



UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS
DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS

DEPARTAMENTO DE CIENCIA E INGENIERÍA DEL
TERRENO Y DE LOS MATERIALES

TESIS DOCTORAL

ANÁLISIS TEÓRICO DE LA
CONSOLIDACIÓN Y DEFORMACIÓN
ALREDEDOR DE COLUMNAS DE GRAVA

Autor

JORGE CASTRO GONZÁLEZ

Director

CÉSAR SAGASETA MILLÁN

Santander, 2008

Capítulo 3

MODELO ANALÍTICO DESARROLLADO

Este es el capítulo central de la tesis. En él se describe el modelo analítico desarrollado para estudiar la consolidación y deformación alrededor de columnas de grava.

El estudio se realiza sobre la celda unidad en simetría axial. Por ello, antes de describir las hipótesis del modelo, se realizan algunas consideraciones sobre la elección de las dimensiones de la celda unidad.

Una vez visto el estado del conocimiento en el capítulo anterior, se repasan las principales hipótesis de los diferentes métodos de diseño y por qué se considera necesario eliminar alguna de ellas y proponer un nuevo modelo analítico.

Se describe el modelo, su desarrollo matemático y las expresiones alcanzadas. Se analizan sus principales resultados y se comparan con las soluciones previas.

Para facilitar la comprensión del modelo y ver su aplicación práctica, se presenta un ejemplo de diseño. Por último, se realiza un análisis numérico mediante elementos finitos del problema tratado y se compara con el modelo desarrollado.

3.1. CELDA UNIDAD

El estudio teórico de las columnas de grava y del suelo circundante se realiza sobre una celda unidad en simetría axial (Figura 3.1). Se supone una carga rígida, los bordes superior e inferior lubricados y en el borde exterior de la célula: la tensión tangencial, el desplazamiento y el flujo de agua son nulos.

En el apartado 2.1. “Geometría” se han analizado las diferentes opciones para modelizar las columnas. Se ha descrito el proceso de obtención de la celda unidad y cuáles son las expresiones que permiten calcular su diámetro exterior (Tabla 2.1). La obtención de este diámetro exterior se basa en la igualdad de áreas, lo que parece claro cuando el criterio principal es la reducción de asientos pero no cuando se igualan tiempos de consolidación. En este caso, el principio básico de la equivalencia debería ser encontrar una celda de forma cilíndrica que aunque no tenga la misma red de flujo que la original (prismática), presente el mismo tiempo medio de consolidación. Es decir, que aunque la presión intersticial en determinados puntos no sea la misma, sí lo sea su grado de consolidación medio.

En el caso de deformación plana se emplea como base la celda unidad y se comparan tiempos de consolidación calculados con sus respectivas soluciones. En este caso, la dificultad es obtener una solución analítica para la geometría prismática inicial, lo que hace necesario recurrir a consideraciones geométricas y físicas sobre el proceso de consolidación.

En la consolidación unidimensional, el tiempo de consolidación es proporcional al cuadrado del camino de drenaje, porque el factor adimensional tiempo depende directamente del tiempo e inversamente del cuadrado de la distancia de drenaje ($T_z = \frac{c_{vz}t}{H^2}$). Esta proporcionalidad es demostrable también para el caso de drenaje radial.

