aplicación separadora*. Hay infinidad de trabajos donde han sido muy estudiadas. Como se permite la posibilidad de definir T sobre una subálgebra de $C(X)$, podemos encontrar ejemplos de aplicaciones separadoras, como son el operador diferenciación, homomorfismos de anillos y aplicaciones composición con peso. La integración no es separadora ya que lleva funciones triangulares en funciones eventualmente constantes. Las aplicaciones lineales continuas y separadoras son aplicaciones composición con peso, pero existen aplicaciones discontinuas entre casi todos los espacios de funciones ([79]). Las aplicaciones separadoras también son conocidas como operadores de Lamperti, operadores que preservan la separación (*separation-preserving*), operadores disjuntos, operadores que preservan la intersección disjunta (*disjointness-preserving*) y *d-homomorfismos*. Como ya hemos comentado anteriormente, un ejemplo importante de aplicación separadora es la aplicación composición con peso $f \to w \cdot (f \circ h)$ donde f y w son funciones continuas complejas o reales definidas sobre espacios topológicos S y T, respectivamente, y h lleva T en S. Extendiendo el resultado de Banach para $L_p(T, \mu)$ (complejos o reales), $1 \leq p < \infty$, $p \neq 2$, Lamperti en [84] probó que una isometría lineal sobreyectiva $H : L_p(T, \mu) \to L_p(T, \mu)$ donde μ era una medida σ-finita sobre T, es a fin de cuentas una aplicación composición con peso, es decir $Hf = w \cdot (f \circ h)$, con $f \in L_p(T\mu)$, $h : T \to T$ una aplicación medible Borel sobre casi todo punto de T y $w \in L_p(T, \mu)$ cumpliendo $|w(t)| = 1$ casi por todas partes en T. Aplicaciones de este tipo son separadoras en el sentido siguiente: si $fg = 0$ (μ casi por todas partes), entonces $(Hf)(Hg) = 0$ (μ casi por todas partes). También se han considerado otros conceptos relativos al de separador en aplicaciones que actúan entre espacios de Banach generales, como puede ser el de aplicación que separa bases o *basis separating maps*. Sean pues X e Y espacios de Banach con sendas bases de Schauder $\{x_n\}_n$ e $\{y_n\}_n$. Entonces se dice que una aplicación aditiva $H : X \to Y$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} x(n)x_n \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} Hx(n)y_n$, es *basis separating* o *que separa bases*, si dados dos elementos $x = \sum_{n\in\mathbb{N}} x(n)x_n$ e $y = \sum_{n\in\mathbb{N}} y(n)x_n$ de X cumpliendo $x(n)y(n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ implica que $(Hx)(n)(Hy)(n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En [22], se han desarrollado resultados análogos a los que se conocían ya para aplicaciones separadoras entre espacios de funciones continuas (ver [6], [8], [9], [23], [48] ó [79]), pero en este caso para aplicaciones que separan bases. Otro tipo de biyecciones lineales de $C(X)$ (con X un espacio compacto primero numerable) con las que se han obtenido resultados del tipo Banach-Stone son las que dejan invariante el diámetro del rango de toda función, que reciben el nombre de *diameter preserving*. Fueron introducidas en [66] y toda función de ese tipo se puede representar como suma de una composición con peso y un funcional lineal de $C(X)$. El mismo tipo de funciones fueron consideradas en [29] y [63], pero en estos trabajos se eliminó la hipótesis de X de ser primero numerable. Más tarde, en [51], los autores extendieron los resultados del tipo Banach-Stone a una clase más amplia de subespacios de $C_0(X)$, con X un espacio localmente compacto.

Es, por tanto, difícil delimitar la frontera entre la topología general y otras disciplinas próximas. Por ejemplo, algunas cuestiones planteadas en campos limítrofes pueden ser abordadas y resueltas con técnicas y conceptos que surgen de la topología general. Este fenómeno ha sido (y es) relevante y ha estado motivado por el hecho de que muchos investigadores en topología general se han formado en áreas colindantes como el análisis funcional o la geometría, e incluso el álgebra. La investigación en la estructura de los homomorfismos en álgebras de funciones, en la extensión de operadores o en conjuntos K-analíticos y las investigaciones en *aplicaciones lineales separadoras* son un ejemplo de este fenómeno.

Uno de los ejemplos de esta dificultad a la hora de establecer la frontera entre la topología general y otras materias son los grupos topológicos abstractos, los cuales fueron definidos por Schreier en 1926, aunque la idea estaba implícita en trabajos muy anteriores sobre grupos continuos de transformaciones. La materia tiene sus orígenes en el programa de Klein (1872) de estudiar geometrías a través de los grupos de transformaciones asociados a ellos y en la teoría de Lie de grupos continuos saliendo de la solución de ecuaciones diferenciales. Los grupos clásicos de la geometría (grupos lineales generales, grupos unitarios, grupos simpléticos...) son de hecho, grupos de Lie, es decir, son variedades analíticas y sus operaciones de grupos son funciones analíticas. Por otra parte, Killing y Cartan probaron que todos los grupos de Lie simples son grupos clásicos, excepto un número finito de grupos excepcionales.

En relación con los grupos topológicos, en 1900, Hilbert propuso el problema, el que hacía el número 5 de su famosa lista, de si todo grupo continuo de transformaciones de un espacio real o complejo finito-dimensional es un grupo de Lie. Sin embargo, este problema acabó formulándose de una forma más abstracta. Un grupo topológico es un espacio topológico con las operaciones de grupo continuas, y la pregunta es: ¿qué condiciones topológicas sobre un grupo topológico aseguran que tenga una estructura analítica que haga que sea un grupo de Lie? Como la integración era una herramienta fundamental en el estudio de los grupos de Lie, especialmente en las representaciones, el establecimiento de la existencia de integrales apropiadas sobre clases generales de grupos topológicos se convirtió en una cuestión importante. Esto lo consiguió Haar en 1933 para grupos localmente compactos con bases de abiertos numerables. Von Neumann (1934) dió otra prueba para grupos compactos arbitrarios de manera que la teoría de los grupos de Lie compactos podía aplicarse a todos los grupos compactos y pudo resolver en este caso especial el problema planteado por Hilbert. El método de Haar de integración fue extendido a todos los grupos localmente compactos por Weil (1940). Sin embargo, existen serios obstáculos a la hora de extender la teoría de representación a grupos localmente compactos, y no fue hasta 1952 cuando el problema de Hilbert fue asentado por Gleason, Montgomery y Zippin. Su respuesta puede formularse de la siguiente forma: un grupo topológico es un grupo de Lie si, y sólo si, es localmente compacto y no tiene subgrupos arbitrariamente pequeños, es decir, el elemento identidad tiene un entorno compacto que no contiene subgrupos no triviales.

Y, aunque la teoría de los grupos topológicos se desarrolló principalmente para estudiar grupos de tipo Lie y su impulso provino de problemas en análisis, pronto se probó que era útil en contextos puramente algebraicos. Ciertas construcciones algebraicas hacen que los grupos tengan estructuras topológicas naturales que son de alguna forma patólogicas desde el punto de vista analista. Como ejemplos tenemos los anillos de series de potencias, los grupos de Galois de extensiones infinitas de cuerpo y los grupos p-ádicos. Dicha patología se sitúa en la existencia de subgrupos arbitrariamente pequeños, pero en los casos más importantes los grupos son, de hecho, localmente compactos y de ahí que la integración pueda llevarse a cabo sobre ellos.

Siguiendo la estela de los grupos topológicos, se sabe que una de las más modernas ramas del análisis armónico que tiene sus raíces a mediados del siglo veinte es el análisis sobre dichos grupos. La idea central que motiva este estudio son las diversas transformadas de Fourier existentes que pueden ser generalizadas a transformadas de funciones definidas sobre grupos localmente compactos. Recordemos que la transformada de Fourier, llamada así por Jean Baptiste Joseph Fourier, es una transformada integral que vuelve a expresar una función en términos de funciones básicas sinusoidales, es decir, como una suma o integral de funciones sinusoidales multiplicada por ciertos coeficientes.

Concretamente, la teoría de Fourier para grupos abelianos localmente compactos recibe el nombre de dualidad de Pontryagin. El análisis armónico estudia las propiedades de esta dualidad y la transformada de Fourier, e intenta extender esas características, por ejemplo, al caso de los grupos de Lie no abelianos. El teorema de dualidad de Pontryagin-van Kampen (por ejemplo, en [72], [93] ò [104]) junto con el teorema de Bochner sobre funciones definidas positivas siguen teniendo sentido aunque no se suponga la compacidad local y la existencia de la medida de Haar. El primero de estos resultados afirma lo aiguiente:

Teorema de la dualidad de Pontryagin-van Kampen *Sea G un grupo topológico abeliano localmente compacto. Entonces G es isomorfo topológicamente a su bidual, es decir, al dual de su grupo dual $\widehat{G}$.*

Se sabe que éste es válido para espacios de Banach ([111]), para productos de grupos localmente compactos o subgrupos aditivos, y cocientes de espacios nucleares Fréchet. El teorema de Bochner sigue siendo válido a su vez para espacios localmente convexos sobre cuerpos p-ádicos, para espacios nucleares localmente convexos, sus subgrupos y cocientes.

Por otro lado, otras de las cuestiones más importantes en el análisis armónico que se empezaron a plantear a mediados del siglo pasado fue el estudio de los llamados *conjuntos de interpolación*, en particular, se planteó el problema de si la unión de dos conjuntos Helson es de nuevo un conjunto Helson. Dado un grupo localmente compacto abeliano G, por *conjunto Helson* entendemos a aquel subconjunto compacto E de G que verifica que para toda $F \in C(E)$ existe $f \in \mathcal{L}^1(\widehat{G})$ tal que $F(x) = \hat{f}(x)$ sobre E, esto es, $A(E) = C(E)$. Recordamos que $A(G)$ es el conjunto de todas las transformadas de Fourier $\hat{f}$ de funciones $f \in \mathcal{L}^1(\widehat{G})$. Con el producto puntual de funciones y la norma $||\hat{f}||_{\mathcal{A}(G)} = ||f||_{\mathcal{L}^1(\widehat{G})}$, $A(G)$ se convierte en un álgebra de Banach regular semisimple cuyo espacio ideal maximal se puede identificar con G. La transformada de Gelfand viene dada, por tanto, por la aplicación inclusión de $A(G)$ en $C_o(G)$ y $A(G)$ es denso en $C_o(G)$ bajo la norma uniforme. En [86], Varopoulos da respuesta a esa cuestión y se basa para ello, entre otros, en el siguiente resultado que habla sobre los caracteres de $C(K, \mathbb{T})$, cuando K es un espacio compacto totalmente disconexo (ver también [25] y [115]):

Teorema *Supongamos que K es un espacio compacto totalmente disconexo. Entonces, si $\theta \in C(K, \mathbb{T})^\wedge$, podemos encontrar $k_1, k_2, \ldots, k_n \in K$ y $m_1, m_2 \ldots, m_n \in \mathbb{Z}$ tales que*

$$\theta(f) = \prod_{i=1}^{n} f(k_i)^{m_i}, \quad \text{para toda } f \in C(K, \mathbb{T})$$

Cabe destacar que Kawai (en [81]) da una demostración de este último resultado desde el punto de vista del análisis no estándar. El teorema sobre la union de dos conjuntos Helson que prueba Varopoulos en [86] o en [116] exige que uno de ellos sea metrizable; poco tiempo después, Saeki mejoró y generalizó en [106] el resultado de [116], ya que demostró que la unión de dos conjuntos Helson en un grupo abeliano localmente compacto vuelve a ser un conjunto de Helson. Otros autores, como Lust ([87]), lo han demostrado para G compacto. A su vez, en [86] podemos encontrar un teorema de Bochner para $C(K, \mathbb{T})$ con K un espacio métrico compacto que afirma:

Teorema *Sea K un espacio métrico compacto. Entonces la función $p : C(K, \mathbb{T}) \to \mathbb{C}$ es continua y definida positiva si, y sólo si, podemos encontrar $\mu \in \mathcal{M}^+(A(K))$ tal que*

$$p(\sigma) = \int \langle \sigma, \hat{\sigma} \rangle d\mu(\hat{\sigma}).$$

Esta función continua y definida positiva p también se puede escribir de la siguiente forma:

$$p(f) = \int_{C(K,\mathbb{T})^\wedge} \langle \hat{f}, \chi \rangle d\mu(\chi), \tag{1}$$

con μ una medida positiva sobre $C(K,\mathbb{T})^\wedge$. Y esto es así, ya que bajo estas condiciones sobre K, el grupo topológico abeliano libre $A(K)$ verifica la dualidad de Pontryagin y es isomorfo a $C(K,\mathbb{T})$. Pero este resultado no es cierto si K pierde la propiedad de ser totalmente disconexo. El funcional p de (1) pasa a ser una expresión más débil que la del teorema de Bochner, pero incluso así, dicho teorema no es cierto para K de esa forma. En cualquier caso, si el teorema de Bochner, con el funcional p de (1), sirve para $C(K,\mathbb{T})$, entonces también es válido para $C^o(K,\mathbb{T})$, que es el subgrupo de $C(K,\mathbb{T})$ que se corresponde con la imagen de la aplicación exponencial $\exp : C(X,\mathbb{R}) \to C(X,\mathbb{T})$. En [55], se prueba que $C^o(X,\mathbb{T})^\wedge$ es isomorfo algebraicamente a $\mathcal{M}_c(X)^* = \{\mu \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(X) : \ \mu(f) \in \mathbb{Z}, \ \forall f \in C(X,\mathbb{Z})\}$. Sean, pues, E un subconjunto cerrado y conexo en K y $x_0 \in E$; entonces, si $g \in C^o(K,\mathbb{T})$, se tiene que $g = \alpha e^{2\pi i f}$ con $\alpha \in \mathbb{T}$ y $f \in C(K,\mathbb{R})$. Supongamos además que $f(x_0) = 0$. Para conjuntos K que no son totalmente disconexos, se puede elegir E de tal forma que contenga una sucesión de puntos distintos $(x_n)_n$ tal que $x_n \rightsquigarrow x_0$. Se define una función continua definida positiva ψ sobre $C^o(K,\mathbb{T})$:

$$\psi(\alpha e^{2\pi i f}) := \prod_{n=1}^{\infty} \cos(\frac{1}{n} f(x_n)).$$

En [65], se prueba que no existe una medida positiva μ sobre $C(K,\mathbb{T})^\wedge$ tal que

$$\psi(g) = \int_{C^o(K,\mathbb{T})^\wedge} \langle \hat{g}, \gamma \rangle d\mu(\gamma).$$

Para grupos topológicos localmente compactos no abelianos, el análisis armónico está unido a la teoría de las representaciones unitarias de grupos. Si estamos trabajando con grupos compactos, el teorema de Peter-Weyl explica cómo se pueden obtener resultados armónicos eligiendo una representación unitaria irreducible de cada una de las clases de equivalencia de representaciones. Esta elección disfruta de algunas de las útiles propiedades de la transformada clásica de Fourier en términos de llevar convoluciones a productos, o de otra forma, mostrando una cierta comprensión de la estructura de grupo subyacente. Si el grupo no es ni abeliano ni compacto, no hay ninguna teoría satisfactoria conocida. Por "satisfatorio", nos referimos, como poco, a un equivalente del teorema de Plancherel. Sin embargo, se han estudiado y analizado muchos casos específicos, por ejemplo $Sl(n)$. En este caso, se ve que las representaciones en dimensión infinita juegan un papel crucial.

Otro de los temas al que haremos referencia y trataremos a lo largo de la tesis, y en el que además confluyen varias ramas de la matemática, es la teoría de las C^*-álgebras. Una forma de introducir esta teoría es la siguiente: sea H un espacio de Hilbert y sea $\mathcal{B}(H)$ el conjunto de operadores lineales y continuos sobre H. Consideramos una subálgebra A de $\mathcal{B}(H)$, que sea cerrada en el sentido de la norma de operadores, cerrada para los elementos autoadjuntos y estable para la suma. De esta forma, A es un álgebra de Banach involutiva de un tipo particular, la así llamada C^*-álgebra (concreta). La teoría comienza en 1943, cuando Gelfand y Naimark señalaron que, al contrario que las álgebras de Banach involutivas, las C^*-álgebras podían ser caracterizadas por algunos axiomas simples. De hecho, toda C^*-álgebra conmutativa A tiene la forma $C_0(X)$, el espacio de las funciones continuas sobre X que se anulan en el infinito, y en ocasiones esta estructura puede ser más útil. En concreto, podemos encontrar información sobre las álgebras y subálgebras de las funciones continuas reales en [27] y [28]. Poco tiempo después, los mismos autores Gelfand y Naimark se dieron cuenta de que las C^*-álgebras jugaban un papel destacado en el estudio de las representaciones de una clase muy amplia de álgebras de Banach conmutativas; para toda álgebra B de esta clase se puede construir una C^*-álgebra A, de forma que las representaciones de B sobre un espacio de Hilbert se pueden identificar con representaciones de A. Para muchas cuestiones y problemas (sobre todo, en aquellas donde intervienen los ideales), A es más manejable que B. En particular, esta construcción se aplica cuando se coge como B el álgebra de las funciones integrables sobre un grupo localmente compacto G. Así pues, se pasa del estudio de representaciones unitarias de G a las representaciones de una cierta C^*-álgebra, llamada C^*-álgebra del grupo. Por ejemplo, en [45], Effros demuestra que la C^*-álgebra reducida del grupo libre generado por 2 elementos ($\mathbb{F}_2$), el así llamado 2-toro "no conmutativo", denotada por $C^*_{red}(\mathbb{F}_2)$, es conexa, esto es, no tiene proyecciones no triviales (por *proyección* de una $*$-álgebra A entendemos todo elemento $a \in A$ que verifique que $a = a^* = a^2$). Esta afirmación fue formulada por primera vez como conjetura por R. Kadison a finales de los años 60 y una primera aproximación a esta cuestión se debe a R. Powers en [102]. Para probar dicha conexión en C^*-álgebras, Effros utiliza métodos del análisis funcional y de ahí que sea necesario introducir elementos de la teoría de integración no conmutativa.

Todos los argumentos que se dan, se pueden aplicar a $\mathbb{F}_n$, el grupo libre sobre n generadores. En particular, esto implica que $C^*_{red}(\mathbb{Z}) = C(\mathbb{T})$ es conexa. A su vez, el autor plantea la siguiente pregunta: si G es un grupo no abeliano de torsión libre, entonces ¿$C^*_{red}(G)$ no tiene proyecciones?, es decir, ¿es conexa esta C^*-álgebra? (basada en la conjetura de Kadison)

Resumen de la tesis

Esta memoria se divide en 4 capítulos. El primero de ellos reúne resultados básicos sobre el grupo $C(X, \mathbb{T})$, sobre las aplicaciones separadoras entre espacios de funciones continuas complejas o reales que actúan sobre espacios compactos, y entre espacios de funciones continuas que toman valores en espacios de Banach generales, y sobre las C^*-álgebras conmutativas con unidad, así como sobre la C^*-álgebras de un grupo abeliano localmente compacto. La mayor parte de ellos aparecen sin su demostración correspondiente, aunque algún resultado sí que viene acompañado por ésta, con el fin de presentar alguna técnica fácilmente reconocible en capítulos posteriores. Las principales fuentes que se han seguido son las de Engelking [46], Galindo y Hernández [55] en la primera sección, Font [48] y [49], Jarosz [79] y Beckenstein, Hernández y Narici [69] en la segunda sección y por último, Davidson [39], Dixmier [40], Doran y Belfi [41] y Murphy [95] para la tercera sección.

El objetivo del segundo capítulo es mostrar el hecho de que la estructura de grupo topológico de $C(X, \mathbb{T})$ sí que puede llegar a dar información sobre el espacio X, al contrario de lo que ocurre cuando se trabaja con $C(X, \mathbb{R})$ cuya estructura de espacio vectorial no aporta información sobre X. Cuando X es un espacio topológico compacto metrizable no numerable, el teorema de Milutin afirma que $C(X, \mathbb{R})$ es isomorfo a $C([0,1], \mathbb{R})$ (ver por ejemplo [119]). Por tanto, espacios no homeomorfos entre ellos (por ejemplo, $[0,1] \times [0,1]$ y $[0,1]$) pueden dar lugar a espacios de funciones continuas isomorfos como espacios de Banach. Primordial resulta en nuestro problema la estructura de $C(X, \mathbb{T})$ cuando X es un espacio compacto Hausdorf, que es la siguiente:

$$C(X, \mathbb{T}) \cong C^o(X, \mathbb{T}) \times \pi^1(X),$$

donde $\pi^1(X)$ es el grupo de cohomotopía de X (véase [55] ó [100]). Se parte, pues, del isomorfismo topológico $H : C(X, \mathbb{T}) \to C(Y, \mathbb{T})$ y se investiga qué tipo de relación existe entre X e Y.

En la primera parte de este capítulo se supone que X e Y son espacios topológicos compactos metrizables no numerables y se subdivide en tres partes más: cuando además de ser compactos metrizables, X e Y son espacios conexos, cuando son espacios totalmente disconexos y cuando éstos tienen la siguiente estructura, $K \times D$, con K un espacio compacto conexo metrizable y D un espacio compacto metrizable totalmente disconexo. El resultado principal de esta sección (Teorema 2.2.18) se obtiene para X e Y espacios topológicos compactos metrizables no numerables y se basa en lo obtenido para espacios compactos conexos metrizables y totalmente disconexos por separado, ya que se parten dichos espacios de la siguiente forma:

$$X = K_1 \times D_1 \text{ e } Y = K_2 \times D_2, \tag{2}$$

donde K_i es un espacio compacto conexo metrizable y D_i un compacto totalmente disconexo para cada $i \in \{1, 2\}$. En [15], [16] y [17], podemos encontrar una caracterización de los espacios X e Y, cuando son compactos totalmente disconexos no numerables, de forma que los espacios $C_p(X)$ y $C_p(Y)$ son homeomorfos entre ellos, o equivalentemente, sus grupos topológicos libres $F(X)$ y $F(Y)$ ([16]). Como consecuencia, adaptando la prueba de [15] al contexto de los grupos de funciones continuas sobre espacios compactos evaluadas en $\mathbb{T}$, que ahora están dotados de la topología de la convergencia uniforme, obtenemos que $C(D_1, \mathbb{T})$ y $C(D_2, \mathbb{T})$ son isomorfos, siempre que los espacios D_1 e D_2 son además, totalmente disconexos metrizables *no numerables*. Y es este último hecho el que nos ayuda a la hora de relacionar los espacios X e Y cuando tienen la forma de (2), siendo además, $|D_i| > \omega$ (Corolario 2.2.19).

En la segunda sección de este segundo capítulo se trabaja con grupos topológicos abelianos compactos G_1 y G_2. Si G es un grupo topológico localmente compacto, éste tiene asociada una C^*-álgebra $C^*(G)$, que recibe el nombre de C^*-álgebra de grupo. Si, además, G es un grupo abeliano, entonces su C^*-álgebra asociada $C^*(G)$ se puede identificar con

$$C_0(C^*(G)^\wedge, \mathbb{C}) = C_0(\widehat{G}, \mathbb{C}) \text{ (teorema 1.4.17).}$$

En el caso en que estemos trabajando con un grupo discreto LCA, tendremos que $C_0(\widehat{G}, \mathbb{C}) = C(\widehat{G}, \mathbb{C})$, ya que $\widehat{G}$ se convierte en un grupo compacto. Por tanto, el grupo de unitarios de esta C^*-álgebra es $C(\widehat{G}, \mathbb{T})$. De aquí que se utilice la teoría de las C^*-álgebras conmutativas, la cual, cuando se trabaja con grupos topológicos, aporta un nuevo punto de vista en el desarrollo de los resultados que se han analizado en la sección anterior. Obtenemos como consecuencia que dos C^*-álgebras asociadas a grupos discretos numerables libres de torsión son isomorfas si, y sólo si, sus espectros son isomorfos, así como los grupos de unitarios correspondientes. Más aún, en caso en que estemos trabajando con grupos discretos numerables generales Γ_1 y Γ_2, se tiene la equivalencia entre la existencia de un isomorfismo entre los grupos de unitarios de las C^*-álgebras de grupo asociadas y la siguiente afirmación: si llamamos $\alpha_i := w((t\Gamma_i)^\wedge) = |t\Gamma_i|$, entonces $\alpha_1 = \alpha_2$ y además, $\bigoplus_{\alpha_1} \frac{\Gamma_1}{t\Gamma_1} \cong \bigoplus_{\alpha_2} \frac{\Gamma_2}{t\Gamma_2}$ ($t\Gamma_I$ representa a la parte de torsión del grupo Γ_i). Sin embargo, que las C^*-álgebras asociadas a Γ_1 y Γ_2 sean isomorfas entre ellas no es equivalente a esta última afirmación (Proposición 2.3.8 y Ejemplo 2.3.9).

Los trabajos que hemos consultado para este segundo capítulo son, entre otros: [15], [16], [52], [53], [55], [75] y [119].

El tercer capítulo está dedicado al estudio de los homomorfismos separadores entre los grupos de funciones continuas $C(X, \mathbb{T})$ y $C(Y, \mathbb{T})$ y ésta es una de las diferencias con el capítulo 2, ya que allí trabajamos únicamente con isomorfismos topológicos. El Teorema clásico de Banach-Stone ha generado numerosos resultados similares tal y como se ha descrito anterioremente, y uno de los marcos más utilizados ha sido el de las aplicaciones separadoras. El primer escollo a superar es el de encontrar un concepto de aplicación separadora entre grupos de funciones continuas evaluadas en $\mathbb{T}$ y aquí hemos optado por el siguiente: se dice que un homomorfismo $H : C(X, \mathbb{T}) \longrightarrow C(Y, \mathbb{T})$ es *separador*, si dadas f, $g \in C(X, \mathbb{T})$ tales que para todo $x \in X$,

$$f(x) = 1_{\mathbb{T}} \text{ ó } g(x) = 1_{\mathbb{T}},$$

entonces se tiene que

$$(Hf)(y) = 1_{\mathbb{T}} \text{ ó } (Hg)(y) = 1_{\mathbb{T}}$$

para todo $y \in Y$.

El capítulo se divide, pues, en varias secciones según sean las propiedades de X e Y, y según sea la topología con la que estemos dotando a los grupos $C(X, \mathbb{T})$ y $C(Y, \mathbb{T})$. En la primera de ellas, trabajamos con espacios topológicos X e Y compactos Hausdorff y es por ello que los dotamos de la topología de la convergencia uniforme que coincide con la compacta abierta. En este caso, se obtiene un resultado del tipo Banach-Stone si nos restringimos al subgrupo de $C(X, \mathbb{T})$ que está compuesto de aquellos elementos de $C(X, \mathbb{T})$ que son imagen de $C(X, \mathbb{R})$ por la aplicación exponencial $\exp : C(X, \mathbb{R}) \rightarrow$

$C(X,\mathbb{T})$ y que se denota por $C^o(X,\mathbb{T})$; este subgrupo coincide con la componente conexa de la identidad de $C(X,\mathbb{T})$ (ver [55], [75]). Como partimos de un isomorfismo topológico separador $H : C(X,\mathbb{T}) \longrightarrow C(Y,\mathbb{T})$, éste lleva la componente conexa de la identidad de $C(X,\mathbb{T})$ en la correspondiente de $C(Y,\mathbb{T})$, y al revés. Por tanto, H restringido a $C^o(X,\mathbb{T})$ sigue siendo un isomorfismo topológico separador. Y es a partir de este momento cuando comenzamos a utilizar técnicas de la dualidad de Pontryagin para poder obtener un resultado del tipo Banach-Stone. Gracias a la relación existente entre el grupo dual de $C^o(X,\mathbb{T})$ y el espacio de medidas $\mathcal{M}_c(X)^\sim$ (Lema 3.2.2), cuando X es un espacio compacto, se consigue reducir en parte, la dificultad técnica que conlleva trabajar con $\mathbb{T}$ como el espacio de llegada. Una vez conseguido el objetivo que se resume en el Teorema 3.2.14, se aborda el problema de representar H sobre todo el grupo topológico $C(X,\mathbb{T})$ mediante un homeomorfismo entre los espacios X e Y de forma casi natural, ya que se apoya en lo obtenido para el subgrupo $C^o(X,\mathbb{T})$. En esta parte, presentamos un ejemplo de un isomorfismo topológico entre grupos de funciones continuas evaluadas en $\mathbb{T}$, que no es separador, pero sí es isometría. Por tanto, con este ejemplo motivamos aún más el hecho de utilizar el concepto de aplicación separadora para este tipo de grupos de funciones continuas, ya que, aunque la propiedad de ser isometría esté presente, ésta no basta para dar un resultado del tipo Banach-Stone cuando trabajamos con $\mathbb{T}$.

La segunda sección de este capítulo toma a los espacios X e Y como k- y μ-espacios completamente regulares Hausdorff (ver, por ejemplo, [26], [46] para más información sobre este tipo de espacios). De nuevo, suponemos que existe un isomorfismo topológico separador H entre los grupos de funciones continuas $C(X,\mathbb{T})$ y $C(Y,\mathbb{T})$, esta vez, dotados de la topología compacta abierta. Para k-espacios, se sabe que $C^o(X,\mathbb{T})$, esto es, el conjunto de todos los elementos de $C(X,\mathbb{T})$ que tienen logaritmo continuo, se corresponde con la componente arcoconexa de $C(X,\mathbb{T})$. De esta forma, si restringimos H a $C^o(X,\mathbb{T})$, éste lleva dicha componente arcoconexa en la correspondiente de $C(Y,\mathbb{T})$, y seguimos trabajando con esta restricción. En esta sección se intenta seguir el patrón marcado en la Sección 3.2, de ahí que dualicemos de nuevo el isomorfismo topológico separador H, con lo que se obtiene el homomorfismo dual $\widehat{H} : C^o(Y,\mathbb{T})^\wedge \to C^o(X,\mathbb{T})^\wedge$. Sin embargo, aquí perdemos el Lema 3.2.2, con lo que para cada $\chi \in C^o(Y,\mathbb{T})^\wedge$, el elemento $\widehat{H}(\chi)$ no podemos asegurar que pertenezca al espacio de medidas $\mathcal{M}_c(X)^\sim$ concretamente, puesto que ya no coinciden como grupos, pero sí a $\mathcal{M}_c(X)$ gracias a la Proposición 1.1.10. De hecho, si restringimos $\widehat{H}$ al espacio topológico Y, para cada $y \in Y$, el soporte de la medida $\widehat{H}_{|Y}(y)$ contiene un único punto

$x \in X$. Así pues, para $y \in Y$ y $e^{2\pi i f} \in C^o(X; \mathbb{T})$ se obtiene que

$$(He^{2\pi i f})(y) = \widehat{H}_{|Y}(y)(e^{2\pi i f}) = e^{2\pi i r_y f(x)},$$

con $r_y \in \mathbb{R}$. Por tanto, podemos definir dos aplicaciones $h : Y \to X$ que a cada $y \in Y$ le asigna el punto del soporte de la medida $\widehat{H}_{|Y}(y)$, y $\beta : Y \to \mathbb{R}$, que a cada $y \in Y$ le asigna el real r_y. Faltan probar las propiedades de las aplicaciones h y β, y este proceso, hasta obtener que h es un homeomorfismo y β una aplicación continua que sólo puede tomar los valores -1 y 1, viene acompañado de ciertas complicaciones técnicas provocadas en parte, por la no compacidad de los espacios X e Y. Utilizamos de nuevo técnicas de la dualidad de Pontryagin, de teoría de la medida, así como propiedades de las aplicaciones separadoras y de $\mathbb{T}$.

En la tercera sección de este tercer capítulo, trabajamos con espacios topológicos X e Y completamente regulares Hausdorff, pero tanto $C(X, \mathbb{T})$ como $C(Y, \mathbb{T})$ están dotados de la topología de la convergencia puntual. Por tanto, el estudio de las relaciones topológicas entre X e Y toma un rumbo diferente, al menos en lo que se refiere al planteamiento del problema. Efectivamente, tras dualizar el isomorfismo topológico separador $H : C_p(X, \mathbb{T}) \to C_p(Y, \mathbb{T})$, se utiliza el hecho de que $C_p(X, \mathbb{T})$ y $A(X)$ están en dualidad (ver por ejemplo [70]); como consecuencia, si dotamos a $A(X)$ con la topología débil sobre los elementos de $C(X, \mathbb{T})$, que denotamos por $w(A(X), C(X, \mathbb{T}))$, obtenemos que $(A(X), w(A(X), C(X, \mathbb{T})))^\wedge = C_p(X, \mathbb{T})$ de manera que se puede trabajar bien con $C_p(X, \mathbb{T})$ o bien con el dual de $A(X)$. A partir de aquí, el proceso es análogo al de la sección anterior, sólo que ahora no se utilizan espacios de medidas, si no que trabajamos con $A(X)$ o con su grupo dual.

En la cuarta y última sección, trabajamos por un lado con espacios topológicos Hausdorff completamente regulares que satisfacen el primer axioma de numerabilidad y por otro, con espacios realcompactos. Lo que tienen en común ambos casos es que utilizaremos la compactación de Stone-Čech para extender el isomorfismo topológico separador $H : C(X, \mathbb{T}) \longrightarrow C(Y, \mathbb{T})$ a

$$\begin{array}{rcl} H^\beta : C(\beta X, \mathbb{T}) & \longrightarrow & C(\beta Y, \mathbb{T}) \\ f & \longmapsto & (Hf_{|X})^\beta, \end{array}$$

que sigue manteniendo las propiedades de ser un isomorfismo topológico separador, ya que tanto $C(X, \mathbb{T})$ como $C(Y, \mathbb{T})$ están dotados de la topología de la convergencia uniforme. Así pues, restringimos H^β a $C^o(\beta X, \mathbb{T})$, tal y como se hizo en las Secciones 3.2 y 3.3. De hecho, como βX y βY son espacios topológicos compactos, entonces podemos aplicarles los resultados obtenidos en la Sección 3.2: existen una aplicación continua $\gamma : \beta Y \to \{-1, 1\}$ y un homeomorfismo biyectivo $h^\beta : \beta Y \to \beta X$ tales que

$$(H^\beta e^{2\pi i f})(w) = e^{2\pi i \gamma(w) f(h^\beta(w))},$$

para toda $f \in C(\beta X, \mathbb{R})$. Lo único que queda por ver es que el homeomorfismo h^β sigue siendo un homeomorfismo biyectivo cuando lo restrigimos a Y. En el caso en que X e Y son 1AN, existen unas propiedades de la compactación de Stone-Čech que son determinantes a la hora de probar este hecho, mientras que en el caso en que son realcompactos, hay que añadir una nueva propiedad a H y a su homomorfismo inverso H^{-1}, la de *preservar funciones que no se anulan* (Definición 3.5.11).

Para este tercer capítulo nos han servido de base principalmente los trabajos de [48], [49], [50], [55], [61], [69] y [70], entre otros.

El cuarto y último capítulo se dedica al estudio de una relación entre espacios topológicos X e Y a partir de un homomorfismo entre los grupos de funciones continuas que toman valores en un grupo topológico G, esto es, entre $C(X, G)$ y $C(Y, G)$. Este capítulo sigue la línea iniciada en el Capítulo 3, ya que el objetivo gira entorno a la misma cuestión: qué tipo de homomorfismos entre los grupos $C(X, G)$ y $C(Y, G)$ son aplicaciones del tipo Banach-Stone y dan lugar a aplicaciones continuas entre los espacios X e Y.

Poco se sabe acerca de posibles teoremas del tipo Banach-Stone para los grupos de funciones continuas que toman valores en un grupo. En los años setenta, J.S.Yang intentó dar respuesta a esta cuestión en los trabajos [120] y [121], pero su aproximación al problema no fue del todo correcta (ver [122]), ya que tenía algunos errores inciales. De hecho, el teorema principal de J.S. Yang (Teorema 11 de [121]) que hemos intentado mejorar y también corregir, afirma lo siguiente:

Sean X e Y k-espacios. Entonces todo homomorfismo continuo

$$h : C(X, G) \longrightarrow C(Y, G)$$

que lleva las aplicaciones constantes sobre X en la correspondientes funciones constantes sobre Y, induce una única aplicación continua j de Y en X tal que $h(f) = f \circ j$ para toda $f \in C(X, G)$. Más aún, si h es un isomorfismo topológico, entonces la aplicación inducida j es un homeomorfismo.

El propio autor volvió al problema en dos ocasiones, la primera de ellas en [122] y la segunda, en [123], donde impuso condiciones más restrictivas que limitaban la aplicabilidad de los resultados, y lo que es peor, dejaban sin respuesta la cuestión de qué homomorfismos de $C(X, G)$ en $C(Y, G)$ se pueden representar mediante aplicaciones (al menos) continuas entre Y y X.

Por todo esto, nos parecía claro y razonable el intentar entender mejor las propiedades de los grupos de funciones continuas. En este capítulo, presentamos una serie de conceptos sobre los pares (X, G) e (Y, G), como es el de G-*regular*, y sobre el homomorfismo de grupos $H : C(X, G) \to C(Y, G)$, como es el concepto de C-*homomorfismo* y el de *conmutar con los endomorfismos*, que ayudarán en el desarrollo de los resultados principales acerca de la representación de dicho homomorfismo H mediante una aplicación continua $h : Y \to X$, donde en ocasiones obtendremos la continuidad automática de H. Por último, veremos la aplicación de estos resultados a ciertos grupos conocidos, como puedan ser $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$, y $\mathbb{T}$.

Capítulo 1

Resultados preliminares

1.1. Algunos resultados sobre la teoría de la dualidad

Sea G un grupo topológico abeliano.

Definición 1.1.1 *Se llama* carácter *sobre un grupo G a todo homomorfismo de grupos continuo entre G y $\mathbb{T}$. El conjunto de dichos caracteres se denota por $Hom_C(G, \mathbb{T})$.*

Entonces,

Definición 1.1.2 *El grupo de homomorfismos continuos de G en $\mathbb{T}$, si le dotamos de la topología compacta abierta, recibe el nombre de* grupo dual *de G. Se denota por $G^\wedge$ ó por $\widehat{G}$.*

Definición 1.1.3 *Un grupo G se llama* maximalmente casi periódico *(abreviado MCP) si $G^\wedge$ separa puntos de G.*

Llamaremos a partir de ahora $\mathcal{R} := \{z \in \mathbb{T} : \ Rez \geq 0\}$. Si además G es un grupo topológico Hausdorff, se deduce de la Sección (1.3) de [19]:

Proposición 1.1.4 *Una base de entornos de $1_{G^\wedge}$ viene dada por los conjuntos de la forma*

$$K^o := P(K, \mathcal{R}) = \{\chi \in G^\wedge : \ \chi(K) \subseteq \mathcal{R}\},$$

donde $K \subseteq G$ es compacto.

Construimos ahora una aplicación canónica:

$$\begin{array}{rcl} \alpha_G : G & \longrightarrow & G^{\wedge\wedge} \\ g & \longmapsto & \alpha_G(g) \end{array}$$

donde $\alpha_G(g)(\chi) = \chi(g)$ para todo $\chi \in G^\wedge$. Cabe destacar que la aplicación

$$\begin{array}{rcl} \alpha_G(g) : G^\wedge & \rightarrow & \mathbb{T} \\ \chi & \mapsto & \chi(g), \end{array}$$

es un elemento de $G^{\wedge\wedge}$ para todo $g \in G$, porque $\{g\}$ es un subconjunto compacto de G, esto es, para todo $g \in G$, $\alpha_G(g)$ es un carácter continuo de $G^\wedge$ en $\mathbb{T}$. Así pues, α_G está bien definida. Ya podemos dar forma al concepto de ser reflexivo Pontryagin y éste es el siguiente:

Definición 1.1.5 *Un grupo topológico G se dice que es* reflexivo Pontryagin *o* P-reflexivo *si la aplicación α_G es un isomorfismo topológico.*

Una demostración del siguiente teorema fundamental se puede encontrar, por ejemplo, en [72], y éste, a su vez, se corresponde con el Teorema 23 de [93] o con el Teorema 1.7.2 de [104].

Teorema 1.1.6 (Pontryagin-Van Kampen) *Todo grupo abeliano localmente compacto G es reflexivo Pontryagin.*

Ejemplo 1.1.7 *Todo subgrupo discreto de un grupo topológico abeliano G es P-reflexivo.*

Por el teorema de dualidad del apartado 4 de [80]:

Teorema 1.1.8 *El producto de grupos P-reflexivos es P-reflexivo.*

Nota 1.1.9 *El grupo dual de un grupo P-reflexivo G es P-reflexivo.*

El siguiente resultado se puede encontrar en la Sección 2.3 de [19], aunque el primero que lo probó fue W.C. Waterhouse en [118]:

Proposición 1.1.10 *Sea V un espacio vectorial. La aplicación $\rho : V' \to V^\wedge$, $f \mapsto e^{2\pi i f}$ es un isomorfismo algebraico. En particular, si V es un espacio vectorial topológico Hausdorff, y tanto V' como $V^\wedge$ están dotados de la topología compacta abierta, entonces ρ es un isomorfismo topológico.*

M.F. Smith en [111] también probó esta última Proposición, pero en el contexto del cuerpo de los complejos o reales. Más aún, en [111] podemos encontrar el siguiente resultado:

Teorema 1.1.11 *Todo espacio de Banach es reflexivo Pontryagin.*

Definición 1.1.12 *Sea G un grupo topológico abeliano y sea H un grupo topológico de Hausdorff. Todo homomorfismo continuo $\phi : G \to H$ da lugar a un homomorfismo continuo $\phi^\wedge : H^\wedge \to G^\wedge$, $\chi \mapsto \chi \circ \phi$. El homomorfismo $\phi^\wedge$ recibe el nombre de* homomorfismo dual *de ϕ.*

Si G_o es un subgrupo de un grupo topológico G, definimos $G_o^\perp := \{\chi \in G^\wedge : \chi(G_o) = \{1\}\}$. Se dice que $G_o^\perp$ es el anulador *de G_o.*

Ahora veamos el resultado que probó M.J.Chasco en [33], que se corresponde con el Teorema 1 de dicha publicación:

Teorema 1.1.13 *Sea G un grupo topológico abeliano metrizable, entonces $G^\wedge$ es un k-espacio.*

Por otro lado, si dualizamos un grupo discreto numerable Γ, obtenemos que su grupo dual $G = \widehat{\Gamma}$ es compacto metrizable. El Corolario 10.38 de [75] afirma que todo grupo compacto se puede dividir homeomórficamente como el producto de su componente conexa de la identidad por un grupo totalmente disconexo. Por tanto, si llamamos tH a la parte de torsión de cualquier grupo H, tenemos que, si aplicamos este resultado a G, con G_0 la componente conexa de la identidad de G:

$$G \cong \frac{G}{G_0} \times G_0 = \frac{\widehat{\Gamma}}{(t\Gamma)^\perp} \times (t\Gamma)^\perp, \tag{1.1}$$

ya que $G_0 = \widehat{\Gamma}_0 = (t\Gamma)^\perp$ (en el Capítulo 8 de [75]).

A continuación, comenzamos con una serie de resultados acerca de las propiedades de la aplicación α_G.

Proposición 1.1.14 *Sea G un grupo topológico abeliano. Entonces la aplicación α_G es inyectiva si, y sólo si, G es un grupo MCP.*

-Demostración-
($\Rightarrow$) Supongamos que α_G es inyectiva. Sean ψ, $\lambda \in G$ tales que $\lambda \neq \psi$. Por la inyectividad de α_G obtenemos que $\alpha(\psi) \neq \alpha(\lambda)$, luego existe $\chi \in G^\wedge$ tal que $\alpha(\psi)(\chi) \neq \alpha(\lambda)(\chi)$, es decir, $\chi(\psi) \neq \chi(\lambda)$.
($\Leftarrow$) Sean $\psi, \lambda \in G$, $\psi \neq \lambda$. Entonces existe $\chi \in G^\wedge$ cumpliendo $\chi(\psi) \neq \chi(\lambda)$. Luego, $\alpha(\psi)(\chi) = \chi(\psi) \neq \chi(\lambda) = \alpha(\lambda)(\chi)$, para todo $\chi \in G^\wedge$. Es decir $\alpha(\psi) \neq \alpha(\lambda)$ y α es inyectiva. $\square$

Proposición 1.1.15 *Para un grupo de Hausdorff G, α_G es continua si, y sólo si, todo subconjunto compacto de $G^\wedge$ es equicontinuo.*

-Demostración-
La aplicación α_G es continua si, y sólo si, para todo $K \subseteq G^\wedge$ y para todo $V \in \mathcal{E}(1_\mathbb{T})$ se cumple que $\alpha_G^{-1}(P(K,V)) \in \mathcal{E}(1_G)$. Pero esto es equivalente a que dados $K \subseteq G^\wedge$ compacto y $V \in \mathcal{E}(1_\mathbb{T})$ existe un $U \in \mathcal{E}(1_G)$ tal que $U \subseteq \alpha_G^{-1}(P(K,V))$ ($\Leftrightarrow \alpha_G(U) \subseteq P(K,V)$). En este caso, dados $\chi \in K$ y $x \in U$, obtenemos que $\alpha_G(x)(\chi) = \chi(x) \in V$. Por tanto, α_G es continua si, y sólo si, todo compacto de $G^\wedge$ es equicontinuo. $\square$

Corolario 1.1.16 *Si un grupo topológico abeliano G es un k-espacio, entonces α_G es continua. En particular, si G es metrizable, α_G es continua.*

-Demostración-
Por el teorema de Ascoli-Arzelà y la proposición 1.1.15, se obtiene el resultado. Además, obsérvese que todo espacio metrizable es k-espacio (en [46]).
$\square$

Lema 1.1.17 *Sea G un grupo MCP abeliano y sea $H \leq G$ subgrupo cerrado. Entonces, existe un isomorfismo continuo entre $(G/H)^\wedge$ y $H^\perp$, el anulador de H en G.*

Definición 1.1.18 *Un subgrupo H de un grupo topológico G se dice que está* dualmente cerrado *en G si para todo $x \in G \setminus H$ existe un carácter continuo $\chi \in H^\perp$ tal que $\chi(x) \neq 1_\mathbb{T}$.*

H se dice que está dualmente inmerso *en G si todo carácter continuo de H se puede extender a un carácter continuo de G.*

En [14] por ejemplo, podemos encontrar estos resultados, muy útiles, resumidos en la siguiente Nota:

Nota 1.1.19

1. *Todo subgrupo dualmente cerrado es cerrado.*
2. *Sea H un subgrupo de un grupo de Hausdorff G. Entonces H está dualmente cerrado si, y sólo si, $\alpha_{G/H}$ es inyectiva.*
3. *Si $i : H \to G$ es la inmersión, entonces H está dualmente inmerso en G si, y sólo si, $i^\wedge$ es sobreyectiva.*

El siguiente resultado se corresponde al Teorema 3.1 de [97]:

Teorema 1.1.20 *Sea H un subgrupo dualmente cerrado y dualmente inmerso de un grupo topológico G tal que la aplicación α_G es sobreyectiva y abierta. Si H es un k-grupo, entonces H es P-reflexivo.*

Corolario 1.1.21 (Noble) *Sea G un grupo topológico y sea H un subgrupo de G, que está dualmente cerrado y dualmente inmerso en G. Si α_G es un isomorfismo abierto, entonces α_H también lo es.*

El siguiente resultado es una generalización del teorema 1.1.20 y lo encontramos en [14]:

Proposición 1.1.22 *Sea G un grupo de Hausdorff tal que α_G es un isomorfismo abierto. Sea ahora H un subgrupo dualmente cerrado de G. Si $i : H \to G$ denota la inmersión, entonces, α_H es un isomorfismo abierto si y sólo si $i^{\wedge\wedge}$ es inyectiva.*

Más aún, si α_H es continua, entonces tenemos que: $H^{\wedge\wedge} = \alpha_H(H) \oplus ker(i^{\wedge\wedge})$.

Por último,

Lema 1.1.23 *Sea $\{G_i, \varphi_{i_1 i_2}, I\}$ un sistema proyectivo de grupos topológicos G_i tales que, para todo $i \in I$ α_{G_i} es inyectiva. Entonces, el límite proyectivo G_o está dualmente cerrado en $\prod_{i\in I} G_i$. Exactamente, G_o es la intersección de los núcleos de todos los caracteres de la forma $(x_i)_{i\in I} \mapsto \chi_{i_1}(\varphi_{i_1 i_2}(x_{i_2}) - x_{i_1})$, donde $\chi_{i_1} \in G_{i_1}^\wedge$ e i_1, $i_2 \in I$.*

1.2. Algunos resultados sobre $C(X, \mathbb{T})$

En referencia al grupo $C(X, \mathbb{T})$, utilizaremos los siguientes resultados y comenzamos por uno de [100], donde va a aparecer por primera vez el grupo topológico abeliano libre sobre X, el así llamado $A(X)$, que ya se describió en la Introducción.

Teorema 1.2.1 *Si X es un μ-espacio y $C_c(X, \mathbb{T})$ denota el espacio de funciones continuas dotado de la topología compacto abierta, entonces la aplicación $\tau : A(X)^\wedge \longrightarrow C_c(X, \mathbb{T})$, $f \mapsto \tau(f) = f|_X$ es un isomorfismo topológico.*

Nota 1.2.2 *En relación con los resultados de la Sección 1.1, cabe destacar que dado un espacio compacto X, entonces $A(X)$ es reflexivo Pontryagin si, y sólo si, X es un espacio 0-dimensional (en [55] ó [100]).*

Dado un espacio topológico X, consideramos el primer grupo de cohomotopía de un espacio topológico, $\pi^1(X)$. Es el conjunto de las clases de homotopía de las aplicaciones continuas de X en $\mathbb{T}$ dotado de las siguientes operaciones:

- El producto de dos elementos $\gamma, \xi \in \pi^1(X)$, $\gamma\xi$, es la clase del producto puntual de los representantes de γ y ξ.
- El elemento inverso de un $\alpha \in \pi^1(X)$ cualquiera es la clase de cohomotopía de la aplicación que punto a punto es el inverso del representante de α.

Sea $\mathcal{J}$ el siguiente homomorfismo de grupos:

$$\mathcal{J} : C(X, \mathbb{T}) \longrightarrow \pi^1(X),$$

que manda cada aplicación $f \in C(X, \mathbb{T})$ en su correspondiente clase de homotopía. El núcleo de $\mathcal{J}$ se denota por $C^o(X, \mathbb{T})$ y consiste en aquellas aplicaciones homotópicas a la función constante igual a $1_{\mathbb{T}}$. Se dota a $\pi^1(X)$ de la topología cociente canónica. Por otro lado, se sabe que el grupo de cohomología de Čech $H^1(X, \mathbb{Z})$ es isomorfo de forma natural a $\pi^1(X)$ (por ejemplo, en [75], pg.409). En el Capítulo 5 de [117], también podemos encontrar información acerca de este grupo.

Denotamos por $C_c(X,\mathbb{T})$ al grupo $C(X,\mathbb{T})$ dotado de la topología compacta abierta. Una base de entornos de la unidad de $C(X,\mathbb{T})$ para esta topología viene dada por los conjuntos de la forma:

$$P(K,V_\epsilon) := \{g \in C(X,\mathbb{T}) : \ g(K) \subseteq V_\epsilon\},$$

donde $K \subseteq X$ varía entre los compactos de X y $V_\epsilon := \{e^{2\pi it} : \ |t| < \epsilon\}$ con $\epsilon > 0$. Entonces, de resultados de [100] sabemos:

Lema 1.2.3 *Sea X espacio topológico compacto. Entonces el grupo dual $A(X)^\wedge$ es isomorfo topológicamente a $C_c^o(X,\mathbb{T})\oplus\pi^1(X)$ y $\pi^1(X)$ es un grupo discreto.*

Entonces, por el teorema 1.2.1 y el lema 1.2.3:

$$C_c(X,\mathbb{T}) \cong C_c^o(X,\mathbb{T}) \oplus \pi^1(X). \tag{1.2}$$

Por otro lado, se puede definir un isomorfismo $\tilde{E} : C(X,\mathbb{R})/C_c(X,\mathbb{Z}) \to C^o(X,\mathbb{T}) \subseteq C_c(X,\mathbb{T})$. De ahí que podamos denotar los elementos de $C_c^o(X,\mathbb{T})$ mediante $\exp(f)$ con $f \in C_c(X,\mathbb{R})$, donde $\exp : C(X,\mathbb{R}) \to C(X,\mathbb{T})$, $f \mapsto \exp(f)$ es la aplicación exponencial habitual, esto es

$$\exp(C_c(X,\mathbb{R})) = C_c^o(X,\mathbb{T}).$$

De igual forma, la imagen de la aplicación exponencial, $\exp(C(X,\mathbb{R}))$, coincide con el núcleo de $\mathcal{J}$.

De [55], sabemos que:

Proposición 1.2.4 *Si X es un espacio topológico compacto, $\tilde{E}$ es un isomorfismo topológico sobre $C_c^o(X,\mathbb{T})$.*

1.3. Algunos resultados sobre aplicaciones separadoras

En esta sección hemos recopilado una serie de resultados sobre aplicaciones separadoras y la hemos dividido en dos partes: en primer lugar, se enunciarán los resultados que implican a espacios de funciones continuas sobre espacios topológicos compactos Hausdorff que toman valores en $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, y en segundo lugar, aparecerán otros para espacios de Banach generales. Cabe destacar que existe una teoría de aplicaciones separadoras bastante amplia para espacios de funciones continuas de un espacio topológico localmente compacto Hausdorff en $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, o incluso para espacios de Banach (veáse [49] ó [50]).

Pero antes de comenzar a enunciar dichos resultados sobre aplicaciones separadoras, recordamos algunos conceptos básicos en esta teoría:

Definición 1.3.1 *Sea* $f \in C(X, \mathbb{R})$*. Entonces:*

1. *El* conjunto de los ceros *de* f*, denotado por* $z(f)$ *o* $N(f)$*, está formado por aquellos* $x \in X$ *tales que* $f(x) = 0$*, i.e,*

$$z(f) := \{x \in X : \ f(x) = 0\}$$

2. *El* conjunto de los coceros *de* f*, denotado por* $coz(f)$*, está formado por aquellos* $x \in X$ *tales que* $f(x) \neq 0$*, i.e,*

$$coz(f) := X \setminus z(f) = \{x \in X : \ f(x) \neq 0\}$$

Definición 1.3.2 *Sea* $T : C(X, \mathbb{R}) \longrightarrow C(Y, \mathbb{R})$ *una aplicación lineal. Se dice que* T *es una aplicación* separadora*, si dadas* f*,* $g \in C(X, \mathbb{R})$ *tales que* $fg = 0$*, entonces* $(Tf)(Tg) = 0$*.*

Esta definición es equivalente a la siguiente:

Dadas f, $g \in C(X, \mathbb{R})$ tales que $coz(f) \cap coz(g) = \emptyset$, entonces

$$coz(Tf) \cap coz(Tg) = \emptyset.$$

Es claro que la composición de aplicaciones separadoras es separadora.

Lema 1.3.3 *Sean* $T : C(X, \mathbb{R}) \longrightarrow C(Y, \mathbb{R})$ *y* $S : C(Y, \mathbb{R}) \to C(Z, \mathbb{R})$ *dos aplicaciones separadoras, donde* X*,* Y *y* Z *son espacios topológicos cualesquiera. Entonces, la composición* $S \circ T$ *es separadora.*

Recordemos que se puede definir una aplicación evaluación sobre un espacio de funciones continuas, i.e., si X es un espacio topológico cualquiera y $x \in X$, entonces tenemos que dicha aplicación evaluación $\delta_x : C(X, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ actúa tal que así: $\delta_x(f) = f(x)$. Cabe destacar que se puede definir sobre cualquier espacio de funciones, no necesariamente las que son reales. A su vez, si $s \in \mathbb{R}$, denotaremos por $\overline{\mathbf{s}}$ a la aplicación constante de X en $\mathbb{R}$ igual a s.

1.3.1. X e Y espacios compactos

Los siguientes resultados y sus demostraciones han sido extraídos de [48] y [79].

Definición 1.3.4 *Un subconjunto abierto V de X se dice que es un* anulador *para $\delta_y \circ T$ con $y \in Y$ si cumple que, para toda $f \in C(X, \mathbb{R})$ tal que $coz(f) \subseteq V$, entonces $(\delta_y \circ T)(f) = (Tf)(y) = 0$.*

Definición 1.3.5 *El conjunto $X \backslash \cup \{V \subseteq X : V$ es un anulador para $\delta_y \circ T\}$ se dice que es el* soporte *de $\delta_y \circ T$ y vendrá denotado por $supp(\delta_y \circ T)$.*

Supongamos que $Y = \cup_{f \in C(X,\mathbb{R})} coz(Tf)$.

Lema 1.3.6 *Sea $T : C(X, \mathbb{R}) \longrightarrow C(Y, \mathbb{R})$ una aplicación lineal separadora y sea $y \in Y$. Entonces,*

$$supp(\delta_y \circ T) = \{x \in X : \forall V \in \mathcal{E}(x) \, \exists f \in C(X, \mathbb{R}) \text{ t.q. } coz(f) \subseteq V \text{ y } (Tf)(y) \neq 0\}.$$

Recordemos antes de seguir qué es una partición de la unidad subordinada a un cubrimiento del espacio X. En primer lugar, decimos que una familia $(f_i)_{i \in I} \subseteq C(X, [0, 1])$ es una *partición de la unidad* sobre el espacio X, si

$$\sum_{i \in I} f_i(x) = 1$$

para todo $x \in X$. Entonces, una partición de la unidad $(f_i)_{i \in I}$ se dice que *está subordinada* a un cubrimiento $\mathcal{A} := (A_j)_{j \in J}$ del espacio X, si el cubrimiento $\{f_i^{-1}((0, 1])\}_{i \in I}$ del espacio X es un refinamiento de $\mathcal{A}$, i.e., para todo $i \in I$ existe $j \in J$ tal que $f_i^{-1}((0, 1]) \subseteq A_j$ (definiciones obtenidas de [46]).

Proposición 1.3.7 *Sea $T : C(X, \mathbb{R}) \longrightarrow C(Y, \mathbb{R})$ una aplicación lineal separadora y sea $y \in Y$. Entonces:*

1. *El soporte de $\delta_y \circ T$ es distinto del vacío.*

2. *El soporte de $\delta_y \circ T$ contiene un único elemento.*

-Demostración-

1. Supongamos que $supp(\delta_y \circ T) = \emptyset$. Luego para todo $x \in X$ existe $V_x \subseteq X$ anulador de $\delta_y \circ T$ tal que $x \in V_x$. Además
$$X \subseteq \cup\{V \subseteq X : \ V \text{ anulador de } \lambda_y\}.$$
Como X es compacto, existe una sucesión finita tal que
$$X \subseteq \cup_{i=1}^{n} V_i,$$
donde $V_i \subseteq X$ es anulador de $\delta_y \circ T$.
Tomamos una partición de la unidad subordinada a $(V_i)_{i=1}^n$ llamada $(f_i)_{i=1}^n \subseteq C(X,\mathbb{R})$ que cumple $0 \leq f_i \leq 1$, $coz(f_i) \subseteq V_i$ para toda $i \in \{1,\ldots,n\}$ y además $\sum f_i = 1$.
Sea ahora $g \in C(X,\mathbb{R})$; entonces obtenemos que $coz(gf_i) \subseteq coz(f_i) \subseteq V_i$ y $\lambda_y(gf_i) = 0$. Por tanto:
$$(\delta_y \circ T)(g) = (\delta_y \circ T)(g\sum_{i=1}^{n} f_i) = \sum_{i=1}^{n}(\delta_y \circ T)(gf_i) = 0.$$
Y esto ocurre para toda $g \in C(X,\mathbb{R})$, pero $\delta_y \circ T$ no es la aplicación nula $\overline{0}$. Contradicción. Luego $supp(\delta_y \circ T) \neq \emptyset$.

2. Supongamos ahora que existen r, $s \in X$, $r \neq s$ tales que $\{r,s\} \subseteq supp(\delta_y \circ T)$. Por ser X un espacio de Hausdorff, existen $V \in \mathcal{E}(r)$ y $W \in \mathcal{E}(s)$ tales que $V \cap W = \emptyset$.

   Como $r \in supp(\delta_y \circ T)$ y $V \in \mathcal{E}(r)$, tenemos que existen $f \in C(X,\mathbb{R})$ tal que $coz(f) \subseteq V$ y $(\delta_y \circ T)(f) \neq 0$. Así mismo ocurre con s y W, i.e. existen $g \in C(X,\mathbb{R})$ tal que $coz(g) \subseteq W$ y $(\delta_y \circ T)(g) \neq 0$.

   Entonces, por ser $\delta_y \circ T$ una aplicación separadora, obtenemos que $fg \neq 0$, i.e, $coz(f) \cap coz(g) \neq \emptyset$, pero $coz(f) \cap coz(g) \subseteq V \cap W = \emptyset$. Contradicción. Por tanto, existe un único $x \in X$ tal que $supp(\delta_y \circ T) = \{x\}$.

$\square$

Teorema 1.3.8 *Sea $T : C(X,\mathbb{R}) \longrightarrow C(Y,\mathbb{R})$ una aplicación lineal, continua y separadora, que verifica que para todo $r \in \mathbb{R}$, $T(\overline{\mathbf{r}}) = \overline{\mathbf{r}}$. Entonces existe una aplicación $h : Y \to X$ tal que $\delta_y \circ T = \delta_{h(y)}$, donde $h(y) := supp(\delta_y \circ T)$.*

-Demostración-
Llamamos $x := supp(\delta_y \circ T)$.

En primer lugar veamos qué pasa con los núcleos de δ_x y $\delta_y \circ T$. Llamamos $N_x := \{g \in C(X,\mathbb{R}) : \ x \notin supp(g)\}$.

- $N_x \subseteq \ker(\delta_y \circ T)$:

  sea $g \in N_x$, luego $x \notin supp(g) = \overline{coz(g)}$. Es decir, $x \in \overline{X \setminus \overline{coz(g)}}$ abierto, luego existe $f \in C(X, \mathbb{R})$ tal que $coz(f) \subseteq X \setminus \overline{coz(g)}$ y $(\delta_y \circ T)(f) \neq 0$. Como $coz(g) \cap coz(f) = \emptyset$, i.e., $fg = 0$, entonces $(\delta_y \circ T)(f)(\delta_y \circ T)(g) = 0$. Así pues no hay más remedio que $(\delta_y \circ T)(g) = 0$ y $g \in ker(\delta_y \circ T)$.

- N_x es denso en $\ker(\delta_x)$:

  sean $\epsilon > 0$ y $g \in \ker(\delta_x)$. Definimos los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned} X_1 &:= \{x \in X : \ |g(x)| \geq \epsilon\} \\ X_2 &:= \{x \in X : \ |g(x)| < \frac{\epsilon}{2}\} \\ X_3 &:= X \setminus X_1 \cup X_2 \\ &= \{x \in X : \ \frac{\epsilon}{2} \leq |g(x)| < \epsilon\}. \end{aligned}$$

  Sea además $g' \in C(X, \mathbb{R})$ tal que $0 \leq g' \leq 1$ tales que $g'_{|X_1} \equiv 1$ y $g'_{|X_2} \equiv 0$. De este modo tenemos que la aplicación $g'g \in N_x$, ya que $g'(x)g(x) = 0$ y por tanto, $x \notin supp(g'g)$.

  Entonces

  a) $w \in X_1 :$ $\quad |g'(w)g(w) - g(w)| = 0$

  b) $w \in X_2 :$ $\quad |g'(w)g(w) - g(w)| = |-g(w)| < \frac{\epsilon}{2}$

  c) $w \in X_3 :$ $\quad |g'(w)g(w) - g(w)| = |g(w)||g'(w) - 1| < \epsilon.$

  Es decir que para todo $w \in X$ obtenemos que $|g'(w)g(w) - g(w)| < \epsilon$. Por tanto, N_x es denso en $\ker(\delta_x)$.

Así pues, $\ker(\delta_x) \subseteq \ker(\delta_y \circ T)$. Las codimensiones de $\ker(\delta_x)$ y de $\ker(\delta_y \circ T)$ son iguales a 1, i.e., la dimensión de $C(X, \mathbb{R}) \setminus \ker(\delta_x)$ es igual a 1, ya que como sistema generador podemos coger $\langle \overline{1}_{C(X,\mathbb{R})} \rangle_{\mathbb{R}}$. Como $C(X, \mathbb{R}) \setminus \ker(\delta_x) \supseteq C(X, \mathbb{R}) \setminus \ker(\delta_y \circ T)$, entonces la dimensión de $C(X, \mathbb{R}) \setminus \ker(\delta_y \circ T)$ también será igual a 1. Por tanto existe $\beta \neq 0$ tal que $\delta_y \circ T = \beta \delta_x$, i.e., para toda $f \in C(X, \mathbb{R})$, tenemos que $(\delta_y \circ T)(f) = \beta \delta_x(f) = \beta f(x)$. En particular, esta igualdad se cumple para la aplicación constante igual a 1:

$$1 = (\delta_y \circ T)(\overline{1}) = \beta \overline{1}(x) = \beta.$$

Luego, para toda $f \in C(X, \mathbb{R})$, $(\delta_y \circ T)(f) = f(x) = f(supp(\delta_y \circ T)) = \delta_{h(y)}(f)$, donde $h : Y \to X$ dada por $h(y) := supp(\delta_y \circ T)$ está bien definida por la proposición 1.3.7. $\square$

Nota 1.3.9 *En caso de que T no lleve aplicaciones constantes sobre X en la correspondiente sobre Y, i.e., que para todo $r \in \mathbb{R}$, $T(\overline{\mathbf{r}}) = \overline{\mathbf{r}}$, entonces se obtiene un resultado similar al teorema 1.3.8:*

Sea $T : C(X, \mathbb{R}) \longrightarrow C(Y, \mathbb{R})$ una aplicación lineal, continua y separadora. Entonces existen una aplicación $h : Y \to X$ y una constante $\beta_y \neq 0$ tales que $\delta_y \circ T = \beta_y \delta_{h(y)}$, donde $h(y) := supp(\delta_y \circ T)$.

1.3.2. Espacios de Banach

Los siguientes resultados de [69] nos serán de utilidad en secciones posteriores. Comenzamos por la definición de ser separadora en espacios de funciones continuas evaluadas en un espacio de Banach:

Definición 1.3.10 *Sean E, F espacios de Banach y $H : C(X, E) \longrightarrow F$ una aplicación lineal. Se dice que H es una aplicación* separadora*, si dadas f, $g \in C(X, E)$ tales que $||f(x)||||g(x)|| = 0$ para todo $x \in X$, entonces $||H(f)||||H(g)|| = 0$.*

Las siguientes definiciones han sido extraídos de [46]:

Para una $f \in C(X, \mathbb{R})$, se denotará por f^β y f^ν a las extensiones continuas de f a la compactación de Stone-Čech βX y a la realcompactación νX de X, respectivamente. Recordamos que un par (Y, c), donde Y es compacto y $c : X \to Y$ es una inmersión topológica de X en Y, se dice que es una *compactación* del espacio X, si $\overline{c(X)} = Y$. La compactación mayor de un espacio topológico completamente regular X es la llamada *compactación de Stone-Čech* βX de X. Se dice que un espacio topológico X es *realcompacto* si es completamente regular y no existe otro espacio completamente regular X' que cumpla las siguientes dos condiciones:

1. Existe una inmersión homeomorfa $\tau : X \to X'$ tal que $\tau(X) \neq \overline{\tau(X)} = X'$.

2. Para toda función continua real-valuada $f : X \to \mathbb{R}$ existe una función continua $f' : X' \to \mathbb{R}$ tal que $f' \circ \tau = f$.

Entonces, para cada espacio topológico completamente regular X podemos construir un único espacio realcompacto, salvo homeomorfismos, que verifica:

1. existe una inmersión homeomorfa $\nu : X \to \nu X$ tal que $\overline{\nu(X)} = \nu X$.

2. para toda función continua $f : X \to \mathbb{R}$ ($f : X \to Y$, donde Y es un espacio realcompacto) existe una función continua $f' : \nu X \to \mathbb{R}$ ($f' : \nu X \to Y$) tal que $f' \circ \nu = f$.

El espacio νX recibe el nombre de *realcompactación de Hewitt* de X.

De nuevo, de [69] obtenemos:

Definición 1.3.11 *Sea $H : C(X,E) \longrightarrow F$ una aplicación lineal, con E y F espacios de Banach.*

1. *Un punto $p \in X$ se dice que es* soporte débil *para la aplicación separadora H, si para cualesquiera $g \in C(X,E)$ y $U \in \mathcal{E}(p)$ en βX tales que $f = 0$ en $U \cap X$ implica que $Hf = 0$.*

2. *Un punto $p \in X$ se dice que es* soporte *para la aplicación separadora H, si para cualquier $g \in C(X,E)$ tal que $f^\nu(p) = 0$ implica que $Hf = 0$.*

Recordamos que, si $e \in E$, entonces denotaremos por $\overline{\mathbf{e}}$ a la aplicación constante de X en E que a cada $x \in X$ le asocia el elemento e.

Nota 1.3.12 *Cuando p sea un soporte para H, se sigue que $Hf = H(\overline{\mathbf{f(p)}})$ para toda $f \in C(X,E)$.*

-Demostración-
Sea $f \in C(X,E)$. Llamamos $g := f - \overline{\mathbf{f(p)}}$, luego $g(p) = 0$. Como p es soporte para H, se tiene que $Hg = 0$. Esto quiere decir que $H(f - \overline{\mathbf{f(p)}}) = 0$ y al ser H lineal, $H(f) - H(\overline{\mathbf{f(p)}}) = 0$, luego $H(f) = H(\overline{\mathbf{f(p)}})$. $\square$

Los siguientes dos resultados se corresponden al teorema 2.1 y al corolario 2.2 de [69].

