



UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS  
DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS

DEPARTAMENTO DE CIENCIA E INGENIERÍA DEL  
TERRENO Y DE LOS MATERIALES

TESIS DOCTORAL

ANÁLISIS TEÓRICO DE LA  
CONSOLIDACIÓN Y DEFORMACIÓN  
ALREDEDOR DE COLUMNAS DE GRAVA

Autor

JORGE CASTRO GONZÁLEZ

Director

CÉSAR SAGASETA MILLÁN

Santander, 2008

---

## ESTADO DEL CONOCIMIENTO

---

El comportamiento de las columnas de grava es un tema amplio con múltiples aspectos a considerar. En este capítulo se repasan los siguientes puntos:

1. Geometría

Un estudio teórico de las columnas de grava requiere realizar hipótesis simplificadoras sobre la geometría real del problema, ya que ésta suele ser complicada y extensa.

2. Consolidación

Para poder desarrollar el modelo analítico ha sido necesario un amplio repaso del proceso de consolidación, no sólo del caso particular de drenes verticales y drenaje radial, sino también de conceptos generales y diferentes técnicas de resolución del problema.

Este repaso alcanza procesos sencillos como la consolidación unidimensional que se encuentra en cualquier libro de texto. Se ha considerado necesario llegar hasta ese nivel para analizar hipótesis, desarrollos y métodos de resolución que sirven de base a soluciones más complejas.

Se han evitado los desarrollos matemáticos pero sí se han repasado conceptos necesarios para comprender la consolidación alrededor de las columnas. Así, por ejemplo, se han repasado soluciones aproximadas que permiten analizar la consolidación eliminando parte de la complejidad matemática.

### 3. Interacción columna-suelo. Situaciones inicial y final

En el modelo analítico se pretende incluir el reparto de tensiones entre el suelo y la columna. De esta forma, se estudian diferentes soluciones sobre las deformaciones y reparto de tensiones. Estas soluciones son únicamente para las situaciones inicial y final.

### 4. Estabilidad de las columnas

Es un punto conflictivo en el diseño de las columnas que puede dar lugar a diferentes resultados e interpretaciones. Por ello, se repasan las bases teóricas que justifican cada cálculo.

### 5. Instrumentación de obras reales

El diseño y planificación de la instrumentación se ha basado en alguno de los casos consultados, donde se han analizado posibles magnitudes a medir, equipos de medida a emplear y problemas que podrían surgir.

## **2.1. GEOMETRÍA**

Exceptuando aquellos casos en los que se realicen complicados análisis numéricos y se modele la geometría real, en general, es muy costoso realizar un estudio en el que se trabaje con todas y cada una de las columnas de grava. Las columnas son de pequeño tamaño comparado con las dimensiones totales del problema, suelen ser numerosas y requerirían un complejo análisis en 3 dimensiones.

Normalmente se realizan varias hipótesis para poder pasar de este estudio global a uno más sencillo. Una primera opción consiste en convertir el suelo tratado mediante columnas en un suelo homogéneo con unas características mejoradas (Schweiger, 1989). Otra opción es transformar las columnas de grava en zanjas longitudinales para poder pasar del problema tridimensional a un problema en deformación plana. Por último, otra alternativa en dos dimensiones es estudiar una única columna y su suelo circundante en simetría axial. Estas dos últimas transformaciones también son habituales en drenes verticales.

### **2.1.1. Deformación plana**

Cuando las columnas se emplean bajo elementos con una dimensión longitudinal predominante, por ejemplo un terraplén, resulta interesante estudiar el problema en deformación plana. Para ello es necesario transformar las columnas en zanjas longitudinales equivalentes (Figura 2.1). La transformación se puede hacer directamente a partir de la geometría real o a partir del modelo en simetría axial. El número de zanjas, su ancho y espaciamiento forman parte de los parámetros desconocidos en la transformación. Además de la geometría también se pueden variar los parámetros deformacionales y resistentes de la grava equivalente de las zanjas.

Para fijar estas variables del modelo se impone que sus propiedades sean lo más parecidas a la situación real, así se pueden igualar la resistencia media al corte, la reducción de asientos provocada, el tiempo medio de consolidación, etc. En general, no es posible cumplir todos estos criterios y en función del proceso que sea más determinante para diseñar la mejora, se fijarán unas condiciones u otras.

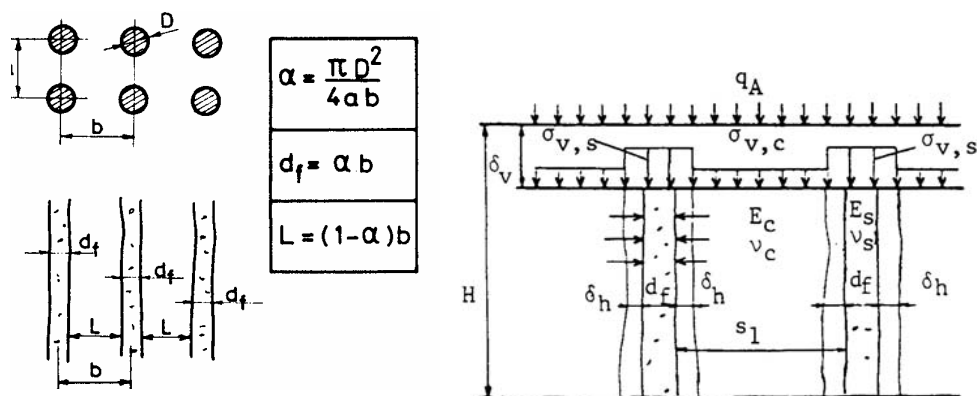


Figura 2.1. Paso a deformación plana (Van Impe y De Beer, 1981)

### Resistencia al corte

Para igualar la resistencia al corte de la situación real y del modelo en deformación plana, Dimaggio (1978) propuso una serie de parámetros medios, peso específico, cohesión y ángulo de rozamiento, que tienen que ser iguales en ambos casos. Estos parámetros se obtienen mediante las siguientes expresiones:

$$\gamma_{med} = (1 - a_r)\gamma_s + a_r\gamma_c \tag{2.1}$$

$$c_{med} = (1 - a_r)c_s + a_rc_c \tag{2.2}$$

$$\tan \phi_{med} = (1 - a_r)\tan \phi_s + a_r \tan \phi_c \tag{2.3}$$

Este criterio deriva de igualar la fuerza tangencial desarrollada a lo largo de un posible círculo de deslizamiento. La manera más sencilla de aplicarlo es mantener el área de sustitución,  $a_r$ , en el modelo en deformación plana. En las expresiones propuestas por Dimaggio (1978), la diferente tensión normal que actúa en la columna y en el suelo se debe únicamente a sus diferentes pesos, y se supone que el reparto de la carga aplicada es el mismo en la realidad que en el modelo. Esto no siempre es así, como ocurre por ejemplo si el problema se estudia mediante equilibrio límite. Un análisis más general es el propuesto por Barksdale y Bachus (1983), que considera la influencia del factor de concentración de tensiones en la tensión vertical que actúa sobre el suelo y la columna (Figura 2.2).

$$\sigma_{z,s} = \gamma_s z + p_a \mu_s \tag{2.4}$$

$$\sigma_{z,c} = \gamma_c z + p_a \mu_c \quad (2.5)$$

La tensión tangencial desarrollada en la columna y en el suelo es

$$\tau_s = (\sigma_{z,s} \cos^2 \beta) \tan \phi_s \quad (2.6)$$

$$\tau_c = (\sigma_{z,c} \cos^2 \beta) \tan \phi_c \quad (2.7)$$

y la tensión total es el promedio de ambas

$$\tau_{med} = (1 - a_r) \tau_c + a_r \tau_s \quad (2.8)$$

Este planteamiento general presenta el inconveniente de estimar la inclinación,  $\beta$ , y la profundidad,  $z$ , media de la superficie de deslizamiento.

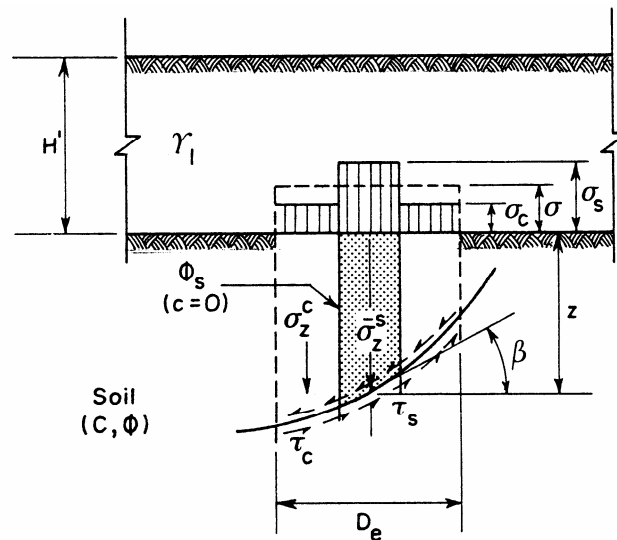
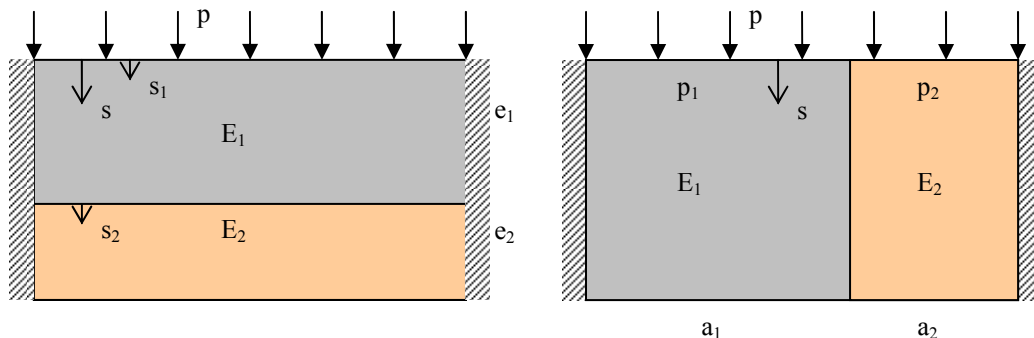


Figura 2.2. Equivalencia de la resistencia al corte (Barksdale y Bachus, 1983)

## Reducción de asientos

La propuesta más clásica y antigua se debe a Van Impe y De Beer (1981), que para el estudio de la reducción de asientos, proponen el paso de una malla cuadrada de columnas a zanjas longitudinales, transformando cada fila de columnas en una zanja (Figura 2.1). La transformación se realiza conservando el área de sustitución, de tal forma que la rigidez media es la misma.



**Figura 2.3. Estudio del módulo elástico equivalente**

Transformar cada fila de columnas en una zanja equivalente provoca que las zanjas sean mucho más esbeltas que las columnas y, teniendo en cuenta los efectos de segundo orden, que su resistencia sea menor. Por este motivo, esta equivalencia entre geometrías es conservadora.

Tan y Oo (2005) también plantean igualar la rigidez media pero sin que sea necesario mantener la misma área de sustitución.

$$E_{m,med} = E_{m,c}a_r + E_{m,s}(1 - a_r) \quad (2.9)$$

Con esta formulación se puede variar el área de sustitución, si también se modifican los módulos elásticos.

Para justificar la expresión (2.9) y compararla con un caso similar, se estudia una capa de suelo confinada lateralmente formada por dos estratos de diferente rigidez y espesor o anchura. En un caso la estratificación es horizontal mientras que en el otro, ésta es vertical (Figura 2.3). Se desprecia el rozamiento en las paredes laterales y aunque no se refleje en la notación se trabaja con módulos confinados (edométricos).

En el caso de dos estratos horizontales, se obtiene que la rigidez media es la media armónica ponderada de ambos estratos. El desarrollo es el siguiente:

$$\left. \begin{array}{l} p = E_{med}s \\ s = s_1 + s_2 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} s_1 = pe_1 / E_1 \\ s_2 = pe_2 / E_2 \end{array} \right\} \rightarrow \frac{1}{E_{med}} = \frac{1}{E_1} \frac{e_1}{e_1 + e_2} + \frac{1}{E_2} \frac{e_2}{e_1 + e_2} \quad (2.10)$$

Por el contrario, si la estratificación es vertical, se obtiene que la rigidez media es la media aritmética.

$$\left. \begin{array}{l} p = E_{med} s \\ p(a_1 + a_2) = p_1 a_1 + p_2 a_2 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} p_1 = E_1 s \\ p_2 = E_2 s \end{array} \right\} \rightarrow E_{med} = E_1 \frac{a_1}{a_1 + a_2} + E_2 \frac{a_2}{a_1 + a_2} \quad (2.11)$$

En la resolución de este último caso, se ha supuesto el contacto entre ambos estratos fijo, al igual que ocurre en la solución propuesta por Tan y Oo (2005). Si se tiene en cuenta el movimiento de este contacto, el módulo elástico medio se encuentra reducido por un factor:

$$E_{m,med} = E_{mc} a_s + E_{ms} (1 - a_s) - 2a_s (\lambda_c - \lambda_s) F \quad (2.12)$$

donde  $\lambda$  es una de las constantes elásticas de Lamé y  $F$  es una constante cuya expresión para el caso de simetría axial aparece en la Tabla 2.6 (Balaam y Booker, 1981). Esta constante suele ser pequeña y además aparece tanto en el caso de simetría axial como en el de deformación plana, aunque con diferente valor.

También hay que señalar que la plastificación de las columnas desempeña un papel importante en la reducción de asientos lograda. Así, por ejemplo, el área de sustitución y el ángulo de rozamiento de la grava son los parámetros más importantes de la solución de Priebe (1995). Por tanto, además de plantear la equivalencia del módulo de rigidez medio, se deben conservar estos parámetros relacionados con la plastificación de la columna.

Como conclusión, se estima que lo más conveniente es conservar todos los parámetros (área de sustitución, módulos elásticos y ángulo de rozamiento de la grava) al igual que proponen Van Impe y De Beer (1981), pero utilizando un número de zanjas tal que su anchura sea igual al diámetro de la columna.



## Tiempo medio de consolidación

El principio de esta equivalencia es igualar tiempos de consolidación. Las diferentes propuestas son consecuencia de las soluciones que se toman como referencia para calcular estos tiempos medios de consolidación. Todas las equivalencias toman como referencia el caso en simetría axial.

Hird et al. (1995) emplean como soluciones de referencia la propuesta por Hansbo (1981) para el caso de simetría axial y una solución propia para el caso de deformación plana, así proponen:

$$\overline{U}_{r,dp} = \overline{U}_{r,ax} \quad (2.13)$$

$$\frac{k_{r,dp}}{k_{r,ax}} = \frac{2B^2}{3r_l^2 \left[ \ln\left(\frac{r_l}{r_s}\right) + \frac{k_{r,ax}}{k_{s,ax}} \ln\left(\frac{r_s}{r_c}\right) - \frac{3}{4} \right]} \quad (2.14)$$

Para aplicar esta formulación existen diferentes alternativas en función de las variables que se desee mantener constantes:

- Conservar la geometría y modificar las permeabilidades
- Conservar las permeabilidades y modificar la geometría
- Una solución mixta entre las dos anteriores

Se puede observar que no aparece como variable la anchura de la zanja ( $b_w$ ) porque su valor es irrelevante si se considera  $2B$  como el ancho de la zona de suelo (Figura 2.4).

Por otra parte, en el modelo de Hird et al. (1995), la zona remodelada y la permeabilidad finita de la zanja no se simulan en el caso de deformación plana. Indraratna y Redana (1997) incluyen estas variables en su modelo en deformación plana y desarrollan la siguiente formulación

$$k_{r,dp} = \frac{k_r \left[ \alpha + \beta \frac{k_{r,dp}}{k_{s,dp}} + \theta z(2L - z) \right]}{\ln\left(\frac{r_l}{r_s}\right) + \left(\frac{k_{r,ax}}{k_{s,ax}}\right) \ln\left(\frac{r_s}{r_c}\right) - \frac{3}{4} + \pi z(2L - z) \frac{k_{r,ax}}{k_{c,ax} r_c^2}} \quad (2.15)$$

donde  $k_c$  es la permeabilidad del dren y

$$\alpha = \frac{2}{3} - \frac{2b_s}{B} \left( 1 - \frac{b_s}{B} + \frac{b_s^2}{3B^2} \right) \quad (2.16)$$

$$\beta = \frac{1}{B^2} (b_s - b_w)^2 + \frac{b_s}{3B^3} (3b_w^2 - b_s^2) \quad (2.17)$$

$$\theta = \frac{2k_{r,dp}^2}{k_{s,dp} B k_{c,dp} r_c^2} \left( 1 - \frac{b_w}{B} \right) \quad (2.18)$$

Estas soluciones están elaboradas para drenes verticales, ya que se basan en la solución de Hansbo (1981). Una solución específica para columnas de grava se debe a Tan y Oo (2005) que emplean la solución propuesta por Han y Ye (2001) para obtener el tiempo de consolidación en simetría axial. En esta solución no sólo influye la geometría y la permeabilidad, sino que también hay que considerar los módulos elásticos.

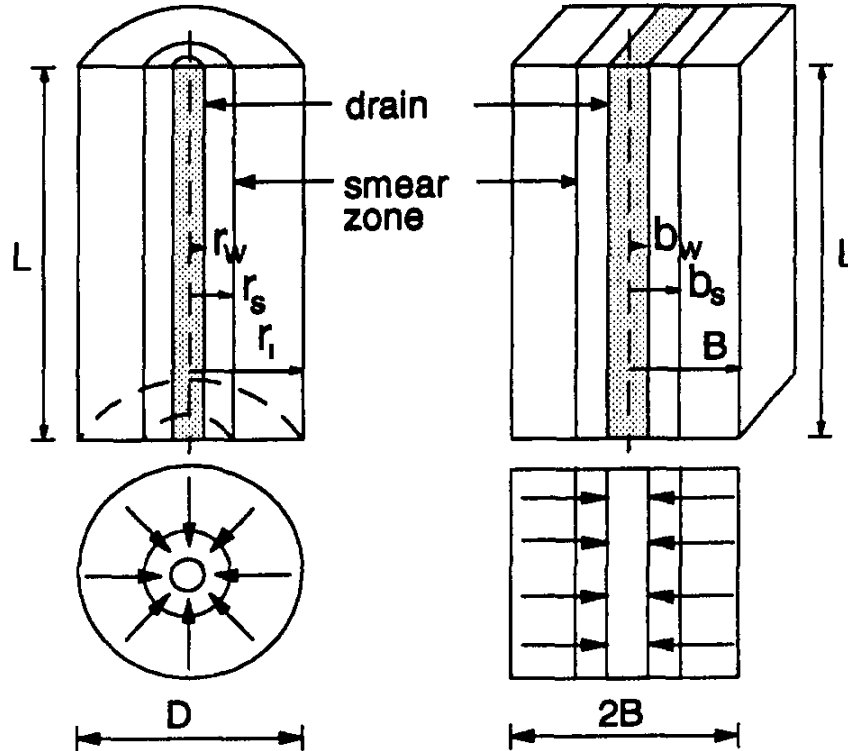


Figura 2.4. Paso a deformación plana (Indraratna y Redana, 1997)

La expresión obtenida es

$$\frac{k_{r,dp}}{k_{r,ax}} = \frac{f\left(\frac{r_l}{r_c}\right)_{dp}}{f\left(\frac{r_l}{r_c}\right)_{ax}} \left[ \frac{1-a_s}{E_{ms}(1-a_s) + E_{mc}a_s} \right]_{dp} \left[ \frac{E_{ms}(1-a_s) + E_{mc}a_s}{1-a_s} \right]_{ax} \frac{B^2}{r_l^2} \quad (2.19)$$

donde

$$f\left(\frac{r_l}{r_c}\right) = \left(\frac{r_l^2}{r_l^2 - r_c^2}\right) \ln\left(\frac{r_l}{r_c}\right) - \left(\frac{3r_l^2 - r_c^2}{4r_l^2}\right) \quad (2.20)$$

### 2.1.2. Simetría axial

El estudio de las columnas en simetría axial es especialmente útil en aquellos casos en los que las columnas se emplean de forma extensiva en mallas uniformemente distribuidas a lo largo y ancho de toda la extensión que se quiere mejorar. La base de la transformación es suponer que el comportamiento de todas las columnas es el mismo. Esto implica que la separación entre columnas es constante y que se desprecian los efectos de borde. De esta manera, se obtiene una única columna rodeada de su parte correspondiente de suelo y con condiciones de contorno de simetría. La última simplificación que se suele hacer es el paso de la forma prismática del suelo circundante a un cilindro, para poder analizar el problema en simetría axial (Figura 2.5). El conjunto de una única columna y su suelo circundante se suele denominar “celda unidad”.

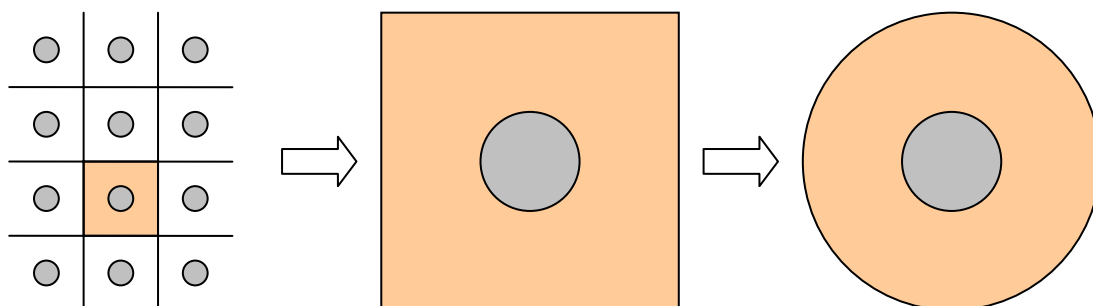


Figura 2.5. Paso a simetría axial

**Tabla 2.1. Diámetro de la celda unidad equivalente**

<i>Distribución</i>	<i>Área de influencia</i>	<i>Diámetro de la celda unidad</i>
Triangular	$\sqrt{\frac{3}{2}}d^2$	$d_l = \sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{\pi}}d \approx 1.050d$
Cuadrada	$d^2$	$d_l = \sqrt{\frac{4}{\pi}}d \approx 1.128d$
Hexagonal	$\frac{3\sqrt{3}}{4}d^2$	$d_l = \sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}}d \approx 1.286d$

La transformación del elemento prismático en uno cilíndrico empleada en todas las referencias conocidas se basa en conservar el diámetro de la columna e igualar las áreas del suelo circundante. El diámetro exterior de la celda unidad así obtenido, función del tipo de malla, aparece en la Tabla 2.1. Esta transformación no es analizada en la bibliografía con el mismo detalle que la realizada para obtener un modelo en deformación plana. No obstante, su justificación teórica debiera basarse en los mismos criterios, exceptuando el caso de la resistencia al corte, ya que no tiene sentido estudiar la estabilidad al deslizamiento de una única celda unidad.

La obtención del diámetro de la celda unidad igualando áreas tiene sentido cuando se emplea el criterio de reducción de asientos pero no parece clara su justificación cuando se igualan tiempos de consolidación. El proceso de obtención de la celda unidad cuando el criterio predominante es el tiempo de consolidación se analiza detalladamente en el Capítulo 3 donde se expone el modelo analítico desarrollado.

## **2.2. CONSOLIDACIÓN**

El suelo es un material formado por tres fases diferentes: partículas sólidas, aire y agua. La aplicación de una carga sobre el mismo actúa de diferente manera sobre cada una de las fases y provoca interacciones entre las mismas. Además de la compresión de cada una de las diferentes fases que generalmente tiene efectos muy pequeños en la deformación del suelo, la reducción del volumen de poros por eliminación de aire o agua explican las mayores deformaciones que se producen.

La eliminación de parte del aire contenido en el suelo por efecto de aplicación de una carga es lo que se conoce como compactación, esta pérdida de aire es prácticamente instantánea en suelos poco cohesivos debido a la gran permeabilidad del aire a través de los poros de la estructura sólida. Esto permite que la compactación se realice tanto con cargas estáticas como dinámicas.

Por otro lado, la pérdida de agua por aplicación de una carga suele retrasarse en el tiempo debido a la menor permeabilidad de su flujo a través de los poros, sobre todo en suelos arcillosos. Este proceso de pérdida de agua demorado en el tiempo se denomina consolidación primaria. Por último, debido a efectos reológicos del suelo como reajustes de partículas, éste continúa deformándose en el tiempo si se mantiene la carga constante, dando lugar a la consolidación secundaria.

En este apartado se trata únicamente la consolidación primaria. Este fenómeno fue planteado y resuelto por Terzaghi y Fröhlich (1936) para el caso concreto de un edómetro. Posteriormente Biot (1941) planteó las ecuaciones del problema general en tres dimensiones.

### **2.2.1. Teoría de Biot (1941)**

Se recoge aquí el planteamiento general de la teoría de Biot, sin incluir las simplificaciones habituales en mecánica de suelos que se muestran en el siguiente apartado. Este planteamiento general permite una visión global más amplia del proceso. Las hipótesis necesarias para el desarrollo de la formulación son las siguientes:

1. Material isótropo
2. Material elástico lineal

3. Pequeñas deformaciones
4. El agua es incompresible
5. El agua puede contener pequeñas burbujas de aire
6. El agua fluye a través de los poros del esqueleto sólido de acuerdo con la Ley de Darcy (1856)

De todas estas hipótesis, la primera no es esencial pero evita que se complique la formulación. La quinta hipótesis implica que la variación de la presión intersticial provoca pequeñas deformaciones en la fase fluida. Por simplicidad, esta hipótesis se ha eliminado en el planteamiento habitual de la teoría de la consolidación empleada en mecánica de suelos, como se muestra en el siguiente apartado.

Las relaciones entre tensiones y deformaciones que se desprenden de la ley de Hooke teniendo en cuenta la presión intersticial del agua son las siguientes:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_y + \sigma_z) + \frac{u}{3H} \\ \varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_z) + \frac{u}{3H} \\ \varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{u}{3H} \end{cases} \quad (2.21)$$

$$\gamma_{xy} = \tau_{xy} / G ; \gamma_{xz} = \tau_{xz} / G ; \gamma_{yz} = \tau_{yz} / G \quad (2.22)$$

La presión intersticial influye por igual en las tres direcciones y no produce tensión tangencial alguna, como queda reflejado en estas expresiones.  $H$  es una constante física adicional que recoge el grado de influencia de la presión intersticial. Aunque se hayan empleado tres parámetros elásticos, sólo dos de ellos son independientes al estar relacionados por la siguiente expresión:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.23)$$

Se ha obtenido la relación de las deformaciones del suelo en función de las tensiones totales aplicadas y la presión intersticial, ahora es necesario definir la dependencia de la variación del contenido de agua,  $\zeta$ , en función de estos mismos parámetros.

$$\zeta = \frac{1}{3H_1}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) + \frac{u}{R} \quad (2.24)$$

Se obtiene que la variación del contenido de agua no depende de las tensiones tangenciales y depende por igual de la variación de cada una de las tensiones principales. Empleando consideraciones de potenciales energéticos también se puede demostrar que la constante  $H_1$  tiene que ser igual a  $H$  (Biot, 1941). La constante física que muestra la influencia de la presión intersticial en este caso es  $R$ .

Reordenando estas expresiones (2.21), (2.22), (2.24) y despejando las tensiones, se obtiene

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= 2G \left( \varepsilon_x + \frac{\nu \varepsilon}{1-2\nu} \right) - \alpha u \\ \sigma_y &= 2G \left( \varepsilon_y + \frac{\nu \varepsilon}{1-2\nu} \right) - \alpha u \\ \sigma_z &= 2G \left( \varepsilon_z + \frac{\nu \varepsilon}{1-2\nu} \right) - \alpha u \end{aligned} \right\} \quad (2.25)$$

$$\gamma_{xy} = \tau_{xy} / G ; \gamma_{xz} = \tau_{xz} / G ; \gamma_{yz} = \tau_{yz} / G \quad (2.26)$$

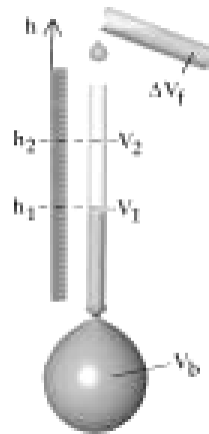
$$\zeta = \alpha \varepsilon + u / Q \quad (2.27)$$

donde

$$\alpha = \frac{2(1+\nu)}{3(1-2\nu)} \frac{G}{H} \quad (2.28)$$

$$\frac{1}{Q} = \frac{1}{R} - \frac{\alpha}{H} \quad (2.29)$$

La constante  $H$  muestra la variación de volumen del material al variar la presión intersticial, mientras que  $R$  da una idea de la variación del contenido de agua al variar la presión intersticial, su inversa se denomina capacidad de almacenamiento.  $Q$  se puede asociar a la compresibilidad del agua. Si se desprecia la compresibilidad del agua ( $Q \rightarrow \infty$ ), como suele hacerse en mecánica de suelos,  $R$  y  $H$  son iguales al módulo de compresión volumétrico  $K$  y el parámetro  $\alpha$  adopta el valor de uno, coincidiendo con la definición de las tensiones efectivas realizada por Terzaghi.



**Figura 2.6. Experimento para determinar las constantes físicas  $H$  y  $R$  de la teoría de Biot (Wang, 2000)**

Para comprender mejor el significado físico de las constantes  $H$  y  $R$  se puede emplear el siguiente experimento (Figura 2.6). Se llena un globo (una membrana flexible) de suelo y se conecta a un pequeño tubo, se añade agua hasta una determinada altura  $h_1$ . Posteriormente, se vierte una determinada cantidad de agua  $\Delta V_f$ . Este volumen de agua adicional provocará un aumento de la presión intersticial en el suelo,  $h_2 - h_1$ . La relación entre estos dos valores es la constante  $R$ . Por otra parte, esta variación de presión intersticial ( $h_2 - h_1$ ) provocará una variación del volumen de suelo,  $\Delta V_b$ , su relación es la constante  $H$ .

Estas dos constantes,  $H$  y  $R$ , también pueden relacionarse con el factor  $B$  de Skempton y el coeficiente de Poisson en situación no drenada,  $\nu_u$ , mediante las expresiones:

$$B = R/H ; \nu_u = \frac{3\nu' + B(1 - 2\nu')}{3 - B(1 - 2\nu')} \quad (2.30)$$

Al aplicar las ecuaciones constitutivas obtenidas (2.25) a las condiciones de equilibrio interno que deben satisfacerse en cualquier medio continuo, se obtiene



$$\left. \begin{aligned} G\nabla^2\delta_x + \frac{G}{1-2\nu}\frac{\partial\varepsilon}{\partial x} - \alpha\frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \\ G\nabla^2\delta_y + \frac{G}{1-2\nu}\frac{\partial\varepsilon}{\partial y} - \alpha\frac{\partial u}{\partial y} &= 0 \\ G\nabla^2\delta_z + \frac{G}{1-2\nu}\frac{\partial\varepsilon}{\partial z} - \alpha\frac{\partial u}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.31)$$

donde  $\delta_x$ ,  $\delta_y$  y  $\delta_z$  son los desplazamientos.