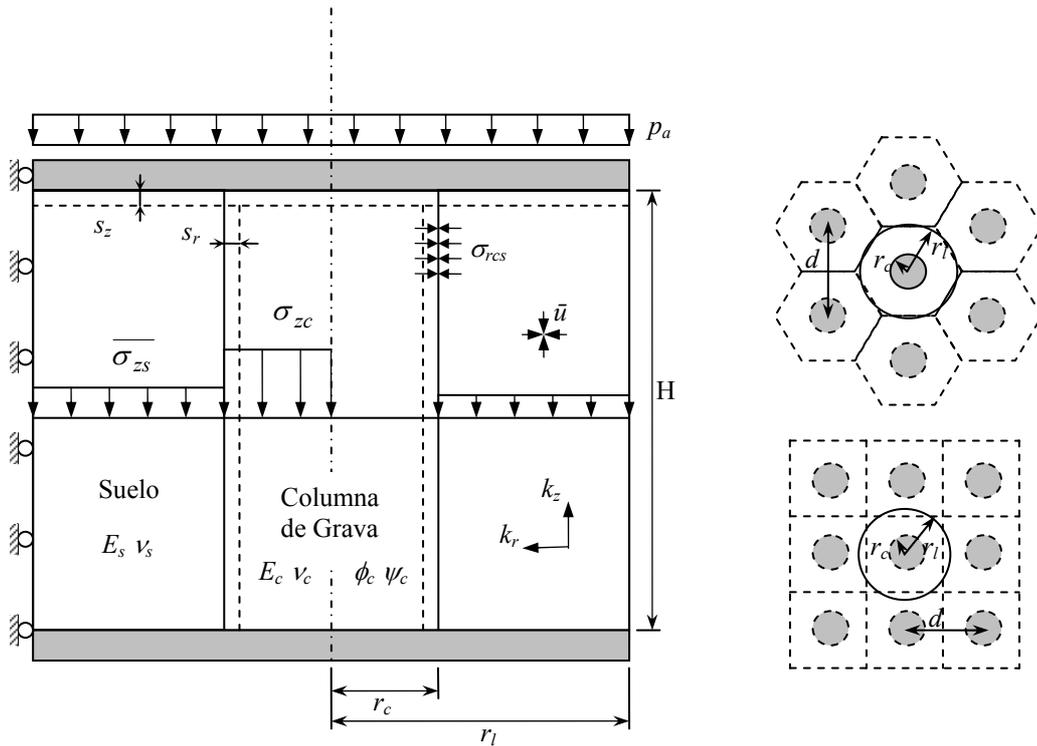


Figura 3.1. Celda unidad

Para el drenaje radial la ecuación es la siguiente:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c_{vr} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad (3.1)$$

Empleando unos parámetros adimensionales similares al caso unidimensional

($T_r = \frac{c_{vr} t}{r_l^2}$ y $\rho = \frac{r}{r_l}$), se obtiene

$$\frac{\partial u}{\partial T_r} \cdot \frac{c_{vr}}{r_l^2} = c_{vr} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} \cdot \frac{1}{r_l^2} + \frac{1}{r_l \rho} \cdot \frac{\partial u}{\partial \rho} \cdot \frac{1}{r_l} \right) \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial T_r} = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial u}{\partial \rho} \quad (3.3)$$

Se demuestra así que el grado de consolidación radial es proporcional al cuadrado del camino de drenaje, y por tanto, la igualación de áreas no es exacta si se pretende obtener el mismo tiempo de consolidación medio. Atkinson y Eldred (1981) lo comentan en el siguiente párrafo:

“Since the rate of consolidation is proportional to the square of the drainage path length, the overall effect is that the average consolidation calculated by means of an equivalent cylinder [with the same area] overestimates the true consolidation. The error is likely to be small, probably less than 5% but it is on the unsafe side”.¹

Se propone en esta tesis emplear el cuadrado del camino de drenaje para asimilar geometrías. Esto expresado matemáticamente es

$$T \rightarrow \frac{\int_s w^2 ds}{\int_s ds} \quad (3.4)$$

siendo w la distancia de drenaje y ds un elemento diferencial de área.

El problema consiste ahora en determinar las distancias de drenaje, lo que puede hacerse matemáticamente determinando la red de filtración y sus trayectorias de flujo. Una simplificación posible de la red de filtración es suponer líneas rectas al punto de drenaje central en lugar de las curvas reales, lo que deja un pequeño error del lado de la inseguridad pero simplifica enormemente la solución. Con esta hipótesis, se obtiene que el tiempo de consolidación es proporcional al radio de giro respecto del eje del dren considerado puntual. Así, se obtienen los valores mostrados en la Tabla 3.1.

¹ *“Debido a que el grado de consolidación es proporcional al cuadrado del camino de drenaje, el efecto global es que la consolidación media calculada mediante el cilindro equivalente [con la misma área] sobrestima la consolidación real. Este error es posible que sea pequeño, menor de un 5%, pero está del lado de la inseguridad”*

Tabla 3.1. Diámetro de la celda unidad equivalente propuesto para igualar tiempos de consolidación

<i>Distribución</i>	$r^2 = I_0/A$	<i>Diámetro de la celda unidad</i>
Triangular	$\frac{5d^2}{36}$	$d_1 = \frac{\sqrt{10}}{3}d \approx 1.054d$
Cuadrada	$\frac{d^2}{6}$	$d_1 = \frac{2\sqrt{3}}{3}d \approx 1.155d$
Hexagonal	$\frac{d^2}{4}$	$d_1 = \sqrt{2}d \approx 1.414d$

Se comprueba que para la malla triangular la diferencia es muy pequeña pero el resultado es más conservador, igual que para la cuadrada en la que la diferencia es ya de un 2.4%. Para la malla hexagonal, la diferencia es muy significativa (10%). El empleo de estos valores no supone una complejidad adicional, recordando que todavía se sigue ligeramente del lado de la inseguridad. Se debe matizar que esta analogía sólo es válida cuando el principal problema tratado es la consolidación y no la reducción de asiento, como ocurre en el caso de los drenes mecha.

Estos valores se pueden aproximar más teniendo en cuenta la red de filtración exacta en cada caso. Sin embargo, la influencia de la curvatura de la red de filtración es muy pequeña y no se puede obtener una formulación sencilla para estos casos. Como ejemplo, se emplea el caso de una malla cuadrada.

Si se considera la columna puntual, las líneas equipotenciales son las siguientes curvas

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{d}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi y}{d}\right) = C_1 \tag{3.5}$$

siendo C_1 una constante entre 0 y 1 y estando el origen de coordenadas en una esquina del cuadrado de lado d (Figura 3.2).