Teorema 1.3.13 *Si $H : C^*(X,E) \longrightarrow F$ es una aplicación separadora, donde $C^*(X,E)$ es el subespacio de funciones continuas con rango relativamente compacto, existe un único soporte débil $p_H \in \beta X$ para H.*

Corolario 1.3.14 *Si la aplicación separadora $H : C^*(X,E) \longrightarrow F$ es continua, entonces $p_H \in X$ y es un soporte para H.*

Del siguiente resultado, una implicación será útil en capítulos posteriores. Es por ello que incluimos la demostración. Se corresponde con el teorema 2.4 de [69].

Teorema 1.3.15 *Sea X un espacio topológico realcompacto y sean E, F espacios de Banach. Entonces la aplicación lineal separadora $H : C(X,E) \longrightarrow F$ es continua, si se dan las siguientes afirmaciones:*

1. *$\forall f \in C(X,E)$ que no se anule se tiene que $Hf \neq 0$.*
2. *$H(C(X,E)) \subseteq H(\overline{E})$, donde $\overline{\mathbf{E}}$ denota el conjunto de las aplicaciones constantes de X en E.*
3. *$H_{|\overline{\mathbf{E}}}$ es continua.*

Si además, $H_{\overline{\mathbf{E}}}$ es inyectiva, entonces se da la implicación inversa, incluso si X no es realcompacto.

-Demostración-
La implicación que será útil en adelante es la siguiente:
($\Rightarrow$) Supongamos que H es continua y que restringida a $\overline{\mathbf{E}}$ es inyectiva. Que 3. se cumple es evidente. Veamos las demás afirmaciones:

2. Como H es continua, el soporte de H, p, que existe por el teorema 1.3.13, pertenece a X(corolario 1.3.14) y verifica que para cualquier $f \in C(X,E)$ tal que $f(p) = 0$ se tiene que $Hf = 0$, además de que $Hf = H(\overline{f(p)})$. Por tanto, ya hemos llegado a lo que buscábamos.

1. Sea $f \in C(X,E)$ que no se anule, es decir, que existe $r > 0$ tal que $||f(x)|| \geq r > 0$ para todo $x \in X$. En particular, lo obtenemos para $x = p$ y $||f(p)|| \geq r$.

Procedemos por reducción al absurdo. Supongamos que $H(f) = 0$ para esta aplicación f. Como H es lineal:

$$0 = ||H(f)|| = ||f(p)H(\overline{1})|| = ||f(p)||||H(\overline{1})|| > r||H(\overline{1})||,$$

con lo que $||H(\overline{1})|| = 0$, i.e., $H(\overline{1}) = 0$. Sea $g \in C(X,E)$; sabemos que $H(g) = g(p)H(\overline{1})$, luego $H(g) = 0$ para todo $g \in C(X,E)$. Pero H no es la aplicación cero. Contradicción. Por tanto, $H(f) \neq 0$.

□

Más adelante utilizaremos la estructura del siguiente resultado, cuya demostración podemos encontrar en el lema 3.3 de [69], para probar otro muy parecido (en el Capítulo 3).

Lema 1.3.16 *Sea $H : C(X,E) \longrightarrow C(Y,F)$ una aplicación separadora con E, F espacios de Banach. Si $\delta_y \circ H$ es continua para todo $y \in Y$, entonces la aplicación asociada a H*

$$\begin{aligned} \breve{H} : Y &\longrightarrow \mathcal{L}(E,F) \\ y &\longmapsto \breve{H}(y), \end{aligned}$$

donde $\breve{H}(y)(e) = (\delta_y \circ H)(\overline{e})$ para todo $e \in E$, es continua.

El anterior lema da pie a este teorema que habla de la continuidad de H (Teorema 3.4 de [69]).

Teorema 1.3.17 *Sea $H : C(X,E) \longrightarrow C(Y,F)$ una aplicación separadora con E, F espacios de Banach. Entonces:*

1. *H es continua si, y sólo si, $\delta_y \circ H$ es continua para todo $y \in Y$.*
2. *Si H es continua, entonces $(Hf)(y) = (\breve{H}y)(\overline{f(h(y))})$ para todo $y \in Y$ y $f \in C(X,E)$, donde $\breve{H}$ tiene la forma del Lema 1.3.16.*

1.4. C^*-álgebras

Introduciremos algunos conceptos relativos a las álgebras de Banach y otros resultados que nos ayudarán a la hora de tratar las C^*-álgebras. La mayoría de éstos se han extraído de [40], [41], [95] y [114].

Comenzamos esta sección con una serie de resultados básicos acerca de las álgebras de Banach conmutativas y la teoría de Gelfand, para después describir la teoría de las representaciones de álgebras sobre un espacio de Hilbert y relacionarla con la teoría de la C^*-álgebras de grupo.

1.4.1. Preliminares

Usaremos el término *álgebra* para denotar un álgebra lineal asociativa la cual tendrá por escalares el cuerpo de los números complejos, mientras no se diga lo contrario.

Definición 1.4.1 *Un álgebra A se dice que es un* álgebra normada*, si tiene una norma que hace que sea un espacio lineal normado cumpliendo ésta las siguientes propiedades:*

(i) $||ab|| \leq ||a|| \cdot ||b||$.

(ii) si A tiene identidad 1_A, entonces $||1_A|| = 1$.

Definición 1.4.2 *Sea A un álgebra normada. Se llama* unidad aproximante *de A a una familia $(u_i)_{i \in I} \subseteq A$ que posee las propiedades siguientes:*

(a) $||u_i|| \leq 1$ *para todo* $i \in I$.

(b) $||u_i x - x|| \rightsquigarrow 0$ *y* $||x u_i - x|| \rightsquigarrow 0$ *para todo* $x \in A$.

Si damos un paso hacia adelante, tenemos la siguiente definición:

Definición 1.4.3 *Un* álgebra de Banach A *es un álgebra sobre el cuerpo de los números complejos en general, cuya estructura lineal forma un espacio de Banach y el producto satisface la siguiente condición:*

$$||xy|| \leq ||x|| ||y|| \ \forall x, y \in A$$

Definición 1.4.4 *Por* involución *o* C^*-operación *sobre un álgebra de Banach A entendemos un anti-automorfismo lineal conjugado isométrico $x \to x^*$ de A en A tal que $x^{**} = x$ y $(xy)^* = y^* x^*$.*

Al elemento x^* lo llamamos conjugado *de $x \in A$.*

Un álgebra de Banach con involución recibe el nombre de $*$-álgebra de Banach.

Cuando un álgebra de Banach A tenga unidad 1_A, asumiremos que $||1_A|| = 1$ y en ese caso, recibirá el nombre de *unitaria*. Si un álgebra de Banach no tiene unidad, se le puede adjuntar de una forma sencilla (ver por ejemplo [95] ó [114]).

Un elemento $u \in A$ se dice que es *unitario*, si $uu^* = u^*u = 1_A$. El conjunto de todos los elementos unitarios de A es un grupo para la multiplicación y recibe el nombre de *grupo unitario* o *grupo de unitarios* de A. Lo denotaremos por $\mathcal{U}(A)$.

Definición 1.4.5 *Una C^*-*álgebra *es una $*$-álgebra de Banach cuya involución verifica*

$$||aa^*|| = ||a||^2 \quad (a \in A)$$

Un elemento $a \in A$ se dice que es *invertible*, si existe $b \in A$ tal que $ab = ba = 1_A$. El conjunto de todos los elementos invertibles de A se denota por A^{-1}.

Describimos a continuación algunas de las álgebras de Banach que nos serán de utilidad.

Ejemplos 1.4.6 *1. El espacio de Banach de las funciones complejas continuas sobre un espacio topológico compacto X.*

2. El espacio de Banach de las funciones complejas continuas sobre un espacio topológico localmente compacto X que se anulan en el infinito.

3. El espacio de todos los operadores lineales y continuos sobre un espacio de Hilbert H.

4. $L^1(\mathbb{R})$, $L^1(\mathbb{T})$, $l^1(\mathbb{Z})$ y más general, $L^1(G)$ con G un grupo abeliano localmente compacto.

-Descripción-

1. Denotamos por $C(X)$ al espacio de las funciones continuas complejas que tiene la norma usual, $||f|| := \sup_{x \in X} |f(x)|$. El producto se define puntualmente: $(fg)(x) := f(x)g(x)$, y la involución es la conjugación de los números complejos $f^*(x) := \overline{f(x)}$. Es fácil de ver que $C(X)$ es una C^*-álgebra conmutativa con identidad, que es la función e tal que $e(x) = 1$ para todo $x \in X$.

2. Denotamos por $C_0(X)$ a este espacio. Las operaciones algebraicas y la norma se definen como en el ejemplo anterior. De nuevo, $C_0(X)$ es una C^*-álgebra conmutativa, pero esta vez sin identidad.

3. Lo denotamos por $\mathcal{B}(H)$. Si $A \in \mathcal{B}(H)$, entonces llamamos A^* al adjunto usual de A. De esa forma, $\mathcal{B}(H)$ es una C^*-álgebra. Más aún, cualquier subálgebra cerrada $\mathcal{A}$ de $\mathcal{B}(H)$ que sea cerrada por adjuntos, es decir, $A^* \in \mathcal{A}$ siempre que $A \in \mathcal{A}$, y que sea cerrada en el sentido de la norma, es otro ejemplo de C^*-álgebra.

4. En primer lugar nos ocuparemos del espacio de Banach $L^1(\mathbb{R})$ de las funciones integrables con la medida de Lebesgue usual sobre la recta real y con la norma
$$||f||_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt.$$
El producto de dos funciones f y g viene definido como su convolución:
$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)g(t-s)ds.$$
Haciendo un cambio de variable, se comprueba que $f * g = g * f$, y usando los teoremas de Fubini y Hobson, se puede probar que
$$||f * g||_1 \leq ||f||_1 ||g||_1.$$
Se sigue entonces que $L^1(\mathbb{R})$ es un álgebra de Banach conmutativa, pero no es una C^*-álgebra, aunque se pueda definir una involución isométrica $f^*(t) := \overline{f(-t)}$.

El conjunto de las funciones integrables sobre $\mathbb{T}$, $L^1(\mathbb{T})$, se define de forma análoga. Si parametrizamos $\mathbb{T}$ de la siguiente forma: $\{\exp it : 0 \leq t \leq 2\pi\}$, podemos identificar funciones sobre $\mathbb{T}$ con funciones periódicas de periodo 2π sobre $\mathbb{R}$. La norma y el producto se definen como antes, excepto que los límites de integración son 0 y 2π.

$l^1(\mathbb{Z})$ es el espacio de sucesiones $\{\xi_n : -\infty < n < \infty\}$ tales que $\sum_{-\infty}^{\infty} |\xi_n|$ converge. La norma de una sucesión $x = (\delta_n)$ viene dada por
$$||x|| := \sum_{-\infty}^{\infty} |\delta_n|$$
y el producto de x con $y = (\eta_n)$ es $z = (\zeta_k)$, donde
$$\zeta_k = \sum_{-\infty}^{\infty} \delta_n \eta_{k-n}.$$

Todos estos ejemplos son casos especiales de la situación siguiente. Sobre cualquier grupo topológico abeliano localmente compacto G se puede definir una medida regular no negativa μ, la así llamada *medida de Haar* de G, queno es idénticamente 0 y que es invariante por traslaciones de la operación de grupo: para cualquier subconjunto medible A de G, entonces $\mu(Ax) = \mu(A)$, siendo $x \in G$. La medida de Haar es única, salvo productos por una constante (ver [67] ó [104]).

El conjunto $L^1(G)$ de las funciones complejas que son integrables respecto a la medida de Haar forma un álgebra de Banach bajo la norma

$$||f|| = \int_G |f(t)|dt$$

y con el producto

$$(f * g)(t) = \int_G f(s)g(s^{-1}t)ds.$$

$\square$

Nota 1.4.7 *Todas las C^*-álgebras están relacionadas con alguno de los ejemplos anteriores: las que son conmutativas serán como el ejemplo 1 ó 2, dependiedno de si tienen identidad o carecen de ella, y además, todas las C^*-álgebras están contenidas en $\mathcal{B}(H)$ del ejemplo 3, todos ellos del Ejemplo 1.4.6.*

Ahora ponemos nuestra atención sobre la teoría de Gelfand sobre la estructura de las álgebras de Banach conmutativas, una de las piezas clave en nuestro estudio. A partir de ahora, suponemos que A es un álgebra de Banach conmutativa.

Definición 1.4.8 *Un* funcional lineal multiplicativo, homomorfismo complejo *o* carácter *sobre A es un funcional lineal no nulo ϕ sobre A que verifica*

$$\phi(xy) = \phi(x)\phi(y) \ \forall x,\ y \in A$$

El conjunto de todos los caracteres o funcionales se denota por $\hat{A}$ o $\sigma(A)$ y recibe el nombre, entre otros, de espectro *de A.*

A continuación veremos algunas propiedades de los elementos del espectro de A.

Proposición 1.4.9 *Si $\phi \in \hat{A}$, entonces $K = \ker(\phi)$ es un ideal maximal de A y A/K es un cuerpo. Más aún, si A tiene identidad 1_A, entonces $\phi(1_A) = 1$.*

Proposición 1.4.10 *Todo $\phi \in \hat{A}$ es continuo; de hecho, $||\phi|| \leq 1$. Si A tiene unidad, entonces $||\phi|| = 1$.*

Proposición 1.4.11 *Si A tiene unidad 1_A, entonces existe una biyección entre el conjunto $\mathcal{M}$ de todos los ideales maximales propios de A y el conjunto de todos los homomorfismos complejos no nulos de A en $\mathbb{C}$.*

-Demostración-
Sea $M \in \mathcal{M}$. consideramos la composición de la aplicación natural cociente $A \to A/M$ y el homomorfismo del teorema de Gelfand-Mazur $A/M \to \mathbb{C}$. Entonces existe un homomorfismo no nulo ϕ_M de A en $\mathbb{C}$ con núcleo $\phi_M^{-1}(0) = M$.

Ahora supongamos que tenemos $\phi \in \widehat{A}$. Lo que vamos a probar es que el ideal maximal correspondiente es su núcleo $\phi^{-1}(0)$. Sean ϕ, $\psi \in \widehat{A}$ tales que $\phi^{-1}(0) \subseteq \psi^{-1}(0)$, entonces para todo $a \in A$,

$$a - \phi(a)1_A \in \phi^{-1}(0) \subseteq \psi^{-1}(0),$$

de tal forma que $0 = \psi(a - \phi(a)1_A) = \psi(a) - \phi(a)$, ya que $\psi(1_A) = 1$. Por tanto, $\phi = \psi$. Esto implica en primer lugar que para $\phi \in \widehat{A}$, $\phi^{-1}(0)$ es maximal, porque si $\phi^{-1}(0)$ fuera un subconjunto propio de un ideal maximal $M \in \mathcal{M}$, entonces el homomorfismo $\psi = \phi_M$ tendría un núcleo estrictamente más grande. En segundo lugar, tenemos en particular que si ϕ y ψ tienen el mismo núcleo, entonces son iguales. Así pues, la aplicación

$$\begin{array}{ccc} \widehat{A} & \longrightarrow & \mathcal{M} \\ \phi & \longmapsto & \phi^{-1}(0) \end{array}$$

es una biyección. $\square$

El espacio de homomorfismos complejos no nulos $\widehat{A}$ asociado al álgebra de Banach conmutativa A recibe el nombre de *espacio de estructura* de A, *espacio ideal maximal* o también *espectro* de A.

Para cada $\phi \in \widehat{A}$ y $a \in A$ tenemos un número complejo $\phi(a)$. Realmente, estamos trabajando con una aplicación $\widehat{A} \times A \to \mathbb{C}$. Mediante la siguiente definición, cambiamos un poco el punto de vista, pues fijamos $x \in A$ y los elementos de $\widehat{A}$ se convierten en la variable.

Definición 1.4.12 *Sea $x \in A$. Entonces definimos la siguiente aplicación:*

$$\begin{array}{rcl} \hat{x} : \hat{A} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \chi & \longmapsto & \chi(x), \end{array}$$

que recibe el nombre de transformada de Gelfand *de x.*

Veamos algunas propiedades de la transformada de Gelfand, en el caso que A sea un álgebra de Banach conmutativa con unidad.

Teorema 1.4.13 *La aplicación $a \mapsto \hat{a}$ es un homomorfismo algebraico de A en el conjunto de las funciones complejas sobre $\widehat{A}$.*

-Demostración-
Es pura rutina si tenemos en cuenta que cada elemento de $\widehat{A}$ es un homomorfismo. $\square$

Notemos que la función $\hat{a}$, con $a \in A$, en el álgebra $B(\widehat{A})$ de las funciones acotadas sobre el espectro de A, tiene por norma

$$||\hat{a}|| = \sup_{\phi \in \widehat{A}} |\hat{a}(\phi)|.$$

Así pues, $||\hat{a}|| \leq ||a||$ y la transformada de Gelfand es continua de A en $B(\widehat{A})$. Es además isométrica en el caso en que estemos trabajando con C^*-álgebras conmutativas.

Ahora vamos a introducir una topología sobre $\hat{A}$ de tal forma que cada una de las funciones $\hat{x} : \hat{A} \to \mathbb{C}$ sea continuo.

La *topología de Gelfand* sobre $\hat{A}$ se define como la topología más débil sobre $\hat{A}$ bajo la que todos las funciones $\hat{x}$ son continuas. Dados $\epsilon > 0$ y $F \subseteq A$ finito, un entorno básico típico de $\phi_0 \in \hat{A}$ tiene la forma siguiente

$$U_{F,\epsilon} := \{\phi \in \hat{A} : \ |\hat{x}(\phi) - \hat{x}(\phi_0)| < \epsilon \ \forall x \in F\}$$

Equivalentemente, la topología de Gelfand es la topología relativa que $\hat{A}$ hereda como subconjunto del espacio dual A^* con la topología débil estrella. La convergencia de sucesiones con esta topología viene dada por

$$\begin{aligned} \phi_n \to \phi \quad &\Leftrightarrow \quad \hat{a}(\phi_n) \rightsquigarrow \hat{a}(\phi) \text{ in } \mathbb{C}\ \forall a \in A \\ &\Leftrightarrow \quad \phi_n(a) \rightsquigarrow \phi(a)\ \forall a \in A, \end{aligned}$$

esto es, la convergencia de sucesiones con la topología de Gelfand es la convergencia puntual.

A partir de ahora, por espacio de estructura de un álgebra de Banach conmutativa A entenderemos el conjunto $\hat{A}$, que ya conocíamos, con la topología de Gelfand. Notemos que esta topología es Hausdorff. Como consecuencia, tenemos el siguiente resultado para el espectro de A:

Proposición 1.4.14 *El espacio de estructura $\hat{A}$ de A es un espacio localmente compacto Hausdorff. Si A tiene elemento identidad, entonces $\hat{A}$ es compacto, Pero, si A no tiene identidad, cada una de las funciones $\hat{x}$ de $\hat{A}$ se anula en el infinito.*

Finalmente, aquí tenemos este importante resultado:

Teorema 1.4.15 (Gelfand) *Dada un álgebra de Banach conmutativa A, la aplicación $x \to \hat{x}$, llamada la representación de Gelfand, es un homomorfismo de A en $C_0(\hat{A})$. Más aún, si $||\cdot||_\infty$ denota la norma supremo sobre $C_0(\hat{A})$, entonces $||\hat{x}||_\infty \geq ||x||$, y por tanto, $x \to \hat{x}$ es continua.*

Tenemos el resultado análoga para álgebras de Banach conmutativas con unidad.

Teorema 1.4.16 (Gelfand con unidad) *Dada un álgebra de Banach conmutativa A con unidad, la aplicación $x \to \hat{x}$, llamada la representación de Gelfand, es un homomorfismo de A en $C(\hat{A})$. Más aún, si $||\cdot||_\infty$ denota la norma supremo sobre $C(\hat{A})$, entonces $||\hat{x}||_\infty \geq ||x||$, y por tanto, $x \to \hat{x}$ es continua.*

En general, la representación de Gelfand no es ni inyectiva, ni sobreyectiva ni preserva la norma. Sin embargo, en el caso de una C^*-álgebra conmutativa se puede ver que ésta llega a ser un $*$-isomorfismo isométrico de A en $C_0(\hat{A})$.

Teorema 1.4.17 (Gelfand, Naimark) *Si A es una C^*-álgebra conmutativa, entonces la representación de Gelfand, definida en el teorema 1.4.15, $x \to \hat{x}$, es un $*$-isomorfismo isométrico de A en $C_0(\hat{A})$. En particular, $(x^*)^\wedge = \overline{\hat{x}}$ para todo $x \in A$.*

-Demostración-
Ver [41]. □

Al igual que antes, existe un teorema análogo para las C^*-álgebras de Banach conmutativas con unidad.

Teorema 1.4.18 (Gelfand, Naimark con unidad) *Si A es una C^*-álgebra conmutativa con unidad, entonces la representación de Gelfand, definida en el teorema 1.4.15, $x \to \hat{x}$, es un $*$-isomorfismo isométrico de A en $C(\hat{A})$. En particular, $(x^*)^\wedge = \overline{\hat{x}}$ para todo $x \in A$.*

1.4.2. Representaciones sobre un espacio de Hilbert

Definición 1.4.19 *Sea A un álgebra involutiva y sea H un espacio de Hilbert. Se llama* representación *de A sobre H a un morfismo del álgebra involutiva A sobre el álgebra involutiva $\mathcal{L}(H)$.*

Con otras palabras, una representación de A en $\mathcal{L}(H)$ es una aplicación $\pi : A \to \mathcal{L}(H)$ tal que

(a) $\pi(x+y) = \pi(x) + \pi(y)$

(b) $\pi(xy) = \pi(x)\pi(y)$

(c) $\pi(\lambda x) = \lambda\pi(x)$

(d) $\pi(x^*) = \pi(x)^*$

para x, $y \in A$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

La dimensión de H se llama *dimensión* de π y se denota por $\dim(\pi)$. El espacio H se denomina el *espacio* de π y se denota por H_π. Se dice además que dos representaciones π y π' de A sobre H y H', respectivamente, son equivalentes y se escribe $\pi \simeq \pi'$, si existe un isomorfismo U de H en H' que transforma $\pi(x)$ en $\pi'(x)$ para todo $x \in A$. De ahí viene la noción de *clase de representaciones*, aunque por comodidad del lenguaje se confundirá a menudo ambos términos.

Sea ahora una familia de representaciones sobre los espacios de Hilbert H_i. Llamamos H a la suma hilbertiana de los H_i. Si para todo $x \in A$, las normas $||\pi_i(x)||$ son finitas, como es el caso cuando A es un álgebra de Banach involutiva, entonces podemos formar el operador $\pi(x)$ sobre H que induce a $\pi_i(x)$ sobre cada H_i. Así pues, $x \mapsto \pi(x)$ es una representación de A sobre H llamada *suma hilbertiana* de las π_i y denotada por $\oplus_{i\in I}\pi_i$ o $\pi_1 \oplus \pi_2 \oplus \ldots \oplus \pi_n$, en caso de que sea una familia finita.

Proposición 1.4.20 *Sea π una representación de A sobre H. Sea ahora K el subespacio vectorial cerrado cerrado de H generado por los $\pi(x)\xi$, siendo $x \in A$ y $\xi \in H$. Sea además K' el subespacio vectorial cerrado de H formado por los $\xi \in H$ sobre los que se anulan todos los $\pi(x)$. Entonces K y K' son estables para $\pi(A)$ y $\pi(A)'$, ortogonales y de suma H.*

El subespacio K de la proposición anterior recibe el nombre de *subespacio esencial* de π. Además, se dice que π es *no degenerada* si $K = H$.

Veamos ahora un resultado extraído de [40] que asegura la existencia de una representación sobre un espacio de Hilbert de una C^*-álgebra:

Teorema 1.4.21 *Sea A una C^*-álgebra. Entonces existe una representación isométrica de A sobre un espacio de Hilbert.*

Proposición 1.4.22 *Sean A una C^*-álgebra y x un elemento de A. entonces las siguientes afirmaciones equivalen:*

1. *x es un elemento positivo de A.*

2. *Para toda representación π de A se tiene que $\pi(x) \geq 0$.*

3. *Toda forma positiva f sobre A (esto es, $f(a) \geq 0$ siempre que a sea un elemento positivo de A) verifica que $f(x) \geq 0$.*

Ahora vamos a dar forma al concepto de *álgebra envolvente*. Pero antes necesitamos un par de definiciones. Se dice que una representación $\pi : A \rightarrow$

$\mathcal{L}(H)$ de una álgebra involutiva A es *topológicamente irreducible*, si $H \neq 0$ y si los únicos subespacios vectoriales cerrados de H estables por $\pi(A)$ son 0 y el total H. Por otro lado, si el álgebra involutiva A es además normada, entonces se dice que una forma positiva continua f sobre A es *pura*, si $f \neq 0$ y si toda forma positiva continua sobre A mayorada por f tiene la estructura λf, con $\lambda \in [0,1]$.

Comenzamos, pues, por la siguiente proposición:

Proposición 1.4.23 *Sea A un álgebra de Banach involutiva con unidad aproximante. Llamamos R al conjunto de representaciones de A, R' al conjunto de las que son irreducibles, B al de las formas positivas continuas de norma menor o igual que 1 y P el conjunto de los estados puros de A. Entonces, para todo $x \in A$, se cumple:*

$$\sup_{\pi \in R} ||\pi(x)|| = \sup_{\pi \in R'} ||\pi(x)|| = \sup_{f \in B} f(x^*, x)^{\frac{1}{2}} = \sup_{f \in P} f(x^*, x)^{\frac{1}{2}}.$$

Llamamos $||x||'$ a cualquiera de los valores anteriores. Entonces se tiene que $||x||' \leq ||x||$. Además, la aplicación

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & ||x||' \end{array}$$

es una seminorma sobre A cumpliendo

$$||xy||' \leq ||x||' ||y||', \ ||x^*||' = ||x||', \ ||x^* x|| = ||x||'^2$$

para todos x, $y \in A$.

Llamamos I al conjunto de los $x \in A$ tales que $||x||' = 0$. Éste es un ideal por la izquierda y por la derecha auto-adjunto cerrado de A. La aplicación definida en la proposición 1.4.23 es una norma si partimos del cociente A/I en vez de todo el álgebra A. Además, A/I, dotado de esta norma, verifica todos los axiomas de las C^*-álgebras, aunque no es completo en general. La completación B de A/I es una C^*-álgebra y recibe el nombre de *C^*-álgebra envolvente* de A. La aplicación canónica de A en B es un morfismo de álgebras involutivas.

Teorema 1.4.24 *Sea A una C^*-álgebra. Entonces existe una familia $(\pi_i)_i$ de representaciones topológicamente irreducibles de A tales que $||x|| = \sup_i ||\pi_i(x)||$ para todo $x \in A$.*

Proposición 1.4.25 *Sean ahora A un álgebra de Banach involutiva con unidad aproximante, B la C^*-álgebra envolvente de A y τ la aplicación canónica de A sobre B. Entonces se tiene que:*

(i) Si π es una representación de A, entonces existe una única representación ρ de B tal que $\pi = \rho \circ \tau$; $\rho(B)$ es la C^*-álgebra generada por $\tau(A)$.

(ii) La aplicación $\pi \to \rho$ es una biyección del conjunto de las representaciones de A sobre el conjunto de representaciones de B.

(iii) Para que ρ sea no degenerada (topológicamente irreducible) es suficiente que π sea no degenerada (topológicamente irreducible).

1.4.3. C^*-álgebra de un grupo abeliano localmente compacto

Ahora vamos a intentar conectar la teoría de Gelfand y el análisis de Fourier sobre grupos. Los grupos más familiares y más importantes para el análisis de Fourier son la recta real $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$, los enteros $\mathbb{Z}$ (con la suma como operación) y $\mathbb{T}$, los complejos de módulo 1, con el producto como la operación de grupo. Consideramos un grupo abeliano localmente compacto el cual, tal y como hemos visto anteriormente, tiene una medida de Haar. En lo que resta de sección, todas las integraciones serán respecto de dicha medida de Haar sobre todo el grupo y además, $L^1(G)$ representará a todas estas funciones integrables sobre G. Recordamos que $L^1(G)$ es un álgebra de Banach con la convolucion como el producto,

$$(f * g)(t) := \int_G f(s)g(s^{-1}t)ds.$$

Así pues,

Teorema 1.4.26 $L^1(G)$ *es un álgebra conmutativa.*

-Demostración-
Se necesita el hecho de que dado un subconjunto B de G, entonces tanto B como $B^{-1} = \{x^{-1} : x \in B\}$ tiene la misma medida de Haar. $\square$

Lema 1.4.27 *Si $f \in L^1(G)$ y $g \in L^p(G)$, $1 \leq p \leq \infty$, entonces $(f * g)(y)$ existe casi por todas partes y $f * g \in L^p(G)$ con*

$$||f * g||_p \leq ||f||_1 ||g||_p.$$

Este resultado muestra, en particular, que si $T_f : L^2(G) \to L^2(G)$ se define por $T_f(g) = f * g$, entonces la aplicación $f \mapsto T_f$ es continua de $L^1(G)$ en $\mathcal{B}(L^2(G))$. Es fácil de ver que esta aplicación es un homomrfismo algebraico y que, si f^* viene definida por $f^*(x) = \overline{f(x^{-1})}$, entonces $T_f^* = T_{f^*}$.

Lema 1.4.28 *La aplicación de Gelfand sobre $L^1(G)$ es inyectiva.*

-Demostración-
Es suficiente probar que si $f \in L^1(G)$ es no nula, entonces $\nu(f) \neq 0$, siendo $\nu(f)$ el radio espectral de $f \in L^1(G)$, i.e.,

$$\nu(f) = \text{máx}\,\{|\lambda| : \ \lambda \in \sigma(f)\},$$

donde $\sigma(f) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ f - \lambda I \text{ no tiene inverso}\}$ es el espectro del elemento $f \in L^1(G)$.

$\square$

Vamos a establecer una correspondencia entre $\widehat{G}$, el grupo abeliano formado por los homomorfismos continuos de G en $\mathbb{T}$, y el espacio de estructura o espectro de $L^1(G)$. Para toda $f \in L^1(G)$ definimos la aplicación f_y, con $y \in G$, de la siguiente forma, $f_y(x) := f(y^{-1}x)$. Es fácil de ver que, bajo estas circunstancias,

$$\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & L^1(G) \\ g & \longmapsto & f_g \end{array}$$

es continua.

Teorema 1.4.29 *Sea $\xi \in \widehat{G}$. Entonces la función*

$$\begin{array}{rcl} \phi_\xi : L^1(G) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_G f(x)\overline{\xi(x)}dx \end{array}$$

es un homomorfismo no nulo. Más aún, la aplicación

$$\begin{aligned}\Psi : \widehat{G} &\longrightarrow \sigma(L^1(G))\\ \xi &\longmapsto \phi_\xi\end{aligned}$$

es una biyección.

-Demostración-
Como los caracteres de G son continuos y acotados, no hay problema respecto a la integrabilidad en la definición de ϕ_ξ. Es claro que ϕ_ξ es lineal sobre $L^1(G)$. Dadas f, $g \in L^1(G)$, si usamos la propiedad de ser invariante de la medida de Haar, el teorema de Fubini y el hecho de ser un homomorfismo cada elemento de $\widehat{G}$, tenemos que

$$\begin{aligned}\phi_\xi(f*g) &= \int_G (f*g)(x)\overline{\xi(x)}dx = \int_G (\int_G f(y)g(y^{-1}x)dy)\overline{\xi(x)}dx\\ &= \int_G\int_G f(y)g(y^{-1}x)\overline{\xi(x)}dydx = \int_G f(y)(\int_G g(y^{-1}x)\overline{\xi(x)}dx)dy\\ &= \int_G f(y)(\int_G g(z)\overline{\xi(yz)}dz)dy = \int_G f(y)\overline{\xi(y)}dy\int_G g(z)\overline{\xi(z)}dz\\ &= \phi_\xi(f)\phi_\xi(g)\end{aligned}$$

Luego, para cada $\xi \in \widehat{G}$, ϕ_ξ es un homomorfismo. Es fácil de ver que si $\xi \neq 0$, entonces $\Psi(\xi) = \phi_\xi \neq 0$, con lo que Ψ es inyectiva. Veamos la sobreyectividad de esta aplicación. Sea, pues, $\phi \in \sigma(L^1(G))$, entonces ϕ es un homomorfismo no nulo de $L^1(G)$ en $\mathbb{C}$ y, como el dual topológico de $L^1(G)$ es $L^\infty(G)$, tenemos que existe $\alpha \in L^\infty(G)$ tal que

$$\phi(f) = \int_G (f(x)\overline{\alpha(x)})dx.$$

Sea ahora $g \in L^1(G)$ tal que $\phi(g) \neq 0$. Entonces

$$\begin{aligned}\phi(f)\phi(g) &= \phi(f*g) = \int_G (f*g)(x)\overline{\alpha(x)}dx\\ &= \int_G(\int_G f(y)g(y^{-1}x)dy)\overline{\alpha(x)}dx = \int_G\int_G f(y)g(y^{-1}x)\overline{\alpha(x)}dydx\\ &= \int_G f(y)(\int_G g(y^{-1}x)\overline{\alpha(x)}dx)dy = \int_G f(y)\phi(g_{y^{-1}})dy,\end{aligned}$$

es decir, $\phi(f) = \frac{1}{\phi(g)}\int_G f(y)\phi(g_{y^{-1}})dy = \int_G f(y)\frac{\phi(g_{y^{-1}})}{\phi(g)}dy$. Definimos entonces,

$$\overline{\xi(y)} := \frac{\phi(g_{y^{-1}})}{\phi(g)}.$$

Lo que nos preguntamos ahora es si éste pertenece a $\widehat{G}$. La continuidad es clara y que es un homomorfismo se deduce de los siguientes cálculos:

$$g_{x^{-1}} * g_{y^{-1}} = g_{(xy)^{-1}} * g,$$

luego $\phi(g_{x^{-1}})\phi(g_{y^{-1}}) = \phi(g_{(xy)^{-1}})\phi(g)$ y de aquí se obtiene que $\xi(xy) = \xi(x)\xi(y)$. Falta comprobar que $|\xi(x)| = 1$ para todo $x \in G$. Como $\phi(f) = \int_G f(y)\overline{\xi(x)}dx$ y $\phi(f)| \leq \nu(f) \leq ||f||$, entonces $|\xi(y)| \leq 1$, salvo en un conjunto de medida 0. Pero acabamos de ver que ξ es continua, luego $|\xi(y)| \leq 1$ para todo $y \in G$. Además,

$$1 \geq |\xi(y^{-1})| = |\overline{\xi(y)}| = |\xi(y)|^{-1},$$

es decir que $|\xi(y)| = 1$ para todo $y \in G$. Por tanto, $\xi \in \widehat{G}$ y tal y como está definido, verifica que $\mu(\xi) = \phi$. □

Nota 1.4.30 *El cociente* $\frac{\phi(g_{y^{-1}})}{\phi(g)}$ *es independiente de la elección de* $g \in L^1(G)$*, siempre que* $\phi(g) \neq 0$*. Este hecho se puede deducir también de la relación* $f * g_y = f_y * g$*.*

El grupo $\widehat{G}$ recibe una topología de la topología de Gelfand sobre el espectro de $L^1(G)$ via la biyección del teorema 1.4.29. Esto es, un conjunto A es abierto en $\widehat{G}$ si, y sólo si, $\{\phi_\xi : \xi \in A\}$ es abierto en el espectro de $L^1(G)$. Esta topología hace que $\widehat{G}$ sea un grupo topológico y coincide con el concepto ya conocido de *grupo dual* de G:

Entonces, si $f \in L^1(G)$, su transformada de Gelfand es una función continua con dominio el espectro de $L^1(G)$. Como éste y el grupo dual de G son homeomorfos, tal y como acabamos de comentar, podemos ver la transformada de f como una función continua sobre $\widehat{G}$. Así pues,

$$\widehat{f}(\xi) = \phi_\xi(f) = \int_G f(x)\overline{\xi(x)}dx.$$

Como $L^1(G)$ es un álgebra de Banach involutiva y admite además una unidad aproximante, se puede formar su C^*-álgebra envolvente.

Definición 1.4.31 *Se define la* C^*-álgebra de G *como la* C^**-álgebra envolvente de* $L^1(G)$ *y se denota por* $C^*(G)$*.*

Para $f \in L^1(G)$, tenemos que $||f||' = \sup ||\pi(f)|| \leq ||f||_1$ donde π recorre el conjunto de las representaciones no degeneradas de $L^1(G)$ o equivalentemente, el conjunto de las representaciones unitarias continuas de G. Así pues, $f \mapsto ||f||'$ es una seminorma sobre $L^1(G)$ (proposición 1.4.23) y así mismo una norma, para la que $L^1(G)$ admite una representación inyectiva. La C^*-álgebra de G no es otra que la completación de $L^1(G)$ para esa norma. De acuerdo con la Proposición 1.4.25 (en [40]) y el apartado 13.3.5 (en [40]), donde se prueba que existe una correspondencia biyectiva entre las representaciones unitarias continuas de G y las representaciones no degeneradas de $L^1(G)$, entonces existe de nuevo una biyección entre las representaciones unitarias continuas de G y las representaciones no degeneradas de $C^*(G)$. Todo lo que se haya dicho en 13.3.5 para $L^1(G)$ es válido para $C^*(G)$.

Entonces, si G es un grupo topológico localmente compacto, éste tiene asociada una C^*-álgebra $C^*(G)$. Si, además, G es un grupo abeliano, entonces su C^*-álgebra conmutativa asociada $C^*(G)$ puede identificarse con

$$C_0(C^*(G)^\wedge, \mathbb{C}) = C_0(\widehat{G}, \mathbb{C}) \text{ (teorema 1.4.17).}$$

En el caso en que estemos trabajando con un grupo LCA discreto, tendremos que $C_0(\widehat{G}, \mathbb{C}) = C(\widehat{G}, \mathbb{C})$, ya que $\widehat{G}$ se convierte en un grupo compacto. Llegados a este punto, merece la pena aclarar que cuando escribimos $\widehat{G}$, sí que nos estamos refiriendo al grupo dual de G. De hecho, como podemos identificar G con una C^*-álgebra que a su vez, es isomorfa isométricamente a $C(C^*(G)^\wedge, \mathbb{C})$ que tiene unidad, entonces $C^*(G)$ verifica las condiciones de la Proposición 1.4.10. Luego todo homomorfismo $\phi \in (C^*(G))^\wedge$ es continuo y tiene norma igual a 1, i.e., todo homomorfismo de $C^*(G)$ (de G) en $\mathbb{C}$ es continuo y su norma tiene el valor 1, luego el espectro de $C^*(G)$ coincide con el grupo dual de G.

De esta forma, el álgebra $C(\widehat{G}, \mathbb{C})$ tiene unidad y su grupo de unitarios resulta ser $C(\widehat{G}, \mathbb{T})$: la operación $*$ en el álgebra $C(\widehat{G}, \mathbb{C})$ es la conjugación. Entonces, si $f \in \mathcal{U}(C^*(G)$, tenemos que

$$ff^* = f^*f = 1,$$

luego $\overline{f} = f^* = f^{-1}$ y eso solamente ocurre con los elementos de $\mathbb{T}$. Esto es, si $f \in C(\widehat{G}, \mathbb{C})$ verifica que su aplicación inversa es igual a su conjugada, entonces f toma valores en $\mathbb{T}$. Por tanto, el grupo de unitarios de una C^*-álgebra de grupo $C^*(G)$ es $C(\widehat{G}, \mathbb{T})$.

Capítulo 2

Isomorfismos de grupos de funciones continuas: el grupo unitario de una C^*-álgebra de grupo

2.1. Introducción

Se necesita la estructura de álgebra o de anillo de $C(X,\mathbb{R})$ para caracterizar al espacio topológico X, ya que por el Teorema clásico de Milutin, $C(X,\mathbb{R})$ como espacio vectorial topológico no lo hace. Dicho teorema afirma lo siguiente (ver, por ejemplo, [119]):

Teorema 2.1.1 (Milutin) *Sea X un espacio topológico compacto metrizable no numerable. Entonces $C(X,\mathbb{R})$ es isomorfo a $C([0,1],\mathbb{R})$ como espacio de Banach.*

Así pues, espacios de funciones continuas como $C([0,1]\times[0,1],\mathbb{R})$ y $C([0,1]\cup\{2\},\mathbb{R})$ son isomorfos entre ellos, mientras que los espacios $[0,1]\times[0,1]$ y $[0,1]\cup\{2\}$ no son homeomorfos.

Con los resultados que mostramos en las siguientes secciones, queremos enfatizar que, al sustituir $\mathbb{R}$ por el grupo $\mathbb{T}$, la estructura de grupo topológico del espacio de las funciones continuas de un espacio topológico en $\mathbb{T}$,

$C(X, \mathbb{T})$, sí que puede llegar a dar información sobre el espacio X, al contrario de lo que ocurre cuando se trabaja con $C(X, \mathbb{R})$ cuya estructura de espacio vectorial no aporta información sobre X. En concreto, veremos que la existencia de un isomorfismo topológico entre $C(X, \mathbb{T})$ y $C(Y, \mathbb{T})$ con X e Y espacios topológicos compactos implica la existencia de una relación entre X e Y. Podremos, a su vez, aplicar los resultados obtenidos para X e Y a grupos topológicos e incluso añadir aspectos nuevos, ya que todo grupo topológico localmente compacto abeliano G tiene una C^*-álgebra asociada $C^*(G)$ que a su vez es isomorfa al grupo de funciones continuas que toman valores en $\mathbb{C}$ sobre el grupo dual de G. En particular, si el grupo G es discreto y si consideramos el grupo unitario de $C^*(G)$, obtenemos que éste tiene la forma $C(\widehat{G}, \mathbb{T})$, $\widehat{G}$ compacto. De esta forma, veremos que el hecho de que exista alguna relación entre dos C^*-álgebras (asociadas a grupos discretos) puede influir en la relación entre sus grupos unitarios correspondientes, así como en la relación entre los grupos discretos.

Pero antes de nada, damos a conocer una serie de resultados obtenidos o adaptados de [119].

Definición 2.1.2 *Sean X un espacio topológico y $x_0 \in X$.*

$$C_\bullet(X, \mathbb{R}) := \{f \in C(X, \mathbb{R}) : \; f(x_0) = 0\}$$

Lema 2.1.3 *Sean X_1 y X_2 dos subespacios cerrados de un espacio de Banach X, ambos de codimensión 1. Entonces X_1 y X_2 son isomorfos.*

-Demostración-
Se puede encontrar este Lema en el capítulo II.B de [119]. □

Como aplicación directa del Lema 2.1.3, obtenemos el siguiente resultado auxiliar:

Lema 2.1.4 *Sean K_1 y K_2 dos espacios topológicos compactos metrizables no numerables. Entonces:*

$$C_\bullet(K_1, \mathbb{R}) \cong C_\bullet(K_2, \mathbb{R}), \tag{2.1}$$

-Demostración-
Para llegar a (2.1), utilizaremos el Lema 2.1.3. En primer lugar, llamamos M al isomorfismo del teorema 2.1.1 entre $C(K_1,\mathbb{R})$ y $C(K_2,\mathbb{R})$ y lo que falta comprobar, pues, es que tanto $C_\bullet(K_1,\mathbb{R})$ como $M^{-1}(C_\bullet(K_2,\mathbb{R}))$ tienen codimensión 1 en $C(K_1,\mathbb{R})$. Es suficiente que probemos que la codimensión de $C_\bullet(K_1,\mathbb{R})$ en $C(K_1,\mathbb{R})$ es 1, ya que M es un isomorfismo y mantiene el valor de la codimensión. Llamamos σ a la siguiente aplicación:

$$\begin{array}{rcl} \sigma : C(K_1,\mathbb{R}) & \to & C_\bullet(K_1,\mathbb{R}) \\ f & \to & f - f(x_0). \end{array}$$

El núcleo de σ está formado por las aplicaciones constantes sobre K_1 y además es sobreyectiva. Luego

$$\frac{C(K_1,\mathbb{R})}{\langle \overline{1}_{C(K_1,\mathbb{R})}\rangle_{\mathbb{R}}} \cong \sigma(C(K_1,\mathbb{R})) = C_\bullet(K_1,\mathbb{R}),$$

donde $\overline{1}_{C(K_1,\mathbb{R})}$ es la aplicación constante igual a 1 sobre K_1. Por tanto, $C_\bullet(K_1,\mathbb{R})$ es un hiperplano de $C(K_1,\mathbb{R})$. De la misma forma se probaría que $C_\bullet(K_2,\mathbb{R})$ es un hiperplano de $C(K_2,\mathbb{R})$. Como M es un isomorfismo, conserva las dimensiones y obtenemos, por tanto, que $M^{-1}(C_\bullet(K_2,\mathbb{R}))$ tiene codimensión igual a 1 en $C(K_1,\mathbb{R})$.

En ese caso, por el Lema 2.1.3,

$$C_\bullet(K_1,\mathbb{R}) \cong M^{-1}(C_\bullet(K_2,\mathbb{R})),$$

o lo que es lo mismo,

$$M(C_\bullet(K_1,\mathbb{R})) \cong C_\bullet(K_2,\mathbb{R}).$$

Por tanto, $C_\bullet(K_1,\mathbb{R}) \cong C_\bullet(K_2,\mathbb{R})$, cualesquiera que sean K_1, K_2 espacios compactos metrizables no numerables. □

Proposición 2.1.5 *Sea X un espacio topológico compacto metrizable no numerable, entonces*

$$C_\bullet(X,\mathbb{R}) \cong C(X,\mathbb{R})$$

-Demostración-
En el Lema 2.1.4 hemos visto que dados dos espacios compactos metrizables no numerables K_1 y K_2, entonces el siguiente isomorfismo es cierto:

$$C_\bullet(K_1, \mathbb{R}) \cong C_\bullet(K_2, \mathbb{R}).$$

Como el conjunto de Cantor, que denotaremos por Δ, tiene esas propiedades, es decir, es compacto, metrizable y no numerable, obtenemos que para cualquier compacto metrizable no numerable X,

$$C_\bullet(X, \mathbb{R}) \cong C_\bullet(\Delta, \mathbb{R}) \text{ (Lema 2.1.4)}, \tag{2.2}$$

donde $C_\bullet(\Delta, \mathbb{R}) = \{f \in C(\Delta, \mathbb{R}) : \ f(1) = 0\}$. Además, en [119] se demuestra que $C_\bullet(\Delta, \mathbb{R}) \cong C(\Delta, \mathbb{R})$ (Ejemplo 22 (c) y Lema 23 del capítulo II.B de [119]). De esta forma, en (2.2) se tiene que

$$C(\Delta, \mathbb{R}) \cong C_\bullet(X, \mathbb{R}),$$

para cualquier espacio compacto metrizable no numerable X. Por tanto, por el Teorema 2.1.1 obtenemos que $C_\bullet(X, \mathbb{R})$ es isomorfo a $C(X, \mathbb{R})$ para cualquier espacio compacto metrizable no numerable X. $\square$

Recordamos del Capítulo 1 que el subgrupo $C^o(X, \mathbb{T})$ de $C(X, \mathbb{T})$, se corresponde con la imagen de la aplicación exponencial

$$\begin{array}{rcl} \exp : C(X, \mathbb{R}) & \longmapsto & C(X, \mathbb{T}) \\ f & \longmapsto & e^{2\pi i f}, \end{array}$$

es decir, $\exp(C(X, \mathbb{R})) = C^o(X, \mathbb{T})$. De esta forma,

Definición 2.1.6 *Sean X un espacio topológico y $x_0 \in X$.*

$$C^o_\bullet(X, \mathbb{T}) := \{f \in C^o(X, \mathbb{T}) : \ f(x_0) = 1_{\mathbb{T}}\}$$

En palabras, denotaremos por $C^o_\bullet(X, \mathbb{T})$ a las funciones elevables que se anulan en un punto previamente dado.

El siguiente es el primero de una serie de resultados que describen la estructura de $C^o(X, \mathbb{T})$. Cabe destacar que éste se corresponde con el Lema 7 de [100], donde aparece sin prueba.

Proposición 2.1.7 *Sea X un espacio topológico compacto. Entonces tenemos que*

$$C^o(X,\mathbb{T}) \cong C^o_\bullet(X,\mathbb{T}) \times \mathbb{T}.$$

-Demostración-
Definimos la siguiente aplicación

$$\begin{array}{rcl} \lambda : C^o(X,\mathbb{T}) & \longrightarrow & C^o_\bullet(X,\mathbb{T}) \times \mathbb{T} \\ g & \longmapsto & (g \cdot g(x_0)^{-1}, g(x_0)), \end{array}$$

y veamos que es un isomorfismo:

1. λ es un homomorfismo: evidente.

2. λ es inyectiva:

   Sean pues f y $g \in C^o(X,\mathbb{T})$ tales que $\lambda(f) = \lambda(g)$. Entonces, de la segunda coordenada se obtiene que $f(x_0) = g(x_0)$ y consecuentemente, de la primera tenemos que $f = g$.

3. λ es sobreyectiva:

   Sea $(g,z) \in C^o_\bullet(X,\mathbb{T}) \times \mathbb{T}$, luego $g(x_0) = 1_\mathbb{T}$. Entonces definimos la siguiente aplicación $f := t_z \circ g$, donde

   $$\begin{array}{rcl} t_z : \mathbb{T} & \rightarrow & \mathbb{T} \\ t & \mapsto & t \cdot z \end{array}$$

   es la aplicación traslación. Veamos que f verifica $\lambda(f) = (g,z)$. Antes de nada, hay que comprobar que $f \in C^o(X,\mathbb{T})$. Sabemos que $f = t_z \circ g$, y como $g \in C^o_\bullet(X,\mathbb{T})$, existe $g' \in C(X,\mathbb{R})$ tal que $g = \exp \circ g'$, luego

   $$f = t_z \circ \exp \circ g'.$$

   Además, existe $z' \in \mathbb{R}$ tal que $z = \exp(z')$, luego $t_z \circ \exp = \exp \circ t^\mathbb{R}_{z'}$, donde

   $$\begin{array}{rcl} t^\mathbb{R}_{z'} : \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ r & \mapsto & r + z' \end{array}$$

   es la aplicación traslación en $\mathbb{R}$. Así pues,

   $$f = \exp \circ (t^\mathbb{R}_{z'} \circ g')$$

y por tanto, f es factorizable por $\mathbb{R}$. La aplicación f con esa forma verifica además $\lambda(f) = (ff(x_0)^{-1}, f(x_0)) = (g, z)$, luego λ es sobreyectiva.

4. λ es continua:

   Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C^o(X, \mathbb{T})$ convergente a $f \in C^o(X, \mathbb{T})$ con la topología de la convergencia uniforme. Entonces converge puntualmente, es decir, en todo punto $x \in X$ verifica que $f_n(x)$ converge a $f(x)$, en particular en $x = x_0$. Además, por ser $C(X, \mathbb{T})$ un grupo topológico, tenemos que $f_n f(x_0)^{-1}$ converge uniformemente a $ff(x_0)^{-1}$. Por tanto,

   $$\lambda(f_n) = (f_n f_n(x_0)^{-1}, f_n(x_0))$$

   converge a $\lambda(f) = (ff(x_0)^{-1}, f(x_0))$ y efectivamente, la aplicación λ es continua.

5. λ es abierta:

   Para cualquier par $(g, z) \in C^o_\bullet(X, \mathbb{T}) \times \mathbb{T}$, la antiimagen de éste por λ es $t_z \circ g$. Por tanto, si tenemos una sucesión $(f_n, z_n)_n \subseteq C^o_\bullet(X, \mathbb{T}) \times \mathbb{T}$ convergente a $1_{C^o_\bullet(X,\mathbb{T})}$, entonces hay que razonar que la sucesión $(t_{z_n} \circ f_n)_n$ cuyos elementos se corresponden con las antiimágenes de (f_n, z_n) para todo $n \in \mathbb{N}$, converge a la aplicación identidad $1_{C^o(X,\mathbb{T})}$. De esta forma, λ es abierta.

Así pues, $C^o(X, \mathbb{T})$ y $C^o_\bullet(X, \mathbb{T}) \times \mathbb{T}$ son isomorfos topológicamente. □

De nuevo, el siguiente resultado aparece en [100], de hecho es la Proposición 13, pero para un espacio topólogico X arcoconexo pseudocompacto.

Proposición 2.1.8 *Sea X un espacio topológico compacto conexo. Entonces la aplicación exponencial*

$$\begin{aligned} \exp : C_\bullet(X, \mathbb{R}) &\rightarrow C^o_\bullet(X, \mathbb{T}) \\ f &\mapsto e^{2\pi i f} \end{aligned}$$

es un isomorfismo.

-Demostración-
Cuando X es un espacio topológico compacto, la aplicación $\tilde{E} : \frac{C(X,\mathbb{R})}{C(X,\mathbb{Z})} \longrightarrow$

$C^o(X,\mathbb{T})$ es un isomorfismo topológico (Proposición 1.2.4); si X es, además, conexo, entonces lo que se obtiene es que

$$C^o(X,\mathbb{T}) \cong \frac{C(X,\mathbb{R})}{\mathbb{Z}}$$

donde $\mathbb{Z}$ representa a las aplicaciones constantes de X en $\mathbb{Z}$. Queremos probar que si restringimos $\exp : C(X,\mathbb{R}) \to C(X,\mathbb{T})$ a $C_\bullet(X,\mathbb{R})$, entonces esta restricción sí que es un isomorfismo topológico en su imagen. De igual forma, comprobaremos que $\exp(C_\bullet(X,\mathbb{R})) = C^o_\bullet(X,\mathbb{T})$ y ya habremos obtenido lo que buscamos.

En primer lugar, veamos que $\exp(C_\bullet(X,\mathbb{R})) \subseteq C^o_\bullet(X,\mathbb{T})$. Efectivamente, si $f \in C_\bullet(X,\mathbb{R})$, entonces $\exp_|(f)(x_0) = e^{2\pi i f(x_0)} = 1_\mathbb{T}$, porque $f(x_0) = 0$ por definición. Además, como la aplicación exponencial $\exp : C(X,\mathbb{R}) \to C^o(X,\mathbb{T})$ es continua, abierta (por ser X un espacio compacto) y sobreyectiva, entonces su restricción a $C_\bullet(X,\mathbb{R})$ también será continua y abierta.

En segundo lugar, comprobaremos que es sobreyectiva de $C_\bullet(X,\mathbb{R})$ en $C^o_\bullet(X,\mathbb{T})$. Sea $g \in C^o_\bullet(X,\mathbb{T})$, en prticular $g \in C^o(X,\mathbb{T})$, luego existe $g' \in C(X,\mathbb{R})$ tal que $e^{2\pi i g'} = g$. Además, $g(x_0) = 1_\mathbb{T}$, luego $g'(x_0) = z \in \mathbb{Z}$. Si $z \neq 0$, definimos $g'' := g' - z$ y ésta verifica que

$$g''(x_0) = z - z = 0 \text{ y } e^{2\pi i g''} = e^{2\pi i (g'-z)} = e^{2\pi i g'} = g.$$

Si $z = 0$, cogemos como antiimagen de g la aplicación g'. En cualquier caso, $g \in \exp(C_\bullet(X,\mathbb{R}))$. Por tanto, $\exp(C_\bullet(X,\mathbb{R})) = C^o_\bullet(X,\mathbb{T})$.

Sólo falta ver que $\exp_|$ es inyectiva. Sea $f \in \ker(\exp_|)$, luego $\exp_|(f) = \overline{1}_{C^o_\bullet(X,\mathbb{T})} = \overline{1}_{C^o(X,\mathbb{T})}$. Así pues, para todo $x \in X$, $e^{2\pi i f(x)} = 1_\mathbb{T}$ con lo que $f(X) \subseteq \mathbb{Z}$. Como X es compacto y conexo, f se reduce a un solo punto de $\mathbb{Z}$. Pero $f(x_0) = 0$, luego $f(X) = \{0\}$, es decir que

$$\exp_| : C_\bullet(X,\mathbb{R}) \to C^o_\bullet(X,\mathbb{T})$$

es un isomorfismo topológico, tal y como queríamos demostrar. □

A continuación, presentamos un resultado conocido acerca del grupo de cohomotopía, denotado por $\pi^1(X)$, de un espacio topológico compacto totalmente disconexo que nos será de utilidad a lo largo del capítulo. Cabe destacar que lo hemos obtenido como consecuencia de una serie de resultados de [100]. Recordamos que $\pi^1(X)$ para un espacio topológico cualquiera X es el conjunto que consiste en todas las clases de homotopía de las funciones continuas de X en $\mathbb{T}$. Para X completamente regular Hausdorff, podemos ver $\pi^1(X)$ como el cociente $C(X,\mathbb{T})/C^o(X,\mathbb{T})$, por ser la aplicación

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{J} : C(X,\mathbb{T}) & \to & \pi^1(X) \\ f & \mapsto & [f] \end{array}$$

sobreyectiva y satisface que toda aplicación $f \in C^o(X,\mathbb{T})$ es homotópica a $1_{C(X,\mathbb{T})}$, con lo que $\pi^1(X)$ puede dotarse de la topología canónica cociente. Si además, X es compacto, entonces $C^o(X,\mathbb{T})$ es un subgrupo abierto de $C(X,\mathbb{T})$, con lo que $\pi^1(X)$ hereda la topología discreta (en la Sección (1.2) del Capítulo 1).

Entonces, una caracterización de $C^o(X,\mathbb{T})$ es la siguiente, siendo X un espacio compacto:

Lema 2.1.9 *Sea* $f \in C(X,\mathbb{R})$. *Entonces* $\exp(f) \in C^o(X,\mathbb{T})$ *si, y sólo si,* $\exp(f)$ *es homotópica a la aplicación identidad* $1_{C(X,\mathbb{T})}$.

Así pues, probar que $\pi^1(X) = \{0\}$ será equivalente a probar que toda función continua f de X en $\mathbb{T}$ con la topología compacta abierta es elevable, luego tiene un logaritmo continuo, esto es, existe $f' \in C(X,\mathbb{R})$ tal que $\exp(f') = f$.

Lema 2.1.10 *Sea* X *un espacio topológico compacto totalmente disconexo. Entonces* $C(X,\mathbb{T}) = C^o(X,\mathbb{T})$.

-Demostración-
Sean $f \in C(X,\mathbb{T})$ y $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{T}$ la aplicación exponencial habitual. Lo que queremos probar es que existe una aplicación continua $f' : X \to \mathbb{R}$ tal que $f = \exp \circ f'$, con lo que $C(X,\mathbb{T}) = C^o(X,\mathbb{T})$. Esto implica de paso que $\pi^1(X)$ sólo se compone del elemento unidad, ya que estaremos probando que todas las funciones continuas de X en $\mathbb{T}$ son elevables.

Para probar esto, definimos el siguiente conjunto:

$$E := \{(x,r) \in X \times \mathbb{R} : \ f(x) = \exp(r)\},$$

que es distinto del conjunto vacío, porque exp es sobreyectiva. Entonces obtenemos que el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{p_2} & \mathbb{R} \\ {\scriptstyle p_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \exp} \\ X & \xrightarrow{f} & \mathbb{T} \end{array}$$

es conmutativo, donde p_1 y p_2 son las correspondientes proyecciones de E sobre X y $\mathbb{R}$, respectivamente. En primer lugar comprobaremos que tanto p_1 como p_2 son aplicaciones recubridoras. Lo haremos para p_1, análogamente se procedería con p_2. Sea $x \in X$, entonces tal y como está definido el diagrama obtenemos que existe $r \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \exp(r)$. Pero la aplicación exponencial sí que es recubridora; así pues, existe un entorno abierto $A \subseteq \mathbb{T}$ de $\exp(r)$ tal que

$$\exp^{-1}(A) = \cup_j V_j,$$

con los (V_j) abiertos disjuntos dos a dos, y además, $\exp_{|V_j} : V_j \to A$ es un homeomorfismo. De igual forma, A es un entorno también de $f(x)$ y como f es continua, tenemos que existe un entorno abierto W_x tal que $f(W_x) \subseteq A$. Entonces resta probar que

$$p_1^{-1}(W_x) = W_x \times (\cup_j V_j).$$

Una inclusión es obvia: sea, pues, $(w, v) \in W_x \times (\cup_j V_j)$, entonces $p_1(w, v) = w \in W_x$, luego $p_1^{-1}(W_x) \supseteq W_x \times (\cup_j V_j)$. Sea ahora $y \in W_x$, entonces $f(y) \in A$ y existirá un único j_0 tal que $\exp^{-1}(f(y)) \in V_{j_0}$, ya que exp es una aplicación recubridora. De esta forma, $p_1^{-1}(y) \in W \times V_{j_0}$, luego $p_1^{-1}(W_x) \subseteq W_x \times (\cup_j V_j)$. Efectivamente, se tiene que $p_1^{-1}(W_x) = W_x \times (\cup_j V_j) = \cup_j (W_x \times V_j)$, donde los abiertos $(W_x \times V_j)_j$ son disjuntos dos a dos y además,

$$p_{1_|} : W_x \times V_j \to W_x$$

es un homeomorfismo.

Así pues, tanto p_1 como p_2 son aplicaciones sobreyectivas, continuas y abiertas, y localmente homeomorfas por ser recubridoras. Veamos esta última propiedad para la proyección p_1 que es la que realmente nos interesa: sea entonces $(x, r) \in E$, luego $p_1(x, r) \in X$. Como es una aplicación recubridora, entoces existe un entorno abierto $U \subseteq X$ de $p_1(x, r)$ tal que $p_1^{-1}(U) = \cup_j V_j$, con V_j abiertos de E. Además, $W := \cup_j V_j$ es un abierto de E tal que $p_{1_{|W}} : W \to U$ es un homeomorfismo.

Entonces, como p_1 es una aplicación localmente homeomorfa, tenemos que para cada para $(x, r) \in E$ existen entornos abiertos $W_{(x,r)} \subseteq E$ de (x, r) y $U_{p_1(x,r)} \subseteq X$ de $p_1(x, r)$ tales que

$$p_{1_{|W_e}} : W_{(x,r)} \to U_{p_1(x,r)}$$

es un homeomorfismo. Podemos suponer que todos los entornos abiertos de la forma $U_{p_1(x,r)} \subseteq X$, escogidos anteriormente, son además cerrados, es decir, éstos son clopens de X, ya que X es un espacio compacto totalmente disconexo, luego 0-dimensional, y tiene una base de clopens para su topología. Entonces, podemos recubrir E mediante entornos abiertos de sus puntos, esto es $E = \cup_{(x,r)\in E} W_{(x,r)}$. Por otra parte, como p_1 es sobreyectiva, obtenemos que

$$X = p_1(E) = \cup_{(x,r)\in E} p_1(W_{(x,r)}) = \cup_{(x,r)\in E} U_{p_1(x,r)},$$

donde $p_1(W_{(x,r)})$ es abierto en X para cada par $(x,r) \in E$. Por hipótesis, sabemos que X es compacto, luego existe un conjunto finito de abiertos $(W_j)_{j=1}^n \subseteq (W_{(x,r)})_{(x,r)\in E}$ tales que

$$X = \cup_{j=1}^n p(W_j) = \cup_{j=1}^n U_j.$$

Podemos suponer sin pérdida de generalidad que los clopens $(U_j)_{j=1}^n$ son disjuntos, porque si no es así, siempre podemos construir a partir de ellos clopens disjuntos de la siguiente forma:

$$U_1' := U_1 \setminus \cup_{j=2}^n U_j,\ U_2' := U_2 \setminus \cup_{j=3}^n U_j, \ldots, U_n' := U_n.$$

Los seguimos llamando $(U_j)_{j=1}^n$. Ahora sí que estamos en condiciones de definir la sección cruzada continua de X en E que es esencial para encontrar la función continua real que levantará a f. Dado $x \in X = \cup_{j=1}^n U_j$, entonces existe un único $j_1 \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $x \in U_{j_1} = p_1(W_{j_1})$. Como p_1 es localmente homeomorfa de W_{j_1} en U_{j_1}, entonces existe un único punto $w \in W_{j_1}$ tal que $x = p_1(w)$. Definimos así $s : X \to E$ de manera que $s(x) = w$. Además, la aplicación s es continua, ya que está definida sobre conjuntos clopens de X y su restricción a cada uno de ellos es continua puesto que

$$s_{|U_i} = p^{-1}_{1|U_i}$$

para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. También es una sección cruzada para p, ya que si $(x,r) \in E$, tenemos que

$$s(p_1(x,r)) = s(x) = (x,r).$$

Finalmente definimos $f' := p_2 \circ s$ que es una función continua de X en $\mathbb{R}$ y además,

$$\exp(f') = f.$$

Por tanto, cualquier función continua $f : X \to \mathbb{T}$ se puede levantar.

$\square$

2.2. Isomorfismos entre grupos de funciones continuas de un espacio topológico en $\mathbb{T}$

En esta sección trabajamos con grupos de funciones continuas de un espacio topológico en $\mathbb{T}$. Lo que nos estamos proponiendo es estudiar qué relaciones entre la estrucutra topológica de los espacios topológicos X e Y se pueden deducir de la existencia de un isomorfismo topológico

$$H : C(X, \mathbb{T}) \longrightarrow C(Y, \mathbb{T}),$$

y recíprocamente: bajo qué condiciones podremos afirmar que los correspondientes grupos de funciones continuas evaluadas en $\mathbb{T}$ son isomorfos topológicamente.

Desde el principio, estamos suponiendo que los espacios X e Y son compactos Hausdorff. Aquí nos centraremos en los espacios compactos metrizables no numerables. Dado que los resultados obtenidos (y las técnicas aplicadas) dependen en gran medida de la conexidad de los espacios, investigaremos en primer lugar el problema planteado anteriormento para espacios compactos metrizables **conexos** (Sección 2.2.1), mientras que en segundo lugar, nos plantearemos la misma cuestión para espacios compactos metrizables no numerables **totalmente disconexos** (Sección 2.2.2). Finalmente, estudiaremos esa posible relación entre X e Y a partir del isomorfismo topológico entre $C(X, \mathbb{T})$ y $C(Y, \mathbb{T})$, y viceversa (Sección 2.2.3), cuando éstos tienen la siguiente forma:

$$X = K_1 \times D_1 \text{ e } Y = K_2 \times D_2,$$

donde K_i son espacios compactos conexos y D_i espacios compactos totalmente disconexos para $i \in \{1, 2\}$. La elección de esta estructura $K \times D$ se debe a que es la que aparece en el estudio de $C(\widehat{\Gamma}, \mathbb{T})$ cuando $\widehat{\Gamma}$ es un grupo compacto y abeliano que va a ser nuestro objetivo en la sección siguiente. En ella cambiaremos radicalmente el punto de vista. Gracias a que todo grupo Γ tiene una C^*-álgebra asociada y que el grupo de unitarios coincide con $C(\widehat{\Gamma}, \mathbb{T})$, enfocaremos dicha parte como una aplicación de lo que ya hemos visto y de la teoría de las C^*-álgebras conmutativas. A pesar del futuro cambio, lo que pretendemos en esta sección es plantar las bases de la nueva teoría, ya que está íntimamente ligada con lo que estudiaremos a continuación.

2.2.1. Cuando los espacios son, además, conexos

Para cualquier espacio topológico compacto Hausdorff X sabemos que tenemos el isomorfismo topológico siguiente (Ecuación (1.2) del Capítulo 1):

$$C(X,\mathbb{T}) \cong C^o(X,\mathbb{T}) \times \pi^1(X), \tag{2.3}$$

con la topología de la convergencia uniforme, ya que en este caso coincide con la topología compacta abierta, al ser X un espacio topológico compacto. Si además X es conexo, podemos aplicar algunos de los resultados de la Sección 2.1, como son las Proposiciones 2.1.7 y 2.1.8, para obtener

$$\begin{aligned} C(X,\mathbb{T}) &\cong C^o(X,\mathbb{T}) \times \pi^1(X) \\ &\cong C^o_\bullet(X,\mathbb{T}) \times \mathbb{T} \times \pi^1(X) \\ &\cong C_\bullet(X,\mathbb{R}) \times \mathbb{T} \times \pi^1(X). \end{aligned}$$

A su vez, si añadimos a X las propiedades de ser metrizable y no numerable, tenemos que por la Proposición 2.1.5, esta última expresión se transforma en la siguiente:

$$C(X,\mathbb{T}) \cong C(X,\mathbb{R}) \times \mathbb{T} \times \pi^1(X). \tag{2.4}$$

Así pues, para X e Y espacios topológicos compactos conexos metrizables (no numerables) Hausdorff, el isomorfismo H quedaría de la siguiente forma:

$$C(X,\mathbb{R}) \times \mathbb{T} \times \pi^1(X) \overset{H}{\cong} C(Y,\mathbb{R}) \times \mathbb{T} \times \pi^1(Y) \tag{2.5}$$

Podemos establecer un teorema que relacione el hecho de que H sea un isomorfismo topológico con la existencia de un isomorfismo entre los grupos de cohomotopía de X e Y.

Teorema 2.2.1 *Sean X e Y espacios topológicos compactos conexos metrizables Hausdorff. Entonces las siguientes afirmaciones equivalen:*

1. $C(X,\mathbb{T}) \cong C(Y,\mathbb{T})$.