A estas tres ecuaciones diferenciales de equilibrio hay que añadirle la ecuación diferencial que estudia el fenómeno transitorio de la consolidación en el tiempo. Para obtener esta ecuación se emplea la ley de Darcy y la ley de conservación de la masa que implica que la variación del contenido de agua es igual al flujo de agua que entra o sale.

$$k\nabla^2\sigma = \alpha\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} + \frac{1}{Q}\frac{\partial\sigma}{\partial t} \quad (2.32)$$

### 2.2.2. Consolidación tridimensional

El planteamiento general de la consolidación presentado en el apartado anterior (Teoría de Biot, 1941), donde se tiene en cuenta que el agua contiene burbujas de aire que al variar la presión intersticial del agua varían de volumen, se ha seguido desarrollando y actualmente se conoce como Poroelasticidad (Rice y Cleary, 1976; Wang, 2000). Esta teoría es empleada fundamentalmente en mecánica de rocas e hidrogeología porque en estos casos la pequeña compresibilidad de las rocas sí puede ser comparable a la compresibilidad de la fase fluida y permite el uso de conceptos como el contenido de agua y la capacidad de almacenamiento, muy empleados en acuíferos o yacimientos petrolíferos.

En mecánica de suelos, la compresibilidad de la fase fluida se desprecia por simplicidad. De este modo, no es necesario trabajar con el contenido de agua porque es igual a la variación de volumen ( $\zeta = \varepsilon_{vol}$ ). El número de constantes se reduce de cuatro a dos.

$$R = H = \frac{E}{3(1-2\nu)} ; \alpha = 1 ; Q \rightarrow \infty \quad (2.33)$$

Se presenta aquí el desarrollo de la teoría de la consolidación con esta simplificación. Al igual que antes, los dos principios básicos son la ley de conservación de la masa y la ley de pérdida de carga que tradicionalmente es la ley de Darcy.

En este caso, la ley de conservación de la masa significa que la variación de volumen del suelo es igual al flujo de agua que entra o sale. Este flujo de agua es consecuencia del gradiente de presiones intersticiales que provoca la aplicación de una carga. La relación entre el flujo y el gradiente de presiones está fijada por la ley de Darcy. No se considera necesario emplear la teoría general de mecánica de fluidos porque se desprecian los efectos inerciales de segundo orden, al ser las velocidades de filtración pequeñas.

$$\Phi = h + \frac{u}{\gamma_w} + \frac{v^2}{2g} \approx h + \frac{u}{\gamma_w} \quad (2.34)$$

Así se llega a la siguiente formulación:

- Ley de Darcy

$$\bar{v} = -k \overline{\text{grad}}\Phi \quad (2.35)$$

donde  $k$  es la conductividad hidráulica función de la permeabilidad,  $\kappa$ , y de la viscosidad del fluido,  $\mu$ .

$$k = \frac{\kappa \gamma_w}{\mu} \quad (2.36)$$

- Conservación de la masa (variación de volumen igual a flujo de agua)

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \varepsilon_{vol} dV = \int_S \bar{v} \bar{n} dS \quad (2.37)$$

Se aplica el teorema de Gauss al segundo término de (2.37)

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \varepsilon_{vol} dV = \int_V \text{div}(\bar{v}) dV \quad (2.38)$$

Sustituyendo la ley de Darcy (2.35) en (2.38), se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \varepsilon_{vol} dV = -k \int_V \nabla^2 \Phi dV \quad (2.39)$$

Como la ec. (2.39) tiene que cumplirse para cualquier volumen, se simplifica a

$$\frac{\partial \varepsilon_{vol}}{\partial t} = -\frac{k}{\gamma_w} \nabla^2 u \quad (2.40)$$

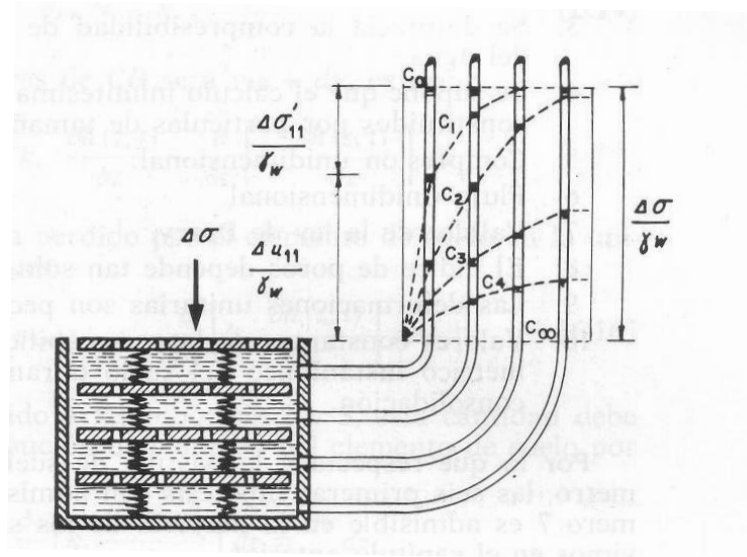
La ecuación (2.40) es la ecuación general de la consolidación en tres dimensiones comúnmente empleada en mecánica de suelos. El inconveniente que presenta la resolución de esta ecuación diferencial es que sus dos variables dependientes del tiempo y del espacio,  $\varepsilon_{vol}$  y  $u$ , están ligadas entre sí. Por este motivo, la consolidación es un problema acoplado. En general, la consolidación es similar a todos aquellos procesos físicos que implican la dispersión de un campo escalar en un medio que varía sus propiedades con este campo, como por ejemplo la difusión convectiva del calor, donde el campo escalar equivalente al exceso de presión intersticial es la temperatura.

El acoplamiento de la ec. (2.40) puede resolverse mediante métodos iterativos o numéricos. Existen determinadas condiciones de contorno para las que es posible desacoplar el problema y obtener una solución analítica (Sills, 1975). Otra posibilidad para obtener soluciones analíticas es realizar hipótesis simplificadoras que desacoplen el problema sin modificar en exceso el resultado.

### 2.2.3. Consolidación unidimensional

La consolidación primaria de una pastilla de suelo confinada lateralmente, sometida a una carga vertical y con flujo de agua exclusivamente vertical fue resuelta por Terzaghi y Frölich en 1936. Éste es uno de los casos en los que las condiciones de contorno permiten desacoplar el problema y sirve de referencia a otros problemas de consolidación más complejos. Se denomina consolidación unidimensional porque las deformaciones y el flujo tienen lugar en una única dirección. Si las deformaciones y el flujo son unidimensionales pero en distintas direcciones, el problema es diferente y complejo (Mandel, 1953). La Figura 2.7 muestra la analogía mecánica propuesta por Terzaghi para entender el proceso.

Aunque el planteamiento y resolución de este problema está en cualquier texto de Geotecnia básica, se ha decidido mostrar aquí la obtención de la ecuación diferencial del problema, su clasificación y analogía con otros problemas y los diferentes métodos de resolución de la ecuación. Estos tres puntos son la base para la resolución de otros problemas de consolidación.



**Figura 2.7. Analogía mecánica de la consolidación (Jiménez Salas et al., 1975)**

La resolución del problema parte de las siguientes hipótesis:

1. El suelo es inicialmente homogéneo
2. Saturación completa
3. Incompresibilidad de los granos de suelo y del agua
4. El cálculo infinitesimal es aplicable a medios constituidos por partículas de tamaño finito
5. Compresión unidimensional
6. Flujo unidimensional
7. Validez de la ley de Darcy
8. El índice de poros depende tan sólo de la presión efectiva
9. Las deformaciones unitarias son pequeñas
10. Valores constantes de la permeabilidad y del módulo edométrico instantáneo del suelo durante todo el proceso de consolidación

Estas hipótesis son similares a las efectuadas por Biot (1941), exceptuando que el problema es unidimensional y que se supone la fase fluida incompresible. También

hay que señalar que se está en los primeros momentos de la mecánica de suelos, de ahí la profusión en el número de hipótesis, algunas de las cuales, como por ejemplo la cuarta, se dan por sentado hoy en día.

Las seis primeras hipótesis son perfectamente admisibles. La ley de Darcy se considera válida aunque recientemente se han propuesto algunas leyes diferentes para la pérdida de carga cuando los gradientes hidráulicos son pequeños (Hansbo, 1997).

La octava hipótesis se cumple en la consolidación primaria pero no en la secundaria, donde ambos fenómenos se superponen, por tanto, cuanto más importante sea la consolidación secundaria, menos admisible será esta hipótesis.

Dependiendo del tipo de suelo y de la geometría del problema, existen casos en los que considerar las deformaciones pequeñas es una aproximación demasiado grosera, lo que obliga a resolver el problema en grandes deformaciones con su consiguiente complejidad matemática. Existen diversas soluciones como Gibson et al. (1967).

La décima hipótesis es discutible, ya que durante la consolidación, al disminuir el índice de poros, el coeficiente de permeabilidad disminuye y el módulo edométrico aumenta. Sin embargo, la hipótesis estrictamente necesaria para obtener la solución es que su producto se mantiene constante, y aunque sigue existiendo una ligera variación, se puede considerar despreciable.

Las particularidades de las condiciones de contorno que permiten obtener una solución analítica son:

- Las tensiones totales se mantienen constantes en todo punto durante el proceso.
- Las deformaciones son únicamente verticales y dependen exclusivamente de la variación del exceso de presión intersticial.
- Las deformaciones y las variaciones de presión intersticial se producen en la misma dirección.

Estas peculiaridades permiten relacionar las dos variables dependientes y obtener una ecuación diferencial función únicamente de la presión intersticial. Además, esta ecuación diferencial en derivadas parciales tiene solución analítica. A continuación

se muestra la obtención de esta ecuación de consolidación unidimensional a partir de la ecuación general en tres dimensiones (2.40).

La deformación volumétrica pasa a ser únicamente deformación vertical al estar confinado lateralmente y no existir deformación horizontal. Esta deformación se relaciona con la tensión vertical a través del módulo edométrico (módulo elástico confinado).

$$\frac{\partial \varepsilon_{vol}}{\partial t} = \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial t} = \frac{1}{E_m} \frac{\partial \sigma_z'}{\partial t} \quad (2.41)$$

Empleando el principio de tensión efectiva y teniendo en cuenta que la tensión total vertical se mantiene constante, se consigue relacionar la deformación volumétrica con el exceso de presión intersticial.

$$\frac{\partial \sigma_z'}{\partial t} = \frac{\partial (\sigma_z - u)}{\partial t} = - \frac{\partial u}{\partial t} \quad (2.42)$$

Al obtener una relación entre las dos variables, la ecuación diferencial en derivadas parciales queda con una única variable dependiente.

$$\frac{k_z}{\gamma_w} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{E_m} \frac{\partial u}{\partial t} \quad (2.43)$$

Todas las constantes físicas se agrupan en una,  $c_v$ , denominada coeficiente de consolidación.

$$c_v = \frac{k_z E_m}{\gamma_w} \quad (2.44)$$

Como en este caso sólo existe flujo en dirección vertical, se omite el subíndice  $z$  para el coeficiente de consolidación. Finalmente, la ecuación de consolidación unidimensional es:

$$c_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (2.45)$$

Se obtiene la misma ecuación diferencial si en lugar de aplicar las condiciones de contorno particulares del problema unidimensional a la ecuación general

tridimensional (2.40), se sigue el mismo proceso empleado para obtener esta última. Así fue como la obtuvieron Terzaghi y Frölich. Plantearon que la diferencia de velocidades entre la cara superior e inferior de un elemento plano e infinitesimal del edómetro es igual a su deformación vertical. Las velocidades de flujo en ambos planos se obtienen a través de la ley de Darcy.

Para simplificar las condiciones de contorno y el desarrollo de la solución es conveniente sustituir la presión intersticial,  $u$ , por la presión intersticial en exceso sobre la hidrostática,  $u_{ex}$ .

$$u_{ex} = u - \gamma_w(z_0 - z) \quad (2.46)$$

En general se suele prescindir del subíndice y se sobreentiende que en un proceso de consolidación, la presión intersticial es en realidad exceso de presión intersticial sobre la hidrostática.

Las condiciones de contorno del problema son:

1. Para  $z = 0$ ,  $\frac{\partial u}{\partial z} = 0$
2. Para  $z = H$ ,  $u = 0$
3. Para  $t = 0$ ,  $u = u_0$

La primera condición de contorno se debe a las condiciones de simetría de la pastilla, de altura  $2H$ . El exceso de presión intersticial inicial,  $u_0$ , se produce al aplicar la carga. Esta aplicación de la carga se supone instantánea y es necesario estudiar la situación no drenada para obtener la distribución inicial de presiones intersticiales.

En la situación no drenada, la tensión octaédrica efectiva se mantiene constante porque no hay cambio de volumen. Esto implica que el incremento de tensión octaédrica total debe contrarrestarse con un incremento de presión intersticial del mismo valor,  $\Delta\sigma_{oct} = \Delta u$ . En el caso del edómetro, el incremento de tensión octaédrica es constante en toda la muestra e igual a la carga aplicada al estar confinado lateralmente.

$$u_0 = p_a \quad (2.47)$$

Para resolver el problema, es cómodo emplear las siguientes variables adimensionales

- Factor tiempo:  $T_v = \frac{c_v t}{H^2}$
- Grado de consolidación:  $U_z = \frac{\varepsilon_{zt}}{\varepsilon_f} = 1 - \frac{u_{zt}}{u_0}$
- Profundidad adimensional:  $\frac{z}{H}$

La ecuación diferencial adimensional función de estas variables es

$$\frac{\partial^2 U_z}{\partial \left(\frac{z}{H}\right)^2} = \frac{\partial U_z}{\partial T_v} \quad (2.48)$$

y las nuevas condiciones de contorno

1. Para  $z/h = 0$ ,  $\frac{\partial U_z}{\partial \left(\frac{z}{H}\right)} = 0$
2. Para  $z/h = 1$ ,  $U_z = 1$
3. Para  $T_v = 0$ ,  $U_z = 0$

A través de este análisis dimensional y analizando el factor tiempo, se comprueba que el tiempo de consolidación es inversamente proporcional al coeficiente de consolidación y directamente proporcional al cuadrado del espesor de una pastilla que drena por una única cara. Esto último se expresa normalmente diciendo que el tiempo de consolidación es proporcional al cuadrado del camino de drenaje.

Antes de resolver la ecuación diferencial que representa la consolidación unidimensional (2.45), se repasan las principales características de este tipo de ecuaciones, así como los diferentes métodos existentes para su resolución.



## Clasificación del problema

Las ecuaciones diferenciales ordinarias suelen aparecer como expresiones matemáticas de leyes físicas en mecánica de partículas y redes eléctricas, esto es, fenómenos en medios discretos o discretizados. En cambio, como se ha visto en este caso, las ecuaciones en derivadas parciales surgen analizando fenómenos en medios continuos, como fluidos, sólidos en estado de deformación o vibración, conducción del calor, campos electromagnéticos, etc.

La ecuación de la consolidación unidimensional (2.45) es una e.d.p. lineal de orden y dimensión dos. La expresión general de este tipo de ecuaciones es

$$A(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y)u = f(x, y) \quad (2.49)$$

donde A, B, C, a, b, c y f son funciones de dos variables dadas en una región del plano, en este caso del plano  $z-t$ .

Además, la ecuación (2.45) es homogénea, ya que  $f(x, y) = 0$ . Con estas propiedades se cumple que cualquier combinación lineal de soluciones es también una solución de la ecuación. Esta propiedad resulta útil en su resolución y requiere que las condiciones de contorno sean también homogéneas. La primera y segunda condición de contorno del edómetro son homogéneas pero no la tercera.

Este tipo de ecuaciones diferenciales se clasifica haciendo uso de la similitud de su expresión general con la expresión de una cónica en el plano

$$AX^2 + BXY + CY^2 + aX + bY + c = 0 \quad (2.50)$$

Así, se dice que la e.d.p. lineal de orden dos es

- Hiperbólica      si       $B^2 - 4AC > 0$
- Parabólica      si       $B^2 - 4AC = 0$
- Elíptica          si       $B^2 - 4AC < 0$

Cuando los coeficientes de la ecuación no son constantes, la ecuación puede ser de un tipo u otro dependiendo de la región que se considere. La importancia de esta

clasificación estriba en la posibilidad de reducir, mediante un cambio de variables, la ecuación (2.49) a una forma canónica más simple y propia de cada tipo de ecuación.

$$\begin{cases} \xi = \xi(x, y) \\ \eta = \eta(x, y) \end{cases} \quad (2.51)$$

Si la ecuación es de tipo hiperbólico se transforma en una canónica de la forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = F\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) \quad (2.52)$$

Si la ecuación es parabólica, la forma canónica obtenida es

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = F\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) \quad (2.53)$$

Y si es de tipo elíptico, ésta se reduce a

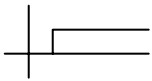
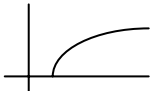
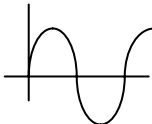
$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = F\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) \quad (2.54)$$

Cada uno de estos tipos tiene sus características propias, tanto en la expresión de la ecuación como en el tipo de condiciones que la pueden acompañar y la forma de su solución.

Para poder comparar los diferentes problemas, se realiza una descripción general de los diferentes elementos que intervienen en estas ecuaciones:

1. Variables independientes: tiempo ( $t$ ), espacio ( $X$ )
2. Variables dependientes
  - a. escalar ( $u$ )
  - b. vectorial ( $\bar{v}$ )
3. Parámetros (características físicas)
  - a. disipación ( $D$ ):  $\frac{\partial u}{\partial X} = -D\bar{v}$
  - b. acumulación de flujo ( $E_v$ ):  $\frac{\partial u}{\partial X} = -E_v \frac{\partial \bar{v}}{\partial t}$
  - c. acumulación de potencial ( $E_u$ ):  $-E_u \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial X}$

**Tabla 2.2. Tipos de e.d.p. de segundo orden (adaptado de Álvarez et al., 1999)**

<i>Tipo</i>	<i>Nombre</i>	<i>Expresión</i>	<i>Elementos</i>	<i>Respuesta</i>
Elíptico	Laplace	$\nabla^2 u = 0$	$D$ ó $E_v$ ó $E_u$	
Parabólico	Difusión	$\nabla^2 u = c \frac{\partial u}{\partial t}$	$D$ y ( $E_v$ ó $E_u$ )	
Hiperbólico	Onda	$\nabla^2 u = h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$	$E_v$ y $E_u$	

La ecuación de la consolidación unidimensional (2.45) es de tipo parabólico, de difusión. En la Tabla 2.2 se muestra, a modo de ejemplo, un problema de cada tipo de e.d.p. de segundo orden. En la consolidación, la ecuación de disipación es la ley de Darcy y la ecuación de acumulación de potencial es la ley de conservación de la masa. En la Tabla 2.3 se reflejan algunas áreas de la física cuyos procesos pueden modelarse mediante e.d.p. y sus variables y parámetros. Se puede comprobar la similitud con la transferencia convectiva de calor.

Existen dos tipos de condiciones de contorno: iniciales y/o de frontera. En este caso hay una condición inicial, ya que se conoce el valor del campo escalar incógnita en el instante inicial, y dos de frontera, una sobre el valor de la función y otra sobre su derivada. Estas condiciones de contorno no pueden ser cualesquiera y deben garantizar, como en este caso, que:

- existe solución
- la solución sea única
- la solución sea estable, es decir, dependa de forma continua de los datos iniciales y de los datos sobre la frontera

**Tabla 2.3. Analogía con diferentes procesos físicos (adapt. de Álvarez et al., 1999)**

<i>Área</i>	<i>Variable</i>		<i>Parámetro</i>		
	escalar	vectorial	disipación	acum. flujo	acum. potencial
Electrodinámica	voltaje	corriente	resistividad	inductancia	capacitancia
Electrostática	potencial eléctrico	flujo			permisividad dieléctrica
Magnetismo	Potencial, MMI	flujo	reluctancia	permeabilidad	
Electro-magnetismo	Potencial, ME	flujo	conductividad	permeabilidad	permisividad eléctrica
Estática (Mecánica)	desplazamiento	fuerza		cte. de muelle	
Dinámica (Mecánica)	velocidad o desplazamiento	fuerza	viscosidad (amortig.)	cte. de muelle	masa (inercia)
Elasticidad	deformación	tensión	viscosidad (amortig.)	módulo de elasticidad	inercia
Difusión de partículas	concentración	transferencia de masa	difusividad	fuerzas de inercia	compresibilidad
Transferencia de calor	temperatura	flujo de calor	resistencia térmica		capacidad térmica
Mecánica de fluidos	presión	caudal	viscosidad	densidad	compresibilidad
Consolidación	presión intersticial	velocidad de flujo	resistencia hidráulica (permeab.)		deformación volumétrica (contenido de agua)

Los dos métodos usuales para resolver este tipo de problemas son: el método de separación de variables y el cálculo operacional o de variable compleja, que es la aplicación de transformadas de Laplace o Fourier y funciones de Green. La idoneidad de uno u otro método depende de cada caso concreto. El problema de la consolidación unidimensional fue resuelto originariamente por Terzaghi mediante separación de variables y posteriormente por Biot mediante la transformada de Laplace. Este último defendía que a pesar de la mayor complejidad matemática de este tipo de solución, su potencia es mucho mayor.

## Método de separación de variables

La idea básica de este método es suponer que la solución,  $u(z,t)$ , puede expresarse como producto de una función de  $z$  por una función de  $t$ , es decir, suponer que sus variables intervienen de forma separada.

$$u(z,t) = Z(z)T(t) \quad (2.55)$$

La sustitución de ese producto en la e.d.p. (2.45) y la imposición de las condiciones de frontera generan dos e.d.o. Resolviendo estas dos e.d.o. se obtiene  $Z(z)$  y  $T(t)$  en función de una serie de constantes, que a su vez se determinan al imponer la condición inicial.

Se sustituye (2.55) en la ec. (2.45)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= Z(z)T'(t) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= Z''(z)T(t) \end{aligned} \right\} \Rightarrow Z(z)T'(t) = c_v Z''(z)T(t) \quad (2.56)$$

Se reordenan los términos de la ecuación para despejar en un lado las funciones de  $z$  y en el otro las de  $t$ .

$$\frac{Z''(z)}{Z(z)} = \frac{T'(t)}{c_v T(t)} \quad (2.57)$$

La e.d.p. así expresada puede separarse en dos e.d.o. Un lado de la ecuación es función de  $z$ , mientras que el otro es función de  $t$ . Para que sean iguales para todo  $z$  y  $t$ , la única solución posible es que sean iguales a una constante,  $-\lambda$ . A través de esta constante se separan las variables.

$$\frac{Z''(z)}{Z(z)} = \frac{T'(t)}{c_v T(t)} = -\lambda \Rightarrow \begin{cases} Z'' + \lambda Z = 0 \\ T' + \lambda c_v T = 0 \end{cases} \quad (2.58)$$

Se separan las variables en las c.c. 1 y 2, y se aplican a la e.d.o. función de  $z$ .

$$\left. \begin{aligned} u(H, t) = Z(H)T(t) = 0 \xrightarrow{T \neq 0} Z(H) = 0 \\ \frac{\partial u(0, t)}{\partial z} = Z'(0)T(t) = 0 \xrightarrow{T \neq 0} Z'(0) = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} Z'' + \lambda Z = 0 \\ Z(H) = Z'(0) = 0 \end{cases} \quad (2.59)$$

En la resolución de esta e.d.o. se distinguen tres casos en función del valor de la constante:

$$1) \lambda < 0 \rightarrow \lambda = -\alpha^2, \alpha > 0$$

$$\left. \begin{aligned} Z'' - \alpha^2 Z = 0 \Rightarrow Z = Ae^{\alpha z} + Be^{-\alpha z} \\ Z'(0) = 0 \Rightarrow A\alpha(e^{\alpha 0} + e^{-\alpha 0}) = 0 \\ Z(H) = 0 \Rightarrow B = -A \end{aligned} \right\} \Rightarrow A = B = 0 \quad (2.60)$$

Esta opción no proporciona soluciones no triviales.

$$2) \lambda = 0$$

$$\left. \begin{aligned} Z'' = 0 \Rightarrow Z = Az + B \\ Z'(0) = 0 \Rightarrow A = 0 \\ Z(H) = 0 \Rightarrow B = -AH \end{aligned} \right\} \Rightarrow A = B = 0 \quad (2.61)$$

Esta opción tampoco proporciona soluciones no triviales.

$$3) \lambda > 0 \rightarrow \lambda = \alpha^2, \alpha > 0$$

$$\left. \begin{aligned} Z'' + \alpha^2 Z = 0 \Rightarrow Z = A \cos \alpha z + B \operatorname{sen} \alpha z \\ Z'(0) = 0 \Rightarrow B \alpha = 0 \\ Z(H) = 0 \Rightarrow A \cos \alpha H = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \alpha H = \frac{(2n-1)\pi}{2} \quad (2.62)$$

siendo  $n$  un número natural cualquiera, por lo que existe una familia infinita de valores para los cuales la e.d.o. tiene solución.

$$\sqrt{\lambda_n} = \alpha_n = \frac{(2n-1)\pi}{2H} \quad (2.63)$$

$$Z_n(z) = \cos \alpha_n z = \cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2H} z\right) \quad (2.64)$$

Se resuelve la e.d.o función de  $t$ :

$$T_n' + \lambda_n c_v T_n = 0 \longrightarrow T_n(t) = e^{-c_v \lambda_n t} \quad (2.65)$$

La familia de soluciones del problema es

$$u_n(z, t) = Z_n(z)T_n(t) = \cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2H} z\right) e^{-c_v \left(\frac{(2n-1)\pi}{2H}\right)^2 t} \quad (2.66)$$

Como se ha comentado, cualquier combinación lineal de soluciones de una e.d.p. lineal homogénea es también solución de la ecuación. Entonces, la solución más general posible es una serie combinación lineal de todas las soluciones,  $u_n$ .

$$u(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2H} z\right) e^{-c_v \left(\frac{(2n-1)\pi}{2H}\right)^2 t} \quad (2.67)$$

Las constantes  $c_n$  se determinan al imponer la condición de contorno inicial.

$$u(z, 0) = u_0 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2H} z\right) \quad (2.68)$$

Esta serie es el desarrollo de Fourier en cosenos de la función  $f(z) = u_0$  en el intervalo  $(0, H)$ . La obtención de cada coeficiente se realiza mediante la siguiente integral

$$c_n = \frac{2}{H} \int_0^H u_0 \cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2H} z\right) dz \quad (2.69)$$

y su valor es

$$c_n = \frac{4(-1)^{n-1}}{(2n-1)\pi} u_0 \quad (2.70)$$

Sustituyendo (2.70) en (2.67), se determina la solución única

$$u(z, t) = u_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{n-1}}{(2n-1)\pi} \cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2H} z\right) e^{-c_v \left(\frac{(2n-1)\pi}{2H}\right)^2 t} \quad (2.71)$$

Su expresión en forma adimensional es

$$U_z = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{n-1}}{(2n-1)\pi} \cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2} \frac{z}{H}\right) e^{-\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\right)^2 T_v} \quad (2.72)$$

y se representa en la Figura 2.8 en forma de isócronas (“curvas de igual tiempo”).

Para simplificar, se puede tomar  $N = \frac{\pi}{2}(2n-1)$

$$U_z = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n-1}}{N} \cos\left(N \frac{z}{H}\right) e^{-N^2 T_v} \quad (2.73)$$

La ec. (2.73), solución del problema, puede expresarse de forma ligeramente diferente si se cambia el sentido de la coordenada vertical,  $z$ , o no se emplea la simetría de la pastilla. La solución aparece en función de senos en lugar de cosenos si la coordenada  $z$  se toma en sentido descendente. También puede aparecer en función de senos si se analiza toda la pastilla, cambiando la c.c. 1.

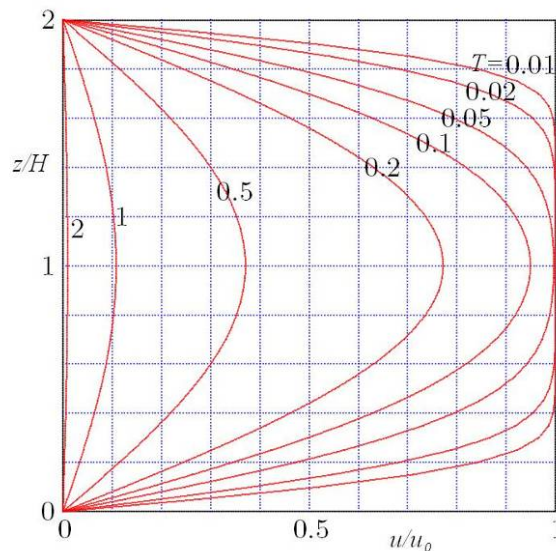


Figura 2.8. Isócronas de la solución de Terzaghi-Frölich (Verruijt, 2006)



Se ha obtenido el grado de consolidación para un instante y profundidad determinadas (2.73), éste representa la deformación a esa profundidad. Para determinar la evolución del asiento total de la pastilla es necesario conocer el grado de consolidación medio, que se obtiene integrando (2.73) en toda la pastilla.