Las líneas de flujo son la familia de curvas ortonormales a las equipotenciales (Figura 3.3). Así se obtiene

$$\frac{\cos\left(\frac{\pi y}{d}\right)}{\cos\left(\frac{\pi x}{d}\right)} = C_2 \quad (3.6)$$

donde C_2 es otra constante entre 0 y 1, cuyo signo cambia para cada octante.

La expresión de la longitud del camino de drenaje a lo largo de estas líneas de flujo es

$$w = \int_x^{d/2} \sqrt{1 + \frac{\left(C_2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{d}\right)\right)^2}{1 - \left(C_2 \cos\left(\frac{\pi x}{d}\right)\right)^2}} dx \quad (3.7)$$

Esta integral es difícil de obtener analíticamente. Para analizar la diferencia entre la distancia en línea recta y la distancia a lo largo de la línea de flujo se han tomado puntos separados $0.05d$ y se ha realizado la integral numéricamente (Tablas 3.2, 3.3, 3.4 y 3.5).

Analizando estas diferencias se comprueba que el error es inferior al 1% para el caso de tamaño puntual de la columna. Este error se vería incrementado al considerar el diámetro de la columna, aumentando dicho error a medida que la relación diámetro-separación de las columnas se hace mayor.

Como resumen, en este apartado se han propuesto nuevas expresiones (Tabla 3.1) para obtener el diámetro de la celda unidad equivalente cuando se pretende igualar tiempos medios de consolidación. Estas expresiones son más conservadoras que las habitualmente empleadas (Tabla 2.1) pero todavía están ligeramente del lado de la inseguridad por las simplificaciones realizadas en la geometría de la red de filtración. Las expresiones propuestas son especialmente útiles para el caso de drenes mecha

distribuidos en una malla cuadrada, ya que para drenes mecha el tiempo de consolidación es el factor determinante. Para una distribución triangular la diferencia entre las distintas expresiones es despreciable y las distribuciones hexagonales no son eficientes.