2. *Los grupos de cohomotopía $\pi^1(X)$ y $\pi^1(Y)$ son isomorfos.*

-Demostración-
1. $\Rightarrow$ 2. Por lo visto anteriormente en (2.3), sabemos que

$$C^o(X,\mathbb{T}) \times \pi^1(X) \overset{H}{\cong} C^o(Y,\mathbb{T}) \times \pi^1(Y).$$

Por otra parte, las componentes conexas de la identidad de $C(X,\mathbb{T})$ y $C(Y,\mathbb{T})$ son exactamente los subgrupos $C^o(X,\mathbb{T})$ y $C^o(Y,\mathbb{T})$ de $C(X,\mathbb{T})$ y $C(Y,\mathbb{T})$, respectivamente. Entonces $H(C^o(X,\mathbb{T})) = C^o(Y,\mathbb{T})$ al ser H un isomorfismo topológico, y, si partimos por $C^o(X,\mathbb{T})$ y $H(C^o(X,\mathbb{T}))$ en la ecuación anterior, obtenemos que efectivamente $\pi^1(X)$ y $\pi^1(Y)$ son isomorfos topológicamente.
2. $\Rightarrow$ 1. Supongamos ahora que $\pi^1(X) \cong \pi^1(Y)$. Como vimos en (2.4), sólo falta probar que $C(X,\mathbb{R})$ y $C(Y,\mathbb{R})$ son isomorfos, pero esto se deduce del Teorema 2.1.1. □

Nota 2.2.2 *1. La existencia del isomorfismo topológico H entre $C(X,\mathbb{T})$ y $C(Y,\mathbb{T})$ tiene implicación sobre la topologías de X e Y, tras lo visto en el Teorema 2.2.1. Esto contrasta con lo que ocurre en $\mathbb{R}$, ya que debido al Teorema de Milutin (Teorema 2.1.1) no se puede obtener información entre X e Y.*

2. Si X e Y no son conexos, pero sí compactos, en el Teorema 2.2.1 la implicación 1. $\Rightarrow$ 2. *se mantiene, ya que únicamente estamos utilizando ahí el hecho de que los espacios X e Y son compactos.*

De la implicación contraria podemos decir que no es cierta si eliminamos la hipótesis de ser conexo.

-Demostración-
2. De hecho, escogemos dos espacios compactos totalmente disconexos metrizables X e Y, con la única diferencia de que X es numerable e Y no numerable, entonces efectivamente

$$\pi^1(X) = \pi^1(Y) = \{0\} \text{ (Lema 2.1.10).}$$

Veamos que sus correspondientes grupos de funciones continuas evaluadas en $\mathbb{T}$ no pueden ser isomorfos. Si lo fueran, entonces tendríamos que $C^o(X,\mathbb{T}) \cong C^o(Y,\mathbb{T})$. Si dualizamos en este último isomorfismo, obtenemos que los grupos topológicos abelianos libres respectivos también son isomorfos, esto es,

$$A(X) \cong A(Y)$$

ya que el grupo topológico abeliano libre $A(X)$ es reflexivo Pontryagin (Definición 1.1.5 y Nota 1.2.2), cuando X es un espacio compacto totalmente disconexo (en [55] ó [100]). Pero $A(X)$ es un espacio topológico numerable (ya que $|X| = \omega$), mientras que $A(Y)$ no.

Otro ejemplo podría ser el siguiente: sean $X = \mathbb{T} \times \mathbb{T}$ e $Y = \mathbb{T} \times \mathbb{Z}_2$, esto es, X es un grupo topológico compacto conexo metrizable, mientras que Y es un grupo topológico compacto metrizable no conexo. Como veremos más adelante, el Teorema 2.3.1 nos asegura que $\pi^1(\mathbb{T} \times \mathbb{T}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Por otro lado es de fácil comprobación que el grupo de cohomotopía de $\mathbb{T} \times \mathbb{Z}_2$ también es isomorfo a $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ (Lema 2.2.15 y Proposición 2.2.16). Sin embargo, los grupos de funciones continuas $C(\mathbb{T} \times \mathbb{T}, \mathbb{T})$ y $C(\mathbb{T} \times \mathbb{Z}_2, \mathbb{T})$ no pueden ser isomorfos (Teorema 2.3.7 y un ejemplo similar sería el Ejemplo 2.3.12,(1)).

$\square$

De esta forma, parece necesario un estudio más concreto de este problema cuando los espacios pierden la conexidad. Las dos próximas Secciones 2.2.2 y 2.2.3 tratarán ampliamente esta nueva cuestión.

2.2.2. Cuando los espacios son, además, totalmente disconexos

Ya sabemos qué relación existe entre X e Y cuando éstos son espacios topológicos compactos conexos, tras partir de un isomorfismo topológico entre sus correspondientes grupos de funciones continuas que toman valores en $\mathbb{T}$. El siguiente paso consiste en trabajar con espacios topológicos X e Y compactos totalmente disconexos, a los que dependiendo del momento añadiremos la propiedades de ser metrizable y no numerable. Al principio de esta sección, tomaremos como base algunos resultados de los trabajos [15] y [16], de entre los que destacamos el Teorema 2.13 de [15]. Aquí tenemos la implicación de este resultado que nos interesa.

Teorema 2.2.3 ([15]) *Sean X e Y espacios compactos 0-dimensionales metrizables no numerables. Entonces $C_p(X) \sim C_p(Y)$, esto es, son linealmente homeomorfos (isomorfos como espacios vectoriales topológicos).*

En [16], trabajo posterior a [15], se demuestra que los grupos topológicos libres de Graev $F_G(X)$ y $F_G(Y)$ de X e Y, respectivamente, son isomorfos si X e Y son espacios topológicos compactos 0-dimensionales metrizables no numerables. De esta forma, también se puede probar que los grupos topológicos abelianos libres de X e Y son isomorfos, y tras dualizar, obtener que

$C(X, \mathbb{T})$ es isomorfo topológicamente a $C(Y, \mathbb{T})$. El hecho es que un enfoque similar al de [15] permite demostrar directamente que los grupos $C(X, \mathbb{T})$ y $C(Y, \mathbb{T})$ son isomorfos topológicamente.

Para empezar, presentamos alguna notación, que será de utilidad en los primeros resultados. Sea, entonces, $A \subseteq X$ cerrado. Denotaremos por $Y_{X,A}$ al espacio cociente obtenido de X cuando identificamos A con un punto de X, que denotamos por ∞. Por $p : X \to Y_{X,A}$ denotaremos a la aplicación cociente habitual. Además,

$$C^o_A(X, \mathbb{T}) := \{f \in C^o(X, \mathbb{T}) : \ f(A) = \{1_{\mathbb{T}}\}\}$$

como también,

$$C^o_{\bullet}(Y_{X,A}, \mathbb{T}) := \{f \in C^o(Y_{X,A}, \mathbb{T}) : \ f(\infty) = \{1_{\mathbb{T}}\}\}$$

Proposición 2.2.4 *Sea X un espacio 0-dimensional y sea A un subconjunto cerrado de X. Entonces tenemos que*

$$C^o(X, \mathbb{T}) \cong C^o_A(X, \mathbb{T}) \times C^o(A, \mathbb{T})$$

-Demostración-
Tenemos la aplicación restricción:

$$\begin{array}{rcl} R : C^o(X, \mathbb{T}) & \longrightarrow & C^o(A, \mathbb{T}) \\ f & \longmapsto & f_{|A} \end{array}$$

que es evidentemente un homomorfismo continuo. A su vez, como X es 0-dimensional, existe una retracción $\tau : X \to A$. De esta forma, consideramos la siguiente aplicación:

$$\begin{array}{rcl} T : C^o(A, \mathbb{T}) & \longrightarrow & C^o(X, \mathbb{T}) \\ f & \longmapsto & f \circ \tau, \end{array}$$

y comprobamos que está bien definida: sea, pues, $f \in C^o(A, \mathbb{T})$, entonces, ¿$T(f) \in C^o(X, \mathbb{T})$? Como $f \in C^o(A, \mathbb{T})$, existe una función continua $g : A \to \mathbb{R}$ tal que $f = \exp(g)$. Definimos $G := g \circ \tau : X \to \mathbb{R}$ que es continua al serlo tanto g como τ y además verifica:

$$\exp(G) = \exp(g \circ \tau) = \exp(g) \circ \tau = f \circ \tau = T(f),$$

luego $T(f)$ se puede levantar mediante una aplicación continua de X en $\mathbb{R}$. Por otra parte, es fácil de ver que es un homomorfismo y que es continuo. Por tanto, $T(f) \in C^o(X, \mathbb{T})$. Por otra parte, tenemos que $R \circ T = Id_{C^o(A,\mathbb{T})}$. Ahora definimos

$$\begin{array}{rcl} H : C^o(X, \mathbb{T}) & \longrightarrow & C^o_A(X, \mathbb{T}) \times C^o(A, \mathbb{T}) \\ f & \longmapsto & (f - (T \circ R)(f), R(f)). \end{array}$$

Veamos en primer lugar que está bien definida: si $f \in C^o(X, \mathbb{T})$, entonces es evidente que $Rf \in C^o(A, \mathbb{T})$ y que $f - (T \circ R)(f) \in C^o(X, \mathbb{T})$, por las propiedades de R y T. Además, si $a \in A$, entonces

$$\begin{array}{rcl} (f - (T \circ R)(f))(a) & = & R(f - (T \circ R))(f)(a) = f_{|A}(a) - R(T \circ R)(f)(a) \\ & = & f_{|A}(a) - R(f)(a) = f_{|A}(a) - f_{|A}(a) = 1_{\mathbb{T}}. \end{array}$$

Es fácil de probar que H es un homomorfismo continuo es, lo que vamos a probar a continuación es que es un isomorfismo algebraico.

- Veamos que H es una aplicación inyectiva. Sea $f \in C^o(X, \mathbb{T})$ tal que $Hf = (1_{C^o_A(X,\mathbb{T})}, 1_{C^o(A,\mathbb{T})})$. Entonces, por un lado tenemos que $f_{|A} = Rf = 1_{C^o(A,\mathbb{T})}$, mientras que por el otro lado,

  $$(f - (T \circ R)(f))(x) = 1_{\mathbb{T}} \ \forall x \in X,$$

  luego $f(x) = T(Rf)(x) = (Tf_{|A})(x) = 1_{\mathbb{T}}$ para todo $x \in X$, ya que, como acabamos de ver, la función f restringida a A es el elemento neutro de $C^o(A, \mathbb{T})$ y T es un homomorfismo.

- H es sobreyectiva:

  Sean $(f, g) \in C^o_A(X, \mathbb{T}) \times C^o(A, \mathbb{T})$. Definimos $F := f + T(g)$; de esta forma, la función F es elevable, esto es, tiene logaritmo continuo, ya que tanto f y $T(g)$ pertenecen a $C^o(X, \mathbb{T})$. Veamos entonces que $H(F) = (f, g)$:

  - Por un lado, $R(F) = F_{|A} = (f + Tg)_{|A} = f_{|A} + (Tg)_{|A} = g$, ya que f se anula en A.
  - Por otro lado, si $a \in A$, entonces $(F - T(R(F)))(a) = F(a) - T(F_{|A})(a) = F(a) - (F_{|A} \circ \tau)(a) = F(a) - F(a) = 1_{\mathbb{T}}$

  Ya sabemos entonces, que H es un isomorfismo continuo. Para probar que H es un isomorfismo topológico, definimos la siguiente aplicación que será la inversa de H:

$$\begin{aligned} K : C^o_A(X,\mathbb{T}) \times C^o(A,\mathbb{T}) &\rightarrow C^o(X,\mathbb{T}) \\ (f,g) &\mapsto f + Tg, \end{aligned}$$

que está bien definida. Además, K es un homomorfismo continuo y verifica

$$H \circ K = Id_{C^o_A(X,\mathbb{T})\times C^o(A,\mathbb{T})} \ \text{ y } \ K \circ H = Id_{C^o(X,\mathbb{T})}.$$

Así pues, H es un isomorfismo topológico, es decir,

$$C^o(X,\mathbb{T}) \cong C^o_A(X,\mathbb{T}) \times C^o(A,\mathbb{T}).$$

□

Sea ahora $f \in C^o_A(X,\mathbb{T})$. Entonces existe una única función continua $\tilde{f} : Y_{X,A} \rightarrow \mathbb{T}$ tal que $f = \tilde{f} \circ p$, donde $p : X \rightarrow Y_{X,A}$ es la aplicación cociente habitual; además, f es continua si, y sólo si, $\tilde{f}$ es continua.

Por otra parte, si $f_{|A} = \{1_{\mathbb{T}}\}$, entonces $(\tilde{f} \circ p)_{|A} = \{1_{\mathbb{T}}\}$, es decir, $\tilde{f}(\infty) = \{1_{\mathbb{T}}\}$, luego

$$f \in C_A(X,\mathbb{T}) \ \Leftrightarrow \ \tilde{f} \in C_\bullet(Y_{X,A},\mathbb{T}). \tag{2.6}$$

Por tanto, podemos establecer una relación entre los grupos $C_A(X,\mathbb{T})$ y $C_\bullet(Y_{X,A},\mathbb{T})$ que se refleja en el siguiente resultado.

Lema 2.2.5 *Sea X un espacio compacto y sea $A \subseteq X$ cerrado. Entonces,*

$$C^o_A(X,\mathbb{T}) \cong C^o_\bullet(Y_{X,A},\mathbb{T}).$$

-Demostración-
Definimos entonces

$$\begin{aligned} \Phi : C^o_A(X,\mathbb{T}) &\rightarrow C^o_\bullet(Y_{X,A},\mathbb{T}) \\ f &\mapsto \tilde{f}, \end{aligned}$$

tal que $f = \tilde{f} \circ p$, donde $\tilde{f}$ es como se ha descrito antes de este lema, y veamos qué propiedades tiene Φ.

- Evidentemente, Φ es un homomorfismo y además, cumple que $\Phi(1_{C_A^o(X,\mathbb{T})}) = 1_{C_\bullet^o(Y_{X,A},\mathbb{T})}$.
- Falta probar que Φ está bien definido, es decir, si f es una función levantable, entonces $\Phi(f)$ también lo es. Sea, pues, $f \in C_A^o(X,\mathbb{T})$, entonces existe $F : X \to \mathbb{R}$ continua tal que $e^F = f$. Esta aplicación F verifica también que existe $\tilde{F} : Y_{X,A} \to \mathbb{R}$ continua tal que $F = \tilde{F} \circ p$. Así pues,
$$f = e^F = e^{\tilde{F}\circ p} = e^{\tilde{F}} \circ p,$$
donde $e^{\tilde{F}} \in C^o(Y_{X,A},\mathbb{T})$, y junto con lo visto en (2.6), ya podemos afirmar que si $f \in C_A^o(X,\mathbb{T})$, entonces $\Phi(f) \in C_\bullet^o(Y_{X,A},\mathbb{T})$, esto es, Φ está bien definida.

Por ahora, el homomorfismo Φ es un isomorfismo algebraico. Veamos que es topológico. Estamos suponiendo a lo largo de este capítulo que el grupo topológico $C(X,\mathbb{T})$ está dotado de la topología de la convergencia uniforme ya que X es un espacio compacto. Sea, pues, $\epsilon > 0$, y formamos el entorno abierto de la unidad de $1_{C_A^o(X,\mathbb{T})}$ siguiente: $P(X,V_\epsilon) = \{g \in C_A^o(X,\mathbb{T}) : g(X) \subseteq V_\epsilon\}$. Por otra parte, la aplicación cociente $p : X \to Y_{X,A}$ es sobreyectiva y continua, luego $P(X) = Y_{X,A}$ es un espacio compacto. De esta manera, tenemos que el abierto $P(Y_{X,A},V_\epsilon) \subseteq C(Y_{X,A},\mathbb{T})$ es un entorno de $1_{C_\bullet^o(Y_{X,A},\mathbb{T})}$ y además, verifica

$$P(Y_{X,A},V_\epsilon) \subseteq \Phi(P(X,V_\epsilon)).$$

Igualmente, obtenemos que $\Phi(P(X,V_\epsilon)) \subseteq P(Y_{X,A},V_\epsilon)$, luego

$$\Phi(P(X,V_\epsilon)) = P(Y_{X,A},V_\epsilon)$$

y Φ es, finalmente, un isomorfismo topológico. □

Por tanto,

Corolario 2.2.6 *Sean X un espacio compacto 0-dimensional y $A \subseteq X$ cerrado. Entonces,*

$$C^o(X,\mathbb{T}) \cong C_\bullet^o(Y_{X,A},\mathbb{T}) \times C^o(A,\mathbb{T})$$

-Demostración-
Se obtiene como consecuencia de la Proposición 2.2.4 y el Lema 2.2.5. □

A continuación vamos a ver el principal resultado de esta sección, en el que se relaciona a los grupos de funciones continuas de espacios topológicos compactos 0-dimensionales metrizables en $\mathbb{T}$.

Teorema 2.2.7 *Sean X e Y espacios topológicos compactos 0-dimensionales metrizables no numerables. Entonces*

$$C^o(X,\mathbb{T}) \cong C^o(Y,\mathbb{T}).$$

-Demostración-
Es suficiente probar que dado un espacio compacto 0-dimensional metrizable no numerable X, entonces $C^o(X,\mathbb{T})$ es isomorfo topológicamente a $C^o(C,\mathbb{T})$, donde C es el conjunto de Cantor.

Como X es un espacio compacto 0-dimensional, éste se puede considerar como un subconjunto cerrado de C de tal forma que

$$Y_{C,X} \simeq C,$$

esto es, $Y_{C,X}$ es el espacio cociente $\frac{C}{X}$, donde a X lo estamos identificando con el punto ∞. En [74] podemos encontrar la siguiente explicación al respecto: como X es un espacio compacto metrizable totalmente disconexo no numerable, entonces $X \times C$ es un espacio compacto, metrizable, totalmente disconexo, denso en sí mismo, no numerable. Pero C es el único espacio topológico que cumple todas esas condiciones; así pues,

$$X \times C \overset{t}{\simeq} C. \tag{2.7}$$

Por otro lado, tenemos la siguiente inmersión: $i : X \to X \times C$. Por tanto, la inmersión $t \circ i$ es la buscada, luego X es homeomorfo a un subconjunto del conjunto de Cantor y además, de (2.7) sabemos que efectivamente $\frac{C}{X} \simeq C$.

Entonces, por el Corolario 2.2.6 se obtiene que para todo espacio compacto 0-dimensional Z, se da la siguiente relación:

$$C^o(C,\mathbb{T}) \cong C^o_\bullet(Y_{C,Z},\mathbb{T}) \times C^o(Z,\mathbb{T}), \tag{2.8}$$

donde $Y_{C,Z} \simeq C$.

A partir de ahora, trabajaremos con 5 copias del conjunto de Cantor, $(C_i)_{i=1}^5$. Veamos el porqué. Por un lado, sabemos, pues, que X se puede sumergir en un Cantor, C_1, de forma que $\frac{C_1}{X} \simeq C_2$, siendo C_2 otra de las copias. Además, el espacio X contiene un conjunto de Cantor C_3 por el Teorema de Cantor-Bendixon que afirma que todo espacio que satisface el segundo axioma de numerabilidad se puede representar como unión disjunta de dos conjuntos, uno de ellos perfecto (o denso en sí mismo) y el otro numerables. Y para esta copia C_3, tenemos que ella contiene a otra, C_4, de modo que $\frac{C_3}{C_4} \simeq C_5$.

Por tanto, para X un espacio compacto totalmente disconexo metrizable no numerable se tiene que:

$$\begin{aligned}
C^o(X,\mathbb{T}) &\cong C^o_\bullet(Y_{(X,C_3)},\mathbb{T}) \times C^o(C_3,\mathbb{T}) \text{ (Corolario 2.2.6 con } A = C_3) \\
&\cong C^o_\bullet(Y_{(X,C_3)},\mathbb{T}) \times C^o_\bullet(C_5,\mathbb{T}) \times C^o(C_4,\mathbb{T}) \text{ ((2.8) a } Z = C_4) \\
&\cong C^o_\bullet(Y_{(X,C_3)},\mathbb{T}) \times C^o_\bullet(C_5,\mathbb{T}) \times C^o(C_3,\mathbb{T}) \\
&\cong C^o(X,\mathbb{T}) \times C^o_\bullet(C_5,\mathbb{T}) \text{ (Corolario 2.2.6 con } A = C_3) \\
&\cong C^o(X,\mathbb{T}) \times C^o_\bullet(C_2,\mathbb{T}) \\
&\cong C^o(C_1,\mathbb{T}) \text{ (Se aplica (2.8) con } Z = X) \\
&\cong C^o(C,\mathbb{T}).
\end{aligned}$$

De aquí se deduce que dados dos espacios compactos 0-dimensionales metrizables no numerables X e Y, se tiene que

$$C^o(X,\mathbb{T}) \cong C^o(Y,\mathbb{T}).$$

□

Añadimos a continuación una serie de resultados que muestran la relación entre un posible isomorfismo entre los grupos de funciones continuas sobre espacios topológicos compactos totalmente disconexos y dichos espacios.

Lema 2.2.8 *Sean D_1 y D_2 espacios topológicos compactos. Si*

$$C(D_1,\mathbb{T}) \cong C(D_2,\mathbb{T}),$$

entonces D_1 es finito si, y sólo si, D_2 es finito y en ese caso, $|D_1| = |D_2|$.

-Demostración-
Supongamos que D_1 es finito, pero D_2 no. Por hipótesis sabemos que

$$C(D_1,\mathbb{T}) \cong C(D_2,\mathbb{T}),$$

luego, bajo estas condiciones, obtenemos

$$\mathbb{T}^{D_1} \cong C(D_2, \mathbb{T}). \tag{2.9}$$

Entonces, si dualizamos en (2.9), tenemos que

$$\oplus_{|D_1|}\mathbb{Z} \cong \widehat{\mathbb{T}^{D_1}} \cong C(D_2, \mathbb{T})^\wedge. \tag{2.10}$$

Por otro lado, como $C(X, \mathbb{T}) \cong A(X)^\wedge$ para cualquier X compacto, entonces, si se lo aplicamos a nuestro caso particular $X = D_2$, obtenemos que $C(D_2, \mathbb{T}) \cong A(D_2)^\wedge$; más aún, si volvemos a dualizar, este último isomorfismo queda así: $C(D_2, \mathbb{T})^\wedge \cong A(D_2)^{\wedge\wedge}$. Esto ocasiona que el grupo topológico abeliano libre $A(D_2)$ se sumerja en $C(D_2, \mathbb{T})^\wedge$ (en [100], por ejemplo).

De este modo, de (2.10) se deduce que $A(D_2)$ sería discreto y esto no se da, a no ser que D_2 también lo fuera, ya que D_2 hereda la topología de $A(D_2)$, tal y como se comenta a continuación del Teorema 5.2 de [113], y no es el caso. Por tanto, si D_1 es finito, D_2 también, y al contrario, luego,

$$\mathbb{T}^{D_1} \cong C(D_1, \mathbb{T}) \cong C(D_2, \mathbb{T}) \cong \mathbb{T}^{D_2},$$

esto es, $|D_1| = |D_2|$. $\square$

El siguiente resultado de [46] (Teorema 1.1.l5) nos ayudará en la demostración de la Proposición 2.2.10:

Teorema 2.2.9 *Si $w(X) \leq m$, entonces para toda base $\mathcal{B}$ de X existe una base $\mathcal{B}_0$ cumpliendo $|\mathcal{B}_0| \leq m$ y $\mathcal{B}_0 \subseteq \mathcal{B}$.*

En la siguiente Proposición demostramos un resultado que involucra a $C(D, \Gamma)$, con Γ un grupo discreto, cuyo enunciado tiene como origen el Corolario 2.6 de [42], aunque su demostración varía en algunos puntos.

Proposición 2.2.10 *Sea D un espacio topológico compacto totalmente disconexo y Γ un grupo discreto. Entonces $C(D, \Gamma)$ se puede escribir como la suma directa de $w(D)$ veces Γ, i.e.,*

$$C(D, \Gamma) \cong \oplus_{w(D)}\Gamma.$$

-Demostración-
Como D es un compacto totalmente disconexo, éste es, a su vez, 0-dimensional y tiene, por tanto, una base para la topología $\mathcal{B}$ compuesta de conjuntos clopens. Además, sabemos que por el Teorema 2.2.9 podemos suponer que esa base da el peso de D, esto es, $|\mathcal{B}| = w(D)$, ya que, si $w(D) = m$ y para la base $\mathcal{B}$, por dicho Teorema 2.2.9 existirá otra base $\mathcal{B}_0$ tal que $\mathcal{B}_o \subset \mathcal{B}$ y además, $|\mathcal{B}_0| = m$. Pero $\mathcal{B}_0$ está compuesta de conjuntos clopens porque está contenida en $\mathcal{B}$, luego podemos suponer efectivamente que es justo la base $\mathcal{B}$ la que cumple que $w(D) = |\mathcal{B}|$. Por tanto, todo clopen $A \in \mathcal{A}$ se puede expresar como unión finita de elementos de $\mathcal{B}$, es decir:

$$A = \cup_{i=1}^{m_A} B_i,$$

donde $B_i \in \mathcal{B}$.

Sea, pues, $f \in C(D, \Gamma)$. Entonces, para cada $\lambda \in \Gamma$, tenemos el siguiente conjunto

$$f^{-1}(\lambda),$$

que es un clopen de D. Por tanto, podemos escribirlo de la siguiente forma:

$$f^{-1}(\lambda) = \cup_{j \in J_\lambda} B_j$$

con $B_j \in \mathcal{B}$ y J_λ un conjunto de índices finito. Es fácil de probar que los clopens de D $(f^{-1}(\lambda))_{\lambda \in f(D)}$ son disjuntos entre sí, por la forma en que se han construido.

Además, si j, $j' \in \cup_{\lambda \in f(D)} J_\lambda$, entonces

$$\emptyset = f^{-1}(\lambda_j) \cap f^{-1}(\lambda_{j'}) = (\cup_{r \in J_{\lambda_j}} B_r) \cap (\cup_{s \in J_{\lambda_{j'}}} B_s) = \cup_{r \in J_{\lambda_j}} (\cup_{s \in J_{\lambda_{j'}}} (B_r \cap B_s)),$$

esto es, para todo $r \in J_{\lambda_j}$ y para todo $s \in J_{\lambda_{j'}}$,

$$B_r \cap B_s = \emptyset.$$

Así pues, los clopens que generan a los $(f^{-1}(\lambda))_{\lambda \in f(D)}$ son disjuntos entre sí y además,

$$f(B_i) = \lambda \ \forall i \in J_\lambda.$$

A partir de ahora, es fácil ver que $C(D, \Gamma) \cong \oplus_{w(D)} \Gamma$. A cada $f \in C(D, \Gamma)$ le asignamos el elemento $w_f : \mathcal{B} \longrightarrow \Gamma$ de manera que dado $B \in \mathcal{B}$, entonces

$$\begin{aligned} w_f(B) &= 0, \text{ si } B \nsubseteq f^{-1}(\lambda) \ \forall \lambda \in \Gamma \text{ y} \\ w_f(B) &= \lambda, \text{ si } B \subseteq f^{-1}(\lambda). \end{aligned}$$

Definimos entonces la aplicación

$$\begin{array}{rcl}\mu : C(D,\Gamma) & \to & \oplus_{w(D)}\Gamma \\ f & \mapsto & w_f,\end{array}$$

y comprobamos que es un isomorfismo de grupos. Sean, pues, $f, g \in C(D,\Gamma)$ tales que $\mu(f) = \mu(g)$: dado $x \in D$, llamamos λ a $f(x)$ y existirá $s \in J_\lambda$ tal que $x \in B_s$. Como $\lambda = w_f(B_s) = w_g(B_s)$, entonces se deduce que $B_s \subseteq g^{-1}(\lambda)$ y también $g(x) = \lambda$. Luego μ es inyectiva. Por otra parte, sea $w \in \oplus_{w(D)}\Gamma$, entonces las coordenadas de w que no se anulan se corresponden cada una a un clopen básico de D; sean $(\gamma_j)_{j=1}^n$ dichas coordenadas y $(B_j)_{j=1}^n$ sus clopens básicos correspondientes. Podemos definir, entonces, una aplicación g de la siguiente forma:

$$g_{|B_j} := \gamma_j. \tag{2.11}$$

Llamamos $B_{n+1} := D \setminus \cup_{j=1}^n B_j$ que es un clopen de D. Por un lado, si B_{n+1} pertenece a $\mathcal{B}$, entonces hacemos que

$$g_{|B_{n+1}} = \gamma_{n+1}.$$

Por otro lado, si B_{n+1} no pertenece a la base $\mathcal{B}$, éste se puede escribir como unión de clopens de $\mathcal{B}$, i.e., $B_{n+1} = \cup_{k=1}^m B_k^{n+1}$, que verifican que $B_k^{n+1} \cap \cup_i^n B_i = \emptyset$ para todo $k \in \{1, \dots, m\}$. Entonces definimos $g_{|B_{n+1}} := \{1_\Gamma\}$. En cualquier caso, la aplicación g definida de esa forma pertenece a $C(D,\Gamma)$ y verifica que $\mu(g) = w$, con lo que μ es sobreyectiva.

Por tanto, μ es un isomorfismo y $C(D,\Gamma)$ se puede expresar como la suma de $w(D)$ copias de Γ.

□

Nota 2.2.11 *En el caso en que $\Gamma = \pi^1(K)$, con K un espacio topológico compacto y conexo, como consecuencia de la Proposición 2.2.10 obtenemos que,*

$$C(D, \pi^1(K)) \cong \oplus_{w(D)}\pi^1(K).$$

2.2.3. Cuando los espacios tienen la forma $K \times D$

Motivados por el estudio de las C^*-álgebras de grupo que afrontaremos en la próxima Sección 2.3, vamos a suponer en esta sección que X e Y adoptan la siguiente estructura:

$$X = K_1 \times D_1 \text{ e } Y = K_2 \times D_2,$$

donde K_i es un espacio compacto conexo metrizable y D_i un compacto totalmente disconexo metrizable para cada $i \in \{1, 2\}$, de tal forma que X e Y son compactos metrizables no numerables. Queremos llegar a un resultado que nos aporte información sobre una posible relación entre X e Y a partir de un isomorfismo topológico entre $C(X, \mathbb{T})$ y $C(Y, \mathbb{T})$, pero con esta nueva forma. Trabajaremos de forma que los pasos que demos ahora sean de ayuda más adelante. Al final de esta sección comprobaremos que efectivamente existe dicha relación entre X e Y. Pero, antes de ello, veremos una serie de resultados auxiliares.

En primer lugar probaremos que $C(D \times K, \mathbb{T}) \cong C(D, C(K, \mathbb{T}))$, ambos dotados de la topología de la convergencia uniforme, cualesquiera que sean D y K espacios compactos. Esta relación es completamente análoga a la que es bien conocida que se satisface para las funciones continuas de variable real, $C(D \times K, \mathbb{R}) = C(D, C(K, \mathbb{R}))$, relación que además permite representar a $C(D \times K, \mathbb{R})$ como el producto tensorial inyectivo de dos espacios de funciones continuas, es decir que en este caso obtendríamos $C(D \times K, \mathbb{R}) \cong C(D, \mathbb{R}) \otimes_\epsilon C(K, \mathbb{R})$ (capítulo 3 de [105]). Los mismos argumentos (ver [105]) permiten demostrar el caso para funciones continuas $\mathbb{T}$-evaluadas.

Así pues,

Lema 2.2.12 *Sean D y K espacios topológicos compactos, entonces se da*

$$C(D \times K, \mathbb{T}) \cong C(D, C(K, \mathbb{T}))$$

-Demostración-
Construimos la siguiente aplicación

$$\begin{array}{rcl} \Psi : C(D \times K, \mathbb{T}) & \longrightarrow & C(D, C(K, \mathbb{T})) \\ f & \longmapsto & \Psi(f), \end{array}$$

donde, si $d \in D$ y $k \in K$, entonces $\Psi(f)(d)(k) := f(d, k)$, y veamos que es un isomorfismo

- Ψ está bien definida:

  Lo que queremos probar es que si $f \in C(D \times K, \mathbb{T})$, entonces $\Psi(f) \in C(D, C(K, \mathbb{T}))$. Sean, entonces, $f \in C(D \times K, \mathbb{T})$ y $(d_n)_n \subseteq D$ una red convergente a $d \in D$. Nos preguntamos, pues, si $\Psi(f)(d_n)$ converge a $\Psi(f)(d)$, o bien, si $\Psi(f)(d_n) - \Psi(f)(d)$ converge a $\overline{1}_{C(K,\mathbb{T})}$. Dado $\epsilon > 0$, veamos que podemos encontrar un índice n_o tal que $\Psi(f)(d_n) - \Psi(f)(d) \in P(K, V_\epsilon)$ para todo $n \geq n_o$, donde $P(K, V_\epsilon) = \{t \in C(K, \mathbb{T}) : \ t(K) \subseteq V_\epsilon\}$.

Como $(d_n)_n$ converge a d, entonces, si fijamos $k \in K$, tenemos que $(d_n, k)_n$ converge también, a (d, k). A su vez, f es continua sobre el compacto $D \times K$, luego f es uniformemente continua y por tanto, $(f(d_n, k))_n$ converge a $f(d, k)$ uniformemente. Esto implica que existirá n_o tal que $f(d_n, k) - f(d, k) \in V_\epsilon$ para todo $n \geq n_o$ y para todo $k \in K$. Dicho n_o depende sólo de ϵ. Así pues, $\Psi(f)(d_n) - \Psi(f)(d) \in P(K, V_\epsilon)$ para todo $n \geq n_o$ y $\Psi(f)(d_n)$ converge uniformemente a $\Psi(f)(d)$, luego efectivamente $\Psi(f) \in C(D, C(K, \mathbb{T}))$.

Análogamente se prueba que dados $f \in C(D \times K, \mathbb{T})$ y $d \in D$, entonces $\Psi(f)(d) \in C(K, \mathbb{T})$.

- Ψ es inyectiva:

  Sean f, $g \in C(D \times K, \mathbb{T})$ tales que $\Psi(f) = \Psi(g)$. Sea $d \in D$, luego $\Psi(f)(d) = \Psi(g)(d)$, y si $k \in K$, también obtenemos que $\Psi(f)(d)(k) = \Psi(g)(d)(k)$, y esto para todos $d \in D$ y $k \in K$. Por tanto, $f(d, k) = g(d, k)$ para todo $d \in D$, $k \in K$, y $f = g$.

- Ψ es sobreyectiva:

  Sea $g \in C(D, C(K, \mathbb{T}))$. Para $d \in D$ y $k \in K$, definimos $f(d, k) := g(d)(k)$. Pero nos falta comprobar que f pertenece efectivamente a $C(D \times K, \mathbb{T})$. Sea, pues, $((d_n, k_n))_n \subseteq D \times K$ una sucesión convergente a $(d_0, k_0) \in D \times K$. Entonces, $d_n \rightsquigarrow d_0$ por un lado y $k_n \rightsquigarrow k_0$ por otro, y, como g es continua, tenemos que $g(d_n)$ converge a $g(d_0)$, es decir, que dado $\epsilon > 0$, existe n_0 tal que $g(d_n)g(d_0)^{-1} \in P(K, V_{\frac{\epsilon}{2}})$, esto es,

$$\begin{array}{rcl} g(d_n)(k') & \rightsquigarrow & g(d_0)(k') \ \forall k' \in K \\ g(d')(k_n) & \rightsquigarrow & g(d')(k_0) \ \forall d' \in D. \end{array}$$

  Además, D es un compacto, luego $g(D)$ es compacto en $C(K, \mathbb{T})$ y por el Teorema clásico de Arzelà-Ascoli, $g(D)$ es equicontinuo sobre K. Dado $\epsilon > 0$, tomamos el entorno abierto de $1_{\mathbb{T}}$, $V_{\frac{\epsilon}{4}}$, y para este entorno y $k_0 \in K$ tenemos que existe $W \in \mathcal{E}(k_0)$, entorno abierto de k_0, tal que $g(d)(W) \subseteq V_{\frac{\epsilon}{4}}$ para todo $d \in D$. Como W es entorno abierto del límite k_0, existirá $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $g(D)(k_m) \in V_{\frac{\epsilon}{4}}$ para todo $m \geq m_0$. Así pues, si $m \geq m_0$,

$$g(d)(k_m)g(d)(k_0)^{-1} \in V_{\frac{\epsilon}{4}}V_{\frac{\epsilon}{4}} \subseteq V_{\frac{\epsilon}{2}},$$

para todo $d \in D$. Entonces, si n, $m \geq \text{máx}(n_0, m_0)$, tenemos que

$$\begin{aligned} f(d_n, k_m)f(d_0, k_0)^{-1} &= f(d_n, k_m)f(d_0, k_m)^{-1}f(d_0, k_m)f(d_0, k_0)^{-1} \\ &= g(d_n)(k_m)g(d_0)(k_m)^{-1}g(d_0)(k_m)g(d_0)(k_0)^{-1} \end{aligned}$$

de donde $g(d_0)(k_m)g(d_0)(k_0)^{-1} \in V_{\frac{\epsilon}{2}}$ y $g(d_n)(k_m)g(d_0)(k_m)^{-1} \in V_{\frac{\epsilon}{2}}$. Si $n = m$, entonces obtenemos que, para $n \geq \text{máx}(n_0, m_0)$:

$$f(d_n, k_n) - f(d, k) \in V_\epsilon,$$

luego f es continua.

- Ψ es continua:

  Sea $(f_n)_n \subseteq C(D \times K, \mathbb{T})$ tal que $f_n \overset{c.u.}{\to} f \in C(D \times K, \mathbb{T})$. Tenemos que probar que $\Psi(f_n)$ converge uniformemente a $\Psi(f)$, o bien que $\Psi(f_n) - \Psi(f)$ converge a $\overline{1}_{C(D,C(K,\mathbb{T}))}$.

  Consideramos un entorno de $\overline{1}_{C(D,C(K,\mathbb{T}))}$ de la forma $P(D, U)$, donde U es un entorno abierto de $\overline{1}_{C(K,\mathbb{T})}$. A su vez, existe $\delta > 0$ tal que

  $$P(K, V_\delta) \subseteq U.$$

  Entonces
  $$P(D, P(K, V_\delta)) \in \mathcal{E}(\overline{1}_{C(D,C(K,\mathbb{T}))}).$$

  Como $f_n \to f$, dado $\epsilon > 0$ que escogeremos menor que δ, existe un n_o tal que $f_n - f \in P(D \times K, V_\epsilon)$ para todo $n \geq n_o$. Sean pues $d \in D$ y $k \in K$, luego:

  $$\Psi(f_n)(d)(k) - \Psi(f)(d)(k) \in P(D \times K, V_\epsilon) \subseteq P(D \times K, V_\delta),$$

  con lo que $\Psi(f_n)(d) - \Psi(f)(d) \in P(K, V_\delta)$ para todo $d \in D$ y por tanto, $\Psi(f_n) - \Psi(f) \in P(D, P(K, V_\delta)) \subseteq P(D, U)$ y Ψ es continua.

- Ψ es abierta:

  Sea $(g_n)_n \subseteq C(D, C(K, \mathbb{T}))$ una sucesión que converge a $g \in C(D, C(K, \mathbb{T}))$. Llamamos $h_n := \Psi^{-1}(g_i)$ y $h = \Psi^{-1}(g)$, entonces, si $(d, k) \in D \times K$,

  $$h_n(d, k) = \Psi(h_n)(d)(k) = g_n(d)(k) \text{ y } h(d, k) = g(d)(k).$$

Sea $\epsilon > 0$, entonces

$$P(D \times K, V_\epsilon) \in \mathcal{E}(1_{C(D\times K,\mathbb{T})}).$$

Como $g_n \to g$, existe un n_o tal que $g_n - g \in P(D, P(K, V_\epsilon))$, por ser este último conjunto un entorno de la identidad de $C(D, C(K, \mathbb{T}))$. Luego, si $(q_1, q_2) \in D \times K$, tenemos que

$$(h_n - h)(q_1, q_2) = (g_n - g)(q_1)(q_2) \in V_\epsilon.$$

Es decir que $h_n \overset{c.u.}{\to} h$ y Ψ es abierta.

Por tanto, Ψ es un isomorfismo topológico, i.e.

$$C(K \times D, \mathbb{T}) \cong C(D, C(K, \mathbb{T})).$$

$\square$

El siguiente Lema auxiliar es conocido y estándar, pero necesitamos recordarlo para próximos resultados.

Lema 2.2.13 *Sean X, Y y Z espacios topológicos Hausdorff. Dotamos a los espacios $C(X, Y \times Z)$, $C(X, Y)$ y $C(X, Z)$ de la topología compacta abierta. Entonces el isomorfismo:*

$$C_c(X, Y \times Z) \cong C_c(X, Y) \times C_c(X, Z)$$

es topológico.

-Demostración-
Definimos la siguiente aplicación

$$\begin{array}{rcl} \varphi : C(X, Y \times Z) & \longrightarrow & C(X, Y) \times C(X, Z) \\ f & \longmapsto & (p_1 \circ f, p_2 \circ f), \end{array}$$

donde $p_1 : Y \times Z \to Y$ y $p_2 : Y \times Z \to Z$ son las proyecciones naturales. Denotamos a los espacios $C_c(X, Y \times Z)$, $C_c(X, Y)$ y $C_c(X, Z)$ una vez dotados de la topología compacta abierta. Por pasos:

- φ es inyectiva:

  Sean f, $g \in C_c(X, Y \times Z)$ tales que $\varphi(f) = \varphi(g)$. Sea ahora $x \in X$, entonces $\varphi(f)(x) = \varphi(g)(x)$, luego $(p_1 \circ f)(x) = (p_1 \circ g)(x)$ y además $(p_2 \circ f)(x) = (p_2 \circ g)(x)$, i.e., para todo $x \in X$, $f(x)_{|Y} = g(x)_{|Y}$ y $f(x)_{|Z} = g(x)_{|Z}$. Efectivamente, $f = g$.

- φ es sobreyectiva:

  Sean $f \in C_c(X, Y)$ y $g \in C_c(X, Z)$. Para todo $x \in X$, definimos $h(x) := (f(x), g(x))$ y $h : X \to Y \times Z$. Falta ver que h es continua, pero es evidente, porque tanto f como g lo son. Además, ésta verifica que $\varphi(h) = (p_1 \circ h, p_2 \circ h) = (f, g)$.

- φ es continua:

  Sea $(f_i)_i \subseteq C_c(X \times Y, Z)$ una red convergente a $f \in C_c(X \times Y, Z)$. Probar que $(\varphi(f_i))_i$ converge a $\varphi(f)$ implica probar que converge coordenada a coordenada, es decir, que $p_1 \circ f_i \rightsquigarrow p_1 \circ f$ y también $p_2 \circ f_i \rightsquigarrow p_2 \circ f$. Veamos, por ejemplo, que $p_1 \circ f_i \rightsquigarrow p_1 \circ f$. Sean, por tanto, $K \subseteq X$ compacto y $A \subseteq Y$ abierto, de forma que $P(K, A)$ sea un entorno abierto de $= \varphi(f) = p_1 \circ f$. Así pues, tenemos que $p_1(f(K)) \subseteq A$. Como A es abierto en Y, entonces $A \times Z$ es abierto en $Y \times Z$. De este modo, existe un índice i_0 tal que

  $$f_i(A) \subseteq A \times Z$$

  para todo $i \geq i_0$. Esto nos lleva a que, dados $K \subseteq X$ compacto y $A \subseteq Y$ abierto, es cierto que $p_1(f_i(A)) \subseteq p_1(A \times Z) = A$ para todo $i \geq i_0$. Análogamente procederíamos con la segunda coordenada, con lo que obtenemos que φ es continua.

- φ es abierta:

  Sea ahora una red $((f_i, g_i))_i \subseteq C_c(X, Y) \times C_c(X, Z)$ convergente a $(f, g) \in C_c(X, Y) \times C_c(X, Z)$. Esto quiere decir que por un lado $f_i \rightsquigarrow f$ y por otro, $g_i \rightsquigarrow g$. La pregunta es si $\varphi^{-1}(f_i, g_i) = h_i \in C_c(X, Y \times Z)$ converge a $\varphi^{-1}(f, g) = h \in C_c(X, Y \times Z)$. La función h tiene la siguiente forma, tal y como se ha visto en la Proposición 2.2.13: $h(x) = (f(x), g(x))$. Sean ahora $K \subseteq X$ compacto y $W \subseteq Y \times Z$ abierto, de forma que $P(K, W)$ es un entorno abierto de h. Como W es un abierto en un producto de espacios topológicos, existen U y V abiertos de Y y Z, respectivamente, tales que $U \times V \subseteq W$ y

$h(K) \subseteq U \times V \subseteq W$. A partir de aquí, es fácil seguir ya que $P(K, U)$ es entorno abierto de f y $P(K, W)$ de g y además,

$$\begin{array}{lcl} \exists i_1 \ \text{ tal que } \ f_i(K) & \subseteq & U \ \forall i \geq i_1 \\ \exists i_2 \ \text{ tal que } \ g_i(K) & \subseteq & V \ \forall i \geq i_2, \end{array}$$

luego cogemos $i \geq \text{máx}(i_1, i_2)$ y obtenemos que efectivamente, la red $(\varphi^{-1}((f_i, g_i)))$ converge a $\varphi^{-1}((f, g))$.

Por tanto, la aplicación φ es un homeomorfismo biyectivo. □

Aplicamos ahora el Lema 2.2.13 a $C(D, C(K, \mathbb{T}))$, donde en este caso, D es un espacio compacto totalmente disconexo y K compacto conexo, con lo que, en particular, sabemos que se da $C(K, \mathbb{T})) \cong C^o(K, \mathbb{T})) \times \pi^1(K)$. Por tanto,

Corolario 2.2.14 *Sean K un compacto conexo y D un compacto totalmente disconexo. Entonces:*

$$C(D, C(K, \mathbb{T})) \cong C(D, C^o(K, \mathbb{T})) \times C(D, \pi^1(K))$$

Lema 2.2.15 *Sea $X = K \times D$ un espacio topológico compacto, donde K es un espacio compacto conexo metrizable y D un compacto totalmente disconexo metrizable. Entonces tenemos que*

$$C(K \times D, \mathbb{T}) \cong C(D \times K, \mathbb{R}) \times C(D, \mathbb{T}) \times C(D, \pi^1(K))$$

-Demostración-
Vamos a utilizar las Proposiciones 2.1.8 y 2.1.7, los Lemas 2.2.12 y 2.2.13, y el Corolario 2.2.14. Entonces tenemos que:

$$\begin{aligned}
C(K\times D,\mathbb{T}) &\cong C(D,C(K,\mathbb{T}))\text{ (Lema 2.2.12)}\\
&\cong C(D,C^o(K,\mathbb{T})\times\pi^1(K))\\
&\cong C(D,C^o(K,\mathbb{T}))\times C(D,\pi^1(K))\text{ (Corolario 2.2.14)}\\
&\cong C(D,C^o_\bullet(K,\mathbb{T})\times\mathbb{T})\times C(D,\pi^1(K))\text{ (Proposición 2.1.7)}\\
&\cong C(D,C^o_\bullet(K,\mathbb{T}))\times C(D,\mathbb{T})\times C(D,\pi^1(K))\text{ (Lema 2.2.13)}\\
&\cong C(D,C_\bullet(K,\mathbb{R}))\times C(D,\mathbb{T})\times C(D,\pi^1(K))\text{ (Proposición 2.1.8)}\\
&\cong C(D,C(K,\mathbb{R}))\times C(D,\mathbb{T})\times C(D,\pi^1(K))\text{ (Proposición 2.1.5)}\\
&\cong C(D\times K,\mathbb{R})\times C(D,\mathbb{T})\times C(D,\pi^1(K))\text{ (Lema 2.2.12 para }\mathbb{R}).
\end{aligned}$$

□

Proposición 2.2.16 *Sea X un espacio topológico compacto metrizable con la estructura $X = D\times K$, donde K es un compacto conexo metrizable y D un compacto totalmente disconexo metrizable. Entonces la componente conexa de la identidad de $C(D\times K,\mathbb{T})$ es*

$$C(D,C^o(K,\mathbb{T}))\cong C(K\times D,\mathbb{R})\times C(D,\mathbb{T}).$$

-Demostración-
El objetivo es probar que $C(D,C^o(K,\mathbb{T}))\subseteq C(D,C(K,\mathbb{T}))$ es la componenete conexa de la identidad de $C(D\times K,\mathbb{T})$ el cual, como acabamos de ver en el Lema 2.2.15, tiene la forma $C(D,C^o(K,\mathbb{T}))\times C(D,\pi^1(K))$. Por ello, vamos a ir por el siguiente camino: primero probaremos que $C(D,C^o(K,\mathbb{T}))$ es conexo y a continuación, que $C(D,\pi^1(K))$ es discreto.

PASO 1 $C(D,C^o(K,\mathbb{T}))$ es conexo:
Definimos para ello la siguiente aplicación:

$$\begin{aligned}
Q : C(D,C(K,\mathbb{R})) &\longrightarrow C(D,C^o(K,\mathbb{T}))\\
f &\longmapsto Q(f),
\end{aligned}$$

de forma que si $d\in D$, entonces $Q(f)(d)=\exp(f(d))$. Comprobemos que Q es continua y sobreyectiva:

- Q es sobreyectiva:

  Sea $f \in C(D, C^o(K, \mathbb{T}))$, entonces para cada $d \in D$, tenemos que $f(d) \in C^o(K, \mathbb{T})$, luego existe $g_d \in C(K, \mathbb{R})$ tal que $f(d) = \exp(g_d)$. Definimos $F : D \to C(K, \mathbb{R})$ de la siguiente forma: si $d \in D$, entonces $F(d) = g_d$. Queda por ver que F es continua. Sea, pues, una red $(d_i)_i \subseteq D$ convergente a $d \in D$. Basta probar que

  $$\exp(P(K,]-\epsilon, \epsilon[)) = P(K, V_\epsilon) :$$

  ($\subseteq$) Esta implicación es obvia, ya que, si $h \in P(K,]-\epsilon, \epsilon[)$, entonces $\exp(h)(K) \subseteq \{e^{2\pi it} : \ |t| < \epsilon\} = V_\epsilon$.

  ($\supseteq$) Sea ahora $h \in P(K, V_\epsilon)$ y como ésta, en particular, pertenece a $C^o(K, \mathbb{T})$, se deduce que tiene logaritmo continuo, esto es, existe $h' \in C(K, \mathbb{R})$ tal que $e^{2\pi ih'} = h$. Evidentemente, para cada $x \in K$ se tiene que existe $m_x \in \mathbb{Z}$ tal que

  $$|h'(x) - m_x| < \epsilon.$$

  Así pues, podemos describir el espacio K como unión de clopens de la forma $V_n := \{k \in K : \ |h'(k) - n| < \epsilon\}$, pero K es conexo, luego existe un único $m \in \mathbb{Z}$ tal que

  $$|h'(x) - m| < \epsilon \ \forall x \in K.$$

  Definimos, entonces, la siguiente aplicación: $G := h' - m$ que pertenece a $C(K, \mathbb{R})$ y además verifica que

  $$e^{2\pi iG} = e^{2\pi i(h'-m)} = e^{2\pi ih'} = h$$

  y de esta forma, $h \in \exp(P(K,]-\epsilon, \epsilon[))$.

  Como f es continua, obtenemos que dado $\epsilon > 0$ existe i_0 tal que $f(d_i)f(d)^{-1}(K) \subseteq V_\epsilon$ para todo $i \geq i_0$. Pero acabamos de ver que $\exp(P(K,]-\epsilon, \epsilon[)) = P(K, V_\epsilon)$, luego

  $$\exp(F(d_i) - F(d))(K) \subseteq \exp(P(K,]-\epsilon, \epsilon[)) \ \forall i \geq i_0.$$

  Como la aplicación exponencial es un isomorfismo topológico en su imagen (K es compacto, en Proposición 1.2.4), obtenemos finalmente que

  $$(F(d_i) - F(d))(K) \subseteq P(K,]-\epsilon, \epsilon[) \ \forall i \geq i_0,$$

con lo que $F : D \to C(D, C(K, \mathbb{R}))$ es continua. Además, verifica que si $d \in D$ y $k \in K$,

$$Q(F)(d)(k) = \exp(F(d)(k)) = \exp(g_d(k)) = f(d)(k),$$

luego Q es una aplicación sobreyectiva.

- Q es continua:

  Sea ahora una red $(f_i)_{\subseteq} C(D, C(K, \mathbb{R}))$ convergente a $f \in C(D, C(K, \mathbb{R}))$. Sea, además, $\epsilon > 0$. Entonces, existe un índice i_1 tal que $(f_i - f)(D) \subseteq P(K,]-\epsilon, \epsilon[)$, luego para todo $d \in D$,

  $$(f_i - f)(d)(K) \subseteq]-\epsilon, \epsilon[\ \forall i \geq i_1,$$

  y, además, $e^{2\pi i((f_i - f)(d))}(K) \subseteq V_\epsilon$ para todo $i \geq i_1$. Por tanto,

  $$Q(f_i)Q(f)^{-1}(D) \subseteq P(K, V_\epsilon) \ \forall i \geq i_1,$$

  y Q es continua.

Así pues, al ser $C(D, C(K, \mathbb{R}))$ un espacio conexo, ya que es isomorfo a $C(D \times K, \mathbb{R})$ (Lema 2.2.12 para $\mathbb{R}$), obtenemos finalmente que $C(D, C^o(K, \mathbb{T}))$ también lo es gracias a que Q es continua y sobreyectiva.

PASO 2 $C(D, \pi^1(K))$ es un grupo discreto:
Gracias a que $C(D, \pi^1(K))$ es un espacio de Hausdorff, será suficiente con que comprobemos que los puntos de $C(D, \pi^1(K))$ son abiertos. Sea $(g_j)_{j \in J} \subseteq C(D, \pi^1(K))$ una red convergente a $1_{C(D,\pi^1(K))}$. Para cualquier $V \in \mathcal{E}(1_{\pi^1(K)})$, existe $j_0 \in J$ tal que $g_j \in P(D, V)$ para todo $j \geq j_0$, al ser $P(D, V)$ un entorno básico de $1_{C(D,\pi^1(K))}$ con la topología de la convergencia uniforme. Cogemos entonces $V = \{1_{\pi^1(K)}\}$, que es entorno de la identidad de $\pi^1(K)$ por ser éste discreto. De este modo, existe $j_1 \in J$ tal que $g_j \in P(D, \{1_{\pi^1(K)}\})$ para todo $j \geq j_1$, es decir, $g_j(D) = \{1_{\pi^1(K)}\}$ para todo $j \geq j_1$ y la red es eventualmente constante igual a $1_{C(D,\pi^1(K))}$. Por tanto, el conjunto $\{1_{C(D,\pi^1(K))}\}$ es abierto y, como las traslaciones son homeomorfismos en los grupos topológicos, entonces todos los puntos de $C(D, \pi^1(K))$ son también abiertos.

Supongamos ahora que existe $U \subseteq C(D, C^o(K, \mathbb{T})) \times C(D, \pi^1(K))$ conexo tal que $C(D, C^o(K, \mathbb{T})) \times \{1_{C(D,\pi^1(K))}\} \subset U$, luego $U \subseteq p_1(U) \times p_2(U)$, donde $p_1 : C(D, C^o(K, \mathbb{T})) \times C(D, \pi^1(K)) \to C(D, C^o(K, \mathbb{T}))$ y $p_2 : C(D, C^o(K, \mathbb{T})) \times C(D, \pi^1(K)) \to C(D, \pi^1(K))$ son proyecciones. Entonces

$$C(D, C^o(K, \mathbb{T})) \times \{1_{C(D,\pi^1(K))}\} \subseteq U \subseteq C(D, C^o(K, \mathbb{T})) \times p_2(U),$$

ya que $p_1(U) = C(D, C^o(K, \mathbb{T}))$. Como además $p_2(U)$ es conexo en $C(D, \pi^1(K))$ que acabamos de ver que es discreto, entonces $p_2(U) = \{\alpha\}$, con $\alpha \in C(D, \pi^1(K))$. Así pues,

$$C(D, C^o(K, \mathbb{T})) \times \{1_{C(D,\pi^1(K))}\} \subseteq U \subseteq C(D, C^o(K, \mathbb{T})) \times \{\alpha\},$$

y, como el elemento identidad pertenece a U, entonces no hay más remedio que $\alpha = 1_{C(D,\pi^1(K))}$. Por tanto, el único conexo que contiene a $C(D, C^o(K, \mathbb{T})) \times \{1_{C(D,\pi^1(K))}\}$ y que está contenido en $C(D \times K, \mathbb{T})$ es $C(D, C^o(K, \mathbb{T}))$, luego la componente conexa de la identidad de $C(D \times K, \mathbb{T})$ es $C(D, C^o(K, \mathbb{T}))$. □

Veamos un último resultado auxiliar acerca de la divisibilidad de grupo dual del espacio de Banach $C(X, \mathbb{R})$ donde X sigue siendo un espacio compacto, antes del Teorema principal de la sección. Recordamos que un grupo G es *divisible* si verifica la siguiente condición: *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *y para todo elemento* $g \in G$*, existe* $h \in G$ *tal que* $h^n = g$. Entonces:

Lema 2.2.17 *Sea X un espacio topológico compacto. Entonces el grupo dual de $C(X, \mathbb{R})$ es un grupo divisible.*

-Demostración-
Sean $\chi \in C(X, \mathbb{R})^\wedge$ y $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Por el Teorema 1.1.10 (en [19], [111] ó [118]), dado $\chi \in C(X, \mathbb{R})^\wedge$ existe un elemento $\mu \in C(X, \mathbb{R})^*$ tal que $\chi = \exp(\mu)$. Llamamos $\lambda := \chi^{\frac{1}{n}}$ y está definida de la siguiente forma: si $f \in C(X, \mathbb{R})$, entonces $\lambda(f) = \chi(f)^{\frac{1}{n}} = \exp(\mu(f)/n)$, de donde μ/n sigue siendo un elemento de $C(X, \mathbb{R})^*$. Es de fácil comprobación que en ese caso, $\lambda \in C(X, \mathbb{R})^\wedge$ y además verifica que $\lambda^n = \chi$, con lo que $C(X, \mathbb{R})$ es un grupo divisible. □

Aquí tenemos ya el Teorema principal de la sección:

Teorema 2.2.18 *Sean X e Y dos espacios topológicos Hausdorff compactos metrizables no numerables con la estructura $X = K_1 \times D_1$ e $Y = K_2 \times D_2$, donde K_i es un espacio compacto conexo metrizable y D_i un compacto totalmente disconexo metrizable para cada $i \in \{1, 2\}$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *$C(X, \mathbb{T}) \cong C(Y, \mathbb{T})$.*
2. *(a) $\bigoplus_{w(D_1)} \pi^1(K_1) \cong \bigoplus_{w(D_2)} \pi^1(K_2)$, donde $w(D_1)$ y $w(D_2)$ son los pesos de D_1 y D_2, respectivamente, y*

   (b) $C(D_1, \mathbb{T}) \cong C(D_2, \mathbb{T})$.

-Demostración-
1. $\Rightarrow$ 2. Por hipótesis tenemos que

$$C(K_1 \times D_1, \mathbb{T}) \overset{H}{\cong} C(K_2 \times D_2, \mathbb{T}),$$

es decir, por el Lema 2.2.15,

$$C(D_1 \times K_1, \mathbb{R}) \times C(D_1, \mathbb{T}) \times C(D_1, \pi^1(K_1)) \cong C(D_2 \times K_2, \mathbb{R}) \times C(D_2, \mathbb{T}) \times C(D_2, \pi^1(K_2)). \tag{2.12}$$

Así pues, si tomamos cocientes en (2.12) por $C(D_1 \times K_1, \mathbb{R}) \times C(D_1, \mathbb{T})$ que es la componente conexa de $C(K_1 \times D_1, \mathbb{T})$ (Proposición 2.2.16) y teniendo en cuenta que tanto H como su inversa llevan la componente conexa de la identidad en la componente conexa de la identidad, obtenemos que

$$\widetilde{H} : C(D_1, \pi^1(K_1)) \to C(D_2, \pi^1(K_2))$$

sigue siendo un isomorfismo topológico. De la Proposición 2.2.10 sabemos que

$$C(D_1, \pi^1(K_1)) \cong \bigoplus_{w(D_1)} \pi^1(K_1) \text{ y también } C(D_2, \pi^1(K_2)) \cong \bigoplus_{w(D_2)} \pi^1(K_2). \tag{2.13}$$

Como partíamos de

$$C(D_1, \pi^1(K_1)) \overset{\widetilde{H}}{\cong} C(D_2, \pi^1(K_2)),$$

entonces de (2.13) obtenemos

$$\bigoplus_{w(D_1)} \pi^1(K_1) \cong \bigoplus_{w(D_2)} \pi^1(K_2),$$

con lo que ya hemos probado la parte (a).

Falta probar la parte (b) de la segunda afirmación de este resultado, es decir que lo que resta es comprobar que efectivamente,

$$C(D_1, \mathbb{T}) \cong C(D_2, \mathbb{T}).$$

Ahora, lo que vamos a hacer es restringir H a la componente conexa de $C(D_1 \times K_1, \mathbb{T})$, y como lleva componentes conexas en componentes conexas y su inversa también, $H_|$ queda así,

$$H_| : C(D_1, C^o(K_1, \mathbb{T})) \longrightarrow C(D_2, C^o(K_2, \mathbb{T})),$$

que sigue siendo un isomorfismo topológico. Entonces, si en (2.12) restringimos H a la componente conexa de la identidad del espacio de partida, obtenemos que

$$C(D_1 \times K_1, \mathbb{R}) \times C(D_1, \mathbb{T}) \cong C(D_2 \times K_2, \mathbb{R}) \times C(D_2, \mathbb{T}). \tag{2.14}$$

Como $X = D_1 \times K_1$ y $Y = D_2 \times K_2$ son compactos metrizables no numerables por la estructura de los K_i y D_i, entonces, por el Teorema 2.1.1 la igualdad (2.14) se transforma en:

$$C(K, \mathbb{R}) \times C(D_1, \mathbb{T}) \cong C(K, \mathbb{R}) \times C(D_2, \mathbb{T}), \tag{2.15}$$

siendo K un compacto metrizable no numerable. Dualizamos en (2.15), con lo que obtenemos

$$C(K, \mathbb{R})^\wedge \times A(D_1) \cong C(K, \mathbb{R})^\wedge \times A(D_2), \tag{2.16}$$

donde $A(D_1)$ y $A(D_2)$ son los grupos topológicos abelianos libres de D_1 y D_2, respectivamente, los cuales verifican $A(D_i) \cong A(D_i)^{\wedge\wedge} \cong C(D_i, \mathbb{T})^\wedge$ para $i \in \{1, 2\}$ (Nota 1.2.2 del Capítulo 1).

Para cada $i \in \{1, 2\}$, $A(D_i)$ es el grupo (topológico) abeliano libre sobre D_i. Los subgrupos de los grupos abelianos libres son abelianos libres, luego son isomorfos a $\oplus_\alpha \mathbb{Z}$. Como el grupo $\mathbb{Z}$ no es divisible, tampoco puede serlo $\oplus_\alpha \mathbb{Z}$. De aquí se deduce que $A(D_i)$ no puede tener subgrupos divisibles, con lo que $A(D_i)$ es un grupo reducido, donde $i \in \{1, 2\}$.

Llamamos, entonces, σ al isomorfismo de (2.16). Ahora falta comprobar que $\sigma(C(K, \mathbb{R})^\wedge \times \{0_{A(D_1)}\}) = C(K, \mathbb{R})^\wedge \times \{0_{A(D_2)}\}$. Como $C(K, \mathbb{R})^\wedge \times \{0_{A(D_1)}\}$ es divisible (Lema 2.2.17), además es el subgrupo divisible maximal de $C(K, \mathbb{R})^\wedge \times A(D_1)$, y la propiedad de divisibilidad se conserva por isomorfismos, y tanto $\sigma = \widehat{H}_|$ como $\sigma^{-1} = \widehat{H^{-1}}_|$ lo son, entonces $\sigma(C(K, \mathbb{R})^\wedge \times \{0_{A(D_1)}\}) \subseteq C(K, \mathbb{R})^\wedge \times \{0_{A(D_2)}\}$, porque la segunda proyección, la que se hace sobre $A(D_2)$, es 0 debido a que $A(D_2)$ es reducido, como acabamos de ver. De la misma forma ocurre con σ^{-1}, luego $\sigma^{-1}(C(K, \mathbb{R})^\wedge \times \{0_{A(D_2)}\}) \subseteq C(K, \mathbb{R})^\wedge \times \{0_{A(D_1)}\}$, i.e., $\sigma(C(K, \mathbb{R})^\wedge \times \{0_{A(D_1)}\}) = C(K, \mathbb{R})^\wedge \times \{0_{A(D_2)}\}$. Partimos pues por $C(K, \mathbb{R})^\wedge \times \{0_{A(D_1)}\}$ en la parte izquierda de la ecuación (2.16) y por $C(K, \mathbb{R})^\wedge \times \{0_{A(D_2)}\}$ en la de la derecha. Así pues obtenemos

$$A(D_1) \cong A(D_2).$$

De esta forma, dualizando de nuevo, obtenemos

$$C(D_1, \mathbb{T}) \cong C(D_2, \mathbb{T}),$$

y ya hemos probado 2(b).

2. $\Rightarrow$ 1. Ahora suponemos que

$$\bigoplus_{w(D_1)} \pi^1(K_1) \cong \bigoplus_{w(D_2)} \pi^1(K_2) \ \text{ y } \ C(D_1, \mathbb{T}) \cong C(D_2, \mathbb{T}).$$

De este isomorfismo $\bigoplus_{w(D_1)} \pi^1(K_1) \cong \bigoplus_{w(D_2)} \pi^1(K_2)$, obtenemos directamente que

$$C(D_1, \pi^1(K_1)) \cong C(D_2, \pi^1(K_2)),$$

ya que $C(D_i, \pi^1(K_i)) \cong \bigoplus_{w(D_i)} \pi^1(K_i)$ para $i \in \{1, 2\}$ (Proposición 2.2.10).

Falta ver, por tanto, que $C(D_1, C^o(K_1, \mathbb{T})) \cong C(D_2, C^o(K_2, \mathbb{T}))$, pero esto se puede deducir del Lema 2.2.15, ya que ahí se prueba, entre otras cosas, que

$$C(D_i, C^o(K_i, \mathbb{T})) \cong C(D_i \times K_i, \mathbb{R}) \times C(D_i, \mathbb{T}),$$

donde $i \in \{1, 2\}$. Como del Teorema 2.1.1 tenemos que

$$C(D_1 \times K_1, \mathbb{R}) \cong C(D_2 \times K_2, \mathbb{R}),$$

y por hipótesis,

$$C(D_1, \mathbb{T}) \cong C(D_2, \mathbb{T}),$$

entonces

$$H : C(D_1, C^o(K_1, \mathbb{T})) \times C(D_1, \pi^1(K_1)) \longrightarrow C(D_2, C^o(K_2, \mathbb{T})) \times C(D_2, \pi^1(K_2))$$

es un isomofismo topológico, tal y como queríamos probar. $\square$

En el caso que los espacios D_1 y D_2 son compactos metrizables totalmente disconexos *no numerables*, entonces obtenemos como consecuencia el siguiente resultado:

Corolario 2.2.19 *Sean X e Y dos espacios topológicos Hausdorff compactos metrizables con la estructura $X = K_1 \times D_1$ e $Y = K_2 \times D_2$, donde K_i es un espacio compacto conexo metrizable y D_i un compacto totalmente disconexo metrizable no numerable para cada $i \in \{1, 2\}$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. $C(X, \mathbb{T}) \cong C(Y, \mathbb{T})$.

2. $\bigoplus_\omega \pi^1(K_1) \cong \bigoplus_\omega \pi^1(K_2)$.

-Demostración-
Para poder aplicar el Teorema anterior 2.2.18, falta tan sólo probar una hipótesis: $C(D_1, \mathbb{T}) \cong C(D_2, \mathbb{T})$. Pero ésta se deduce del Teorema 2.2.3, debido a que los espacios D_1 y D_2 son compactos totalmente disconexos metrizables no numerables. Por otra lado, y debido de nuevo a la estructura de los espacios D_1 y D_2 , éstos son 2AN, luego $w(D_1) = w(D_2) = \omega$. □

Pero si los espacios D_1 y D_2 son *finitos*, el Teorema 2.2.18 se reduce al siguiente resultado:

Corolario 2.2.20 *Sean X e Y dos espacios topológicos Hausdorff compactos con la estructura $X = K_1 \times D_1$ e $Y = K_2 \times D_2$, donde K_i es un espacio compacto conexo metrizable y D_i un espacio topológico finito para cada $i \in \{1, 2\}$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. $H : C(X, \mathbb{T}) \longrightarrow C(Y, \mathbb{T})$ *es un isomorfismo topológico.*

2. $|D_1| = |D_2| = n$ *y* $\bigoplus_n \pi^1(K_1) \cong \bigoplus_n \pi^1(K_2)$.

-Demostración-
Como los espacios topológicos finitos verifican que su peso coincide con su cardinal, entonces del Lema 2.2.8 y del Teorema 2.2.18 ya obtenemos lo afirmado en este resultado. □

Nota 2.2.21 *Si no existe la parte totalmente disconexa ni en X ni en Y en el Teorema 2.2.18, es fácil ver que éste se reduce al Teorema 2.2.1.*

2.3. Grupos unitarios de C^*-álgebras de grupo

Los resultados obtenidos anteriormente pueden aplicarse de un modo directo al estudio de los isomorfismos entre grupos unitarios de C^*-álgebras. Estas aplicaciones tienen especial relevancia en el caso de las C^*-álgebras de grupo que a continuación describiremos. En la Sección 1.4, ya se introdujeron los resultados básicos sobre las C^*-álgebras y la relación de esta teoría con los espacios de funciones continuas. Más concretamente, si G es un grupo localmente compacto abeliano, éste tiene asociada una C^*-álgebra conmutativa $C^*(G)$ que se puede identificar con

$$C_0(C^*(G)^\wedge, \mathbb{C}) = C_0(\widehat{G}, \mathbb{C}) \text{ (Teorema 1.4.17).}$$

En el caso en que estemos trabajando con un grupo discreto LCA, tendremos que $C_0(\widehat{G}, \mathbb{C}) = C(\widehat{G}, \mathbb{C})$, ya que $\widehat{G}$ se convierte en un grupo topológico abeliano compacto. Recordamos a su vez que $\widehat{G}$ puede ser identificado con el espacio de estructura de la C^*-álgebra de G. El álgebra $C(\widehat{G}, \mathbb{C})$ tiene unidad y su grupo de unitarios resulta ser $C(\widehat{G}, \mathbb{T})$, tal y como vimos en la Sección 1.4.3 del Capítulo 1. Aquí es donde se encuentra el punto de unión entre lo que ya hemos estudiado para espacios topológicos (Sección 2.2) y adonde queremos llegar. Esto nos permitirá ligar las relaciones entre C^*-álgebras de grupo con las relaciones entre sus grupos duales.