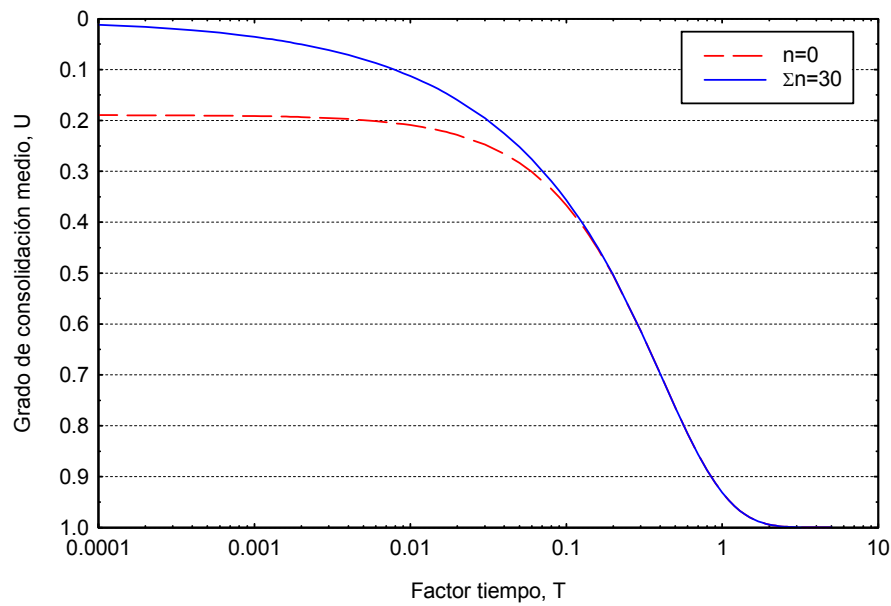
$$U = \frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_f} = \frac{1}{H} \int_0^H U_z dz = \int_0^1 U_z d\left(\frac{z}{H}\right) \quad (2.74)$$

$$U = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{N^2} e^{-N^2 T_v} \quad (2.75)$$

En la Figura 2.9 se muestra el grado de consolidación medio, calculado con 31 términos del desarrollo en serie de Fourier. Con este número de términos, el error es inferior a una milésima. También se muestra el primer término del desarrollo en serie de Fourier. Es evidente que calcular el grado de consolidación haciendo uso del desarrollo en serie de Fourier resulta tedioso, por ello, es frecuente el empleo de tablas y gráficas. También se emplean fórmulas simplificadas de ese desarrollo en serie. La primera consideración que se puede hacer es que gracias al factor exponencial con el tiempo, la serie converge rápidamente. En la Figura 2.9, se comprueba que el primer factor de la serie es suficiente para evaluar grados de consolidación elevados, superiores al 60%. Para valores menores del 60%, se puede suponer que la curva se ajusta a una parábola de la siguiente forma

$$T_v = \frac{\pi}{4} U^2 \quad (2.76)$$

En el apartado 2.2.4 “Soluciones aproximadas” se obtiene la expresión (2.76) de una forma semi-teórica. La aproximación parabólica de la curva de consolidación en su rama inicial se emplea en los métodos de Casagrande y Taylor para obtener el asiento inicial en un ensayo edométrico. En el método de Casagrande, el asiento inicial se obtiene sabiendo que el asiento en un instante  $t$  es la mitad del asiento para  $4t$ . En el método de Taylor, el asiento se representa con respecto a la raíz del tiempo. Así, su rama inicial es una recta. El asiento inicial se obtiene prolongando esta recta hasta su corte con el origen.



**Figura 2.9. Grado de consolidación medio para el caso unidimensional**

## Transformada de Laplace

La transformada de Laplace es particularmente útil en problemas en los cuales las variables están definidas sobre un dominio semi-infinito  $0 \leq t < \infty$ , como ocurre en este caso, donde  $t$  es el tiempo. Además, existe una condición de contorno inicial en esta variable. La transformada de Laplace de una función,  $f(t)$ , se define como

$$L(f) = F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (2.77)$$

donde  $s$  es un parámetro que permite que la integral exista. Mediante la integración en el dominio del tiempo para varios valores de  $s$ , la función  $f(t)$  se transforma en la función  $F(s)$ . Es decir, se consigue pasar de un dominio continuo en el tiempo ( $t$ ) a un dominio continuo o discreto, según el tipo de solución, en “frecuencias de onda” ( $s$ ). Dependiendo de la función  $f(t)$ , la integral (2.77) se puede calcular sencillamente o puede no tener solución analítica.

La propiedad fundamental de la transformada de Laplace que la hace útil para resolver e.d.p. aparece al considerar la transformada de la derivada del tiempo.

$$\int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt = sL(f) - f(0) \quad (2.78)$$

Así se transforma la derivada con respecto del tiempo en una multiplicación por  $s$  y una substracción del valor inicial,  $f(0)$ .

Para resolver la ecuación de la consolidación unidimensional se aplica la transformada de Laplace al exceso de presión intersticial

$$L(u) = \int_0^{\infty} u e^{-st} dt \quad (2.79)$$

La e.d.p. (2.45) se transforma en una e.d.o.

$$sL(u) - u_0 = c_v \frac{d^2 L(u)}{dz^2} \quad (2.80)$$

La solución general a esta e.d.o. es de la forma

$$L(u) = \frac{u_0}{s} + Ae^{z\sqrt{s/c_v}} + Be^{-z\sqrt{s/c_v}} \quad (2.81)$$

donde  $A$  y  $B$  son constantes de integración que pueden depender del parámetro  $s$ . Se obtienen aplicando las dos condiciones de contorno en los bordes. En este caso, por comodidad en la resolución del problema se trabaja con toda la pastilla de suelo y no sólo con la mitad. De esta forma, se impone que en el borde inferior ( $z = 2H$ ) la presión intersticial es nula.

$$\left. \begin{aligned} L(u(0)) = 0 &\Rightarrow \frac{u_0}{s} + A + B = 0 \\ L(u(2H)) = 0 &\Rightarrow \frac{u_0}{s} + Ae^{2H\sqrt{s/c_v}} + Be^{-2H\sqrt{s/c_v}} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.82)$$

La solución es

$$\frac{u}{u_0} = \frac{1}{s} - \frac{\cosh[(H-z)\sqrt{s/c_v}]}{s \cosh[H\sqrt{s/c_v}]} \quad (2.83)$$

Una vez obtenida la solución en el dominio de la variable  $s$ , se necesita realizar la transformada inversa de Laplace de la función  $u$  para obtener la solución del

problema en el dominio del tiempo. Esta transformada inversa puede obtenerse mediante una complicada inversión integral o, de un modo más simple aunque menos riguroso, mediante la aplicación del teorema de expansión de Heaviside. Este teorema establece que la transformada inversa de una función de la forma  $f(s) = P(s)/Q(s)$ , donde el denominador  $Q(s)$  es una función de orden mayor que el numerador  $P(s)$ , está formada por una serie con tantos términos como ceros del denominador  $Q(s)$ . Cada uno de estos términos es de la forma

$$\frac{u}{u_0} = \frac{P(s_n)}{Q'(s_n)} e^{-s_n t} \quad (2.84)$$

En este caso, el denominador es

$$Q(s) = s \cosh\left[H\sqrt{s/c_v}\right] \quad (2.85)$$

y los ceros de esta función son  $s = 0$  y los ceros de la función  $\cosh$ , que son

$$s_n = -(2n-1)^2 \left(\frac{\pi}{2H}\right)^2 c_v \quad (2.86)$$

donde  $n$  es un número natural.

No es necesario considerar el término correspondiente a  $s = 0$  porque su contribución es nula. Para los valores de  $s_n$ , (2.86), el denominador  $P(s)$  es

$$P(s_n) = \cos\left[(2n-1)\frac{\pi}{2}\left(\frac{H-z}{H}\right)\right] \quad (2.87)$$

y la derivada del denominador es

$$Q'(s_n) = \frac{H\sqrt{s_n/c_v}}{2} \sinh\left[H\sqrt{s_n/c_v}\right] \quad (2.88)$$

donde

$$H\sqrt{s_n/c_v} = i(2n-1)\frac{\pi}{2} \quad (2.89)$$

siendo  $i$  la unidad imaginaria ( $i = \sqrt{-1}$ ).

$$Q'(s_n) = -\frac{\pi}{4}(2n-1)\text{sen}\left[(2n-1)\frac{\pi}{2}\right] = -\frac{\pi}{4}(2n-1)(-1)^{n-1} \quad (2.90)$$

La solución final es

$$\frac{u}{u_0} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)} \cos\left[\frac{(2n-1)\pi}{2} \left(\frac{H-z}{H}\right)\right] e^{-c_v \left(\frac{(2n-1)\pi}{2H}\right)^2 t} \quad (2.91)$$

que coincide con la obtenida por el método de separación de variables.

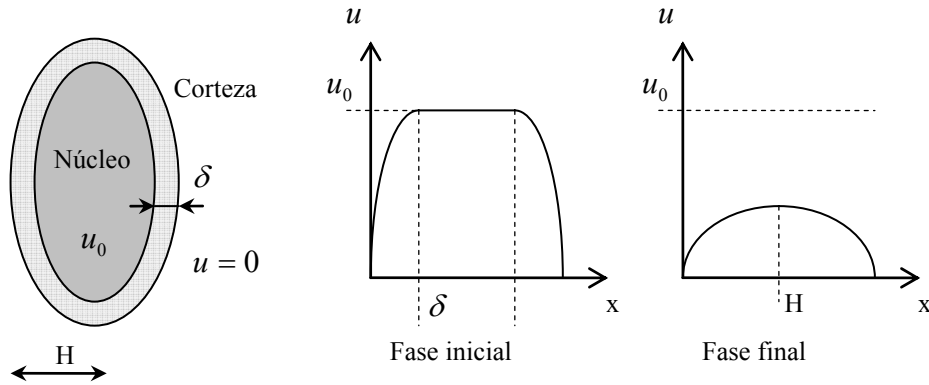
Estrictamente, el teorema de expansión de Heaviside sólo es aplicable a polinomios, pero en este caso sirve para obtener una solución válida.

## 2.2.4. Soluciones aproximadas

### Modelo semi-infinito

Un proceso de difusión como la consolidación con unas condiciones de contorno inicial y de borde como las expuestas en el apartado anterior se puede dividir en dos partes. En la primera parte, la condición de borde, presión intersticial nula, se va transmitiendo a través de todo el sólido considerado. De esta manera, existe una parte del sólido que todavía no ha modificado su estado (núcleo) y otra cercana al borde que ya ha sido afectada por la condición de contorno (corteza). Una vez que la perturbación en el borde se ha transmitido a lo largo de todo el sólido, se está en la segunda etapa del proceso. En la segunda etapa, todo el sólido se ve afectado por la condición de borde y modifica su estado hasta su situación final estacionaria.

La propagación de la perturbación se puede analizar de una forma aproximada. La e.d.p. que gobierna este proceso en el caso unidimensional es (2.45). Emplear la ecuación unidimensional sólo sería válido para ese caso. Sin embargo, para una geometría general como la de la Figura 2.10, se puede considerar que mientras que el espesor de la capa superficial,  $\delta$ , sea pequeño en relación a las dimensiones totales, éste puede estudiarse como si fuese unidimensional.



**Figura 2.10. Diferentes fases durante el proceso de consolidación**

Se supone que la curvatura de la distribución de presiones intersticiales en la capa superficial es constante en toda ella e igual a la diferencia entre las tangentes al inicio y al final de la capa superficial.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \approx \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{x=\delta} - \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{x=0}}{\delta - 0} \quad (2.92)$$

La tangente para el contacto con el núcleo es nula y la tangente en el borde se supone igual a la pendiente media.

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{x=\delta} = 0 ; \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{x=0} \approx \frac{u_0}{\delta} \quad (2.93)$$

Sustituyendo (2.93) en (2.92) se obtiene

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \approx -\frac{u_0}{\delta^2} \quad (2.94)$$

Para obtener el otro término de la ecuación se supone que la presión intersticial media en la capa superficial ha disminuido a una fracción de la inicial, en un tiempo  $t$ .

$$\frac{\partial u}{\partial t} \propto -\frac{u_0}{t} \quad (2.95)$$

Igualando los dos términos (2.94) y (2.95)

$$c_v \frac{u_0}{\delta^2} \propto \frac{u_0}{t} \quad (2.96)$$

se llega a la conclusión de que el espesor de la capa superficial aumenta con la raíz del tiempo transcurrido.

$$\delta \propto \sqrt{c_v t} \quad (2.97)$$

La transición a la segunda fase del proceso se produce cuando el espesor de la capa superficial alcanza a todo el sólido  $\delta = H$ . Así, se pasa de una fase a otra para un tiempo  $t$  directamente proporcional al cuadrado de sus dimensiones e inversamente proporcional al coeficiente de consolidación.

$$t \propto \frac{H^2}{c_v} \quad (2.98)$$

A esta misma conclusión se puede llegar de un análisis dimensional, ya que el paso de una a otra fase se produce para un factor tiempo determinado,  $T_v = \frac{c_v t}{H^2}$ .

El objetivo de dividir el proceso es comprender mejor los mecanismos que lo gobiernan y obtener soluciones aproximadas para cada una de sus fases.

Una forma de obtener soluciones aproximadas para la primera fase del proceso es emplear un modelo semi-infinito del problema. Es decir, mientras la perturbación en el borde se está propagando a todo el sólido, sus dimensiones totales no influyen y se puede considerar infinito en esa dirección.

A continuación, se obtiene una solución de la primera fase del proceso de consolidación unidimensional a través de un modelo semi-infinito.

Las condiciones de contorno de este modelo son

$$\begin{cases} u(0, t) = 0 \\ u(z, 0) = u_0 \\ u \rightarrow \text{acotada} \end{cases} \quad (2.99)$$

Empleando la transformada de Laplace con respecto del tiempo, la e.d.p. (2.45) se convierte en

$$sL(u) - u_0 = c_v \frac{d^2 L(u)}{dz^2} \quad (2.100)$$

y su solución general es

$$L(u) = \frac{u_0}{s} + A e^{z\sqrt{s/c_v}} + B e^{-z\sqrt{s/c_v}} \quad (2.101)$$

Aplicando las c.c. se obtiene el valor de las constantes.

$$\left. \begin{array}{l} u \rightarrow \text{acotada} \Rightarrow A = 0 \\ u(0,t) = 0 \Rightarrow B = -\frac{u_0}{s} \end{array} \right\} \rightarrow L(u) = u_0 \left( \frac{1}{s} - \frac{e^{-z\sqrt{s/c_v}}}{s} \right) \quad (2.102)$$

Una vez resuelta la ecuación es necesario realizar la transformada inversa, para ello se emplea que

$$L \left[ \operatorname{erfc} \left( \frac{a}{2\sqrt{x}} \right) \right] = \frac{e^{-a\sqrt{s}}}{s} \quad (2.103)$$

De este modo, la solución al problema es

$$u(z,t) = u_0 \left[ 1 - \operatorname{erfc} \left( \frac{z}{2\sqrt{c_v t}} \right) \right] = u_0 \operatorname{erf} \left( \frac{z}{2\sqrt{c_v t}} \right) \quad (2.104)$$

donde erf es la función error obtenida al integrar una distribución normal o de Gauss y erfc es la función complementaria de la función error que cumple que  $\operatorname{erf}(z) = 1 - \operatorname{erfc}(z)$ .

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \quad (2.105)$$

Se expresa (2.104) de forma adimensional

$$1 - U_z = \operatorname{erf} \left( \frac{z/H}{2\sqrt{T_v}} \right) \quad (2.106)$$



El tiempo que tarda en propagarse hasta una profundidad  $H$  es

$$T_v = \frac{1}{16} \quad \text{ó} \quad t = \frac{H^2}{16c_v} \quad (2.107)$$

Se ha obtenido el grado de consolidación a una determinada profundidad, (2.106). Su integral en profundidad proporciona el grado de consolidación medio.

$$U = \int_0^1 U_z d\left(\frac{z}{H}\right) = \int_0^1 \left[ 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{z/H}{2\sqrt{T_v}}\right) \right] d\left(\frac{z}{H}\right) \quad (2.108)$$

La integral de la función error es

$$\int \operatorname{erf}(x) dx = x \operatorname{erf}(x) + \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}} \quad (2.109)$$

y el grado de consolidación medio

$$U = \left[ \frac{z}{H} - \frac{z}{H} \operatorname{erf}\left(\frac{z/H}{2\sqrt{T_v}}\right) - 2\sqrt{T_v} \frac{e^{-\frac{z/H}{2\sqrt{T_v}}}}{\sqrt{\pi}} \right]_0^1 = 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{1}{2\sqrt{T_v}}\right) - 2\sqrt{T_v} \frac{e^{-\frac{1}{2\sqrt{T_v}}}}{\sqrt{\pi}} + \frac{2\sqrt{T_v}}{\sqrt{\pi}} \quad (2.110)$$

Para simplificar la expresión (2.108), se aproxima la función error por la serie

$$\operatorname{erf}(x) = 1 - \frac{e^{-x^2}}{x\sqrt{\pi}} \left( 1 - \frac{1}{2x^2} - \dots \right) \quad (2.111)$$

y se desprecian los términos de menor orden, resultando la siguiente expresión para el grado de consolidación medio:

$$U = 2\sqrt{\frac{T_v}{\pi}} \quad (2.112)$$

Este resultado coincide con la aproximación parabólica de la rama inicial indicada en (2.76)

## Isócronas parabólicas

De la solución analítica en desarrollo en serie de Fourier (2.72), se deduce que la forma geométrica de las isócronas es similar a lo largo del tiempo. Una aproximación de la solución analítica es suponer una forma determinada para las mismas. Se ha visto ya que una función seno puede ser un muy buen ajuste para las últimas etapas del proceso. Sin embargo, si se asume una función parabólica, la solución del problema es mucho más sencilla matemáticamente (Schofield y Wroth, 1968).

Para definir la forma de las parábolas se separa el proceso en las dos fases comentadas (Figura 2.11). En la primera, la caída de la presión intersticial a cero en el borde se propaga a todo el espesor de la pastilla. En este caso, se conoce que la tangente de la parábola es horizontal para el punto más lejano que ha alcanzado la perturbación, y el parámetro que define la parábola es precisamente esa profundidad máxima que ha sido afectada por el cambio de presión intersticial en el borde.

Una vez que se ha supuesto una forma determinada de las isócronas, se emplean consideraciones físicas sobre la consolidación para obtener la incógnita  $\lambda$  que define la parábola. El cambio de volumen del suelo, o lo que es lo mismo, el asiento producido, es proporcional al cambio de tensiones efectivas. Este cambio de tensiones efectivas se debe a la disipación de presiones intersticiales.

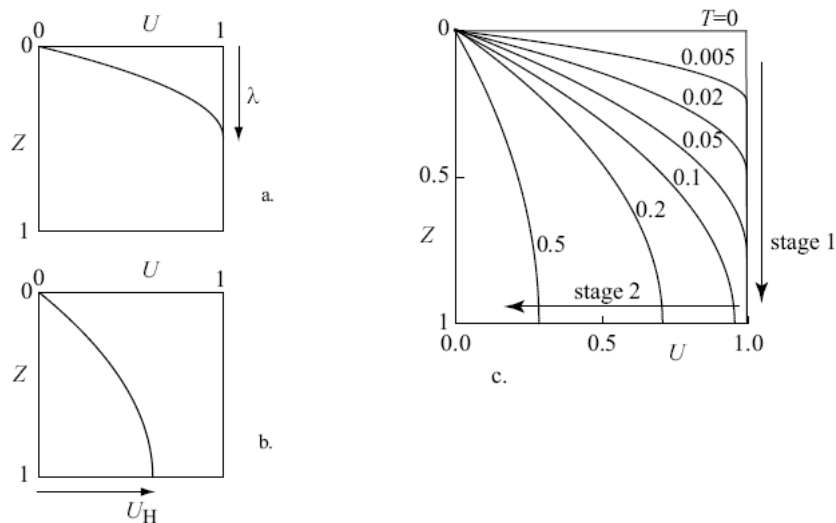


Figura 2.11. Isócronas parabólicas (Muir Wood, 2004)

$$\delta = \frac{Hu_0}{E_m} \int_0^\lambda U_z d\left(\frac{z}{H}\right) \quad (2.113)$$

Esta integral, (2.113), es el área existente entre la parábola y la línea de  $U_z = 0$ . Por la geometría de la parábola se puede obtener directamente su valor.

$$\delta = \frac{Hu_0}{E_m} \frac{\lambda}{3} \quad (2.114)$$

La derivada del asiento (2.114) con respecto del tiempo es

$$\frac{d\delta}{dt} = \frac{Hu_0}{3E_m} \frac{d\lambda}{dt} \quad (2.115)$$

Esta derivada del asiento con respecto del tiempo es igual al agua eliminada en el contacto superior debido a la ley de conservación de la masa. El flujo de agua eliminada en el contacto superior está gobernado por la ley de Darcy y éste es proporcional al gradiente de presiones intersticiales, es decir, a la pendiente de la isócrona parabólica en el origen.

$$\frac{d\delta}{dt} = \frac{k_z}{\gamma_w} \frac{2u_0}{H\lambda} \quad (2.116)$$

Igualando (2.115) y (2.116)

$$\lambda d\lambda = \frac{k_z E_m}{\gamma_w} \frac{6}{H^2} dt$$

y resolviendo la e.d.o. en  $\lambda$ , sabiendo que para  $t = 0$  el parámetro  $\lambda$  es nulo, se llega a

$$\lambda = \sqrt{12 \frac{c_v t}{H^2}} = \sqrt{12 T_v} \quad (2.117)$$

El grado de consolidación medio se obtiene como la relación entre asiento y asiento final.

$$U = \frac{\delta}{\delta_f} = \frac{\lambda}{3} = 2\sqrt{\frac{T_v}{3}} \quad (2.118)$$

Las expresiones (2.117) y (2.118) son directamente comparables con las ecuaciones (2.107) y (2.112) del modelo semi-infinito. La diferencia entre esta solución aproximada y la exacta para el caso del grado de consolidación es sólo la diferencia entre la raíz de 3 y la raíz de  $\pi$ .

Cuando no existe ningún punto en la capa de suelo cuya presión intersticial sea la original, la forma de definir la parábola varía (Figura 2.11). A esta situación se llega cuando  $T_v=1/12$ , ec. (2.117). Por tanto, la segunda fase sólo es válida para tiempos mayores. En el borde superior, la presión intersticial sigue siendo nula, y en el borde inferior, la tangente a la parábola es vertical, debido a la condición de impermeabilidad. El parámetro que define la forma de la parábola es la presión intersticial en el borde impermeable,  $U_{z=H}$ . Se realizan las mismas consideraciones que en la fase inicial para obtener el asiento y el flujo en el borde superior.

$$\frac{d\delta}{dt} = \frac{2Hu_0}{3E_m} \frac{dU_{z=H}}{dt} \quad (2.119)$$

$$\frac{d\delta}{dt} = \frac{k_z}{\gamma_w} \frac{2u_0(1-U_{z=H})}{H} \quad (2.120)$$

La e.d.o. que se obtiene es la siguiente

$$\frac{dU_{z=H}}{1-U_{z=H}} = 3dT_v \quad (2.121)$$

La condición de contorno inicial es que para  $T_v=1/12$  la presión intersticial en el borde inferior es igual a la inicial. La solución de (2.121) con esta c.c. es

$$U_{z=H} = 1 - e^{-3\left(T_v - \frac{1}{12}\right)} \quad (2.122)$$

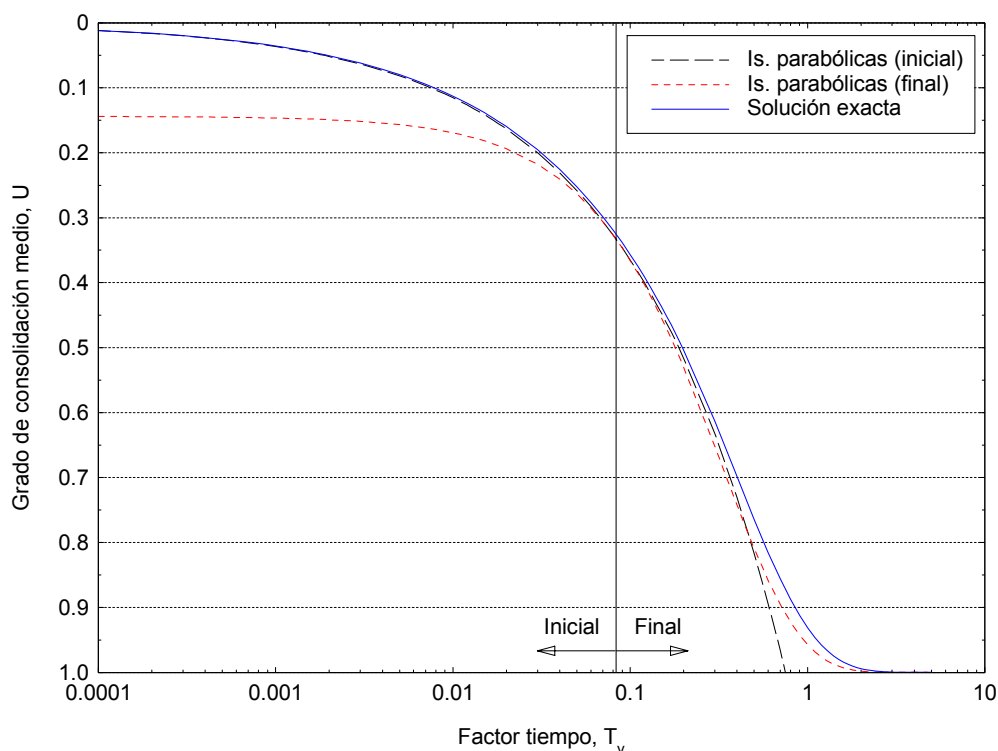
El grado de consolidación medio es

$$U = 1 - \frac{2}{3} e^{-3\left(T_v - \frac{1}{12}\right)} \quad (2.123)$$

Se concluye que mediante simplificaciones y un análisis cuantitativo del proceso se obtienen soluciones con un buen grado de aproximación (Figura 2.12). Estas

soluciones son sencillas, permiten capturar la esencia física del proceso, eliminan la complejidad matemática del problema y contribuyen a entender como se aplica el principio de conservación de la masa y la ley de Darcy.

Este método es aplicable a otras formas diferentes de las isócronas y a otros problemas. Por ejemplo, Muir Wood (2004) generaliza la forma de las isócronas a funciones polinómicas y lo aplica al caso de drenaje radial.



**Figura 2.12. Comparación de la solución exacta con la solución aproximada de isócronas parabólicas**

### 2.2.5. Acoplamiento. Efecto Mandel-Cryer

La consolidación es un problema acoplado al existir una interacción mutua entre el campo de presiones intersticiales y el tensor de deformaciones. Analizando detalladamente el proceso, se distinguen dos tipos de acoplamiento (Wang, 2000):

- Acoplamiento de la fase fluida sobre la sólida
- Acoplamiento de la fase sólida sobre la fluida

El acoplamiento de la fase fluida sobre el esqueleto sólido se refiere a la influencia que origina un cambio en la fase fluida sobre el esqueleto sólido. Un cambio de presión intersticial provoca un cambio en el volumen de poros del esqueleto sólido, modificando su deformación volumétrica.

El acoplamiento sólido sobre fluido ocurre cuando un cambio en las tensiones aplicadas sobre el esqueleto sólido (tensiones totales) genera un cambio de la presión intersticial.

El primer tipo de acoplamiento (difusión) es el que generalmente se trata en los problemas de consolidación, como por ejemplo en el caso unidimensional. A las ecuaciones constitutivas de la elasticidad es preciso añadirle las deformaciones provocadas por el cambio de presión intersticial, de una manera análoga a como se hace en termoelasticidad. Al igual que un aumento de temperatura provoca una expansión del sólido, un incremento de presiones intersticiales provoca que el medio se expanda.

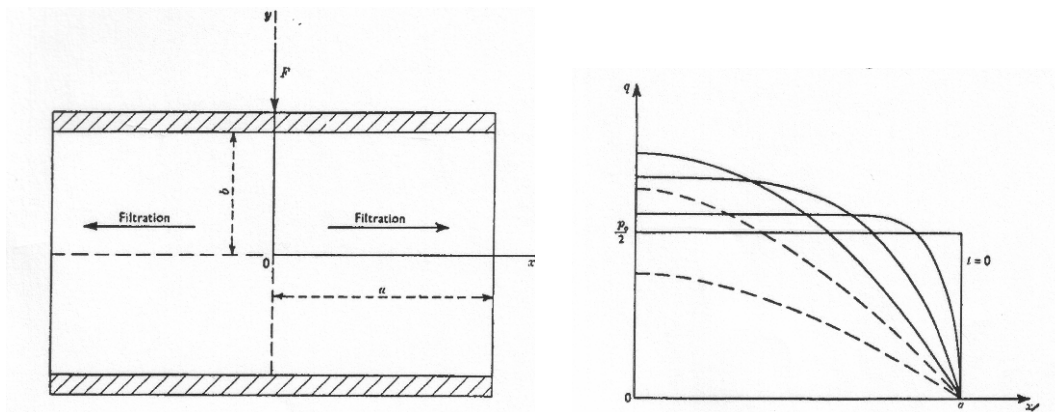
El segundo tipo de acoplamiento es más difícil de tratar, si bien, su base conceptual es clara, al cambiar las tensiones totales aplicadas sobre el sólido varía la presión intersticial. La manera más sencilla de desacoplar este problema es considerar la situación no drenada por un lado, y posteriormente la fase de consolidación. Así, por ejemplo, la carga aplicada por un terraplén se maneja como diferentes escalones instantáneos de carga. De esta forma, para cada escalón se determina el incremento de presión intersticial provocado de una forma instantánea y posteriormente se estudia el proceso de consolidación aparte, en el que las presiones intersticiales se disipan pero no aumentan por aplicación de ninguna carga. Existen soluciones que consideran diferentes formas de aplicar la carga en el tiempo, tratando el problema de una manera acoplada, aunque éstas suelen ser complejas y más costosas de manejar.

En la analogía con la termoelasticidad, este tipo de acoplamiento no suele aparecer, a no ser que se tengan en cuenta conceptos más complejos como la entropía. Al aplicar una carga sobre un medio, su temperatura prácticamente no varía pero sí su presión intersticial.

La simplificación mencionada, tratar la situación no drenada primero y posteriormente la consolidación, es posible en aquellos casos en los que la variación de

la tensión total se debe a la variación de la tensión exterior aplicada. Cuando la variación de las tensiones se produce como consecuencia de su redistribución al consolidar el medio, el estudio debe realizarse de una manera acoplada.

La explicación de esta redistribución de tensiones puede verse de la siguiente manera: un medio al consolidar sufre una serie de deformaciones volumétricas, las cuales no se producen por igual a lo largo del tiempo en todo el medio, ya que las partes más cercanas al drenaje se comprimirán antes que las más lejanas. Esto quiere decir que en un medio homogéneo si existen condiciones de contorno en desplazamientos paralelas al camino de drenaje, durante las primeras etapas de la consolidación las partes más cercanas al drenaje tenderán a liberar carga y las más lejanas aumentarán su tensión total, aumentando su presión intersticial. Los efectos provocados por estas redistribuciones de tensiones se conocen en Geotecnia como “Efecto Mandel-Cryer”, ya que tanto Mandel (1953) como Cryer (1963) estudiaron problemas en los que se producía esta redistribución de tensiones. Para entender este efecto es útil dividir el proceso de consolidación en dos, al igual que se hizo en el apartado 2.2.4 “Soluciones aproximadas”, ya que el “Efecto Mandel-Cryer” es más importante durante la propagación de la perturbación provocada en el borde, fase inicial.