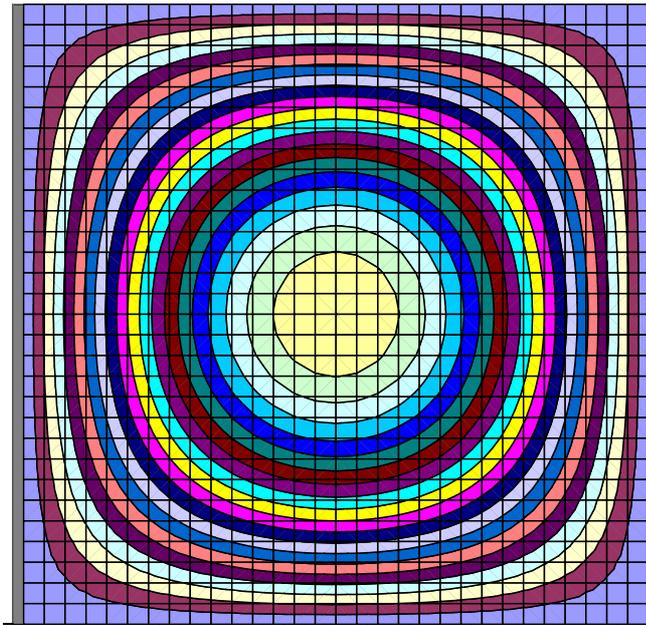


Figura 3.2. Líneas equipotenciales alrededor de una columna

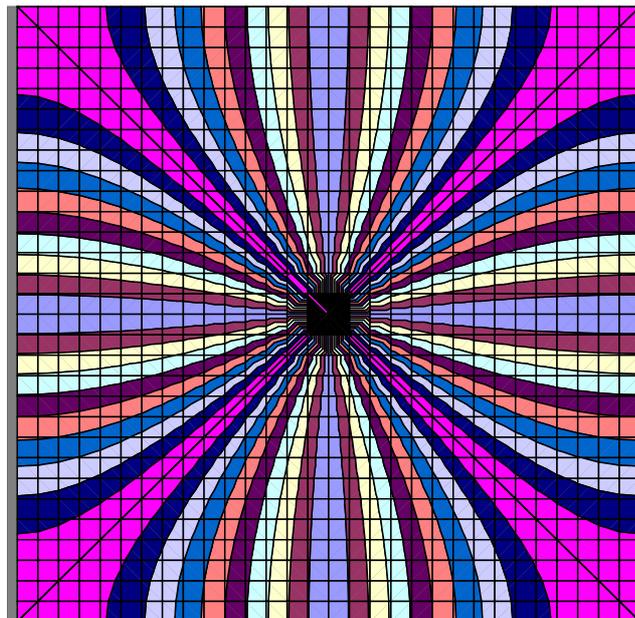


Figura 3.3. Red de filtración alrededor de una columna

Tabla 3.2. Distancias reales según la línea de flujo

<i>w</i>	0.00<i>d</i>	0.05<i>d</i>	0.10<i>d</i>	0.15<i>d</i>	0.20<i>d</i>	0.25<i>d</i>	0.30<i>d</i>	0.35<i>d</i>	0.40<i>d</i>	0.45<i>d</i>	0.50<i>d</i>
0.00<i>d</i>	0.7071	0.6772	0.6478	0.6193	0.5922	0.5672	0.5449	0.5263	0.5120	0.5031	0.5000
0.05<i>d</i>		0.6364	0.6033	0.5729	0.5447	0.5174	0.4960	0.4769	0.4623	0.4531	0.4500
0.10<i>d</i>			0.5657	0.5320	0.5013	0.4735	0.4491	0.4286	0.4131	0.4033	0.4000
0.15<i>d</i>				0.4950	0.4612	0.4307	0.4039	0.3815	0.3645	0.3537	0.3500
0.20<i>d</i>					0.4243	0.3906	0.3608	0.3358	0.3165	0.3042	0.3000
0.25<i>d</i>						0.3536	0.3202	0.2917	0.2694	0.2550	0.2500
0.30<i>d</i>							0.2828	0.2500	0.2236	0.2062	0.2000
0.35<i>d</i>								0.2121	0.1803	0.1581	0.1500
0.40<i>d</i>									0.1414	0.1118	0.1000
0.45<i>d</i>										0.0707	0.0500
0.50<i>d</i>											0.0000

Tabla 3.3. Distancias en línea recta

<i>w</i> _{teórica}	0.00<i>d</i>	0.05<i>d</i>	0.10<i>d</i>	0.15<i>d</i>	0.20<i>d</i>	0.25<i>d</i>	0.30<i>d</i>	0.35<i>d</i>	0.40<i>d</i>	0.45<i>d</i>	0.50<i>d</i>
0.00<i>d</i>	0.7071	0.6727	0.6403	0.6103	0.5831	0.5590	0.5385	0.5263	0.5099	0.5025	0.5000
0.05<i>d</i>		0.6364	0.6021	0.5701	0.5408	0.5148	0.4924	0.4743	0.4610	0.4528	0.4500
0.10<i>d</i>			0.5657	0.5315	0.5000	0.4717	0.4472	0.4272	0.4123	0.4031	0.4000
0.15<i>d</i>				0.4950	0.4610	0.4301	0.4031	0.3808	0.3640	0.3536	0.3500
0.20<i>d</i>					0.4243	0.3905	0.3606	0.3354	0.3162	0.3041	0.3000
0.25<i>d</i>						0.3536	0.3202	0.2915	0.2693	0.2550	0.2500
0.30<i>d</i>							0.2828	0.2500	0.2236	0.2062	0.2000
0.35<i>d</i>								0.2121	0.1803	0.1581	0.1500
0.40<i>d</i>									0.1414	0.1118	0.1000
0.45<i>d</i>										0.0707	0.0500
0.50<i>d</i>											0.0000

Tabla 3.4. Cociente entre distancia según línea de flujo y línea recta

Coc.	0.00<i>d</i>	0.05<i>d</i>	0.10<i>d</i>	0.15<i>d</i>	0.20<i>d</i>	0.25<i>d</i>	0.30<i>d</i>	0.35<i>d</i>	0.40<i>d</i>	0.45<i>d</i>	0.50<i>d</i>
0.00<i>d</i>	1.0000	1.0068	1.0117	1.0147	1.0156	1.0146	1.0119	1.0081	1.0042	1.0011	1.0000
0.05<i>d</i>		1.0000	1.0020	1.0050	1.0072	1.0080	1.0073	1.0054	1.0029	1.0008	1.0000
0.10<i>d</i>			1.0000	1.0009	1.0026	1.0038	1.0041	1.0034	1.0020	1.0006	1.0000
0.15<i>d</i>				1.0000	1.0005	1.0014	1.0021	1.0020	1.0013	1.0004	1.0000
0.20<i>d</i>					1.0000	1.0003	1.0008	1.0010	1.0008	1.0003	1.0000
0.25<i>d</i>						1.0000	1.0002	1.0004	1.0004	1.0002	1.0000
0.30<i>d</i>							1.0000	1.0001	1.0002	1.0001	1.0000
0.35<i>d</i>								1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
0.40<i>d</i>									1.0000	1.0000	1.0000
0.45<i>d</i>										1.0000	1.0000
0.50<i>d</i>											1.0000

Tabla 3.5. Cociente de diferencias al cuadrado

Coc. ²	0.00d	0.05d	0.10d	0.15d	0.20d	0.25d	0.30d	0.35d	0.40d	0.45d	0.50d
0.00d	1.0000	1.0136	1.0235	1.0295	1.0315	1.0295	1.0240	1.0163	1.0083	1.0023	1.0000
0.05d			1.0040	1.0100	1.0144	1.0160	1.0146	1.0107	1.0058	1.0016	1.0000
0.10d			1.0000	1.0019	1.0052	1.0077	1.0083	1.0068	1.0039	1.0011	1.0000
0.15d				1.0000	1.0010	1.0029	1.0041	1.0040	1.0025	1.0008	1.0000
0.20d					1.0000	1.0006	1.0016	1.0021	1.0015	1.0005	1.0000
0.25d						1.0000	1.0003	1.0008	1.0008	1.0003	1.0000
0.30d							1.0000	1.0002	1.0003	1.0002	1.0000
0.35d								1.0000	1.0001	1.0001	1.0000
0.40d									1.0000	1.0000	1.0000
0.45d										1.0000	1.0000
0.50d											1.0000