El objetivo será, utilizando los resultados de la Sección 2.2, analizar qué relación debe existir entre dos grupos, cuando los grupos unitarios de sus C^*-álgebras respectivas son isomorfos. Partimos, pues, de dos grupos topológicos discretos Γ_1, Γ_2 tales que los grupos de unitarios de sus C^*-álgebras asociadas isomorfos topológicamente, i.e.:

$$\mathcal{U}(C^*(\Gamma_1)) \cong \mathcal{U}(C^*(\Gamma_2)),$$

o, lo que es lo mismo,

$$C(\widehat{\Gamma}_1, \mathbb{T}) \cong C(\widehat{\Gamma}_2, \mathbb{T}).$$

Lo que pretendemos es encontrar alguna relación entre los grupos Γ_1 y Γ_2, o entre las C^*-álgebras asociadas $C^*(\Gamma_1)$ y $C^*(\Gamma_2)$, a partir del isomorfismo entre los correspondientes grupos de unitarios de las C^*-álgebras, cuando Γ_1 y Γ_2 son grupos topológicos discretos, y en ocasiones y bajo ciertas circunstancias, recorreremos el camino a la inversa.

En primer lugar, recordamos un resultado de [75], que se corresponde con parte del Teorema 8.57 de dicho trabajo:

Teorema 2.3.1 *a) Sea G un grupo topológico abeliano localmente compacto. Entonces la composición de funciones:*

$$Hom(\mathbb{T},G) \overset{incl}{\to} C_o(\mathbb{T},G) \overset{q}{\to} \pi_1(G)$$

que a cada elemento de $Hom(\mathbb{T},G)$ lo lleva a su correspondiente clase de homotopía, es un isomorfismo: cada clase de homotopía de funciones continuas de $\mathbb{T}$ en G, que preservan puntos base, contiene exactamente un homomorfismo.

b) Sea G un grupo compacto conexo. Entonces la composición de funciones

$$\mu_G : \widehat{G} \overset{incl}{\to} C(G,\mathbb{T}) \overset{\mathcal{J}}{\to} \pi^1(G),$$

que a cada elemento χ de $\widehat{G}$ lo lleva a su clase de homotopía $[\chi]$, es un isomorfismo.

La afirmación del Teorema 2.3.1 que más utilizaremos es la segunda. Es decir que si G es un grupo compacto conexo, su grupo dual es isomorfo al grupo de cohomotopía de G. Adaptamos la aplicación μ_G del anterior Teorema 2.3.1 a Γ un grupo abeliano discreto y queda de la siguiente forma:

$$\begin{array}{rcl} \mu_{\widehat{\Gamma}} : \widehat{\widehat{\Gamma}} & \longrightarrow & \pi^1(\widehat{\Gamma}) \\ \chi & \longmapsto & [\chi], \end{array}$$

Aquí trabajaremos con el isomorfismo $\mu_\Gamma : \Gamma \to \pi^1(\widehat{\Gamma})$, que está relacionado con $\mu_{\widehat{\Gamma}}$ de la siguiente forma: $\mu_\Gamma = \mu_{\widehat{\Gamma}} \circ \alpha_\Gamma$, esto es,

$$\Gamma \xrightarrow{\alpha_\Gamma} \widehat{\widehat{\Gamma}} \xrightarrow{\mu_{\widehat{\Gamma}}} \pi^1(\widehat{\Gamma}),$$

donde α_Γ es la aplicación evaluación de la dualidad de Pontryagin (Definición 1.1.5) que en este caso es un isomorfismo topológico, ya que Γ es discreto (Ejemplo 1.1.7).

Además, identificaremos $\widehat{\Gamma}$ con el espectro del álgebra $C^*(\Gamma)$ y $\pi^1(\widehat{\Gamma})$ es el grupo de cohomotopía de dicho espectro que a su vez podemos verlo, siempre que Γ sea un grupo discreto, como el siguiente cociente:

$$\pi^1(\widehat{\Gamma}) \cong \frac{C(\widehat{\Gamma},\mathbb{T})}{C^o(\widehat{\Gamma},\mathbb{T})}.$$

Como $C^o(\widehat{\Gamma}, \mathbb{T})$ es la componente conexa de la identidad, podemos identificar $\pi^1(\widehat{\Gamma})$ con el cociente del grupo de unitarios de $C^*(\Gamma)$ partido por su componente conexa de la identidad:

$$\pi^1(\widehat{\Gamma}) \cong \frac{\mathcal{U}(C^*(\Gamma))}{\mathcal{U}(C^*(\Gamma))_0}.$$

En el capítulo 5 de [117] aparece ampliamente descrito el concepto de clase de homotopía de funciones continuas entre dos espacios topólogicos X e Y, cuyo conjunto se denota en [117] por $[X, Y]$. En particular, allí podemos encontrar el caso especial de cuando $Y = \mathbb{T}$. El conjunto de las clases de homotopía (o de cohomotopía, depende de los autores) de funciones continuas de un espacio X en el círculo $\mathbb{T}$ viene denotado por $H^1(X)$, que es un grupo abeliano, tal y como se describe en el Lema 5 de [117]. En el Capítulo 1, podemos encontrar información acerca de dicho grupo, así como también en la sección 2.1 de este mismo Capítulo 2.

El Teorema 2.3.1 adaptado afirma lo siguiente:

Teorema 2.3.2 *Sea Γ un grupo topológico discreto libre de torsión, entonces la función*

$$\begin{aligned} \mu_\Gamma : \Gamma &\longrightarrow \pi^1(\widehat{\Gamma}) \\ \chi &\longmapsto [\chi] \end{aligned}$$

es un isomorfismo de grupos. En otras palabras, cada función de $\widehat{\Gamma}$ en $\mathbb{T}$ es homotópica exactamene a un caracter y el grupo de cohomotopía del espectro de la C^*-álgebra asociada a Γ es isomorfo a Γ.

Si Γ deja de ser libre de torsión, entonces μ_Γ pierde la inyectividad.

Nota 2.3.3 *Sea Γ un grupo topológico discreto. Entonces,*

$$ker(\mu_\Gamma) = t\Gamma,$$

donde $t\Gamma$ es la parte de torsión de Γ y además es isomorfo al anulador de $\widehat{\Gamma}_0$, la componente conexa de $\widehat{\Gamma}$, esto es, el conjunto de todos los caracteres de $\widehat{\widehat{\Gamma}}$ que se anulan en $\widehat{\Gamma}_0$ (Ecuación 1.1 en el Capítulo 1).

-Demostración-
($\subseteq$) Sea $\lambda \in ker(\mu_\Gamma)$, luego $\mu_\Gamma(\lambda) \in C^o(\widehat{\Gamma}, \mathbb{T})$, esto es, $\lambda \in C^o(\widehat{\Gamma}, \mathbb{T})$ y si la restringimos a $\widehat{\Gamma}_0$, seguirá siendo elevable. Además tenemos que $\lambda_{|\widehat{\Gamma}_0}$ es un carácter de $\widehat{\Gamma}_0$ en $\mathbb{T}$, con lo que $\lambda_{|\widehat{\Gamma}_0} \in ker(\mu_{\widehat{\Gamma}_0})$. Del Teorema 2.3.2, sabemos que $\mu_{\widehat{\Gamma}_0}$ es un isomorfismo, luego $\lambda_{\widehat{G}_0} = \overline{1}_\mathbb{T}$, porque pertenece al núcleo de $\mu_{\widehat{G}_0}$ que en este caso, es la identidad de $\widehat{\widehat{\Gamma}_0}$. Así pues, $\lambda(\widehat{\Gamma}_0) = \{1_\mathbb{T}\}$, con lo que ya hemos obtenido que $\lambda \in (\widehat{\Gamma}_0)^\perp$, esto es, $\lambda \in t\Gamma$.

($\supseteq$) Sea ahora $\lambda \in t\Gamma$. Como $t\Gamma \cong (\widehat{\Gamma}_0)^\perp$ y además,

$$\left(\frac{\widehat{\Gamma}}{\widehat{\Gamma}_0}\right)^\wedge \cong (\widehat{\Gamma}_0)^\perp,$$

entonces el elemento $\lambda \in t\Gamma$ induce un carácter

$$\lambda' : \frac{\widehat{\Gamma}}{\widehat{\Gamma}_0} \to \mathbb{T},$$

de tal forma que $\lambda = \lambda' \circ p$, siendo p la aplicación cociente $p : \widehat{\Gamma} \to \frac{\widehat{\Gamma}}{\widehat{\Gamma}_0}$. Como el grupo $\frac{\widehat{\Gamma}}{\widehat{\Gamma}_0}$ es compacto totalmente disconexo, existe una aplicación continua

$$f' : \frac{\widehat{\Gamma}}{\widehat{\Gamma}_0} \to \mathbb{R}$$

tal que $\lambda' = \exp(f')$. Además, $\lambda'(\widehat{\Gamma}_0) = 1_\mathbb{T}$, ya que $\lambda \in (\widehat{\Gamma}_0)^\perp$, luego $f'(\widehat{\Gamma}_0) \subseteq \mathbb{Z}$. Entonces hacemos la siguiente composición:

$$f : \widehat{\Gamma} \xrightarrow{p} \frac{\widehat{\Gamma}}{\widehat{\Gamma}_0} \xrightarrow{f'} \mathbb{R},$$

de forma que $f := f' \circ p$ es continua y verifica $\exp(f)(\widehat{\Gamma}_0) = \exp(f'(p(\widehat{\Gamma}_0))) = 1_\mathbb{T}$, ya que $f'(\widehat{\Gamma}_0) \subseteq \mathbb{Z}$. Por otro lado, la función f verifica

$$\lambda = \lambda' \circ p = \exp(f') \circ p = \exp(f' \circ p) = \exp(f),$$

luego $\lambda \in \ker(\mu_\Gamma)$, por tener logaritmo continuo. $\square$

A continuación, presentamos un ejemplo con el que queremos resaltar la importancia de la propiedad del grupo discreto de ser libre de torsión, o, equivalentemente la del grupo dual de ser conexo. Si no aparece dicha condición, la afirmación del Teorema 2.3.1 o del 2.3.2 no tiene por qué ser válida. Por otro lado, si el grupo discreto Γ es de torsión, entonces μ_Γ mantiene la propiedad de la sobreyectividad.

Ejemplo 2.3.4 *La aplicación μ_Γ del Teorema 2.3.2 no es sobreyectiva cuando $\Gamma = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$.*

-Demostración-
De hecho, $\mu_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_2}$ tampoco es inyectiva, ya que el núcleo de esta aplicación es $\{0\} \times \mathbb{Z}$, tras lo visto en la Nota 2.3.3.

Veamos ahora que $\mu_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_2}$ no es sobreyectiva. Recordamos que, según lo visto en el Teorema 2.3.2, ésta tiene la siguiente forma:

$$\mu_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_2} : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \pi^1(\mathbb{T} \times \mathbb{Z}_2)$$

En primer lugar, estudiamos cómo actúan los elementos del grupo $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$ como caracteres del grupo $\mathbb{T} \times \mathbb{Z}_2$. Este grupo sólo tiene dos tipos de caracteres:

$$\chi_1^n(t, j) := jt^n \text{ y } \chi_2^n(t, j) = t^n,$$

para todo par $(t, j) \in \mathbb{T} \times \mathbb{Z}_2$, con $j \in \{-1, 1\}$. El carácter χ_1^n manda todo elemento $(t, j) \in \mathbb{T} \times \mathbb{Z}_2$ al elemento t^n o a su opuesto $-t^n$, dependiendo del valor de $j \in \mathbb{Z}_2$, mientras que el carácter χ_2^n manda a cada elemento (t, j) al correspondiente t^n, independientement del valor que tenga $j \in \mathbb{Z}_2$.

En segundo lugar, vemos que μ no es ni sobreyectiva ni inyectiva. Escogemos por ello la siguiente aplicación $f \in C(\mathbb{T} \times \mathbb{Z}_2, \mathbb{T})$:

$$\begin{aligned} \text{si } (t, j) \in \mathbb{T} \times \{1\} : \ f(t, 1) &:= t \\ \text{si } (t, j) \in \mathbb{T} \times \{-1\} : \ f(t, -1) &:= t^2 \end{aligned}$$

La pregunta que nos hacemos es si existe un carácter $\chi \in \widehat{\mathbb{T} \times \mathbb{Z}_2}$ tal que $\mu(\chi) = [f]$, es decir, si $\chi - f$ es homotópico a la función constante igual a $1_\mathbb{T}$. Probamos con los dos tipos de caracteres que tenemos. Si $n \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} (\chi_1^n - f)(t, 1) &= t^n t^{-1} = t^{n-1} \\ (\chi_1^n - f)(t, -1) &= -t^n t^{-2} = -t^{n-2} \end{aligned}$$

Así, $\chi_1^n - f$ restringido a la componente conexa de la identidad $\mathbb{T} \times \{1\}$, es homotópico a 1 (esto es, tiene logaritmo continuo) si y sólo si $n = 1$; en otro caso, un homomorfismo continuo de la forma $e^{2\pi ir} \to e^{2\pi mr}$, con $m \neq 0$, no puede tener logaritmo continuo, ya que éste vendría dado por la aplicación $r \mapsto rm$ por cada intervalo de periodo 1, y ésta no es continua. Así pues, n ha de tomar el valor 1. Pero, en ese caso, $\chi_1^n - f$ no factoriza sobre $\mathbb{T} \times \{-1\}$. Lo mismo ocurre para χ_2^n. Así pues, hemos encontrado una aplicación continua f cuya clase de homotopía no incluye a ningún carácter de $\mathbb{T} \times \mathbb{Z}_2$ y $\mu_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_2}$ no es sobreyectiva.

$\square$

Como consecuencia del Teorema 2.2.1 de la sección anterior, obtenemos el siguiente resultado, pero desde la perspectiva de las C^*-álgebras de grupo.

Teorema 2.3.5 *Sean Γ_1, Γ_2 grupos topológicos discretos libres de torsión numerables. Entonces las siguientes afirmaciones equivalen:*

1. *Los grupos de unitarios de $C^*(\Gamma_1)$ y $C^*(\Gamma_2)$ son isomorfos topológicamente.*

2. *Los grupos $C(\widehat{\Gamma_1}, \mathbb{T})$ y $C(\widehat{\Gamma_2}, \mathbb{T})$ son isomorfos topológicamente.*

3. *Los grupos discretos Γ_1 y Γ_2 son isomorfos.*

4. *Las C^*-álgebras $C^*(\Gamma_1)$ y $C^*(\Gamma_2)$ son isomorfas (como C^*-álgebras).*

-Demostración-

Como Γ_1 y Γ_2 son grupos discretos, numerables y libres de torsión, sus correspondientes grupos duales son compactos, conexos y metrizables, es decir, los espectros de las C^*-álgebras asociadas tendrán esa forma. Entonces la aplicación μ_{Γ_j} definida anteriormente, con $j \in \{1, 2\}$, es un isomorfismo (Teorema 2.3.2). En general, si G es un grupo topológico compacto y conexo (Teorema 2.3.1 o Teorema 8.57 de [75]), se tiene que:

$$C(G, \mathbb{T}) \cong C^o(G, \mathbb{T}) \times \widehat{G}.$$

Entonces, por el Teorema 2.3.2 podemos afirmar que

$$\mathcal{U}(C^*(\Gamma_j)) \cong \mathcal{U}(C^*(\Gamma_j))_0 \times \Gamma_j,$$

donde $\mathcal{U}(C^*(\Gamma_j))_0$ se corresponde a la componente conexa de la identidad del grupo de unitarios de $C^*(\Gamma_j)$ para $j \in \{1, 2\}$.

Así pues, el isomorfismo de la afirmación (1) de este Teorema queda de la siguiente forma:

$$\mathcal{U}(C^*(\Gamma_1))_0 \times \Gamma_1 \cong \mathcal{U}(C^*(\Gamma_2))_0 \times \Gamma_2, \tag{2.17}$$

y, como el isomorfismo de (2.17) lleva espacios conexos en conexos, ya tenemos lo que buscábamos, puesto que, si partimos por la componente conexa de la identidad en ambas partes de (2.17), llegamos a:

$$\Gamma_1 \cong \Gamma_2,$$

y, si dualizamos en el anterior isomorfismo, obtenemos que los espectros de las C^*-álgebras de Γ_1 y Γ_2 son isomorfos.

Por tanto, las afirmaciones 1. y 3. son equivalentes como también lo son las afirmaciones 1. y 2., por definición, ya que el grupo de unitarios de una C^*-álgebra de Banach conmutativa de grupo coincide con el grupo de funciones continuas del espectro en $\mathbb{T}$ (ver comentarios al comienzo de la Sección 2.3 o en la Sección 1.4.3 del Capítulo 1).

Veamos ahora la doble implicación que falta que también es conocida:
3. $\Rightarrow$ 4. Por hipótesis, existe un isomorfismo (topológico)

$$\phi : \widehat{\Gamma}_1 \to \widehat{\Gamma}_2.$$

De esta forma, podemos construir una aplicación

$$\begin{array}{rcl} \Phi : C(\widehat{\Gamma}_2, \mathbb{C}) & \longrightarrow & C(\widehat{\Gamma}_1, \mathbb{C}) \\ f & \longmapsto & f \circ \phi, \end{array}$$

y es fácil de comprobar que Φ es un isomorfismo. Por tanto, las C^*-algebras $C^*(\Gamma_1)$ y $C^*(\Gamma_2)$ son isomorfas.

4. $\Rightarrow$ 1. Únicamente hay que observar que los grupos unitarios de dos C^*-álgebras isomorfas $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son necesariamente isomorfos y basta por ello que probemos que si $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ es un isomorfismo de C^*-álgebras, entonces

$$\phi(\mathcal{U}(\mathcal{A})) \subseteq \mathcal{U}(\mathcal{B}).$$

Análogamente se probaría la inclusión contraria: $\phi(\mathcal{U}(\mathcal{A})) \supseteq \mathcal{U}(\mathcal{B})$. Sea $f \in \mathcal{U}(\mathcal{A})$, luego

$$\phi(f)\phi(f)^* = \phi(f)\phi(f^*) = \phi(ff^*) = \phi(1) = 1,$$

así como también $\phi(f)^*\phi(f) = 1$. Entonces se tiene efectivamente que

$$\phi(\mathcal{U}(\mathcal{A})) = \mathcal{U}(\mathcal{B}).$$

Por tanto, en el caso particular de las C^*-álgebras de grupo $C^*(\Gamma_1)$ y $C^*(\Gamma_2)$, obtenemos

$$\phi(\mathcal{U}(C^*(\Gamma_1))) = \mathcal{U}(C^*(\Gamma_2)),$$

con lo que $C(\widehat{\Gamma_1}, \mathbb{T}) \cong C(\widehat{\Gamma_2}, \mathbb{T})$, esto es, los grupos unitarios de las C^*-álgebras $C^*(\Gamma_1)$ y $C^*(\Gamma_2)$ son isomorfos topológicamente.

$\square$

Veamos ahora qué ocurre cuando trabajamos con dos grupos discretos de torsión numerables, si suponemos que los grupos de unitarios de las C^*-álgebras respectivas asociadas, o incluso estas C^*-álgebras, son isomorfos entre ellos.

Lema 2.3.6 *Sean T_1 y T_2 grupos topológicos discretos numerables de torsión. Entonces las siguientes afirmaciones equivalen:*

1. *Las C^*-álgebras $C^*(T_1)$ y $C^*(T_2)$ son isomorfas como C^*-álgebras.*

2. *Los grupos de unitarios de $C^*(T_1)$ y $C^*(T_2)$ son isomorfos topológicamente.*

3. *Los grupos T_1 y T_2 tienen el mismo cardinal.*

-Demostración-

1. $\Rightarrow$ 2. En el Teorema 2.3.5, se probó esta implicación para C^*-álgebras con unidad cualesquiera.

2. $\Rightarrow$ 3. Supongamos que los grupos de unitarios de $C^*(T_1)$ y $C^*(T_2)$ son isomorfos topológicamente, esto es, $C(\widehat{T}_1, \mathbb{T})$ y $C(\widehat{T}_2, \mathbb{T})$ son isomorfos topológicamente. Entonces, por el Lema 2.2.8 de la Sección 2.2.2, obtenemos que $\widehat{T}_1$ es finito si, y sólo si, $\widehat{T}_2$ lo es, y en ese caso, ambos tienen el mismo cardinal, llamémosle n. En ese caso, como el peso de un espacio finito coincide con su cardinal, tenemos que

$$w(\widehat{T}_i) = |\widehat{T}_i| = n \text{ con } i \in \{1, 2\},$$

y además, $w(\widehat{T}_i) = |T_i|$ para todo grupo topológico, donde $i \in \{1, 2\}$, entonces se deduce que $|T_1| = |T_2| = n$.

De aquí concluimos también que si uno de ellos es infinito, el otro no puede ser finito, y, como por hipótesis ambos son grupos numerables, entonces obtenemos trivialmente que $|T_1| = |T_2| = \omega$.
3. $\Rightarrow$ 1. Si los grupos T_1 y T_2 tienen el mismo cardinal, éste bien puede ser finito bien ω. En el caso que sea ω el cardinal, entonces es fácil construir un isomorfismo entre $C(\widehat{T}_1, \mathbb{C})$ y $C(\widehat{T}_2, \mathbb{C})$ tal y como se vió en el Teorema 2.3.5. Si T_1 y T_2 son finitos y del mismo cardinal m, entonces se deduce que $|\widehat{T}_1| = |\widehat{T}_2| = m$. De esta forma,

$$\mathbb{C}^{|\widehat{T}_1|} \cong \mathbb{C}^{|\widehat{T}_2|},$$

y las C^*-álgebras $C^*(T_1)$ y $C^*(T_2)$ son isomorfas trivialmente, en cualquiera de los dos casos. $\square$

Si dualizamos un grupo discreto numerable Γ, obtenemos que su grupo dual $G = \widehat{\Gamma}$ es compacto metrizable. En el Capítulo 1, Ecuación (1.1), vimos que

$$\widehat{\Gamma} \cong \frac{\widehat{\Gamma}}{(t\Gamma)^{\perp}} \times (t\Gamma)^{\perp} \tag{2.18}$$

Dado que $\frac{\widehat{\Gamma}}{\Gamma_0} \cong (t\Gamma)^{\wedge}$, el isomorfismo de (2.18) queda así:

$$\widehat{\Gamma} \cong (t\Gamma)^{\wedge} \times (t\Gamma)^{\perp}. \tag{2.19}$$

Una vez visto esto, podemos ya establecer el principal resultado de esta parte que se obtiene como consecuencia del Teorema 2.2.18 de la anterior sección.

Teorema 2.3.7 *Sean Γ_1 y Γ_2 grupos topológicos discretos numerables. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *Los grupos de unitarios de $C^*(\Gamma_1)$ y $C^*(\Gamma_2)$ son isomorfos topológicamente.*

2. *$|t\Gamma_1| = |t\Gamma_2| = \alpha$ y, además,*

$$\bigoplus_{\alpha} \frac{\Gamma_1}{t\Gamma_1} \cong \bigoplus_{\alpha} \frac{\Gamma_2}{t\Gamma_2}.$$

-Demostración-

Por el Lema 2.2.15 y lo visto en (2.19), tenemos que

$$\mathcal{U}(C^*(\Gamma_i)) \cong C((\Gamma_i)^\wedge, \mathbb{R}) \times C((t\Gamma_i)^\wedge, \mathbb{T}) \times C((t\Gamma_i)^\wedge, \widehat{(t\Gamma_i)^\perp}),$$

para $i \in \{1, 2\}$. Veamos ahora cada una de la implicaciones:
1. $\Rightarrow$ 2. Por hipótesis y por el Lema 2.2.15, como los grupos de unitarios de las C^*-álgebras asociadas a Γ_1 y Γ_2 son isomorfos, entonces sabemos que

$$C((t\Gamma_1)^\perp \times (t\Gamma_1)^\wedge, \mathbb{T}) \cong C((t\Gamma_2)^\perp \times (t\Gamma_2)^\wedge, \mathbb{T}),$$

y por el Teorema 2.2.18, obtenemos que

$$\bigoplus_\alpha \pi^1((t\Gamma_1)^\perp) \cong \bigoplus_\alpha \pi^1((t\Gamma_2)^\perp),$$

y gracias al Teorema 2.3.2

$$\bigoplus_\alpha \widehat{(t\Gamma_1)^\perp} \cong \bigoplus_\alpha \widehat{(t\Gamma_2)^\perp},$$

que es lo mismo que decir

$$\bigoplus_\alpha \left(\frac{\Gamma_1}{t\Gamma_1}\right) \cong \bigoplus_\alpha \left(\frac{\Gamma_2}{t\Gamma_2}\right) \tag{2.20}$$

A su vez, también sabemos que $C((t\Gamma_1)^\wedge, \mathbb{T}) \cong C((t\Gamma_2)^\wedge, \mathbb{T})$ gracias al Teorema 2.2.7, dado que los grupos $(t\Gamma_i)^\wedge$ son compactos metrizables totalmente disconexos (no numerables). Con otras palabras, esto quiere decir que los grupos de unitarios de las C^*-álgebras asociadas a los grupos $t\Gamma_1$ y $t\Gamma_2$ son isomorfos, entonces por el Lema 2.3.6 obtenemos que

$$|t\Gamma_1| = |t\Gamma_2|,$$

si se lo aplicamos a los grupos discretos de torsión numerables $t\Gamma_1$ y $t\Gamma_2$, tal y como aparece descrito en la afirmación 2.

2. $\Rightarrow$ 1. Supongamos ahora que

$$|t\Gamma_1| = |t\Gamma_2| = \alpha \ \text{ y } \ \bigoplus_\alpha \left(\frac{\Gamma_1}{t\Gamma_1}\right) \cong \bigoplus_\alpha \left(\frac{\Gamma_2}{t\Gamma_2}\right).$$

El isomorfismo anterior se puede ver también como $\bigoplus_\alpha \widehat{(t\Gamma_1)^\perp} \cong \bigoplus_\alpha \widehat{(t\Gamma_2)^\perp}$, ya que para $i \in \{1,2\}$, se sabe que $(t\Gamma_i)^\perp \cong \widehat{\left(\frac{\Gamma_i}{t\Gamma_1}\right)}$. Esto es lo mismo que decir, por el Teorema 2.3.2, que

$$\bigoplus_\alpha \pi^1((t\Gamma_1)^\perp) \cong \bigoplus_\alpha \pi^1((t\Gamma_2)^\perp).$$

Aplicamos, entonces, el Lema 2.3.6 y el Teorema 2.2.18, y ya obtenemos el isomorfismo entre $C(\widehat{\Gamma_1}, \mathbb{T})$ y $C(\widehat{\Gamma_2}, \mathbb{T})$, i.e., entre los grupos de unitarios $\mathcal{U}(C^*(\Gamma_1))$ y $\mathcal{U}(C^*(\Gamma_2))$ de las C^*-álgebras asociadas a Γ_1 y Γ_2, respectivamente. $\square$

En este último Teorema 2.3.7 no hemos dicho nada acerca de si el hecho de que las C^*-álgebras $C^*(\Gamma_1)$ y $C^*(\Gamma_2)$ sean isomorfas es equivalente a alguna de las afirmaciones de dicho Teorema. Para ello, presentamos un resultado que relaciona el hecho de que estas dos C^*-álgebras de grupo sean isomorfas con la afirmación 2. del Teorema 2.3.7. Sin embargo, no son afirmaciones equivalentes, como muestra el contraejemplo que veremos tras esta proposición.

Proposición 2.3.8 *Sean Γ_1 y Γ_2 grupos topológicos discretos tales que las correspondientes C^*-álgebras $C^*(\Gamma_1)$ y $C^*(\Gamma_2)$ son isomorfas. Entonces $|t\Gamma_1| = |t\Gamma_2| = \alpha$ y además,*

$$\bigoplus_\alpha \frac{\Gamma_1}{t\Gamma_1} \cong \bigoplus_\alpha \frac{\Gamma_2}{t\Gamma_2}.$$

-Demostración-
Si las C^*-álgebras $C^*(\Gamma_1)$ y $C^*(\Gamma_2)$ son isomorfas, entonces sus grupos de unitarios correspondientes son isomorfos (en la demostración del Teorema 2.3.5). Por tanto, por el Teorema 2.3.7 ya obtenemos la tesis de este resultado. $\square$

El siguiente ejemplo es el que da a conocer unos grupos cuyas C^*-álgebras de grupo asociadas no son isomorfas y sin embargo, sus grupos de unitarios sí lo son.

Ejemplo 2.3.9 *Sean Γ_1 y Γ_2 dos grupos discretos libres de torsión numerables no isomorfos tales que*

$$\Gamma_1 \oplus \Gamma_1 \cong \Gamma_2 \oplus \Gamma_2.$$

Entonces existe un isomorfismo topológico entre los grupos de unitarios de las C^*-álgebras de grupo $C^*(\Gamma_2 \times \mathbb{Z}_2)$ y $C^*(\Gamma_2 \times \mathbb{Z}_2)$, aunque

$$C^*(\Gamma_1 \times \mathbb{Z}_2) \ncong C^*(\Gamma_2 \times \mathbb{Z}_2).$$

-Demostración-
Llamamos $A := \widehat{\Gamma_1}$ y $B := \widehat{\Gamma_2}$. Veamos de qué forma se descompone $C(A \times \mathbb{Z}_2, \mathbb{T})$ y también $C(B \times \mathbb{Z}_2, \mathbb{T})$:

$$C(A \times \mathbb{Z}_2, \mathbb{T}) \cong C(A \times \mathbb{Z}_2, \mathbb{R}) \times C(\mathbb{Z}_2, \mathbb{T}) \times C(\mathbb{Z}_2, \widehat{A}),$$

y análogamente tenemos que

$$C(B \times \mathbb{Z}_2, \mathbb{T}) \cong C(B \times \mathbb{Z}_2, \mathbb{R}) \times C(\mathbb{Z}_2, \mathbb{T}) \times C(\mathbb{Z}_2, \widehat{B}).$$

De esta forma, como $C(\mathbb{Z}_2, \widehat{A}) \cong \Gamma_1 \oplus \Gamma_1$ y $C(\mathbb{Z}_2, \widehat{B}) \cong \Gamma_2 \oplus \Gamma_2$, y además,

$$\Gamma_1 \oplus \Gamma_1 \cong \Gamma_2 \oplus \Gamma_2$$

por hipótesis, entonces obtenemos efectivamente que

$$C(A \times \mathbb{Z}_2, \mathbb{T}) \cong C(B \times \mathbb{Z}_2, \mathbb{T}),$$

ya que por el Teorema de Milutin (Teorema 2.1.1) también se tiene que $C(A \times \mathbb{Z}_2, \mathbb{R}) \cong C(B \times \mathbb{Z}_2, \mathbb{R})$. Sin embargo, las C^*-álgebras asociadas a los grupos $\Gamma_1 \times \mathbb{Z}_2$ y $\Gamma_2 \times \mathbb{Z}_2$ no pueden ser isomorfas, ya que si lo fueran, este hecho implicaría que los espectros de cada una de ellas serían homeomorfos, esto es,

$$A \times \mathbb{Z}_2 \simeq B \times \mathbb{Z}_2,$$

luego, al restringir en este homeomorfismo a la componente conexa de cada uno de los grupos, obtendríamos que

$$A \simeq B,$$

luego $\pi^1(A)$ y $\pi^1(B)$ tendrían que ser grupos isomorfos, y, como $\pi^1(A) \cong \widehat{A}$ y análogamente, $\pi^1(B) \cong \widehat{B}$ (Teorema 2.3.1), entonces $\widehat{A} \cong \widehat{B}$. o lo que es lo mismo, $\Gamma_1 \cong \Gamma_2$ (Ejemplo 1.1.7). Contradicción, porque estamos suponiendo que no son isomorfos. Efectivamente, las C^*-álgebras asociadas a los grupos $\Gamma_1 \times \mathbb{Z}_2$ y $\Gamma_2 \times \mathbb{Z}_2$ no son isomorfas, aunque sus grupos de unitarios sí que lo son. Por tanto, la hipótesis y la tesis de la Proposición 2.3.8 no son equivalentes.

$\square$

Nota 2.3.10 *Es posible encontrar dos grupos discretos libres de torsión numerables con las propiedades nombradas en el Ejemplo 2.3.9.*

-Demostración-
Para justificar la existencia de dichos grupos, vamos a utilizar el siguiente resultado de [53] acerca de grupos libres de torsión que afirma:

Lema 91.7 *Para todo entero $m \geq 2$ existen dos grupos numerables libres de torsión no isomorfos A y B tales que*

$$\bigoplus_n A \cong \bigoplus_n B,$$

siempre que m divida a n.

Si escogemos $m = n = 2$, por el **Lema 91.7** de [53] tenemos que existen dos grupos libres de torsión numerables T_1 y T_2 tales que

$$T_1 \oplus T_1 \cong T_2 \oplus T_2.$$

El isomorfismo anterior $T_1 \oplus T_1 \cong T_2 \oplus T_2$ es un isomorfismo de grupos, pero si suponemos que T_1 y T_2 son grupos discretos, entonces éste se convierte en un isomorfismo topológico. Por tanto, podemos encontrar grupos discretos libres de torsión numerables T_1 y T_2, no isomorfos, cumpliendo las condiciones del Ejemplo 2.3.9. $\square$

A continuación, presentamos una tabla con el fin de mostrar una serie de ejemplos de grupos discretos entre los cuales habrá algunos que tengan los grupos unitarios isomorfos y otros no tienen por qué.

	Γ_1	Γ_2	¿$\mathcal{U}(C^*(\Gamma_i)) \cong \mathcal{U}(C^*(\Gamma_j))$?
Ejemplo 2.3.9	$T_1 \times \mathbb{Z}_2$	$T_2 \times \mathbb{Z}_2$	Sí
Ejemplo 2.3.11	$\mathbb{Z} \times \oplus_\omega \mathbb{Z}_2$	$\oplus_\omega \mathbb{Z} \times \oplus_\omega \mathbb{Z}_2$	Sí
Ejemplo 2.3.12 (1)	$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$	No
Ejemplo 2.3.12 (2)	$\oplus_\omega \mathbb{Z}$	$\mathbb{Z} \times \oplus_\omega \mathbb{Z}_2$	No
Ejemplo 2.3.12 (3)	$\oplus_\omega \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z} \times \oplus_\omega \mathbb{Z}_2$	No

Ahora veremos la descripción y motivación de cada uno de los ejemplos que han aparecido en la tabla. Comenzamos por el siguiente:

Ejemplo 2.3.11 *Los grupos* $\Gamma_1 = \mathbb{Z} \times \oplus_\omega \mathbb{Z}_2$ *y* $\Gamma_2 = \oplus_\omega \mathbb{Z} \times \oplus_\omega \mathbb{Z}_2$ *verifican las hipótesis del Teorema 2.3.7, ya que*

$$\bigoplus_\omega \mathbb{Z} \cong \bigoplus_\omega \bigoplus_\omega \mathbb{Z} \quad y \quad |t\Gamma_1| = |t\Gamma_2| = \omega,$$

luego por dicho Teorema tenemos que $C(\mathbb{T} \times 2^\omega, \mathbb{T}) \cong C(\mathbb{T}^\omega \times 2^\omega, \mathbb{T})$*, aunque las componentes conexas de* $\widehat{\Gamma}_1$ *y* $\widehat{\Gamma}_2$ *ni tan siquiera tienen la misma dimensión. De modo que los grupos* $\widehat{\Gamma_1}$ *y* $\widehat{\Gamma_2}$ *no son homeomorfos. De nuevo, obtenemos otro ejemplo de dos grupos cuyas* C^**-álgebras de grupo asociadas no son isomorfas pero sí lo son los grupos de unitarios correspondientes.*

Los siguientes ejemplos describen los grupos topológicos discretos de la tabla cuyos grupos de funciones continuas no pueden ser isomorfos entre ellos, esto es, los grupos unitarios de las C^*-álgebras de grupo correspondientes, tras lo visto en el Teorema 2.3.7.

Ejemplos 2.3.12 *1. Los grupos son* $\Gamma_1 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$ *y* $\Gamma_2 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$.

2. Los grupos son $\Gamma_1 = \oplus_\omega \mathbb{Z}$ *y* $\Gamma_2 = \oplus_\omega \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}$.

3. Los grupos son $\Gamma_1 = \oplus_\omega \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$ *y* $\Gamma_2 = \oplus_\omega \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}$.

-Demostración-

Seguimos la terminología del Teorema 2.3.7:

1. En este caso, tenemos que los grupos Γ_1 y Γ_2 tienen la misma parte de torsión, $\mathbb{Z}_2$, por lo que $|t\Gamma_1| = |t\Gamma_2| = 2$. Por otro lado,
$$\bigoplus_{\alpha} \frac{\Gamma_1}{t\Gamma_1} = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$
y
$$\bigoplus_{\alpha} \frac{\Gamma_2}{t\Gamma_2} = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z},$$
y estas sumas no son isomorfas. Entonces por el Teorema 2.3.7, los grupos de funciones continuas correspondientes no pueden ser isomorfos, esto es, los grupos de unitarios $\mathcal{U}(C^*(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2))$ y $\mathcal{U}(C^*(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2))$ de las C^*-álgebra asociadas, y éstas tampoco.

2. De igual forma calculamos $t\Gamma_1$ y $t\Gamma_2$, y obtenemos que Γ_1 tampoco tiene parte de torsión mientras que la de Γ_2 es la siguiente: $t\Gamma_2 = \oplus_\omega \mathbb{Z}_2$. Entonces, $\alpha_1 = 1$, pero $\alpha_2 = \omega$. Luego el Teorema 2.3.7 nos dice de nuevo que $C(\mathbb{T}^\omega, \mathbb{T})$ y $C(2^\omega \times \mathbb{T}, \mathbb{T})$ no pueden ser isomorfos.

3. En este caso, la parte de torsión de Γ_1 es $\mathbb{Z}_2$, luego su cardinal es 2, mientras que la parte de torsión de Γ_2 es $\oplus_\omega \mathbb{Z}_2$ y su cardinal ω. De nuevo, por el Teorema 2.3.7, obtenemos que los grupos de unitarios $\mathcal{U}(C^*(\oplus_\omega \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2))$ y $\mathcal{U}(C^*(\mathbb{Z} \times \oplus_\omega \mathbb{Z}_2))$ no son isomorfos, así como tampoco lo son sus C^*-álgebras asociadas.

$\square$

Capítulo 3

Aplicaciones separadoras entre grupos de funciones continuas evaluadas en $\mathbb{T}$

3.1. Introducción

La deducción de relaciones topológicas entre dos espacios topológicos X e Y a partir de las relaciones algebraicas, topológico-algebraicas o de orden que puede haber entre sus correspondientes espacios de funciones continuas reales tiene una amplia historia y literatura. De hecho, el primero de estos resultados se debe a Banach ([18]) para espacios métricos compactos, y poco tiempo después, fue Stone el que generalizó el resultado de Banach y lo convirtió en lo que hoy en día se conoce como el Teorema clásico de Banach-Stone que afirma lo siguiente:

Teorema 3.1.1 (Banach(1932), Stone(1937)) *Sean X e Y espacios topológicos compactos Hausdorff. Si $T : C(X) \longrightarrow C(Y)$ es una isometría lineal sobreyectiva, entonces H induce un homeomorfismo entre Y y X y además, H tiene la siguiente forma:*

$$(Tf)(y) = a(y)f(h(y)),$$

donde $a \in C(Y)$ y $h : Y \to X$ es dicho homeomorfismo.

-Demostración-
Un esquema de la demostración es el siguiente:
La aplicación dual de T, denotada por T^*, preserva puntos extremales de las bolas duales, que son exactamente aquellos funcionales lineales de la forma $\lambda\delta_x$ con $\lambda \in \mathbb{K}$ de módulo 1. Así pues, $T^*(\delta_y) = a(y)\delta_{h(y)}$ define una función escalar $a : Y \to \mathbb{K}$ y una aplicación $h : Y \to X$, es decir,

$$(Tf)(y) = a(y)f(h(y)),$$

para todo $y \in Y$ y $f \in C(X)$. Es simple rutina comprobar que h es un homeomorfismo y que a es continua (veáse, por ejemplo, [35]). $\square$

Desde entonces hasta ahora, se ha estado investigando en la forma de extender este Teorema a otro tipo de espacios. Para alcanzar este objetivo, una de las más utiles herramientas ha sido el concepto de aplicación separadora o de *disjointness preserving map*, que va un poco más allá del concepto de isometría lineal usado en el Teorema de Banach-Stone, ya que toda aplicación de este tipo es separadora. De esta forma, se han encontrado resultados análogos al Teorema clásico de Banach-Stone para espacios de funciones continuas evaluadas en $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, en un espacio de Banach general, o incluso para espacios de funciones sobre espacios topológicos X e Y con propiedades distintas de la compacidad, como la de ser localmente compactos o realcompactos.

De aquí en adelante supondremos que X e Y son espacios topológicos completamente regulares Hausdorff. En este capítulo nos centraremos en los grupos de funciones continuas de un espacio topológico que toman valores en un grupo, concretamente en $\mathbb{T}$, y estudiaremos si es posible encontrar resultados análogos al Teorema de Banach-Stone en función de las propiedades de X e Y que se vayan añadiendo, como pueda ser la propiedad de ser compactos (Sección 3.2), k- y μ-espacios (Sección 3.3), 1AN y realcompactos (Sección 3.5), y de la topología con la que se dote en cada caso a los grupos de funciones continuas $C(X,\mathbb{T})$ y $C(Y,\mathbb{T})$, como puedan ser la topología de la convergencia uniforme, cuando X e Y son compactos (Sección 3.2) o realcompactos y 1AN (Sección 3.5), topología de la convergencia puntual (Sección 3.4), en el caso en que son sólo completamente regulares, y la topología compacta abierta (Sección 3.3).

Para resolver el problema de extender el teorema de Banach-Stone para aplicaciones entre grupos de funciones continuas evaluadas en $\mathbb{T}$, trabajaremos en el contexto de las aplicaciones separadoras y además, emplearemos continuamente técnicas conocidas de la dualidad de Pontryagin. Pero la primera cuestión es elegir el significado adecuado del concepto de *aplicación separadora* para grupos de funciones continuas evaluadas en $\mathbb{T}$. Para dar forma al nuevo concepto, damos la siguiente definición:

Definición 3.1.2 *Sean f, $g \in C(X, \mathbb{T})$. Se dice que f y g* están separadas*, si para todo $x \in X$ $f(x) = 1_{\mathbb{T}}$ ó $g(x) = 1_{\mathbb{T}}$.*

Y el concepto de aplicación separadora adaptado a $\mathbb{T}$ es como sigue:

Definición 3.1.3 *Un homomorfismo $H : C(X, \mathbb{T}) \longrightarrow C(Y, \mathbb{T})$ se dice que es* separador*, si dadas f, $g \in C(X, \mathbb{T})$ tales que para todo $x \in X$ $f(x) = 1_{\mathbb{T}}$ o $g(x) = 1_{\mathbb{T}}$, entonces se tiene que para todo $y \in Y$ $(Hf)(y) = 1_{\mathbb{T}}$ o $(Hg)(y) = 1_{\mathbb{T}}$.*

En otras palabras, un homomorfismo H se dice que es *separador* si lleva aplicaciones separadas en aplicaciones separadas, o bien, si dadas f, $g \in C(X, \mathbb{T})$ tales que $(f^{-1}(\{1_{\mathbb{T}}\})) \cup (g^{-1}(\{1_{\mathbb{T}}\})) = X$, entonces $((Hf)^{-1}(\{1_{\mathbb{T}}\})) \cup ((Hg)^{-1}(\{1_{\mathbb{T}}\})) = Y$.

Sea, pues, la aplicación

$$H : C(X, \mathbb{T}) \longrightarrow C(Y, \mathbb{T}),$$

que supondremos a largo de todo el capítulo que es un isomorfismo topológico separador. Dependiendo de la sección en la que nos encontremos, H actuará sobre $C^o(X, \mathbb{T})$ (veáse Ecuación 1.2 en el Capítulo 1) o sobre todo el grupo $C(X, \mathbb{T})$.

En este Capítulo 3, utilizaremos con frecuencia el siguiente argumento, en el que denotamos por τ_c la topología compacta abierta y por $t_p(A)$ la topología de la convergencia puntual sobre los elementos de A.

Proposición 3.1.4 *Sean (G, τ_G) y (H, τ_H) dos grupos topológicos abelianos. Sea, además, $T : G \longrightarrow H$ un isomorfismo topológico. Entonces el homomorfismo dual:*

$$\widehat{T} : (\widehat{H}, t_p(H)) \longrightarrow (\widehat{G}, t_p(G))$$

y el homomorfismo dual

$$\widehat{T} : (\widehat{H}, \tau_c) \longrightarrow (\widehat{G}, \tau_c)$$

son isomorfismos topológicos.

-Demostración-
Probemos en primer lugar que el homomorfismo dual de T es un isomorfismo algebraico.

1. $\widehat{T}$ es un homomorfismo:

   Sean λ, $\beta \in \widehat{H}$. Entonces,

   $$\widehat{T}(\lambda\beta) = (\lambda\beta) \circ T = (\lambda \circ T)(\beta \circ T) = \widehat{T}(\lambda)\widehat{T}(\beta).$$

2. $\widehat{T}$ es un homomorfismo inyectivo:

   Sea $\beta \in \widehat{H}$ tal que $\widehat{T}(\beta) = 1_{\widehat{G}}$, esto es, por la definición de homomorfismo dual

   $$\beta \circ T = 1_{\widehat{G}},$$

   luego para todo $g \in G$, se deduce que $\beta(Tg)) = 1_{\mathbb{T}}$. Como el homomorfsimo T es sobreyectivo, entonces se tiene que $\beta(h) = 1_{\mathbb{T}}$ para todo $h \in H$, con lo que β es finalmente el elemento identidad del grupo dual $\widehat{H}$, tal y como queríamos probar.

3. $\widehat{T}$ es un homomorfismo sobreyectivo:

   Sea $\beta \in \widehat{G}$ y definimos a partir de él la siguiente aplicación $\beta' := \beta \circ T^{-1}$. Ésta será de hecho la antiimagen de β por T, con lo que nos falta probar que $\beta' \in (\widehat{H}, t_p(H))$ por un lado y por otro, que $\beta' \in (\widehat{H}, \tau_c)$, según con qué topología estemos trabajando. Para ello:

   a) β' es un homomorfismo: esto es así, ya que la inversa de T y β lo son.

   b) β' es continuo:

   Sea pues $(h_i)_i \subseteq H$ una red convergente a $h \in H$. Como T es, es particular, una aplicación abierta, tenemos que $T^{-1}(h_i)$ converge a $T^{-1}(h)$, es decir que para todo carácter continuo μ perteneciente a $(\widehat{G}, t_p(G))$ (ó a $(\widehat{G}, \tau_c)$), tenemos que

   $$\mu(T^{-1}h_i) \rightsquigarrow \mu(T^{-1}h),$$

en particular, para $\mu = \beta$: $\beta(T^{-1}h_i) \rightsquigarrow \beta(T^{-1}h)$. Esto implica que el homomorfismo β' es continuo, con lo que β' pertenece a $(\widehat{H}, t_p(H))$ (a $(\widehat{G}, \tau_c)$).

Más aún, el carácter β' verifica que

$$\widehat{T}(\beta') = \beta' \circ T = (\beta \circ T^{-1}) \circ T = \beta.$$

Por tanto, el homomorfismo dual de T, $\widehat{T}$, es a su vez sobreyectivo.

A continuación, veamos que $\widehat{T}$ es continuo y abierto respecto de la topología de la convergencia puntual $t_p(H)$ y $t_p(G)$.

- $\widehat{T}$ es continuo:

  Sea entonces $(\varrho_i)_i \subseteq \widehat{H}$ convergente a $\varrho \in \widehat{H}$ con la topología débil $t_p(H)$, que proviene de la de H. Entonces, para toda $h \in H$, tenemos que $\varrho_i(h)$ converge a $\varrho(h)$. Como T es sobreyectivo, obtenemos que para toda $g \in G$, $\varrho_i(Tg)$ converge a $\varrho(Tg)$. Pero $\varrho_i(Tg) = \widehat{t}(\varrho_i)(g)$, entonces $\widehat{T}(\varrho_i)(g)$ converge a $\widehat{T}(\varrho)(g)$. Por tanto, $\widehat{T}(\varrho_i)$ converge a $\widehat{T}(\varrho)$ en la topología de la convergencia puntual sobre los elementos de G y H.

- $\widehat{T}$ es abierto:

  El proceso es análogo al del paso anterior. Sea pues $(\sigma_i)_i \subseteq \widehat{G}$ una red convergente a $\sigma \in \widehat{G}$ en la topología débil $t_p(G)$. Por tanto, la red $(\sigma_i(g))$ converge a $\sigma(g)$ para todo $g \in G$. Como $\widehat{T}$ es sobreyectivo, obtenemos que para todo índice i existe $\alpha_i \in \widehat{H}$ tal que $\widehat{T}(\alpha_i) = \sigma_i$. Por otra parte, sabemos que existe $\alpha \in \widehat{H}$ tal que

  $$\widehat{T}(\alpha) = \sigma.$$

  Así pues,

  $$\begin{array}{rcl} \widehat{T}(\alpha_i)(g) & \rightsquigarrow & \widehat{T}(\alpha)(g) \\ \Leftrightarrow \alpha_i(Tg) & \rightsquigarrow & \alpha(Tg). \end{array}$$

  De nuevo utilizamos la sobreyectividad de T y obtenemos que, para toda $h \in H$,

  $$\begin{array}{rcl} \alpha_i(h) & \rightsquigarrow & \alpha(h) \\ \Rightarrow \alpha_i & \overset{t_p(H)}{\rightsquigarrow} & \alpha \\ \Rightarrow \widehat{T}^{-1}(\sigma_i) & \overset{t_p(H)}{\rightsquigarrow} & \widehat{T}^{-1}(\sigma). \end{array}$$

  Por tanto, $\widehat{T}^{-1}$ es continua y esto implica que $\widehat{T}$ es finalmente abierta.

Queda por ver que el homomorfismo dual $\widehat{T}$ también es un isomorfismo topológico respecto de la topología compacta abierta.

- $\widehat{T}$ es continuo:

  Sean $K \subseteq G$ compacto y $\epsilon > 0$, luego $P(K, V_\epsilon)$ es un entorno básico de la identidad de $\widehat{G}$, donde además $V_\epsilon := \{e^{2\pi i t} : \ |t| < \epsilon\}$. Entonces, como $T(K)$ es sompacto en H, elegimos como entorno de la identidad de $1_{\widehat{H}}$, al conjunto $P(TK, V_\epsilon)$ y éste verifica

  $$P(TK, V_\epsilon) \subseteq T(P(K, V_\epsilon)),$$

  luego $\widehat{T}$ es continuo.

- $\widehat{T}$ es abierto:

  Se prueba de forma análoga. Sean, pues, $Q \subseteq H$ compacto y $\epsilon > 0$. Entonces $T^{-1}(Q)$ es un subconjunto compacto de G. De esta modo, damos forma al entorno de la identidad de $1_{\widehat{G}}$ y éste es: $P(T^{-1}Q), V_\epsilon)$ que cumple, como antes,

  $$T(P(Q, V_\epsilon)) \subseteq P(T^{-1}Q), V_\epsilon).$$

Por tanto, el homomorfismo dual de T, $\widehat{T} : (\widehat{H}, \tau_c) \longrightarrow (\widehat{G}, \tau_c)$, es un isomorfismo topológico respecto de la topología compacta abierta.

$\square$

Nota 3.1.5 *Sean (G, τ_G) y (H, τ_H) dos grupos topológicos abelianos. Si el homomorfismo $T : G \longrightarrow H$ sólo es continuo, entonces el homomorfismo dual:*

$$\widehat{T} : (\widehat{H}, \tau_c) \longrightarrow (\widehat{G}, \tau_c)$$

es también continuo, ya que en la demostración de la continuidad respecto de la topología compacta abierta de la Proposición 3.1.4 no hacía falta ninguna propiedad más sobre T.

3.2. Espacios compactos

Sean X e Y espacios topológicos compactos Hausdorff. Dotamos a los grupos $C(X,\mathbb{T})$ y $C(Y,\mathbb{T})$ de la topología de la convergencia uniforme. Tras lo visto en la Introducción,

$$C(X,\mathbb{T}) \cong C^o(X,\mathbb{T}) \times \pi^1(X) \text{ (Ecuación (1.2))},$$

por lo que en primer lugar restringiremos H a $C^o(X,\mathbb{T})$ y seguidamente, utilizaremos los resultados obtenidos para aplicárselos a todo el grupo $C(X,\mathbb{T})$.

En el anterior Capítulo 2, ya estudiamos el tipo de relación que podía existir entre dos espacios topológicos compactos X e Y, e incluso entre dos grupos topológicos discretos Γ_1 y Γ_2, a partir de un isomorfismo topológico entre los grupos de funciones continuas $C(X,\mathbb{T})$ y $C(Y,\mathbb{T})$, y también a partir de un isomorfismo entre las C^*-álgebras de grupo asociadas a Γ_1 y Γ_2, o entre sus grupos de unitarios. Aquí nos vamos a centrar en los isomorfismos topológicos entre grupos de funciones continuas evaluadas en $\mathbb{T}$, pero vamos a emplear una herramienta más: *aplicaciones separadoras,* que pone la base a la existencia de un homeomorfismo entre los espacios X e Y. Sin lugar a dudas, ambos capítulos están relacionados; más aún si cabe en esta Sección 3.2, cuando los espacios X e Y son compactos, ya que partimos de un isomorfismo topológico separador entre los grupos $C(X,\mathbb{T})$ y $C(Y,\mathbb{T})$, que se corresponden con los grupos de unitarios de ciertas C^*-álgebras conumutativas $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, siendo los espacios X e Y los espacios de estructura de éstas.

3.2.1. Restricción a $C^o(X,\mathbb{T})$

El objetivo es encontrar una relación entre los espacios X e Y a partir de H. Si nos restringimos a $C^o(X,\mathbb{T})$, entonces podremos obtener resultados satisfactorios debido, entre otras cosas, a la relación que existe entre dicho espacio y $C(X,\mathbb{R})$ (Proposición 1.2.4). Lo primero que cabe preguntarse es si $H(C^o(X,\mathbb{T})) = C^o(Y,\mathbb{T})$ y esto es consecuencia de la propiedad de ser un isomorfismo topológico.

Lema 3.2.1 *Sean X e Y espacios topológicos compactos y sea $H : C(X,\mathbb{T}) \to C(Y,\mathbb{T})$ un isomorfismo topológico. Entonces $H(C^o(X,\mathbb{T})) = C^o(Y,\mathbb{T})$.*

-Demostración-
Sabemos que $C^o(X,\mathbb{T})$ es un espacio conexo, por ser imagen continua del espacio de Banach $C(X,\mathbb{R})$, luego conexo, mediante la aplicación exponencial

$\exp : C(X,\mathbb{R}) \to C(X,\mathbb{T})$, $f \mapsto e^{2\pi i f}$. Más aún, es la componente conexa de la identidad de $C(X,\mathbb{T})$ y esto se puede probar de forma análoga a la Proposición 2.2.16 del Capítulo 2, es decir, se supone que existe un conexo $U \subseteq C(X,\mathbb{T})$ tal que $C^o(X,\mathbb{T}) \subsetneq U$ y con ayuda de la Ecuación 1.2 llegamos a una contradicción.

Entonces, como H es un isomorfismo topológico, éste lleva la componente conexa de la identidad de $C(X,\mathbb{T})$ en la componente conexa de la identidad de $C(Y,\mathbb{T})$. Por tanto,

$$H(C^o(X,\mathbb{T})) = C^o(Y,\mathbb{T}).$$

□

La restricción de H a $C^o(X,\mathbb{T})$ mantiene las propiedades topológicas que tenía H cuando estaba evaluada sobre todo el espacio $C(X,\mathbb{T})$, es decir, el homomorfismo H restringido a $C^o(X,\mathbb{T})$ es continuo y abierto, es, por tanto, un homeomorfismo.

El procedimiento que vamos a seguir a partir de ahora se enmarca dentro de la teoría de dualidad de Pontryagin y también dentro de la teoría de las aplicaciones separadoras. Por ello, lo primero que haremos será dualizar el isomorfismo topológico separador H:

$$\widehat{H} : C^o(Y,\mathbb{T})^\wedge \longrightarrow C^o(X,\mathbb{T})^\wedge.$$

Además, de [55] tenemos el siguiente resultado,

Lema 3.2.2 *Si X es compacto y $\mathcal{M}_c(X)$ denota el espacio de las medidas de Radon con soporte compacto sobre X, entonces el grupo $C_c^o(X,\mathbb{T})^\wedge$ se puede identificar algebraicamente con el grupo*

$$\mathcal{M}_c(X)^\sim := \{\mu \in \mathcal{M}_c(X) : \int_X f d\mu \in \mathbb{Z} \text{ para toda } f \in C(X,\mathbb{Z})\}.$$

mediante el isomorfismo $\psi_X : \mathcal{M}_c(X)^\sim \longrightarrow C_c^o(X,\mathbb{T})^\wedge$ dado por:

$$[\psi_X(\mu)](E(f)) := exp(2\pi i \int_X f d\mu)$$

para toda $f \in C(X,\mathbb{R})$.

Y es este Lema el que ayuda a transformar $\widehat{H}$ en la siguiente aplicación:

$$\widehat{H} : \mathcal{M}_c(Y)^{\sim} \longrightarrow \mathcal{M}_c(X)^{\sim}.$$

Entonces, como consecuencia de la Proposición 3.1.4 tenemos también:

Proposición 3.2.3 *Sean X e Y espacios topológicos compactos Hausdorff. Entonces, la aplicación dual*

$$\begin{array}{rcl} \widehat{H} : (\mathcal{M}_c(Y)^{\sim}, t_p(C^o(Y,\mathbb{T}))) & \longrightarrow & (\mathcal{M}_c(X)^{\sim}, t_p(C^o(X,\mathbb{T}))) \\ \mu & \longmapsto & \mu \circ H, \end{array}$$

de $H_{|C^o(X,\mathbb{T})}$ es un isomorfismo topológico.

Por otro lado,

Nota 3.2.4 *La aplicación dual de H, $\widehat{H} : (\mathcal{M}_c(X)^{\sim}, \tau_c) \longrightarrow (\mathcal{M}_c(Y)^{\sim}, \tau_c)$ es un isomorfismo topológico con la topología compacta abierta τ_c.*

-Demostración-
De nuevo, se obtiene como consecuencia de la Proposición 3.1.4. □

Es fácil de ver que Y se sumerge en $C^o(Y,\mathbb{T})^{\wedge}$ de una forma natural:

$$\begin{array}{rcl} Y & \hookrightarrow & C^o(Y,\mathbb{T})^{\wedge} \\ y & \mapsto & \delta_y \end{array}$$

De hecho, se trata de una inmersión topológica:

Proposición 3.2.5 *Sea Y un espacio topológico compacto. Entonces, la inmersión*

$$\begin{array}{rcl} J : Y & \hookrightarrow & C^o(Y,\mathbb{T})^{\wedge} \\ y & \mapsto & \delta_y \end{array}$$

es topológica.

-Demostración-
En primer lugar, vamos a ver que J es inyectiva. Sean entonces $y, w \in Y$ tales que $J(y) = J(w)$, es decir, $\delta_y = \delta_w$. Así pues, tenemos que $\delta_y(f) = \delta_w(f)$ para toda $f \in C^o(Y, \mathbb{T})$, luego

$$f(y) = f(w)\ \forall f \in C^o(Y, \mathbb{T}). \tag{3.1}$$

Si suponemos que $y \neq w$, por ser Y Hausdorff, existen entornos abiertos U_y y U_w de y y w, respectivamente, tales que $U_y \cap U_w = \emptyset$. De la misma forma y gracias a que Y es completamente regular, como $y \notin Y \setminus U_y$, subespacio cerrado de Y, existe $g \in C(X, [0, 1])$ tal que $g(y) = 0$ y $g(Y \setminus U_y) = \{1\}$. Sea $b \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap]0, 1[$, luego $bg(y) = 0$ y $bg(Y \setminus U_y) = \{b\}$ y además,

$$e^{2\pi i b g(y)} = 1_{\mathbb{T}} \text{ y } e^{2\pi i b g}(Y \setminus U_y) = \{e^{2\pi i b}\} \neq 1_{\mathbb{T}},$$

luego $e^{2\pi i b g(y)} \neq e^{2\pi i b g(w)}$, ya que $w \in Y \setminus U_y$. Pero $e^{2\pi i b g} \in C^o(Y, \mathbb{T})$ y ya hemos llegado a una contradicción con (3.1). Por tanto, la aplicación J es inyectiva.

En segundo lugar, veamos que J es una inmersión topológica. Sea, pues, $(y_i)_i \subseteq Y$ un red convergente a $y_0 \in Y$ con la topología original de Y. Sea ahora $f \in C^o(Y, \mathbb{T})$, luego $f(y_i)$ converge a $f(y_0)$ con la topología compacta abierta. Esto es,

$$\delta_{y_i}(f) \rightsquigarrow \delta_{y_0}(f)$$

puntualmente, luego con la topología $t_p(C^o(Y, \mathbb{T}))$. La cuestión es si la red (δ_{y_i}) converge a δ_{y_0} con la topología compacta abierta. Sean, por tanto, $K \subseteq C^o(Y, \mathbb{T})$ compacto y $\epsilon > 0$. El espacio K sigue siendo compacto en $C(Y, \mathbb{T})$, luego por el Teorema de Ascoli-Arzelà se tiene que K es un conjunto equicontinuo sobre Y, luego, en particular, sobre $y_0 \in Y$. Dado un entorno de $1_{\mathbb{T}}$, por ejemplo $V_{\frac{\epsilon}{2}}$, existe $U \in \mathcal{E}(y_0)$ tal que

$$g(U) \subseteq V_{\frac{\epsilon}{2}}\ \forall g \in K.$$

A su vez, como U es un entorno abierto de y_0, existe un índice i_1 tal que $y_i \in U$ para todo $i \geq i_1$. Esto implica que $g(y_i) \in g(U)$ para todo $i \geq i_1$ y para toda $g \in K$. Entonces, si $g \in K$,

$$\delta_{y_i}(g) - \delta_{y_0}(g) = g(y_i) - g(y_0) \in V_{\frac{\epsilon}{2}} V_{\frac{\epsilon}{2}} \subseteq V_\epsilon.$$

Así pues, la red $(y_i) \subseteq Y$ converge a y_0 con la topología compacta abierta restringida a Y. Esto es, J es una aplicación continua. Como

$$J : Y \longrightarrow J(Y) (\subseteq C^o(Y, \mathbb{T})^\wedge)$$

es una biyección continua en su imagen, que es Hausdorff, entonces J es abierta en su imagen. Por tanto, la inmersión J es topológica.

$\square$

A lo largo de esta sección haremos continuamente el siguiente abuso de notación: cuando mencionemos un elemento y de Y y calculemos su imagen por $\widehat{H}_{|Y}$, nos estaremos refiriendo a la imagen de la aplicación evaluación $\chi_y : C^o(Y, \mathbb{T}) \to \mathbb{T}$, tal que $\chi_y(f) = f(y)$ por $\widehat{H}_{|Y}$, esto es, a $\widehat{H}_{|Y}(\chi_y)$, ya que como acabamos de ver en la Proposición 3.2.5, la inmersión del espacio Y en $C^o(Y, \mathbb{T})^\wedge$ es topológica. En ocasiones, también identificaremos $\widehat{H}_{|Y}(y)$ con $\widehat{H}_{|Y}(\delta_y)$, siendo δ_y la aplicación evaluación $\delta_y : C(Y, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$.

Por tanto, si restringimos $\widehat{H}$ a Y

$$\widehat{H}_{|Y} : Y(\subseteq \mathcal{M}_c(Y)^\sim) \longrightarrow \mathcal{M}_c(X)^\sim,$$

tenemos que ésta es continua con la topología original de Y, tras lo probado en la Proposición 3.2.5. Una pregunta natural que surge es qué tipo de medidas en concreto contiene el conjunto $\widehat{H}_Y(Y)$. Hasta el momento, éste es subconjunto de $\mathcal{M}_c(X)^\sim$, pero quizás podamos añadir algo más. Efectivamente, éste va a ser el caso, pero procederemos paso a paso. Por ello y en primer lugar, investigaremos el soporte de la medida $\widehat{H}_{|Y}(y)$ para cada $y \in Y$. Cabe destacar que la propiedad de H de ser un homomorfismo separador juega un papel muy destacado en este resultado a la hora de determinar el soporte mencionado.

Proposición 3.2.6 *Para todo $y \in Y$, el soporte de la medida $\widehat{H}_{|Y}(y) \in \mathcal{M}_c(X)^\sim$ contiene un único elemento $x \in X$.*

-Demostración-
Sea $y \in Y$. Como $\widehat{H}_{|Y}(y) \in \mathcal{M}_c(X)^\sim$ para cada $y \in Y$, entonces su soporte no puede ser el conjunto vacío, ya que en ese caso, por la inyectividad del homomorfismo dual $\widehat{H}$, tendríamos que $\delta_y \equiv y$ sería la medida nula de $\mathcal{M}_c(Y)^\sim$ y evidentemente, no lo es. Así pues, para cada $y \in Y$,

$$supp(\widehat{H}_{|Y}(y) =: K_y \subseteq X,$$

con K_y un compacto de X, distinto del conjunto vacío.

Supongamos ahora que $supp(\widehat{H}_{|Y}(y)) \supseteq \{x_1, x_2\}$, con $x_1 \neq x_2$, $x_i \in X$. Como son puntos distintos, existen sendos entornos abiertos U_1 de x_1 y U_2 de x_2 tales que $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Por otro lado, se tiene que para todo $i \in \{1,2\}$, cada uno de ellos pertenece a U_i, entornos abiertos en X, luego existen $f_i \in C(X, \mathbb{R})$ tales que $coz(f_i) \subseteq U_i$ y

$$\widehat{H}_{|Y}(y)(f_i) \neq 0, \ \forall i \in \{1,2\},$$

tomando a $\widehat{H}_{|Y}(y)$ como un elemento más del espacio de medidas $\mathcal{M}_c(X)^{\sim}$. Si

$$\widehat{H}_{|Y}(y)(f_1) = n_1 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \ \text{ y } \ \widehat{H}_{|Y}(y)(f_2) = n_2 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\},$$

escogemos $b \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0,1]$ para seguir trabajando con bf_i para $i \in \{1,2\}$. Así pues, $coz(bf_i) \subseteq U_i$ y

$$H(e^{2\pi i b f_i})(y) = e^{\widehat{H}_{|Y}(y)(bf_i)} \neq 1_{\mathbb{T}} \ \forall i \in \{1,2\}.$$

Como H es una aplicación separadora, entonces existe $x_0 \in X$ tal que

$$e^{2\pi i b f_1(x_0)} \neq 1_{\mathbb{T}} \ \text{ y } \ e^{2\pi i b f_2(x_0)} \neq 1_{\mathbb{T}},$$

luego $(bf_i)(x_0) \notin \mathbb{Z}$, en particular, estas funciones no se anulan en $x_0 \in X$. Por tanto,

$$\emptyset \neq coz(bf_1) \cap coz(bf_2) \subseteq U_1 \cap U_2 = \emptyset.$$

Contradicción. Así pues, para todo $y \in Y$ existe un único $x \in X$ tal que $supp(\widehat{H}_{|Y}(y)) = \{x\}$.

□

De esta forma, obtenemos que el homomorfismo dual de H, restringido a Y, $\widehat{H}_{|Y}$ manda todo $y \in Y$ a una medida de $\mathcal{M}_c(X)^{\sim}$ con soporte un único punto, esto es,

$$supp(\widehat{H}_{|Y}(y)) = \{x\}.$$

El siguiente resultado ayudará a determinar dónde acaba exactamente el conjunto $\widehat{H}_{|Y}(Y)$. Para ello, utilizaremos la siguiente notación:

$$\mathbb{R}X := \{rx : \ r \in \mathbb{R}, \ x \in X\},$$

donde estamos identificando cada punto $x \in X$ con su correspondiente medida evaluación $\delta_x \in \mathcal{M}_c(X)^{\sim}$; análogamente definimos $\mathbb{Z}X$, pero con los coeficientes tomados como elementos de $\mathbb{Z}$.