**Figura 2.13. Problema estudiado por Mandel (1953)**

Mandel estudió la consolidación de una pastilla de arcilla con las condiciones de contorno que se muestran en la Figura 2.13. Se divide la pastilla en dos, por un lado la parte que ha sido afectada por la condición de borde (corteza) y por otro lado la que no (núcleo). El asiento que debería tener lugar en la parte afectada por la condición de borde es proporcional al área encerrada entre la isócrona y la recta de presión intersticial

igual a la inicial. Por otro lado, la parte que todavía no ha sido afectada por la condición de borde no debería sufrir ningún asiento. Como la condición de borde en desplazamientos impone que éste debe ser el mismo en ambas regiones, su contacto se desplaza horizontalmente hacia el extremo drenado, para que la parte no afectada siga sin cambiar de volumen pero asiente como consecuencia de este movimiento horizontal. El asiento será el debido a la compresión de la corteza pero promediado a lo largo de toda la pastilla. Las deformaciones producidas provocan una redistribución de tensiones, de tal manera que en la parte no afectada, la tensión vertical aumenta y en la otra disminuye. En la parte no afectada no sólo aumenta la tensión vertical, sino que también lo hace la tensión octaédrica, a pesar de que la tensión horizontal disminuye, lo que provoca que la presión intersticial en el núcleo que todavía era la inicial aumente por encima de este valor. Éste es el fenómeno más representativo del “Efecto Mandel-Cryer”, en el núcleo y para tiempos pequeños, la presión intersticial aumenta por encima del valor inicial debido a la redistribución de tensiones.

Cryer (1963) estudió el problema de la consolidación de una esfera sometida a una presión uniforme en todo su contorno (hidrostática) y siendo este el contorno de drenaje. Los resultados obtenidos son similares al caso anterior, en cuanto que en la zona más alejada al contorno de drenaje (núcleo) y para tiempos pequeños, la presión intersticial aumenta por encima de la inicial. Sin embargo, la explicación física del fenómeno es ligeramente diferente.

Al igual que antes, se divide la esfera en dos, el núcleo que todavía no ha sido afectado por la condición de contorno de drenaje y la cáscara exterior que si ha sido afectada. Esta última, al consolidar, disminuye de volumen y por tanto de radio, lo que provoca una compresión adicional en la parte interior o núcleo. Por tanto, la presión intersticial en el núcleo para tiempos pequeños aumenta por encima de la inicial.

Como ejemplo, en la Figura 2.14 se muestra la presión intersticial en el centro de un cilindro que drena por su perímetro en dirección radial y sobre el que se aplica una carga rígida vertical. En este caso, se produce una mezcla de los fenómenos que ocurren en el caso de Mandel y de Cryer. La solución doblemente acoplada (Biot) recoge el efecto Mandel-Cryer y se ha calculado a partir de Cui y Abousleiman (2001) con un coeficiente de Poisson no drenado de 0.499, muy próximo al teórico de 0.5 que no es



posible numéricamente. La transformada inversa de Laplace se ha realizado numéricamente. La solución que sólo tiene en cuenta el acoplamiento de la fase fluida sobre la sólida (Terzaghi) tiene la siguiente forma (Verruijt, 2006):

$$\frac{u}{u_0} = 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\alpha_i r / r_c)}{\alpha_i J_1(\alpha_i)} e^{-\alpha_i^2 c_v t / r_c^2} \quad (2.124)$$

donde  $\alpha_i$  son las raíces de la función  $J$  de Bessel de orden cero,  $J_0(x)$ . El sumatorio se ha realizado con 6 términos. Con este número de términos, la solución no es aceptable para tiempos menores de 0.02.

En la práctica, no se suele tener en cuenta el acoplamiento de la fase sólida sobre la fluida. A pesar de las diferencias mostradas en la Figura 2.14, la magnitud relevante no es la presión intersticial en el núcleo, sino la deformación de todo el conjunto y su asiento. Para esta magnitud, los resultados obtenidos son similares si se exceptúa la rama inicial de la consolidación.

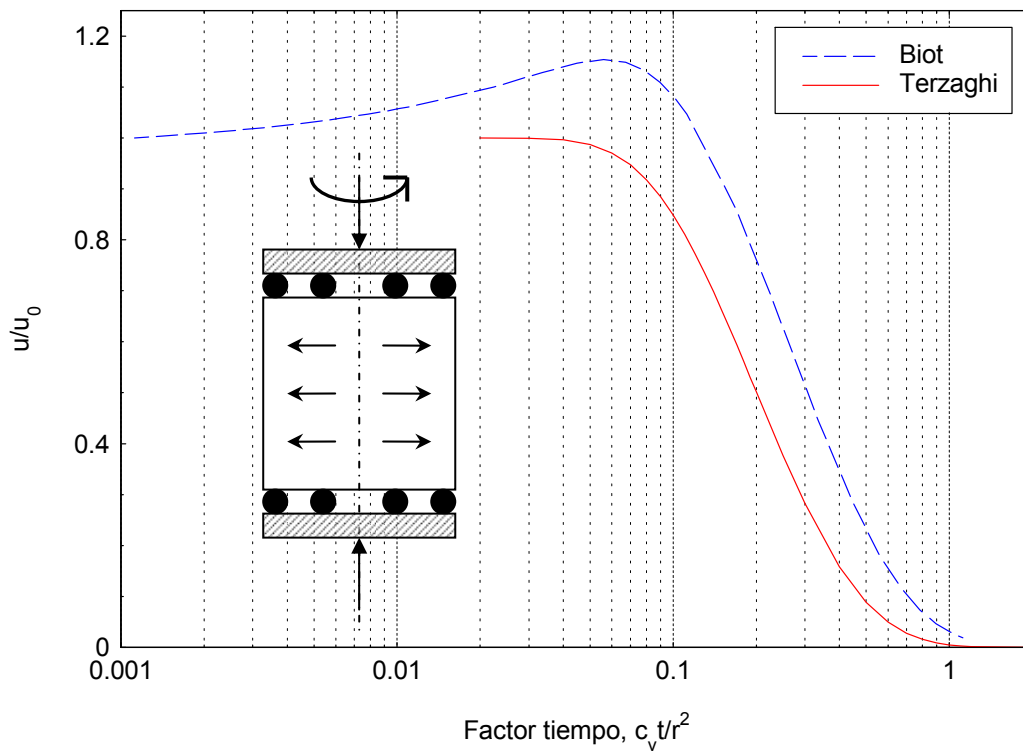


Figura 2.14. Presiones intersticiales en el centro del cilindro

## 2.2.6. Métodos numéricos

### Diferencias finitas

El método de diferencias finitas es particularmente interesante para la consolidación, porque es un proceso transitorio en el tiempo. Por sencillez, se describe su aplicación al caso unidimensional, aunque es perfectamente generalizable a tres dimensiones. Se basa en discretizar el medio continuo en una malla de nodos. La presión intersticial únicamente se evalúa en los nodos y no en el dominio continuo. Al igual que se discretiza el dominio espacial, también se divide el tiempo en diferentes incrementos,  $\Delta T$ , y sólo en esos instantes se determina la distribución de presiones intersticiales. Una vez discretizados el espacio y el tiempo, se resuelve la ecuación diferencial, considerando las derivadas continuas como relaciones entre incrementos.

Por comodidad, se emplea la ecuación de la consolidación en su forma adimensional (2.48). Su término temporal es

$$\frac{\partial U}{\partial T} = \frac{U_{z,T} - U_{z,T+\Delta T}}{\Delta T} \quad (2.125)$$

El otro término de la ecuación es la segunda derivada con respecto del espacio, para ello se emplean los nodos adyacentes.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial Z^2} = \frac{\left(\frac{\partial U}{\partial Z}\right)_{i,i+1} - \left(\frac{\partial U}{\partial Z}\right)_{i-1,i}}{\Delta Z} = \frac{\frac{U_{i+1,t} - U_{i,t}}{\Delta Z} - \frac{U_{i,t} - U_{i-1,t}}{\Delta Z}}{\Delta Z} = \frac{U_{i+1,t} + U_{i-1,t} - 2U_{i,t}}{(\Delta Z)^2} \quad (2.126)$$

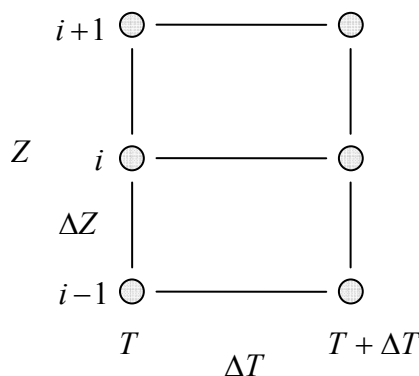


Figura 2.15. Discretización en diferencias finitas

Igualando ambos lados (2.125) y (2.126), se llega a

$$\frac{U_{z,T} - U_{z,T+\Delta T}}{\Delta T} = \frac{U_{i+1,t} + U_{i-1,t} - 2U_{i,t}}{(\Delta Z)^2} \quad (2.127)$$

La derivada segunda con respecto al espacio, puede plantearse para  $T$  ó para  $T + \Delta T$ . En función de que se haga de una u otra manera, se tiene un método de diferencias finitas explícito o implícito respectivamente.

El primer caso se denomina así porque permite ir resolviendo directamente la ecuación (2.127), sin necesidad de resolver ningún sistema de ecuaciones. Una vez planteada la condición de contorno inicial se van obteniendo los valores para los diferentes incrementos de tiempo.

$$U_{i,T+\Delta T} = U_{i,T} + \frac{\Delta T}{(\Delta Z)^2} (U_{i+1,T} + U_{i-1,T} - 2U_{i,T}) \quad (2.128)$$

El caso explícito es muy sencillo de resolver, pero puede presentar problemas de convergencia y estabilidad en función de la malla de nodos elegida. Para garantizar la estabilidad de la solución es suficiente con que la malla cumpla

$$\frac{\Delta T}{(\Delta Z)^2} \leq 0.5 \quad (2.129)$$

Es decir, los incrementos de tiempo admisibles son menores que una cierta fracción de los incrementos tomados en el espacio.

En el caso implícito, el grado de consolidación para un incremento de tiempo no se puede obtener directamente a partir de la expresión (2.128), ya que es función de valores desconocidos. Todas estas ecuaciones generan un sistema de ecuaciones resoluble. Este método requiere el almacenamiento de la matriz del sistema de ecuaciones y su inversión. Exige, por tanto, mayor tiempo de computación. Por el contrario, no presenta los problemas de inestabilidad del caso explícito.

Por último, existe un caso mixto entre el explícito y el implícito. Consiste en obtener la derivada segunda (2.126) como una media del valor para  $T$  y para  $T + \Delta T$ .

## Método gráfico

Basado en el método de diferencias finitas, existe un método gráfico para resolver los problemas de difusión. Este método fue propuesto por Helenelund (1951) para el caso de la consolidación, pero aplicado a la transmisión de calor se conoce como el método de Binder-Schmidt.

Se aplica el método de diferencias finitas explícito y se elige una malla que esté en el límite de estabilidad, es decir, que cumpla

$$\frac{\Delta T}{(\Delta Z)^2} = 0.5 \quad (2.130)$$

La ec. (2.128) se simplifica a

$$U_{i,T+\Delta T} = U_{i,T} + 0.5(U_{i+1,T} + U_{i-1,T} - 2U_{i,T}) = \frac{U_{i+1,T} + U_{i-1,T}}{2} \quad (2.131)$$

Esta ecuación (2.131) establece que la presión intersticial futura de un nodo interior es la media aritmética de la presión intersticial de los dos nodos vecinos en el momento actual, permitiendo realizar la construcción grafica representada en la Figura 2.16. Esta construcción tiene el inconveniente de que da el mismo valor para la presión intersticial de un nodo para dos intervalos de tiempo consecutivos, por este motivo se alternan en la figura isócronas continuas y de trazos. Se comprueba que la aproximación de la solución es muy grosera si los intervalos seleccionados son grandes, pero si son lo suficientemente pequeños, se obtienen isócronas razonablemente aproximadas, incluso para periodos de tiempo pequeños. Helenelund estableció que el número de nodos seleccionado debe ser elegido de tal forma que permita representar al menos 4 isócronas antes de obtener la isócrona deseada.

Este método tiene limitadas sus aplicaciones a geometrías y procesos monodimensionales, pero puede ser útil para distribuciones de presiones intersticiales no uniformes o estratos de arcilla con diferentes permeabilidades.

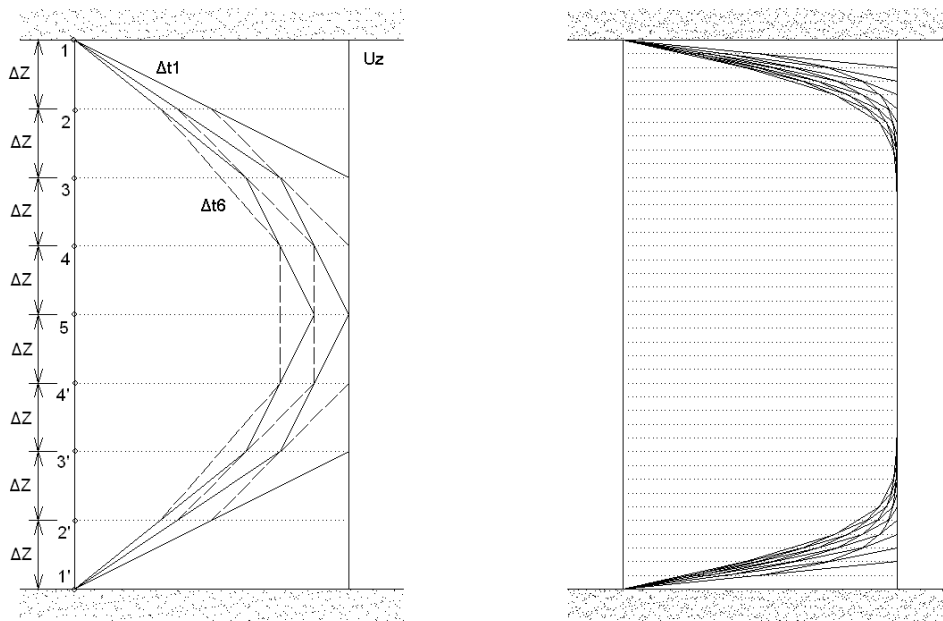


Figura 2.16. Método gráfico para estudiar la consolidación

### Elementos finitos

Los elementos finitos han demostrado ser una herramienta muy útil también en la resolución de problemas de consolidación, siendo un buen ejemplo en este contexto la tesis de Sainz Borda (1979). El método de los elementos finitos resuelve el problema en desplazamientos, empleando como incógnitas los desplazamientos en una serie de nodos que definen los elementos en los que se divide el continuo. Los desplazamientos,  $\delta$ , en el resto de los puntos se interpolan a partir de los que se producen en los nodos,  $\delta_n$ , mediante unas funciones de forma,  $\mathbf{N}$ .

$$\delta = \mathbf{N}\delta_n \quad (2.132)$$

$$\varepsilon = \mathbf{A}\delta = \mathbf{A}\mathbf{N}\delta_n = \mathbf{B}\delta_n \quad (2.133)$$

$$\sigma = \mathbf{D}\varepsilon = \mathbf{D}\mathbf{B}\delta_n \quad (2.134)$$

$$\mathbf{A}^T\mathbf{D}\mathbf{B}\delta_n - \mathbf{f} = 0 \quad (2.135)$$

La matriz  $\mathbf{A}$  es el operador en derivadas que relaciona las deformaciones con los desplazamientos,  $\mathbf{D}$  es la matriz que representa las ecuaciones constitutivas elásticas y  $\mathbf{f}$  es el vector de fuerzas exteriores.

La ec. (2.135) se resuelve con la formulación débil del método de Galerkin, en el que las funciones de peso son las funciones de forma,  $\mathbf{N}$ , y se impone la integral a todo el volumen de cada elemento.

$$\int_e \mathbf{N}^T \mathbf{A}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \delta_n dV - \int_e \mathbf{N}^T \mathbf{f} dV = 0 \quad (2.136)$$

Se define una matriz de rigidez,  $\mathbf{K}_n$ , y un vector de fuerzas exteriores en los nodos,  $\mathbf{F}_n$ .

$$\mathbf{K}_n = \int_e \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV ; \mathbf{F}_n = \int_e \mathbf{N}^T \mathbf{f} dV \quad (2.137)$$

Ensamblando todas las matrices de los elementos se obtiene un sistema de  $n$  ecuaciones lineales donde las incógnitas son los desplazamientos en los nodos.

$$\mathbf{K}_n \delta_n - \mathbf{F}_n = 0 \quad (2.138)$$

El problema elástico en un medio poroso requiere una incógnita adicional a los desplazamientos, la presión intersticial. A las ecuaciones constitutivas, de equilibrio y de compatibilidad, hay que añadir el principio de presión efectiva, la conservación de la masa y la pérdida de carga (ley de Darcy).

-Equilibrio (en tensiones totales)

$$\mathbf{A}^T \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{f} = 0 \quad (2.139)$$

-Ecuaciones constitutivas (en tensiones efectivas)

$$\boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{D}' \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.140)$$

-Compatibilidad

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{A} \delta \quad (2.141)$$

-Presión efectiva

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}' + \mathbf{m} u \quad (2.142)$$

El vector  $\mathbf{m}$  indica que la presión intersticial solo actúa según los ejes principales.

$$\mathbf{m}^T = (1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0) \quad (2.143)$$

Combinando estas ecuaciones (2.139, 2.140, 2.141, 2.142) se obtiene

$$\mathbf{A}^T \mathbf{D}' \mathbf{A} \delta + \mathbf{A}^T \mathbf{m} u - \mathbf{f} = 0 \quad (2.144)$$

-Conservación de la masa

$$\nabla v - \frac{\partial \varepsilon_{vol}}{\partial t} + Q = \nabla v - \mathbf{m}^T \mathbf{T} \varepsilon + Q \quad (2.145)$$

donde  $v$  es la velocidad del fluido,  $Q$  son las fuentes o sumideros y  $\mathbf{T}$  es el operador derivada respecto al tiempo.

-Ley de Darcy

$$v = -\frac{k}{\gamma_w} \nabla u - k \nabla z \quad (2.146)$$

De (2.145) y (2.146) se obtiene

$$-\frac{1}{\gamma_w} \nabla^T k \nabla u + \mathbf{m}^T \mathbf{A} \mathbf{T} \delta - Q = 0 \quad (2.147)$$

Se discretiza el medio poroso en una serie de nodos y se aplica Galerkin.

-Equilibrio (2.144)

$$\int_e \mathbf{N}^T \mathbf{A}^T \mathbf{D}' \mathbf{B} \delta_n dV + \int_e \mathbf{N}^T \mathbf{A}^T \mathbf{N}_u \mathbf{m} u_n dV - \int_e \mathbf{N}^T \mathbf{f} dV = 0 \quad (2.148)$$

donde  $\mathbf{N}_u$  son las funciones de forma elegidas para el exceso de presión intersticial. Se toman matrices de rigidez, vectores de fuerzas y presiones intersticiales para simplificar la expresión (2.148).

$$\mathbf{K}'_n = \int_e \mathbf{B}^T \mathbf{D}' \mathbf{B} dV ; \mathbf{L}_n = \int_e \mathbf{B}^T \mathbf{m} \mathbf{N}_u dV ; \mathbf{F}_n = \int_e \mathbf{N}^T \mathbf{f} dV \quad (2.149)$$

Así, se obtiene

$$\mathbf{K}'_n \delta_n + \mathbf{L}_n u_n - \mathbf{F}_n = 0 \quad (2.150)$$

-Conservación de la masa (2.145)

$$-\int_e \frac{1}{\gamma_w} \mathbf{N}_u^T \nabla^T \mathbf{k} \nabla \mathbf{N}_u dV \mathbf{u}_n + \int_e \mathbf{N}_u^T \mathbf{m}^T \mathbf{B} dV \mathbf{T} \delta_n - \mathbf{Q}_n = 0 \quad (2.151)$$

Para simplificar (2.151), se emplea (2.149) y

$$\Phi_n = -\int_e \frac{1}{\gamma_w} \mathbf{N}_u^T \nabla^T \mathbf{k} \nabla \mathbf{N}_u dV \quad (2.152)$$

Finalmente, se obtiene

$$\mathbf{L}_n^T \mathbf{T} \delta_n - \Phi_n \mathbf{u}_n - \mathbf{Q}_n = 0 \quad (2.153)$$

Existen diversos procedimientos para resolver el problema transitorio en el tiempo. Entre ellos, los basados en técnicas incrementales son bastante utilizados por las posibilidades que ofrecen.

Se considera que en un incremento de tiempo,  $\Delta t$ , se produce un incremento de desplazamientos,  $\Delta \delta_n$ , y de presiones intersticiales,  $\Delta u_n$ , y se impone la ec. (2.153) de conservación de la masa en este intervalo.

$$\mathbf{L}_n^T \Delta \delta_n - \int_t^{t+\Delta t} \Phi_n \mathbf{u}_n dt - \mathbf{Q}_n \Delta t = 0 \quad (2.154)$$

La integral se realiza mediante la siguiente aproximación

$$\int_t^{t+\Delta t} \Phi_n \mathbf{u}_n dt \approx \Phi_n (\mathbf{u}_n + \alpha \Delta \mathbf{u}_n) \Delta t ; (0 \leq \alpha \leq 1) \quad (2.155)$$

Se obtiene

$$\mathbf{L}_n^T \Delta \delta_n - \Phi_n (\mathbf{u}_n + \alpha \Delta \mathbf{u}_n) \Delta t - \mathbf{Q}_n \Delta t = 0 \quad (2.156)$$

que reordenando términos, se simplifica a

$$\mathbf{L}_n^T \Delta \delta_n - \Phi_n \alpha \Delta t \Delta \mathbf{u}_n - (\mathbf{Q}_n + \Phi_n \mathbf{u}_n) \Delta t = 0 \quad (2.157)$$

Booker y Small (1975) plantean que para que esta técnica incremental sea estable se debe cumplir  $\alpha > 0.5$ .



Expresando las ecuaciones (2.150) y (2.157) en forma matricial se obtiene

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K}'_n & \mathbf{L}_n \\ \mathbf{L}_n^T & -\alpha \Phi_n \Delta t \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \delta_n \\ \Delta \mathbf{u}_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{F}_n \\ \mathbf{Q}_n + \Phi_n \mathbf{u}_n \Delta t \end{Bmatrix} \quad (2.158)$$

La solución se obtiene resolviendo el sistema de ecuaciones (2.158).

## 2.2.7. Consolidación radial para drenes verticales

### Carrillo (1942)

No se trata propiamente de una solución para consolidación radial, sino de la disgregación de la consolidación radial y vertical para el caso de drenes verticales. La celda unidad en simetría axial se descompone en suma de un cilindro infinito y un estrato horizontal (Figura 2.17). El exceso de presión intersticial es el producto de ambos casos.

$$\frac{u}{u_0} = \frac{u_r}{u_0} \frac{u_z}{u_0} \quad (2.159)$$

Así, la resolución del problema se divide en dos, por un lado el drenaje vertical, que puede resolverse según la solución de Terzaghi-Frölich y por otro, el drenaje radial, para el que es necesario desarrollar una nueva solución.

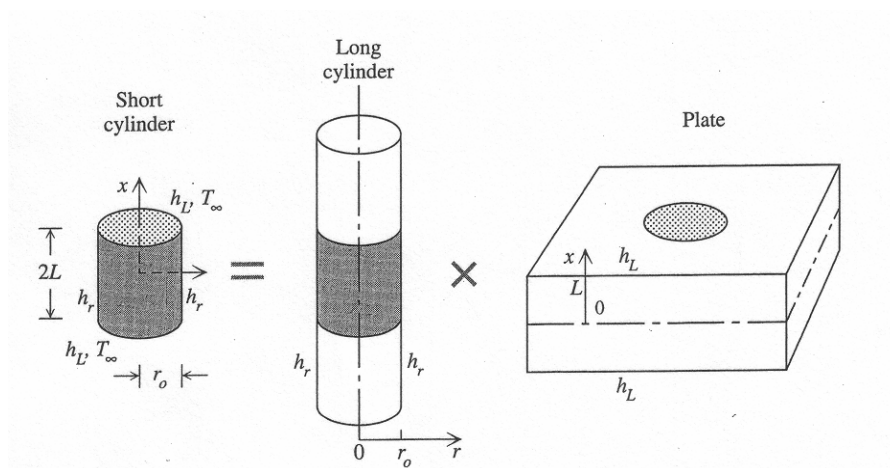


Figura 2.17. Disgregación en drenaje radial y vertical (Bejan, 1993)

La ecuación general de la consolidación (2.40) simplificada para el caso de simetría axial y considerando únicamente el acoplamiento fluido-sólido (difusión) es

$$\frac{k_r}{\gamma_w} \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right] + \frac{k_z}{\gamma_w} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{E_m} \frac{\partial u}{\partial t} \quad (2.160)$$

Se sustituye el exceso de presión intersticial planteado en (2.159) en (2.160).

$$\frac{k_r}{\gamma_w} \left[ \frac{u_z}{u_0} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{u_z}{u_0} \frac{\partial u_r}{\partial r} \right] + \frac{k_z}{\gamma_w} \frac{u_r}{u_0} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} = \frac{1}{E_m} \frac{u_z}{u_0} \frac{\partial u_r}{\partial t} + \frac{1}{E_m} \frac{u_r}{u_0} \frac{\partial u_z}{\partial t} \quad (2.161)$$

Esta expresión se puede separar en dos.

$$c_{vr} \left[ \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} \right] = \frac{\partial u_r}{\partial t} \quad (2.162)$$

$$c_{vz} \frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} = \frac{\partial u_z}{\partial t} \quad (2.163)$$

Éstas son las dos e.d.p. a resolver. La solución de la ec. (2.163) es la de Terzaghi-Frölich, y la ec. (2.162) es la ecuación objeto de estudio. El grado de consolidación medio se obtiene mediante la siguiente expresión:

$$1 - U_{zr} = (1 - U_r)(1 - U_z) \quad (2.164)$$

Es una práctica habitual emplear esta simplificación en los problemas de drenes verticales. No obstante, para algunos casos, esta simplificación no es exacta y sólo se puede tomar como una aproximación. En la demostración de esta propiedad se ha empleado la ecuación difusiva de la consolidación en simetría axial (2.160). En ella, la deformación volumétrica ha sido relacionada directamente con la presión intersticial a través del módulo edométrico. Esto sólo es cierto para el caso sencillo de deformación libre, dren ideal y sin zona remoldeada. A efectos prácticos, su importancia es menor, ya que generalmente la componente de drenaje vertical es despreciable frente a la radial, y en algunos casos incluso se ignora.

### Barron (1948)

Es una de las primeras soluciones conocidas de consolidación radial para drenes verticales. Estudia una celda unidad en simetría axial (Figura 2.18), separando el drenaje radial y vertical (Carrillo, 1942). Permite incluir la permeabilidad del dren y la zona remodelada. Distingue dos casos diferentes en función de las condiciones de contorno; carga flexible y rígida.

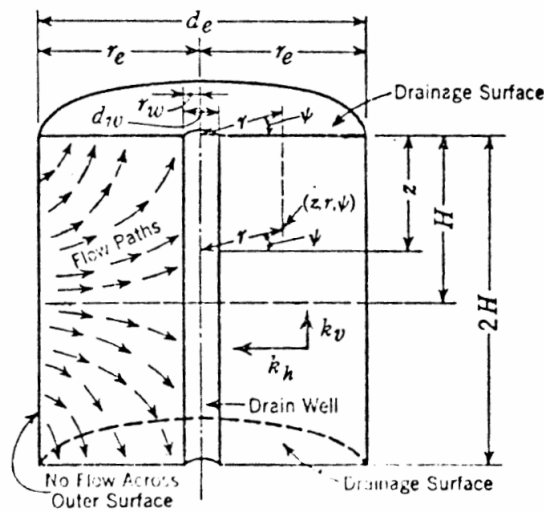


Figura 2.18. Celda unidad en simetría axial (Barron, 1948)

#### a) Carga flexible

El caso de carga flexible es “a priori” el más sencillo, porque no existe ninguna condición de contorno en desplazamientos, y no aparece, por tanto, el segundo tipo de acoplamiento (fase sólida sobre fluida). Haciendo uso de la analogía térmica, se trataría de un cilindro hueco cuya superficie interior se enfría repentinamente y su contorno exterior está aislado (Carslaw y Jaeger, 1959). La ecuación de la consolidación radial a resolver es la ec. (2.162).

Emplea el método de separación de variables

$$u_r = R(r)T(t) \tag{2.165}$$

Sustituyendo (2.165) en (2.162), se obtienen las dos e.d.o.

$$R''(r) + \frac{1}{r} R'(r) + \lambda c_{vr} R(r) = 0 \quad (2.166)$$

$$T'(t) + \lambda T(t) = 0 \quad (2.167)$$

donde  $\lambda$  es la constante que permite separar las variables. La solución a la primera e.d.o. (2.166) es en funciones de Bessel y la de la segunda (2.167) es de tipo exponencial.

Se llega a la misma situación si se aplica la transformada de Laplace a (2.162).

$$\frac{d^2 L(u)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dL(u)}{dr} - \frac{n}{c_{vr}} L(u) = -\frac{u_0}{c_{vr}} \quad (2.168)$$

La solución de esta ecuación (2.168) es en funciones de Bessel y al hacer la transformada inversa de Laplace aparece el término exponencial en el tiempo. La solución general es del tipo

$$u_r = \left[ A J_0\left(\frac{\alpha r}{r_c}\right) + B Y_0\left(\frac{\alpha r}{r_c}\right) \right] e^{\mu} \quad (2.169)$$

donde  $A$ ,  $B$  y  $\alpha$  son constantes de integración y

$$\mu = -\left( 2\alpha \frac{r_l}{r_c} \right)^2 T_r \quad (2.170)$$

siendo  $T_r = \frac{c_{vr} t}{4r_l^2}$  el tiempo adimensional para la consolidación radial.

Se impone la condición de contorno de borde externo impermeable

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} = -\frac{\alpha}{r_c} [A J_1(\alpha r_l / r_c) + B Y_1(\alpha r_l / r_c)] e^{\mu} = 0 \quad (2.171)$$

$$B = -A \left[ \frac{J_1(\alpha r_l / r_c)}{Y_1(\alpha r_l / r_c)} \right] \quad (2.172)$$

Para determinar  $\alpha$  se impone la condición de contorno de presión intersticial nula en el dren.

$$u_r = AJ_0(\alpha) - A \frac{J_1(\alpha)}{Y_1(\alpha)} Y_0(\alpha) = 0 \quad (2.173)$$

Esta ecuación tiene infinitas raíces  $\alpha_n$ , difíciles de obtener.