3.2. HIPÓTESIS

A continuación se repasan las hipótesis realizadas en el estudio de la consolidación radial alrededor de columnas de grava vistas en el Capítulo 2, con el objetivo de analizar cuáles pueden ser mejoradas o eliminadas, dando lugar al desarrollo de una nueva solución más adecuada del problema.

La ecuación general de consolidación tridimensional se basa en las siguientes hipótesis:

1. El suelo está completamente saturado
2. El agua y las partículas de suelo son incompresibles, es decir, el cambio de volumen es debido únicamente a la pérdida de agua
3. Se cumple la Ley de Darcy
4. El suelo es elástico
5. Las deformaciones unitarias son pequeñas

La ecuación general de consolidación radial en coordenadas cilíndricas, para el caso de una permeabilidad anisótropa, es:

$$\frac{k_r}{\gamma_w} \left[\frac{\partial^2 u(r, z, t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u(r, z, t)}{\partial r} \right] + \frac{k_z}{\gamma_w} \frac{\partial^2 u(r, z, t)}{\partial z^2} = - \frac{\partial \varepsilon_{vol,s}(r, z, t)}{\partial t} \quad (3.8)$$

Para obtener la solución a esta ecuación, Barron y Hansbo expresan el término de la derecha en función de la presión intersticial con la ayuda de las siguientes hipótesis simplificadoras:

6. El suelo se deforma en condiciones de confinamiento lateral, con deformación horizontal nula en cualquier punto. Esta hipótesis se basa en las condiciones de contorno existentes, desplazamiento radial nulo en la pared exterior, y también en el contacto suelo-dren (para las columnas de grava, sólo puede considerarse como una primera aproximación). Esta hipótesis supone una importante simplificación porque la deformación volumétrica, ε_{vol} , coincide con la deformación vertical, ε_z , que a su vez puede relacionarse con la tensión efectiva vertical, σ'_{zs} , en virtud de la hipótesis 4:

$$\varepsilon_{vol,s} = \varepsilon_{zs} = \frac{\sigma'_{zs}}{E_{ms}} \quad (3.9)$$

7. La deformación vertical en el suelo, ε_{zs} , y por tanto también la tensión efectiva vertical, σ'_{zs} , son uniformes en cualquier plano horizontal (asiento uniforme). Entonces, a pesar de que u y σ_{zs} varían con r , su diferencia es constante (Figura 2.19), y pueden sustituirse por sus valores medios a lo largo del radio:

$$\sigma'_{zs}(r,t) = \sigma_{zs}(r,t) - u(r,t) = \overline{\sigma_{zs}}(t) - \bar{u}(t) \quad (3.10)$$

y por tanto

$$\frac{\partial \varepsilon_{vol,s}}{\partial t} = \frac{\partial \varepsilon_{zs}}{\partial t} = \frac{1}{E_{ms}} \frac{\partial \sigma'_{zs}}{\partial t} = \frac{1}{E_{ms}} \frac{\partial (\sigma_{zs} - u)}{\partial t} = \frac{1}{E_{ms}} \frac{\partial (\overline{\sigma_{zs}} - \bar{u})}{\partial t} \quad (3.11)$$

8. La tensión vertical total en el suelo es constante con el tiempo e igual a la presión media aplicada, p_a . Esto es evidente en los drenes verticales, pero para las columnas de grava sólo puede ser considerado como una primera aproximación.

$$\overline{\sigma_{zs}} = p_a \quad ; \quad \sigma_{zc} = 0 \quad (3.12)$$

De las ecs. (3.11) y (3.12) se obtiene:

$$\frac{\partial \varepsilon_{vol,s}}{\partial t} = \frac{1}{E_{ms}} \frac{\partial (p_a - \bar{u})}{\partial t} = -\frac{1}{E_{ms}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \quad (3.13)$$