Lema 3.2.7

$$\mathcal{M}_c(X)^{\sim} \cap \mathbb{R}X = \mathbb{Z}X$$

-Demostración-
Sólo es necesario demostra una inclusión, la otra es evidente.
($\subseteq$) Sea, ahora, $\mu \in \mathcal{M}_c(X)^{\sim} \cap \mathbb{R}X$. De esta forma, la medida μ verifica que $\mu(f) \in \mathbb{Z}$ para toda $f \in C(X, \mathbb{Z})$ y además, μ tiene la forma $\mu = r\delta_x$, con $r \in \mathbb{R}$ y $x \in X$. Sea, pues, $f \in C(X, \mathbb{Z})$, luego

$$r\delta_x(f) = rf(x) = \mu(f) \in \mathbb{Z},$$

con lo que r ha de ser un número entero igualmente. Por tanto, $\mathcal{M}_c(X)^{\sim} \cap \mathbb{R}X \subseteq \mathbb{Z}X$. $\square$

Por tanto,

Proposición 3.2.8 *La imagen de $\widehat{H}_{|Y}$ está contenida en el conjunto*

$$\{nx : \ n \in \mathbb{Z}, \ x \in X\}.$$

-Demostración-
Como para todo $y \in Y$, la medida $\widehat{H}_{|Y}(y)$ tiene como soporte un único punto $x \in X$, tenemos que

$$\widehat{H}_{|Y}(Y) \subseteq \{r\delta_x : \ r \in \mathbb{R}, \ x \in X\}.$$

Por otra parte, para cada $y \in Y$, la medida $\widehat{H}_{|Y}(y)$ pertenece a $\mathcal{M}_c(X)^{\sim}$, luego por el Lema 3.2.7, tenemos que efectivamente,

$$\widehat{H}_{|Y}(Y) \subseteq \mathbb{Z}X.$$

$\square$

A continuación, resumimos ciertas propiedades de $\widehat{H}_{|Y}$ que nos irán acercando poco a poco a la representación del isomorfismo topológico separador H mediante un homeomorfismo entre los espacios compactos X e Y.

Proposición 3.2.9 *La aplicación*

$$\begin{array}{rcl} \widehat{H}_{|Y} : Y & \rightarrow & \mathcal{M}_c(X)^{\sim} \\ y & \mapsto & n_y x, \end{array}$$

donde $n_y \in \mathbb{Z}$, y para cada $y \in Y$, el punto $x \in X$ es justo el correspondiente al soporte de $\widehat{H}_{|Y}(y)$, está bien definida y es continua.

-Demostración-
Veáse la Proposición 3.2.5, la Proposición 3.2.8 y los comentarios hechos tras ésta. □

Por tanto, para cada $y \in Y$ existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\widehat{H}_{|Y}(y) = nsupp(\widehat{H}_{|Y}(y)) = nx,$$

donde x es un punto de X que depende únicamente del $y \in Y$ del que se parte. Ahora, vamos a definir las siguientes aplicaciones a partir de $\widehat{H}_{|Y}$. En primer lugar, definimos

$$\begin{array}{rcl} h : Y & \longrightarrow & X \\ y & \longmapsto & supp(\widehat{H}_{|Y}(y)), \end{array}$$

que es justo la que manda cada $y \in Y$ al punto $x \in X$ perteneciente al soporte de $\widehat{H}_{|Y}(y)$ como medida de $\mathcal{M}_c(X)^{\sim}$. Y en segundo lugar, definimos

$$\beta : Y \longrightarrow \mathbb{Z}$$

de modo $\beta(y) = n_y$ donde n_y es el entero correspondiente al punto y mediante la aplicación $\widehat{H}_{|Y}$. Así pues, para todo $y \in Y$, tenemos que,

$$\widehat{H}_{|Y}(\delta_y) = \widehat{H}_{|Y}(y) = \beta(y)h(y), \tag{3.2}$$

más aún, para $f' = e^{2\pi i f} \in C^o(X, \mathbb{T})$ e $y \in Y$,

$$\begin{array}{rcl} H(e^{2\pi i f})(y) & = & \widehat{H}_{|Y}(y)(e^{2\pi i f}) \\ & = & e^{2\pi i \widehat{H}_{|Y}(y)(f)} \\ & = & e^{2\pi i z f(x)} \\ & = & e^{2\pi i \beta(y) f(h(y))}. \end{array}$$

Como caso particular, si $f \in C(X, \mathbb{R})$ es una aplicación constante, por ejemplo, si $f = \bar{\mathbf{s}}$ con $s \in \mathbb{R}$, tenemos que

$$H(e^{2\pi i \bar{\mathbf{s}}})(y) = e^{2\pi i \beta(y) \bar{\mathbf{s}}(h(y))} = e^{2\pi i \beta(y) s} \tag{3.3}$$

para todo $y \in Y$.

Así pues, ya tenemos representado al isomorfismo separador H mediante una aplicación h entre los espacios X e Y. Pero, ¿qué propiedades tienen las nuevas aplicaciones h y β? Comenzamos con $\beta : Y \to \mathbb{Z}$.

Proposición 3.2.10 *La aplicación $\beta : Y \longrightarrow \mathbb{Z}$ es continua y no puede tomar el valor* 0.

-Demostración-
En primer lugar comprobaremos que β es continua y a continuación, veremos que $\beta(y) \neq 0$ para todo $y \in Y$.

- Probemos, en primer lugar, que la aplicación β es continua:

  Definimos una nueva aplicación que ayudará a demostrar dicha continuidad:
  $$\breve{H} : Y \longrightarrow \widehat{\mathbb{T}}$$
  dada por $\breve{H}(y)(t) := H(e^{2\pi i \bar{\mathbf{r}}})(y)$. donde $t = e^{2\pi i r} \in \mathbb{T}$. Así pues, tras lo visto en (3.3), dados $y \in Y$ y $t = e^{2\pi i r} \in \mathbb{T}$, la nueva aplicación $\breve{H}$ tiene la siguiente forma:

  $$\breve{H}(y)(t) = e^{2\pi i r \beta(y)} = t^{\beta(y)},$$

  luego claramente, para cada $y \in Y$, $\breve{H}(y) \in \widehat{\mathbb{T}}$, esto es , es el carácter que a cada elemento t de $\mathbb{T}$ lo envía a $t^{\beta(y)}$.

  Además, si $(y_i)_i \subseteq Y$ es una red convergente a un $y \in Y$ y $t \in \mathbb{T}$, entonces
  $$(\breve{H} y_i)(t) = (H\bar{t})(y_i) \rightsquigarrow (H\bar{t})(y) = (\breve{H} y)(t),$$
  ya que $(H\bar{t})$ es una aplicación continua, es un elemento de $C(Y, \mathbb{T})$. Por tanto, $\breve{H}(y_i)$ converge a $\breve{H}(y)$ puntualmente sobre los elementos de $\mathbb{T}$ y $\breve{H}$ es continua con la topología puntual $t_p(\mathbb{T})$. Como $(\widehat{\mathbb{T}}, t_p(\mathbb{T})) = (\mathbb{Z}, \tau_B)$, donde τ_B representa a la topología de Bohr, la aplicación $\breve{H}$ es continua con dicha topología, con lo que $\breve{H}(Y)$ es compacto en $(\mathbb{Z}, \tau_B)$. Por otra parte, el teorema de Glicksberg (en [62] que generaliza uno

de [85] para grupos discretos) afirma que en un grupo topológico localmente compacto y abeliano todo subconjunto compacto en la topología de Bohr es compacto en su topología original, tenemos que $\breve{H}(Y)$ es compacto en $\mathbb{Z}$ con la topología discreta τ_D, luego es finito. De esta forma, $\breve{H} : Y \to (\mathbb{Z}, \tau_D)$ es continua.

Además, si escribimos β como un carácter de $\widehat{\mathbb{T}}$ y llamamos $j : \mathbb{Z} \to \widehat{\mathbb{T}}$ al isomorfismo topológico que hay entre ambos grupos, tenemos que, si $y \in Y$ y $t \in \mathbb{T}$,

$$(j \circ \beta)(y)(t) = t^{\beta(y)} = e^{2\pi i r \beta(y)} = \breve{H}(y)(t).$$

Por tanto, la composición $j \circ \beta$ actúa de igual forma que $\breve{H}$, luego $\beta = j^{-1} \circ \breve{H}$ es efectivamente continua.

- La aplicación β no se puede anular en ningún punto de Y.

  Sabemos de la Ecuación (3.2) que para todo $y \in Y$,

$$\widehat{H}_{|Y}(y) = h(y) = \beta(y)h(y).$$

  Si β se anulara en un punto $y_0 \in Y$, esto querría decir que la medida $\widehat{H}_{|Y}(y_0) \in \mathcal{M}_c(X)^{\sim}$ sería la medida nula. Pero de la Proposición 3.2.3, sabemos que $\widehat{H}$ es una aplicación inyectiva. De esta forma, si $\widehat{H}_{|Y}(y_0) = \widehat{H}_{|Y}(\delta_{y_0}) = 0$, entonces

$$\delta_{y_0} = 0_{\mathcal{M}_c(Y)^{\sim}},$$

  hecho que es imposible. Por tanto, para todo $y \in Y$, la aplicación β verifica que $\beta(y) \neq 0$.

□

Proposición 3.2.11 *La aplicación $h : Y \to X$ definida en (3.2) es un homeomorfismo.*

-Demostración-

En primer lugar veremos que h es continua, a continuación que es inyectiva y por último, que es sobreyectiva. Y en ese momento ya obtendremos que h es un homeomorfismo, por ser una aplicación biyectiva y continua entre un espacio compacto X y un Hausdorff Y.

- h es continua:

  Sabemos de los comentarios hechos tras la demostración de la Proposición 3.2.9 que para cada $y \in Y$:

  $$\widehat{H}_{|Y}(y) = \beta(y)h(y),$$

  donde $\widehat{H}_{|Y}$ y β ya son continuas (Proposición 3.2.9 y Proposición 3.2.10). Así pues, es casi inmediato comprobar que h también es continua. Gracias a que la aplicación β es continua, tenemos que

  $$Y = \cup_{j\in\mathbb{Z}}\beta^{-1}(\{j\}),$$

  esto es, el espacio Y es unión disjunta de los clopens $\beta^{-1}(\{j\})$. Como Y es compacto, existe un número finito de éstos de manera que $Y = \cup_{j=1}^{n}\beta^{-1}(\{m_j\})$, que coinciden además con la imagen de β. Por tanto, probar que $h : Y \to X$ es continua equivale a probar que es continua sobre cada uno de los clopens $\beta^{-1}(\{m_j\})$. Así pues, trabajaremos sobre un clopen cualquiera de la forma $V_j := \beta^{-1}(\{m_j\})$. Sea, entonces, $(y_i)_i \subseteq V_j$ una red convergente a un punto $y_0 \in V_j$. Además, para cada elemento de la red y para su límite y_0, se tiene que

  $$\widehat{H}_{|Y}(y_i) = n_j h(y_i) \text{ y } \widehat{H}_{|Y}(y_0) = n_j h(y_0).$$

  Por otra parte, la aplicación $\widehat{H}_{|Y}$ es continua respecto de la topología de Y (Proposición 3.2.5), luego $\widehat{H}_{|Y}(y_i) \rightsquigarrow \widehat{H}_{|Y}(y_0)$. Entonces,

  $$n_j h(y_i) \rightsquigarrow n_j h(y_0),$$

  donde n_j es en todo momento una constante (de $\mathbb{Z}$). De aquí se deduce que $h(y_i)$ converge a $h(y_0)$ y $h_{|V_j}$ es continua, para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$. Por tanto, la aplicación $h : Y \to X$ es continua.

- h es inyectiva:

  Sean s, $t \in Y$ tales que $h(t) = h(s)$. Entonces para toda $f \in C(X, \mathbb{R})$ tenemos que $f(h(s)) = f(h(t))$, luego

  $$\beta(t)f(h(t)) = \frac{\beta(t)}{\beta(s)}\beta(s)f(h(s)),$$

  donde el cociente $\frac{\beta(t)}{\beta(s)}$ está bien definido ya que $\beta(y) \neq 0$ par atodo $y \in Y$, tras lo visto en la Proposición 3.2.10. Esto implica que para toda $f \in C(X, \mathbb{R})$, se tiene que

  $$\widehat{H}_{|}(t)(f) = \frac{\beta(t)}{\beta(s)}\widehat{H}_{|}(s)(f),$$

o equivalentemente,

$$H(\exp(f))(t) = H(\exp(f))(s)^{\frac{\beta(t)}{\beta(s)}}.$$

Como H es sobreyectiva, obtenemos que para toda $g \in C(Y,\mathbb{R})$,

$$\exp(g)(t) = \exp(g)(s)^{\frac{\beta(t)}{\beta(s)}}.$$

Supongamos que $s \neq t$. Por ser Y Hausdorff, existen sendos entornos abiertos U de s y V de t tales que $U \cap V = \emptyset$. Entonces $s \in U$ e $Y \setminus V$ es cerrado, luego, como Y es completamente regular, existe una aplicación continua $F : Y \to [0,1]$ tal que $0 \leq F \leq 1$, $F(t) = 0$ y $F(w) = 1$ para todo $w \notin V$. Sea, entonces, $b \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0,1]$. A partir de ahora trabajaremos con $F' := bF$, y ésta verifica a su vez que $F'(t) = 0$ y $F'(w) = b$ para todo $w \notin V$. Pero, de la Ecuación (3.2.1) y teniendo en cuenta que $s \notin V$, obtenemos que

$$1_{\mathbb{T}} = \exp(F')(t) = \exp(F')(s)^{\frac{\beta(t)}{\beta(s)}} = \exp(b)^{\frac{\beta(t)}{\beta(s)}} \neq 1_{\mathbb{T}},$$

ya que el cociente $\frac{b\beta(t)}{\beta(s)} \notin \mathbb{Z}$. Contradicción. Por tanto, $s = t$ y h es inyectiva.

- h es sobreyectiva:

  Por reducción al absurdo. Supongamos que $h(Y) \neq X$, i.e., existe $x \in X$ tal que $x \notin h(Y)$. Por tanto, existen abiertos U, $V \subseteq X$ tales que $x \in U$, $h(Y) \subseteq V$, por ser $h(Y)$ cerrado en X (sabemos que $h(Y)$ es compacto en X, Hausdorff, luego es cerrado), y también $cl(U) \cap cl(V) = \emptyset$.

  Sea ahora $f \in C(X,\mathbb{R})$ que no tome únicamente valores enteros y tal que $coz(f) \subseteq U$, luego $f_{|V} = 0$. Como $h(y) \in V$ para todo $y \in Y$, tenemos que $f(h(y)) = 0$. Por otro lado, sabemos que $H(\exp(f))(y) = \exp(\beta(y)f(h(y)))$, así pues, para todo $y \in Y$,

$$H(\exp(f))(y) = 1_{\mathbb{T}}.$$

  Si usamos la propiedad de H de ser inyectiva, obtenemos que $\exp(f) = 1_{C^o(X,\mathbb{T})}$, luego $f(X) \subseteq \mathbb{Z}$. Pero esto no es posible debido a la forma a la que hemos escogido f. Contradicción. Por tanto, $h(Y) = X$ y h es sobreyectiva.

□

Gracias a que h es finalmente un homeomorfismo (Proposición 3.2.11), estamos en condiciones de afirmar:

Proposición 3.2.12 *La aplicación $\beta : Y \to \mathbb{Z}$ sólo puede tomar dos valores, concretamente, $\beta(Y) \subseteq \{-1, 1\}$.*

-Demostración-
Con la ayuda de las Proposiciones 3.2.10 y 3.2.11, veamos ahora que $\beta(Y) \subseteq \{-1, 1\}$:

Para cada $n \in \mathbb{Z}$, llamamos $C_n := \beta^{-1}(n)$ que es un clopen de Y. Por tanto, Y queda recubierto por la unión de todos los clopens $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y como es compacto, existe un número finito que lo recubre, $Y = \cup_{n=1}^{k} C_{r(n)}$. De esta forma, $X = h(Y) = \cup_{n=1}^{k} h(C_{r(n)})$, donde cada $h(C_{r(n)})$ es un clopen de X, al ser h un homeomorfismo.

Por otra parte, definimos una aplicación $f \in C(X, \mathbb{R})$ tal que

$$f_{|h(C_n)} = \frac{1}{n} \in \mathbb{Q}$$

para todo $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\}$ y

$$f_{|h(C_1) \cup h(C_{-1})} = 0.$$

De esta forma, f queda bien definida ya que h es un homeomorfismo tras lo visto en la Proposición 3.2.11.

Sea ahora $y \in Y$; entonces existe $n_o \in \{1, \ldots, k\}$ tal que $y \in C_{r(n_o)}$ y

$$H(\exp(f))(y) = \exp(\beta(y) f(h(y))) = \exp(r_{(n_o)} \frac{1}{r_{(n_o)}}) = 1_{\mathbb{T}}.$$

Esto ocurrirá siempre, para todo $y \in Y$. Por tanto, $H(\exp(f)) = \overline{1}_{\mathbb{T}}$. Como H es inyectiva, obtenemos que $\exp(f) = \overline{1}_{\mathbb{T}}$, es decir, $f(X) \subseteq \mathbb{Z}$. Pero, para todo $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\}$ sabemos que $f_{|h(C_n)} = \frac{1}{n} \in \mathbb{Q}$. Contradicción. Por tanto,

$$\beta(Y) \subseteq \{-1, 1\}.$$

□

Nota 3.2.13 *La aplicación β no es más que la que representa a los automorfismos de $\mathbb{T}$ en $\mathbb{T}$, ya que los únicos automorfismos de $\mathbb{T}$ son los siguientes:*

$$\begin{array}{rcl} \sigma_1 : \mathbb{T} & \to & \mathbb{T} \\ t & \mapsto & t \end{array}$$

y

$$\begin{array}{rcl} \sigma_2 : \mathbb{T} & \to & \mathbb{T} \\ t & \mapsto & \bar{t} = t^{-1}, \end{array}$$

que se corresponden a su vez con los dos únicos automorfismos de $\mathbb{Z}$, que son:

$$\begin{array}{rcl} \sigma_1' : \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ m & \mapsto & m \end{array}$$

y

$$\begin{array}{rcl} \sigma_2' : \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ m & \mapsto & -m \end{array}$$

Todos los resultados que hemos ido obteniendo a lo largo de la sección los resumimos en el siguiente teorema, que es el principal de esta parte. Por tanto, concluyendo,

Teorema 3.2.14 *Sean X e Y espacios topológicos compactos Hausdorff y sea $H : C(X, \mathbb{T}) \longrightarrow C(Y, \mathbb{T})$ un isomorfismo topológico separador. Entonces existen un homeomorfismo $h : Y \longrightarrow X$ y una aplicación continua $\beta : Y \longrightarrow \{-1, 1\}$ tales que, si $f \in C(X, \mathbb{R})$ e $y \in Y$,*

$$H(\exp(f))(y) = \exp(\beta(y) f(h(y))).$$

-Demostración-
Se deduce de las Proposiciones 3.2.10 y 3.2.12 que la aplicación $\beta : Y \to \{-1, 1\}$ está bien definida y es continua, de los comentarios hechos tras la Proposición 3.2.9 que, si $f \in C(X, \mathbb{R})$ e $y \in Y$, entonces

$$H(\exp(f))(y) = \exp(\beta(y) f(h(y)),$$

y finalmente, de la Proposición 3.2.11 que h es un homeomorfismo. Por tanto, H es una aplicación del tipo Banach-Stone. $\square$

El siguiente resultado es consecuencia del anterior, pero aplicado a un homomorfismo separador que tiene la particularidad de enviar funciones constantes sobre X en las correspondientes sobre Y. Ésta es una propiedad a la que haremos alusión en el Capítulo 4, cuando trabajemos con funciones continuas evaluadas en un grupo topológico general. De esta forma,

Corolario 3.2.15 *Sean X e Y espacios topológicos compactos Hausdorff y sea $H : C(X, \mathbb{T}) \longrightarrow C(Y, \mathbb{T})$ un isomorfismo topológico separador. Supongamos que H envía además las aplicaciones constantes sobre X en las correspondientes sobre Y. Entonces existe un homeomorfismo $h : Y \longrightarrow X$ tal que, si $f \in C(X, \mathbb{R})$ e $y \in Y$,*

$$H(\exp(f))(y) = \exp(f(h(y))).$$

-Demostración-
Se deduce del Teorema 3.2.14 que existe $\beta : Y \to \{-1, 1\}$ continua y un homeomorfismo biyectivo h tales que

$$H(\exp(f))(y) = \exp(\beta(y) f(h(y)))$$

para todo $y \in Y$. Sea ahora $r \in \mathbb{R}$, entonces tenemos por un lado que, como $H(\exp(\overline{\mathbf{r}})) = \overline{\exp \mathbf{r}}$ por hipótesis,

$$\widehat{H}_{|Y}(y)(\exp(\overline{\mathbf{r}})) = (H \exp(\overline{\mathbf{r}}))(y) = \exp(r),$$

y por otro,

$$\widehat{H}_{|Y}(y)(\exp(\overline{\mathbf{r}})) = \exp(\beta(y) \overline{\mathbf{r}}(h(y))).$$

Así pues,

$$e^{2\pi i\beta(y)r} = e^{2\pi ir},$$

con lo que $r(\beta(y) - 1) \in \mathbb{Z}$, para todo $r \in \mathbb{R}$. Si cogemos $r \notin \mathbb{Q}$, entonces $r(\beta(y)-1) \notin \mathbb{Z}$, a menos que $\beta(y) = 1$. Por tanto, $\beta(y) = 1$ para todo $y \in Y$, siempre que H lleve aplicaciones constantes sobre X en la correspondientes sobre Y, con lo que para $f \in C(X, \mathbb{R})$ e $y \in Y$,

$$H(\exp(f))(y) = \exp(f(h(y))),$$

y H es una aplicación del tipo Banach-Stone.

$\square$

Cuando los espacios X e Y son compactos y conexos, también obtenemos un resultado similar al Corolario 3.2.15.

Corolario 3.2.16 *Sean X e Y espacios topológicos compactos conexos Hausdorff y sea $H : C(X, \mathbb{T}) \longrightarrow C(Y, \mathbb{T})$ un isomorfismo topológico separador. Entonces existe un homeomorfismo $h : Y \longrightarrow X$ tal que, si $f \in C(X, \mathbb{R})$,*

$$H(\exp(f))(y) = \exp(f(h(y))) \ \forall y \in Y,$$

o bien,

$$H(\exp(f))(y) = \exp(-f(h(y))) \ \forall y \in Y.$$

-Demostración-

Se deduce igualmente del Teorema 3.2.14 que existe $\beta : Y \to \{-1, 1\}$ continua y un homeomorfismo biyectivo h tales que

$$H(\exp(f))(y) = \exp(\beta(y)f(h(y)))$$

para todo $y \in Y$. Pero en este caso, tanto X como Y son además conexos, luego en particular $\beta(Y)$ es un subespacio conexo de $\{-1, 1\}$, esto es, bien $\beta(Y)$ es constante igual a 1 o bien constante igual a -1. Esto quiere decir, que dependiendo del isomorfismo topológico separador H, éste tendrá una de las estructuras siguientes: si $f \in C(X, \mathbb{R})$,

$$\forall y \in Y, \quad H(\exp(f))(y) = \exp(f \circ h)(y)$$

o bien,

$$\forall y \in Y, \quad H(\exp(f))(y) = \exp(-f \circ h)(y).$$

$\square$

3.2.2. Espacios compactos: $C(X,\mathbb{T})$

En la Sección anterior 3.2.1 hemos visto que cualquier isomorfismo topológico separador

$$H : C(X,\mathbb{T}) \longrightarrow C(Y,\mathbb{T})$$

se puede representar mediante un homeomorfismo entre Y y X de la siguiente forma para $\exp(f) \in C^o(X,\mathbb{T})$ e $y \in Y$:

$$(H\exp(f))(y) = \exp(\beta(y)f(h(y)))$$

con $h : Y \to X$ el homeomorfismo y $\beta : Y \to \{-1,1\}$ una aplicación continua. El problema que cabe plantearse ahora es qué ocurre si trabajamos con todo el grupo de funciones continuas $C(X,\mathbb{T})$, dotado como siempre de la topología de la convergencia uniforme.

Comenzamos con un ejemplo que servirá para dar forma al problema de encontrar resultados análogos en $\mathbb{T}$ a lo visto en la teoría de las aplicaciones separadoras entre espacios de funciones continuas cuando parten de un espacio topológico compacto y están evaluadas en $\mathbb{R}$, en $\mathbb{C}$ o en otro espacio de Banach. Gracias a él, podremos afirmar que aunque un isomorfismo entre dos grupos de funciones continuas evaluadas en $\mathbb{T}$ cumpla la propiedad de ser isometría, hipótesis bajo la cual se satisface el Teorema de Banach-Stone (Teorema 3.1.1), éste no tiene por qué ser una aplicación composición con peso. Por tanto, deducimos que el hecho de que el homomorfismo H sea una isometría no basta, hace falta otra propiedad que sea más determinante. Y de nuevo, esa propiedad es la de ser un homomorfismo separador.

Para manejar isometrías entre espacios de funciones evaluadas en $\mathbb{T}$ debemos definir la métrica adecuada en $C(X,\mathbb{T})$. Para ello identificamos $\mathbb{T} = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ mediante la exponencial $\exp : [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[\to \mathbb{T}$ y definimos, además, la aplicación $N : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ que es la que mide la distancia de $t \in \mathbb{T}$ al $1_{\mathbb{T}}$, esto es, si $t \in \mathbb{T}$ y $t = \exp(2\pi i t')$, entonces N mide la distancia de t' al entero más próximo, es decir,

$$N(t) := \text{mín}(|t'|, |1-t'|).$$

Podemos así introducir la estructura métrica en $C(X,\mathbb{T})$ via la siguiente aplicación:

$$\begin{array}{rcl} N_\infty : C(X,\mathbb{T}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \sup\limits_{x \in X} N(f(x)). \end{array}$$

Entonces:

Lema 3.2.17 *Si para toda $f \in C(X,\mathbb{T})$ se tiene que $N_\infty(Hf) = N_\infty(f)$, entonces $H : C(X,\mathbb{T}) \longrightarrow C(Y,\mathbb{T})$ es una isometría.*

Ejemplo 3.2.18 *Damos un ejemplo de isomorfismo topológico no separador que además es isometría.*

Trabajamos con el grupo topológico $\mathbb{T}\times\mathbb{Z}_2$. Vamos a construir dicho isomorfismo topológico entre los correspondientes grupos de funciones continuas sobre $\mathbb{T}$. Sabemos que

$$C(\mathbb{T}\times\mathbb{Z}_2,\mathbb{T}) \cong C(\mathbb{T},\mathbb{T}) \times C(\mathbb{T},\mathbb{T}), \tag{3.4}$$

mediante el isomorfismo

$$\begin{array}{rcl} C(\mathbb{T}\times\mathbb{Z}_2,\mathbb{T}) & \longrightarrow & C(\mathbb{T},\mathbb{T}) \times C(\mathbb{T},\mathbb{T}), \\ f & \longmapsto & (f_{|\mathbb{T}\times\{0\}}, f_{|\mathbb{T}\times\{1\}}) \end{array}$$

y además,

$$\begin{array}{rcl} C(\mathbb{T},\mathbb{T}) & \cong & C^o(\mathbb{T},\mathbb{T}) \times \widehat{\mathbb{T}} \text{ (Ecuación 1.2)} \\ & \cong & C^o(\mathbb{T},\mathbb{T}) \times \mathbb{Z} \text{ (Teorema 2.3.1)}, \end{array}$$

por ser $\mathbb{T}$ compacto y conexo, luego

$$C(\mathbb{T}\times\mathbb{Z}_2,\mathbb{T}) \cong C^o(\mathbb{T},\mathbb{T}) \times C^o(\mathbb{T},\mathbb{T}) \times (\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}). \tag{3.5}$$

Vamos a definir el isomorfismo H entre $C(\mathbb{T}\times\mathbb{Z}_2,\mathbb{T})$ y $C(\mathbb{T}\times\mathbb{Z}_2,\mathbb{T})$: si $(f,g) \in C(\mathbb{T},\mathbb{T})^2 \cong C(\mathbb{T}\times\mathbb{Z}_2,\mathbb{T})$, entonces definimos

$$H(f,g) := ((\tilde{f},\chi_{n-m}),(\tilde{g},\chi_n)),$$

donde $f = (\tilde{f},\chi_n)$ y $g = (\tilde{g},\chi_m)$ y $\tilde{f}$, $\tilde{g} \in C^o(\mathbb{T},\mathbb{T})$, mientras que χ_n, $\chi_m \in \widehat{\mathbb{T}}$, con n, $m \in \mathbb{Z}$ son los caracteres $t \mapsto t^n$ y $t \mapsto t^m$, respectivamente.
La aplicación

$$\begin{array}{rcl} H^* : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \\ (n,m) & \longmapsto & (n-m,n), \end{array}$$

viene inducida por H tras haber tomado cocientes partiendo por la componente conexa de la identidad de $C(\mathbb{T}\times\mathbb{Z}_2,\mathbb{T})$ que resulta ser $C^o(\mathbb{T},\mathbb{T})\times C^o(\mathbb{T},\mathbb{T})$. La aplicación H^* es pues un homomorfismo y además, es inyectivo, porque si $H^*(n,m)=(0,0)$, entonces $n=0$ y como $m-n=0$, $m=n=0$. Y también es inmediato comprobar que H^* es sobreyectivo, ya que dado $(n,m)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, entonces $H^*(m,m-n)=(n,m)$. Por tanto, H^* es un isomorfismo. Obtenemos así que H es un isomorfismo topológico que restringido a $C^o(\mathbb{T}\times\mathbb{Z}_2,\mathbb{T})$, esto es, a $C^o(\mathbb{T},\mathbb{T})\times C^o(\mathbb{T},\mathbb{T})$ es la identidad de funciones de $C^o(\mathbb{T}\times\mathbb{Z}_2,\mathbb{T})$ en $C^o(\mathbb{T}\times\mathbb{Z}_2,\mathbb{T})$ y sobre $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ es H^*.

Construimos ahora dos aplicaciones de $C(\mathbb{T}\times\mathbb{Z}_2,\mathbb{T})$ que están separadas (Definición 3.1.2), cuyas imágenes por H no están separadas, y así habremos probado que H no es separador.

Como $C(\mathbb{T}\times\mathbb{Z}_2,\mathbb{T})$ es isomorfo a $C(\mathbb{T},\mathbb{T})\times C(\mathbb{T},\mathbb{T})$ (en (3.4)), una función $F\in C(\mathbb{T}\times\mathbb{Z}_2,\mathbb{T})$ tendrá la forma $F=(f_1,g_1)$, donde f_1 y g_1 pertenecen a $C(\mathbb{T},\mathbb{T})$. Más aún, cada grupo de funciones $C(\mathbb{T},\mathbb{T})$ se descompone de modo que queda el isomorfismo (3.5). Así pues, elegimos una función $(f_1,g_1)\in C(\mathbb{T},\mathbb{T})\times C(\mathbb{T},\mathbb{T})$ de la siguiente forma:

$$g_1(t)=f_1(t):=\tilde{f}_1(t)\chi_{-1}(t),$$

donde $\tilde{f}_1\in C^o(\mathbb{T},\mathbb{T})$ y χ_{-1} es un carácter sobre $\mathbb{T}$; además, $\tilde{f}_1$ es como sigue

$$\tilde{f}_1(t)=t,\ \text{si } Re(t)\geq 0 \text{ y } \tilde{f}_1(t)=-\bar{t} \text{ si } Re(t)<0.$$

Análogamente, cogemos $(f_2,g_2)\in C(\mathbb{T},\mathbb{T})\times C(\mathbb{T},\mathbb{T})$ tal que

$$g_2(t)=f_2(t):=\tilde{f}_2(t)\chi_{-1}(t),$$

donde,

$$\tilde{f}_2(t)=-\bar{t},\ \text{si } Re(t)\geq 0 \text{ y } \tilde{f}_2(t)=t \text{ si } Re(t)<0.$$

Luego, tanto $\tilde{f}_1$ como $\tilde{f}_2$ pertenecen ambas a $C^o(\mathbb{T},\mathbb{T})$. Por un lado, se tiene que $\tilde{f}_1$ lleva el toro en el semicírculo de $\mathbb{T}$ de parte real positiva, mientras que la segunda, $\tilde{f}_2$ lleva el toro en el semicírculo de $\mathbb{T}$ con parte real negativa. Veamos ahora que (f_1, g_1) y (f_2, g_2) están separadas. Como $g_i = f_i$ para $i \in \{1, 2\}$, basta comprobar lo que ocurre en los puntos de la forma $\mathbb{T} \times \{0\}$; sea, entonces, $t \in \mathbb{T}$:

- si $Re(t) \geq 0$:

$$\begin{aligned} (f_1, g_1)(t, 0) &= f_1(t) = \tilde{f}_1(t)\bar{t} = tt^{-1} = 1_{\mathbb{T}} \\ (f_2, g_2)(t, 0) &= f_2(t) = \tilde{f}_2(t)\bar{t} = (-\bar{t})t^{-1} = -\bar{t}^2 \end{aligned}$$

- si $Re(t) < 0$:

$$\begin{aligned} (f_1, g_1)(t, 0) &= f_1(t) = \tilde{f}_1(t)\bar{t} = (-\bar{t})t^{-1} = -\bar{t}^2 \\ (f_2, g_2)(t, 0) &= f_2(t) = \tilde{f}_2(t)\bar{t} = tt^{-1} = 1_{\mathbb{T}} \end{aligned}$$

- si $Re(t) = 0$:

$$\begin{aligned} (f_1, g_1)(t, 0) &= tt^{-1} = 1_{\mathbb{T}} \\ (f_2, g_2)(t, 0) &= tt^{-1} = 1_{\mathbb{T}} \end{aligned}$$

En $\mathbb{T} \times \{1\}$ ocurre lo mismo que en $\mathbb{T} \times \{0\}$. Por tanto, las funciones (f_1, g_1) y (f_2, g_2) están separadas.

Hacemos actuar H sobre ambas funciones y veamos que las imágenes de (f_1, g_1) y (f_2, g_2) por H no están separadas por lo que H no es separador. De nuevo, trabajaremos en primer lugar en $\mathbb{T} \times \{0\}$. Así pues, para todo $t \in \mathbb{T}$ tenemos que

$$\begin{aligned} H(f_1, g_1)(t, 0) &= \tilde{f}_1(t)\chi_{-1-(-1)}(t) = \tilde{f}_1(t) \text{ y} \\ H(f_2, g_2)(t, 0) &= \tilde{f}_2(t)\chi_{-1-(-1)}(t) = \tilde{f}_2(t) \end{aligned}$$

Si consideramos los puntos $(t_1, j_1) = (e^{\frac{\pi i}{4}}, 0)$ y $(t_2, j_2) = (e^{\frac{3\pi i}{4}}, 0)$, obtenemos que H no separa a las funciones (f_1, g_1) y (f_2, g_2), ya que, en particular,

$$\begin{aligned} H(f_1, g_1)(e^{\frac{\pi i}{4}}, 0) &= \tilde{f}_1(e^{\frac{\pi i}{4}}) = e^{\frac{\pi i}{4}} \neq 1_{\mathbb{T}} \text{ y} \\ H(f_2, g_2)(e^{\frac{\pi i}{4}}, 0) &= \tilde{f}_2(e^{\frac{\pi i}{4}}) = -e^{-\frac{\pi i}{4}} \neq 1_{\mathbb{T}}. \end{aligned}$$

Por tanto, H no puede ser un homomorfismo separador, ya que hemos construido dos funciones separadas cuyas imágenes no lo están.

Falta comprobar que H es una isometría. Como H restringido a $C^o(\mathbb{T} \times \mathbb{Z}_2, \mathbb{T})$ es la aplicación identidad de funciones, claramente es isometría. Nos tenemos que fijar, entonces, en los elementos de $C(\mathbb{T}\times\mathbb{Z}_2, \mathbb{T})$ que no están en $C^o(\mathbb{T}\times\mathbb{Z}_2, \mathbb{T})$. Acabamos de probar que H no es un homomorfismo separador, luego no puede ser representada mediante un homeomorfismo entre $\mathbb{T} \times \mathbb{Z}$ y $\mathbb{T} \times \mathbb{Z}_2$, i.e., no todas las imágenes Hf se pueden describir en función de f, sólo aquellas que pertenecen a $C^o(\mathbb{T} \times \mathbb{Z}_2, \mathbb{T})$.

Si $f \notin C^o(\mathbb{T} \times \mathbb{Z}_2, \mathbb{T})$, entonces tendremos que f es sobreyectiva, porque si no fuera así, f tendría logaritmo continuo y no es el caso. Luego $N_\infty(f) = 1$. Además, por ser H un isomorfismo topológico, éste lleva la componente conexa de la identidad en la componente conexa de la identidad de $C(\mathbb{T} \times \mathbb{Z}_2, \mathbb{T})$ y su aplicación inversa también (Lema 3.2.1). En consecuencia, si $f \notin C^o(\mathbb{T}\times\mathbb{Z}_2, \mathbb{T})$, entonces $Hf \notin C^o(\mathbb{T}\times\mathbb{Z}_2, \mathbb{T})$ y ambas son sobreyectivas. Por tanto,

$$N_\infty(f) = 1 = N_\infty(Hf),$$

con lo que H es una isometría.

Nuestro objetivo es asociar a todo isomorfismo topológico separador H entre $C(X, \mathbb{T})$ y $C(Y, \mathbb{T})$, con X e Y son espacios topológicos compactos Hausdorff, un homeomorfismo $h : Y \longrightarrow X$ que represente a H. En la Sección anterior 3.2.1 se describe cómo encontrar dicho homeomorfismo entre Y y X para representar $H_{|C^o(X,\mathbb{T})}$, es decir, se construyen $h : Y \to X$ y $\beta : Y \to \{-1, 1\}$ de forma que para toda $\exp(f) \in C^o(X, \mathbb{T})$,

$$H(\exp(f)) = \exp(\beta f \circ h),$$

donde $\beta : Y \to \{-1, 1\}$ tomaba el valor 1, si H llevaba aplicaciones constantes sobre X en las correspondientes sobre Y (Corolario 3.2.15), y en otro caso, $\beta(Y) \subseteq \{-1, 1\}$ (Teorema 3.2.14), indistintamente.

Entonces, para encontrar un homeomorfismo h que represente a la aplicación H y no sólo a su restricción $H_{|C^o(X,\mathbb{T})}$, necesitamos de la siguiente Proposición:

Proposición 3.2.19 *Sea* $H' : C(X,\mathbb{T}) \longrightarrow C(X,\mathbb{T})$ *un isomorfismo topológico separador tal que* $H'_{|C^o(X,\mathbb{T})} = Id_{|C^o(X,\mathbb{T})}$. *Entonces:*

$$H' \equiv Id_{C(X,\mathbb{T})}.$$

-Demostración-
Procedemos por reducción al absurdo y supongamos entonces que existe $f \in C(X,\mathbb{T})$ tal que

$$H'f \neq f,$$

esto es, existe $x_0 \in X$ tal que $(H'f)(x_0) \neq f(x_0)$. Es claro que f no puede pertenecer a $C^o(X,\mathbb{T})$. Podemos asumir sin pérdida de generalidad que

$$(H'f)(x_0) = 1_{\mathbb{T}},$$

luego $f(x_0) = r \neq 1_{\mathbb{T}}$.

Sea ahora I_1 un arco cerrado de $\mathbb{T}$ tal que r, $1_{\mathbb{T}} \in int(I_1)$, es decir, al interior de I_1. Sea entonces $I_2 := \mathbb{T} \setminus int(I_1)$; así pues, el toro queda dividido en dos partes, que no son disjuntas. Llamamos $B_1 := f^{-1}(I_1)$ y $B_2 := f^{-1}(I_2)$; cabe destacar que ambos son cerrados y por tanto, compactos en X. En primer lugar, definimos la aplicación $f_{1_{|B_1}} := f$ que la podemos extender continuamente por el Teorema de Tietze-Urysohn (en [46] por ejemplo) a X, esto es, la extensión $f_1 : X \longrightarrow I_1$ es continua. Lo mismo ocurre si definimos $f_{2_{|B_2}} := f$; tenemos que existe una extensión continua a X $f_2 : X \longrightarrow I_2$. Definimos entonces

$$g_1 := f_1\overline{f} \text{ y } g_2 := f_2\overline{f}.$$

Veamos que g_1 y g_2 están separadas. Sea $x \in X$, entonces $x \in B_1$, $x \in B_2$ o $x \in B_1 \cap B_2$. En cualquiera de estos tres casos, una de ellas ha de anularse para que sean separadas. Por partes:

- Si $x \in B_1$, entonces:

$$\begin{aligned} g_1(x) &= f_1(x)\overline{f(x)} = f(x)\overline{f(x)} = 1_{\mathbb{T}} \\ g_2(x) &= f_2(x)\overline{f(x)} \end{aligned}$$

- Si $x \in B_2$, entonces:

$$\begin{aligned} g_1(x) &= f_1(x)\overline{f(x)} \\ g_2(x) &= f_2(x)\overline{f(x)} = f(x)\overline{f(x)} = 1_{\mathbb{T}} \end{aligned}$$

En conclusión, tanto si $x \in B_1$ como si $x \in B_2$, siempre se anula alguna de las dos funciones. Por tanto, las aplicaciónes g_1 y g_2 están separadas. Veamos ahora que, por el contrario, las funciones $H'g_1$ y $H'g_2$ no lo están, con lo que habremos llegado a la contradicción.

Recordemos que el punto $x_0 \in X$ era el que cumplía que

$$(H'f)(x_0) \neq f(x_0),$$

siendo $(H'f)(x_0) = 1_{\mathbb{T}}$ y $f(x_0) = r \neq 1_{\mathbb{T}}$. Además, el punto x_0 pertenece a B_1, porque $f(x_0) = r \in int(I_1)$, el interior de I_1. Como H' es una aplicación separadora, lleva funciones separadas en separadas, es decir, tenemos que, si trabajamos en $x = x_0$, entonces

$$(H'g_1)(x_0) = 1_{\mathbb{T}} \text{ o bien } (H'g_2)(x_0) = 1_{\mathbb{T}}.$$

Veamos si realmente se da que $(H'g_1)(x_0) = 1_{\mathbb{T}}$:

$$\begin{aligned} (H'g_1)(x_0) &= H'(f_1\overline{f})(x_0) \\ &= H'(f_1)(x_0)H'(\overline{f})(x_0) \\ &= f_1(x_0)(H'\overline{f})(x_0), \text{ ya que } f_1 \in C^o(X, \mathbb{T}) \\ &= f(x_0)\overline{(H'f)(x_0)}, \text{ ya que } f_{1_{B_1}} = f \\ &= r1_{\mathbb{T}} = r \neq 1_{\mathbb{T}}. \end{aligned}$$

Entonces, como H' es separadora no queda más remedio que $(H'g_2)(x_0) = 1_{\mathbb{T}}$. Vamos a ver si es cierto:

$$(H'g_2)(x_0) = (H'f_2)(x_0)(H'\overline{f})(x_0) = f_2(x_0)1_{\mathbb{T}} = f_2(x_0),$$

ya que $f_2 \in C^o(X, \mathbb{T})$ y por hipótesis, $H'_{|C^o(X,\mathbb{T})} = Id_{|C^o(X,\mathbb{T})}$. Pero, $f_2(X) \subseteq I_2$ y $1_{\mathbb{T}} \notin I_2$, luego $f_2(x_0) \neq 1_{\mathbb{T}}$. Contradicción.

Por tanto, si $H'_{|C^o(X,\mathbb{T})} = Id_{|C^o(X,\mathbb{T})}$, entonces $Hf = f$ sea cual sea $f \in C(X, \mathbb{T})$. □

Nota 3.2.20 *La Proposición 3.2.19 da otra prueba de que el isomorfismo del Ejemplo 3.2.18 no es separador, ya que éste no es la aplicación identidad de funciones de* $C(\mathbb{T} \times \mathbb{Z}_2, \mathbb{T})$ *en* $C(\mathbb{T} \times \mathbb{Z}_2)$.

Regresamos a nuestro isomorfismo topológico separador

$$H : C(X, \mathbb{T}) \longrightarrow C(Y, \mathbb{T})$$

Llamamos ahora

$$L : C(Y, \mathbb{T}) \longrightarrow C(X, \mathbb{T}) \tag{3.6}$$

a otro isomorfismo topológico separador que cumple las dos propiedades siguientes:

1. La composición de L con H es la aplicación identidad de funciones de $C^o(X, \mathbb{T})$, es decir,

$$(L \circ H)_{|C^o(X,\mathbb{T})} = Id_{C^o(X,\mathbb{T})}$$

2. L es una aplicación del tipo Banach-Stone, esto es, existen un homeomorfismo $k : X \longrightarrow Y$ y una aplicación continua $\gamma : X \to \{-1, 1\}$ tales que

$$Lf = (f \circ k)^\gamma$$

Veamos que este nuevo isomorfismo L existe. De la Sección 3.2.1, sabemos que

$$H(e^{2\pi i f})(y) = e^{2\pi i f(h(y))\beta(y)}$$

para toda $e^{2\pi i f} \in C^o(X, \mathbb{T})$ y para todo $y \in Y$. Definimos entonces la aplicación siguiente de $C(X, \mathbb{T})$ en $C(Y, \mathbb{T})$:

$$\tilde{H}(g)(y) := g(h(y))^{\beta(y)}$$

para toda $g \in C(X, \mathbb{T})$ e $y \in Y$. Ésta verifica que $\widetilde{H}_{|C^o(X,\mathbb{T})} = H$ y además es una aplicación del tipo Banach-Stone, ya que h es un homeomorfismo (Proposición 3.2.11) y β continua (Proposición 3.2.10). Es por ello que $\widetilde{H}$ es un isomorfismo topológico separador cuya aplicación inversa verifica también todas estas propiedades. Así pues, definimos $L := \widetilde{H}^{-1}$ y de ahí que cumpla que si $f \in C^o(X, \mathbb{T})$

$$(L \circ H)(f) = L(Hf) = \widetilde{H}^{-1}(Hf) = H^{-1}(Hf) = f,$$

como también $(H \circ L)_{|C^o(Y,\mathbb{T})} = Id_{C^o(Y,\mathbb{T})}$. De esta forma, demostramos la existencia de una aplicación que cumple las propiedades anteriores.

Teorema 3.2.21 *Sean X e Y espacios topológicos compactos Hausdorff y sea $H : C(X, \mathbb{T}) \longrightarrow C(Y, \mathbb{T})$ un isomorfismo topológico separador. Entonces* *existe un homeomorfismo $h : Y \to X$ y una aplicación continua $\beta : Y \to \{-1, 1\}$ tales que*

$$(Hf)(y) = f(h(y))^{\beta(y)},$$

para toda $f \in C(X, \mathbb{T})$ y para todo $y \in Y$.

-Demostración-
Como la composición de aplicaciones separadoras da lugar a una aplicación separadora (Proposición 1.3.3), obtenemos que $L \circ H : C(X, \mathbb{T}) \longrightarrow C(X, \mathbb{T})$ es un isomorfismo topológico separador que verifica además

$$(L \circ H)_{|C^o(X,\mathbb{T})} = Id_{C^o(X,\mathbb{T})},$$

donde L es el isomorfismo topológico separador definido en (3.6).

Por tanto, por la Proposición 3.2.19, tenemos que en definitiva $L \circ H = Id : C(X, \mathbb{T}) \longrightarrow C(X, \mathbb{T})$, ya que la composición de L con H verifica las hipótesis de dicho resultado, es decir, para toda $f \in C(X, \mathbb{T})$

$$(L \circ H)(f) = f$$

y H es la inversa de L para la composición. Como la aplicación inversa de L tiene esta forma

$$L^{-1}(f) = (f \circ k^{-1})^{\gamma'},$$

con $\gamma' : Y \to \{-1, 1\}$ tal que $\gamma' := \gamma \circ k^{-1}$, entonces H también, esto es, para toda $f \in C(X, \mathbb{T})$,

$$Hf = (f \circ k^{-1})^{\gamma'},$$

siendo $k^{-1} : Y \to X$ un homeomorfismo y $\gamma' : Y \to \{-1, 1\}$ una aplicación continua, por serlo también k. Así pues, el isomorfismo topológico separador H se puede representar mediante un homeomorfismo entre Y y X, esto es, H es una aplicación del tipo Banach-Stone. $\square$

A continuación, veamos una consecuencia sencilla de la Proposición 3.2.19.

Corolario 3.2.22 *Sea $H : C(X, \mathbb{T}) \longrightarrow C(Y, \mathbb{T})$ un isomorfismo topológico tal que $H_{|C^o(X,\mathbb{T})}$ es una isometría. Entonces H es isometría.*

-Demostración-
En el Lema 3.2.1 de la Sección 3.2.1, ya se probó que $H(C^o(X, \mathbb{T})) = C^o(Y, \mathbb{T})$ debido a que H es un isomorfismo topológico.

Por hipótesis, ya sabemos que H es isometría sobre las aplicaciones de $C^o(X,\mathbb{T})$, i.e., para toda $f \in C^o(X,\mathbb{T})$,

$$N_\infty(Hf) = N_\infty(f).$$

Sea $g \notin C^o(X,\mathbb{T})$, luego Hg tampoco pertenece a $C^o(Y,\mathbb{T})$, con lo que ambas han de cumplir

$$g(X) = \mathbb{T} \text{ y } (Hg)(Y) = \mathbb{T},$$

Así pues,

$$N_\infty(Hg) = 1 = N_\infty(g),$$

Por tanto, H es una isometría. □

3.3. k- y μ-espacios

Sean X e Y espacios topológicos completamente regulares, Hausdorff con las propiedades adicionales de ser k- y μ-espacios y supongamos que los grupos $C(X,\mathbb{T})$ y $C(Y,\mathbb{T})$ están dotados de la topología compacta abierta. Sea, además,

$$H : C(X,\mathbb{T}) \longrightarrow C(Y,\mathbb{T})$$

un isomorfismo topológico separador. Nuestro objetivo consiste en representar dicho homomorfismo H mediante un homeomorfismo entre los espacios Y y X. En esta ocasión, hemos perdido la compacidad de los espacios X e Y, y esto acarreará dificultades añadidas a lo largo del proceso. Por lo pronto, nos vamos a restringir a las funciones de $C(X,\mathbb{T})$ que tienen logaritmo continuo, es decir, a las funciones que pertenecen a $\exp(C(X,\mathbb{R}))$ que denotaremos por $C^o(X,\mathbb{T})$. El primer problema que surge es si H llevará dicho espacio al correspondiente en $C(Y,\mathbb{T})$; para resolver esta cuestión tenemos el siguiente resultado:

Lema 3.3.1 *Sea Z un k-espacio topológico. Entonces, $C^o(Z,\mathbb{T})$ es la componente arcoconexa de la identidad de $C(Z,\mathbb{T})$.*

-Demostración-
En primer lugar, veamos que $C^o(Z,\mathbb{T})$ es un subespacio arcoconexo de $C(Z,\mathbb{T})$. Sean entonces f, g elementos de $C^o(Z,\mathbb{T})$; de esta forma, existen f', $g' \in C(Z,\mathbb{R})$ tales que $f = e^{2\pi i f'}$ y $g = e^{2\pi i g'}$. Por otra parte, como ambas pertenecen a $C^o(Z,\mathbb{T})$, son homotópicas al elemento identidad de $C^o(Z,\mathbb{T})$

(Corolario al Teorema 7.3 de [117]). Además, la clase de *"ser homotópico a"* cumple la propiedad de la transitividad, luego tenemos que f y g son homotópicas entre sí. Esto implica que existe una función continua de homotopía $F : [0,1] \times Z \to \mathbb{T}$ tal que

$$F(0,z) = f(z) \text{ y } F(1,z) = g(z).$$

Definimos, por tanto, el arco γ que unirá a dichas funciones y éste viene dado de la siguiente forma:

$$\begin{array}{rcl} \gamma : [0,1] & \to & C^o(Z,\mathbb{T}) \\ t & \mapsto & \gamma(t), \end{array}$$

donde $\gamma(t)(z) = F(t,z)$, es decir, $\gamma(0)(z) = F(0,z) = f(z)$ y $\gamma(1)(z) = F(1,z) = g(z)$ para todo $z \in Z$. Falta probar que γ es una aplicación continua. Sea, pues, una red $(t_i)_i \subseteq [0,1]$ convergente a $t_0 \in [0,1]$. Dados $K \subseteq Z$ compacto y $\epsilon > 0$, ¿existe i_1 tal que $(\gamma(t_i) - \gamma(t_0))(K) \subseteq V_\epsilon$ para todo $i \geq i_1$? Sea $k \in K$, entonces $(\gamma(t_i) - \gamma(t_0))(k) = F(t_i,k) - F(t_0,k)$. Pero la función de homotopía F es continua en cada coordenada y sobre el compacto $[0,1] \times K$, en particular, es uniformemente continua, luego tenemos que existe un índice i_1 tal que $F(t_i,k) - F(t_0,k) \in V_\epsilon$ para todo $i \geq i_1$. Así pues, el arco γ es continuo, luego $C^o(Z,\mathbb{T})$ es un espacio arcoconexo.

Veamos a continuación que es la componente arcoconexa de la identidad. Supongamos que existe un subconjunto arcoconexo A de $C(Z,\mathbb{T})$ tal que $A \supsetneq C^o(Z,\mathbb{T})$. Sean, pues, $f \in A \setminus C^o(Z,\mathbb{T})$ y $g \in C^o(Z,\mathbb{T})$. Como ambas aplicaciones pertenecen a A que es arcoconexo, existe un arco continuo $\alpha : [0,1] \to A$ tal que $\alpha(0) = f$ y $\alpha(1) = g$, a partir del cual podemos construir una función de homotopía $F : [0,1] \times Z \to \mathbb{T}$ entre ellas de la siguiente forma:

$$F(t,z) := \alpha(t)(z),$$

que cumple que $F(0,z) = f(z)$ y $F(1,z) = g(z)$. Resta comprobar que F es continua. Sea entonces $(t_i,z_i) \subseteq [0,1] \times Z$ convergente a un punto (t_0,z_0), luego (t_i) converge a t_0 por un lado y (z_i) a z_0 por otro. La pregunta que nos hacemos es si, dado un entorno abierto V de $F(t_0,z_0)$ en $\mathbb{T}$, existe un índice i_0 tal que $F(t_i,z_i) \in V$ para todo $i \geq i_0$. Más aún, como α es continua, entonces $\alpha([0,1])$ es compacto en $C^o(Z,\mathbb{T})$, donde Z es k-espacio, luego por el Teorema de Arzelà-Ascoli, $\alpha([0,1])$ es equicontinuo sobre Z, en particular, sobre el punto z_0. De esta forma, dado un entorno abierto de $\mathbb{T}$ (cogemos el abierto V de antes), existe un entorno abierto W de z_0 tal que

$$\alpha(t)(W) \subseteq V$$

para todo $t \in [0,1]$. En particular, esto se cumple para todos los elementos de la red $(t_i)_i$. Por otra parte, como W es entorno de z_0 y (z_i) converge a z_0, existe i_1 tal que $z_i \in W$ para todo $i \geq i_1$. De esta forma, si $i \geq i_1$,

$$\alpha(t)(z_i) \in V$$

para todo $i \geq i_1$ y para todo $t \in [0,1]$. Luego, si $i \geq i_1$,

$$F(t_i, z_i) = \alpha(t_i)(z_i) \in V \in \mathcal{E}(F(t_0, z_0)).$$

Por tanto, la función F es continua y las funciones f y g son homotópicas. Pero g pertenece a $C^o(Z,\mathbb{T})$, con lo que es homotópica a su vez a la función constante igual a $1_{\mathbb{T}}$. Por la propiedad de la transitividad, tenemos que

$$f \overset{F}{\sim} g \text{ y } g \overset{F}{\sim} 1_{C^o(Z,\mathbb{T})}, \text{ entonces } f \overset{F}{\sim} 1_{C^o(Z,\mathbb{T})}.$$

Contradicción, ya que habíamos supuesto al comienzo que $f \notin C^o(Z,\mathbb{T})$. Así pues, $C^o(Z,\mathbb{T})$ es la componente arcoconexa de la identidad de $C(Z,\mathbb{T})$, siempre que Z sea k-espacio. □

De esta forma, como H es un isomorfismo topológico, si lo restringimos a $C^o(X,\mathbb{T})$ que es la componente arcoconexa de $C(X,\mathbb{T})$, tal y como acabamos de probar en el Lema 3.3.1, obtenemos

$$H(C^o(X,\mathbb{T})) \subseteq C^o(Y,\mathbb{T}),$$

y al revés también, porque H^{-1} es continua:

$$H(C^o(X,\mathbb{T})) \supseteq C^o(Y,\mathbb{T}),$$

Por tanto, $H(C^o(X,\mathbb{T})) = C^o(Y,\mathbb{T})$ y además,

$$H_| : C^o(X,\mathbb{T}) \longrightarrow C^o(Y,\mathbb{T})$$

sigue siendo un isomorfismo topológico separador. A esta restricción $H_|$, la seguiremos llamando H. Dualizamos y queda:

$$\widehat{H} : C^o(Y,\mathbb{T})^\wedge \longrightarrow C^o(X,\mathbb{T})^\wedge.$$

A partir de este nuevo homomorfismo, el dual de H, vamos a obtener la aplicación que representará a H. Cabe destacar que el homomorfismo dual hereda de H las propiedades de ser un isomorfismo algebraico, y además es continuo respecto de la topología de la convergencia puntual sobre los elementos de $C^o(X,\mathbb{T})$ y $C^o(Y,\mathbb{T})$. Más aún, es continuo respecto de la topología compacta abierta en ambos grupos $C^o(Y,\mathbb{T})^\wedge$ y $C^o(X,\mathbb{T})^\wedge$ (Proposición 3.1.4).

Nos basaremos en la Proposición 3.2.5 para obtener el siguiente resultado auxiliar:

Lema 3.3.2 *Sea Y un k-espacio. Entonces, la inclusión $j_Y : Y \hookrightarrow C^o(Y,\mathbb{T})^\wedge$ es continua.*

-Demostración-
Vamos a probar que para todo $K \subseteq Y$ compacto, la inclusión

$$K \hookrightarrow C^o(Y,\mathbb{T})^\wedge$$

es continua, y, como Y es un k-espacio, obtendremos finalmente que j_Y es continua.

Sea, pues, $K \subseteq Y$ compacto. Entonces construimos la aplicación restricción $R_K : C^o(Y,\mathbb{T}) \to C^o(K,\mathbb{T})$ que es un homomorfismo continuo. Lo dualizamos y el homomorfismo dual hereda de R_K la propiedad de ser continuo (Nota 3.1.5).

Tenemos la siguiente cadena de aplicaciones:

$$K \xrightarrow{j_K} C^o(K,\mathbb{T})^\wedge \xrightarrow{\widehat{R}_K} C^o(X,\mathbb{T})^\wedge,$$

de forma que $j_{Y_{|K}} = \widehat{R}_K \circ j_K$. Pero de la Proposición 3.2.5 sabemos que para todo espacio compacto Z, la inmersión $Z \hookrightarrow C^o(Z,\mathbb{T})^\wedge$ es topológica. Así pues, la inmersión j_K es, en particular, continua, y de esta forma, la composición $\widehat{R}_K \circ j_K$ también es continua. Por tanto, como j_K es continua para todo $K \subseteq Y$ compacto e Y es k-espacio, llegamos a la conclusión de que efectivamente la inmersión

$$j_Y : Y \hookrightarrow C^o(Y,\mathbb{T})^\wedge$$

es continua.

$\square$

Así pues, el homomorfismo dual de H restringido al espacio Y es continuo. Tomando como base los comentarios hechos antes de la Proposición 3.2.7 de la Sección 3.2.1, obtenemos de manera análoga que para cada $y \in Y$, el elemento $\widehat{H}_{|Y}(y)$ pertenece a $C^o(X,\mathbb{T})^\wedge$. Por otro lado, si escribimos $C^o(X,\mathbb{T})$ como el cociente $\frac{C(X,\mathbb{R})}{C(X,\mathbb{Z})}$, podemos identificar $C^o(X,\mathbb{T})^\wedge$ como un subgrupo de $\mathcal{M}_c(X)$, el espacio dual de $C(X,\mathbb{R})$. Luego, para todo $y \in Y$, se tiene que $\widehat{H}_{|Y}(y)$ es una medida de soporte compacto y por tanto, $supp(\widehat{H}_{|Y}(y)) := K_y$ es un subconjunto compacto no vacío de X.

Lema 3.3.3 *Para todo $y \in Y$, el soporte de $\widehat{H}_{|Y}(y) \in \mathcal{M}_c(X)$ se compone de un único elemento de X.*

-Demostración-
La prueba de este resultado es análoga a la de la Proposición 3.2.6. □

Entonces, tal y como ocurría en la Sección anterior 3.2.1, obtenemos que

$$\widehat{H}_{|Y}(Y) \subseteq \mathbb{R}X,$$

luego para todo $y \in Y$,

$$\widehat{H}_{|Y}(y) = r_y\chi_x,$$

donde $\chi_x = \exp(\delta_x)$ y r_y es un número real. Además, si $e^{2\pi if} \in C^o(X,\mathbb{T})$ e $y \in Y$, tenemos que

$$(He^{2\pi if})(y) = \widehat{H}_{|Y}(y)(e^{2\pi if}) = e^{2\pi i r_y f(x)}, \tag{3.7}$$

siendo x el punto del soporte correspondiente a la medida $\widehat{H}_{|Y}(y)$. De alguna forma, estamos llegando a una representación de H, pero todavía hay que trabajar un poco más para alcanzar la representación óptima. Cabe destacar que el número real r_y asociado a cada elemento $y \in Y$ es distinto de 0.

Lema 3.3.4 *Para todo $y \in Y$, el número $r_y \in \mathbb{R}$ que aparece en (3.7) no puede ser* 0.

-Demostración-
De hecho, si existiera $y_0 \in Y$ tal que $r_{y_0} = 0$, entonces tendríamos que para toda $e^{2\pi if} \in C^o(X,\mathbb{T})$,

$$\widehat{H}_{|Y}(y_0)(e^{2\pi if}) = e^{2\pi i r_{y_0} f(x_0)} = e^0 = 1_{\mathbb{T}}.$$

Esto implica que $\widehat{H}_{|Y}(y_0)$ es el elemento unidad de $C^o(X,\mathbb{T})^\wedge$ y, como la aplicación dual de H hereda la propiedad de ser inyectiva (Proposición 3.1.4), obtenemos que χ_{y_0}, que recordamos que actúa como la aplicación evaluación usual que a cada f la manda a $f(y_0)$, es la identidad de $C^o(Y,\mathbb{T})^\wedge$, hecho que es imposible porque χ_{y_0} tiene soporte no vacío. $\square$

Podemos definir, por tanto, las siguientes aplicaciones

$$\begin{array}{rcl} h: Y & \longrightarrow & X \\ y & \longmapsto & x, \end{array}$$

siendo x el punto del soporte asociado a la medida $\widehat{H}_{|Y}(y)$, y la aplicación

$$\begin{array}{rcl} \beta: Y & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & r_y, \end{array}$$

de forma que para todo $y \in Y$, la medida $\widehat{H}_{|Y}(y)$ queda representada de la siguiente forma:

$$\widehat{H}_{|Y}(y) = \beta(y)h(y), \tag{3.8}$$

donde $h(y)$ representa a la medida evaluación de $C^o(X,\mathbb{T})^\wedge$ tal que $h(y)(e^f) = e^{f(h(y))}$. Por tanto, la Ecuación (3.7) se transforma en

$$H(e^{2\pi i f})(y) = \widehat{H}_{|Y}(y)(e^{2\pi i f}) = e^{2\pi i \beta(y) f(h(y))}. \tag{3.9}$$

Así pues, ya tenemos representado el isomorfismo topológico separador H mediante una aplicación $h: Y \to X$, pero lo que cabe preguntarse ahora es qué propiedades tienen tanto β como h para poder obtener un resultado análogo a lo que afirma el Teorema clásico de Banach-Stone, tal y como se probó en la anterior Sección 3.2, cuando trabajamos con espacios topológicos compactos X e Y.

En la Sección anterior 3.2.1, probamos que β sólo tomaba valores enteros, basándonos principalmente en el hecho de que el grupo dual de $C^o(Z,\mathbb{T})$ se podía indentificar con el espacio de medidas $\mathcal{M}_c(Z)^\sim$, con Z un espacio compacto (Lema 3.2.2). En esta sección, como X e Y son μ-espacios, esa identificación no se da, pero sí la siguiente inclusión (en [55]):

$$C^o(X,\mathbb{T})^\wedge \subsetneq \mathcal{M}_c(X)^\sim.$$

Así pues, el procedimiento en esta sección será diferente al de la anterior. Comenzamos, entonces, con β.

Proposición 3.3.5 *La aplicación $\beta : Y \to \mathbb{R}$ toma sólo valores enteros distintos de* 0 *y es continua.*

-Demostración-
Probamos en primer lugar que β toma valores enteros y a continuación que es continua.

- Sea $f : X \to \mathbb{R}$ la aplicación constante igual a $1 \in \mathbb{R}$. Entonces, por un lado, si $y \in Y$,

$$\widehat{H}_{|Y}(y)(e^{2\pi i\bar{1}}) = \widehat{H}_{|Y}(y)(1_{C(X,\mathbb{T})}) = H(1_{C(X,\mathbb{T})})(y) = 1_{\mathbb{T}},$$

  ya que H es un homomorfismo. Por otra parte,

$$\widehat{H}_{|Y}(y)(e^{2\pi i\bar{1}}) = e^{2\pi i\beta(y)\bar{1}(h(y))} = e^{2\pi i\beta(y)}.$$

  Entonces obtenemos que $\beta(Y) \subseteq \mathbb{Z}$ y no toma el valor 0 por el Lema 3.3.4.

- Para probar que β es continua vamos a utilizar el hecho de que Y es un k-espacio. Para ello, sea $K \subseteq Y$ compacto y veamos que $\beta_{|K}$ es continua. Definimos

$$\widetilde{H}_K : K \to \widehat{\mathbb{T}}$$

  tal que $\widetilde{H}_K(y)(t) := (H\bar{\mathbf{t}})(y)$, es decir, que si $t \in \mathbb{T}$, podemos expresar $t = e^{2\pi ir}$ y de esta forma,

$$\widetilde{H}_K(y)(t) = (H\bar{\mathbf{t}})(y) = (He^{2\pi i\bar{\mathbf{r}}})(y) = e^{2\pi i\beta(y)r} = e^{2\pi i\beta_K(y)r} = t^{\beta_K(y)}.$$

  A partir de aquí, el procedimiento es análogo al seguido en la Proposición 3.2.10, pero trabajando con la aplicación $\widetilde{H}_K$. De esta forma, se prueba que $\widetilde{H}_K$ es continua para todo $K \subseteq Y$ compacto, luego $\beta_{|K} : K \to \mathbb{Z}$ es continua, ya que

$$\beta_{|K} = j^{-1} \circ \widetilde{H}_K,$$

  con j el isomorfismo topológico entre $\widehat{\mathbb{T}}$ y $\mathbb{Z}$, sea cuál sea el compacto K de Y. Como Y es un k-espacio, tenemos que $\beta : Y \to \mathbb{Z}$ es continua.

$\square$

Tal y como ocurría en la Sección 3.2.1, vamos a abusar un poco de la notación: cuando estamos hablando del elemento $\widehat{H}_{|Y}(y) = n \cdot x$, nos referiremos indistintamente a un elemento de X o a la aplicación evaluación habitual $\chi_x : C^o(X,\mathbb{T}) \to \mathbb{T}$ que a cada f la envia a $f(x)$. A ésta la podríamos considerar como $\chi_x = e^{2\pi i \delta_x}$, siendo δ_x la correspondiente para funciones continuas reales. Tras esta pequeña aclaración, tenemos el siguiente resultado uqe asegura la continuidad de la aplicación h:

Proposición 3.3.6 *La aplicación $h : Y \longrightarrow X$ definida en (3.8) es continua.*

-Demostración-
De la Ecuación (3.8) sabemos que para todo $y \in Y$,

$$\widehat{H}_{|Y}(y) = \beta(y)h(y).$$

Por el Lema 3.3.2 y los comentarios hechos tras éste y la Proposición 3.3.5, tenemos que tanto $\widehat{H}_{|Y}$ como β son aplicaciones continuas. Por tanto, es de fácil comprobación que h también lo es. Veámoslo. Sea, pues, $(y_i)_i \subseteq Y$ una red convergente a un punto $y_0 \in Y$. La pregunta que nos planteamos es si $(h(y_i))$ converge a su vez a $h(y_0)$. Esto es tanto como pedir que la red de caracteres $(\chi_{h(y_i)})_i \subseteq C^o(X,\mathbb{T})^\wedge$ converja a $\chi_{h(y_0)}$, siempre que $(y_i)_i$ lo haga a y_0. Por tanto, sea $K \subseteq C^o(X,\mathbb{T})$ compacto y $\epsilon > 0$. Entonces, ¿existirá i_1 tal que $(\chi_{h(y_i)} - \chi_{h(y_0)})(K) \subseteq V_\epsilon$ para todo $i \geq i_1$? Por una parte, sabemos que $\widehat{H}_{|Y}(y_i)$ converge a $\widehat{H}_{|Y}(y_0)$ con la topología compacta abierta por ser $\widehat{H}_{|Y}$ una aplicación continua. Es decir, que dados un subconjunto compacto Q de $C^o(X,\mathbb{T})$ y $\epsilon > 0$ existe un índice i_1 tal que $(\widehat{H}_{|Y}(y_i) - \widehat{H}_{|Y}(y_0))(Q) \subseteq V_\epsilon$. Podemos coger $Q = K$ y obtenemos,

$$e^{2\pi i(\beta(y_i)f(h(y_i)) - \beta(y_0)f(h(y_0)))} \in V_\epsilon, \tag{3.10}$$

para todo $i \geq i_1$ y para todo elemento $e^{2\pi i f} \in K$. Por otra parte, como β es continua (Proposición 3.3.5), tenemos que $(\beta(y_i))_i$ converge a $\beta(y_0)$; esto quiere decir que dado $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$ existe un índice i_3 tal que $\beta(y_i) = \beta(y_0)$ para todo $i \geq i_3$. Sea, pues, $i \geq i_1 := \text{máx}(i_2, i_3)$; de esta forma, $\beta(y_i) = \beta(y_0)$ para todo $i \geq i_1$. Más aún, si $i \geq i_1$, de (3.10),

$$e^{2\pi i \beta(y_0)(f(h(y_i)) - f(h(y_0)))} \in V_\epsilon.$$

Como $|\beta(y_0)| \geq 1$, entonces $\frac{\epsilon}{|\beta(y_0)|} \leq \epsilon$, luego para todo $i \geq i_1$ obtenemos

$$e^{2\pi i(f(h(y_i)) - f(h(y_0)))} \in V_\epsilon,$$

esto es, $(\chi_{h(y_i)} - \chi_{h(y_0)})(K) \subseteq V_\epsilon$ para todo $i \geq i_1$ y la red $(\chi_{h(y_i)})_i$ converge con la topología compacta abierta a $\chi_{h(y_0)}$.