Para obtener la constante  $A$  se impone la condición de contorno inicial empleando una solución general combinación lineal de las diferentes soluciones (diferentes valores de  $\alpha_n$ ). Se llega a

$$u_r = u_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\frac{2}{\alpha_n} U_1(\alpha_n) U_0\left(\frac{\alpha_n r}{r_c}\right) e^{\mu}}{\left(\frac{2}{\pi \alpha_n}\right)^2 - U_0^2(\alpha_n) - U_1^2(\alpha_n)} \quad (2.174)$$

donde se define la función  $U$  como

$$U_0(\alpha_n) = J_0(\alpha_n) Y_1\left(\frac{\alpha_n r_l}{r_c}\right) - J_1\left(\frac{\alpha_n r_l}{r_c}\right) Y_0(\alpha_n) \quad (2.175)$$

$$U_1(\alpha_n) = J_1(\alpha_n) Y_1\left(\frac{\alpha_n r_l}{r_c}\right) - J_1\left(\frac{\alpha_n r_l}{r_c}\right) Y_1(\alpha_n) \quad (2.176)$$

$$U_0\left(\frac{\alpha_n r}{r_c}\right) = J_0\left(\frac{\alpha_n r}{r_c}\right) Y_1\left(\frac{\alpha_n r_l}{r_c}\right) - J_1\left(\frac{\alpha_n r_l}{r_c}\right) Y_0\left(\frac{\alpha_n r}{r_c}\right) \quad (2.177)$$

Este es el desarrollo de la solución para carga flexible pero sin zona remodelada y con un dren de permeabilidad infinita. Barron (1948) también obtuvo la solución para carga flexible con una zona remodelada de diámetro  $r_s$  y permeabilidad  $k_s$ . En este caso, se consideran dos zonas de permeabilidad diferente y se compatibiliza el flujo de agua en el contacto. La solución presenta una forma muy parecida a (2.174)

$$u_r = u_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\frac{2}{\alpha_n} U_1\left(\frac{\alpha_n r_s}{r_c}\right) U_0\left(\frac{\alpha_n r}{r_c}\right) e^{\mu}}{\left(\frac{2}{\pi \alpha_n}\right)^2 - U_0^2\left(\frac{\alpha_n r_s}{r_c}\right) - U_1^2\left(\frac{\alpha_n r_s}{r_c}\right)} \quad (2.178)$$

donde  $\mu$  es igual que en el caso anterior sin zona remodelada (2.170) y la función  $U$  es también la misma cambiando  $\alpha_n$  por  $\frac{\alpha_n r_s}{r_c}$ . Sin embargo,  $\alpha_n$  son ahora las raíces de la siguiente ecuación

$$\frac{k_s U_0\left(\frac{\alpha_n r_s}{r_c}\right)}{k_r \frac{\alpha_n r_s}{r_c} \ln \frac{r_s}{r_c}} + U_1\left(\frac{\alpha_n r_s}{r_c}\right) = 0 \quad (2.179)$$

Promediando el valor de la presión intersticial a lo largo del radio entre  $r_s$  y  $r_l$ , se obtiene la presión intersticial media.

$$\bar{u}_r = u_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{U_1\left(\frac{\alpha_n r_s}{r_c}\right) e^{\mu}}{\alpha_n^2 \left(\frac{r_l^2 - r_s^2}{r_c^2}\right) \left[ \left(\frac{2}{\pi \alpha_n}\right)^2 - U_0^2\left(\frac{\alpha_n r_s}{r_c}\right) - U_1^2\left(\frac{\alpha_n r_s}{r_c}\right) \right]} \quad (2.180)$$

Esta presión media,  $\bar{u}_r$ , refleja la evolución del asiento medio de la celda unidad. Una solución rigurosa para el caso de carga flexible con zona remodelada y permeabilidad finita del dren fue obtenida por Yoshikuni y Nakanodo (1974), si bien, su complejidad limita su utilidad práctica.

Aunque el caso de carga flexible parece el más sencillo “a priori”, su solución es difícil de manejar porque requiere la obtención de las raíces de una ecuación en funciones de Bessel, (2.173) ó (2.179).

### b) Carga rígida

En el caso de carga rígida, la condición de contorno en desplazamientos, asiento vertical uniforme, provoca el acoplamiento de la fase sólida sobre la fluida. Este tipo de acoplamiento se resuelve realizando la hipótesis de deformaciones radiales nulas. De esta forma, toda la pérdida de agua se transforma en deformación vertical. Por la condición de contorno, esta deformación vertical es constante con el radio. Barron justifica esta hipótesis argumentando que no se producen deformaciones tangenciales y que los desplazamientos horizontales en el contorno son nulos.

Esta hipótesis permite simplificar la ecuación general de la consolidación radial

$$\frac{k_r}{\gamma_w} \left[ \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} \right] = - \frac{\partial \varepsilon_{vol}}{\partial t} \quad (2.181)$$

La deformación volumétrica es igual a la deformación vertical y ésta no depende del radio. Para que la deformación no dependa del radio es necesario que la curva de presión vertical aplicada y la de presión intersticial sean paralelas, tal y como se muestra en la Figura 2.19. Esto permite trabajar con una presión intersticial media para obtener la deformación vertical (la barra superior  $\bar{\quad}$  indica que se trata de un valor medio a lo largo del radio).

$$\frac{\partial \varepsilon_{vol}}{\partial t} = \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial t} = \frac{1}{E_m} \frac{\partial (\bar{\sigma}_z - \bar{u}_r)}{\partial t} = - \frac{1}{E_m} \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial t} \quad (2.182)$$

Se aplica (2.182) a (2.181)

$$c_{vr} \left[ \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} \right] = \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial t} \quad (2.183)$$

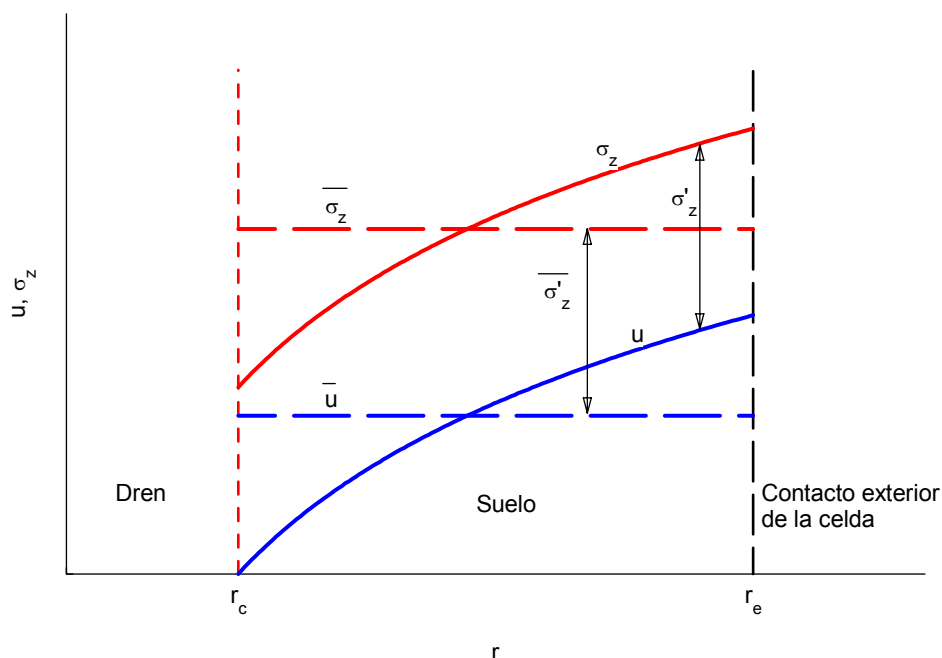


Figura 2.19. Variación radial de la tensión vertical y la presión intersticial en el caso de Barron (1948) con carga rígida

Aplicando el método de separación de variables a (2.183) se obtienen dos e.d.o.

$$R''(r) + \frac{1}{r} R'(r) = -\lambda \quad (2.184)$$

$$T'(t) + \lambda c_{vr} T(t) = 0 \quad (2.185)$$

La solución de la ec. (2.184) es del tipo “ $\ln r - r^2$ ”. En esta ecuación se imponen las condiciones de contorno en el borde interior y exterior del cilindro. La solución de la ec. (2.185) es exponencial. Finalmente, su producto es la solución al caso de carga rígida sin zona remodelada y con un dren de permeabilidad infinita.

$$u_r = \bar{u}_r \frac{\left[ \ln\left(\frac{r}{r_c}\right) - \frac{r^2 - r_c^2}{2r_l^2} \right]}{\mu} \quad (2.186)$$

siendo la presión intersticial media

$$\bar{u}_r = u_0 e^{-8T_r/\mu} \quad (2.187)$$

y donde

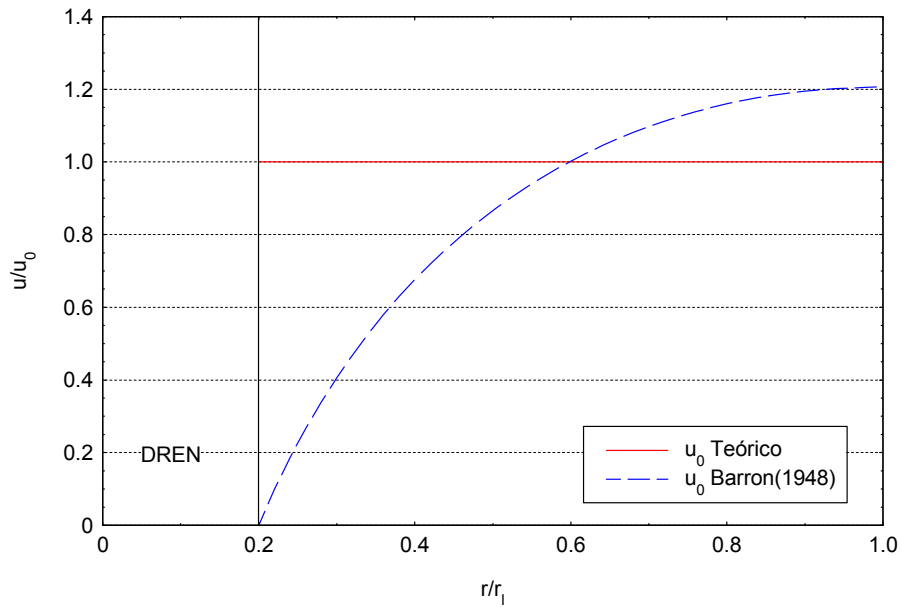
$$\mu = \frac{r_l^2}{r_l^2 - r_c^2} \ln\left(\frac{r_l}{r_c}\right) - \frac{3}{4} + \frac{r_c^2}{4r_l^2} \quad (2.188)$$

La hipótesis de deformaciones radiales nulas conlleva que la condición de contorno inicial se impone utilizando la presión intersticial media, no su distribución a lo largo del radio. Así, la distribución inicial de presiones intersticiales no coincide con la obtenida por Barron (1948), aunque sí su valor medio (Figura 2.20).

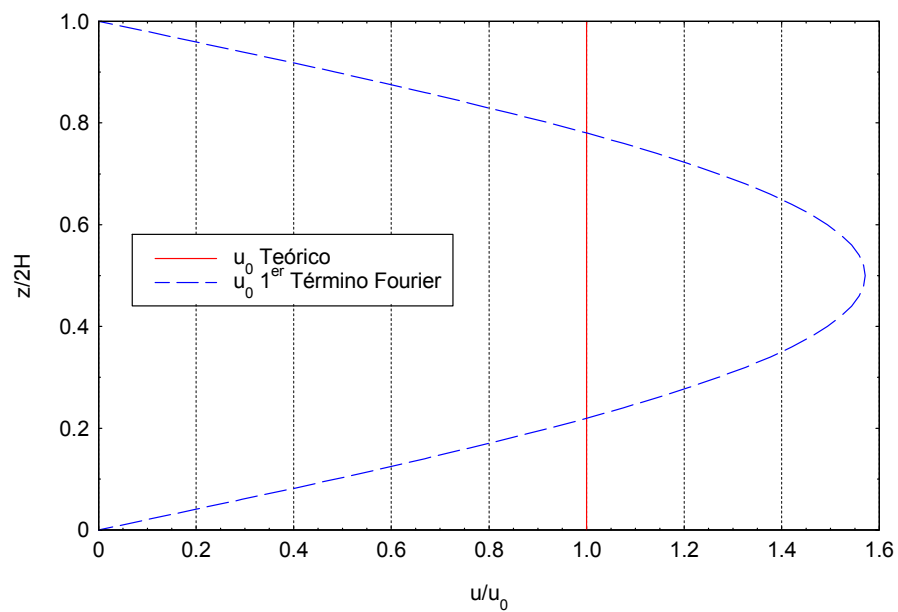
Esta hipótesis también implica una forma determinada de las isócronas ( $\ln r - r^2$ ). El parámetro que define cada una de ellas es la presión intersticial media y no se considera la fase inicial de propagación del cambio instantáneo de presión intersticial en el contacto con el dren. Existe una posible analogía con lo visto en el apartado 2.2.4 “Soluciones aproximadas”. La solución de Barron es comparable a una solución de la consolidación unidimensional con sólo el primer término del desarrollo en serie de Fourier (Figura 2.21). La aproximación de la fase inicial en el caso de



Barron es mejor porque el área relativa de la zona que cambia instantáneamente de presión es menor. La precisión en la estimación de la fase final es adecuada en ambos casos.



**Figura 2.20. Distribución de presiones intersticiales iniciales teórica (o real) y según Barron (1948)**



**Figura 2.21. Distribución de presiones intersticiales inicial para el caso unidimensional**

Barron (1948) también obtiene la solución para el caso de carga rígida con zona remodelada y permeabilidad finita del dren. La formulación se complica cuando se incluye la permeabilidad del dren. La solución en el caso de carga rígida con zona remodelada es la siguiente

$$u_r = \bar{u}_r \left[ \frac{\ln\left(\frac{r}{r_c}\right) - \frac{r^2 - r_s^2}{2r_l^2} + \frac{k_r}{k_s} \left( \frac{r_l^2 - r_s^2}{r_l^2} \right) \ln\left(\frac{r_s}{r_c}\right)}{\mu} \right] \quad (2.189)$$

donde  $\mu$  ahora es

$$\mu = \frac{r_l^2}{r_l^2 - r_c^2} \ln\left(\frac{r_l}{r_c}\right) - \frac{3}{4} + \frac{r_s^2}{4r_l^2} + \frac{k_r}{k_s} \left( \frac{r_l^2 - r_s^2}{r_l^2} \right) \ln\left(\frac{r_s}{r_c}\right) \quad (2.190)$$

y la presión intersticial media tiene la misma expresión (2.187) con el nuevo valor de  $\mu$

$$\bar{u}_r = u_0 e^{-8T_r / \mu} \quad (2.191)$$

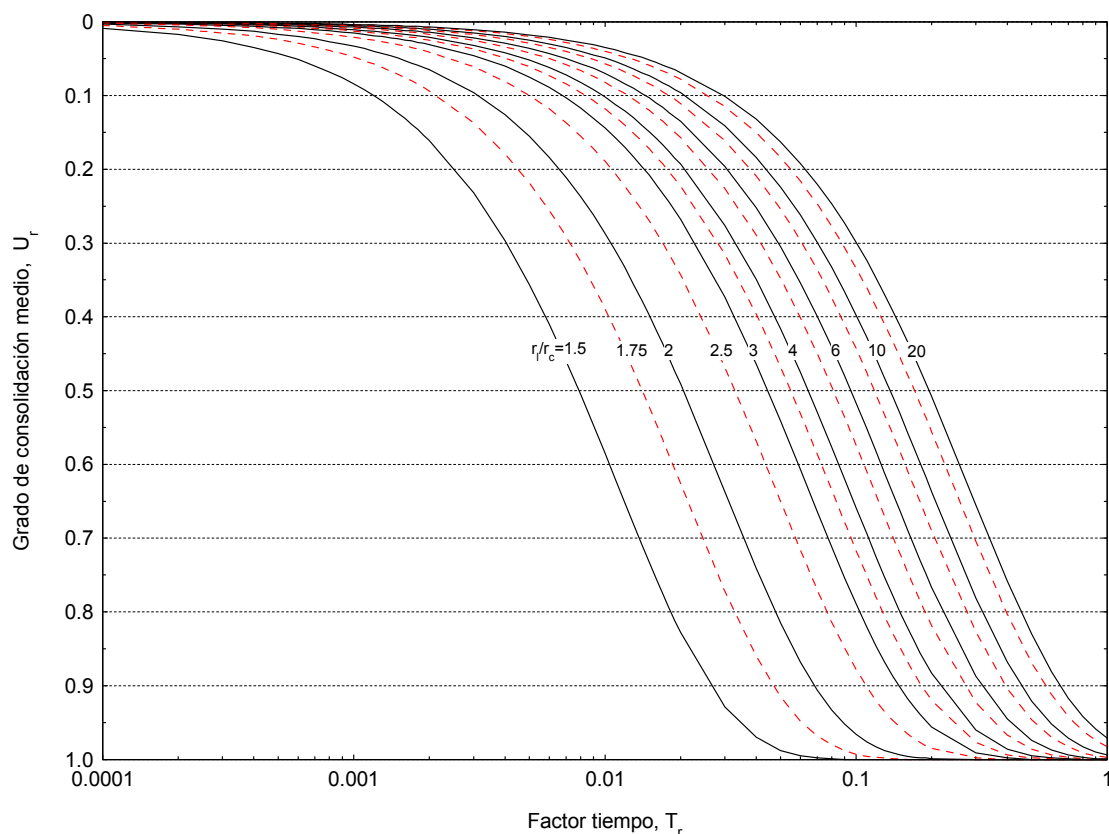
El grado de consolidación radial medio se define como

$$\bar{U}_r = 1 - \bar{u}_r / u_0 \quad (2.192)$$

y su valor con esta solución es

$$\bar{U}_r = 1 - e^{-8T_r / \mu} \quad (2.193)$$

En la Figura 2.22 se muestra este grado de consolidación medio cuando no existe zona remodelada y el dren es infinitamente permeable para diferentes áreas de sustitución.



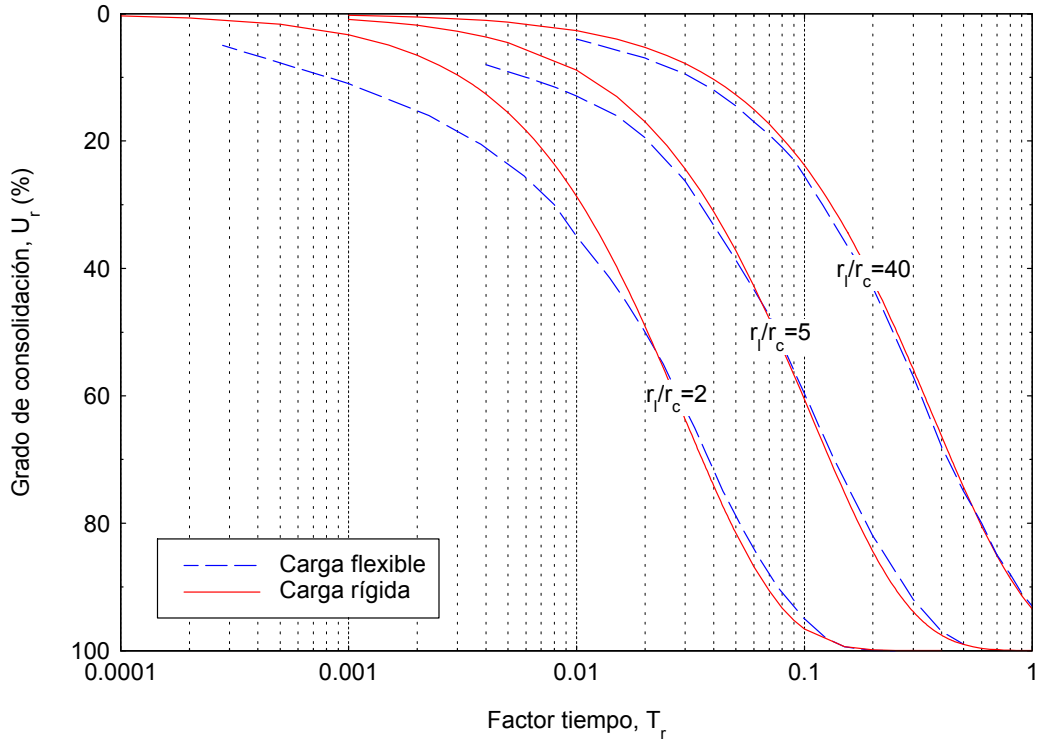
**Figura 2.22. Solución de Barron (1948) para carga rígida sin zona remodelada y dren de permeabilidad infinita**

### **Hansbo (1981)**

Es una de las soluciones más sencillas y por eso quizá, una de las más utilizadas. Plantea que a pesar de que la solución con carga flexible parece la más razonable para una carga de terraplén por ejemplo, la complejidad que implica emplear esta solución no es necesaria porque la diferencia con la solución de carga rígida es despreciable. La diferencia entre el caso de carga rígida y de carga flexible se puede apreciar en la Figura 2.23. En esta comparación se desprecia el efecto de la zona remodelada y de la permeabilidad del dren y se estudian tres casos diferentes de relación de radios (radio de la celda unidad entre radio del dren). Las curvas para el caso de carga flexible se han obtenido gráficamente a partir de Barron (1948) y se puede apreciar su menor precisión.

Las dos soluciones son similares para relaciones de radios elevadas y grados de consolidación no muy pequeños. Desde un punto de vista práctico, en el diseño de

drenes, los grados de consolidación pequeños no suelen tener importancia y las relaciones de radios para drenes prefabricados suelen ser elevadas. Sin embargo, para columnas de grava esta relación de radios puede ser pequeña.



**Figura 2.23. Comparación entre el caso de carga rígida y carga flexible**

La solución se obtiene a partir de las mismas hipótesis realizadas por Barron (1948) para el caso de carga rígida, exceptuando que en este caso sí se tiene en cuenta el asiento de la zona remoldeada. Para obtener expresiones sencillas desprecia los términos menos significativos. El grado de consolidación medio tiene la misma forma que para la solución de Barron (2.193).

$$\bar{U}_r = 1 - e^{-8T_r/\mu} \quad (2.194)$$

En este caso, el coeficiente  $\mu$  es

$$\mu = \ln\left(\frac{r_l}{r_s}\right) + \frac{k_r}{k_s} \ln\left(\frac{r_s}{r_c}\right) - \frac{3}{4} + z(2H - z) \frac{k_r}{k_c r_c^2} \quad (2.195)$$

donde  $k_c$  es la permeabilidad del dren.

La solución es función de la profundidad porque estudia una rebanada infinitesimal a una profundidad  $z$ . La solución de Hansbo (1981) y Barron (1948) coinciden si la carga es rígida y no se tiene en cuenta la zona remodelada y la permeabilidad del dren. Por este motivo, en adelante, la solución a ese caso se denomina de Barron/Hansbo.

### **Otras soluciones para drenes prefabricados**

Existen numerosas soluciones posteriores a la de Hansbo (1981), algunas en forma de gráficos y tablas, otras en forma de expresiones más o menos complejas. Su objetivo es incluir diferentes aspectos de la zona remodelada, de la permeabilidad del dren y del modo de aplicación de la carga. Por ejemplo, existen soluciones que plantean una permeabilidad variable con el radio en la zona remodelada (Madhav et al., 1993; Walker e Indraratna, 2006).

Otra línea de investigación encabezada por el Prof. Hansbo estudia soluciones con leyes de pérdida de carga diferentes de la de Darcy. Consideran que para velocidades de flujo pequeñas como las que tienen lugar en este tipo de problemas, no es válida, y utilizan una relación exponencial entre el gradiente hidráulico y la velocidad de flujo (Hansbo, 1997).

Una de las soluciones más recientes se debe a C. J. Leo (2004), que elimina la inexactitud de separar el drenaje radial y el vertical para el caso de zona remodelada y permeabilidad limitada del dren. Para introducir la profundidad de una manera rigurosa, emplea un desarrollo en serie de Fourier de esta coordenada. También considera el caso de aplicación de carga en rampa, pero uno de sus inconvenientes es la complejidad en el cálculo del grado de consolidación que requiere considerar varios términos del desarrollo en serie de Fourier.

### **2.2.8. Consolidación alrededor de columnas de grava**

Las columnas de grava aceleran el proceso de consolidación al proporcionar un camino de drenaje más corto, de una manera similar a como ocurre con los drenes verticales. Por ello, las soluciones disponibles para flujo radial alrededor de drenes verticales prefabricados (Barron, 1948; Hansbo, 1981) son empleadas y aplicadas

también para columnas de grava. La solución de Barron/Hansbo sin zona remodelada y con un dren infinitamente permeable suele servir de base en el cálculo de la consolidación alrededor de las columnas de grava. Para adaptar esta solución a las columnas de grava, teniendo en cuenta su rigidez, se pueden realizar las consideraciones que se describen a continuación.

### **Influencia de la rigidez de la columna**

Como se ha visto, las columnas de grava soportan una parte importante de la carga aplicada. Lane (1948) ya señaló que la solución propuesta por Barron ignoraba la influencia de la diferente rigidez entre el dren de arena y el suelo circundante en el estudio del grado de consolidación. Este problema fue posteriormente olvidado debido al pequeño diámetro y rigidez de los drenes prefabricados. Sin embargo, vuelve a surgir para la aplicación de esta solución a las columnas de grava, que normalmente tienen una relación de módulos columna/suelo de 10-50 y un área de sustitución,  $a_r$ , de 5-30%.

En este caso no es aceptable suponer que la tensión vertical total en el suelo es constante con el tiempo e igual a la presión media aplicada,  $p_a$ . La manera más sencilla de tener en cuenta esta situación es considerar una carga total vertical sobre el suelo,  $\overline{\sigma_{zs}}$ , constante con el tiempo, pero diferente de la carga aplicada,  $p_a$ . Esta carga total vertical sobre el suelo se suele tomar para el estado final al acabar la consolidación. Para ello, se pueden emplear cualquiera de los métodos descritos en el siguiente apartado 2.3. “Interacción columna-suelo. Situaciones inicial y final”. Estrictamente, por consistencia con las hipótesis realizadas en el desarrollo de la solución de Barron/Hansbo, se debe calcular con confinamiento lateral. De esta forma, la consolidación alrededor de columnas de grava se puede estudiar directamente mediante la solución de Barron/Hansbo con  $u_u = \overline{\sigma_{zs}}$ .

Una conclusión evidente de este método es que el asiento se reduce con respecto al del terreno no tratado en proporción directa a la relación  $\overline{\sigma_{zs}}/p_a$ , pero el tiempo necesario para alcanzar un grado de consolidación determinado no varía.

### Relación de rigideces dependiente del tiempo (Han y Ye, 2001)

La relación de rigideces columna/suelo varía considerablemente durante el proceso de consolidación. Inicialmente, el suelo se deforma en condiciones no drenadas, y por tanto, con una rigidez relativamente alta (asiento inicial nulo si se supone confinamiento lateral). Durante la consolidación, el módulo de rigidez aparente del suelo se reduce gradualmente hasta que alcanza su valor drenado. Esto significa que la transferencia de carga a las columnas es menos importante para la situación inicial, y que ésta aumenta a lo largo del proceso de consolidación. Por el contrario, el suelo está sometido a una carga más elevada al principio, implicando cierto grado de “precarga” con respecto a la situación final; lo que provoca que el proceso de consolidación sea más rápido que el que tiene lugar para una carga constante.

Este fenómeno ha sido estudiado por Han y Ye (2001). Implica considerar una tensión vertical total sobre el suelo no constante. La validez de la ecuación general de la consolidación radial (2.181) se mantiene y la obtención de la deformación volumétrica,  $\varepsilon_{vol}$ , (2.182) debe ser modificada para incluir la variación de la tensión total vertical sobre el suelo con el tiempo.

Esto puede realizarse imponiendo las condiciones de equilibrio (2.203) y compatibilidad (2.204) para un tiempo cualquiera,  $t$ :

$$\varepsilon_{zc} = \varepsilon_{zs} = \frac{\sigma'_{zs}}{E_{ms}} = \frac{\overline{\sigma_{zs}} - \bar{u}}{E_{ms}} = \frac{\sigma_{zc}}{E_{mc}} \quad (2.196)$$

Resolviendo las ecs. (2.203) y (2.196) para la tensión total en el suelo, se puede obtener la tensión vertical total en el suelo en un instante cualquiera en función del exceso de presión intersticial:

$$\overline{\sigma_{zs}}(t) = \frac{p_a + \frac{E_{mc}}{E_{ms}} a_r \bar{u}(t)}{1 + a_r \left( \frac{E_{mc}}{E_{ms}} - 1 \right)} \quad (2.197)$$

Se sustituye (2.197) en la derivada de la deformación volumétrica.

$$\frac{\partial \overline{\varepsilon}_{vol,s}}{\partial t} = - \frac{1}{E_{ms} + E_{mc} \frac{a_r}{1-a_r}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \quad (2.198)$$

Comparando esta expresión con la ec. (2.182), se puede deducir que la ecuación de la consolidación (2.183) mantiene la misma forma que la vista previamente, pero con un coeficiente de consolidación modificado:

$$c_{vr}^{ze} = c_{vr} \left( 1 + \frac{E_{mc}}{E_{ms}} \frac{a_r}{1-a_r} \right) \quad (2.199)$$

Donde el superíndice  $z$  se refiere a la influencia de la deformación vertical de la columna. Se puede comprobar que siempre se cumple que  $c_{vr}^{ze} > c_{vr}$ , con lo que la consolidación radial siempre va a ser más rápida en este caso que para el caso de carga constante.

La Figura 2.24 muestra los resultados obtenidos en un ejemplo de aplicación (Han y Ye, 2001). El factor de concentración de tensiones aumenta con el tiempo desde un valor inicial de cero hasta su valor final (2.205). En el ejemplo elegido se ha empleado una relación de módulos  $E_{mc}/E_{ms} = 5$ , inferior al rango habitual en suelos reales.

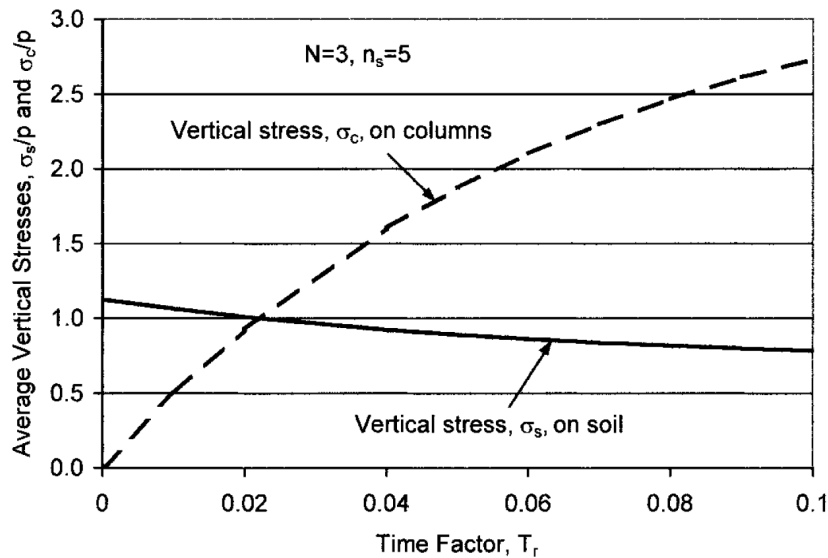


Figura 2.24. Reparto en el tiempo de la tensión vertical según la solución de Han y Ye (2001)



## **2.3.INTERACCIÓN COLUMNA-SUELO. SITUACIONES INICIAL Y FINAL**

Existen bastantes análisis tanto teóricos como experimentales de las deformaciones y tensiones que se producen en las columnas de grava y en el suelo circundante al ser sometidos a una carga. De entre ellos, y debido a los objetivos del estudio, se revisan aquellos que analizan las columnas de grava cuando se usan de una forma extensiva, son totalmente penetrantes en la capa de suelo blando alcanzando un sustrato rígido y se aplica una carga uniforme, situación que suele producirse cuando se utilizan las columnas de grava bajo terraplenes.