Para el caso de consolidación únicamente radial (sin flujo vertical), la ecuación es

$$c_{vr} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right] = \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \quad (3.14)$$

donde c_{vr} es el coeficiente de consolidación radial del suelo

$$c_{vr} = \frac{k_r}{\gamma_w} E_{ms} \quad (3.15)$$

La solución de Barron-Hansbo a la ec. (3.14) es

$$u = \frac{\bar{u}}{f(a_r)} \left\{ \ln \left(\frac{r}{r_c} \right) - \frac{1}{2} a_r \left[\left(\frac{r}{r_c} \right)^2 - 1 \right] \right\} \quad (3.16)$$

y la presión intersticial media es

$$\bar{u} = u_u e^{-\frac{8T_r}{f(a_r)}} \quad (3.17)$$

donde T_r es factor tiempo adimensional ($T_r = c_{vr} t / 4r_l^2$), u_u es la presión intersticial inicial ($u_u = p_a$), y:

$$f(a_r) = -\frac{\ln a_r}{2(1-a_r)} - \frac{3-a_r}{4} \quad (3.18)$$

La manera más sencilla de tener en cuenta la influencia de la columna es abandonar parcialmente la hipótesis 8 de la lista arriba enunciada y considerar una tensión total vertical sobre el suelo, $\bar{\sigma}_{zs}$, constante con el tiempo, pero diferente de la carga aplicada, p_a . De esta forma, la consolidación alrededor de columnas de grava se puede estudiar directamente mediante la solución de Barron/Hansbo con $u_u = \bar{\sigma}_{zs}$. Con este método el valor del asiento final se reduce pero no el tiempo de consolidación.

El abandono completo de la hipótesis 8 fue propuesto por Han y Ye (2001). La validez de la ec. (3.8) se mantiene y la obtención de la deformación volumétrica, ε_{vol} , (3.13) se modifica para incluir la variación de la tensión total vertical sobre el suelo con

el tiempo. La ecuación de la consolidación radial mantiene la misma forma que la vista previamente (3.14), pero con un coeficiente de consolidación modificado (2.199), mayor que (3.15).

Todas las soluciones descritas mantienen la hipótesis de confinamiento lateral durante la consolidación, ignorando la interacción horizontal entre la columna y el suelo. El principal objetivo de la solución propuesta es incluir la deformación radial de la columna en el análisis de la consolidación radial, eliminando la hipótesis 6 de la lista enumerada e imponiendo el equilibrio horizontal de las tensiones radiales en el contacto columna-suelo. No obstante, se trata de mantener una solución lo más sencilla posible, por lo que se mantiene la hipótesis 7.

La condición de deformación horizontal nula es muy restrictiva y es sustituida en este caso por un estado de deformación horizontal en la columna y en el suelo para cada plano horizontal. El cálculo de la deformación volumétrica en el suelo, ec. (3.8), debe ser realizado mediante la expresión general:

$$\varepsilon_{vol,s} = \frac{1}{K_s} \sigma'_{oct,s} \quad (3.19)$$

La obtención de la tensión efectiva octaédrica en el suelo implica una solución completamente acoplada del problema. No obstante, una solución razonablemente aproximada puede obtenerse si se evalúa la deformación volumétrica del suelo empleando una presión intersticial constante, igual a su valor medio a lo largo de todo el radio, \bar{u} .

Esta es la principal hipótesis de la presente solución y permite desacoplar el problema. A esta hipótesis se llega de una manera natural del desarrollo de la solución de Barron/Hansbo, que también emplea una presión intersticial media a lo largo de todo el radio para evaluar el miembro de la derecha (derivada con respecto del tiempo) de la ecuación general de la consolidación (3.8), hipótesis 7. La hipótesis puede justificarse en el hecho de que las deformaciones horizontales son mucho menores que las verticales, y que por ello pueden ser tratadas de este modo aproximado. En cualquier caso, significa una mejora sustancial con respecto a las soluciones previas que suponen que la deformación horizontal es nula.

En una primera aproximación, se asume comportamiento elástico para la columna y el suelo. La consolidación parte de la solución inicial elástica obtenida por Balaam y Booker (1981) para el caso de carga sin drenaje. Desde ahí, se consideran deformaciones plásticas en la columna, tanto para la situación no drenada como durante el proceso de consolidación hasta que se alcanza el estado final.

Como se verá más adelante, la supresión de la hipótesis 6 y la inclusión de las deformaciones plásticas de la columna motivan que la solución propuesta permita obtener valores más realistas del factor de concentración de tensiones y de los tiempos de consolidación. A continuación se resume el desarrollo de la solución.

3.3. DESARROLLO

3.3.1. Solución elástica

La Figura 3.4 muestra una rebanada horizontal de la “celda unidad”. La columna es un cilindro sólido vertical sometido a una presión vertical uniforme σ_{zc} y a una presión radial σ_{rc} en su pared exterior. El suelo es un cilindro con una cavidad central cilíndrica, sujeto a una presión vertical uniforme $\bar{\sigma}_{zs}$, a una presión radial $\sigma_{rs} (= \sigma_{rc})$ en su cavidad interior (contacto columna-suelo), y a una presión intersticial interna \bar{u} . Estas 5 presiones determinan las tensiones y deformaciones en cualquier punto del suelo y la columna.