Sólo falta probar que el hecho de que la red de caracteres evaluación converja implica que así lo haga la red $(h(y_i))_i$ a $h(y_0)$. Es prácticamente inmediato. Como la red $(\chi_{h(y_i)})_i$ converge con la topología compacta abierta a $\chi_{h(y_0)}$, también lo hace punto a punto, es decir, que para toda aplicación $e^{2\pi i g} \in C^o(X, \mathbb{T})$ tenemos que

$$e^{2\pi i g(h(y_i))} \rightsquigarrow e^{2\pi i g(h(y_0))}.$$

Supongamos que la red $(h(y_i))$ no convergiera a $h(y_0)$; en ese caso, existiría un entorno abierto U de $h(y_0)$ tal que $h(y_i) \notin U$ para todo índice i. Por tanto, podemos encontrar una función continua $f : X \to [0,1]$ tal que $f(X \setminus U) = \{1\}$ y $f(h(y_0)) = 0$. Cogemos $a \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0,1]$. Entonces,

$$e^{2\pi i a f(h(y_i))} \rightsquigarrow e^{2\pi i a f(h(y_0))},$$

tal y como hemos visto anteriormente, pero esto implica, según la construcción de f y la elección de a, que

$$e^{2\pi i a} \rightsquigarrow e^0 = 1_{\mathbb{T}}.$$

Contradicción, ya que el término de la red constante verfica que $e^{2\pi i a} \neq 1_{\mathbb{T}}$. Por tanto, la red $(h(y_i))_i$ converge a $h(y_0)$, siempre que (y_i) lo haga a y_0, y h es efectivamente continua. □

A continuación, veamos que h es inyectiva y tiene el rango denso en X.

Proposición 3.3.7 *La aplicación $h : Y \to X$ tiene el rango denso y además, es inyectiva.*

-Demostración-

- $\overline{h(Y)} = X$:

  Supongamos que existe $x_0 \in X \setminus \overline{h(Y)}$. Entonces existen entornos abiertos de x_0 y $\overline{h(Y)}$, U y V, respectivamente, tales que $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$. Luego, como X es completamente regular, podemos encontrar una función continua $f : X \to [0,1]$ tal que $f(x_0) = 0$ y $f(X \setminus U) = \{1\}$. Además, se tiene que $0 < f(U \setminus \{x_0\}) < 1$. Por tanto, como $\overline{h(Y)} \subseteq V \subseteq X \setminus U$,

  $$H(e^{2\pi i f})(y) = e^{2\pi i \beta(y) f(h(y))} = e^{2\pi i \beta(y)} = 1_{\mathbb{T}}$$

  para todo $y \in Y$. Luego, gracias a la inyectividad de H, la aplicación $e^{2\pi i f}$ ha de ser el elemento identidad de $C^o(X, \mathbb{T})$, es decir, $f(X) \subseteq \mathbb{Z}$. Pero, $f(U \setminus \{x_0\}) \subseteq]0,1[$. Contradicción. Así pues, el rango de h es denso en X.

- h es inyectiva:

  Esta propiedad se demuestra de forma análoga a como se hacía en la Proposición 3.2.11, donde X e Y eran espacios topológicos compactos.

$\square$

Cuando X e Y son compactos sabemos por el Teorema 3.2.14 que la aplicación h que representa al isomorfismo topológico separador

$$H : C(X, \mathbb{T}) \longrightarrow C(Y, \mathbb{T})$$

es un homeomorfismo. Cuando X e Y no son compactos, la aplicación h también va a ser un homeomorfismo (al menos si son μ- y k-espacios, ver Corolario 3.3.19 más abajo), pero la demostración se sigue de principios diferentes al caso compacto.

Aquí resultará relevante la topología que $C(Y, \mathbb{R})^\wedge$ induce sobre $C^o(Y, \mathbb{T})^\wedge$. Recordamos que hasta ahora hemos identificado el grupo dual de $C^o(Y, \mathbb{T})$ con un grupo de medidas, un subgrupo de $C(Y, \mathbb{R})^*$ por tanto, pero cabe destacar que las topologías naturales de $C(Y, \mathbb{R})^*$ y $C^o(Y, \mathbb{T})^\wedge$ son diferentes. Es por ello que analizaremos esta situación.

Sabemos que, a partir del isomorfismo topológico separador

$$H : C^o(X, \mathbb{T}) \longrightarrow C^o(Y, \mathbb{T}),$$

podemos calcular su homomorfismo dual

$$\widehat{H} : C^o(Y, \mathbb{T})^\wedge \longrightarrow C^o(X, \mathbb{T})^\wedge$$

y éste hereda la propiedad de H de ser un isomorfismo topológico. Por tanto, también podemos calcular su aplicación inversa y ésta es la siguiente:

$$\widehat{H}^{-1} : C^o(X, \mathbb{T})^\wedge \longrightarrow C^o(Y, \mathbb{T})^\wedge,$$

que también es un isomorfismo topológico.

Sea ahora $K \subseteq h(Y)$ compacto. Por el Lema 3.3.2, tenemos que la inmersión $Z \hookrightarrow C^o(Z, \mathbb{T})^\wedge$ es continua, siempre que Z sea k-espacio. De esta forma, $\widehat{H}^{-1}(K)$ es compacto en $C^o(Y, \mathbb{T})^\wedge$, pero, ¿podemos afirmar que $\widehat{H}^{-1}(K)$ es compacto en $C(Y,\mathbb{R})^\wedge$? Como $\widehat{H}^{-1}$ es un isomorfismo topológico, se tiene que $\widehat{H}^{-1}(K)$ es compacto en $C^o(Y,\mathbb{T})^\wedge$. Sabemos del Capítulo 1 que la aplicación exponencial $\exp : C(Y,\mathbb{R}) \to C^o(Y,\mathbb{T})$ es continua y sobreyectiva para todo espacio Y completamente regular. Si la dualizamos, obtenemos que el homomorfismo dual

$$\begin{aligned} \widehat{\exp} : C^o(Y,\mathbb{T})^\wedge &\to C(Y,\mathbb{R})^\wedge \\ \chi &\mapsto \chi \circ \exp \end{aligned}$$

es continuo respecto de la topología compacta abierta (Nota 3.1.5).

Por tanto,

Corolario 3.3.8 *El homomorfismo dual de la aplicación exponencial*

$$\begin{aligned} \widehat{\exp} : C^o(Y,\mathbb{T})^\wedge &\to C(Y,\mathbb{R})^\wedge \\ \chi &\mapsto \chi \circ \exp \end{aligned}$$

es continuo con la topología compacta abierta.

De esta forma, si $K \subseteq h(Y)$ es compacto, se tiene que $\widehat{H}^{-1}(K)$ es compacto en $C^o(Y,\mathbb{T})^\wedge$ y por el Corolario 3.3.8, este conjunto mantiene su compacidad en $C(Y,\mathbb{R})^\wedge$. Ahora vamos a utilizar un resultado clásico que está incluido en el Capítulo 1, nos referimos concretamente a la Proposición 1.1.10, que podemos aplicar a $C(Y,\mathbb{R})$. Por tanto, el grupo dual de $C(Y,\mathbb{R})$, $C(Y,\mathbb{R})^\wedge$, y el espacio de los funcionales lineales y continuos de $C(Y,\mathbb{R})$, $C(Y,\mathbb{R})^*$, ambos dotados de la topología compacta abierta, son isomorfos topológicamente, tal y como afirma dicha proposición. Así pues, el compacto $\widehat{H}^{-1}(K) \subseteq C(Y,\mathbb{R})^\wedge$ también lo es en $C(Y,\mathbb{R})^*$, es decir, $\widehat{H}^{-1}(K)$ es un compacto de medidas de soporte compacto, ya que $C(Y,\mathbb{R})^* \cong \mathcal{M}_c(Y)$. Así pues, el soporte de dicho compacto de medidas viene dado de la siguiente manera:

$$supp(\widehat{H}^{-1}(K)) = \cup_{k\in K} supp(\mu_k), \tag{3.11}$$

con $\mu_k := \widehat{H}^{-1}(k)$ para cada $k \in K$.

El siguiente resultado forma parte de la demostración del Teorema clásico de Nachbin-Shirota que podemos encontrar en [77] (Teorema 5 del Capítulo 11) ó [108] (Proposición III.4.3).

Proposición 3.3.9 *Sea $S \subseteq \mathcal{M}_c(Y)$ compacto. Entonces*

$$supp(S) = \cup_{\mu \in S} supp(\mu)$$

es relativamente compacto en Y.

-Demostración-
En esta prueba vamos a utilizar el hecho de que Y es un μ-espacio. Como lo que queremos probar es que la clausura de $\cup_{\mu \in S} supp(\mu)$ es un subespacio compacto de Y, bastará comprobar que la clausura de $supp(S)$ es un subconjunto funcionalmente acotado en Y, es decir, que para toda $f \in C(Y)$, el conjunto

$$f(\overline{\cup_{\mu \in S} supp(\mu)})$$

está acotado en $\mathbb{R}$. Si llamamos $B := \cup_{\mu \in S} supp(\mu)$, por continuidad es suficiente probar que $f(B)$ está acotado en $\mathbb{R}$ para toda $f \in C(Y)$. El esquema de la demostración sería el siguiente:

Sea $f \in C(Y)$ y supongamos que ésta no está acotada en $\cup_{\mu \in S} supp(\mu)$. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, podemos encontrar un elemento $y_n \in \cup_{\mu \in S} supp(\mu)$ tal que

$$|f(y_n)| > n > 1 \text{ y además } |f(y_{n+1})| > |f(y_n)| + 1.$$

Definimos, además, para cada $n \in \mathbb{N}$ los siguientes conjuntos abiertos de Y:

$$A_n := \{y \in Y : \ |f(y)| > n\},$$

luego $A_n \cap B \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Más aún, los conjuntos $(A_n)_n$ forman una familia localmente finita de Y cumpliendo que para todo $y \in Y$ existe un entorno abierto U de y y $\{n_1, \ldots, n_y\} \subseteq \mathbb{N}$ tales que

$$U \cap A_j \neq \emptyset \ \forall j \in \{n_1, \ldots, n_y\}.$$

Como el conjunto A_1 corta a B, existe una medida $\mu_1 \in S$ tal que $A_1 \cap supp(\mu_1) \neq \emptyset$. Así pues, podemos encontrar $f_1 \in C(Y)$ tal que $supp(f_1) \subseteq A_1$ y además, $\mu_1(f_1) \neq 0$; supondremos que $\mu_1(f_1) = 1$, ya que en otro caso, trabajaríamos con la función $\frac{1}{\mu_1(f_1)} f_1$. Pero $supp(\mu_1)$ es un subconjunto compacto de Y, luego existe $k_2 > k_1 := 1$ tal que

$$A_{k_2} \cap supp(\mu_1) = \emptyset.$$

De nuevo, como A_{k_2} es un abierto de Y, existen una medida $\mu_2 \in S$ tal que $A_{k_2} \cap supp(\mu_2) \neq \emptyset$ y una función continua f_2 tal que $supp(f_2) \subseteq A_{k_2}$ y

$\mu_2(f_2) = 1$. De esta forma, podemos construir inductivamente una sucesión $(k_n)_n \subseteq \mathbb{N}$ y otra sucesión $(\mu_n)_n \subseteq S$ tales que $A_{k_n} \cap supp(\mu_n) \neq \emptyset$, pero

$$A_{k_n} \cap supp(\mu_i) = \emptyset \; \forall i < n.$$

De la misma manera, construimos una sucesión $(f_n)_n \subseteq C(Y)$ tal que $\mu_n(f_n) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Definimos $\rho_1 := 1$ y para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\rho_{n+1} := n + 1 - \sum_{i=1}^{n} \rho_i \mu_{n+1}(f_i).$$

Entonces,

$$\mu_n(\sum_{k=1}^{n} \rho_k f_k) = \sum_{k=1}^{n} \rho_k \mu_n(f_k) = n,$$

ya que $\langle \mu_n, f_k \rangle = \delta_{n,k}$, para todo $k \leq n$. Por otro lado, para todo $y \in Y$, la suma $\sum_{k=1}^{\infty} \rho_k f_k(y)$ es finita, luego la aplicación

$$\begin{array}{rcl} g : Y & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \rho_k f_k(y) \end{array}$$

está bien definida, ya que, para todo $y \in Y$, existe un entorno U_y que corta sólo un número finito de los abiertos $(A_{n_k})_k$ y g viene representada por una suma finita sobre U_y. Se sigue que g es continua.

Como $A_{k_j} \cap supp(\mu_n) = \emptyset$ y $\mu_n(f_2) = 0$ para todo $l > n$, tenemos también que

$$\mu_n(g) = \mu_n(\sum_{k=1}^{n} \rho_k f_k) = n,$$

y de esta forma, la sucesión $(\mu_n)_n \subseteq S$ no está acotada en $\mathcal{M}_c(Y)$. Contradicción con la compacidad de S que muestra que el subconjunto $B = \cup_{\mu \in S} supp(\mu)$ de Y está funcionalmente acotado para todo S compacto en $\mathcal{M}_c(Y)$.

$\square$

Por tanto,

Nota 3.3.10 *Tras lo visto en la Proposición 3.3.9, si cogemos aquí* $S = \widehat{H}^{-1}(K)$, *con* $K \subseteq h(Y)$ *compacto, entonces*

$$L := \overline{\bigcup_{k \in K} supp(\mu_k)} \tag{3.12}$$

es compacto en Y.

Tras lo visto en las Proposiciones 3.3.5, 3.3.6 y 3.3.7, tenemos que β es continua y toma valores enteros, y que h es inyectiva, continua y cumple que $\overline{h(Y)} = X$. A continuación presentaremos una serie de resultados que son esenciales a la hora de probar que h verifica las propiedades que le faltan para ser un homeomorfismo.

Debido a la continuidad de $\beta : Y \to \mathbb{Z}$ (Proposición 3.3.5), si tomamos antiimágenes de cada uno de los enteros, obtenemos que para todo $n \in \mathbb{Z}$,

$$A_n := \beta^{-1}(\{n\})$$

es un subconjunto clopen de Y. Además, Y se puede describir como la unión disjunta de esos clopens, luego $Y = \dot{\cup}_n A_n$. Entonces, para que h sea un homeomorfismo, es necesario que sea abierta. De esta forma, $h(A_n)$ ha de ser abierto de X para todo $n \in \mathbb{Z}$. Y es en esta línea en la que se enmarca la Proposición 3.3.11 y resultados posteriores, hasta llegar al Corolario 3.3.14 y la Proposición 3.3.18.

Para empezar con todo este proceso, lo que probamos a continuación es que dado un compacto $K \subseteq h(Y)$, éste sólo puede cortar a un número finito de conjuntos del tipo $h(A_i)$, donde, recuerdo, cada $A_i = \beta^{-1}(\{i\})$ para todo $i \in \mathbb{Z}$.

Proposición 3.3.11 *Sea* $K \subseteq X$ *compacto tal que* $K \cap h(Y) \neq \emptyset$. *Entonces existe* $F_{(K)} \subseteq \mathbb{Z}$ *finito tal que*

$$K \cap h(A_j) = \emptyset$$

para todo $j \notin F_{(K)}$.

-Demostración-
Sea $K \subseteq X$ un espacio compacto tal que $K \cap h(Y) \neq \emptyset$. Dividimos la demostración en 3 partes.

AFIRMACIÓN 1 Para todo $j \in \mathbb{Z}$, $h^{-1}(K) \cap A_j \subseteq L$.
Sea $j \in \mathbb{Z}$. Sea, ahora, $a_j \in h^{-1}(K) \cap A_j$, luego existe $k_j \in K$ tal que $h(a_j) = k_j$. Supongamos que existe j_0 tal que $a_{j_0} \notin L$. Como L es cerrado,

podemos encontrar un entorno abierto U de a_{j_0} tal que $U \cap L = \emptyset$. Esto quiere decir que dicho abierto U no corta a ningún soporte de ninguna medida μ_k (Ecuaciones (3.11) y (3.12)) para ningún $k \in K$. En particular, U no corta a ningún soporte de las medidas correspondientes a los elementos k_j de $K \cap h(A_j)$, las así llamadas μ_{k_j}. Trabajamos con la medida $\mu_{k_{j_0}}$, luego el entorno abierto U de a_{j_0} es un abierto anulador de $\mu_{k_{j_0}}$; por tanto, toda aplicación $f \in C(Y, \mathbb{R})$ tal que $coz(f) \subseteq U$ cumple que $\mu_{k_{j_0}}(f) = 0$. Como Y es un espacio completamente regular, podemos encontrar una una función continua $F : Y \to [0, 1]$ tal que

$$F_{X \setminus U} = \{0\} \text{ y } F_{a_{j_0}} = \{1\}.$$

Escogemos $b \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0, 1]$ y seguimos trabajando con bF que cumple también que $coz(bF) \subseteq U$. Así pues, se obtiene que $\mu_{k_{j_0}}(bF) = 0$. Sabemos, además, de (3.8) que para todo $y \in Y$, $\widehat{H}(y) = \beta(y)h(y)$, en particular, para los elementos a_j:

$$\widehat{H}(a_j) = \beta(a_j)h(a_j);$$

como $a_j \in \beta^{-1}(\{j\})$, entonces esto queda así:

$$\widehat{H}(a_j) = jk_j.$$

Aplicamos la función inversa a esta última ecuación y obtenemos,

$$\begin{aligned} \widehat{H}^{-1}(jk_j) &= a_j \\ \Leftrightarrow j\widehat{H}^{-1}(k_j) &= a_j \\ \Leftrightarrow e^{j\mu_{k_j}} &= e^{\delta_{a_j}}, \end{aligned}$$

luego para todo $j \in \mathbb{Z}$ y para toda $f \in C(Y, \mathbb{R})$ tenemos que

$$j\mu_{k_j}(f) \in \delta_{a_j}(f) + \mathbb{Z},$$

es decir, $j\mu_{k_j}(f) \in f(a_j) + \mathbb{Z}$. Así pues,

$$\mu_{k_j}(f) \in \frac{f(a_j)}{j} + \frac{\mathbb{Z}}{j}. \tag{3.13}$$

Aplicando (3.13) a la aplicación continua bF que hemos construido antes y con $j = j_0$, obtenemos que,

$$0 = \mu_{k_{j_0}}(F) \in \frac{b}{j_0} + \frac{\mathbb{Z}}{j_0},$$

y, por tanto, el elemento a ha de ser un número entero. Ya hemos llegado a la contradicción, puesto que $b \notin \mathbb{Q}$. Es decir que para todo $j \in \mathbb{Z}$ tenemos que $a_j \in L$.

AFIRMACIÓN 2 Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $L = \cup_{m=1}^{n} L \cap A_{j_m}$:
Por la Proposición 3.3.9 sabemos que L es compacto en Y y como éste es la unión disjunta de los clopens $(A_j)_j$, entonces existen $\{A_{j_1}, \ldots, A_{j_n}\}$ tales que

$$L = \cup_{m=1}^{n} L \cap A_{j_m}.$$

AFIRMACIÓN 3 Existe $F_K \subseteq \mathbb{Z}$ finito tal que $K \cap h(A_j) = \emptyset$ para todo $j \notin F_K$.
De la **Afirmación 1** sabemos que para cada $j \in \mathbb{Z}$,

$$h^{-1}(K) \cap A_j \subseteq L$$

y de la **Afirmación 2**, que existe un número finito de clopens de $(A_j)_j$ tales que $L = \cup_{m=1}^{n} L \cap A_{j_m}$. De esta forma,

$$\cup_{j \in \mathbb{Z}} h^{-1}(K) \cap A_j \subseteq L \subseteq \cup_{m=1}^{n} A_{j_m},$$

y se deduce que el número de clopens A_j que cortan a $h^{-1}(K)$ ha de ser finito.

Esto completa la demostración.

$\square$

Los siguientes resultados, aunque sencillos, son esenciales en lo que resta de Sección.

Lema 3.3.12 *Para todo $n \in \mathbb{Z}$, $h(A_n)$ es cerrado en $h(Y)$.*

-Demostración-
Supongamos que existe un entero n_0 tal que $h(A_{n_0})$ no es cerrado en $h(Y)$, esto es, existe $(x_i)_i \subseteq h(A_{n_0})$ convergente a un punto $x_1 \in h(Y) \setminus h(A_{n_0})$. Además, para cada i, tenemos que por un lado

$$x_i = h(y_i), \text{ con } (y_i)_i \subseteq A_{n_0},$$

y por otro, $x_1 = h(y_1)$ con $y_1 \notin A_{n_0}$, pero este punto ha de pertenecer a un único clopen A_r de Y, ya que Y es la unión de todos los clopens de la forma $A_j = \beta^{-1}(\{j\})$. Como A_{n_0} es, en particular, cerrado en Y, tenemos que existe $f : Y \to [0,1]$ continua tal que $f(A_{n_0}) = \{a\}$ y $f(y_1) = 0$, con $a \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0,1]$. Por otra parte, sabemos que H es sobreyectiva, luego para $\exp(af) \in C^o(Y, \mathbb{T})$ se tiene que existe $\exp(g) \in C^o(X, \mathbb{T})$ tal que $H(\exp(g)) = \exp(af)$, pero H se puede representar (Ecuación (3.9)), es decir,

$$\exp(\beta(y)g(h(y))) = H(\exp(g))(y) = \exp(af(y))$$

para todo $y \in Y$. En particular, para los puntos y_i e y_1, antiimágenes de los puntos x_i y x_1, luego

$$\begin{aligned} \beta(y_i)g(h(y_i)) &= af(y_i) + z_i \\ \beta(y_1)g(h(y_1)) &= af(y_1) + z_1, \end{aligned}$$

esto es,

$$\begin{aligned} n_0 g(x_i) &= a + z_i, \text{ ya que } (y_i)_i \subseteq A_{n_0}, \\ r g(x_1) &= z_1, \text{ ya que } \ y_1 \in A_r. \end{aligned}$$

Por tanto, $g(x_1) = \frac{z_1}{r} \in \mathbb{Q}$ y además, $g(x_i) = \frac{a+z_i}{n_0} \notin \mathbb{Q}$ para todo índice i, puesto que a es un número irracional. Pero, g es una función continua y como $(x_i)_i$ converge a x_1, tenemos que

$$\frac{a+z_i}{n_0} = g(x_i) \rightsquigarrow g(x_1) = \frac{z_1}{r}.$$

De esta forma, la red $(\frac{a+z_i}{n_0})_i$ es de Cauchy, al ser convergente. Pero esto es imposible, ya que

$$|\frac{a+z_i}{n_0} - \frac{a+z_j}{n_0}| = |\frac{z_i - z_j}{n_0}| \geq \frac{1}{n_0}.$$

Por tanto, para todo $j \in \mathbb{Z}$, el conjunto $h(A_j)$ es cerrado en $h(Y)$.

□

Lo que nos conviene es probar que $h(A_n)$ es cerrado en X para todo $n \in \mathbb{Z}$. Para ello, el siguiente Lema:

Proposición 3.3.13 *Para todo $n \in \mathbb{Z}$, $h(A_n)$ es cerrado en X.*

-Demostración-
Supongamos que existe $n_1 \in \mathbb{Z}$ tal que $h(A_{n_1})$ no es cerrado en X. Por tanto, existe una red $(x_i) = (h(y_i)) \subseteq h(A_{n_1})$ convergente a $x_0 \in X \setminus h(A_{n_1})$.

Podemos suponer que $x_0 \notin h(Y)$, porque en ese caso, aplicaríamos el Lema 3.3.12 y ya habríamos acabado.

Sabemos que $A(X)^\wedge \cong C(X,\mathbb{T})$ para todo espacio topológico que sea μ-espacio (véase [55] ó [100]). Por tanto, podemos pensar que la aplicación dual de H, sin restringirla a $C^o(X,\mathbb{T})$, lleva el grupo bidual de $A(Y)$ en el grupo bidual de $A(X)$, esto es,

$$\widehat{H} : A(Y)^{\wedge\wedge} \longrightarrow A(X)^{\wedge\wedge}.$$

Por otra parte, ya sabemos de la Proposición 3.3.2 que Y se sumerge de forma continua en $C^o(Y,\mathbb{T})^\wedge$ de forma que cada punto $y \in Y$ es enviado a la aplicación evaluación $\chi_y \in C^o(Y,\mathbb{T})^\wedge$. De igual forma, Y se sumerge en su grupo topológico abeliano libre $A(Y)$. Con todo esto,

$$Y \overset{j_Y}{\hookrightarrow} A(Y) \overset{j_{A(Y)}}{\hookrightarrow} C^o(Y,\mathbb{T})^\wedge,$$

donde la aplicación $j_{A(Y)}$ actúa de la siguiente forma: si $\sum_{i=1}^n m_i y_i \in A(Y)$ y $f \in C^o(Y,\mathbb{T})$, entonces

$$j_{A(Y)}(\sum_{i=1}^n m_i y_i)(f) = \prod_{i=1}^n \delta_{y_i}(f)^{m_i} = \prod_{i=1}^n f(y_i)^{m_i},$$

de modo que $Y \hookrightarrow C^o(Y,\mathbb{T})^\wedge$ es la inmersión nombrada anteriormente. Como además Y es un subconjunto cerrado de su correspondiente grupo topológico abeliano libre $A(Y)$ (por ejemplo, en [64] ó [113]), tenemos que A_j también lo es en $A(Y)$, en particular, el cerrado A_{n_1}. Más aún, $\widehat{H}_{|Y}(A_{n_1})$ será cerrado en $\mathbb{Z}X$, ya que $\widehat{H}$ es cerrada; concretamente, $\widehat{H}(A_{n_1}) = n_1 h(A_{n_1})$ es cerrado en $n_1 X \subseteq A(X)$, puesto que $\beta(A_{n_1}) = n_1$. Por continuidad, la red $(n_1 x_i) = (n_1 h(y_i))$ converge a $n_1 x_0$, al converger $(x_i)_i$ a x_0. Sin embargo, la red $(n_1 h(y_i))$ está contenida en el cerrado $\widehat{H}_{|Y}(A_{n_1})$, luego su límite, $n_1 x_0$, también ha de pertenecer a dicho cerrado. Es decir que existe $y_0 \in A_{n_1}$ tal que

$$n_1 x_0 = \widehat{H}_{|Y}(y_0) = n_1 h(y_0) \in A(X),$$

y esto implica que $n_1(x_0 - h(y_0)) = 0_{A(X)}$. Pero $A(X)$ es un grupo libre de torsión, luego $x_0 = h(y_0)$ y $x_0 \in h(A_{n_1})$. Por tanto, para todo $n \in \mathbb{Z}$, $h(A_n)$ es cerrado en X. $\square$

Proposición 3.3.14 *La aplicación $h : Y \to X$ es sobreyectiva.*

-Demostración-
Por la Proposición 3.3.7, sabemos que la imagen de h es densa en X. La demostración de que h es sobreyectiva se llevará a cabo en dos pasos. En primer lugar, se probará que la unión infinita de conjuntos del tipo $h(A_j)$ es cerrada en X, mientras que en segundo lugar que h es efectivamente sobreyectiva.

PASO 1 Para todo $J \subseteq \mathbb{Z}$, la unión

$$\bigcup_{j\in J} h(A_j) \quad \text{es cerrada en } X:$$

Como X es un k-espacio, probar que la unión es cerrada equivale a probar que la unión intersectada con todo compacto de X es cerrada en dicho compacto. Podemos trabajar con los compactos K de X tales que $K \cap h(Y) \neq \emptyset$, ya que si $K \subseteq X \setminus h(Y)$, entonces $K \cap (\cup_{j\in\mathbb{Z}} h(A_j)) = \emptyset$ que trivialmente es cerrado en K.

Sea, pues, $K \subseteq X$ compacto cumpliendo además que $K \cap h(Y) \neq \emptyset$. Entonces,

$$K \cap ((\cup_{j\in\mathbb{Z}} h(A_j))) = \cup_{j\in\mathbb{Z}} K \cap h(A_j) = \cup_{n=1}^{m} K \cap h(A_{j_n}),$$

ya que de la Proposición 3.3.11 sabemos que K sólo puede cortar un número finito de elementos de $(h(A_n))_{n<\omega}$. Pero, para todo $j \in \{j_1, \ldots, j_m\}$, la intersección $K \cap h(A_j)$ es un subconjunto cerrado de K, al ser $h(A_j)$ cerrado en X (Proposición 3.3.13). Así pues, $K \cap ((\cup_{j\in\mathbb{Z}} h(A_j)))$ se reduce a una unión finita de cerrados de K, luego

$$K \cap ((\cup_{j\in J} h(A_j)))$$

es cerrado en K para todo compacto K de X. Ya hemos llegado a lo que buscábamos.

PASO 2 La aplicación h es sobreyectiva:
Una vez probado el **PASO 1**, tenemos que

$$h(Y) = h(\cup_{j\in\mathbb{Z}} A_j) = \cup_{j\in\mathbb{Z}} h(A_j)$$

es cerrado en X. Por tanto, $X = \overline{h(Y)} = h(Y)$ y h es finalmente sobreyectiva.
□

Como consecuencia de esta Proposición 3.3.14, obtenemos un resultado que es esencial para el resto de la sección. En él se prueba que los conjuntos de la forma $h(A_j)$, donde cada $A_j = \beta^{-1}(\{j\})$ es un clopen en Y, también son clopens, pero en esta ocasión de X.

Corolario 3.3.15 *Para todo $j \in \mathbb{Z}$, $h(A_j)$ es abierto en X.*

-Demostración-
Para cualquier $j \in \mathbb{Z}$, podemos escribir $h(A_j)$ de la siguiente forma,

$$h(A_j) = h(Y) \setminus \cup_{i \neq j} h(A_i).$$

Entonces, se tiene que $h(A_j)$ es abierto en $h(Y)$. Pero $h(Y) = X$ (Proposición 3.3.14), luego cada conjunto $h(A_j)$ es abierto en X sea quien sea $j \in \mathbb{Z}$. $\square$

De esta forma, ya hemos probado que la aplicación $h : Y \to X$, que es la que representa al isomorfismo topológico separador H, esto es, para cualesquiera $f \in C(X, \mathbb{R})$ e $y \in Y$,

$$(He^{2\pi i f})(y) = e^{2\pi \beta(y) f(h(y))},$$

es una biyección continua. Además, β es una función continua que toma valores enteros. A continuación, veamos que sólo puede tomar los valores -1 y 1. La demostración es análoga a la de la Proposición 3.2.12, pero el camino hasta llegar a ella ha sido diferente. De hecho, para que $\beta(Y) \subseteq \{-1, 1\}$ ha sido necesario probar que la aplicación h es abierta en su imagen o al menos, que la imagen por h de los clopens $(A_n)_n$ es abierta en X.

Proposición 3.3.16 *La aplicación $\beta : Y \to \mathbb{Z}$ sólo toma los valores -1 y 1.*

-Demostración-
Definimos una aplicación $f : X \to \mathbb{R}$ de la siguiente manera:

$$f_{|h(A_n)} := \frac{1}{n}.$$

Está bien definida y es continua, puesto que h es sobreyectiva (Corolario 3.3.14) y además, cada uno de los conjuntos $h(A_j)$ es clopen en X (Proposiciones 3.3.13 y Corolario 3.3.15). Además, si $y \in Y$, existe un único j tal que $y \in A_j$; así pues,

$$(He^{2\pi i f})(y) = e^{2\pi i \beta(y) f(h(y))} = e^{2\pi i j \frac{1}{j}} = 1_{\mathbb{T}},$$

y esto se da sea cuál sea el punto $y \in Y$. De esta forma, como H es inyectiva, obtenemos que $e^{2\pi i f} = 1_{C^o(X,\mathbb{T})}$, es decir que,

$$f(X) \subseteq \mathbb{Z},$$

y esto quiere decir que $A_n = \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\}$. Por tanto, obtenemos que efectivamente, $\beta(Y) \subseteq \{-1, 1\}$. $\square$

Con todos los datos que hemos ido obteniendo a lo largo de la sección, vamos a probar que la aplicación h es además abierta, con lo que ya habremos llegado a que h es el homeomorfismo que representa a H cuando la estamos restringiendo a la componente arcoconexa de la identidad de $C(X,\mathbb{T})$, es decir, a $C^o(X,\mathbb{T})$. Para ello, aquí tenemos un primer resultado que nos asegura la propiedad de separar funciones de la aplicación inversa de H. Cabe destacar que las propiedades que ha ido adquiriendo h a lo largo de la sección son esenciales para poder obtener la siguiente proposición.

Proposición 3.3.17 *Sea $H : C^o(X,\mathbb{T}) \longrightarrow C^o(Y,\mathbb{T})$ un isomorfismo topológico separador. Entonces la aplicación inversa de H es un isomorfismo topológico separador.*

-Demostración-
Como H es un isomorfismo topológico, su aplicación inversa que va de $C^o(Y,\mathbb{T})$ en $C^o(X,\mathbb{T})$ también lo es. Además, sabemos que existen aplicaciones, una biyectiva continua $h : Y \to X$ (Proposiciones 3.3.6, 3.3.7 y Corolario 3.3.14) y otra continua $\beta : Y \to \{-1, 1\}$ (Proposiciones 3.3.5 y 3.3.16), tales que si $e^{2\pi i f} \in C^o(X,\mathbb{T})$ e $y \in Y$,

$$(He^{2\pi i f})(y) = e^{2\pi i \beta(y) f(h(y))}.$$

Falta comprobar que H^{-1} es un homomorfismo separador. Sean, pues, $e^{2\pi i f}$, $e^{2\pi i g} \in C^o(Y,\mathbb{T})$ dos funciones separadas, es decir, éstas cumplen que para todo $y \in Y$,

$$e^{2\pi i f(y)} = 1_{\mathbb{T}} \text{ o bien } e^{2\pi i g(y)} = 1_{\mathbb{T}}.$$

Como H es sobreyectiva, existen $e^{2\pi i f_1}$, $e^{2\pi i g_1} \in C^o(X,\mathbb{T})$ tales que $He^{2\pi i f_1} = e^{2\pi i f}$ y $He^{2\pi i g_1} = e^{2\pi i g}$. Por otra parte, sabemos que H se puede representar, luego, si $y \in Y$,

$$\begin{aligned} e^{2\pi i f}(y) = (He^{2\pi i f_1})(y) &= e^{2\pi i \beta(y) f_1(h(y))} \text{ y} \\ e^{2\pi i g}(y) &= (He^{2\pi i g_1})(y) = e^{2\pi i \beta(y) g_1(h(y))}, \end{aligned}$$

esto es,

$$e^{2\pi i f(y)} = e^{2\pi i \beta(y) f_1(h(y))} \text{ y } e^{2\pi i g(y)} = e^{2\pi i \beta(y) g_1(h(y))}.$$

Estamos suponiendo que para todo $y \in Y$, las aplicaciones $e^{2\pi i f}$ y $e^{2\pi i g}$ están separadas. Así pues, para todo $y \in Y$,

$$e^{2\pi i \beta(y) f_1(h(y))} = 1_{\mathbb{T}} \text{ o bien } e^{2\pi i \beta(y) g_1(h(y))} = 1_{\mathbb{T}}.$$

Como h es sobreyectiva (Corolario 3.3.14), entonces esto equivale a decir que para todo $x \in X$,

$$e^{2\pi i \beta(h^{-1}(x)) f_1(x)} = 1_{\mathbb{T}} \text{ o bien } e^{2\pi i \beta(h^{-1}(x)) g_1(x)} = 1_{\mathbb{T}}. \tag{3.14}$$

Por tanto, se tiene que para todo $x \in X$, o bien $\beta(h^{-1}(x))f_1(x) \in \mathbb{Z}$ o bien $\beta(h^{-1}(x))g_1(x) \in \mathbb{Z}$ (Ecuación (3.14)). Como también se da que $\beta(Y) \subseteq \{-1, 1\}$ (Corolario 3.3.16), se deduce fácilmente que para todo $x \in X$, $f_1(x) \in \mathbb{Z}$ o bien $g_1(x) \in \mathbb{Z}$, con lo que obtenemos que para todo $x \in X$

$$e^{2\pi i f_1(x)} = 1_{\mathbb{T}} \text{ ó } e^{2\pi i g_1(x)} = 1_{\mathbb{T}},$$

es decir, las funciones $e^{2\pi i f_1} = (H^{-1}e^{2\pi i f})$ y $e^{2\pi i g_1} = (H^{-1}e^{2\pi i g})$ están separadas, luego la aplicación inversa de H es a su vez separadora. $\square$

Proposición 3.3.18 *La aplicación $h : Y \to X$ es abierta.*

-Demostración-

Llamamos a partir de ahora K a la inversa de H y vamos a aplicarle a K todo lo que se ha hecho con H, ya que $K : C^o(Y, \mathbb{T}) \longrightarrow C^o(X, \mathbb{T})$ también es un isomorfismo topológico separador (Proposición 3.3.17). Por tanto, existen aplicaciones $\gamma : Y \to \{-1, 1\}$ continua y $k : X \to Y$ biyección continua tales que

$$(Ke^{2\pi i g})(x) = e^{2\pi i \gamma(x) g(k(x))}$$

para todos $x \in X$ y $e^{2\pi i g} \in C^o(Y, \mathbb{T})$. Pero, ¿$k$ es la inversa de h? En ese caso, ya tendríamos que h es una aplicación abierta.

Como K y H son inversas una de la otra, se tiene que

$$\begin{aligned} e^{2\pi i f(x)} &= ((K \circ H)(e^{2\pi i f}))(x) = (K(He^{2\pi i f}))(x) \\ &= (He^{2\pi i f})(k(x))^{\gamma(x)} = e^{2\pi i f(h(k(x)))\beta(k(x))\gamma(x)}, \end{aligned}$$

luego $e^{2\pi i f(x)} = e^{2\pi i f(h(k(x)))\beta(k(x))\gamma(x)}$ para todo $x \in X$ y para toda aplicación $e^{2\pi i f} \in C^o(X, \mathbb{T})$; esto quiere decir que para todo $x \in X$,

$$\beta(k(x))\gamma(x)f(h(k(x))) - f(x) \in \mathbb{Z}. \tag{3.15}$$

Supongamos que existe un punto $x_0 \in X$ tal que $h(k(x_0)) \neq x_0$. entonces, existen entornos abiertos U de x_0 y V de $h(k(x_0))$ tales que $U \cap V = \emptyset$. Por casos:

a) $\beta(k(x_0))\gamma(x_0) = 1$:

La expresión (3.15) para $x = x_0$ queda así:

$$f(h(k(x_0))) - f(x_o) \in \mathbb{Z}, \tag{3.16}$$

para toda $f \in C(X, \mathbb{R})$. Como $x_0 \notin X \setminus U$ y éste es un subconjunto cerrado de X, tenemos que existe una aplicación continua $F : X \to [0, 1]$ tal que $F(x_0) = 0$ y $F(X \setminus U) = \{1\}$. Si elegimos $a \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$, entonces $aF(x_0) = 0$ y $aF(X \setminus U) = \{a\}$. Por tanto, aF verifica también la Ecuación (3.16):

$$(aF)(h(k(x_0))) - (aF)(x_0) = a - 0 = a \notin \mathbb{Z}.$$

Contradicción.

b) $\beta(k(x_0))\gamma(x_0) = -1$:

Se procede de manera análoga al apartado anterior y obtenemos

$$-(aF)(h(k(x_0))) - (aF)(x_0) = -a - 0 = -a \notin \mathbb{Z}.$$

Contradicción.

En cualquier caso, para todo $x \in X$ se tiene que $h(k(x)) = x$. Análogamente, si se parte de la composición $H \circ K$, obtendríamos que $k(h(y)) = y$ para todo $y \in Y$. Efectivamente, k es la aplicación inversa de h y como k es continua, h ha de ser abierta. □

Corolario 3.3.19 *La aplicación $h : Y \to X$ es un homeomorfismo.*

-Demostración-
De las Proposiciones 3.3.6, 3.3.7 y 3.3.18, y del Corolario 3.3.14 se deduce la afirmación de este resultado. □

Concluyendo,

Teorema 3.3.20 *Sean X e Y espacios topológicos Hausdorff completamente regulares que además son k- y μ-espacios. Sea también $H : C(X,\mathbb{T}) \longrightarrow C(Y,\mathbb{T})$ un isomorfismo topológico separador. Entonces existen una aplicación continua $\beta : Y \to \{-1,1\}$ y un homeomorfismo $h : Y \to X$ tales que, si $e^{2\pi i f} \in C^o(X,\mathbb{T})$ e $y \in Y$,*

$$(He^{2\pi i f})(y) = e^{2\pi i \beta(y) f(h(y))}.$$

-Demostración-
De la Ecuación (3.9), ya sabemos que H se puede representar mediante una aplicación h entre los espacios Y y X. Además, por el Corolario 3.3.19 y las Proposiciones 3.3.5 y 3.3.16, tenemos que $h : Y \to X$ es un homeomorfismo y que $\beta : Y \to \{-1,1\}$ es continua, esto es, H es una aplicación del tipo Banach-Stone. $\square$

3.4. Completamente regulares: topología de la convergencia puntual

En esta sección, supondremos que los espacios X e Y son completamente regulares y dotamos a sus respectivos grupos de funciones continuas $C(X,\mathbb{T})$ y $C(Y,\mathbb{T})$ de la topología de la convergencia puntual, por lo que los denotaremos de aquí en adelante por $C_p(X,\mathbb{T})$ y $C_p(Y,\mathbb{T})$, respectivamente. La intención es de nuevo encontrar una relación entre los espacios X e Y a partir de la relación entre sus correspondientes grupos de funciones continuas. La diferencia con las secciones anteriores radica en que aquí vamos a trabajar directamente con todo el grupo $C_p(X,\mathbb{T})$ y $C_p(Y,\mathbb{T})$ y además, utilizaremos propiedades de los grupos topológicos y de la topología de la convergencia puntual, que aplicaremos a dichos grupos de funciones continuas para obtener resultados positivos en la extensión del Teorema de Banach-Stone.

Sea, entonces,

$$H : C_p(X,\mathbb{T}) \longrightarrow C_p(Y,\mathbb{T})$$

un isomorfismo topológico separador. Lo dualizamos y obtenemos su correspondiente homomorfismo dual

$$\begin{array}{rcl} \widehat{H} : C_p(Y,\mathbb{T})^\wedge & \longrightarrow & C_p(X,\mathbb{T})^\wedge \\ \chi & \longmapsto & \chi \circ H. \end{array}$$

Veamos a continuación que la aplicación $\widehat{H}$ es un isomorfismo topológico con la topología de la convergencia puntual sobre los elementos de $C_p(X,\mathbb{T})$ y $C_p(Y,\mathbb{T})$, la que denotamos por $t_p(C_p(X,\mathbb{T}))$. En general, estaríamos buscando un resultado para G y H dos grupos topológicos abelianos totalmente acotados dotados de la topología débil $t_p(\widehat{G})$ y $t_p(\widehat{H})$, respectivamente. Pero éste se obtiene como consecuencia de la Proposición 3.1.4. Así pues,

Proposición 3.4.1 *Sean X e Y espacios completamente regulares. Sea H un isomorfismo topológico entre $C_p(X,\mathbb{T})$ y $C_p(Y,\mathbb{T})$. Entonces, la aplicación dual de H, $\widehat{H}$, es un isomorfismo topológico con la topología de la convergencia puntual sobre los elementos de $C_p(X,\mathbb{T})$ y $C_p(Y,\mathbb{T})$.*

Por tanto, $\widehat{H}$ es un isomorfismo topológico con la topología de la convergencia puntual sobre los elementos de $C_p(X,\mathbb{T})$ y $C_p(Y,\mathbb{T})$. A partir de éste, construiremos una aplicación entre los espacios topológicos X e Y. Además, tenemos las inclusiones naturales de X e Y en $C_p(X,\mathbb{T})^\wedge$ y $C_p(Y,\mathbb{T})^\wedge$, respectivamente, esto es,

$$\begin{array}{rcl} \mu_X : X & \to & C_p(X,\mathbb{T})^\wedge \\ x & \mapsto & \delta_x \end{array}$$

y

$$\begin{array}{rcl} \mu_Y : Y & \to & C_p(Y,\mathbb{T})^\wedge \\ y & \mapsto & \delta_y, \end{array}$$

que aparecen en el siguiente resultado, en el cual se demuestra que la topología de la convergencia puntual $t_p(C_p(X,\mathbb{T}))$ y $t_p(C_p(Y,\mathbb{T}))$ coincide con la topología de X e Y, respectivamente.

Proposición 3.4.2 *Sea (Z,τ_Z) un espacio topológico completamente regular Hausdorff. La topología de $C_p(Z,\mathbb{T})^\wedge$, $t_p(C_p(Z,\mathbb{T}))$, restringida a Z, da la topología original de Z, i.e., $t_p(C_p(Z,\mathbb{T}))_{|Z} = \tau_Z$.*

-Demostración-
Supongamos que la red $(z_i)_i \subseteq Z$ converge a un $z \in Z$ con la topología original de Z. Sea $f \in C_p(Z,\mathbb{T})$, entonces $(f(z_i))_i$ converge a $f(z)$ con la topología puntual. Luego

$$\delta_{z_i}(f) \rightsquigarrow \delta_z(f),$$

esto es,la red $(\delta_{z_i})_i$ converge a δ_z con la topología de la convergencia puntual sobre los elementos de $C_p(Z,\mathbb{T})$. Así pues, podemos afirmar que la red original $(z_i)_i$ converge a z con la topología $t_p(C_p(Z,\mathbb{T}))_{|Z}$ restringida a Z.

Supongamos ahora que la red $(z_i)_{i\in I}$ converge a z con la topología de la convergencia puntual sobre los elementos de $C_p(Z,\mathbb{T})$. Procedemos por reducción al absurdo: supongamos que la red $(z_i)_i$ no converge a z con la topología de Z. Entonces existen un entorno abierto $U \in \mathcal{E}(z)$ y una subred $(z_j)_{j\in J}$ de $(z_i)_i$, donde $J \subset I$, tal que $z_j \notin U$ para todo $j \in J$. Como Z es completamente regular, existe $f \in C_p(Z,\mathbb{R})$ tal que

$$f(z) = 0 \text{ y } f(s) = \frac{1}{4} \ \forall s \notin U.$$

En particular, como los elementos de la subred $(z_j)_{j\in J}$ no están en U, entonces $f(z_j) = \frac{1}{4}$ para todo $j \in J$. Por tanto,

$$e^{\frac{\pi i}{2}} = \exp(f)(z_j) = \delta_{z_j}(\exp(f)) \rightsquigarrow \delta_z(\exp(f)) = \exp(f)(y) = 1_{\mathbb{T}}.$$

Contradicción. Por tanto, la red $(z_i)_i$ converge a z en la topología original de Z. $\square$

Para definir la aplicación que relacionará los espacios X e Y, necesitamos un resultado que establezca que la aplicación $\widehat{H}$ restringida al espacio Y, que, por otra parte, se sumerge de forma natural en $C_p(Y,\mathbb{T})^\wedge$ mediante la aplicación μ_Y, lo lleve al espacio X. Para ello necesitamos algunos conceptos desarrollados por Varopoulos que aplicaremos a $C_p(X,\mathbb{T})$ y $C_p(Y,\mathbb{T})$. Todos ellos han sido extraídos de [70].

Definición 3.4.3 (Varopoulos) *Sean G y G' dos grupos topológicos abelianos. Se dice que los grupos G y G'* están en dualidad *si, y sólo si, existe una función*

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : G \times G' \longrightarrow \mathbb{T} \textit{ tal que}$$

(a) $\langle g_1g_2, g'\rangle = \langle g_1, g'\rangle\ \langle g_2, g'\rangle$ para todos $g_1,\ g_2 \in G$ y $g' \in G'$;

(b) $\langle g, g_1'g_2'\rangle = \langle g, g_1'\rangle\ \langle g, g_2'\rangle$ para todos $g \in G$ y $g_1',\ g_2' \in G'$,

y también se da:

(i) si $g \neq 1_G$, entonces existe $g' \in G'$ tal que $\langle g, g'\rangle \neq 1_{\mathbb{T}}$, y análogamente

(ii) si $g' \neq 1_{G'}$, entonces existe $g \in G$ tal que $\langle g, g' \rangle \neq 1_{\mathbb{T}}$.

Definición 3.4.4 (Varopoulos) *Si tenemos una dualidad $\langle G, G' \rangle$, se dice que una topología τ es* compatible *con la dualidad si $(G, \tau)^{\wedge} = G'$.*

Dada una dualidad $\alpha = \langle G, G' \rangle$, podemos asociar a G y a G' sendas topologías débiles canónicas. La topología $w(G, G')$ sobre G es la topología débil generada por todos los elementos de G' considerados como homomorfismos continuos en $\mathbb{T}$. La topología $w(G', G)$ sobre G' se define análogamente a la anterior. Ambas topologías son totalmente acotadas y compatibles con la dualidad α.

Teorema 3.4.5 (Comfort, Ross) *Un grupo topológico abeliano Hausdorff (G, τ) es totalmente acotado si, y sólo si, existe un subgrupo G' de $Hom(G, \mathbb{T})$ tal que (G, τ) es topológicamente isomorfo a $(G, w(G, G'))$.*

Como consecuencia de este teorema, se sigue que todo grupo abeliano Hausdorff totalmente acotado (G, τ) tiene asociado un subgrupo G' de $Hom(G, \mathbb{T})$ tal que (G, G') forma una dualidad. El grupo abeliano totalmente acotado $(G', w(G', G))$ es el *grupo dual* asociado a (G, τ). Más aún, se tiene también que el grupo dual asociado a $(G', w(G', G))$ coincide con $(G, w(G, G')) = (G, \tau)$.

Vamos a aplicar estos resultados a $C_p(X, \mathbb{T})$ y a $A(X)$. En primer lugar, es de inmediata comprobación que ambos grupos están en dualidad mediante la aplicación:

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : C_p(X, \mathbb{T}) \times A(X) &\longrightarrow \mathbb{T} \\ (f, w) &\longmapsto \overline{f}(w), \end{aligned}$$

donde $\overline{f} : A(X) \to \mathbb{T}$ es el homomorfismo continuo asociado a f de la propiedad universal de los grupos topológicos abelianos libres que verifica además que $\overline{f}_{|X} = f$. Además, las topologías débiles $w(C_p(X, \mathbb{T}), A(X))$ sobre $C_p(X, \mathbb{T})$ y $w(A(X), C_p(X, \mathbb{T}))$ sobre $A(X)$ son compatibles con la dualidad formada por ambos grupos, i.e., con la dualidad $\langle C_p(X, \mathbb{T}), A(X) \rangle$, por los comentarios hechos antes y después del Teorema 3.4.5. En consecuencia obtenemos

$$\begin{aligned} (A(X), w(A(X), C_p(X, \mathbb{T})))^{\wedge} &= C(X, \mathbb{T}) \\ (C_p(X, \mathbb{T}), w(C_p(X, \mathbb{T}), A(X)))^{\wedge} &= A(X), \end{aligned}$$

luego si dotamos al grupo topológico abeliano libre $A(X)$ de la topología de la convergencia puntual sobre los elementos de $C_p(X,\mathbb{T})$, obtenemos que su grupo dual coincide con $C_p(X,\mathbb{T})$. Denotaremos a partir de ahora

$$A_p(X) := (A(X), w(A(X), C_p(X,\mathbb{T}))),$$

para distinguir el grupo topológico abeliano libre $A(X)$ dotado de su topología habitual, con la topología débil sobre los elementos de $C_p(X,\mathbb{T})$. Así pues, de aquí en adelante consideraremos que

$$A_p(X)^\wedge = C(X,\mathbb{T}). \tag{3.17}$$

Lo que cabe preguntarse ahora es de qué forma podemos relacionar cada uno de los grupos duales $C_p(Y,\mathbb{T})^\wedge$ y $C_p(X,\mathbb{T})^\wedge$ con sus respectivos grupos topológicos abelianos libres $A(Y)$ y $A(X)$. En la igualdad (3.17), dotamos a cada uno de los grupos implicados de la topología de la convergencia débil sobre los elementos de $A(X)$, esto es,

$$(A_p(X)^\wedge, w(C(X,\mathbb{T}), A(X))) = (C(X,\mathbb{T}), w(C(X,\mathbb{T}), A(X))),$$

y si dualizamos, obtenemos

$$(A_p(X)^\wedge, w(C(X,\mathbb{T}), A(X)))^\wedge = (C(X,\mathbb{T}), w(C(X,\mathbb{T}), A(X)))^\wedge,$$

donde $(C(X,\mathbb{T}), w(C(X,\mathbb{T}), A(X)))^\wedge = A(X)$. De esta forma,

$$(A_p(X)^\wedge, w(C(X,\mathbb{T}), A(X)))^\wedge = A(X). \tag{3.18}$$

Veamos en primer lugar que $C_p(X,\mathbb{T}) = (C(X,\mathbb{T}), w(C(X,\mathbb{T}), A(X)))$. Sea, pues, $(f_i)_i \subseteq C(X,\mathbb{T})$ una red convergente a $f \in C(X,\mathbb{T})$ con la topología de la convergencia puntual. Sean $\frac{1}{4} > \epsilon > 0$ y $w = \sum_{j=1}^m k_j x_j \in A(X)$, entonces $f_i(w) = \overline{f}_i(w) = \prod_{j=1}^m f_i(x_j)^{k_j}$ así como $f(w) = \overline{f}(w) = \prod_{j=1}^m f(x_j)^{k_j}$. Como (f_i) converge puntualmente a f y $F = \{x_1, \ldots, x_m\} \subseteq X$ es finito, entonces existe un índice i_1 tal que $(f_i - f)(F) \subseteq V_\epsilon$ para todo $i \geq i_1$. A su vez, como $k_j \in \mathbb{Z}$, entonces tenemos que

$$V_\epsilon^{k_j} = \{e^{2\pi i t k_j} : \ |t| < \epsilon\} \subseteq V_{\frac{\epsilon}{|k_j|}} \subseteq V_\epsilon,$$

luego para todo $i \geq i_1$ y para todo $x_j \in F$,

$$(f_i - f)^{k_j}(x_j) \in V_\epsilon.$$

Así pues, la red (f_i) converge a f con la topología débil sobre los elementos de $A(X)$. De la misma forma, sea $(g_i) \subseteq C(X,\mathbb{T})$ una red convergente a

$g \in C(X, \mathbb{T})$ con la topología débil sobre los elementos de $A(X)$, y sea, además, $F \subseteq X$ finito. Todo elemento de F también pertenece a $A(X)$, luego dado $\epsilon > 0$ y para cada $x \in F$, existe un índice i_x tal que $f_i(x) - f(x) \in V_\epsilon$ para $i \geq i_x$. Cogemos el máximo de estos índices, lo denotamos por $i_1 := \text{máx}_{x \in F}(i_x)$ y obtenemos finalmente que para todo $i \geq i_1$,

$$(f_i - f)(F) \subseteq V_\epsilon.$$

Por tanto, $C_p(X, \mathbb{T}) = (C(X, \mathbb{T}), w(C(X, \mathbb{T}), A(X)))$ y de (3.18), obtenemos que $C_p(X, \mathbb{T})^\wedge \cong A(X)$, así como también

$$(C_p(X, \mathbb{T})^\wedge, w(A(X), C(X, \mathbb{T}))) \cong A_p(X).$$

Esta última igualdad también se verifica para el espacio topológico Y, esto es,

$$(C_p(Y, \mathbb{T})^\wedge, w(A(Y), C(Y, \mathbb{T}))) \cong A_p(Y).$$

A continuación, comenzamos con un resultado que ha aparecido en secciones anteriores y en el que utilizaremos en primer lugar dicha dualidad (3.17). Vale la pena recordar ahora que aquí utilizamos el homomorfismo dual de H siguiente: $\widehat{H} : C_p(Y, \mathbb{T})^\wedge \to C_p(X, \mathbb{T})^\wedge$.

De esta forma:

Proposición 3.4.6 *Sean X e Y espacios topológicos completamente regulares y sea $H : C_p(X, \mathbb{T}) \to C_p(Y, \mathbb{T})$ un isomorfismo topológico separador. Entonces, para cada $y \in Y$, el elemento $\widehat{H}_{|Y}(y)$ pertenece a $\mathbb{Z}X$.*

-Demostración-

Tenemos el siguiente diagrama y queremos probar que efectivamente $\widehat{H}_{|Y}(Y) \subseteq \mathbb{Z}X$:

$$\begin{array}{ccc}
C_p(Y, \mathbb{T})^\wedge & \xrightarrow{\widehat{H}} & C_p(X, \mathbb{T})^\wedge \\
{\scriptstyle \mu_Y}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \mu_X} \\
Y & \xrightarrow{\widehat{H}_|} & \widehat{H}_{|X}(Y),
\end{array}$$

donde $\mu_Z : Z \to C_p(Z, \mathbb{T})^\wedge$ son las inmersiones nombradas anteriormente. Procedemos por reducción al absurdo. Para ello, supondremos que existe $y \in Y$ tal que

$$\widehat{H}_{|Y}(y) \notin \mathbb{Z}X.$$

Como $A_p(Z)^\wedge \cong C_p(Z,\mathbb{T})$ (Ecuación (3.17)), podemos suponer que dicho $y \in Y$ verifica que $\widehat{H}_{|Y}(y) \in A(X) \setminus \mathbb{Z}X$, es decir que podemos suponer que $\widehat{H}_{|Y}(y)$ tiene la forma $\sum_{i=1}^n n_i x_i \in A(X)$, con $x_i \neq x_j$ para todo $j \neq i$, $x_i \in X$, $n_i \in \mathbb{Z}$ y $n = |I| > 1$. Cogemos el (último) elemento x_n de X y para cada x_j con $j \neq n$, tenemos que que existen entornos abiertos $V^j \in \mathcal{E}(x_n)$ y $U_{x_j} \in \mathcal{E}(x_j)$ tales que

$$V^j \cap U_{x_j} = \emptyset,$$

para todo $j \in \{1, \ldots, n-1\}$. Por otro lado, como cada V^j es entorno abierto de x_n, tenemos que $W := \cap_{j=1}^{n-1} V^j$ también es entorno abierto del punto x_n. Llamamos $U_1 := \cup_{j=1}^{n-1} U_{x_j}$; de esta forma, el conjunto de puntos $\{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ está contenido en él y además verifica $U_1 \cap W = \emptyset$, ya que

$$U_1 \cap W = \cup_{j=1}^{n-1} (\cap_{i=1}^{n-1} V^i \cap U_{x_j}),$$

donde cada $U_{x_j} \cap (\cap_{i=1}^{n-1} V^i) \subseteq V^j \cap U_{x_j} = \emptyset$ para todo $j \in \{1, \ldots, n-1\}$. Por tanto, por ser X completamente regular, podemos encontrar funciones continuas $f_i \in C(X,\mathbb{R})$ tales que $0 \leq f_i \leq 1$, $f_i(X \setminus U_i) = 0$ y $f_i(x_i) = a \neq 0$, con $a \notin \mathbb{Q}$ tal que $0 < a < 1$. Llamamos, entonces, $g_i := \exp(af_i)$ y ésta verifica $\overline{g}_i(\sum_{j=1}^n n_j x_j) = \prod_{j=1}^n g_i(x_j)^{n_j}$. Si $i = 1$, obtenemos que

$$\begin{aligned} \overline{g}_1(\sum_{j=1}^n n_j x_j) &= \prod_{j=1}^n g_i(x_j)^{n_j} = \prod_{i=1}^{n-1} (e^{2\pi i a})^{n_j} \\ &= e^{a \sum_{j=1}^{n-1} n_j} \neq 1_{\mathbb{T}}, \end{aligned}$$

mientras que si $i = 2$, entonces $\overline{g}_2(\sum_{j=1}^n n_j x_j) = g_2(x_n)^{n_n} = e^{2\pi i a n_n} \neq 1_{\mathbb{T}}$. Por tanto,

$$\begin{aligned} (Hg_i)(y) &= \widehat{H}_{|Y}(y)(g_i) = \overline{g}_i(\widehat{H}_{|Y}(y)) \\ &= \overline{g}_i(\sum_{j=1}^n n_j x_j) \neq 1_{\mathbb{T}}, \end{aligned}$$

para $i \in \{1, 2\}$. Como H es un homomorfismo separador, tenemos que existe $x_0 \in X$,

$$g_1(x_0) \neq 1_{\mathbb{T}} \quad \text{y} \quad g_2(x_0) \neq 1_{\mathbb{T}}.$$

Esto implica que

$$af_1(x_0) \notin \mathbb{Z} \text{ y } af_2(x_0) \notin \mathbb{Z},$$

es decir, que $f_1(x_0) \neq 0$ y $f_2(x_0) \neq 0$. Luego, los conjuntos cocero de f_1 y f_2 son disjuntos, con lo que ya hemos llegado a una contradicción por la forma con la que se han construido cada f_i. Por tanto,

$$\widehat{H}_{|Y}(y) \in \mathbb{Z}X$$

para todo $y \in Y$. $\square$

Nota 3.4.7 *Gracias a la Proposición 3.4.6, podemos definir las siguientes aplicaciones*

$$h : Y \to X$$

y

$$\beta : Y \to \mathbb{Z},$$

de tal forma que para todo $y \in Y$, tenemos que

$$\widehat{H}_{|Y}(y) = \beta(y)h(y) = nx,$$

con $n \in \mathbb{Z}$ y $x \in X$.

El siguiente paso a comprobar es que la aplicación β sólo puede tomar los valores enteros 1 y -1. El procedimiento que seguiremos aquí es diferente al de secciones anteriores, ya que aprovecharemos la propiedad de los grupos $A(X)$ y $C_p(X, \mathbb{T})$ de estar en dualidad, así como también $A(Y)$ y $C_p(Y, \mathbb{T})$.

Proposición 3.4.8 *La aplicación $\beta : Y \to \mathbb{Z}$, definida en la Nota 3.4.7, tiene como imagen el conjunto formado por los enteros 1 y -1.*

-Demostración-
Ya sabemos de la Proposición 3.4.6 que $\widehat{H}_{|Y}(Y) \subseteq \mathbb{Z}X$. Veamos en primer lugar que la imagen por $\widehat{H}$ de $\mathbb{Z}Y$ es exactamente $\mathbb{Z}X$.

Por doble inclusión:
($\subseteq$) Sea $ny \in \mathbb{Z}Y$, luego $\widehat{H}(ny) = n\widehat{H}_{|}(y) = n{\cdot}mx$ por lo que acabamos de ver en la Proposición 3.4.6. Además, el producto $nm \in \mathbb{Z}$, luego $\widehat{H}(ny) \in \mathbb{Z}X$.

($\supseteq$) Sea $nx \in \mathbb{Z}X$. Supongamos que existe $w \in A(Y)\backslash\mathbb{Z}Y$ tal que $\widehat{H}(w) = nx$. Podemos suponer que w tiene la siguiente forma: $w = \sum_i n_i y_i$, con $n_i \in \mathbb{Z}$ e $y_i \in Y$, distintos entre sí. Entonces,

$$\widehat{H}(\sum_i n_i y_i) = \sum_i n_i \widehat{H}_|(y_i) = \sum_i n_i m_i x_i,$$

de donde podemos suponer que los elementos $x_i \in X$ son distintos, ya que los y_i lo son y $\widehat{H}$ es inyectiva. De esta forma,

$$nx = \sum_i n_i m_i x_i,$$

pero $\sum_i n_i m_i x_i \notin \mathbb{Z}X$, al ser los x_i distintos, mientras que nx sí que es un elemento de dicho espacio. Contradicción. Por tanto, cada elemento de $\mathbb{Z}X$ tiene una antiimagen por $\widehat{H}$ en $\mathbb{Z}Y$, luego

$$\widehat{H}(\mathbb{Z}Y) = \mathbb{Z}X,$$

y de aquí se deduce que $\widehat{H}^{-1}(\mathbb{Z}X) = \mathbb{Z}Y$.

Una vez probado este hecho, sea ahora $y \in Y$, luego

$$\widehat{H}_{|Y}(y) = nx,$$

con $n \in \mathbb{Z}$ tal y como acabamos de ver. Como $\widehat{H}$ es, en particular, una biyección, entonces para el elemento $nx \in \mathbb{Z}X$ su antiimagen y es única. Podemos dividir el elemento nx de la siguiente forma: $nx = (n-1)x + x$, y cada uno de estos sumandos tendrá su antiimagen en $\mathbb{Z}Y$, ya que $\widehat{H}^{-1}(\mathbb{Z}X) = \mathbb{Z}Y$:

$$\begin{aligned} y = \widehat{H}^{-1}(nx) &= \widehat{H}^{-1}((n-1)x) + \widehat{H}^{-1}(x) \\ &= (n-1)\widehat{H}^{-1}(x) + \widehat{H}^{-1}(x) \\ &= (n-1)My_1 + My_1 \\ &= nMy_1, \end{aligned}$$

donde M, $n \in \mathbb{Z}$ e $y_1 \in Y$ es la imagen de x por $\widehat{H}^{-1}$. Entonces, para que nMy_1 sea igual al elemento $y \in Y$, el producto $n \cdot M$ tiene que tomar el valor entero 1 y además, $y = y_1$. Así pues, como son números enteros, n y M han de pertenecer al conjunto $\{-1, 1\}$. Por tanto, para todo $y \in Y$,

$$\widehat{H}_{|Y}(y) \in X \cup (-X),$$

es decir, la aplicación β verifica que $\beta(Y) \subseteq \{-1, 1\}$. $\square$

Nota 3.4.9 *En la Proposición anterior 3.4.8, hemos visto que efectivamente la aplicación β, definida en la Nota 3.4.7, toma valores de Y en $\{-1,1\}$. Por tanto, esto nos permite relacionar los espacios X e Y a partir del isomorfismo topológico separador H y su dual $\widehat{H}$ de una forma más natural. De hecho, las aplicaciones h y β, tal y como están definidas, verifican que, si $f \in C_p(X,\mathbb{T})$, entonces*

$$\widehat{H}_{|}(y)(f) = (Hf)(y) = f(h(y))^{\beta(y)},$$

donde $\beta : Y \to \{-1,1\}$, que hace que la imagen de f por H evaluada en un punto $y \in Y$ sea f evaluada en $h(y)$ o su conjugado, i.e.,

$$(Hf)(y) = f(h(y)) \quad \text{ó} \quad (Hf)(y) = f(h(y))^{-1} = \overline{f(h(y))}.$$

Veamos en el siguiente resultado qué propiedades tiene la aplicación $h : Y \to X$.

Proposición 3.4.10 *La aplicación h definida en la Nota 3.4.7 es inyectiva, continua y el rango de h es denso en X.*

-Demostración-

- La demostración de la inyectividad es análoga a la de la Proposición 3.2.11 en la Sección 3.2.1 y la Proposición 3.3.7 en la Sección 3.3.
- Que h es continua, es fácil de ver porque h es la restricción de $\widehat{H}$ a Y, y ésta es continua con la topología de la convergencia puntual sobre los elementos de $C_p(X,\mathbb{T})$ y $C_p(Y,\mathbb{T})$ (Proposición 3.4.1). Como además esta topología restringida a cualquier espacio completamente Hausdorff Z coincide con la topología original de dicho espacio Z (Proposición 3.4.2), entonces h es continua.
- Veamos por último que el rango de h es denso en X, i.e., $\overline{h(Y)} = X$. Supongamos que existiera $x_0 \in X \setminus \overline{h(Y)}$, que es abierto en X.

  Como X es un espacio completamente regular, existe una función continua $g : X \longrightarrow [0,1]$ que verifica

  $$g(x_0) = a \ \text{ y } \ g_{|\overline{h(Y)}} = 0,$$

con $a \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0,1]$. Definimos ahora $g' := \exp(ag)$ que es de nuevo continua. Entonces para todo $y \in Y$, $g'(h(y)) = 1_{\mathbb{T}}$, luego

$$(Hg')(y) = g'(h(y))^{\beta(y)} = 1_{\mathbb{T}},$$

y eso nos lleva a que $Hg' = 1_{C_p(Y,\mathbb{T})}$. Como H es un homomorfismo inyectivo, entonces la aplicación g' habría de ser la aplicación constante igual a $1_{\mathbb{T}}$, pero esto no puede ser ya que $g'(x_0) = e^{2\pi i a} \neq 1_{\mathbb{T}}$. Contradicción. Así pues, $\overline{h(Y)} = X$.

$\square$

Una vía para demostrar que h es sobreyectiva y abierta, y por tanto un homeomorfismo, puede consistir en utilizar $\widehat{H}^{-1}$ y construir la inversa de h a partir de él.

Sabemos que H es un isomorfismo topológico separador y que su inversa, $H^{-1} : C_p(Y,\mathbb{T}) \longrightarrow C_p(X,\mathbb{T})$, al menos, hereda la característica de ser un isomorfismo topológico. Dualizamos y obtenemos:

$$\begin{array}{rcl} \widehat{H^{-1}} : C_p(X,\mathbb{T})^{\wedge} & \longrightarrow & C_p(Y,\mathbb{T})^{\wedge} \\ \chi & \longmapsto & \chi \circ H^{-1}. \end{array}$$

Análogamente a la Proposición 3.4.1 (basado en la Proposición 3.1.4), se demuestra que $\widehat{H^{-1}}$ es un isomorfismo topológico con la topología de la convergencia puntual sobre los elementos de $C_p(Y,\mathbb{T})$ y $C_p(X,\mathbb{T})$.