Cuando se apoya un terraplén o estructura flexible sobre un suelo reforzado con columnas, éstas son más rígidas que el terreno, por lo que cabe considerar dos situaciones extremas:

- a) Carga flexible. Igual tensión en columnas y suelo, con distinto asiento.
- b) Carga rígida. Igual asiento, con distintas tensiones en columnas y suelo.

La situación real está siempre entre ambas. Sin embargo, para poder resolver analíticamente el problema es necesario elegir una de ellas. La hipótesis de carga rígida se aproxima más a la realidad, pues la rigidez de las columnas, aun siendo superior a la del terreno circundante, no lo es tanto con respecto al terraplén superior. Para elementos más rígidos, como pilotes de hormigón, sí es aplicable la hipótesis de carga flexible, con los pilotes hincándose parcialmente en el terraplén y asentando menos que el terreno circundante.

Los análisis teóricos se suelen centrar en el estudio de la celda unidad en simetría axial (Figura 2.25), aunque en algún caso se estudia el problema bidimensionalmente en deformación plana (Van Impe y De Beer, 1983).

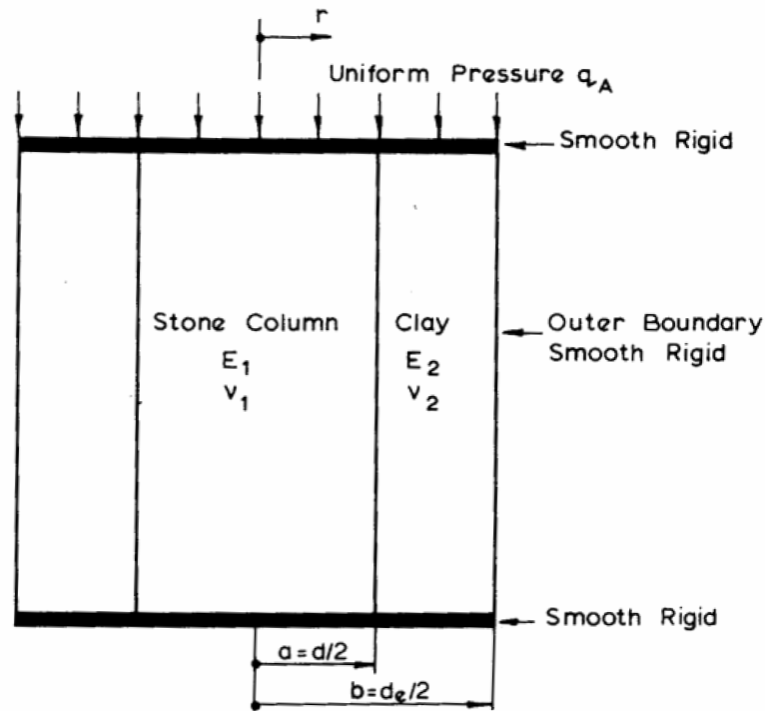


Figura 2.25. Celda unidad en simetría axial (Balaam y Booker, 1981)

El propósito de estudiar estas tensiones y deformaciones es obtener la reducción de asiento final lograda con el tratamiento, que depende de la distribución de la carga aplicada entre las columnas y el terreno. Así, se suelen emplear los dos parámetros siguientes:

1. Factor de mejora,  $n$ . Se define como el cociente entre el asiento final sin columnas,  $s_{z0}$ , y con columnas,  $s_z$ . Su inverso se denomina factor de reducción de asientos,  $\alpha$ .

$$n = \frac{1}{\alpha} = \frac{s_{z0}}{s_z} \quad (2.200)$$

2. Factor de concentración de tensiones,  $SCF$ . Se define como el cociente entre la tensión vertical en la columna,  $\sigma_{zc}$ , y en el suelo,  $\sigma_{zs}$ . Si no se especifica lo contrario, se entiende que son los valores al finalizar la consolidación.

$$SCF = \frac{\sigma_{zc}}{\sigma_{zs}} \quad (2.201)$$

En algunas ocasiones se denomina factor de concentración de tensiones a la relación entre la tensión vertical en la columna y la carga media aplicada. La diferencia es pequeña y se pueden relacionar mediante el equilibrio de fuerzas verticales. Por sencillez, también interesa a veces expresar la relación entre la tensión vertical en el suelo y la carga media aplicada. Así, se definen el factor de concentración de tensiones sobre el suelo y sobre la columna:

$$\mu_c = \beta = \frac{\sigma_{zc}}{p_a} ; \mu_s = \frac{\sigma_{zs}}{p_a} \quad (2.202)$$

En la Guía de Cimentaciones (Ministerio de Fomento, 2002), el factor de concentración de tensiones sobre la columna se denomina  $\beta$ . Por otra parte, cuando se consideran condiciones edométricas, el factor de concentración de tensiones sobre el suelo,  $\mu_s$ , coincide con el factor de reducción de asientos,  $\alpha$ .

El estudio de las tensiones y deformaciones se centra habitualmente en la situación final, drenada, cuando ya se han disipado todas las presiones intersticiales. Sin embargo, en algunos estudios también se recoge la situación de carga instantánea, sin drenaje; no por la importancia del asiento inicial, sino para poder estimar la evolución de estas magnitudes durante el proceso de consolidación.

A continuación se resumen las soluciones que se consideran más importantes y que más influencia tienen en la solución analítica desarrollada en esta tesis. Se emplean diferentes parámetros elásticos: módulo de Young ( $E$ ), de elasticidad transversal ( $G$ ), volumétrico ( $K$ ) y edométrico ( $E_m$ ), constante de Lamé ( $\lambda$ ) y coeficiente de Poisson ( $\nu$ ); con el objeto de obtener en cada caso la expresión más clara y sencilla posible. Obviamente, sólo dos de ellos son independientes.

### 2.3.1. Solución edométrica

Se trata de la solución analítica más sencilla. El análisis de la distribución de tensión entre suelo y columna se basa en imponer las condiciones de equilibrio vertical y compatibilidad de deformaciones verticales, suponiendo un modelo de comportamiento elástico confinado (edométrico) para el suelo y la columna.

Se analiza el problema en simetría axial. Las condiciones de contorno en el borde exterior de la celda debido a la simetría son: tensión tangencial, desplazamiento radial y flujo de agua nulos. Se emplea la hipótesis de carga rígida, y los bordes superior (superficie) e inferior (substrato rígido) se suponen lubricados, es decir, tensión tangencial nula en estos contactos. Esta simplificación es apropiada porque los efectos de un contacto rugoso son localizados.

La condición de equilibrio vertical al aplicar una carga uniforme,  $p_a$ , es

$$p_a = \sigma_{zc} a_r + \sigma_{zs} (1 - a_r) \quad (2.203)$$

donde  $\sigma_{zc}$  y  $\sigma_{zs}$  son los incrementos de tensión total en la columna y en el suelo respectivamente, y  $a_r$  es la razón de sustitución.

La formulación de la condición de compatibilidad en tensiones requiere del empleo de un modelo constitutivo para el suelo y la columna. El empleo de un modelo elástico lineal para el suelo es una hipótesis razonable porque el confinamiento lateral parcial que proporciona la columna provoca que sus deformaciones tangenciales sean pequeñas. Sin embargo, las columnas están rodeadas de un material más blando, e incluso para cargas moderadas pueden alcanzar la condición de plastificación (estado activo). Por esto, la hipótesis de comportamiento elástico para la columna sólo puede considerarse como una primera aproximación.

Asumir un perfecto confinamiento lateral de la columna y el suelo (comportamiento edométrico) permite plantear fácilmente la compatibilidad de deformaciones, ya que de esta forma, las deformaciones verticales al finalizar la consolidación están directamente relacionadas con las tensiones verticales a través del módulo de elasticidad edométrico (confinado lateralmente):

$$\varepsilon_{zs} = \varepsilon_{zc} = \frac{\overline{\sigma'_{zs}}}{E_{ms}} = \frac{\sigma_{zc}}{E_{mc}} \quad (2.204)$$

Por claridad, se elimina la barra superior de las variables que son uniformes con el radio, como ocurre para las tensiones verticales en el suelo al final de la consolidación y para cualquier instante en la columna.

Las ecs. (2.203) y (2.204) se pueden resolver para los valores finales de las tensiones en el suelo y la columna:

$$\sigma_{zs,f} = \frac{p_a}{1 + a_r \left( \frac{E_{mc}}{E_{ms}} - 1 \right)} \quad (2.205)$$

La proporcionalidad directa entre tensiones y deformaciones (2.204) provoca que el factor de mejora,  $n$ , sea:

$$n = \frac{s_{z0}}{s_z} = \frac{\varepsilon_{z0}}{\varepsilon_z} = \frac{E_{ms}}{\sigma_{zs,f}} = 1 + a_r \left( \frac{E_{mc}}{E_{ms}} - 1 \right) \quad (2.206)$$

Para la situación no drenada, el suelo es incompresible, y por tanto, toda la carga es soportada por el suelo, sin producirse asiento alguno.

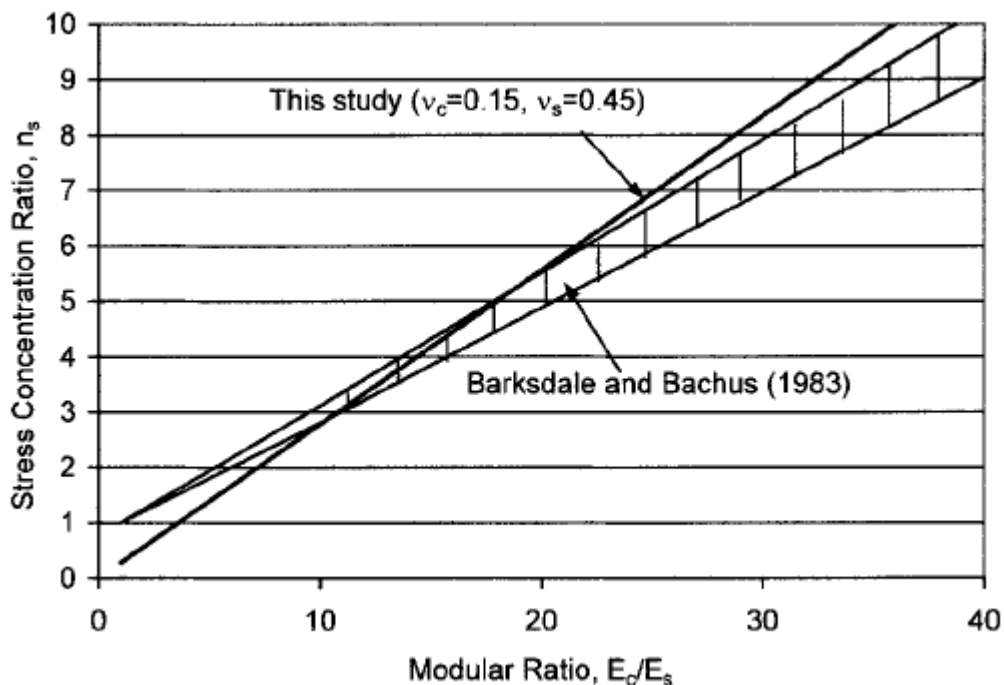


Figura 2.26. Relación entre factor de concentración de tensiones ( $SCF$ ) y relación de módulos en la solución edométrica (Han y Ye, 2001)

La ec. (2.204) implica que el factor de concentración de tensiones al finalizar la consolidación es igual a la relación de módulos edométricos ( $SCF = E_{mc} / E_{ms}$ ). Este resultado está en contradicción con lo obtenido experimentalmente, puesto que la relación de módulos suele encontrarse entre 10 y 50, mientras que la razón de concentración de tensiones medida en casos reales es mucho menor, en el rango de 3 a 10 (Barksdale y Bachus, 1983). Para obtener un buen ajuste del  $SCF$  con este análisis es necesario emplear valores poco realistas del coeficiente de Poisson ( $\nu_s \geq 0.45$ ) (Han y Ye, 2001) (Figura 2.26).

### 2.3.2. Solución elástica (Balaam y Booker, 1981)

Parte de la discrepancia entre el factor de concentración de tensiones que se obtiene con la solución edométrica y el medido experimentalmente se debe a la hipótesis de confinamiento lateral. Balaam y Booker (1981) obtuvieron una solución analítica rigurosa que considera simultáneamente las componentes radial y vertical de la deformación.

Un somero análisis de la solución edométrica muestra la discontinuidad existente en la tensión radial en el contacto columna-suelo. La solución correcta puede obtenerse, por tanto, añadiendo una solución en deformación plana que aplique una tensión radial sobre el contacto columna-suelo, de igual magnitud pero signo contrario a la discontinuidad radial de tensiones existente en la solución edométrica.

El desarrollo de la solución edométrica, denominada solución A por Balaam y Booker (1981), se ha expuesto en el apartado anterior. Un resumen de las tensiones y deformaciones se recoge en la Tabla 2.4. Por comodidad se emplea como incógnita la deformación vertical,  $\varepsilon_{zA}$ , pero ésta depende de la presión aplicada,  $p_a$ .

**Tabla 2.4. Estado de compresión confinada (solución edométrica). Solución A**

	<i>Columna (c)</i>	<i>Suelo (s)</i>
Deformación vertical, $\varepsilon_z$	$\varepsilon_{zA}$	$\varepsilon_{zA}$
Desplazamiento radial, $s_r$	0	0
Tensión radial, $\sigma_r$	$\lambda_c \varepsilon_{zA}$	$\lambda_s \varepsilon_{zA}$
Tensión circunferencial, $\sigma_\theta$	$\lambda_c \varepsilon_{zA}$	$\lambda_s \varepsilon_{zA}$
Tensión vertical, $\sigma_z$	$(\lambda_c + 2G_c) \varepsilon_{zA}$	$(\lambda_s + 2G_s) \varepsilon_{zA}$
Tensión octaédrica, $\sigma_{oct}$	$\left( \lambda_c + \frac{2}{3} G_c \right) \varepsilon_{zA}$	$\left( \lambda_s + \frac{2}{3} G_s \right) \varepsilon_{zA}$
Deformación volumétrica, $\varepsilon_{vol}$	$\varepsilon_{zA}$	$\varepsilon_{zA}$

En la solución en deformación plana (solución B), el suelo es un cilindro hueco con las siguientes condiciones de contorno: presión en el contorno interior,  $\sigma_{rsB}$ , y desplazamiento nulo en el contorno exterior,  $s_{rsB}(r = r_i) = 0$ . El resultado son las siguientes ecuaciones constitutivas:

$$\frac{s_{rcs}}{r_c} = \frac{1 - a_r}{2[G_s + a_r(\lambda_s + G_s)]} \sigma_{rsB} \quad (2.207)$$

$$\frac{s_{rcs}}{r_c} = \frac{1 - a_r}{2\lambda_s a_r} \sigma_{zsB} \quad (2.208)$$

donde  $s_{rcs}$  es el desplazamiento radial en el contacto columna-suelo.

Las ecuaciones constitutivas de la columna son más sencillas, ya que se trata de un cilindro sometido a una presión radial,  $\sigma_{rcB}$  :

$$\frac{s_{rcs}}{r_c} = -\frac{1}{2(\lambda_c + G_c)} \sigma_{rcB} \quad (2.209)$$

$$\frac{s_{rcs}}{r_c} = -\frac{1}{2\lambda_c} \sigma_{zcB} \quad (2.210)$$

Se imponen la condición de equilibrio radial, teniendo en cuenta la desigualdad existente en la solución edométrica

$$\lambda_c \varepsilon_{zA} + \sigma_{rcB} = \lambda_s \varepsilon_{zA} + \sigma_{rsB} \quad (2.211)$$

y la compatibilidad del desplazamiento radial en el contacto columna-suelo

$$-\frac{1}{2(\lambda_c + G_c)} \sigma_{rcB} = \frac{1 - a_r}{2[G_s + a_r(\lambda_s + G_s)]} \sigma_{rsB} \quad (2.212)$$

De las ecs. (2.211) y (2.212) se obtiene el valor del desplazamiento radial

$$\frac{s_{rcs}}{r_c} = \frac{(\lambda_c - \lambda_s)(1 - a_r)}{2[a_r(\lambda_s - \lambda_c + G_s - G_c) + (\lambda_c + G_c + G_s)]} \varepsilon_{zA} \quad (2.213)$$

donde por simplicidad se denomina  $F$  a todo el cociente

$$\frac{s_{rcs}}{r_c} = F \varepsilon_{zA} \quad (2.214)$$

Una vez obtenido el valor del desplazamiento radial, se obtienen el resto de tensiones y deformaciones. Éstas se resumen en la Tabla 2.5.



**Tabla 2.5. Estado de deformación plana (continuidad de la tensión radial).  
Solución B**

	<i>Columna (c)</i>	<i>Suelo (s)</i>
Deformación vertical, $\varepsilon_z$	0	0
Desplazamiento radial, $s_r$	$rF\varepsilon_{zA}$	$\frac{Fa_r}{1-a_r} \frac{1-(r/r_i)^2}{(r/r_i)^2} r\varepsilon_{zA}$
Tensión radial, $\sigma_r$	$-2(\lambda_c + G_c)F\varepsilon_{zA}$	$\frac{2Fa_r}{1-a_r} \left( \lambda_s + G_s + \frac{G_s}{(r/r_i)^2} \right) \varepsilon_{zA}$
Tensión circunferencial, $\sigma_\theta$	$-2(\lambda_c + G_c)F\varepsilon_{zA}$	$\frac{2Fa_r}{1-a_r} \left( \lambda_s + G_s - \frac{G_s}{(r/r_i)^2} \right) \varepsilon_{zA}$
Tensión vertical, $\sigma_z$	$-2\lambda_c F\varepsilon_{zA}$	$\frac{2Fa_r}{1-a_r} \lambda_s \varepsilon_{zA}$
Tensión octaédrica, $\sigma_{oct}$	$-2F \left( \lambda_c + \frac{2}{3} G_c \right) \varepsilon_{zA}$	$\frac{2Fa_r}{1-a_r} \left( \lambda_s + \frac{2}{3} G_s \right) \varepsilon_{zA}$
Deformación volumétrica, $\varepsilon_{vol}$	$-2F\varepsilon_{zA}$	$\frac{2Fa_r}{1-a_r} \varepsilon_{zA}$

Finalmente, sumando ambos estados, se obtiene la solución final del problema (Tabla 2.6). Para obtener la deformación vertical,  $\varepsilon_z$ , en función de la carga aplicada,  $p_a$ , se plantea la condición de equilibrio vertical (2.203).

En el artículo original de Balaam y Booker (1981) existe una errata en el valor del coeficiente  $F$ . Su valor se muestra en la Tabla 2.6 y aparece corregido en un artículo posterior de los mismos autores (Balaam y Booker, 1985).

Tabla 2.6. Estado elástico final (Balaam y Booker, 1985)

	Columna (c)	Suelo (s)
Deformación vertical, $\varepsilon_z$	$\frac{P_a}{(\lambda_c + 2G_c)a_r + (\lambda_s + 2G_s)(1 - a_r) - 2a_r(\lambda_c - \lambda_s)F}$	
Desplazamiento radial, $s_r$	$Fr\varepsilon_z$	$\left[ F \frac{a_r}{1 - a_r} \frac{1 - (r/r_l)^2}{(r/r_l)^2} r \right] \varepsilon_z$
Tensión radial, $\sigma_r$	$[\lambda_c - 2(\lambda_c + G_c)F]\varepsilon_z$	$\left[ \lambda_s + \frac{2a_r F}{1 - a_r} \left( \lambda_s + G_s + \frac{G_s}{(r/r_l)^2} \right) \right] \varepsilon_z$
Tensión circunferencial, $\sigma_\theta$	$[\lambda_c - 2(\lambda_c + G_c)F]\varepsilon_z$	$\left[ \lambda_s + \frac{2a_r F}{1 - a_r} \left( \lambda_s + G_s - \frac{G_s}{(r/r_l)^2} \right) \right] \varepsilon_z$
Tensión vertical, $\sigma_z$	$(\lambda_c + 2G_c - 2\lambda_c F)\varepsilon_z$	$\left( \lambda_s + 2G_s + 2\lambda_s F \frac{a_r}{1 - a_r} \right) \varepsilon_z$
Tensión octaédrica, $\sigma_{oct}$	$\left( \lambda_c + \frac{2}{3}G_c \right) (1 - 2F)\varepsilon_z$	$\left( \lambda_s + \frac{2}{3}G_s \right) \left( 1 + 2F \frac{a_r}{1 - a_r} \right) \varepsilon_z$
Deformación volumétrica, $\varepsilon_{vol}$	$(1 - 2F)\varepsilon_z$	$\left( 1 + 2F \frac{a_r}{1 - a_r} \right) \varepsilon_z$

$$\text{donde } F = \frac{(\lambda_c - \lambda_s)(1 - a_r)}{2[a_r(\lambda_s - \lambda_c + G_s - G_c) + (\lambda_c + G_c + G_s)]}$$

Para comparar con la solución edométrica se muestra la tensión vertical en el suelo al finalizar la consolidación de la misma forma que en (2.205)

$$\sigma_{zs,f} = \frac{P_a}{1 + a_r \left( \frac{E_{mc} - 2\lambda_c F}{E_{ms} + 2\lambda_s F a_r / (1 - a_r)} - 1 \right)} \quad (2.215)$$

y el factor de mejora es

$$n = 1 + a_r \left( \frac{E_{mc} - 2(\lambda_c - \lambda_s)F}{E_{ms}} - 1 \right) \quad (2.216)$$

Comparando las ecs. (2.205) y (2.215), se observa que la inclusión de la deformación lateral siempre reduce el valor del factor de concentración de tensiones, al restar un factor al modulo edométrico de la columna y añadir otro factor al del suelo. Sin embargo, el factor de concentración de tensiones es todavía superior al observado en campo, debido al comportamiento elástico considerado para la columna (Figura 2.27), y que como ya se expuso, supone una aproximación grosera del comportamiento de las columnas que alcanzan habitualmente el régimen plástico. De las ecs. (2.206) y (2.216), se comprueba que el factor de mejora también se reduce, pero con unos factores de modificación del modulo de la columna y del suelo diferentes.

Empleando los parámetros elásticos sin drenaje para el suelo ( $E_{us}, \nu_{us} \rightarrow 1/2$ ), el análisis no sólo es aplicable al final de la consolidación, sino que también puede emplearse para estudiar la situación inicial, no drenada. El resultado se muestra en la Tabla 2.7. De especial interés es la deformación vertical que da lugar a un asiento inicial no nulo.

$$\varepsilon_{zs,u} = \frac{P_a}{H - (G_c - G_s)(1 - 3a_r)} \quad (2.217)$$

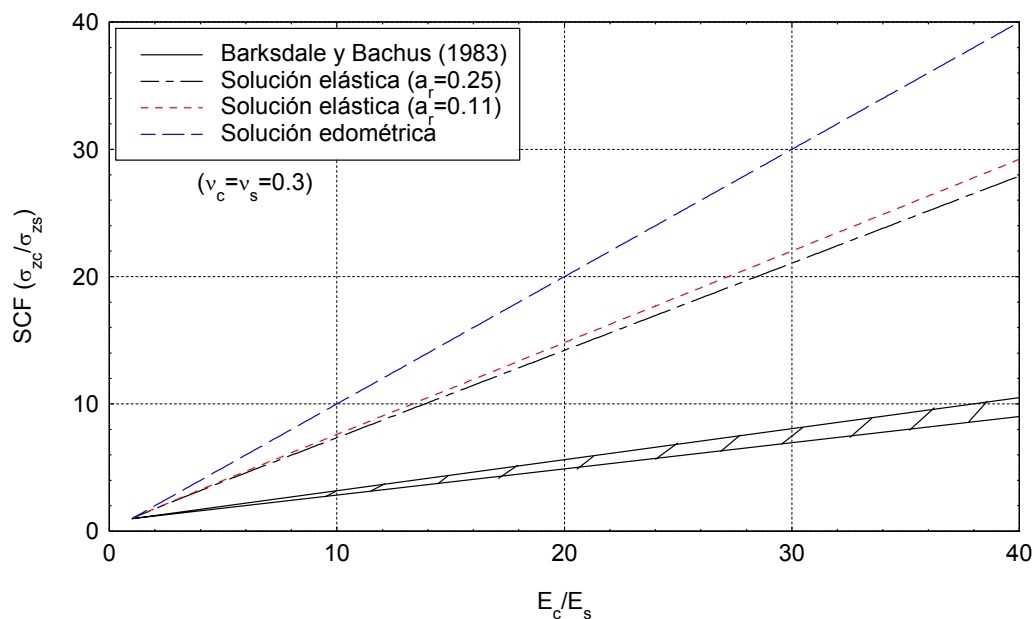
En este análisis, el exceso de presión intersticial inicial en el suelo,  $u_u$ , ya no es igual a la carga media aplicada,  $p_a$ :

$$u_u = \sigma_{oct,s,u} = H\varepsilon_{zs,u} \quad (2.218)$$

Tabla 2.7. Estado elástico sin drenaje (Balaam y Booker, 1981)

	Columna (c)	Suelo (s)
Deformación vertical, $\varepsilon_z$	$\frac{p_a}{H - (G_c - G_s)(1 - 3a_r)}$	
Desplazamiento radial, $s_r$	$-r \frac{1 - a_r}{2a_r} \varepsilon_z$	$-\frac{1 - (r/r_i)^2}{2r/r_i} \varepsilon_z$
Tensión radial, $\sigma_r$	$\left[ -G_c + (\lambda_c + G_c) \frac{1}{a_r} \right] \varepsilon_z$	$\left[ H - G_s \left( 1 + \frac{1}{(r/r_i)^2} \right) \right] \varepsilon_z$
Tensión circunferencial, $\sigma_\theta$	$\left[ -G_c + (\lambda_c + G_c) \frac{1}{a_r} \right] \varepsilon_z$	$\left[ H - G_s \left( 1 - \frac{1}{(r/r_i)^2} \right) \right] \varepsilon_z$
Tensión vertical, $\sigma_z$	$\left[ 2G_c + \lambda_c \frac{1}{a_r} \right] \varepsilon_z$	$[H + 2G_s] \varepsilon_z$
Tensión octaédrica, $\sigma_{oct}$	$\left( \lambda_c + \frac{2}{3} G_c \right) \frac{1}{a_r} \varepsilon_z$	$H \varepsilon_z$
Deformación volumétrica, $\varepsilon_{vol}$	$\frac{1}{a_r} \varepsilon_z$	0

donde  $H = G_s - G_c + (\lambda_c + G_c + G_s) \frac{1}{a_r}$



**Figura 2.27. Relación entre el factor de concentración de tensiones (SCF) y la relación de módulos elásticos**

### 2.3.3. Método de Priebe (1976, 1995)

Es uno de los métodos más antiguos y probablemente el más utilizado para obtener el factor de mejora,  $n$ . Los valores obtenidos para el factor de concentración de tensiones y el factor de mejora son más realistas que en los casos anteriores porque considera deformaciones plásticas de la columna. Es un método semi-empírico, por ello, con el tiempo y con la experiencia ganada, se ha mejorado, incorporando algunas modificaciones (Priebe, 1995). En el desarrollo de la solución se realizan varias hipótesis simplificativas que sólo en algunas publicaciones (Dhouib et al., 2004) se detallan suficientemente. Por claridad, se exponen a continuación:

1. La deformación vertical del suelo es la correspondiente a condiciones edométricas, es decir, con confinamiento lateral ( $\epsilon_{rs} = 0$ ):

$$\epsilon_{zs} = \frac{\sigma_{zs}}{E_{ms}} \quad (2.219)$$

2. La columna es rígido-plástica, lo que implica que sólo se deforma si la tensión horizontal radial en su pared es inferior al empuje activo correspondiente a la carga vertical a que está sometida:

$$\sigma_{rc,min} = k_{ac}\sigma_{zc} \quad (2.220)$$

3. Alcanzado este estado límite, la columna se deforma sin cambiar de volumen:

$$\varepsilon_{zc} + 2\varepsilon_{rc} = 0 \quad (2.221)$$

4. El coeficiente de empuje en reposo del suelo vale la unidad:

$$\sigma_{rs,i} = k_{0s}\sigma_{zs} = \sigma_{zs} \quad (2.222)$$

5. Si la presión radial actuante en la pared suelo-columna ( $\sigma_{rc} = \sigma_{rs}$ ) difiere de este valor, el suelo se deforma elásticamente. Esta deformación se calcula mediante la conocida solución de expansión de cavidad cilíndrica en un medio elástico. Para ello, se supone un estado de deformación plana según el eje de la columna, es decir:

$$\varepsilon_{zs} = 0 \quad (2.223)$$

Con ello, resulta una deformación radial de la pared igual a

$$\varepsilon_{rc} = (\sigma_{rc} - \sigma_{rs,i}) \frac{f(v_s, a_r)}{E_{ms}} = (k_{ac}\sigma_{zc} - \sigma_{zs}) \frac{f(v_s, a_r)}{E_{ms}} \quad (2.224)$$

siendo  $f(v_s, a_r)$  una función de influencia propia de la solución elástica de la cavidad cilíndrica, de expresión:

$$f(v_s, a_r) = \frac{(1-v_s)(1-a_r)}{1-2v_s+a_r} \quad (2.225)$$

La ecuación (2.224) proporciona la deformación radial de la columna en función de las tensiones verticales desconocidas,  $\sigma_{zc}$  y  $\sigma_{zs}$ . De ella, con la condición de incompresibilidad de la columna (2.221) se obtiene su deformación vertical. Finalmente, igualando ésta a la deformación vertical del suelo (2.219), se obtiene la relación deseada entre las tensiones del suelo y columna que, junto con la de equilibrio

(2.203) resuelve el problema. Se obtiene finalmente el siguiente valor del factor de mejora:

$$n = 1 + a_r \left( \frac{\frac{1}{2} + f(v_s, a_r)}{k_{ac} f(v_s, a_r)} - 1 \right) \quad (2.226)$$

Esta expresión se maneja normalmente en forma de gráfica (Figura 2.28).