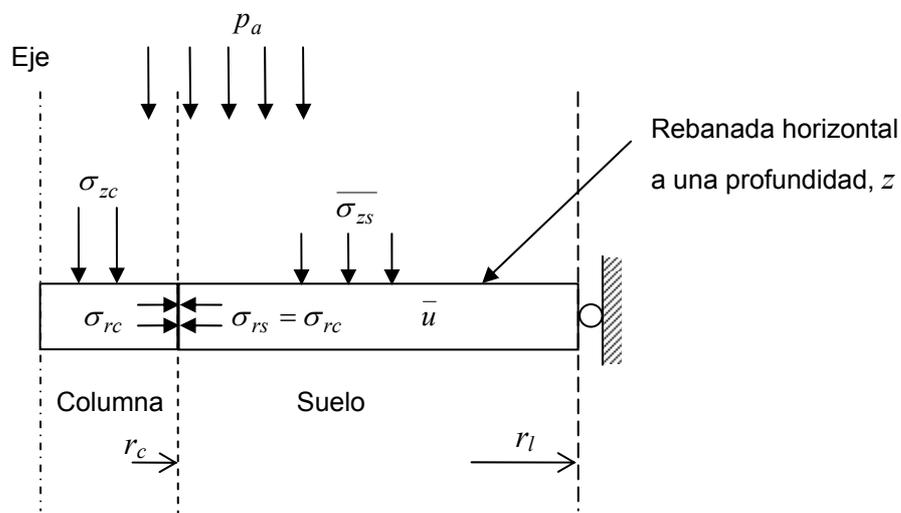


Figura 3.4. Condiciones de equilibrio y compatibilidad entre el suelo y la columna

En este caso se deben imponer las condiciones de equilibrio vertical (2.203) y radial, y la compatibilidad de deformaciones vertical y radial en el contacto entre la columna y el suelo. Estas cuatro ecuaciones permiten expresar cualquiera de las 4 presiones verticales u horizontales en función únicamente de la presión intersticial media \bar{u} y de la carga media aplicada p_a . Dado el carácter lineal del problema, todas las tensiones y deformaciones para cualquier radio pueden expresarse de la forma general:

$$(\sigma, \varepsilon) = \Phi^e \bar{u} + \Psi^e p_a \quad (3.20)$$

donde las funciones (Φ^e, Ψ^e) dependen de la coordenada radial, r , de las propiedades geométricas y de las características de los materiales (suelo y grava). El superíndice “e” indica que la solución es elástica. Únicamente la presión intersticial \bar{u} es función del tiempo.

La linealidad del problema permite definir un único grado de consolidación, válido para cualquier componente de la tensión o deformación:

$$U = \frac{(\sigma, \varepsilon) - (\sigma, \varepsilon)_u}{(\sigma, \varepsilon)_f - (\sigma, \varepsilon)_u} \quad (3.21)$$

En particular, para el exceso de presión intersticial, su valor final es cero, y la expresión del grado de consolidación es:

$$U = \frac{\bar{u} - u_u}{-u_u} = 1 - \frac{\bar{u}}{u_u} = 1 - \frac{\bar{u}}{\sigma_{oct,s,u}} \quad (3.22)$$

Las tensiones y deformaciones de este estado se obtienen generalizando el procedimiento seguido por Balaam y Booker (1981) para el caso de un exceso de presión intersticial, \bar{u} , como superposición de dos estados:

Estado A: una deformación de compresión uniforme, ε_{zA} , sin presiones intersticiales y con el suelo y la columna confinados horizontalmente. Ésta es también la solución empleada por Han y Ye (2001), y todas las deformaciones y tensiones pueden ser expresados en función de

ε_{zA} de una manera directa. Sin embargo, implica una discontinuidad de la tensión horizontal en el contacto columna-suelo:

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{rcA} = \lambda_c \varepsilon_{zA} \text{ en la columna} \\ \sigma_{rsA} = \lambda_s \varepsilon_{zA} \text{ en el suelo} \end{array} \right\} \sigma_{rcA} \neq \sigma_{rsA} \quad (3.23)$$

Estado B: diferentes presiones radiales efectivas (σ_{rcB} , σ'_{rsB}) aplicadas sobre la columna y el suelo en su contacto para compensar la discontinuidad de tensiones radiales existente en el estado A. El suelo y la columna están ahora confinados verticalmente, con deformación vertical nula (estado de deformación plana).

En el Estado B, la columna y el suelo son respectivamente un cilindro y un tubo de pared gruesa en deformación plana y en simetría axial. Ambos problemas tiene una solución analítica sencilla. Todas las tensiones y deformaciones se pueden expresar como funciones de las presiones radiales aplicadas (σ_{rcB} , σ'_{rsB}) y del exceso de presiones intersticiales \bar{u} en el suelo. Los desplazamientos radiales en el contacto, s_{rc} , son:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{s_{rc,c}}{r_c} = -\frac{1}{2(\lambda_c + G_c)} \sigma_{rcB} \text{ en la columna} \\ \frac{s_{rc,s}}{r_c} = -\frac{1-a_r}{2[G_s + a_r(\lambda_s + G_s)]} \sigma'_{rsB} \text{ en el suelo} \end{array} \right\} \quad (3.24)$$