Veamos, pues, que h es a su vez sobreyectiva.

Proposición 3.4.11 *La aplicación $h : Y \to X$, definida en la Nota 3.4.9, es sobreyectiva.*

-Demostración-
Supongamos que existe $x_0 \in X \setminus h(Y)$. Como $\overline{h(Y)} = X$ (Proposición 3.4.10), entonces existe $(x_i)_{i\in I} \subseteq h(Y)$ tal que $x_i \rightsquigarrow x_0$. Pero $x_i \in h(Y)$ para todo $i \in I$, luego existen y_i únicos (h es inyectiva, Proposición 3.4.10) tales que $x_i = h(y_i)$ para todo $i \in I$. Trabajamos ahora con la red $(y_i)_i \subseteq Y$. Como H^{-1} y $\widehat{H}^{-1}$ son isomorfismos topológicos, y $\widehat{H}$ y $\widehat{H}^{-1}$ son inversas una de la otra, entonces

$$(\widehat{H}^{-1} \circ \widehat{H}_{|})(y_i) = \widehat{H}^{-1}(x_i) = y_i$$

es una red convergente en Y, ya que la red $(x_i)_i$ lo es en X y $\widehat{H}^{-1}$ es continua. De esta forma, existe $y_0 \in Y$ tal que $y_i \rightsquigarrow y_0$. Sin embargo, la aplicación h es continua (Proposición 3.4.10), y esto implica que la red $(h(y_i))_i$ ha de converger al elemento $h(y_0)$. Como X es un espacio de Hausdorff, no queda otra alternativa más que

$$h(y_0) = x_0.$$

Contradicción, porque habíamos supuesto al principio que x_0 no era un elemento de $h(Y)$. Por tanto, $h(Y) = X$ y ésta es sobreyectiva. $\square$

Como consecuencia, para probar que h es un homeomorfismo, necesitaremos comprobar en primer lugar que H^{-1} también es un un homomorfismo separador para poder construir la inversa de h a partir del dual de H^{-1}. Sabiendo que H es un isomorfismo topológico separador, ¿será cierto que su inversa H^{-1} también tiene esa propiedad? En general, la respuesta es negativa. Este hecho no depende tanto de que H sea un homomorfismo separador, sino de que admita una representación del tipo Banach-Stone.

Es, por tanto, el resultado siguiente donde vamos a ver que H^{-1} es finalmente un homomorfismo separador.

Proposición 3.4.12 *Sea $H : C_p(X, \mathbb{T}) \longrightarrow C_p(Y, \mathbb{T})$ un isomorfismo topológico separador. Entonces H^{-1} es a su vez una aplicación separadora.*

-Demostración-
Sean f, $g \in C_p(Y, \mathbb{T})$ tales que para todo $y \in Y$,

$$f(y) = 1_{\mathbb{T}} \text{ ó } g(y) = 1_{\mathbb{T}}.$$

Como H es una aplicación sobreyectiva, entonces existen f', $g' \in C_p(X, \mathbb{T})$ tales que $H(f') = f$ y $H(g') = g$.

De la Nota 3.4.9, sabemos que, si $k \in C_p(X, \mathbb{T})$, entonces $H(k)(y) = k(h(y))^{\beta(y)}$ para todo $y \in Y$. Por tanto, obtenemos

$$f'(h(y))^{\beta(y)} = H(f')(y) = f(y) = 1_{\mathbb{T}} \text{ ó } g'(h(y))^{\beta(y)} = H(g')(y) = g(y) = 1_{\mathbb{T}}, \tag{3.19}$$

para todo $y \in Y$. La Proposición 3.4.11 afirma que h es sobreyectiva. Esto implica que (3.19) adquiera la siguiente forma

$$f'(x)^{\beta(h^{-1}(x))} = 1_{\mathbb{T}} \text{ ó } g'(x)^{\beta(h^{-1}(x))} = 1_{\mathbb{T}},$$

para todo $x \in X$. De aquí se deduce que

$$H^{-1}(f)(x)^{\beta(h^{-1}(x))} = 1_{\mathbb{T}} \text{ ó } H^{-1}(g)(x)^{\beta(h^{-1}(x))} = 1_{\mathbb{T}} \ \forall x \in X.$$

Como $\beta(Y) \subseteq \{-1, 1\}$ (Proposición 3.4.8), se tiene en cualquier caso que para todo $x \in X$,

$$H^{-1}(f)(x) = 1_{\mathbb{T}} \text{ ó } H^{-1}(g)(x) = 1_{\mathbb{T}},$$

es decir, H^{-1} es una aplicación separadora. □

Por tanto, podemos aplicarle a H^{-1} las Proposiciones 3.4.6 y 3.4.8, con lo que obtenemos

$$\widehat{H^{-1}_{|X}}(x) \in Y \quad \text{o} \quad \widehat{H^{-1}_{|X}}(x) \in -Y \tag{3.20}$$

para todo $x \in X$.

Ahora sí que estamos en condiciones de definir la aplicación $k : X \to Y$ de forma análoga a h:

Nota 3.4.13 *Tras lo visto en (3.20), podemos definir la siguiente aplicación* $k : X \to Y$*, que nos permite relacionar los espacios* X *e* Y *a partir del isomorfismo topológico separador* H^{-1} *y su dual* $\widehat{H^{-1}}$*. Así pues, para todo* $x \in X$*, tenemos que*

$$\widehat{H^{-1}_{|X}}(x) = \beta'(x)k(x),$$

con $\beta'(X) \subseteq \{-1, 1\}$*. Cabe destacar que* k*, definida de esta forma, verifica que, si* $f \in C_p(Y, \mathbb{T})$ *y* $x \in X$*, entonces*

$$(H^{-1}f)(x) = f(k(x))^{\beta'(x)},$$

donde β' *está definida como en la Nota 3.4.9 lo estaba la aplicación* β*. A su vez,* k *también verifica que es inyectiva, continua y sobreyectiva (Proposiciones 3.4.10 y 3.4.11 aplicadas a ella).*

Como consecuencia, podemos probar que la aplicación h definida en la Nota 3.4.7 es un homeomorfismo:

Proposición 3.4.14 *Sean X e Y espacios topológicos completamente regulares y sea $H : C_p(X,\mathbb{T}) \to C_p(Y,\mathbb{T})$ un isomorfismo topológico separador. Entonces, la aplicación $h : Y \to X$ que se obtiene en la Nota 3.4.7 a partir de $\widehat{H}$ es un homeomorfismo.*

-Demostración-
Por las Proposiciones 3.4.10 y 3.4.11, sabemos que h es una biyección continua. En la Nota 3.4.13, se ha demostrado que del homomorfismo inverso de H también se puede obtener una biyección continua $k : X \to Y$ que lo representa.

Entonces, para ver que h es abierta, comprobaremos que k es la inversa de h. Sea, pues, $y \in Y$, luego para toda $f \in C_p(Y,\mathbb{T})$ tenemos que

$$\begin{aligned} f(y) &= (H \circ H^{-1})(f)(y) = H(H^{-1}f)(y) \\ &= (H^{-1}f)(h(y))^{\beta(y)} = f(k(h(y)))^{\beta(y)\beta'(h(y))}. \end{aligned}$$

Supongamos que existiera $y_0 \in Y$ tal que $(k \circ h)(y_0) \neq y_0$. Podemos encontrar entonces entornos abiertos U y V en Y de y_0 y $k(h(y_0))$, respectivamente tales que $U \cap V = \emptyset$. Así pues, construimos una aplicación continua $F : Y \to \mathbb{R}$ tal que

$$F(Y \setminus V) = \{a\} \text{ y } F(k(h(y_0))) = 0,$$

con $a \in (\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) \cap [0,1]$. Esto implica que $e^{2\pi i F} \in C_p(Y,\mathbb{T})$ y podemos aplicarle lo visto anteriormente:

$$1_{\mathbb{T}} \neq e^{2\pi i a} = e^{2\pi i F(y_0)} = e^{2\pi i F(k(h(y_0)))\beta(y_0)\beta'(h(y_0))} = 1_{\mathbb{T}}.$$

Contradicción, luego para todo $y \in Y$ se tiene que $(k \circ h)(y) = y$. Se comprueba análogamente que también $(h \circ k)(x) = x$ para todo $x \in X$.
Por tanto, la aplicación k, definida en 3.4.13, es la inversa de h, luego h es un homeomorfismo. □

Aquí tenemos el principal Teorema de esta sección, en el que resumimos todos los resultados que nos conducen a afirmar que H es efectivamente una aplicación del tipo de Banach-Stone.

Teorema 3.4.15 *Sean X e Y espacios topológicos completamente regulares Hausdorff. Sea, además, $H : C_p(X,\mathbb{T}) \longrightarrow C_p(Y,\mathbb{T})$ un isomorfismo topológico separador. Entonces existe un homeomorfismo $h : Y \longrightarrow X$ tal que, si*

$f \in C_p(X, \mathbb{T})$ e $y \in Y$,

$$H(f)(y) = f(h(y))^{\beta(y)},$$

donde $\beta : Y \to \{-1, 1\}$.

-Demostración-
Por las Proposición 3.4.14, obtenemos que la aplicación h, definida en la Nota 3.4.7, es un homeomorfismo biyectivo de Y en X. Como además, para cada $y \in Y$, el isomorfismo H tiene la siguiente forma (Nota 3.4.9),

$$(Hf)(y) = \widehat{H}_{|Y}(y)(f) = f(h(y))^{\beta(y)},$$

el teorema queda demostrado. □

3.5. Otro tipo de espacios

En esta última sección, trabajaremos en primer lugar con espacios topológicos Hausdorff que satisfacen el primer axioma de numerabilidad (1AN), mientras que en segundo y último lugar, tanto X como Y serán espacios topológicos realcompactos. Las pruebas que llevaremos a cabo en esta parte se obtendrán como consecuencia de la Sección 3.2, cuando los espacios eran compactos.

En ambos apartados, vamos a trabajar con las compactaciones de Stone-Čech de X e Y. Recordemos en qué consiste dicha compactación. Para ello, extraemos de [61] los siguientes resultados:

Teorema 3.5.1 *Todo espacio completamente regular X tiene una compactación βX con las siguientes propiedades:*

1. *(Stone) Toda aplicación continua τ de X en un espacio compacto Y tiene una extensión continua $\overline{\tau}$ de βX en Y.*

2. *(Stone-Čech) Toda función $f \in C^*(X)$, el espacio de las funciones reales continuas acotadas, tiene una extensión a una función f^β de $C(\beta(X))$.*

3. *(Čech) Cualquier par de conjuntos cero disjuntos de X tiene clausuras disjuntas en βX.*

Más aún, el espacio βX es único en el siguiente sentido: si una compactación T de X satisface alguna de las condiciones de la lista, entonces existe un homeomorfismo de βX en T que fija a X punto a punto.

El espacio βX recibe el nombre de *compactación de Stone-Čech* de X. De acuerdo al Teorema 3.5.1, ésta viene caracterizada como aquella compactación de X en la que dicho espacio topológico está C^*-sumergido.

Algunas propiedades significativas de βX son las siguientes:

- El espacio X es denso en βX.
- βX es Hausdorff.
- La aplicación de $C^*(X)$ en $C(\beta X)$, $f \mapsto f^\beta$, es un isomorfismo.

Partimos de nuevo del isomorfismo topológico separador

$$H : C_u(X, \mathbb{T}) \longrightarrow C_u(Y, \mathbb{T}),$$

donde destacamos que tanto $C(X, \mathbb{T})$ como $C(Y, \mathbb{T})$ están dotados de la topología de la convergencia uniforme y los denotaremos de esa forma: $C_u(X, \mathbb{T})$ y $C_u(Y, \mathbb{T})$. Veremos, entonces, que se puede representar mediante un homeomorfismo entre los espacios Y y X. Para ello, construiremos una aplicación:

$$\begin{array}{rcl} H^\beta : C(\beta X, \mathbb{T}) & \longrightarrow & C(\beta Y, \mathbb{T}) \\ f & \longmapsto & (Hf_{|X})^\beta, \end{array}$$

que actúa sobre cada $f \in C(\beta X, \mathbb{T})$ como lo hace H, con la pequeña variación de que H actúa sobre f restringida a X y luego el resultado se extiende a una aplicación de βY en $\mathbb{T}$.

En el siguiente resultado se prueban las propiedades que hereda H^β del isomorfismo topológico separador H.

Proposición 3.5.2 *Sea $H : C_u(X, \mathbb{T}) \longrightarrow C_u(Y, \mathbb{T})$ un isomorfismo topológico separador. Entonces la aplicación*

$$\begin{array}{rcl} H^\beta : C(\beta X, \mathbb{T}) & \longrightarrow & C(\beta Y, \mathbb{T}) \\ f & \longmapsto & (Hf_{|X})^\beta, \end{array}$$

es un isomorfismo topológico separador.

-Demostración-
Como en anteriores ocasiones, la prueba se lleva a cabo paso a paso.

- Que H^β es un homomorfismo es evidente. Sean ahora f, $g \in C(\beta X, \mathbb{T})$ cumpliendo que para todo $w \in \beta X$,

  $$f(w) = 1_{\mathbb{T}} \text{ o } g(w) = 1_{\mathbb{T}}.$$

  En particular, esto se cumple para todo elemento de X y, como H es un homomorfismo separador, tenemos que para todo $y \in Y$,

  $$(Hf_|)(y) = 1_{\mathbb{T}} \text{ o } (Hg_|)(y) = 1_{\mathbb{T}}.$$

  Supongamos que existe $z \in \beta Y \setminus Y$ tal que

  $$(H^\beta f)(z) \neq 1_{\mathbb{T}} \text{ y } (H^\beta g)(z) \neq 1_{\mathbb{T}}.$$

  Por la definición de H^β, esto quiere decir que

  $$(Hf_|)^\beta(z) \neq 1_{\mathbb{T}} \text{ y } (Hg_|)^\beta(z) \neq 1_{\mathbb{T}}.$$

  Que exista $z \in \beta Y \setminus Y$ tal que $(H^\beta f)(z) \neq 1_{\mathbb{T}}$ y $(H^\beta g)(z) \neq 1_{\mathbb{T}}$ implica que el conjunto

  $$V := \{p \in \beta Y : \ (H^\beta f)(p) \neq 1_{\mathbb{T}} \text{ y } (H^\beta g)(p) \neq 1_{\mathbb{T}}\}$$

  sea distinto del conjunto vacío. Más aún, V es un abierto de βY, ya que
  $$V = \beta Y \setminus (H^\beta f)^{-1}(\{1_{\mathbb{T}}\}) \cup (H^\beta g)^{-1}(\{1_{\mathbb{T}}\}).$$
  Así pues, obtenemos que
  $$V \cap Y \neq \emptyset.$$
  Esto implica que existe $y_0 \in Y$ tal que

  $$(H^\beta f)(y_0) \neq 1_{\mathbb{T}} \text{ y } (H^\beta g)(y_0) \neq 1_{\mathbb{T}},$$

  pero esto es imposible, ya que se tiene que $(H^\beta F)_{|Y} = (HF_{|X})$ para toda $F \in C(\beta X, \mathbb{T})$ y el homomorfismo H es separador. De esta contradicción se deduce que H^β hereda la propiedad de ser una aplicación separadora.

- H^β es inyectiva.

  Sean f, $g \in C(\beta X, \mathbb{T})$ tales que $H^\beta(f) = H^\beta(g)$. Esto implica que $(Hf_|)^\beta = (Hg_|)^\beta$. Luego, para todo $y \in \beta Y$,

  $$(Hf_|)^\beta(y) = (Hg_|)^\beta(y),$$

  en particular, para todo $y \in Y$,

  $$\begin{aligned} (Hf_|)^\beta(y) &= (Hg_|)^\beta(y) \\ \Leftrightarrow (Hf_|)(y) &= (Hg_|)(y) \\ \Rightarrow f_{|X} &= g_{|X}. \end{aligned}$$

  Como f y g coinciden en un denso, éstas son iguales. Por tanto, H^β es inyectiva.

- H^β es sobreyectiva:

  Sea $g \in C(\beta Y, \mathbb{T})$, luego $g_{|Y} \in C(Y, \mathbb{T})$. Si tenemos en cuenta ahora que H es sobreyectiva, tenemos que existe $f \in C(X, \mathbb{T})$ tal que $Hf = g_{|Y}$. Llamamos F a la extensión de f la compactación de Stone-Čech de X, que es continua y además verifica,

  $$(H^\beta f) = (HF_|)^\beta = (HF)^\beta = (g_{|Y})^\beta = g.$$

  Así pues, H^β es sobreyectiva.

- H^β es continua:

  Sea $(f_i)_i \subseteq C(\beta X, \mathbb{T})$ una red convergente a $f \in C(\beta X, \mathbb{T})$ con la topología uniforme, es decir, para todo $\epsilon > 0$ existe i_0 tal que $f_i - f \in P(\beta X, V_\epsilon)$ para todo $i \geq i_0$, donde recordamos que $P(\beta X, V_\epsilon)$ es un entorno básico de la unidad de $C(\beta X, \mathbb{T})$. Esto implica que, en particular, para todo $x \in X$ tenemos que

  $$(f_i - f)(x) \in V_\epsilon,$$

  luego $(f_i - f)(X) \subseteq V_\epsilon$ para todo $i \geq i_0$. Como H es continua respecto de la topología uniforme en $C(X, \mathbb{T})$ y en $C(Y, \mathbb{T})$, obtenemos que la red $Hf_{i_|}$ converge a $Hf_|$ con la topología de la convergencia uniforme, esto es, dado $\epsilon > 0$, existe i_1 tal que

  $$(Hf_{i_|} - Hf_|)(Y) \subseteq V_\epsilon \ \forall i \geq i_1. \tag{3.21}$$

Supongamos ahora que $(H^\beta f_i)_i$ no converge a $H^\beta f$; esto quiere decir que existe $\epsilon_o > 0$ tal que

$$(H^\beta f_i - H^\beta f)(\beta Y) \nsubseteq V_{\epsilon_o} \tag{3.22}$$

para todo índice i de la red. Existe por tanto $w \in \beta Y$ que verifica (3.22). Como Y es denso en su compactación de Stone-Čech, existe una red $(w_j) \subseteq Y$ que converge a w con la topología de βY. Pero cada w_j pertenece a Y, luego por (3.21) se tiene que existe i_3 tal que

$$(Hf_{i_|} - Hf_|)((w_j)_j) \subseteq V_{\epsilon_o} \ \forall i \geq i_3.$$

Sea $i \geq i_3$. Por tanto, tenemos una red $((H^\beta f_{i_|} - H^\beta f)_|(w_j))_j$ en $\mathbb{T}$ que se acumula en V_{ϵ_o}, que podemos escogerlo cerrado, esto es, $V_{\epsilon_o} := \{e^{2\pi i t} : \ |t| \leq \epsilon_o\}$, al cual no pertenece su límite $(H^\beta f_i - H^\beta f)_|(w)$ por lo que se está suponiendo en (3.22). Contradicción. Así pues,

$$H^\beta f_i \overset{\tau_u}{\rightsquigarrow} H^\beta f,$$

y la aplicación H^β es continua con la topología de la convergencia uniforme.

- H^β es abierta:

  Se prueba de forma análoga a la continuidad de H^β. Sea, pues, una red $(g_i)_i \subseteq C(\beta Y, \mathbb{T})$ convergente a $g \in C(\beta Y, \mathbb{T})$ con la topología de la convergencia uniforme, con lo que $g_{i_{|Y}}$ también converge a $g_{|Y}$ con esa misma topología, tal y como se ha visto en el apartado anterior. Como H^{-1} es continua por hipótesis, tenemos que $H^{-1}(g_{i_{|Y}})$ converge a $H^{-1}(g_{|Y})$. Llamamos $h_i := H^{-1}(g_{i_{|Y}})$ y $h := H^{-1}(g_{|Y})$, y supongamos que (h_i^β) no converge a h^β. Luego, existe $\delta > 0$ tal que

$$(h_i^\beta - h^\beta)(\beta X) \nsubseteq V_\delta \ \forall i.$$

  Siguiendo los pasos de la parte anterior, se demuestra que en ese caso, existe $z \in \beta X \setminus X$ que verifica la afirmación anterior, y a partir de aquí se deduce de forma análoga a la demostración del paso anterior que

$$(H^\beta)^{-1}(g_i) \rightsquigarrow (H^\beta)^{-1}(g)$$

  con la topología de la convergencia uniforme, con lo que H^β es abierta.

$\square$

3.5.1. X e Y 1AN

Pasamos de trabajar con H a trabajar con H^β y los resultados que se obtengan para esta última aplicación, los relacionaremos con H. Veamos a continuación qué propiedades hereda H^β de H para así estar en condiciones de aplicarle a H^β los resultados de la Sección 3.2, ya que tanto βX como βY son espacios topológicos compactos Hausdorff.

Si restringimos H^β a $C^o(\beta X, \mathbb{T})$ y gracias a que es un isomorfismo topológico (Proposición 3.5.2), tenemos que $H^\beta(C^o(\beta X, \mathbb{T})) = C^o(\beta Y, \mathbb{T})$ y H^β, restringida a dicho subgrupo de $C(\beta X, \mathbb{T})$ sigue siendo un isomorfismo topológico. A su vez, H^β es un homomorfismo separador (Proposición 3.5.2). Por tanto, estamos en condiciones de aplicar a H^β los resultados de la Sección 3.2.1. De esta forma, por el Teorema 3.2.14 tenemos que existe una aplicación continua $\gamma : \beta Y \to \{-1, 1\}$ y un homeomorfismo biyectivo $h^\beta : \beta Y \to \beta X$ tales que

$$(H^\beta e^{2\pi i f})(w) = e^{2\pi i \gamma(w) f(h^\beta(w))}, \tag{3.23}$$

para toda $f \in C(\beta X, \mathbb{R})$. Recordamos que βX es un espacio topológico compacto y que, por tanto, la aplicación exponencial cociente:

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{E} : \dfrac{C(\beta X, \mathbb{R})}{C(\beta X, \mathbb{Z})} & \to & C^o(\beta X, \mathbb{T}) \\ f + C(\beta X, \mathbb{Z}) & \mapsto & e^{2\pi i f} \end{array}$$

es un isomorfismo topológico (Proposición 1.2.4), con lo que $\exp(C(\beta X, \mathbb{R})) = C^o(\beta X, \mathbb{T})$.

El siguiente paso es comprobar que la nueva aplicación h^β restringida a Y sigue siendo un homeomorfismo y además, $h^\beta_{|Y}(Y) = X$, con lo que ya tendríamos candidato al homeomorfismo mediante el cual representaremos a H, tal y como afirma el Teorema clásico de Banach-Stone. Pero antes de nada, mostramos unos resultados de [61] que son útiles a la hora de alcanzar el objetivo planteado.

Teorema 3.5.3 *Todo conjunto cero no trivial de βX, si además es disjunto de X, entonces contiene una copia de $\beta\mathbb{N}$, y por tanto, su cardinal es como mínimo $2^{\mathfrak{c}}$.*

Corolario 3.5.4 *Ningún punto de $\beta X \setminus X$ es un G_δ en βX.*

A continuación demostramos que $h^{\beta}_{|Y}$ es un homeomorfismo.

Proposición 3.5.5 *El homeomorfismo biyectivo $h^{\beta} : \beta Y \to \beta X$, definido en (3.23), cumple:*

1. $h^{\beta}_{|Y}(Y) = X$.

2. *La nueva aplicación*

$$\begin{array}{rcl} h := h^{\beta}_{|Y} : Y & \to & X \\ y & \mapsto & h^{\beta}_{|Y}(y) \end{array}$$

   es un homeomorfismo biyectivo.

3. *La aplicación h verifica*

$$(He^{2\pi i f})(y) = e^{2\pi i \gamma_{|Y}(y) f(h(y))}$$

   para toda $f \in C(X, \mathbb{R})$ e $y \in Y$, donde $\gamma_{|Y} : Y \to \{-1, 1\}$ es continua.

-Demostración-

1. Por doble inclusión.

   ($\subseteq$) Sea $y \in Y$ tal que $h^{\beta}_{|Y}(y) \in \beta X \backslash X$. Por ser Y un espacio 1AN, tenemos que el punto y tiene una base de entornos numerable $(U_n)_{n<\omega} \subseteq Y$. Entonces, los conjuntos $(cl_{\beta Y}(U_n))_n$ forman una base de entornos de y en βY. Como h^{β} es un homeomorfismo, si llamamos para cada n,

$$V_n := h^{\beta}(cl_{\beta Y}(U_n)),$$

   obtenemos una sucesión de conjuntos $(V_n)_n$ que es base numerable de entornos abiertos de $h^{\beta}_{|Y}(y)$ en βX, lo que significa que $h^{\beta}_{|Y}(y)$ es un conjunto G_{δ}. Pero, por el Corolario 3.5.4, el punto $h^{\beta}_{|Y}(y) \in \beta X \setminus X$ no puede ser un conjunto G_{δ}. Por tanto, $h^{\beta}_{|Y}(y) \in X$.

   ($\supseteq$) Sea ahora $x \in X$ tal que $(h^{\beta})^{-1}(x) \in \beta Y \setminus Y$. Como X es 1AN, el punto x tiene una base numerable de entornos $(U_n)_n$ en X. Por argumentos similares a los mostrados en la prueba de la otra inclusión y gracias a que h^{β} es un homeomorfismo, obtenemos efectivamente que $(h^{\beta})^{-1}(x) \in Y$. De esta forma,

$$h^{\beta}_{|Y}(Y) = X.$$

2. Que la nueva aplicación $h := h^{\beta}_{|Y}$ es una biyección, es evidente tras lo visto en el apartado anterior. E igualmente, es continua y abierta pues no estamos más que restringiendo h^{β} a un subespacio suyo así como a la inversa de (h^{β}), a $(h^{\beta})^{-1}$.

3. Sabemos que si $f \in C(\beta X, \mathbb{R})$ y $w \in \beta Y$, entonces
$$(H^{\beta} e^{2\pi i f})(w) = e^{2\pi i \gamma(w) f(h^{\beta}(w))},$$
donde $\gamma : \beta Y \rightarrow \{-1, 1\}$ es una aplicación continua. Sean, ahora, $g \in C(X, \mathbb{R})$ e $y \in Y$. Entonces,
$$\begin{aligned}
(He^{2\pi i g})(y) &= (H^{\beta}(e^{2\pi i g})^{\beta})_{|Y}(y) \\
&= e^{2\pi i \gamma(y) g^{\beta}(h^{\beta}(y))} \\
&= e^{2\pi i \gamma_{|Y}(y) g^{\beta}(h^{\beta}_{|Y}(y))} \\
&= e^{2\pi i \gamma_{|Y}(y) g^{\beta}_{|X}(h(y))} \\
&= e^{2\pi i \gamma_{|Y}(y) g(h(y))},
\end{aligned}$$
donde $\gamma_{|Y} : Y \rightarrow \{-1, 1\}$ es una aplicación continua.

□

Concluyendo,

Teorema 3.5.6 *Sean X e Y espacios topológicos 1AN Hausdorff y sea $H : C_u(X, \mathbb{T}) \longrightarrow C_u(Y, \mathbb{T})$ un isomorfismo topológico separador, con los grupos $C(X, \mathbb{T})$ y $C(Y, \mathbb{T})$ dotados de la topología de la convergencia uniforme. Entonces existen una aplicación continua $\beta : Y \rightarrow \{-1, 1\}$ y un homeomorfismo $h : Y \rightarrow X$ tales que si $f \in C_u(X, \mathbb{R})$ e $y \in Y$,*
$$(He^{2\pi i f})(y) = e^{2\pi i f(h(y))\beta(y)}.$$

-Demostración-
De la Proposición 3.5.5 y de los comentarios hechos tras la Proposición 3.5.2, obtenemos la tesis de este resultado. □

3.5.2. X e Y realcompactos

Suponemos en esta sección que los espacios X e Y son realcompactos y Hausdorff. Por definición, un espacio X es *realcompacto*, si todo ideal maximal real de $C(X)$ es fijo, es decir, si la intersección de los conjuntos cero de dicho ideal es distinta del conjunto vacio. Otra caracterización sería la siguiente: un espacio X es *realcompacto* si, y sólo si, todo z-ultrafiltro real es fijo. Este tipo de espacios juegan el mismo papel en la teoría de $C(X)$ que los espacios compactos en la teoría de $C^*(X)$, el espacio de las funciones reales continuas acotadas. En [46], encontramos la siguiente definición de espacio realcompacto:

Definición 3.5.7 *Un espacio topológico X se dice que es* realcompacto*, si X es completamente regular y si no existe ningún otro espacio completamente regular $\tilde{X}$ que satisfaga las siguientes condiciones:*

(RC1) Existe una inmersión $\tau : X \to \tilde{X}$, que además es un homeomorfismo, tal que $\tau(X) \neq \overline{\tau(X)} = \tilde{X}$.

(RC2) Para toda función real continua $f : X \to \mathbb{R}$ existe una función continua $\tilde{f} : \tilde{X} \to \mathbb{R}$ tal que $\tilde{f} \circ \tau = f$.

Es conocido el siguiente resultado (de [61]):

Teorema 3.5.8 *Dos espacios realcompactos X e Y son homeomorfos si, y sólo si, $C(X)$ y $C(Y)$ son isomorfos como anillos.*

Lo que vamos a probar a continuación es el equivalente para los grupos de funciones continuas evaluadas en $\mathbb{T}$, más concretamente, para aquellas funciones que tienen la forma $e^{2\pi i f}$ con $f \in C(X, \mathbb{R})$. Pero antes de nada, veremos un par de resultados que relacionan a los espacios realcompactos con la compactación de Stone-Čech (en [61]):

Teorema 3.5.9 *Las siguientes condiciones sobre un punto $p \in \beta X$ son equivalentes:*

1. *$M^p := \{f \in C(X) : \ f^\beta(p) = 0\} = \{f \in C(X) : \ p \in cl_{\beta X} Z_X(f)\}$ es real, esto es, el cociente $C(X)/M^p$ es isomorfo a $\mathbb{R}$ como cuerpo.*

2. *Si $f \in C(X)$, entonces ésta se puede ver como una función continua de X en la compactación de Alexandroff de $\mathbb{R}$. Llamamos, por tanto, $f^* : \beta X \to \mathbb{R}^*$ a la extensión de f a βX, pero tomando valores en $\mathbb{R}^*$ que es compacto. Entonces,*

$$f^*(p) \neq \infty.$$

   para toda $f \in C^*(X)$.

3. *$f^*(p) = M^p(f)$ para toda $f \in C(X)$, con $M^p(f)$ la clase de f en $C(X)/M^p$.*

4. *Si $f^*(p) = 0$, entonces $M^p(f) = 0$, i.e., $f \in M^p$ para toda $f \in C(X)$.*

El conjunto de todos los puntos de βX que verifiquen una y por tanto, todas las afirmaciones de este Teorema 3.5.9 se denota por νX. Como consecuencia, se puede probar también que νX es el subespacio más grande de βX en el que X está C-inmerso y es, además, el espacio realcompacto más pequeño entre X y βX. En particular, X es realcompacto si, y sólo si, $X = \nu X$. De [46] tenemos el siguiente resultado del que incluimos la demostración:

Teorema 3.5.10 *Un espacio topológico completamente regular X es realcompacto si, y sólo si, para todo punto $x_0 \in \beta X \setminus X$ existe una función continua $h : \beta X \to [0, 1]$ cumpliendo $h(x_0) = 0$ y $h(x) > 0$ para todo $x \in X$.*

-Demostración-
($\Rightarrow$) Sean X un espacio realcompacto y $x_0 \in \beta X \setminus X$. Como $\tilde{X} := X \cup \{x_0\} \subseteq \beta X$ verifica la condición (RC1) de la Definición 3.5.7, entonces no puede verificar la otra condición de dicha definición, con lo que existe una función continua $f : X \to \mathbb{R}$ que no se extiende de forma continua sobre $\tilde{X}$. Podemos suponer que $f(x) \geq 1$ para todo $x \in X$, luego la función $\frac{1}{f} : X \to [0, 1]$ se extiende a una función continua $h : \beta X \to [0, 1]$ que obviamente satisface $h(x) > 0$ para todo $x \in X$. Si $h(x_0) \neq 0$, podríamos definir una extensión continua de f, $\tilde{f} : \tilde{X} \to \mathbb{R}$, de esta forma $\tilde{f}(x) = 1/h(x)$. Contradicción, porque estábamos suponiendo que f no admitía extensión continua a $\tilde{X}$. Por tanto, $h(x_0) = 0$.
($\Leftarrow$) Supongamos ahora que para todo punto $w \in \beta X \setminus X$ existe una función continua $h_w : \beta X \to [0, 1]$ tal que $h_w(w) = 0$ y $h_w(x) > 0$ para todo $x \in X$. Entonces, tenemos que

$$X = \cup_{w \in \beta X \setminus X} h_w^{-1}(]0, 1]),$$

luego X es realcompacto, ya que las imágenes inversas de subespacios realcompactos en un realcompacto, como lo es en este caso βX, siguen siendo realcompactos, así como la intersección de realcompactos (véase, por ejemplo, [46]). $\square$

Al igual que en la Sección anterior (3.5.1), partimos de un isomorfismo topológico separador

$$H : C_u(X, \mathbb{T}) \longrightarrow C_u(Y, \mathbb{T}),$$

donde los grupos de funciones continuas $C(X, \mathbb{T})$ y $C(Y, \mathbb{T})$ están dotados de la topología de la convergencia uniforme, de ahí que los denotemos de esa forma. Así pues, extendemos H al siguiente homomorfismo

$$H^\beta : C(\beta X, \mathbb{T}) \longrightarrow C(\beta Y, \mathbb{T}),$$

que actúa tal y como se describió en la Sección anterior, es decir, si $f \in C(\beta X, \mathbb{T})$, entonces $H^\beta(f) := (Hf_{|X})^\beta$. De hecho, podemos aplicar aquí la Proposición 3.5.2 y obtenemos que H^β sigue siendo un isomorfismo topológico separador. De esta forma, podemos aplicarle a H^β el Teorema 3.2.14, con lo que obtenemos que existen una aplicación continua $\gamma : \beta Y \to \{-1, 1\}$ y un homeomorfismo biyectivo $h^\beta : \beta Y \to \beta X$ tales que

$$(H^\beta e^{2\pi i f})(w) = e^{2\pi i \gamma(w) f(h^\beta(w))}, \tag{3.24}$$

para $f \in C(\beta X, \mathbb{R})$ y $w \in \beta Y$. Lo único que queda por probar es que $h^\beta_Y(Y) = X$. Con el fin de obtener un resultado similar al Teorema 3.5.6, necesitaremos, pues, la siguiente propiedad sobre el isomorfismo topológico separador H y para ello, recordamos la notación $N(f)$ con la que llamamos al conjunto de puntos donde f se anula, el *conjunto cero* de f. Cabe destacar que en la Sección 4.3.1 del Capítulo 4 se introducirá el mismo concepto pero para espacios de funciones continuas evaluadas en $\mathbb{K}$. Por tanto,

Definición 3.5.11 *Se dice que un homomorfismo $T : C(X, \mathbb{T}) \to C(Y, \mathbb{T})$* preserva funciones que no se anulan*, si se da:*

$$N(f) = \emptyset \Rightarrow N(Tf) = \emptyset,$$

Con otras palabras, si $f \in C(X, \mathbb{T})$ no se anula en ningún punto, entonces su imagen por T tampoco. Cabe destacar que esta propiedad está bien definida para otros espacios de funciones continuas; de hecho, en la Sección 4.3.1 del Capítulo 4 se introducirá el mismo concepto para espacios de funciones continuas evaluadas en $\mathbb{K}$. Así pues,

Proposición 3.5.12 *Sean X e Y espacios realcompactos Hausdorff y sea, además, $H : C_u(X, \mathbb{T}) \to C_u(Y, \mathbb{T})$ un isomorfismo topológico separador. Supongamos que tanto H como su homomorfismo inverso H^{-1} preservan funciones que no se anulan. Si extendemos H a $H^\beta : C(\beta X, \mathbb{T}) \to C(\beta Y, \mathbb{T})$, entonces, la aplicación h^β, definida en (3.24) verifica*

$$h^\beta_{|Y}(Y) = X.$$

-Demostración-

($\subseteq$) Supongamos que existe $y_0 \in Y$ tal que $h^\beta_{|}(y_0) \in \beta X \setminus X$. Por el Teorema 3.5.10, existe una aplicación continua $g : \beta X \to [0, 1]$ tal que

$$g(h^\beta_{|Y}(y_0)) = 0 \text{ y además, } g(x) > 0 \ \forall x \in X.$$

Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $g(x) \in]0, 1[$, ya que en otro caso, cogeríamos $a \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap]0, 1[$ y seguiríamos trabajando con $g' := ag$. Entonces,

$$e^{2\pi i g(h^\beta_{|Y}(y_0))} = 1_{\mathbb{T}} \text{ y } e^{2\pi i g}(x) \neq 1_{\mathbb{T}} \ \forall x \in X.$$

Como $e^{2\pi i g_{|X}}(x) \neq 1_{\mathbb{T}}$ para todo $x \in X$, esto quiere decir que $N(e^{2\pi i g_|}) = \emptyset$. Entonces, como H preserva funciones que no se anulan (Definición 3.5.11), obtenemos que $N(H(e^{2\pi i g_|})) = \emptyset$. Así pues,

$$(He^{2\pi i g_{|X}})(y) \neq 1_{\mathbb{T}} \ \forall y \in Y,$$

luego,

$$\begin{aligned} 1_{\mathbb{T}} &= e^{2\pi i g(h^\beta_|(y_0))} \\ &= (H^\beta e^{2\pi i g})_{|Y}(y_0) \\ &= ((He^{2\pi i g_|})^\beta)_{|Y}(y_0) \\ &= (He^{2\pi i g_|})(y_0) \neq 1_{\mathbb{T}}, \end{aligned}$$

y hemos llegado a una contradicción, de la que se deduce que para todo $y \in Y$, $h^{\beta}_{|Y}(y) \in X$.

($\supseteq$) Sea, pues, $x_0 \in X$, pero suponemos que x_0 no pertenece a $h^{\beta}_{|Y}(Y)$, es decir, $y_0 := (h^{\beta}_{|Y})^{-1}(x_0) \in \beta Y \setminus Y$. Por el Teorema 3.5.10, sabemos que existe $f : \beta Y \to [0,1]$ continua tal que $f(y_0) = 0$ y además, $f(y) > 0$ para todo $y \in Y$. De igual forma, podemos suponer que $f(Y) \subseteq]0,1[$, en otro caso trabajaríamos con $f' := bf$, donde $b \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap]0,1[$. Entonces,

$$e^{2\pi i f}(y_0) = 1_{\mathbb{T}} \text{ y } e^{2\pi i f}(y) \neq 1_{\mathbb{T}} \ \forall y \in Y,$$

y además, $e^{2\pi i f} \in C^o(\beta Y, \mathbb{T})$. Así pues, como H^{β} es sobreyectiva, existe $g \in C^o(\beta X, \mathbb{R})$ tal que

$$H^{\beta}(e^{2\pi i g}) = e^{2\pi i f}.$$

Sea, entonces, $y \in Y$,

$$H^{\beta}(e^{2\pi i g})(y) = e^{2\pi i f(y)} \neq 1_{\mathbb{T}};$$

esto quiere decir que $H^{\beta}(e^{2\pi i g})_{|Y} \neq \overline{1}_{\mathbb{T}}$, luego

$$(He^{2\pi i g_{|X}})(y) \neq 1_{\mathbb{T}} \ \forall y \in Y.$$

Por tanto, $N(He^{2\pi i g_{|X}}) = \emptyset$, es decir que $N(e^{2\pi i g_{|X}}) = \emptyset$, por preservar H^{-1} funciones que no se anulan. Pero,

$$e^{2\pi i g_{|X}(x_0)} = e^{2\pi i g_{|X}((h^{\beta}_{|})^{-1}(x_0))} = e^{2\pi i \gamma(y_0) f(y_0)} = 1_{\mathbb{T}},$$

ya que $H^{\beta}(e^{2\pi i g})(w) = e^{2\pi i f(w)} = e^{2\pi i \gamma y g(h^{\beta}(w))}$ para todo $w \in \beta Y$. Esto implica que $N(e^{2\pi i g_{|X}}) \neq \emptyset$. Contradicción. Por tanto, $X \subseteq h^{\beta}_{|Y}(Y)$ y ya hemos obtenido

$$h^{\beta}_{|Y}(Y) = X.$$

$\square$

De esta forma, obtenemos que, si restringimos γ y h^{β} a Y, entonces éstas mantienen sus propiedades, es decir, γ es continua y $h^{\beta}_{|Y}$ es un homeomorfismo biyectivo (Proposición 3.5.12). A partir de ahora, llamaremos

$$h := h^{\beta}_{|Y} \ \text{ y } \ \gamma' := \gamma_{|Y}.$$

Por tanto, podemos afirmar que H se puede representar mediante un homeomorfismo entre los espacios realcompactos X e Y, siempre y cuando trabajemos con las funciones continuas de X en $\mathbb{T}$ que son la exponencial de una función continua de X en $\mathbb{R}$ y esto queda resumido en el siguiente resultado:

Teorema 3.5.13 *Sean X e Y espacios topológicos realcompactos Hausdorff. Sea $H : C_u(X,\mathbb{T}) \longrightarrow C_u(Y,\mathbb{T})$ un isomorfismo topológico separador, donde tanto $C(X,\mathbb{T})$ como $C(Y,\mathbb{T})$ están dotados de la topología de la convergencia uniforme. Supongamos además que tanto H como su aplicación inversa H^{-1} preservan funciones que no se anulan. Entonces existen un homeomorfismo $h : Y \to X$ y una aplicación continua $\gamma' : Y \to X$ tales que*

$$\begin{aligned}(He^{2\pi i f})(y) &= (H^{\beta}e^{2\pi i f})_{|Y}(y)\\ &= e^{2\pi i\gamma'(y)f(h(y))}\end{aligned}$$

para toda $f \in C(X,\mathbb{R})$ e $y \in Y$.

-Demostración-
Gracias a la Proposición 3.5.2 de la Sección 3.5.1, al Teorema 3.2.14 de la Sección 3.2.1 y a la Proposición 3.5.12 llegamos a la tesis de este resultado. □

Capítulo 4

Homomorfismos entre grupos de funciones continuas evaluadas en un grupo G

4.1. Introducción

Sea $C(X, G)$ el grupo de funciones continuas de un espacio topológico X en un grupo topológico G con el producto puntual de funciones como operación de grupo. En este capítulo vamos a investigar hasta qué punto la estructura de grupo de $C(X, G)$ influye y determina la topología de X. El objetivo es encontrar teoremas del tipo Banach-Stone, pero la particularidad en este capítulo radica en que las funciones continuas no están evaluadas en $\mathbb{T}$, sino en un grupo topológico cualquiera. Intentaremos, por tanto, encontrar resultados análogos a lo visto entonces (en el Capítulo 3, cuando se trabaja en el contexto de las aplicaciones separadoras), esto es, veremos que la existencia de un homomorfismo de grupos entre $C(X, G)$ y $C(Y, G)$, con alguna propiedad más, implica que hay una aplicación continua h de Y en X de tal forma que H esté representado canónicamente por h. De nuevo, estamos buscando una extensión del Teorema de Banach-Stone a grupos de funciones continuas evaluadas en un grupo topológico G y para ello, centraremos nuestra atención en la siguiente cuestión: ¿qué tipo de homomorfismos entre los grupos $C(X, G)$ y $C(Y, G)$ se pueden representar mediante aplicaciones continuas definidas entre los espacios X e Y?

En el caso en que G es el cuerpo de los números reales y complejos, o cuando G es un espacio de Banach ([9], [10] ó [69], entre otros), la respuesta a la pregunta planteada anteriormente es conocida, son resultados que ya se pueden considerar clásicos. Más aún, esta cuestión también se ha estudiado en el marco de los cuerpos no Arquimedianos y cuando G es igual a $\mathbb{Z}$; podemos dar buena cuenta de ello en los trabajos [5] y [7], y en [44], [63], [91] y [98], respectivamente.

A partir de ahora, todos los espacios topológicos se suponen que son compactos Hausdorff, a no ser que se especifique lo contrario. Consideraremos a su vez, un grupo topológico Hausdorff cualquiera G y una serie de conceptos que son básicos en este capítulo, entre los que hemos incluido una adaptación de los más importantes de [120] y [121]. Desde el capítulo 3 estamos denotando por δ_x a la aplicación evaluación

$$\begin{array}{rcl}\delta_x : C(X,G) & \to & G \\ f & \mapsto & f(x),\end{array}$$

y aquí no vamos a cambiar esa notación. Llamaremos M_x al núcleo de esta aplicación, que es

$$M_x := \{f \in C(X,G) : \ f(x) = 1_G\}.$$

Para toda $f \in C(X,G)$, denotaremos por

$$N(f) := \{x \in X : f(x) = 1_G\}$$

al conjunto de los puntos de X donde f se anula, es decir, el así llamado *conjunto cero o neutral* de una función f. Si $g \in G$, el símbolo $\overline{\mathbf{g}}$ designará a la función constante que lleva cada punto a la constante g. El espacio de todas las funciones constantes vendrá denotado por $\overline{\mathbf{G}}$ y en cada caso, especificaremos si son funciones constantes sobre X o sobre Y.

Aquí tenemos las primeras definiciones:

Definición 4.1.1 *Sea (X,G) un par compuesto de un espacio topológico X y de un grupo topológico G. Se dice que el par (X,G) es G-*regular*, si para todos subconjunto cerrado C de X, $x \notin C$ y $\alpha \in G$, $\alpha \neq 1_G$, existe $f \in C(X,G)$ tal que $C \subseteq N(f)$ y $f(x) = \alpha$.*

Nota 4.1.2 *Si X es un espacio 0-dimensional, entonces el par (X, G) es G-regular para cualquier grupo topológico G. Por otro lado, si X es un espacio completamente regular y G es arcoconexo (por ejemplo, cuando $G = \mathbb{T}$), entonces el par (X, G) es automáticamente G-regular. En particular, esto implica que para $\{p, q\} \subset X$ (o en Y) cualesquiera cumpliendo $p \neq q$, tenemos que $M_p \neq M_q$.*

-Demostración-
Cuando X es 0-dimensional, el resultado es obvio. Por otro lado, por ser X un espacio completamente regular, dados $F \subset X$ cerrado, $x \notin F$ y $\alpha \in G$, $\alpha \neq 1_G$, entonces existe una aplicación $f \in C(X, \mathbb{R})$ tal que $0 \leq f \leq 1$, y además

$$f(x) = 0 \text{ y } f(F) = \{1\}.$$

Como estamos suponiendo que G es un espacio arcoconexo, entonces existe un arco (continuo) $p : [0, 1] \to G$ tal que $p(0) = \alpha$ y $p(1) = 1_G$. De esta forma, si definimos $\overline{f} := p \circ f$, ésta es continua y verifica efectivamente:

$$\overline{f}(x) = p(f(x)) = p(0) = \alpha \text{ y } \overline{f}(F) = p(f(F)) = p(1) = 1_G,$$

luego el par (X, G) es G-regular.

Sean ahora p, $q \in X$, $p \neq q$. Como X es, en particular, un espacio Hausdorff, entonces existen sendos entornos abiertos U_p y U_q tales que $U_p \cap U_q = \emptyset$. Entonces para $X \setminus U_q$, que es cerrado en X, y $q \notin X \setminus U_q$, dado $\beta \in G$, $\beta \neq 1_G$, existe $g \in C(X, G)$ tal que $F \subseteq N(g)$ y $g(q) = \beta$. Así pues, g es una función continua que verifica que $g(p) = 1_G$, luego $g \in M_p$, pero $g(q) \neq 1_G$. De igual forma, construimos una aplicación de M_q, pero que no pertenece a M_p. Por tanto, siempre podemos encontrar funciones continuas que se anulan en un punto $p \in X$, pero no en un punto $q \neq p$ y efectivamente, $M_p \neq M_q$. □

De aquí en adelante, se asumirá siempre que los pares (X, G) e (Y, G) son G-regulares.

Aquí tenemos una nueva definición:

Definición 4.1.3 *1. Un subgrupo normal M de $C(X, G)$ recibe el nombre de G-*filtro*, si $\{N(f) : f \in M\}$ tiene la propiedad de las intersecciones finitas.*

2. *Un subgrupo normal M de $C(X,G)$ se dice que es un G-*ultrafiltro*, si es maximal respecto a la inclusión de G-filtros.*

Ahora presentamos algunos resultados preliminares que serán necesarios a la hora de dar forma a los más importantes que aparecerán en secciones posteriores.

Proposición 4.1.4 *Sea M un G-filtro de $C(X,G)$. Entonces las siguientes afirmaciones equivalen:*

1. *M es un G-ultrafiltro.*

2. *Si $f \in C(X,G)$ es tal que*

$$N(f) \cap N(f_1) \cap ... \cap N(f_n) \neq \emptyset$$

para toda familia finita $\{f_1, ..., f_n\} \subset M$, entonces $f \in M$.

-Demostración-
1. $\Rightarrow$ 2. Supongamos que existe $g \in C(X,G)$ tal que

$$N(g) \cap N(f_1) \cap ... \cap N(f_n) \neq \emptyset$$

para toda familia finita $\{f_1, ..., f_n\} \subset M$, pero $g \notin M$. De esta forma, el subgrupo normal generado por $\{g\} \cup M$ sería un G-filtro de $C(X,G$ que incluye a M. Sin embargo, por hipótesis sabemos que M es G-ultrafiltro. Contradicción. Por tanto, toda $g \in C(X,G)$ verificando las hipótesis de 2) ha de pertenecer a M.
2. $\Rightarrow$ 1. Denotamos por $\mathcal{U}$ el subgrupo normal generado por $\{f\} \cup M$. Entonces tenemos que un elemento arbitrario u de $\mathcal{U}$ se puede expresar de la siguiente forma:

$$u = h(h_1 f^{\epsilon_1} h_1^{-1} f_1 \dots h_n f^{\epsilon_n} h_n^{-1} f_n) h^{-1},$$

donde $\{f_1, ..., f_n\} \subset M$, $\{h\} \cup \{h_1, ..., h_n\} \subset C(X,G)$ y $\{\epsilon_1, ..., \epsilon_n\} \subset \mathbb{Z}$. Consecuentemente, se verifica fácilmente que $\mathcal{U}$ es un G-filtro. Por tanto, obtenemos que $\mathcal{U} = M$ y esto implica que $f \in M$. Así pues, M es un G-ultrafiltro. $\square$

Por tanto,

Corolario 4.1.5 *El subgrupo M_p de $C(X, G)$, definido al comienzo de esta sección, es un G-ultrafiltro para todo punto p de X.*

-Demostración-
Nuestra intención es aplicar la Proposición 4.1.4. Para ello, sea $f \in C(X, G)$ tal que

$$N(f) \cap N(f_1) \cap ... \cap N(f_n) \neq \emptyset$$

para toda familia finita $\{f_1, ..., f_n\} \subset M_p$. Lo que queremos comprobar es que efectivamente $f \in M_p$. Asumiendo lo contrario, suponemos que $f(p) = \alpha \neq 1_G$; así pues, definimos otra aplicación de la siguiente forma: $g = \alpha^{-1} f$. Claramente, g pertenece a M_p y además, $N(f) \cap N(g) = \emptyset$. Pero esto, a su vez, es una contradicción con lo que habíamos supuesto al comienzo. Por tanto, f ha de pertenecer a M_p y por la Proposición 4.1.4 ya obtenemos que M_p es un ultrafiltro de $C(X, G)$ para todo elemento $p \in X$. □

En particular, si X es compacto:

Proposición 4.1.6 *Sea X un espacio topológico compacto y sea G un grupo topológico cualquiera. Entonces, para todo G-ultrafiltro $\mathcal{U} \subseteq C(X, G)$ existe $p \in X$ cumpliendo que $\mathcal{U} = M_p$, es decir, todo G-ultrafiltro de $C(X, G)$ es núcleo de una aplicación evaluación δ_p con $p \in X$.*

-Demostración-
Como X es un espacio compacto, obtenemos que

$$K := \cap_{f \in \mathcal{U}} N(f) \neq \emptyset.$$

Cogemos $p \in K$, entonces $p \in N(f)$ para toda $f \in \mathcal{U}$, con lo que llegamos a que $\mathcal{U} \subseteq M_p$. Gracias a que $\mathcal{U}$ es un G-ultrafiltro y M_p un G-filtro por su propia definición (más aún, es G-ultrafiltro), tenemos que $\mathcal{U} = M_p$, y esto completa la demostración. □

4.2. Representación de homomorfismos de grupos

A lo largo de esta sección, supondremos que tanto X como Y son espacios topológicos compactos Hausdorff y G un grupo topológico cualquiera. Tal y como se ha visto en anteriores capítulos, partimos de un homomorfismo

$$H : C(X, G) \longrightarrow C(Y, G)$$

y queremos ver bajo qué condiciones H se puede representar mediante una aplicación continua h entre los espacios Y y X. Cuando supongamos más adelante que H sea continua, entonces los grupos $C(X,G)$ and $C(Y,G)$ estarán dotados de la topología de la convergencia uniforme. Notemos además que si Y está compuesto de un único elemento, entonces el grupo G se puede identificar con un grupo topológico de la forma $C(Y,G)$.

En primer lugar, introduciremos un par de definiciones que serán necesarias en lo que resta de capítulo y que conciernen a H, el homomorfismo de grupos entre $C(X,G)$ y $C(Y,G)$ del que estamos partiendo.

Definición 4.2.1 *Se dice que H* conmuta con los endomorfimos continuos *de G, si para todo $\theta \in End(G)$ y para toda $f \in C(X,G)$, tenemos que $H(\theta \circ f) = \theta \circ (Hf)$.*

Definición 4.2.2 *Se dice que H es un* C-homomorfismo*, si existe una sección cruzada continua ψ, que además es un homomorfismo de grupos, de $\overline{\mathbf{G}} \subseteq C(Y,G)$ en $C(X,G)$, es decir, la aplicación $H \circ \psi$ es la identidad de funciones sobre $\overline{\mathbf{G}}$:*

$$\overline{\mathbf{G}} \xrightarrow{\Psi} C(X,G) \xrightarrow{H} C(Y,G) \quad y \quad (H \circ \Psi)_{|\overline{\mathbf{G}}} = Id_{|\overline{\mathbf{G}}}$$

Nota 4.2.3 *Cuando H lleva aplicaciones constantes sobre X sobre las correspondientes aplicaciones constantes sobre Y, es decir, cuando*

$$H(\overline{\alpha}) = \overline{\alpha}$$

para todo $\alpha \in G$, o, cuando H^{-1} es un homomorfismo continuo, siempre se tiene que H es un C-homomorfismo.

-Demostración-
Si H lleva las aplicaciones constantes sobre X en las correspondientes sobre Y, podemos coger como sección cruzada continua a la aplicación identidad $Id : \overline{\mathbf{G}} \subseteq C(Y,G) \longrightarrow C(X,G)$ que claramente verifica que $H \circ Id = Id_{\overline{\mathbf{G}}}$.

Por otro lado, si existe la inversa de H y además es un homomorfismo continuo, entonces la sección cruzada continua para H no es otra más que su homomorfismo inverso, que claramente verifica que $H \circ H^{-1} = Id_{\overline{\mathbf{G}}}$.

En cualquier caso, H es un C-homomorfismo.

□

Definición 4.2.4 *Se dice que H es* non-vanishing *o* no anulante*, si conserva familias finitas de funciones con conjuntos neutrales disjuntos (conjuntos cero). Esto es: para toda familia finita $\{f_1, \ldots, f_n\} \subset C(X,G)$ cumpliendo $N(f_1) \cap \ldots \cap N(f_n) = \emptyset$, entonces se tiene que*

$$N(H(f_1)) \cap \ldots \cap N(H(f_n)) = \emptyset.$$

El siguiente resultado es esencial a la hora de definir la aplicación continua está asociada al homomorfismo $H : C(X,G) \to C(Y,G)$ que conmutará con los endomorfismos, aquella que representará a H como en el Teorema clásico de Banach-Stone.

Proposición 4.2.5 *Sean X un espacio topológico compacto Hausdorff y G un grupo topológico tales que el par (X,G) es G-regular. Si $M \subseteq C(X,G)$ es un G-filtro y además es el núcleo de un C-homomorfismo $\phi : C(X,G) \longrightarrow G$ que conmuta con los endomorfismos continuos de G, entonces existe un único $p \in X$ tal que $M \subseteq M_p$.*

-Demostración-
Como M es un G-filtro, entonces éste está contenido en un G-ultrafiltro por el Lema de Zorn. Por tanto, la existencia de un punto $p \in X$ tal que $M \subset M_p$ está clara (Proposición 4.1.6). Para probar la unicidad, vamos a proceder por reducción al absurdo. Por ello, asumimos que existen p, $q \in X$, $p \neq q$, tales que $M \subseteq M_p \cap M_q$, con $M \subsetneq M_p$ y $M \subsetneq M_q$. Hacemos notar en primer lugar que la aplicación evaluación

$$\begin{array}{rcl} \delta_q : C(X,G) & \longrightarrow & G \\ f & \longmapsto & f(q) \end{array}$$

mantiene la propiedad de la sobreyectividad aunque restrinjamos δ_q a M_p. Para ello cogemos g un elemento de G distinto de la identidad 1_G de G. Como p y q son puntos distintos de X y éste es Hausdorff, podemos encontrar entornos abiertos U_p y U_q de p y q, respectivamente, tales que $U_p \cap U_q = \emptyset$. Gracias a la propiedad del par (X,G) de ser G-regular, construimos una aplicación $f \in C(X,G)$ tal que

$$f(X \setminus U_q) = \{1_G\} \text{ y } f(q) = g.$$

Esta aplicación es continua y verifica que $f \in M_p$, ya que $p \in X \backslash U_q$. Además, $\delta_q(f) = f(q) = g$, luego δ_q, restringida a M_p, sigue siendo sobreyectiva. Así pues, debido al primer teorema de isomorfía, tenemos que

$$\frac{M_p}{M_q} \simeq G,$$

donde por $\simeq$ denotamos que el isomorfismo es de grupos, o equivalentemente,

$$\frac{M_p}{M_p \cap M_q} \simeq G.$$

Por hipótesis, sabemos también que existe un C-homomorfismo $\phi : C(X,G) \to G$ y veamos que además es sobreyectivo. Por ser ϕ un C-homomorfismo, existe una sección cruzada continua $\Psi : \overline{\mathbf{G}} \to C(X,G)$ tal que $\phi \circ \Psi = Id_{\overline{\mathbf{G}}}$. Entonces, si $g \in G$, obtenemos que el elemento $\Psi(\overline{\mathbf{g}}) \in C(X,G)$ es aquel que verifica

$$\phi(\Psi(\overline{\mathbf{g}})) = g.$$

Por tanto, el C-homomorfismo ϕ también es una aplicación sobreyectiva. Por otro lado, construimos la aplicación ϕ_M

$$C(X,G) \xrightarrow{\pi_M} \frac{C(X,G)}{M} \xrightarrow{\phi_M} G,$$

de forma que $\phi = \phi_M \circ \pi_M$, donde π_M es una aplicación cociente. Así pues, podemos afirmar por el primer Teorema de Isomorfía que

$$\frac{C(X,G)}{M} \overset{\phi_M}{\simeq} G$$

es un isomorfismo y también tiene una sección cruzada continua, ya que ϕ la tenía.

Llegados a este punto y con el fin de simplificar, vamos a introducir alguna notación. Por $\overline{\delta}_q$ denotamos la siguiente aplicación cociente:

$$\begin{array}{rcl} \overline{\delta}_q : \dfrac{C(X,G)}{M_q} & \to & G \\ fM_q & \mapsto & f(q), \end{array}$$

que es un isomorfismo (primer Teorema de Isomorfía).

Por tanto, tenemos la siguiente cadena de isomorfismos (de grupos),

$$G \overset{\overline{\delta}_q}{\simeq} \frac{C(X,G)}{M_q} \overset{\text{3T.Isom}}{\simeq} \frac{\frac{C(X,G)}{M}}{\frac{M_q}{M}} \overset{\phi_M}{\simeq} \frac{G}{\phi_M(\frac{M_q}{M})} \tag{4.1}$$

La información principal que obtenemos de esta cadena es que

$$G \simeq \frac{G}{\phi_M(\frac{M_q}{M})}, \tag{4.2}$$

como también que

$$\phi_M(\frac{M_q}{M}) \neq 1_G, \tag{4.3}$$

ya que $\frac{M_q}{M} \neq 1$ y ϕ_M es inyectiva. Más aún, de (4.2), se sigue que $\phi_M(\frac{M_q}{M}) \neq G$ porque, de otra forma, tendríamos que G estaría compuesto de un único elemento y no es el caso. Lo mismo ocurre con la aplicación evaluación

$$\begin{array}{rcl} \delta_p : C(X,G) & \to & G \\ f & \mapsto & f(p), \end{array}$$

es decir, $\overline{\delta}_p : \frac{C(X,G)}{M_p} \to G$ es un isomorfismo y como antes, $G \cong \frac{G}{\phi_M(\frac{M_p}{M})}$, de tal forma que

$$\phi_M(\frac{M_p}{M}) \neq 1_G \text{ y } \phi_M(\frac{M_p}{M}) \neq G. \tag{4.4}$$

Después de todos estos preliminares, estamos en condiciones de construir el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} C(X,G) \arrow[r, "\delta_q"] \arrow[d, "\pi_M"'] & G \\ \frac{C(X,G)}{M} \arrow[r, "\overline{\pi}_{M_q}"'] & \frac{C(X,G)}{M_q} \arrow[u, "\overline{\delta}_q"'] \end{tikzcd}$$

donde π_M es una aplicación canónica cociente así como $\overline{\pi}_{M_q}$. A partir de ahora, nos vamos a centrar en la aplicación

$$\begin{array}{rcl} \overline{\pi}_{M_q} : \dfrac{C(X,G)}{M} & \longrightarrow & \dfrac{C(X,G)}{M_q} \\ fM & \longmapsto & fM_q, \end{array}$$

Entonces, si $f, g \in C(X,G)$ son tales que $fg^{-1} \in M$, como $M \subsetneq M_q$, se tiene que $fg^{-1} \in M_q$, luego $\overline{\pi}_{M_q}$ está bien definida. Restringimos el diagrama a M_p y de esta forma obtenemos

$$\begin{tikzcd} M_p \arrow[r, "\delta_q"] \arrow[d, "\pi_M"'] & G \\ \frac{M_p}{M} \arrow[r, "\overline{\pi}_{M_q}"'] & \frac{M_p}{M_p \cap M_q} \arrow[u, "\overline{\delta}_q"'] \end{tikzcd}$$

Ahora le añadimos una rama más al último diagrama que queda así:

$$
\begin{tikzcd}
M_p \arrow[r, "\pi_M"] & \frac{M_p}{M} \arrow[r, "\overline{\pi}_{M_q}"] \arrow[d, shift left, "\phi_M"] & \frac{M_p}{M_p \cap M_q} \arrow[d, "\overline{\delta}_q"] \\
& \phi_M(\frac{M_p}{M^y}) \arrow[u, shift left, "\phi_M^{-1}"] & G
\end{tikzcd}
$$

Así pues, construimos la siguiente cadena de aplicaciones:

$$\phi_M(\frac{M_p}{M}) \xrightarrow{\phi_M^{-1}} \frac{M_p}{M} \xrightarrow{\overline{\pi}_{M_q}} \frac{M_p}{M_p \cap M_q} \xrightarrow{\overline{\delta}_q} G, \tag{4.5}$$

Tras lo visto en (4.4), podemos encontrar $\alpha \in G \setminus \phi(M_p)$. Sin embargo, gracias a la sobreyectividad de las aplicaciones en (4.5), existe $\beta \in \phi_M(\frac{M_p}{M})$ tal que

$$(\overline{\delta}_q \circ \overline{\pi}_{M_q} \circ \phi_M^{-1})(\beta) = \alpha.$$

Llamamos $\Psi : \overline{\mathbf{G}} \longrightarrow C(X, G)$ a la sección cruzada continua para ϕ, que hace que éste sea un C-homomorfismo. Entonces, $\psi(\beta) \in \phi^{-1}(\beta)M$ y, consecuentemente, $(\pi_M \circ \psi)(\beta) = \phi_M^{-1}(\beta)$. Por tanto,

$$(\overline{\delta}_q \circ \overline{\pi}_{M_q} \circ \pi_M \circ \psi)(\beta) = \alpha.$$

De esta forma, tenemos un homomorfismo continuo $\Upsilon : G \to G$, definido así:

$$\Upsilon := \overline{\delta}_q \circ \overline{\pi}_{M_q} \circ \pi_M \circ \psi,$$

y que verifica $\Upsilon(\beta) = \alpha$. Por otra parte, sabemos que existe $f \in M_p$ tal que $\beta = \phi_M(fM) = \phi(f)$, ya que β es un elemento de $\phi_M(\frac{M_p}{M})$. Este último hecho da lugar a que

$$\alpha = \Upsilon(\beta) = \Upsilon(\phi(f)).$$

Por hipótesis, tenemos que ϕ conmuta con los endomorfismos continuos de G, luego

$$\alpha = \phi(\Upsilon \circ f).$$

Así pues, $\Upsilon \circ f \in M_p$, ya que $(\Upsilon \circ f)(p) = \Upsilon(f(p)) = \Upsilon(1_G) = 1_G$. Sin embargo, el elemento α tenía que verificar que

$$\alpha \in G \setminus \phi(M_p).$$

Ya hemos llegado a la contradicción que completa la demostración. Por tanto, para todo G-filtro M cumpliendo las hipótesis existe un único $p \in X$ tal que $M \subseteq M_p$. $\square$

Cuando el homomorfismo $\phi : C(X,G) \to G$ envía aplicaciones constantes sobre Y en las correspondiente constante de G, obtenemos como consecuencia el siguiente resultado:

Corolario 4.2.6 *Sea X un espacio topológico compacto Hausdorff, G un grupo topológico y M un G-filtro de $C(X,G)$. Si M es el núcleo de un homomorfismo $\phi : C(X,G) \longrightarrow G$ que verifica que $\phi(\overline{c}) = c$, para todo $c \in G$, entonces tenemos que existe un único $p \in X$ tal que $M \subset M_p$.*

-Demostración-
El objetivo es aplicar la Proposición 4.2.5, por lo que iremos comprobando que se dan cada una de las hipótesis.

En primer lugar, pues, como todo G-filtro está contenido en algún G-ultrafiltro (Lema de Zorn), la existencia de dicho punto $p \in X$ tal que $M \subset M_p$ está clara.

Por otra parte, la aplicación identidad de funciones definida desde $\overline{\mathbf{G}} \subseteq C(X,G)$ en $C(X,G)$ nos lleva a una sección cruzada continua para ϕ. Por tanto, para aplicar la Proposición 4.2.5, tenemos que verificar que ϕ conmuta con los endomorfismos continuos de G. Más aún, será suficiente con que probemos que $\theta \circ f \in M$ para toda $f \in M$ y para todo endomorfismo $\theta \in End(G)$.

AFIRMACIÓN 1 *Para toda $f \in M$ y para todo $\theta \in End(G)$, se tiene que $\theta \circ f \in M$.*

Supongamos, pues, que existen $\theta \in End(G)$ y $f \in M$ tales que $\theta \circ f \notin M$. Entonces obtenemos que

$$\phi(\theta \circ f) = \beta \neq 1_G,$$

ya que M es el núcleo de ϕ. Luego, $(\theta \circ f)\overline{\beta^{-1}} \in M$ y, como consecuencia,

$$(\theta \circ f)\overline{\beta^{-1}} \in M_p.$$

Este hecho implica que $(\theta \circ f) \notin M_p \supseteq M$. Contradicción. Así pues, $\theta \circ f \in M$ para toda $f \in M$ y para todo endomorfismo $\theta \in End(G)$.

AFIRMACIÓN 2 *Para toda $f \in M$ y para todo $\theta \in End(G)$ se tiene que $\phi(\theta \circ f) = (\theta \circ \phi)(f)$*

Sean, entonces, $f \in M$ y $\theta \in End(G)$, luego $\theta \circ f \in M$ para todo $\theta \in End(G)$ por la **Afirmación 1**. Entonces,

$$\phi(\theta \circ f) = 1_G,$$

ya que $\theta \circ f \in M = \ker(\phi)$. Por otro lado,

$$(\theta \circ \phi)(f) = \theta(\phi(f)) = \theta(1_G) = 1_G,$$

por ser $f \in M$ y $\theta \in End(G)$, luego son iguales, es decir, $\phi(\theta \circ f) = (\theta \circ \phi)(f) = 1_G$.