Algunas de las hipótesis anteriores son cuestionables. En primer lugar, para calcular la deformación elástica del suelo se calcula la deformación vertical suponiendo nula la horizontal (2.219), y luego se calcula la deformación radial suponiendo nula la vertical (2.223). Se ignoran por tanto las influencias cruzadas (deformación vertical causada por la tensión horizontal y viceversa). Por otra parte, la hipótesis ( $k_{0s} = 1$ ) para el suelo no está justificada. Por último, al suponer que la columna no cambia de volumen no se tiene en cuenta la influencia de la dilatación del material, que en una grava debe ser importante y gobernar de forma significativa la expansión radial de la pared. Además, esta hipótesis implica que el módulo edométrico de la columna es infinito (si no hay deformación horizontal, la vertical debe ser también nula).

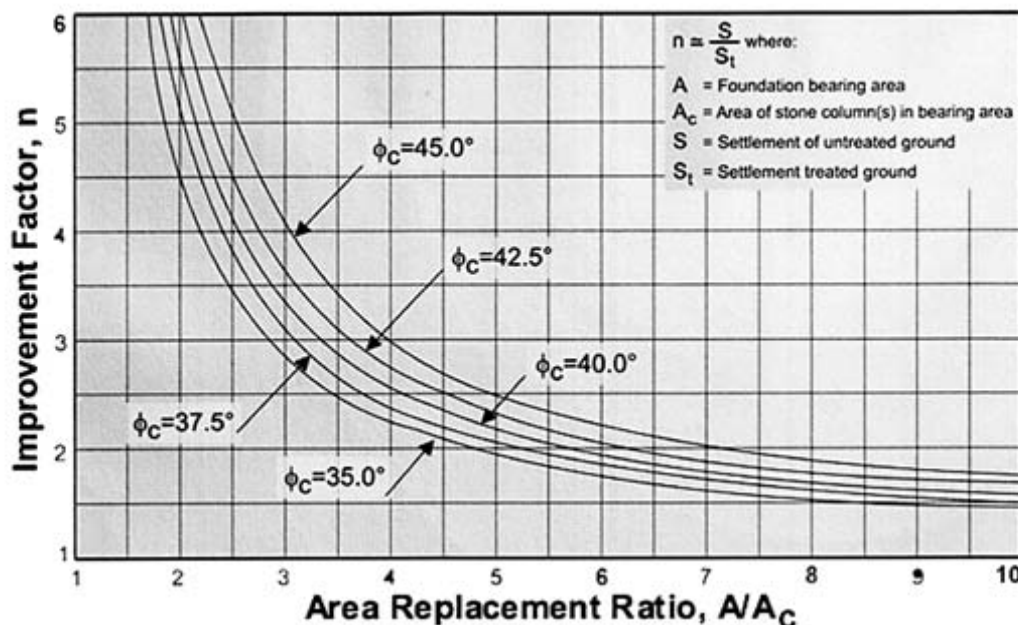


Figura 2.28. Factor de mejora sin correcciones (Priebe, 1995)

Priebe (1995) corrige posteriormente esta última hipótesis de forma aproximada, introduciendo la deformación vertical confinada de la columna a través de un incremento ficticio equivalente del inverso de la razón de sustitución. También se propone una corrección para tener en cuenta el crecimiento de la tensión con la profundidad por el peso propio, diferente en el terreno y la columna. Para poder realizar esta corrección, el método propone un valor del factor de concentración de tensiones

$$\frac{\sigma_{zc,f}}{\sigma_{zs,f}} = \frac{1/2 + f(v_s, \bar{a}_r)}{k_{ac} f(v_s, a_r)} \quad (2.227)$$

donde  $\bar{a}_r$  es la razón de sustitución ficticia propuesta para corregir la influencia del módulo de la columna.

A pesar de todas estas salvedades, el método proporciona unos resultados razonablemente próximos a la realidad, haciendo intervenir los parámetros más significativos del problema: módulos edométricos de suelo y columna, razón de sustitución y ángulo de rozamiento de la grava, mediante el coeficiente de empuje activo,  $k_{ac}$ .

### 2.3.4. Otras soluciones

- Greenwood (1970) propone una estimación de la reducción de asientos con base puramente experimental en forma de gráfica (Figura 2.29), distinguiendo entre la construcción por vía seca o húmeda de las columnas. Señala que la reducción de asientos debía obtenerse de una manera empírica porque en aquel entonces no existían soluciones rigurosas que cumpliesen la compatibilidad de deformaciones entre columna y suelo.

- El método de Van Impe-De Beer (1983) presenta la peculiaridad de estudiar el problema en deformación plana. En lugar de la celda unidad cilíndrica, emplea para el análisis una pantalla indefinida equivalente en deformación plana, con un espaciamiento relativo (separación / anchura) igual a la razón de sustitución,  $a_r$ , de la malla (Figura 2.1). Para la columna, al igual que el método de Priebe, considera un estado de tensiones activo. Los factores de mejora obtenidos difieren de los anteriores y son conservadores por los motivos expuestos en el apartado 2.1.1 “Deformación plana”.



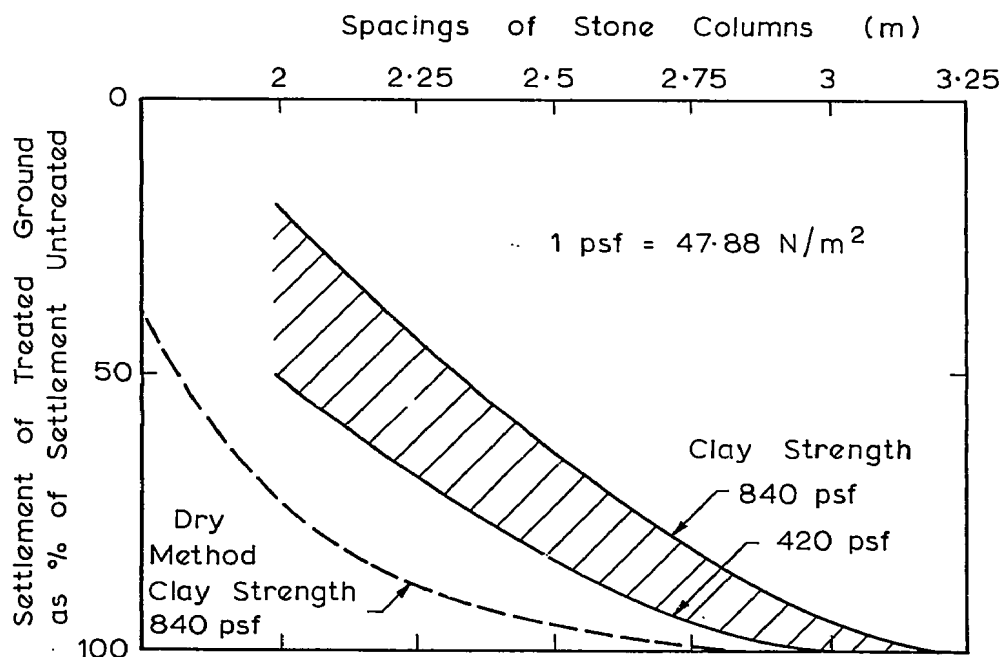


Figura 2.29. Reducción del asiento medido experimentalmente (Greenwood, 1970)

- Pulko y Majes (2005) consideran un comportamiento elasto-plástico perfecto para la columna, con el criterio de plastificación de Mohr-Coulomb y una ley de flujo no asociada con un ángulo de dilatación constante. Obtienen una solución analítica con las tensiones variando con la profundidad. El factor de concentración de tensiones es menor que en el caso elástico, al incluir la plastificación de la columna. Sin embargo, la solución sólo se aplica al estado final, drenado, sin considerar la correcta historia tensional (carga sin drenaje y posterior proceso de consolidación), lo que influye considerablemente en la solución final, más concretamente en la profundidad alcanzada por la zona plástica en la columna.

- La Guía de Cimentaciones (Ministerio de Fomento, 2002) propone una versión simplificada de los métodos anteriores. Para ello, partiendo de las observaciones de asientos en casos reales, se adopta una ley media conservadora entre la razón de sustitución y el factor de mejora. Esta ley se da en la Guía en forma de tabla, pero con gran aproximación obedece a la expresión:

$$n = \frac{1}{(1 - a_r)^2} \quad (2.228)$$

Con ello, la tensión vertical en las columnas resulta:

$$\sigma_{z_{c,f}} = [3(1 - a_r) + a_r^2] p_a \quad (2.229)$$

Como comparación de los diferentes métodos, en la Figura 2.30 se muestra el valor del factor de mejora obtenido para diferentes áreas de sustitución. Con el método más simplista propuesto por la Guía de Cimentaciones no es necesaria ninguna hipótesis adicional. En el resto de los métodos se han tomado valores razonables de los parámetros. Por ejemplo, se supone una relación de módulos entre el suelo y la columna de diez. Estas soluciones se comparan con diferentes valores medidos en ensayos de laboratorio y de campo (Tabla 2.8). Se comprueba que el valor propuesto por la Guía de Cimentaciones es aproximadamente un límite inferior de los diferentes métodos teóricos y valores medidos. Del resto de métodos teóricos el más conservador es el propuesto por Van Impe y De Beer (1983) y el que más está del lado de la inseguridad es el edométrico. Una comparación de los métodos menos grosera exigiría discernir más propiedades, como ángulo de rozamiento, deformabilidad...

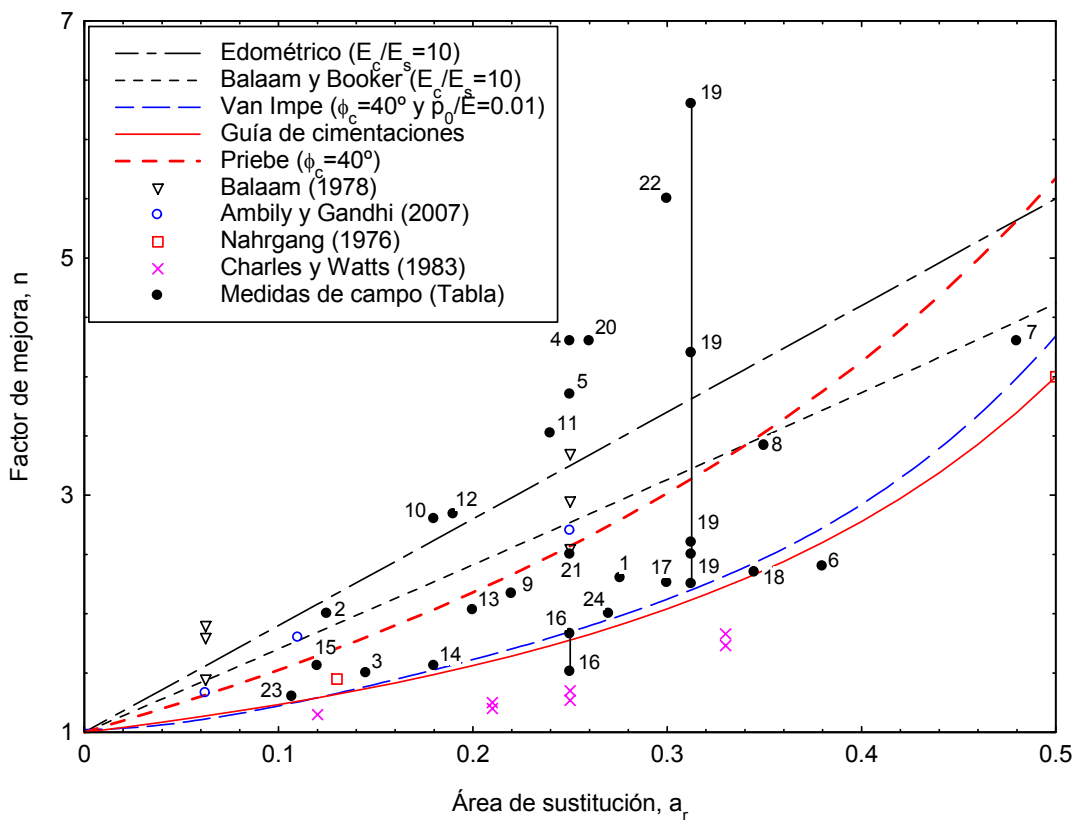


Figura 2.30. Factores de mejora teóricos y experimentales

**Tabla 2.8. Factor de mejora medido en obras reales**

<i>Dato n°</i>	<i>Autor</i>	<i>Año</i>	<i>Lugar</i>	<i>Referencia</i>
1	Kirsch	1979	Essen	Van Impe (2001)
2	Faure		Le Cateau	Van Impe (2001)
3	Sheng Chongwen	1979	Zhejiang	Van Impe (2001)
4	Castelli et al.	1983	New Orleans	Van Impe (2001)
5	Munfakh et al.	1983	New Orleans	Van Impe (2001)
6	Goughnour y Bayuk	1979	Hampton	Van Impe (2001)
7	Baumann y Bauer	1974	Constance	Van Impe (2001)
8	Maes y Leys	1977	Bruselas	Van Impe (2001)
9	Vautrain	1980	Ile Lacroix	Van Impe (2001)
10	Watt et al.	1967	Hedon	Van Impe (2001)
11	Watt et al.	1967	Teesport (T165)	Van Impe (2001)
12	Watt et al.	1967	Teesport (T104)	Van Impe (2001)
13	Greenwood	1970	Bremerhaven	Van Impe (2001)
14	Venmans	1990	Rotterdam (a)	Van Impe (2001)
15	Venmans	1990	Rotterdam (b)	Van Impe (2001)
16	Balaam y Poulos		Bremerhaven	Balaam y Poulos (1983)
17	Goughnour	1983		Van Impe (2001)
18	Kirsch	1979	Essen	Schweiger (1989) y Kirsch (2004)
19	Watt et al.	1968	Teesport (a)	Kirsch (2004)
20	Watt et al.	1968	Teesport (b)	Kirsch (2004)
21	Watt et al.	1968	Hedon	Kirsch (2004)
22	Greenwood	1974	Stanlow	Kirsch (2004)
23	Greenwood	1984	Humber bridge	Greenwood (1990)
24	Barksdale y Bachus	1980	Jordan road	Barksdale y Bachus (1983)

## 2.4. ESTABILIDAD DE LAS COLUMNAS

El objeto del presente apartado no es realizar un profundo análisis de la estabilidad de las columnas de grava, sino intentar aclarar, en lo posible, el fenómeno y evitar algunas interpretaciones erróneas de los diferentes métodos.

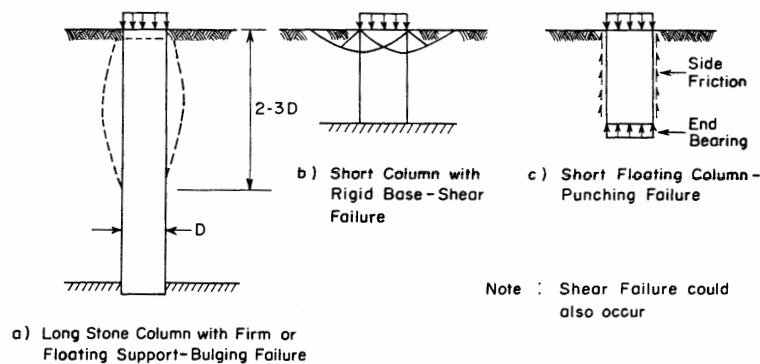
El análisis de la estabilidad de las columnas se refiere al estudio de su capacidad portante para mantenerse bajo la carga vertical que actúa sobre ellas. Sin embargo, es un término que puede resultar equívoco, ya que la columna puede estar en cualquier caso en estado activo y encontrarse estable. Lo que realmente produce el fallo de la columna es la rotura del suelo circundante que confina lateralmente a ésta, al no poder soportar la presión horizontal transmitida por la columna. Adicionalmente, también existe otra posible forma de rotura por fuste en el caso de que la columna no se empotre en un estrato más rígido (“columna flotante”).

Los mecanismos de fallo por capacidad portante de una única columna en un suelo homogéneo se recogen en la Figura 2.31. Sin embargo, de todos estos mecanismos de fallo el más habitual es la rotura por “abultamiento” (expansión lateral) que se produce incluso en el caso de “columnas flotantes”. Esta zona de expansión lateral suele localizarse en la parte superior de la columna que es donde las tensiones horizontales en el suelo son menores. No obstante, si el suelo no es homogéneo, esta zona de fallo puede aparecer en profundidad en los estratos más blandos.

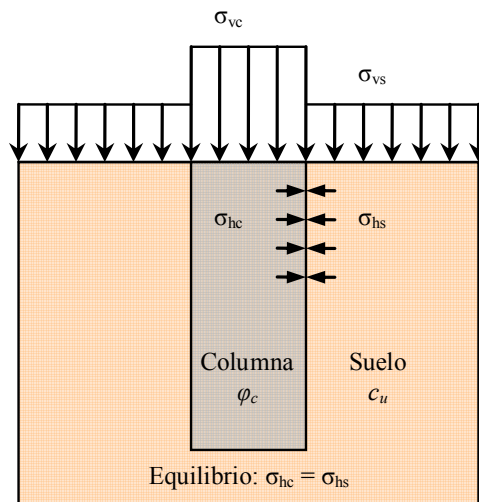
Para obtener la carga límite que soporta la columna se plantea el esquema de estabilidad de la Figura 2.32. El equilibrio límite exige que la resistencia pasiva del suelo que se moviliza sea igual al empuje lateral proporcionado por la columna al ser cargada verticalmente, que a su vez se encuentra en estado activo:

$$\sigma_{vc} = \frac{\sigma_{hc}}{k_{ac}} = \frac{\sigma_{hs}}{k_{ac}} = \frac{Nc_u + q}{k_{ac}} \quad (2.230)$$

donde el factor  $N$  y la presión  $q$  dependen del método de análisis. El coeficiente de empuje activo de la columna  $k_{ac}$  suele ser del orden de 1/3.



**Figura 2.31. Mecanismos de fallo de una única columna en un suelo homogéneo (Barksdale y Bachus, 1983)**



**Figura 2.32. Esquema de estabilidad de una columna**

Existen diferentes métodos de análisis de la resistencia pasiva del suelo que proporcionan diferentes valores de  $N$  y  $q$ . Uno de los métodos más sencillos y conservadores es suponer la columna y el suelo en deformación plana (Van Impe y De Beer, 1983).

$$\sigma_{vc} = \frac{2c_u + \sigma_{vs}}{k_{ac}} \approx 6c_u + 3\sigma_{vs} \quad (2.231)$$

Si por el contrario, se considera la geometría real cilíndrica de la columna (Vesic, 1972), el valor de  $N$  aumenta hasta valores del orden de 6 a 8, y el término  $q$  es la tensión horizontal total en el límite de la celda unidad.

$$\sigma_{vc} = \frac{N_k c_u + \sigma_{hs0}}{k_{ac}} \approx 20c_u + 3k_{0s} \sigma_{vs} \quad (2.232)$$

La estabilidad de las columnas es un aspecto importante de su diseño, sujeto a alguna controversia. Suele ser un factor crítico cuando las columnas se emplean de forma puntual, por ejemplo, bajo zapatas. Sin embargo, cuando se trata de mejorar la cimentación de una carga extensa repartida, como por ejemplo un terraplén o un depósito de gran tamaño, la estabilidad de las columnas no suele ser un factor crítico, siendo el principal problema la reducción de los asientos y la velocidad a la que se producen. Únicamente, en el borde del área cargada la capacidad portante puede ser un problema, junto con la estabilidad global de esta zona. Este problema se suele solucionar extendiendo la zona tratada con columnas en un área ligeramente mayor que el de la carga aplicada.

Lo comentado anteriormente, ha provocado que los análisis experimentales y teóricos de la estabilidad de las columnas se hayan centrado en columnas cargadas de forma puntual. Incluso, cuando se hace referencia a la capacidad portante de un grupo de columnas suele referirse a un grupo pequeño de columnas (2-3 filas de columnas) situadas bajo una zapata (ver Figura 2.33).

De esta forma, si se aplica una carga puntual sobre la columna y no se aplica ninguna carga sobre el suelo circundante ( $\sigma_{vs} = 0$ ), la carga máxima a soportar por la columna es  $Nc_u/k_{ac}$ , donde  $N$  varía entre 2 y 8. En la Figura 2.34 se muestra un resumen de los diferentes valores propuestos por diversos autores y el resultado de algunos ensayos de campo. Un valor muy conocido es el propuesto por Mitchell (1981):

$$\sigma_{vc} = 25c_u \quad (2.233)$$

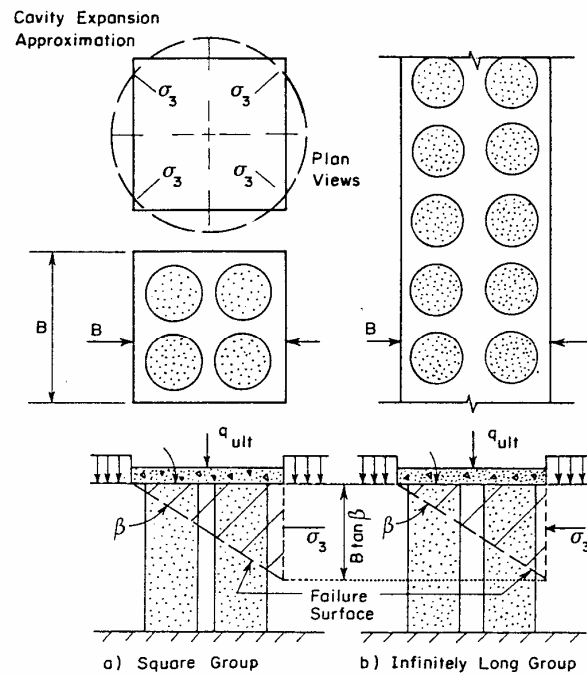


Figura 2.33. Análisis de la capacidad portante de un grupo de columnas bajo zapata (Barksdale y Bachus, 1983)

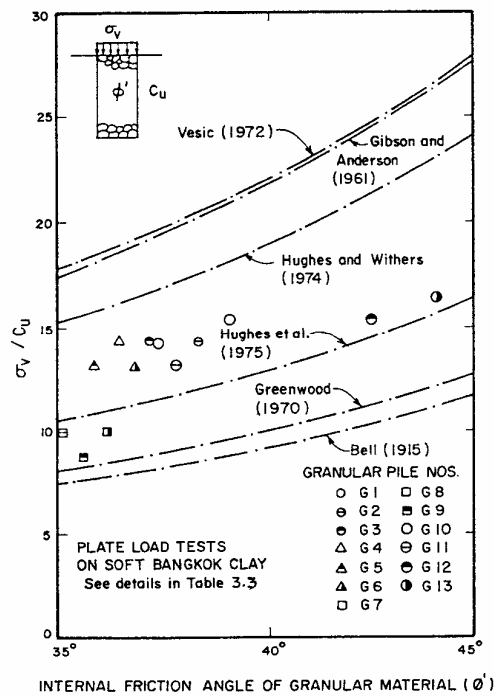


Figura 2.34. Resumen de los diferentes valores de  $N/k_{ac}$  (Bernardo y Lam, 1987)

La Guía de Cimentaciones (Ministerio de Fomento, 2002) para este caso de carga puntual (columnas como elementos portantes) propone:

$$\sigma_{vc} = 20c_u \quad (2.234)$$

que es la particularización de la ec.(2.232) para el caso concreto de que la carga aplicada sobre el suelo circundante sea nula ( $\sigma_{vs} = 0$ ), con lo que la solución sólo depende de la resistencia al corte sin drenaje del suelo. En el caso de suelos blandos normalmente consolidados, la resistencia al corte en superficie es prácticamente nula, por lo que no se puede aplicar una carga sin drenaje sobre la columna sin aplicar también cierta carga sobre el terreno circundante.

En la práctica, a veces se observa que en el cálculo de la estabilidad de las columnas para mejorar un suelo blando sobre el que se va a cimentar una carga repartida, no se considera la carga aplicada sobre el suelo circundante. Este diseño es excesivamente conservador y puede llevar a desechar el empleo de las columnas cuando éstas son perfectamente válidas, ya que para cargas repartidas el suelo siempre soporta parte de la carga, ayudando así a confinar lateralmente a las columnas. Así por ejemplo, si la carga aplicada por un terraplén fuese completamente flexible, la tensión vertical existente en la columna y en el suelo sería la misma y las columnas siempre serían estables. En realidad, siempre existe una cierta concentración de tensiones sobre la columna debido a las tensiones tangenciales que se desarrollan; de esta forma, se ha comprobado que en la práctica la carga aplicada por un terraplén se asemeja más a una carga rígida. Un valor habitual de este factor de concentración de tensiones ( $\sigma_{zc} / \sigma_{zs}$ ) puede encontrarse entre 3-6. El cálculo de la estabilidad de las columnas para el caso de una carga repartida es el siguiente:

$$\begin{aligned} \mu_c p_a &\approx 20c_u + 3k_{0s} \mu_s p_a \\ p_a &\approx \frac{20c_u}{\mu_c - 3k_{0s} \mu_s} \end{aligned} \quad (2.235)$$

donde  $\mu_c \left( = \frac{\sigma_{zc}}{p_a} \right)$  y  $\mu_s \left( = \frac{\sigma_{zs}}{p_a} \right)$  son los factores de concentración de carga en la columna y en el suelo respectivamente y  $p_a$  es la carga aplicada que provoca la rotura a



corto plazo. Ésta no tiene porqué coincidir con la carga total, ya que la carga se puede aplicar de forma escalonada y las columnas facilitan la disipación de presiones intersticiales. Debido a que el estudio se realiza suponiendo condiciones no drenadas, el valor del coeficiente de empuje en reposo del suelo es  $k_{0s} = 1$ . Los valores de  $\mu_c$  y  $\mu_s$  se suelen tomar para la situación final drenada; sus órdenes de magnitud son 2-6 y 0.8-1 respectivamente, dependiendo el valor exacto del área de sustitución, de la relación de rigideces y de la plastificación de la columna. Estos valores elegidos para la situación final drenada implican un cierto grado de seguridad, ya que la situación pésima de cálculo es sin drenaje, y en ese instante, la concentración de tensiones sobre la columna es menor.

También es necesario tener en cuenta en qué expresiones se ha incluido el factor de seguridad y en cuáles no. En todas las aquí reflejadas no se ha incluido el factor de seguridad, ya que el valor de éste puede variar en función del tipo de estructura a cimentar. Así por ejemplo, se puede emplear un factor de seguridad de 3 para zapatas, mientras que en terraplenes se puede ir a valores inferiores (1.5-2).

Debe añadirse que estos cálculos de estabilidad de las columnas se plantean para la situación inicial, sin drenaje. Sin embargo, en terraplenes esta situación no siempre es la más crítica, ya que el terreno, al no poder disminuir de volumen sin drenaje toma una fracción considerable de la carga aplicada, que va luego disminuyendo con el tiempo. Por ello, un análisis riguroso de la estabilidad de las columnas requeriría hacer intervenir el proceso de consolidación, teniendo en cuenta las deformaciones verticales y radiales del suelo y la columna.

Finalmente, se hace hincapié en que la ec. (2.234) dada por la Guía de Cimentaciones (Ministerio de Fomento, 2002) para el cálculo de la estabilidad de las columnas es aplicable únicamente cuando éstas actúan como elementos portantes (p. ej. bajo zapatas). En este caso, la carga admisible de las columnas no tiene que ser igual a la carga aplicada sobre la zapata, ya que parte de esta carga será soportada por el suelo situado entre columnas. Cuando se trate de una carga repartida, es necesario añadir a la formulación la carga vertical actuante sobre el suelo (2.232). A estas expresiones es necesario aplicarle el coeficiente de seguridad correspondiente en cada caso.

## 2.5. INSTRUMENTACIÓN DE OBRAS REALES

Varios son los estudios realizados en campo para analizar el comportamiento de un tratamiento real con columnas de grava. Debido a los objetivos de la tesis, el repaso se centra en los casos en los que las columnas se distribuyen uniformemente bajo la carga de un terraplén. La instrumentación puede realizarse en terraplenes experimentales, bien para estudiar el comportamiento de las columnas de grava con carácter meramente científico o para realizar un estudio previo del tratamiento que se va a ejecutar en una zona cercana, o en terraplenes de obras reales, lo que implica una mejor aproximación al proceso constructivo habitual pero mayor dificultad para controlar la ejecución del terraplén y la toma de lecturas.

La instrumentación de terraplenes ejecutados sobre suelos blandos mejorados con mechas drenantes también resulta de interés, ya que si bien, la técnica y los resultados son diferentes, los equipos de medida, su disposición, la planificación de las lecturas y elevación del terraplén es similar.

En el repaso de estos casos se analizará el proceso seguido para caracterizar el terreno, las características del terraplén y las columnas, la técnica empleada para ejecutar las columnas, los elementos de medida empleados, los resultados y conclusiones obtenidos y posibles modelos numéricos del terraplén.

### Terraplenes experimentales

1) McKenna et al. (1975) instrumentaron un terraplén experimental próximo a East Brent (Inglaterra) para investigar la efectividad de las columnas de grava en la reducción de asentamientos de grandes terraplenes. Este estudio fue previo al diseño de la autopista de Somerset en el suroeste de Inglaterra para ayudar en la decisión sobre el tratamiento a realizar. El terraplén experimental construido tenía unas dimensiones de 189 m de longitud, 70 m de anchura y taludes 3H:1V. Fue construido con residuos de cantera. Cada capa fue compactada con al menos 8 pasadas de rodillo vibrador consiguiendo una densidad de aproximadamente  $\gamma_{ap} = 22.8 \text{ kN/m}^3$ . La caracterización del terreno se realizó mediante sondeos y ensayos de molinete, obteniendo de éste ensayo una resistencia media al corte sin drenaje,  $c_u \approx 30 \text{ kPa}$ . Las dimensiones de las

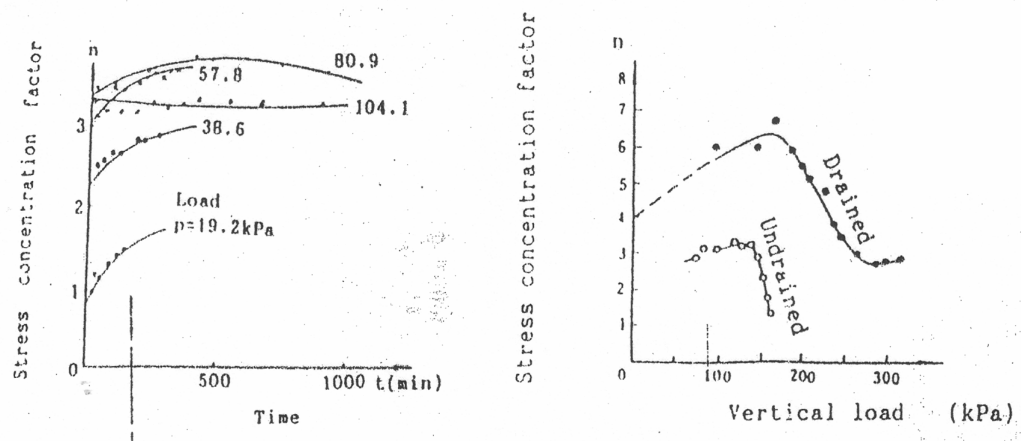
columnas eran 0.9 m de diámetro y 11.3 m de longitud, en una malla triangular con espaciamiento entre columnas de 2.45 m. Las columnas se construyeron mediante vía húmeda con alimentación por superficie. La instrumentación colocada en el terraplén se distribuía en tres grupos, un grupo en la zona central del tratamiento y los otros dos en la zona no mejorada. Cada grupo constaba de dos sondeos piezométricos, con lecturas a 9 profundidades, dos placas de asientos y un extensómetro con lecturas a 6 profundidades diferentes.