Finalmente:
AFIRMACIÓN 3 *El homomorfismo ϕ conmuta con los endomorfismos continuos de G.*

Por la **Afirmación 2** ya sabemos que para los elementos de M ϕ conmuta con los endomorfismos de G. Sea, entonces, $f \in C(X, G) \setminus M$, entonces

$$\phi(f) = g \neq 1_G, \tag{4.6}$$

con lo que $\phi(f)g^{-1} = 1_G$. Como, por hipótesis, ϕ lleva aplicaciones constantes sobre X en el elemento de G correspondiente, entonces (4.6) queda así:

$$\phi(f\overline{g^{-1}}) = 1_G.$$

Así pues, $f\overline{g^{-1}} \in M$ y le aplicamos lo que acabamos de demostrar para las funciones que pertenecen a M:

$$(\theta \circ \phi)(f\overline{g^{-1}}) = \phi(\theta \circ (f\overline{g^{-1}})) = 1_G.$$

Por un lado, tenemos que

$$(\theta \circ \phi)(f\overline{g^{-1}}) = \theta(\phi(f\overline{g^{-1}})) = \theta(\phi(f))\theta(\phi(\overline{g^{-1}})),$$

y por otro,

$$\phi(\theta \circ (f\overline{g^{-1}})) = \phi((\theta \circ f)(\theta \circ \overline{g^{-1}})) = \phi(\theta \circ f)\phi(\theta \circ \overline{g^{-1}}).$$

Como $\phi(\theta \circ \overline{g^{-1}}) = \theta(\phi(\overline{g^{-}}))$, por llevar ϕ aplicaciones constantes en esa constante y ser θ un endomorfismo de G, entonces obtenemos finalmente que $\phi(\theta \circ f) = (\theta \circ \phi)(f)$ sea cual sea $f \in C(X, G)$ y $\theta \in End(G)$, es decir, ϕ es un C-homomorfismo y ya podemos aplicar la Proposición 4.2.5, con lo que existe un único punto $p \in X$ tal que $M \subseteq M_p$.

□

Tanto la Proposición 4.2.5 como el Corolario 4.2.6 fijan la demostración de [120, Remark 5], que estaba incompleta (veáse [122]). Por tanto, la afirmación del resultado [120, Theorem 6] de Yang es finalmente correcta. A continuación, vamos a obtener una representación de un cierto tipo de homomorfismo de grupos definidos entre espacios de funciones continuas que es el resultado principal de este Capítulo 4.

Teorema 4.2.7 *Sean X e Y espacios topológicos compactos Hausdorff, G un grupo topológico y sea además $H : C(X,G) \longrightarrow C(Y,G)$ un C-homomorfismo no anulante y que conmute con los endomorfismos continuos de G.*

(a) Entonces existen aplicaciones $h : Y \to X$ y $w : Y \longrightarrow End(G)$ tales que

$$w[y]((Hf)(y)) = f(h(y))$$

siempre que $f \in C(X,G)$ e $y \in Y$.

(b) Si, además, la sección cruzada de H que hace que éste sea un C-homomorfismo es no anulante, el homomorfismo H, restringido a las aplicaciones constantes sobre X, es continuo, y G es un grupo Čech-completo, entonces existen aplicaciones continuas $h : Y \longrightarrow X$ y $w : Y \longrightarrow Aut(G)$ tales que

$$(Hf)(y) = w[y]^{-1}(f(h(y))),$$

y además, H es continuo.

-Demostración-

(a) Para empezar, fijamos un elemento $y \in Y$; si componemos H con la aplicación evaluación δ_y, obtenemos:

$$\delta_y \circ H : C(X,G) \longrightarrow G,$$

de tal forma, que si $f \in C(X,G)$, entonces $(\delta_y \circ H)(f) = (Hf)(y)$. Denotaremos por M^y el núcleo de $\delta_y \circ H$, esto es, $M^y := \{f \in C(X,G) : (Hf)(y) = 1_G\}$, tal y como lo hicimos en el Capítulo 3. Nuestro primer objetivo es encontrar un único punto $p \in X$ tal que $M^y \subseteq M_p$.

Por la Proposición 4.1.6, para probar la existencia de dicho punto $p \in X$, basta con verificar que M^y es un G-filtro de $C(X,G)$, es decir, si para todo subconjunto finito $F \subseteq M^y$ se da que $\{N(f) : f \in F\}$ tiene intersección distinta del conjunto vacío. Procedemos por reducción al absurdo. Por ello, asumimos sin pérdida de generalidad que existen dos funciones f, $g \in M^y$ tales que $N(f) \cap N(g) = \emptyset$. Como H es no anulante, obtenemos que $N(Hf) \cap N(Hg) = \emptyset$. Por otra parte, sabemos que $(Hf)(y) = (Hg)(y) = 1_G$, de tal forma que $y \in N(Hf) \cap N(Hg)$, y esto es imposible. Por tanto, M^y es un G-filtro y en consecuencia, éste está contenido en un G-ultrafiltro $\mathcal{U}$ de $C(X,G)$. Aplicando la Proposición 4.1.6 a $\mathcal{U}$, tenemos que existe un $x \in X$ tal que $\mathcal{U} = M_x$. Así pues, obtenemos que $M^y \subseteq M_x$.

Nos queda por probar que este punto es único. Se verifica fácilmente que $\delta_y \circ H$ es un C-homomorfismo, al serlo H. De esta forma, la Proposición 4.2.5 nos da la unicidad del punto $x \in X$ con la propiedad mencionada anteriormente. De ahí que podamos definir una aplicación $h : Y \longrightarrow X$ tal que $h(y)$ sea el único punto de X que satisface $M^y \subseteq M_{h(y)}$.

Sean ahora $f \in C(X,G)$ e $y \in Y$. Con el objetivo de simplificar los pasos, denotaremos por ϕ^y a la aplicación $\delta_y \circ H$ y α al punto $\phi^y(f) \in G$. Si llamamos Ψ a la sección cruzada continua asociada a H y tomamos $g := \Psi(\overline{\alpha})$ que pertenece a $C(X,G)$, entonces tenemos que

$$\begin{aligned}\phi^y(f \cdot g^{-1}) &= (\delta_y \circ H)(f \cdot g^{-1}) = (Hf)(y)(Hg^{-1})(y) = \alpha(Hg^{-1})(y) \\ &= \alpha(Hg^{-1})(y) = \alpha H(\Psi\overline{\alpha})(y)^{-1} = \alpha\overline{\alpha}(y)^{-1} = 1_G,\end{aligned}$$

ya que Ψ es la sección cruzada continua de H. Como, además, $M^y \subset M_{h(y)}$ y $f \cdot g^{-1} \in M^y$ como acabamos de ver, esto implica que $f(h(y)) = g(h(y))$. Por tanto,

$$f(h(y)) = \Psi[\overline{\alpha}](h(y))$$

o, equivalentemente,

$$f(h(y)) = (\delta_{h(y)} \circ \Psi)(\overline{\phi^{\mathbf{y}}(\mathbf{f})}).$$

Abusando de la notación, definimos, pues,

$$w[y] := \delta_{h(y)} \circ \Psi.$$

Usando de nuevo que $M^y \subset M_{h(y)}$, es fácil de ver que

$$\begin{aligned} w : Y &\longrightarrow End(G) \\ y &\longmapsto w[y] \end{aligned}$$

está bien definida y que $w[y]$ pertenece efectivamente a $End(G)$, ya que si g_1, $g_2 \in G$ e $y \in Y$, entonces

$$\begin{aligned} w[y](g_1 g_2) &= (\delta_{h(y)} \circ \Psi)(\overline{\mathbf{g_1 g_2}}) = \delta_{h(y)}(\Psi(\overline{\mathbf{g_1}})\Psi(\overline{\mathbf{g_2}}))) \\ &= \delta_{h(y)}(\Psi(\overline{\mathbf{g_1}}))\delta(\Psi(\overline{\mathbf{g_2}})) = w[y](g_1)w[y](g_2). \end{aligned}$$

Además, si $y \in Y$, entonces $w[y](1_G) = (\delta_{h(y)} \circ \Psi)(\overline{\mathbf{1}}_{\mathbf{G}}) = \delta_{h(y)}(\overline{\mathbf{1}}_{\mathbf{G}}) = 1_G$. Luego, efectivamente para todo $y \in Y$, $w[y]$ es un endomorfismo de G.

Esto prueba la parte (a).

(b) Por el apartado (a) sabemos que existen aplicaciones $h : Y \to X$ y $w : Y \to End(G)$ tales que

$$w[y](Hf(y)) = f(h(y)) \tag{4.7}$$

para toda $f \in C(X, G)$ e $y \in Y$. Recordamos que w tiene la siguiente forma: $w[y] = \delta_{h(y)} \circ \Psi$. Veamos que para cada $y \in Y$, $w[y]$ es un automorfismo de G en G. Sea $y \in Y$.

- $w[y]$ es sobreyectivo:

  Sea, pues, $g \in G$ y definimos $g' := (H\overline{\mathbf{g}})(y) \in G$. Si utilizamos la representación (4.7) de H, tenemos que

$$w[y](g') = w[y]((H\overline{\mathbf{g}})(y)) = \overline{\mathbf{g}}(h(y)) = g$$

- $w[y]$ es inyectivo:

  Sea $c \in G$ tal que $w[y](c) = 1_G$. Como $w[y]$ tiene la forma $\delta_{h(y)} \circ \Psi$, obtenemos que

$$\Psi(\overline{\mathbf{c}})(h(y)) = 1_G,$$

  esto es, $N(\Psi(\overline{\mathbf{c}})) \neq \emptyset$, y como estamos suponiendo que Ψ es no anulante, entonces $N(\overline{\mathbf{c}}) \neq \emptyset$, luego $\overline{\mathbf{c}} = \overline{\mathbf{1}}_{\mathbf{G}}$.

Por tanto, para cada $y \in Y$, $w[y] \in Aut(G)$ y como consecuencia, podemos calcular su homomorfismo inverso que vuelve a ser un automorfismo. Entonces, de (4.7), se deduce

$$(Hf)(y) = w[y]^{-1}(f(h(y))), \tag{4.8}$$

para todo $y \in Y$. Lo que probaremos a continuación es que para cada $y \in Y$, el automorfismo $w[y]^{-1}$ es continuo. De hecho, notamos que para todo $g \in G$,

$$(H\overline{\mathbf{g}})(y) = w[y]^{-1}(g) \text{ (Ecuación (4.8)).} \tag{4.9}$$

De esta forma, como por hipótesis $H_{|\overline{\mathbf{G}}}$ es continua, se sigue que $w[y]^{-1}$ también lo es.

Con ayuda de esta última afirmación, veamos que H es a su vez continua respecto de la topología de la convergencia puntual. Sea, pues, $(f_n)_n \subseteq C(X,G)$ convergiendo a $f \in C(X,G)$. Como para cada $y \in Y$, el automorfismo $w[y]^{-1}$ es continuo, podemos escoger U, V entornos abiertos de 1_G en G tales que

$$w[y]^{-1}(U) \subseteq V.$$

Por otra parte, para $U \in \mathcal{E}(1_G)$ existe n_0 tal que $f(h(y))f_n(h(y))^{-1} \in U$. De esta forma, $w[y]^{-1}(f(h(y))f_n(h(y))^{-1}) \in V$ para todo $n \geq n_0$, por lo que acabamos de ver, y esto implica que

$$(Hf)(y)(Hf_n)(y)^{-1} \in V \ \forall n \geq n_0,$$

luego $(Hf_n)_n$ converge puntualmente a Hf.

Consideramos entonces la aplicación

$$w^{-1} : Y \longrightarrow Aut_p(G),$$

que a cada $y \in Y$ le hace corresponder el elemento $w[y]^{-1}$ y además, sabemos que $w[y]^{-1}(g) = (H\overline{\mathbf{g}})(y)$. Sea $(y_i)_i \subseteq Y$ una red convergente a $y_0 \in Y$. Entonces, como $H\overline{\mathbf{g}} \in C(Y,G)$, tenemos que

$$(H\overline{\mathbf{g}})(y_i) \rightsquigarrow (H\overline{\mathbf{g}})(y_0),$$

luego $w[y_i]^{-1}(g) \rightsquigarrow w[y_0]^{-1}(g)$. De esta forma, w^{-1} es continua respecto de la topología de la convergencia puntual. Así pues, $w^{-1}[Y]$ es un subconjunto compacto de $Hom_p(G,G)$. Por el Teorema de Corson-Glicksberg (en [36]), que afirma que si todo subgrupo cerrado de un grupo G es un espacio de Baire, entonces $A \subseteq Hom_c(G,K)$ es compacto si, y sólo, si es compacto en $Hom(G_D,K)$, donde K es otro grupo topólogico y G_D es G dotado de la topología discreta, obtenemos que $w^{-1}[Y]$ es compacto en $Hom_c(G,G)$, ya que G es un grupo Čech-completo. De esta forma, $w^{-1}(Y)$ es equicontinuo sobre G y además, H es continua respecto de la topología uniforme. De hecho, dado un entorno $V \in \mathcal{E}(1_G)$ cogemos otro entorno abierto de 1_G tal que

$$w[y]^{-1}(U) \subseteq V \ \forall y \in Y.$$

Sea ahora $(f_n)_n \subseteq C(X,G)$ que converge uniformemente a $f \in C(X,G)$, luego existirá n_1 tal que $f(h(y))f_n(h(y))^{-1} \in U$ uniformemente. Así pues, se deduce que $w[y]^{-1}(f(h(y))f_n(h(y))^{-1}) \in V$ para todo $n \geq n_0$

(uniformemente). Por tanto, (Hf_n) converge uniformemente a Hf y H es continua.

Por otro lado, veamos que la aplicación

$$w : Y \longrightarrow Aut_p(G),$$

es continua también. Consideramos para ello

$$Y \xrightarrow{w^{-1}} Aut_p(G) \xrightarrow{j} Aut_p(G),$$

donde $j(\phi) = \phi^{-1}$. Las aplicaciones j y w^{-1} son continuas, luego $w = j \circ w^{-1}$ es continua. Así pues, como Y es un espacio compacto, obtenemos que $w[Y]$ es un subconjunto equicontinuo de $Aut(G)$, razonando como se hizo tras la prueba de que w^{-1} es continua. De este hecho se sigue que la aplicación

$$\begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & G \\ y & \longmapsto & w[y](Hf(y)) \end{array}$$

es continua para toda $f \in C(X, G)$. Entonces, de la parte (a) se deduce que la aplicación $y \mapsto (f \circ h)(y)$ es continua para toda $f \in C(X, G)$. Si $(y_i) \subseteq Y$ es una red convergente a $y_0 \in Y$ y suponemos que $(h(y_i))$ no converge a $h(y_0)$, entonces existe una subred, que seguiremos denotando por $(h(y_i))$, que converge a $c \neq h(y_0)$. Como son elementos distintos de X, existen entornos abiertos U y V de c y $h(y_0)$, respectivamente, tales que $U \cap V = \emptyset$. Sea $\alpha \neq 1_G$, entonces para $h(y_0)$ y $X \setminus V$ sabemos que existe una aplicación $F \in C(X, G)$ tal que $F(h(y_0)) = \alpha$ y $F(X \setminus V) = \{1_G\}$, por ser el par (X, G) G-regular. Luego, por un lado tenemos que

$$(F \circ h)(y_i) \rightsquigarrow (F \circ h)(y_0) = \alpha,$$

y por otro,

$$F(h(y_i)) \rightsquigarrow F(c) = 1_G,$$

ya que $c \in X \setminus V$. Como X es Hausdoff, ya hemos llegado a una contradicción que muestra que h es continua.

Esto completa la demostración. $\square$

Corolario 4.2.8 *Sean X e Y espacios topológicos compactos Hausdorff y G un grupo Čech-completo, y sea $H : C(X,G) \longrightarrow C(Y,G)$ un homomorfismo. Si, además, H y H^{-1} son no anulantes y ambos son homomorfismos continuos cuando los restringimos a $\overline{\mathbf{G}}$, entonces existe un homeomorfismo $h : Y \longrightarrow X$ y una aplicación $w : Y \longrightarrow Aut(G)$ tales que*

$$(Hf)(y) = w[y]^{-1}(f(h(y))),$$

y además, H es continuo.

-Demostración-
Si H y H^{-1} son no anulantes, entonces tenemos automáticamente 2 secciones cruzadas

$$\Psi : \overline{\mathbf{G}} \to C(X,G)$$

y

$$\Phi : \overline{\mathbf{G}} \to C(Y,G)$$

definidas tal que $\Psi(\overline{\mathbf{g}}) := H^{-1}(\overline{\mathbf{g}})$ y $\Phi(\overline{\mathbf{g}}) := H(\overline{\mathbf{g}}^{\mathbf{-1}})$. Esto implica que tanto H como H^{-1} son C-homomorfismos y las secciones cruzadas continuas son a su vez no anulantes. Aplicamos el Teorema 4.2.7 (parte (b)) a H y H^{-1}, y obtenemos que existen aplicaciones continuas $h : Y \to X$, $k : X \to Y$, $w : Y \to Aut(G)$ y $v : X \to Aut(G)$ tales que

$$(Hf)(y) = w[y]^{-1}(f(h(y)))$$

para toda $f \in C(X,G)$, y

$$(H^{-1}t)(x) = v[y]^{-1}(t(k(x)))$$

para toda $t \in C(Y,G)$. Falta comprobar que h y k son inversas una de la otra. Sea, pues, $y \in Y$, entonces, si $g \in C(Y,G)$, tenemos que

$$\begin{aligned} g(y) = (H \circ H^{-1})(g)(y) &= (H(H^{-1}(g)))(y) = w[y]^{-1}((H^{-1}g)(h(y))) \\ &= w[y]^{-1}(v[h(y)]^{-1}(g(k(h(y))))), \end{aligned}$$

luego $w[y](g(y)) = v[h(y)]^{-1}(g(k(h(y))))$ para todo $y \in Y$ y para toda $g \in C(Y,G)$. Como $w[y]$ y $k(h(y))$ son automorfismos de G, entonces $g(y) = g(k(h(y)))$. Si existiera $y_0 \in Y$ tal que $y_o \neq k(h(y_0))$, entonces existen entornos abiertos U y V de y_0 y $k(h(y_0))$, respectivamente, tales que $U \cap V = \emptyset$. Por tanto, dado $\alpha \neq 1_G$, podemos encontrar $F \in C(Y,G)$ tal que

$$F(y_0) = \alpha \ \text{ y } \ F(Y \setminus U) = \{1_G\},$$

y esto contradice el hecho de que $g(y) = g(k(h(y)))$ para toda $g \in C(Y, G)$). Por tanto, se deduce que para todo $y \in Y$, $k(h(y)) = y$. De la misma forma, se prueba que $h(k(x)) = x$ para todo $x \in X$. Por tanto, h es abierta. $\square$

Nota 4.2.9 *La tesis del Teorema 4.2.7 deja de ser válida si los espacios pierden la propiedad de la compacidad, aunque los resultados pueden ser válidos para k-espacios y μ-espacios. De hecho, para cualquier espacio topológico no compacto X, llamaremos Y a su compactación de Stone-Čech βX. De esta forma, el isomorfismo canónico*

$$\begin{array}{rcl} H : C(X, \mathbb{T}) & \longrightarrow & C(Y, \mathbb{T}) \\ f : & \longmapsto & f^{\beta} \end{array}$$

no se puede representar mediante una aplicación continua $h : Y \to X$. Al final de esta sección, presentaremos ejemplos de aplicaciones H que muestren que la hipótesis de ser no anulante *tampoco se puede eliminar.*

Entonces, para aplicaciones no anulantes, el siguiente Corolario corrige el resultado principal del trabajo [121] cuando trabajamos con espacios compactos y homomorfismos no anulantes.

Corolario 4.2.10 *Sean X e Y espacios topológicos compactos Hausdorff, G un grupo topológico y sea, además, $H : C(X, G) \longrightarrow C(Y, G)$ un homomorfismo no anulante y que coincide con la aplicación identidad de funciones sobre las constantes. Entonces existe una aplicación continua $h : Y \to X$ tal que*

$$(Hf)(y) = f(h(y))$$

siempre que $f \in C(X, G)$ e $y \in Y$, y además, H es continua respecto de la topología de la convergencia uniforme.

-Demostración-

La aplicación identidad sobre $\overline{\mathbf{G}}$ define una sección cruzada continua para H. Por tanto, del Corolario 4.2.6 y del Teorema 4.2.7, obtenemos que para todo $y \in Y$ existe un único $h(y) \in X$ tal que $w[y]((Hf)(y)) = f(h(y))$.

Más aún, es fácil de ver que $w[y]$ es la identidad sobre G sea cual sea $y \in Y$. Sea, pues, $g \neq 1_G$. Entonces

$$w[y](g) = w[y]((H\overline{\mathbf{g}})(y)) = \overline{\mathbf{g}}(h(y)) = g$$

para todo $y \in Y$, luego $w[y] = Id_G$ para todo $y \in Y$. Así pues,

$$(Hf)(y) = f(h(y)),$$

y gracias a que H es, por tanto, una aplicación del tipo Banach-Stone, podemos deducir que es continua respecto de la topología de la convergencia uniforme. De hecho, sea $(f_n)_n \subseteq C(X,G)$ una sucesión de funciones que converge uniformemente a $f \in C(X,G)$. La pregunta es si (Hf_n) convergerá uniformemente a Hf. Sea, pues, $U \in \mathcal{E}(1_G)$. Entonces, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$

$$f(x)f_n(x)^{-1} \in U, \ \forall x \in X.$$

Por otro lado, tenemos que $(Hf)(y)(Hf_n)(y)^{-1} = f(h(y))f_n(h(y))^{-1}$, luego, por lo que acabamos de ver, si $n \geq n_0$,

$$(Hf)(y)(Hf_n)(y)^{-1} = f(h(y))f_n(h(y))^{-1} \in U,$$

para todo $y \in Y$. De igual forma, es de fácil comprobación que $h : Y \to X$ es continua, al ser H una aplicación del tipo Banach-Stone. Sea, pues, $(y_i)_i \subseteq Y$ una red convergente a $y_0 \in Y$. Entonces, la pregunta es si $(h(y_i))_i$ converge a $h(y_0)$. Como $Hf \in C(Y,G)$ para cualquier $f \in C(X,G)$, entonces $((Hf)(y_i))_i$ converge a $(Hf)(y_0)$, esto es, para toda $f \in C(X,G)$,

$$f(h(y_i)) \rightsquigarrow f(h(y_0)).$$

De aquí se deduce que efectivamente, la red $(h(y_i))_i$ converge a $h(y_0)$. Por tanto, h es continua.

$\square$

Hacemos notar que no es necesario que H sea la identidad de funciones sobre las aplicaciones constantes para llegar a la afirmación principal del Corolario 4.2.10. De hecho, el resultado que sigue muestra que es suficiente suponer que $H_{|\overline{\mathbf{G}}}$ sea un isomorfismo topológico sobre $\overline{\mathbf{G}}$.

Corolario 4.2.11 *Sean X e Y espacios topológicos compactos Hausdorff, G un grupo topológico y sea, además, $H : C(X,G) \longrightarrow C(Y,G)$ un homomorfismo no anulante. Si $H_{|\overline{\mathbf{G}}}$ es un isomorfismo topológico sobre $\overline{\mathbf{G}}$, entonces existe una aplicación continua $h : Y \to X$ tal que*

$$(Hf)(y) = H_{|\overline{\mathbf{G}}}(\ \overline{f(h(y))}\ )$$

siempre que $f \in C(X,G)$ e $y \in Y$, y además, H es continuo respecto de la convergencia de la topología uniforme.

-Demostración-
Es suficiente aplicar el Corolario 4.2.10 a la aplicación

$$\begin{array}{rcl} K : C(X,G) & \longrightarrow & C(Y,G) \\ f & \longmapsto & H^{-1}_{|\overline{\mathbf{G}}} \circ (Hf). \end{array}$$

Veamos que ésta verifica las hipótesis del Corolario 4.2.10. En primer lugar, comprobamos que K está bien definida. Efectivamente, sea (y_i) una red de Y convergente a $y_0 \in Y$. Entonces, dada $f \in C(X,G)$, tenemos que

$$(Kf)(y_i) = (H^{-1}_{|\overline{\mathbf{G}}} \circ (Hf))(y_i) = H^{-1}_{|\overline{\mathbf{G}}}(\overline{(Hf)(y_i)});$$

como $Hf \in C(Y,G)$ y $H^{-1}_{|\overline{\mathbf{G}}}$ es un isomorfismo topológico por hipótesis, llegamos a que $(Kf)(y_i)$ converge a $(Kf)(y_0)$, luego para toda $f \in C(X,G)$, $Kf \in C(Y,G)$. Además, dado que tanto H como $H^{-1}_{\overline{\mathbf{G}}}$ son homomorfismos, es evidente que K también lo es.

En segundo lugar, veamos que K es un homomorfismo y esto es evidente debido a que tanto H como $H^{-1}_{|\overline{\mathbf{G}}}$ lo son.

Queda por comprobar que K es no anulante y que actúa como la identidad de funciones sobre las aplicaciones constantes de X en G. Que K es no anulante es consecuencia directa de la propiedad de $H_{\overline{\mathbf{G}}}$ de ser isomorfismo topológico y de la propiedad de K de ser no anulante. A su vez, si $c \in G$, entonces, dado $y \in Y$,

$$(K\overline{c})(y) = (H^{-1}_{|\overline{\mathbf{G}}} \circ (H\overline{c}))(y) = H^{-1}_{|\overline{\mathbf{G}}}(\overline{(H\overline{c})(y)}) = \overline{c}(y),$$

es decir que K lleva las aplicaciones constantes sobre X en las correspondientes sobre Y.

Así pues, ya estamos en condiciones de aplicar a K el Corolario 4.2.10 y obtenemos que existe una aplicación continua $h : Y \to X$ tal que, si $f \in C(X, G)$ e $y \in Y$,

$$(Kf)(y) = f(h(y)),$$

y además, K es continuo respecto de la topología de la convergencia uniforme. Esto quiere decir que

$$(H^{-1}_{|\overline{\mathbf{G}}} \circ H)(f) = f \circ h.$$

Componemos en ambas partes de la ecuación con $H_{\overline{\mathbf{G}}}$ y queda

$$Hf = H_{\overline{\mathbf{G}}} \circ (f \circ h),$$

luego, si $y \in Y$, $(Hf)(y) = H_{\overline{\mathbf{G}}}(\overline{f(h(y))})$ que era lo que estábamos buscando. $\square$

Para ilustrar mejor los resultados presentados a lo largo de esta sección 4.2, mostramos a continuación un ejemplo de dos espacios compactos X e Y no homeomorfos que verifican que existe un isomorfismo topológico H de $C(X)$ en $C(Y)$, que coincide con la aplicación identidad de funciones sobre las aplicaciones constantes. De hecho, podemos encontrar en la literatura numerosos ejemplos de este tipo (veáse [44, Corollary 6.17] o [123, pg. 499]). Aún así, hemos decidido incluir este ejemplo que muestra que las hipótesis impuestas en el Teorema 4.2.7 y en los Corolarios 4.2.10 y 4.2.11 son esenciales en las afirmaciones de dichos resultados. Pero antes, denotamos por c el espacio de Banach de las sucesiones convergentes y por X^* la compactación de Alexandroff de un espacio topológico localmente compacto (no compacto) X.

Ejemplo 4.2.12 *Existe un isomorfismo topológico entre los espacios de funciones continuas reales $C(\mathbb{N}^* \dot{\cup}\, \mathbb{N}^*)$ y $C(\mathbb{N}^*)$, pero los espacios topológicos compactos $\mathbb{N}^* \dot{\cup}\, \mathbb{N}^*$ y $\mathbb{N}^*$ no son homeomorfos.*

Se observa que $c \times c$ es isomorfo topológicamente a c mediante la aplicación

$$\begin{aligned} H : c \times c &\longrightarrow c \\ \{(a_n, b_n)\} &\longmapsto \{d_n\}, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} d_1 &:= \lim a_n, \\ d_{2n} &:= a_n - \lim a_n + \lim b_n \text{ y} \\ d_{2n+1} &:= b_n. \end{aligned}$$

A su vez, podemos identificar c con el espacio de Banach de las funciones continuas $C(\mathbb{N}^*)$, donde $\mathbb{N}^*$ es la compactación de Alexandroff de $\mathbb{N}$. Como $c \times c \cong c$, obtenemos que $C(\mathbb{N}^* \dot\cup \mathbb{N}^*) \cong C(\mathbb{N}^*)$ (aquí $\mathbb{N}^* \dot\cup \mathbb{N}^*$ denota la suma topológica de ambos espacios). Esta aplicación es un isomorfismo topológico y lleva las aplicaciones constantes sobre $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ en las correspondientes sobre $\mathbb{N}^*$, ya que, si llamamos $\overline{d} := (d, d, \ldots)$, entonces $H(\overline{d}, \overline{d}) = \overline{d}$. Sin embargo, la aplicación H no está ligada a ningún homeomorfismo de $\mathbb{N}^* \dot\cup \mathbb{N}^*$ sobre $\mathbb{N}^*$. De hecho, H *no es no anulante*:

Sean

$$\begin{aligned} f &= ((1, 1, 1, 1, \ldots), (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots)) \text{ y} \\ g &= ((0, 0, 0, 0, \ldots), (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots)) \end{aligned}$$

elementos de $C(\mathbb{N}^* \dot\cup \mathbb{N}^*)$. De esta forma, como $N(f) = \emptyset$, entonces $N(f) \cap N(g) = \emptyset$. Calculamos sus imágenes por H:

- $H(f)(1) = 1$, $(Hf)(2n) = 0$ y por último, $(Hf)(2n+1) = \frac{1}{2n+1}$, mientras que
- $(Hg)(1) = 0$, $(Hg)(2n) = 0$ y $(Hg)(2n+1) = \frac{1}{2n+1}$,

luego $N(Hf) \cap N(Hg) \neq \emptyset$, ya que $(2n)_n \subseteq N(Hf) \cap N(Hg)$. Por tanto, H no puede ser una aplicación no anulante.

4.3. Consecuencias para algunos grupos clásicos

En este apartado vamos a ver algunas consecuencias directas de los resultados de la sección 4.2 si sustituimos G por alguno de los grupos topológicos más usuales, como pueda ser en primer lugar $G = \mathbb{K}$, con $\mathbb{K}$ el cuerpo de los números reales o el de los complejos (Sección 4.3.1), o en segundo y último lugar, $G = \mathbb{T}$ (Sección 4.3.2).

4.3.1. $G = \mathbb{K}$

Sea K el cuerpo de los números complejos o reales, y denotamos, como siempre, por $C(X)$ al grupo $C(X, \mathbb{K})$. Comenzamos por una definición que ya empleamos en la Sección 3.5.2 del Capítulo 3 para grupos de funciones continuas que toman valores en $\mathbb{T}$.

Definición 4.3.1 *Se dice que un homomorfismo $H : C(X) \longrightarrow C(Y)$ preserva funciones que no se anulan, si, siempre que tengamos $Hf(y) = 0$ para algún $y \in Y$, entonces $f(x) = 0$ para algún $x \in X$.*

El símbolo $f \geq 0$ (resp. $f > 0$, etc.) significa que $f(x) \geq 0$ (resp. $f(x) > 0$, etc.) para todo $x \in X$. Dada una función arbitraria $f \in C(X)$, definimos

$$f^+ := (f + |f|)/2 \text{ y } f^- := (f - |f|)/2,$$

como es usual. A continuación, presentamos una aplicación para funciones escalares continuas que nos fue comunicado por Araujo [12], que incluyó este resultado en una carta personal. De hecho, una prueba del caso no Arquimediano aparece en [7]. A su vez, podemos encontrar una variante para espacios discretos en [13].

Teorema 4.3.2 *Sean X e Y espacios topológicos compactos y sea $H : C(X) \longrightarrow C(Y)$ una biyección lineal cumpliendo que tanto H como H^{-1} preservan funciones que no se anulan. Entonces, existe un homeomorfismo $h : Y \to X$ tal que*

$$(Hf)(y) = (H\overline{1})(y) \cdot f(h(y)),$$

siempre que $f \in C(X)$ e $y \in Y$.

-Demostración-
Asumimos sin pérdida de generalidad que $H(\overline{\mathbf{1}}) = \overline{\mathbf{1}}$. De otra forma, trabajaríamos con la aplicación $T = \frac{1}{H(\overline{1})^{-1}} \cdot H$. Veamos que los subconjuntos $f(X)$ y $(Hf)(Y)$ coinciden en $\mathbb{K}$ para toda $f \in C(X)$. Sean $x \in X$ y $f \in C(X)$, entonces $f(x) = r \in \mathbb{R}$. Podemos suponer que $r = 0$ ya que si

no es así, trabajaríamos con $g := f - r$ y gracias a que H es lineal y que $H(\overline{\mathbf{1}}) = \overline{\mathbf{1}}$, obtendríamos el mismo resultado. De este modo, como H^{-1} preserva funciones que no se anulan, existe $y_0 \in Y$ tal que $(Hf)(y_0) = 0$, luego $(Hf)(y_0) = f(x) = 0$. Como consecuencia, tenemos que $Hf > 0$ si, y sólo si, $f > 0$.

Ahora bien, para aplicar el Corolario 4.2.10, tenemos que probar que H es no anulante. Sean f y g elementos de $C(X)$ tales que $N(f) \cap N(g) = \emptyset$ y supongamos que existe $y_0 \in Y$ cumpliendo $Hf(y_0) = Hg(y_0) = 0$. Entonces

$$(Hf)^+(y_0) = (Hf)^-(y_0) = (Hg)^+(y_0) = (Hg)^-(y_0) = 0.$$

Por otra parte, como H manda el cono positivo de $C(X)$ en el cono positivo de $C(Y)$, entonces podemos encontrar funciones positivas, llamémoslas h_+, h_-, k_+, k_-, tales que

$$\begin{array}{rcl} Hf^+ = (Hf)^+ + h_+,\ Hf^- &=& (Hf)^- + h_-, \\ Hg^+ &=& (Hf)^+ + k_+ \text{ y } Hg^- = (Hg)^- + k_-. \end{array}$$

Por tanto,

$$0 = (Hf)^+(y_0) - (Hf)^-(y_0) = Hf(y_0) = H(f^+ - f^-)(y_0) = Hf^+(y_0) - Hf^-(y_0),$$

con lo que tenemos que $h_+(y_0) = h_-(y_0)$. Análogamente, obtenemos que $k_+(y_0) = k_-(y_0)$. A su vez, $0 = (Hf)^+(y_0) + (Hf)^-(y_0) + (Hg)^+(y_0) + (Hg)^-(y_0)$; esto es, si $\phi = (Hf)^+ + (Hf)^- + (Hg)^+ + (Hg)^-$, entonces $\phi(y_0) = 0$. En consecuencia, tenemos que existe $x_0 \in X$ tal que $H^{-1}\phi(x_0) = 0$, ya que H preserva funciones que no se anulan. Equivalentemente,

$$[(f^+ - H^{-1}(h_+)) + (f^- - H^{-1}(h_-)) + (g^+ - H^{-1}(k_+)) + (g^- - H^{-1}(h_-))](x_0) = 0.$$

Como $f^+ - H^{-1}(h_+) \geq 0$, $f^- - H^{-1}(h_-) \geq 0$, $g^+ - H^{-1}(k_+) \geq 0$ y también $g^- - H^{-1}(k_-) \geq 0$ por la propiedad nombrada al principio de la demostración de que $Hf > 0$ si, y sólo si, $f > 0$,, obtenemos que

$$(f^+ - H^{-1}(h_+))(x_0) = (f^- - H^{-1}(h_-))(x_0) = 0$$

$$(g^+ - H^{-1}(k_+))(x_0) = (g^- - H^{-1}(h_-))(x_0) = 0.$$

Luego,

$$\begin{array}{rcl} f(x_0) &=& H^{-1}[(Hf^+ - h_+) - (hf^- h_-)](x_0) \\ &=& (f^+ - H^{-1}(h_+))(x_0) - (f^- - H^{-1}(h_-))(x_0) = 0. \end{array}$$

De forma similar, tendríamos que $g(x_0) = 0$. Así pues, $x_0 \in N(f) \cap N(g)$, hecho que es imposible. Esta contradicción prueba que H es no anulante.

El mismo proceso se puede aplicar a H^{-1}, ya que preserva funciones que no se anulan y además, H es una biyección lineal. De esta forma se tiene que H^{-1} es no anulante. Por otra parte, estamos suponiendo que $H(\overline{\mathbf{1}}) = \overline{\mathbf{1}}$, con lo que H es la identidad de funciones si la restringimos a las funciones constantes sobre X.

Por tanto, es suficiente con que apliquemos el Corolario 4.2.10 a H y a H^{-1}. Si h y k son las aplicaciones continuas asociadas a H y H^{-1}, respectivamente, entonces es fácil comprobar que son inversas una de la otra. Por tanto, ya hemos llegado a lo que afirma el enunciado. $\square$

4.3.2. $G = \mathbb{T}$

En el Capítulo 2, estudiamos los isomorfismos entre grupos de funciones continuas sin utilizar la propiedad de ser un homomorfismo separador en primer lugar, para más tarde enfocar el problema desde el punto de vista de las C^*-álgebras. En el Capítulo 3, investigamos las representaciones de homomorfismos entre grupos de funciones continuas evaluadas en $\mathbb{T}$, pero dentro del contexto de las aplicaciones separadoras. En esta sección seguimos la línea del Capítulo 3 en el sentido que queremos encontrar una extensión del Teorema clásico de Banach-Stone y por ello, el objetivo es obtener resultados similares a los vistos en la Sección 4.2, pero para $\mathbb{T}$. Comprobaremos a su vez que en algunos puntos es más fácil seguir otro camino a la hora de probar los resultados. Como siempre, partimos del homomorfismo

$$H : C(X, \mathbb{T}) \longrightarrow C(Y, \mathbb{T}),$$

donde X e Y son espacios topólógicos compactos. En el momento que sea necesario dotar a ambos grupos de alguna topología, la elegida será la topología de la convergencia uniforme, como en anteriores ocasiones.

En primer lugar, vamos a ver una variante de la Proposición 4.2.5 adaptada al grupo $\mathbb{T}$.

Proposición 4.3.3 *Sea M un $\mathbb{T}$-filtro cerrado de $C(X, \mathbb{T})$ tal que*

$$\frac{C(X, \mathbb{T})}{M} \cong \mathbb{T}.$$

Entonces existe un único $p \in X$ tal que $M \subseteq M_p$.

-Demostración-
Procedemos por reducción al absurdo. Supongamos entonces que existen dos elementos p, $q \in X$, $q \neq p$, verificando que $M \subseteq M_p \cap M_q$. Entonces tenemos que

$$\mathbb{T} \cong \frac{C(X,\mathbb{T})}{M_p} \overset{3\text{T.Isom}}{\cong} \frac{\frac{C(X,\mathbb{T})}{M}}{\frac{M_p}{M}} \cong \frac{\mathbb{T}}{\frac{M_p}{M}}.$$

y lo mismo le ocurre a M_q, esto es,

$$\mathbb{T} \cong \frac{\mathbb{T}}{\frac{M_q}{M}}.$$

En ambos casos, los subgrupos cociente $\frac{M_p}{M}$ y $\frac{M_q}{M}$ de $\mathbb{T}$ deben ser finitos o densos en $\mathbb{T}$, pero, como ambos cocientes $\frac{M_p}{M}$ y $\frac{M_q}{M}$ son cerrados, obtenemos que tanto $\frac{M_p}{M}$ como $\frac{M_q}{M}$ han de ser subgrupos finitos de $\mathbb{T}$, y lo mismo le pasa al cociente $\frac{M_p \cap M_q}{M}$. Veámoslo, por ejemplo, con $\frac{M_p}{M}$: si este cociente fuera denso en $\mathbb{T}$, eso supondría que

$$\overline{\frac{M_p}{M}} = \mathbb{T};$$

pero, este cociente es además cerrado, ya que M_p y M lo son, el primero porque es la antiimagen por la aplicación continua δ_p del cerrado $\{1_{\mathbb{T}}\}$ y el segundo por hipótesis, con lo que obtendríamos que $\frac{M_p}{M} = \mathbb{T}$, y no es el caso.

Por otra parte, definimos la aplicación:

$$\begin{array}{rccc} \overline{\delta_q}_{|M_p} : & \dfrac{M_p}{M_p \cap M_q} & \longrightarrow & \mathbb{T} \\ & fM_p \cap M_q & \longmapsto & f(q) \end{array}$$

De hecho, es muy fácil probar que $\overline{\delta_q}_{|M_p}$ es un isomorfismo de grupos. Primeramente, si $f \in M_p$ cumple que $f(q) = 1_{\mathbb{T}}$, entonces $f \in M_p \cap M_q$, esto es, $f \in \ker \overline{\delta_q}_{|M_p}$. Sea ahora $t \neq 1_{\mathbb{T}}$. Como $p \neq q$, podemos encontrar dos entornos abiertos de p y q tales que $U_p \cap U_q = \emptyset$. Entonces, construimos una aplicación continua $f : X \to \mathbb{R}$ que verifique que

$$f(X \setminus U_p) = \{1\} \text{ y } f(p) = 0.$$

Sea $a \notin \mathbb{Q}$ cumpliendo

$$\exp(af(X \setminus U_p)) = \{t\};$$

así pues, definimos $f' := \exp(af)$ que es también continua y toma valores en $\mathbb{T}$. Esta aplicación es tal que $f'(q) = t$ y $f'(p) = 1_{\mathbb{T}}$, luego $f' \in M_p$ y además, $\overline{\delta_q}_{|M_p}(f') = f'(q) = t$. Consecuentemente, la aplicación $\overline{\delta_q}_{|M_p}$ es un isomorfismo, esto es,

$$\mathbb{T} \cong \frac{M_p}{M_p \cap M_q} \cong \frac{\frac{M_p}{M}}{\frac{M_p \cap M_q}{M}},$$

hecho que es imposible, ya que $\frac{M_p}{M}$ y $\frac{M_p \cap M_q}{M}$ son ambos subgrupos finitos de $\mathbb{T}$. Por tanto, para todo $\mathbb{T}$-filtro M de $C(X, \mathbb{T})$ verificando que

$$\frac{C(X, \mathbb{T})}{M} \cong \mathbb{T},$$

existe un único $p \in X$ tal que $M \subseteq M_p$. □

Corolario 4.3.4 *Sean X e Y espacios topológicos compactos Hausdorff. Sea, además. $H : C(X, \mathbb{T}) \longrightarrow C(Y, \mathbb{T})$ un homomorfismo continuo no anulante cuyo rango contenga a las aplicaciones constantes. Entonces, para todo $y \in Y$ existe un único $x \in X$ tal que* $\ker(\delta_y \circ H) \subseteq M_x$.

-Demostración-
De forma análoga a cómo se demostró en el Teorema 4.2.7 de la Sección 4.2, podemos probar aquí que $M^y := \ker(\delta_y \circ H)$ es un $\mathbb{T}$-filtro, puesto que por definición, si f, $g \in M^y$, entonces $y \in N(Hf) \cap N(Hg)$ y de esta forma, M^y es un $\mathbb{T}$-filtro. Por otro lado, M^y es cerrado ya que es la antiimagen por una aplicación continua del cerrado $1_{\mathbb{T}}$, esto es, $M^y = (\delta_y \circ H)^{-1}(\{1_{\mathbb{T}}\})$.

Para $y \in Y$, hacemos la siguiente composición

$$\delta_y \circ H : C(X, \mathbb{T}) \longrightarrow \mathbb{T}$$

y veamos que es sobreyectiva. Sea, pues, $t \in \mathbb{T}$ y además $t \neq 1_{\mathbb{T}}$, entonces, como las aplicaciones constantes pertenecen a la imagen de H, el elemento $H^{-1}(\bar{\mathbf{t}})$ es efectivamente un elemento de $C(X, \mathbb{T})$. Como

$$\phi_{M^y}(H^{-1}(\bar{\mathbf{t}})) = H(H^{-1}(\bar{\mathbf{t}}))(y) = t(y) = t,$$

obtenemos que $\delta_y \circ H$ es sobreyectiva.

Por el primer Teorema de Isomorfía, el $\mathbb{T}$-filtro cerrado M^y verifica que

$$\frac{C(X, \mathbb{T})}{M^y} \cong \mathbb{T}, \tag{4.10}$$

mediante la aplicación cociente obtenida tras partir en

$$\delta_y \circ H : C(X, \mathbb{T}) \longrightarrow \mathbb{T}$$

por su núcleo M^y.

Por tanto, basta aplicar la Proposición 4.3.3 y se deduce que para cada $y \in Y$ existe un único $x \in X$ tal que

$$\ker(\delta_y \circ H) \subseteq M_x.$$

□

Nota 4.3.5 *En el anterior Corolario 4.3.4, podemos asumir que H es un C-homomorfismo y reemplazar las hipótesis de que el rango de H contenga a las aplicaciones constantes y que sea continua.*

La prueba del resultado principal de esta sección difiere un poco de la del Teorema 4.2.7, ya que aquí no estamos suponiendo que H sea un C-homomorfismo, pero sí continuo. Además, supondremos que X es un espacio 0-dimensional. El resultado principal afirma lo siguiente:

Teorema 4.3.6 *Sean X e Y espacios compactos, y sea $H : C(X, \mathbb{T}) \longrightarrow C(Y, \mathbb{T})$ un homomorfismo continuo no anulante, cuyo rango contenga a las funciones constantes sobre Y. Suponemos que X es, además, 0-dimensional. Entonces existen aplicaciones continuas $h : Y \to X$ y $w : Y \longrightarrow \mathbb{Z}$ tal que*

$$(Hf)(y) = f(h(y))^{w[y]},$$

siempre que $f \in C(X, \mathbb{T})$ e $y \in Y$.

-Demostración-
Gracias al Corolario 4.3.4, sabemos que para cada $y \in Y$ existe un único $x \in X$ tal que

$$\ker(\delta_y \circ H) \subseteq M_x, \tag{4.11}$$

y de aquí se deduce que $supp(\delta_x) = \{x\} \subseteq supp(\delta_y \circ H)$.

Por otro lado, como X es un espacio compacto 0-dimensional, entonces $C(X,\mathbb{T}) = C^o(X,\mathbb{T})$ (Lema 2.1.10 o también en [55], [100]). De esta forma, $C(X,\mathbb{T})$ es conexo y H lleva $C(X,\mathbb{T})$ en la componente conexa de la identidad de $C(Y,\mathbb{T})$, que es $C^o(Y,\mathbb{T})$ (Lema 3.2.1). Esto implica que la imagen de H está contenida en $C^o(Y,\mathbb{T})$. Dualizamos H y obtenemos

$$\widehat{H} : C^o(Y,\mathbb{T})^\wedge \longrightarrow C(X,\mathbb{T})^\wedge,$$

que sigue siendo continuo, pero respecto de la topología de la convergencia compacta abierta (Nota 3.1.5). Aquí volvemos a restringir, pero esta vez a Y, entonces queda

$$\widehat{H} : Y \longrightarrow C(X,\mathbb{T})^\wedge,$$

que de nuevo sigue siendo un homomorfismo continuo. Sean, pues, $y \in Y$ y $f \in C(X,\mathbb{T})$, luego

$$\widehat{H}_{|Y}(y)(f) = (Hf)(y) = (\delta_y \circ H)(f),$$

esto es, $\widehat{H}_{|Y}(y) = (\delta_y \circ H)$. Entonces se tiene que

$$supp(\delta_x) = \{x\} \subseteq supp(\widehat{H}_{|Y}(y)),$$

así como $\ker(\widehat{H}_{|Y}(y)) \subseteq M_x$. El objetivo es probar que

$$supp(\widehat{H}_{|Y}(y)) = \{x\}.$$

Para cada $y \in Y$, el soporte $supp(\widehat{H}_{|Y}(y))$ ha de contener un número finito de puntos, ya que se deduce de la prueba del Teorema 3.7 de [55] para X un espacio compacto totalmente disconexo que $C(X,\mathbb{T})^\wedge = C^o(X,\mathbb{T})^\wedge = \psi_X(\langle \delta_x : \ x \in X \rangle)$, siendo $\psi_X : \mathcal{M}_c(X)^\sim \longrightarrow C^o_c(X,\mathbb{T})^\wedge$ el isomorfismo del Lema 3.2.2, con lo que el soporte de cualquier medida de $\mathcal{M}_c(X)^\sim$ no puede ser infinito. Lo que estamos diciendo es que para todo $y \in Y$, la medida $\widehat{H}_{|Y}(y) \in A(X)$, ya que es P-reflexivo bajo estas condiciones sobre X (ver Nota 1.2.2), y su soporte ha de ser finito. Supongamos, entonces, que

$$supp(\widehat{H}_{|Y}(y)) = \{x, x_1, \ldots, x_n\},$$

donde los puntos x_i, x de X son distintos entre sí. Esto es, si $f \in C^o(X,\mathbb{T})$, entonces

$$\widehat{H}_{|Y}(y)(f) = f(x)^m f(x_1)^{m_1} \ldots f(x_n)^{m_n},$$

con $\{m, m_1, \ldots, m_n\} \subseteq \mathbb{Z}$. Sea, ahora, $x_j \in \{x_1, \ldots, x_n\}$. De esta forma, podemos encontrar entornos abiertos U_x y V_j de x y de x_j, respectivamente, tales que $U_x \cap V_j = \emptyset$ y además, $x_i \notin U_x \cup V_j$ para todo $i \neq j$. A su vez, por completa regularidad (o por $\mathbb{T}$-regularidad), construimos dos funciones continuas f y g con la siguiente estructura:

$$\begin{array}{lll} f(z) = a & \text{y} & N(f) \subseteq U_x \\ g(x) = b & \text{y} & N(g) \subseteq V_j, \end{array}$$

siendo a una raíz m_j-ésima de la unidad y b una raíz m-ésima de la unidad. Además, f y g han de cumplir que $f(x_i) = g(x_i) = a_i$, donde para cada $i \neq j$, el elemento a_i es la raíz m_i-ésima de la unidad. Tal y como las hemos contruido, estas funciones continuas de $C(X, \mathbb{T})$ verifican que $N(f) \cap N(g) = \emptyset$ y como H es no anulante, tenemos que $N(Hf) \cap N(Hg) = \emptyset$. Pero,

$$(Hf)(y) = \widehat{H}_{|Y}(y)(f) = f(x)^m f(x_1)^{m_1} \dots f(x_n)^{m_n} = 1_{\mathbb{T}},$$

así como,

$$(Hg)(y) = \widehat{H}_{|Y}(y)(g) = g(x)^m g(x_1)^{m_1} \dots g(x_n)^{m_n} = 1_{\mathbb{T}},$$

luego $y \in N(Hf) \cap N(Hg)$. Y de esta contradicción se deduce que para cada $y \in Y$, existe un único $x \in X$ tal que $supp(\widehat{H}_{|Y}(y)) = \{x\}$.

Por tanto, si aplicamos lo visto en la Sección 3.2.1, obtenemos que

$$\widehat{H}_{|Y}(Y) \subseteq \mathbb{Z}X,$$

con lo que existen aplicaciones $h : Y \to X$ y $w : Y \to \mathbb{Z}$ tales que para todo $y \in Y$, $\widehat{H}_{|Y}(y) = \beta(y)h(y)$, así como

$$(Hf)(y) = \widehat{H}_{|Y}(y)(f) = f(h(y))^{w(y)},$$

para toda $f \in C(X, \mathbb{T})$ y para todo $y \in Y$. De aquí se puede deducir que w no se anula en ningún punto, ya que si existiera $y_1 \in Y$ tal que $w(y_1) = 0$, entonces $\widehat{H}_{|Y}(y_1)(f) = 0$ para toda $f \in C(X, \mathbb{T})$. Escogemos, pues, $F = \exp(\overline{\mathbf{a}})$ con $a \notin \mathbb{Q}$, luego

$$N(HF) \neq \emptyset,$$

y como H es no anulante, $N(F) \neq \emptyset$, pero esto es imposible, porque F no se anula nunca. Por otro lado, podemos obtener la continuidad de h y de w como consecuencia de las Proposiciones 3.2.10 y 3.2.11.

□

Bibliografía

[1] Abramovich, Y.A.: *Multiplicative representation of disjointness preserving operators*, Nederl. Akad. Wetensch. Indag. Math. **45**(3)(1983), 265-279.

[2] Abramovich, Y.A., Veksler, A.I. and Koldunov, A.V.: *Operators that preserve disjunction*, (Russian) Dokl. Akad. Nauk SSSR **248**(5)(1979), 1033-1036.

[3] Abramovich, Y.A. and Kitover, A.K.: *Bijective disjointness preserving operators*, Functional analysis and Economic theory (Samos, 1996), Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1998), 1-8.

[4] Abramovich, Y.A. and Kitover, A.K.: Inverses of disjointness preserving operators, Mem. Amer. Math. Soc. **143**(679)(2000).

[5] Araujo, J. and Martínez-Maurica, J.: *The non-archimedian Banach-Stone theorem*, p-adic Analysis, Proc. Int. Conf. Trento/Italy (1989), Lect. Notes Math. **1454**(1990), 64-79.

[6] Araujo, J., Beckenstein, E. and Narici. L.: *Biseparating maps and homeomorphic Real-Compactifications*, Journal of Math. Analysis and Applications **192**(1995), 258-265.

[7] Araujo, J.: *N-compactness and automatic continuity in ultrametric spaces of bounded continuous functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **127**(8)(1999), 2489-2496.

[8] Araujo, J. and Jarosz, K.: *Isometries of spaces of unbounded continuous functions*, Bull. Aust. Math. Soc. **63**(3)(2001), 475-484.

[9] Araujo, J.: *Realcompactness and spaces of vector-valued functions*, Fund. Mathematica **172**(2002), 27-40.

[10] Araujo, J. and Jarosz, K.: *Automatic continuity of biseparating maps*, Studia Math. **155**(3)(2003), 231-239.

[11] Araujo, J.: *Linear biseparating maps between spaces of vector-valued differentiable functions and automatic continuity*, Adv. Math. **187**(2)(2004), 488-520.

[12] Araujo, J.: Personal letter.

[13] Arazy, J. and Fisher, S.D.: *Rigid and zero reducing linear transformations*, J. Math. Anal. Appl. **130**(2)(1988), 552-555.

[14] Aussenhofer, L.: Contributions to the Duality Theory of Abelian Topological Groups and to the Theory of Nuclear Groups, Doctoral Dissertation, Tübingen 1998 (tesis publicada en Dissertationes Math. **384**(1999))

[15] Baars, J. and de Groot, J.: *An isomorphical classification of zero-dimensional locally compact separable metriz spaces*, Comment. Math. Univ. Carolinae **29**(1988), 577-595.

[16] Baars, J.: *Equivalence of certain free topological groups*, Comment. Math. Univ. Carolinae **33**(1)(1992), 125-130.

[17] Baars, J. and de Groot, J.: On Topological and Linear Equivalence of certain Fucnion Spaces, CWI Tracts **86**, Centrum voor Wiskunde en Informatica, Amsterdam (1992).

[18] Banach, S.: Théorie des opérations linéaires, Chelsea, New York (1932).

[19] Banaszczyk, W.: Additive subgroups of topological vector spaces, Lecture Notes in Math. **1466**, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg (1991).

[20] Beckenstein, E. and Narici, L.: *A non-Archimedean Stone-Banach theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. **100**(2)(1987), 242-246.

[21] Beckenstein, E. and Narici, L.: The separating map: a survey, Rend. Circ. Mat. Palermo Ser. II Suppl. **52**(1998), 637-648.

[22] Beckenstein, E. and Narici, L.: *An open mapping theorem for basis separating maps*, Topology and its Applications **137**(2004), 39-50.

[23] Beckenstein, E., Narici, L. and Todd, A. R.: *Automatic continuity on spaces of continuous functions*, Manuscripta Math. **62**(1988), 257-275.

[24] Behrends, E.: M-Structure and the Banach-Stone Theorem, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1979).

[25] Bernard, A. and Varopoulos, N. Th.: *Groupes de functions continues sur un compact. Applications a l'etude des esembles de Kronecker*, Acta Mathematica **35**(1970), 199-205.

[26] Blasco, J.L.: *On μ-spaces and $k_{\mathbb{R}}$-spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **67**(1)(1977), 179-186.

[27] Blasco, J.L.: *On the structure of positive homomorphisms on algebras of real-valued continuous functions*, Acta Math. Hungar. **102**(1-2)(2004), 141-150.

[28] Blasco, J.L.: *Some problems on homomorphisms and real function algebras*, Monatsh. Math. **133**(2)(2001), 89-92.

[29] Cabello Sánchez, F.: *Diameter preserving linear maps and isometries*, Archiv Math. **73**(5)(1999), 373-379.

[30] Cambern, M.: *A generalized Banach-Stone theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. **17**(1966), 396-400.

[31] Cambern, M.: *On isomorphisms with small bound*, Proc. Amer. Math. Soc. **18**(1967), 1062-1066.

[32] Carey, A. and Grundling, H.: *On the problem of the amenability of the gauge group*, Letters in Mathematical Physics **68**(2004), 113-120.

[33] Chasco, M.J.: *Pontryagin duality for metrizable groups*, Arch. Math. **70**(1998), 22-28.

[34] Cohen, H.B.: *A Bound-Two isomorphism between $C(X)$ Banach spaces*, Proc. of the Amer. Soc. **50**(1975), 215-217.

[35] Conway, J.B.: A Course in Functional Analysis, **96** 2nd ed., Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1990.

[36] Corson, H.H. and Glicksberg, I.: *Compactness in $Hom(G, H)$*, Canad. J. Math. **22**(1970), 164-170.

[37] Czászár, Á.: *Semigroups of continuous functions*, Acta Sci. Math. (Szeged) **45**(1-4)(1983), 131-140.

[38] Czászár, Á.: *u-isomorphic semigroups of continuous functions*, Acta Math. Hungar. **48**(1-2)(1986), 213-222.

[39] Davidson, K.R.: C^*-algebras by Example, Fields Institute Monographics **6**, Amer. Math. Soc. (1996).

[40] Dixmier, J.: Les $C^\star$-algèbres et leurs représentations, Cahiers Scientifiques **29**, Gauthier-Villars Éditeur, Paris (1969).

[41] Doran, R.S. and Belfi, V.A.: Characterization of $C^\star$-algebras, Pure and Applied Mathematics **101**, Marcel Dekkeer, Inc., New York and Basel (1986).

[42] Eda, K. and Ohta, H.: *On abelian groups of integer-valued continuous functions*, Abelian Group Theory (Oberwolfach, 1985), 241-257, Gordon and Breach, New York, 1987.

[43] Eda, K., Kamo, S. and Ohta, H.: *Abelian groups of continuous functions and their duals*, Topology Appl. **53**(1993), 131-151.

[44] Eda, K., Kiyosawa, T. and Ohta, H.: *N-compactness and its applications. Topics in general topology*, North-Holland Math. Library **41**(1989), North-Holland, Amsterdam, 459-521.

[45] Effros, E. G.: *Why the circle is connected: An Introduction to Quantized Topology*, The Mathematical Intelligencer **11**(1), Springer-Verlag New York (1989).

[46] Engelking, R.: General Topology, Polish Scientific Publishers, Warszawa 1977.

[47] Folland, G.B.: A Course in Abstract Harmonic Analysis, Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, Inc., (1995).

[48] Font, J. J.: Aplicaciones separadoras, Trabajo de investigación, Departamento de Matemáticas e Informática, Univ. Jaume I (1992).

[49] Font, J. J.: Continuidad automática de operadores lineales y su representación como aplicaciones composición con peso, Tesis Doctoral, Departamento de Matemáticas, ESTCE, Univ. Jaume I (1996).

[50] Font, J.J. and Hernández, S.: *On separating maps between locally compact spaces*, Arch. Math. **63**(1994), 158-165.

[51] Font, J. J. and Sanchis, M.: *A characterization of locally compact spaces with homeomorphic one-point compactifications*, Proceedings of the First Joint Japan-Mexico Meeting in Topology (Morelia, 1999), Topology Appl. **121**(2002), (1-2), 91-104.

[52] Fuchs, L.: Infinite Abelian Groups (Volumen I), Pure and Applied Mathematics **36**, Academic Press Inc. (1970).

[53] Fuchs, L.: Infinite Abelian Groups (Volumen II), Pure and Applied Mathematics **36-II**, Academic Press Inc. (1973).

[54] Galindo, J.: Acotaciones y topologías débiles sobre grupos abelianos maximalmente casi periódicos, Tesis Doctoral, Departamento de Matemáticas, ESTCE, Univ. Jaume I (1997).

[55] Galindo, J. and Hernández, S.: *Pontryagin-van Kampen reflexivity for free Abelian topological groups*, Forum Math. **11**(1999), 399-415.

[56] Galindo, J. and Sanchis, M.: *Stone-Weierstrass theorems for group-valued functions*, Israel J. Math. **141**(2004), 341-354.

[57] Gau, H-L., Jeang, J-S. and Wong, N-C.: *An algebraic approach to the Banach-Stone theorem for separating linear bijections*, Taiwanese Journal of MAthematics **6**(2002), 399-403.

[58] Gerlits, J. an Nagy, Zs.: *Some properties of $C(X)$, I*, Topology Appl. **14**(1982), 151-161.

[59] Gerlits, J.: *Some properties of $C(X)$, II*, Topology Appl. **15**(1983), 255-262.

[60] Gillman, L. and Henriksen, M.: *Rings of continuous functions in which every finiteky generated ideal is principal*, Trans. Amer. Math. Soc **82**(1956), 366-391.

[61] Gillman, L. and Jerison, M.: Rings of continuous functions, Springer Verlag, 1976.

[62] Glicksberg, I.: *Uniform boundeness for groups*, Canad. Math. J. **14**(1962), 269-276.

[63] González, F. and Uspenskij, V.V.: *On homomorphisms of groups of integer-valued functions*, Extracta Math. **14**(1)(1999), 19-29.

[64] Graev, M.I.: *Free topological groups*, Topology and Topological Algebra, Translation Series **1**(8)(1962), 305-364.

[65] Grenander, U.: Probabilities on algebraic structures, Almqvist and Wiksell, Uppsala, (1963).

[66] Györy, M. and Molnár, L.: *Diameter preserving bijections of C(X)*, Arch. Math. **71**(1998), 301-310.

[67] Halmos, P.R.: Measure Theory, Graduate Texts in Mathematics **18**, Springer-Verlag New York Inc. (1974)(first published by Litton Educational Publishing, Inc., 1950).

[68] Henriksen, M.: *On the equivalence of the ring, lattice, and semigroup of continuous functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **7**(1956), 959-960.

[69] Hernández, S., Beckenstein, E. and Narici. L.: *Banach-Stone theorems and separating maps*, Manuscripta Math. **86**(1995), 409-416.

[70] Hernández, S. and Macario, S.: *Dual properties in totally bounded Abelian groups*, Archiv der Mathematik **80**(2003), 271-283.

[71] Hernández, S. and Uspenskij, V.V.: *Pontryagin duality for spaces of continuous functions*, Journal of Math. Anal. and Applic. **242**(2000), 135-144.

[72] Hewitt, E. and Ross, K.A.: Abstract Harmonic Analysis Vol.I, Die Grundlehren der Mathematik, Wissenschaften in Einzeldarstellungen **115**, Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, New York, 1963.

[73] Higgins, P.J.: Introduction to topological groups. London Mathematical Society Lecture Note Series **15**, Cambridge University Press, London-New York, 1974.

[74] Hocking, J.G. and Young, G.S.: Topology, Dover Publicatios Inc, (1988) (first published by Addison Wesley (1961)).

[75] Hofmann, K. and Morris, S.A.: The Structure of Compact Groups, De Gruyter Studies in Mathematics, Walter de Gruyter, Berlin-New York (1998).

[76] Hofmann, K. H. and Morris, S.A.: *The structure of abelian pro-Lie groups*, Math. Z. **248**(4)(2004), 867-891.

[77] Jarchow, H.: Locally Convex Spaces, B.G. Teubner, Stuttgart, (1981).

[78] Jarosz, K.: *Nonlinear generalizations of the Banach-Stone theorem*, Studia Math. **83**(2)(1989), 97-107.

[79] Jarosz, K.: *Automatic continuity of separating linear maps*, Canad. Math. Bull. **33**(2)(1990), 139-144.

[80] Kaplan, S.: *Extension of Pontryagin duality I: infinite products*, Duke Math. J., **15**(1948), 649-658.

[81] Kawai, T: *An application of nonstandard analysis to characters of groups of continuous functions*, Rep. Fac. Sci. Kagoshima Univ. (Math. Phys. 6 Chem.) **12**(1979), 43-45.

[82] Kelley, J.L.: General Topology, Van Nostrand Reinhold Company, 1955.

[83] Köthe, G.: Topological Vector Spaces I (english version), Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **159**, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, (1966).

[84] Lampert, J.: *On the isometries of certain function spaces*, Pacific J. Math. **8**(1958), 459-466.

[85] Leptin, H.: *Abelsche Gruppen mit kompakten Charaktergruppen und Dualitätstheorie gewisser linear topologischer abelscher Gruppen*, Abh. Math. Univ. Hamburg **19**(1955), 244-263.

[86] Lindahl, L.-Å. and Poulsen, F. (Editors): Thin sets in harmonic analysis, Lecture Notes in puere and applied mathematics, Volumen 2 (1971).

[87] Lust, F.: *Sur la réunion de deux ensembles de Helson*, C. R. Acad. Sci. Paris **272**(1971), 720-723.

[88] Macario, S.: La topología de Bohr para grupos topológicos abelianos, Tesis Doctoral, Departamento de Matemáticas, ESTCE, Univ. Jaume I (2002).

[89] Markov, A. A.: *On free topological groups*, Dokl. AN SSSR **31**(1941), 299-301 (in Russian).

[90] Markov, A. A.: *On free topological groups*, Topology and Topological Algebra, Translation Series **1**(8)(1962), 195-272.

[91] Martínez, J: $C(X, Z)$ *revisited*, Adv. Math. **99**(2)(1993), 152-161.

[92] Morita, K. and Nagata, J. (Editors): Topics in General Topology, Elsevier Science Publishers B.V. (1989).

[93] Morris, Sidney A.: Pontryagin duality and the structure of locally compact abelian groups, London Mathematical Society Lecture Note Series, **29**, Cambridge University Press, Cambridge-New York-Melbourne (1977).

[94] Morris, S. A.: *Free Abelian topological groups*, Proc. Conf. Toledo, Ohio (1983), Heldermann Verlag, Berlin 1984, 375-391.

[95] Murphy, G.J: $C^{\star}$-algebras and Operator Theory, Academic Press Inc., (1990).

[96] Nachbin, L.: *Topological vector spaces of continuous functions*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **40**(1954), 471-474.

[97] Noble, N.: *k-groups and duality*, Trans. Amer. Math. Soc. **151**(1970), 551-561.

[98] Ohta, H.: *Chains of strongly non-reflexive dual groups of integer-valued continuous functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **124**(3)(1996), 961-967.

[99] de Pagter, B.: *A note on disjointness preserving operators*, Proc. Amer. Math. Soc. **90**(4)(1984), 543-549.

[100] Pestov, V.: *Free Abelian topological groups and the Pontryagin-Van Kampen duality*, Bull. Austral. Math. Soc. **52**(1995), 297-311.

[101] Pierce, R.S.: *Rings of integer-valued continuous functions*, Trans. Amer. Math. Soc. **100**(1961), 371-394.

[102] Powers, R.T.: *Simplicity of the C^*-algebra associated with the free group on two generators*, Duke Math. J. **42**(1)(1975), 151-156.

[103] Ródenas, A.: Dualidad de grupos de funciones continuas. Trabajo de investigación, Departamento de Matemáticas, Univ. Jaume I (2003).

[104] Rudin, W.: Fourier Analysis on Groups, John Wiley and Sons, New York, London (1990).

[105] Ryan, Raymond A.: Introduction to Tensor Products of Banach Spaces, Springer Monographs in Mathematics, Springer Verlag London-Berlin-Heidelberg (2002).

[106] Saeki, S.: *On the union of two Helson sets*, J. Math. Soc. Japan **23**(4)(1971), 636-648.

[107] Scheinberg, S.: *Homeomorphism and isomorphism of Abelian groups*, Can. J. Math. **26**(6)(1974), 1515-1519.

[108] Schmets, J.: Spaces of Vector-Valued Continuous Functions, Lecture Notes in Mathematics **(1003)**, Springer Verlag Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo (1983).

[109] Shirota, T.: *A generalization of a theorem of I.Kaplansky*, Osaka Math. J. **4**(1952), 121-132.

[110] Shirota, T.: *On locally convex vector spaces of continuous functions*, Japan Acad. Math. Sci. **30**(1954), 294-298.

[111] Smith, M.F.: *The Pontryagin duality theorem in linear spaces*, Ann. of Math. (2) **56**(1952), 248-253.

[112] Stone, M.H.: *Applications of the theory of Boolean rings to general topology* Trans. Amer. Math. Soc. **41**(3)(1937), 375-481.

[113] Tkačenko, M. G.: *Topological features of topological groups*, Handbook of the History of General Topology, Volumen **3**, 1027-1144, Kluwer Academic Publishers (2001).

[114] Tomiyama, J.: An Invitation to C^*-algebras and Topological Dynamics, Advanced Series in Dynamical Systems **3**, World Scientific Publishing, Singapore-New Jersey-Hong Kong (1987).

[115] Varopoulos, N. Th.: *Sur les ensembles de Kronecker*, C. R. Acad. Sc. Paris **268**(1969), 954-957.

[116] Varopoulos, N. Th.: *Groups of continuous functions in harmonic analysis*, Acta Math. **125**(1970), 109-154.

[117] Wall, C.T.C.: A Geometric Introduction to Topology, (first published by Addison-Wesley Publications in 1972), Dover Publications Inc, New York (1993).

[118] Waterhouse, W.C.: *Dual groups of vector spaces*, Pacific Journal of Mathematics **26**(1)(1968), 193-196.

[119] Wojtaszczyk, P.: Banach Spaces for Analysts, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **25**, Cambridge University Press, (1991).

[120] Yang, J.S.: *Transformation groups of automorphisms of* $C(X,G)$, Proc. Amer. Math. Soc. **39**(1973), 619-624.

[121] Yang, J.S.: *On isomorphic groups and homeomorphic spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **43**(1974), 431-438.

[122] Yang, J.S.: *Erratum to "Transformation groups of automorphisms of* $C(X,G)$*" and to "On isomorphic groups and homeomorphic spaces"*, Proc. Amer. Math. Soc. **48**(1975), 517.

[123] Yang, J.S.: *On certain groups of continuous functions*, Internat. J. Math. Sci. **3**(1980), 491-504.