Antes de finalizar la construcción del terraplén, cuya altura final era de 9.1 m, se produjo el deslizamiento de la zona central con 7.9 m, por lo que se detuvo la construcción. Se esperaba obtener un registro de las presiones intersticiales generadas durante la fase de construcción de las columnas, la construcción del terraplén y la disipación posterior a la misma, pero el registro se truncó con el deslizamiento. En cuanto a los asientos, no se obtuvo ninguna reducción en el área tratada. Con los datos obtenidos concluyeron que el tratamiento en este caso había sido inefectivo y no fue usado bajo los terraplenes de la autopista. Las razones dadas para la ineficacia de las columnas fueron el tamaño del árido de la columna, demasiado basto para actuar de filtro, y la posibilidad de que la columna no fuese soportada durante la aplicación de la carga por el suelo circundante, produciéndose la expansión libre de la misma dentro del suelo blando.

2) Han y Ye (1991) presentaron los resultados de un estudio previo para la cimentación de una central eléctrica sobre un suelo blando de más de 30 m de espesor. Su resistencia media en los cinco primeros metros, medida mediante ensayos de molinete, era  $c_u = 15$  kPa. Se ejecutaron columnas de grava mediante vibro-sustitución de 14 m de longitud y con un diámetro medio de 0.85 m. Se dispusieron en una malla triangular con un área de sustitución,  $a_r = 0.36$ . La instrumentación se realizó en dos zonas, una sin tratar y otra tratada. Se emplearon piezómetros y células de presión total. También se realizaron pruebas de carga sobre las columnas.

En la Figura 2.35 se muestran los resultados de los factores de concentración de tensiones (*SCF*) medidos. Se observa que el *SCF* es menor para la situación no drenada, debido a la mayor rigidez del suelo. A partir de una determinada carga media aplicada, éste disminuye. Estos resultados coinciden con el trabajo de laboratorio de Juran y

Guermazi (1988), aunque en ese caso las columnas son totalmente penetrantes en el sustrato blando.

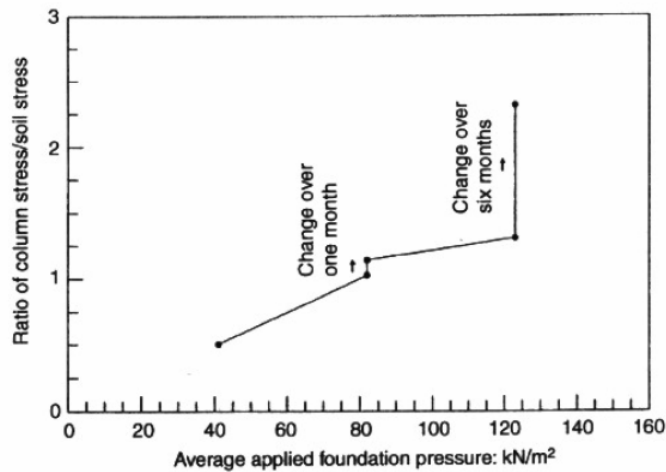


**Figura 2.35. Factor de concentración de tensiones medido (Han y Ye, 1991)**

3) Aunque no se trata de un terraplén, un caso interesante es el presentado por Watts et al. (2000). Estudian el comportamiento de dos zapatas corridas, una cimentada mediante columnas de grava en un suelo blando y la otra en el mismo suelo sin tratar. En este caso el suelo está ampliamente caracterizado mediante sondeos, ensayos geofísicos, edómetros, células Rowe, ensayos de penetración dinámica (DPSH y SPT). La instrumentación está formada por extensómetros, células hincadas para medida de tensiones totales y presiones intersticiales (Figura 2.37) y células de presión total convencionales. Se estudia la densificación radial del suelo alrededor de la columna debida a su ejecución mediante ensayos de penetración dinámica, así como el incremento de la tensión horizontal mediante las células hincadas. Se concluye que estas mejoras dependen del tipo de suelo original, del nivel de compactación (destreza del operario) y de la técnica de construcción (vía seca o húmeda) empleada.

De la medida de tensiones verticales se obtiene que el factor de concentración de tensiones es inferior al esperado (Figura 2.36), aunque se debe remarcar que estos valores no se pueden comparar “a priori” con análisis teóricos realizados para mallas de columnas distribuidas uniformemente bajo una carga repartida. Lo mismo ocurre para el factor de mejora,  $n$ . Además las columnas penetran sólo parcialmente en el sustrato blando, siendo bastante importante el asiento que se produce por debajo de ellas. La

Figura 2.36 muestra como el factor de concentración de tensiones aumenta conforme se produce la consolidación.



**Figura 2.36. Factor de concentración de tensiones medido (Watts et al., 2000)**

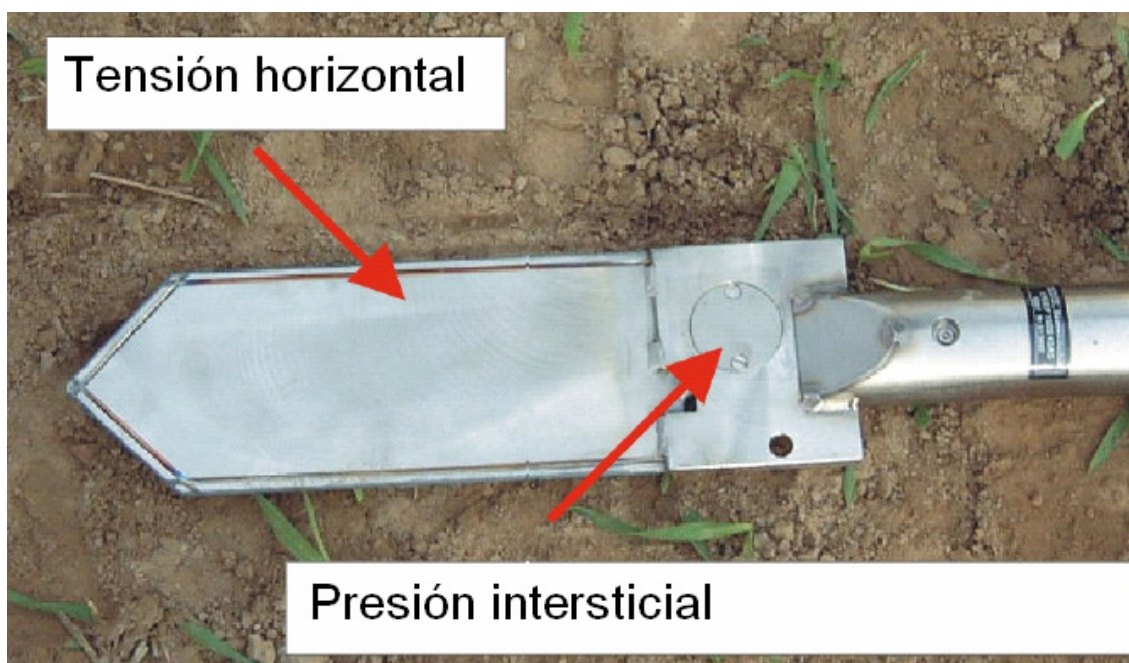
4) El trabajo de Kirsch (2004) abarca un gran número de análisis del comportamiento de las columnas de grava: modelos de laboratorio, análisis numéricos, recopilación de resultados de obras reales y terraplenes experimentales. A pesar de que el estudio se centra en el comportamiento de grupos de columnas bajo zapatas, son especialmente interesantes los resultados de las medidas realizadas para estudiar la influencia de la instalación de columnas mediante vibro-desplazamiento en un terraplén experimental. Las columnas se dispusieron en mallas de 6x6, con un diámetro medio de 0.8 m y un espaciamiento de 1.4 m en dos zonas de medida, una en una arcilla limosa (Zona 1) y otra en un limo arenoso (Zona 2). Ambos suelos se caracterizaron mediante ensayos granulométricos, límites de Atterberg, edómetros y ensayos de penetración. Desgraciadamente, no se refleja el coeficiente de consolidación.

Para poder medir las tensiones horizontales efectivas se emplearon células planas (Figura 2.37), formadas por una paleta rellena de aceite que mide la presión total y un pequeño piezómetro en la parte superior que permite obtener la tensión efectiva. Para su correcta instalación se hace un sondeo hasta una profundidad ligeramente inferior a la deseada y éste se hincó en el fondo del sondeo. De esta forma se garantiza una correcta lectura de la tensión horizontal.

Las tensiones totales horizontales y presiones intersticiales durante el proceso de instalación de la primera columna de la Zona 1 (arcilla limosa) se muestran en la Figura 2.38. La columna está a 7.33 m del instrumento de medida. La construcción de la columna se divide en las siguientes fases: (1) penetración del vibrador, (2) compactación de la grava y (3) aporte de la grava.

El resultado final de la evolución de las tensiones horizontales y presiones intersticiales en ambas zonas de medida durante la ejecución de las siguientes columnas se refleja en la Figura 2.39. En el caso de la Zona 1 (arcilla limosa), el piezómetro está a 4.7 m de profundidad y la presión intersticial inicial es de 29.6 kPa, mientras que en la Zona 2 (limo arenoso) la profundidad del piezómetro es de 7.5 m y la presión intersticial inicial es de 59.7 kPa.

De estos resultados, Kirsch concluye que el valor del coeficiente de empuje en reposo,  $k_0$ , aumenta entre 1.2-1.6 veces respecto al inicial debido a la instalación de las columnas. Este aumento es mayor en la arcilla y a una distancia de 5 m de la columna ejecutada. Además, también estudia el incremento del módulo de deformación debido a la instalación de las columnas mediante ensayos presiométricos.



**Figura 2.37. Célula para medida simultánea de tensiones y presiones intersticiales (adaptado de Kirsch, 2004)**

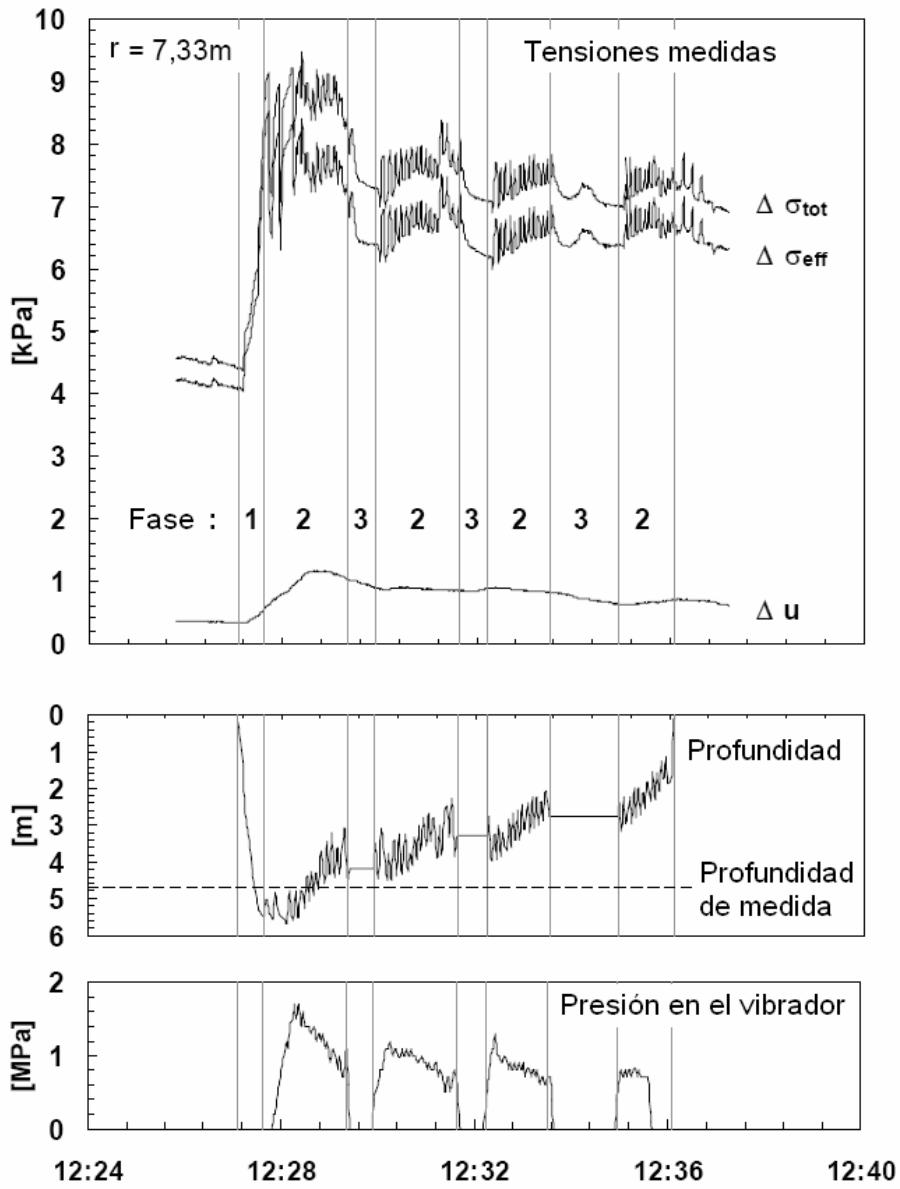


Figura 2.38. Tensiones medidas durante la instalación de una columna (Kirsch, 2004)

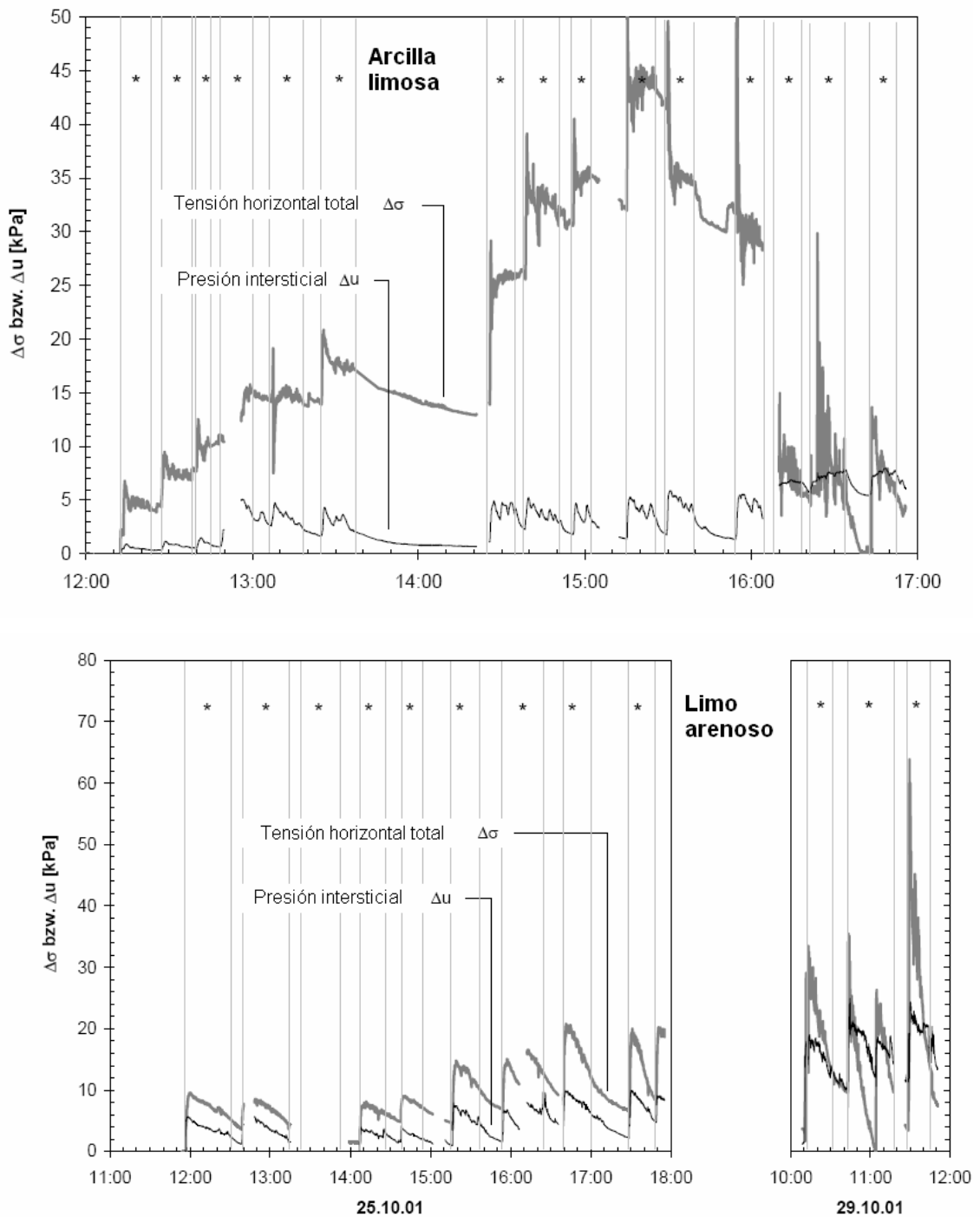
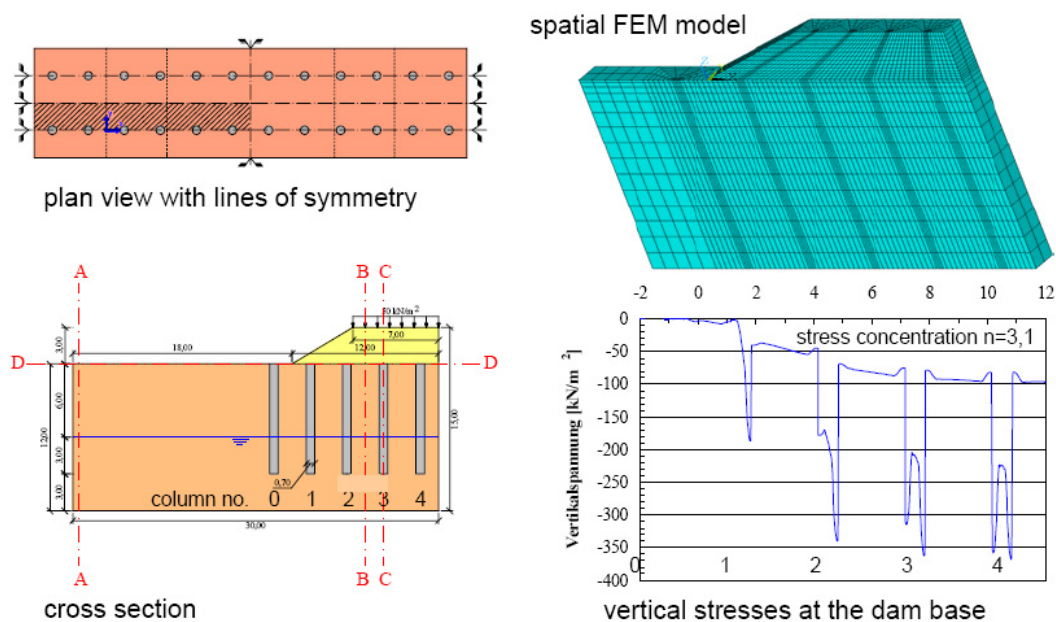


Figura 2.39. Tensiones medidas durante la instalación de varias columnas (Kirsch, 2004)





**Figura 2.40. Análisis numérico mediante elementos finitos de un terraplén sobre columnas de grava (Kirsch y Sonderrmann, 2003)**

### Terraplenes en servicio

1) Kirsch y Sonderrmann (2003) presentan un análisis numérico mediante elementos finitos de un terraplén cimentado sobre columnas de grava (Figura 2.40). Emplean un modelo de comportamiento con rigidización volumétrica y un criterio de plastificación de Drucker-Prager con rigidización isotrópica. Con este modelo, el estudio de los diferentes aspectos, como la estabilidad del pie del terraplén y el factor de concentración de tensiones, es satisfactorio.

2) Chun et al. (2003) estudian los excesos de presión intersticial ocurridos durante la instalación de columnas de arena. Se mejora un suelo blando para cimentar un terraplén de una autopista en Corea. Las columnas se ejecutaron mediante una camisa de acero que posteriormente se rellenaba con arena y se compactaba. Finalmente, se extraía la camisa. La mayor parte del incremento de presión intersticial se produce durante el hincado de la camisa. Las columnas tienen un diámetro de 0.4 m y una profundidad de 12 m. El terreno está formado por un estrato aluvial de 12 m de arcilla limosa (CL) y limo arcilloso (ML) sobre un lecho de grava. Se realizaron diversos ensayos de identificación del suelo, edómetros y de ensayos de molinete se

obtuvo que  $c_u = 20$  kPa. El nivel freático se sitúa 0.5 m por debajo de la superficie. Los picos de presión intersticial se midieron mediante dos piezómetros situados a dos profundidades diferentes durante la instalación de las columnas cercanas. De acuerdo con la teoría de expansión de cavidades y suponiendo un comportamiento elasto-plástico perfecto, los resultados se ajustaron a dos leyes logarítmicas (Figura 2.41). Teniendo en cuenta la dispersión de las medidas en campo, el ajuste es apropiado.

3) Gäb et al. (2007) presentan la instrumentación realizada en la construcción de un terraplén de acceso a un estadio de fútbol, cimentado sobre columnas de grava “flotantes”. El terraplén tiene una altura definitiva de 8.5 m, con una sobrecarga temporal de 2 m hasta 10.5 m. El terreno está formado por una capa de aproximadamente 11 m de arena floja a media, bajo la que aparece un estrato de arcilla limosa blanda de más de 50 m de espesor. De ensayos de penetración estática CPT (Cone Penetration Test) en la arcilla limosa, se obtiene una resistencia por fuste y por punta inferior a 300 kPa y 1 MPa, respectivamente. Las columnas tienen una profundidad de 14.5 m, un diámetro de 0.7 m y han sido instaladas mediante vibro-desplazamiento con alimentación por fondo en una malla triangular ( $a_r = 0.13$ ). Las columnas penetran 3.5 m en la arcilla y el nivel freático está a 3.1 m de profundidad.

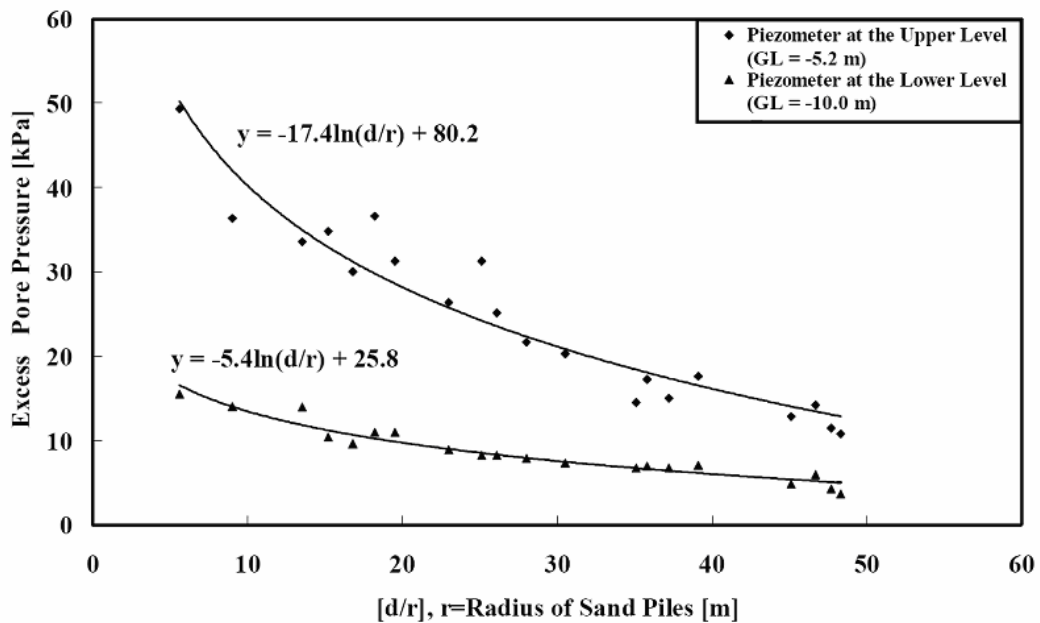


Figura 2.41. Picos de presión intersticial medidos durante la instalación de columnas (Chun et al., 2003)

Los equipos de medida son 3 piezómetros con lecturas a 5 profundidades diferentes, un extensómetro con lectura a 6 profundidades y cuatro células de empuje de tierras del mismo tipo que la Figura 2.37. La tecnología empleada para los piezómetros y extensómetros es la de cuerda vibrante, lo que permite obtener buenas lecturas tanto en periodos largos (consolidación) como cortos (instalación de las columnas). El resultado de las lecturas de un piezómetro durante todo el proceso se muestran en la Figura 2.42. Durante el proceso de construcción de las columnas se han medido fuertes incrementos de presión intersticial. Estos incrementos se han disipado rápidamente en las profundidades correspondientes a la arena.

El comportamiento de las células de medida de empuje de tierras no ha sido satisfactorio en este caso. Adicionalmente se han realizado ensayos de penetración antes y después de la instalación de las columnas para estudiar la mejora realizada en la arena. Como conclusiones se establece que la instalación de las columnas ha servido para compactar la arena, acelerar la consolidación y homogeneizar los asientos. La reducción de asientos lograda es muy pequeña debido al carácter “flotante” de las columnas.

### **Drenes verticales**

1) Bergado et al. (2002) presentan el comportamiento de 3 terraplenes experimentales construidos sobre arcilla blanda de Bangkok con 3 tipos de drenes prefabricados diferentes. El suelo se caracterizó mediante ensayos de molinete, ensayos de penetración SPT, límites de Atterberg y edómetros. Los terraplenes eran cuadrados en planta, con unas dimensiones en la base de 40x40 m, una altura máxima de 4.2 m y taludes 3H:1V. Se instrumentaron con piezómetros neumáticos, hidráulicos y de tubo abierto, placas de asiento e inclinómetros. En la Figura 2.43 se muestran algunos de los resultados obtenidos, como presiones intersticiales medidas y compresión de los diferentes estratos. Éstos se comparan con el ritmo de elevación del terraplén. Finalmente se analiza la reducción del contenido de agua lograda, la mejora en la resistencia al corte sin drenaje y el valor del coeficiente de consolidación horizontal. Del estudio resulta que el grado de consolidación obtenido a partir de las presiones intersticiales medidas es ligeramente inferior al que cabe deducir a partir de los asientos.

2) Sánchez-Alciturri et al. (1999) estudian el comportamiento de los terraplenes de acceso a un paso superior de la autovía A-67 sobre el ferrocarril, en las cercanías de Santander. Los terraplenes tienen una altura de 12 m con taludes 3H:2V. Se decide tratar la base de los terraplenes con drenes prefabricados para acelerar la consolidación y se controlan los asentamientos, desplazamientos horizontales y presiones intersticiales durante su ejecución. Los valores instrumentados se ajustan razonablemente bien a los obtenidos de un análisis mediante elementos finitos.

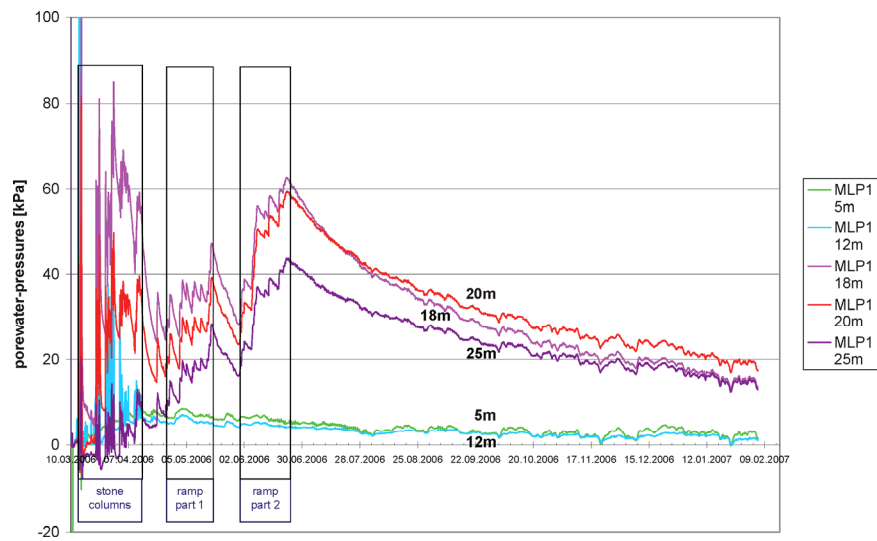


Figura 2.42. Presión intersticial medida (Gäb et al., 2007)

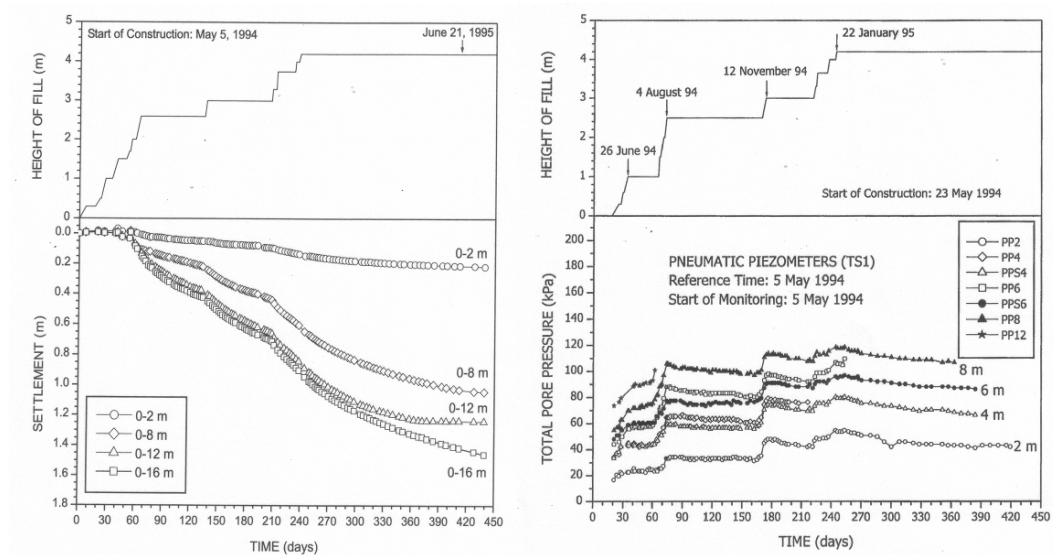


Figura 2.43. Evolución del asiento y las presiones intersticiales con la altura del terraplén (Bergado et al., 2002)