Con ello, las condiciones de compatibilidad ($s_{rc,c} = s_{rc,s}$) y equilibrio ($\sigma_{rc} = \sigma'_{rs} + \bar{u}$) en el contacto de la columna y el suelo proporcionan:

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_c \varepsilon_{zA} + \sigma_{rcB} = \lambda_s \varepsilon_{zA} + \sigma'_{rsB} + \bar{u} \\ -\frac{1}{2(\lambda_c + G_c)} \sigma_{rcB} = \frac{1-a_r}{2[G_s + a_r(\lambda_s + G_s)]} \sigma'_{rsB} \end{array} \right\} \quad (3.25)$$

Estas dos ecuaciones pueden resolverse para ambas tensiones (σ_{rcB} , σ'_{rsB}), en función de ε_{zA} y \bar{u} . El último paso es expresar el equilibrio vertical entre la carga aplicada, p_a , y las tensiones verticales sobre la celda. Esto permite eliminar ε_{zA} y expresar todas las tensiones y deformaciones como funciones de p_a y \bar{u} .

La solución del estado A coincide con la recogida en la Tabla 2.4, mientras que la solución del estado B se muestra en la Tabla 3.6. La suma de ambas soluciones es el resultado final que aparece resumido en la Tabla 3.7. Las soluciones de Balaam y Booker (1981,1985) para los casos drenado y sin drenaje pueden obtenerse si se introduce como valor del exceso de presión intersticial \bar{u} cero o se hace igual a la tensión total octaédrica, respectivamente.

Tabla 3.6. Tensiones y deformaciones del Estado B

	Columna (c)	Suelo (s)
Deformación vertical, ε_z	0	0
Desplazamiento radial, s_r	$rF\left(\varepsilon_{zA} - \frac{\bar{u}}{\lambda_c - \lambda_s}\right)$	$\frac{Fa_r}{1-a_r} \frac{1-(r/r_i)^2}{(r/r_i)^2} r\left(\varepsilon_{zA} - \frac{\bar{u}}{\lambda_c - \lambda_s}\right)$
Tensión radial, σ_r'	$-2(\lambda_c + G_c)F\left(\varepsilon_{zA} - \frac{\bar{u}}{\lambda_c - \lambda_s}\right)$	$\frac{2Fa_r}{1-a_r}\left(\lambda_s + G_s + \frac{G_s}{(r/r_i)^2}\right)\left(\varepsilon_{zA} - \frac{\bar{u}}{\lambda_c - \lambda_s}\right)$
Tensión circunferencial, σ_θ'	$-2(\lambda_c + G_c)F\left(\varepsilon_{zA} - \frac{\bar{u}}{\lambda_c - \lambda_s}\right)$	$\frac{2Fa_r}{1-a_r}\left(\lambda_s + G_s - \frac{G_s}{(r/r_i)^2}\right)\left(\varepsilon_{zA} - \frac{\bar{u}}{\lambda_c - \lambda_s}\right)$
Tensión vertical, σ_z'	$-2\lambda_c F\left(\varepsilon_{zA} - \frac{\bar{u}}{\lambda_c - \lambda_s}\right)$	$\frac{2Fa_r}{1-a_r}\lambda_s\left(\varepsilon_{zA} - \frac{\bar{u}}{\lambda_c - \lambda_s}\right)$
Tensión octaédrica, σ_{oct}'	$-2F\left(\lambda_c + \frac{2}{3}G_c\right)\left(\varepsilon_{zA} - \frac{\bar{u}}{\lambda_c - \lambda_s}\right)$	$\frac{2Fa_r}{1-a_r}\left(\lambda_s + \frac{2}{3}G_s\right)\left(\varepsilon_{zA} - \frac{\bar{u}}{\lambda_c - \lambda_s}\right)$
Deformación volumétrica, ε_{vol}	$-2F\left(\varepsilon_{zA} - \frac{\bar{u}}{\lambda_c - \lambda_s}\right)$	$\frac{2Fa_r}{1-a_r}\left(\varepsilon_{zA} - \frac{\bar{u}}{\lambda_c - \lambda_s}\right)$

Tabla 3.7. Solución elástica general. Tensiones y deformaciones para cualquier carga p_a y exceso de presión intersticial \bar{u}

	Columna (c)	Suelo (s)
Deformación vertical, ε_z	$\frac{p_a - [1 + a_r(2F - 1)]\bar{u}}{(\lambda_c + 2G_c)a_r + (\lambda_s + 2G_s)(1 - a_r) - 2a_r(\lambda_c - \lambda_s)F}$	
Desplazamiento radial, s_r	$rF \left(\varepsilon_z - \frac{\bar{u}}{\lambda_c - \lambda_s} \right)$	$\frac{Fa_r}{1 - a_r} \frac{1 - (r/r_l)^2}{(r/r_l)^2} r \left(\varepsilon_z - \frac{\bar{u}}{\lambda_c - \lambda_s} \right)$
Tensión radial, σ_r'	$\lambda_c \varepsilon_z - 2(\lambda_c + G_c)F \left(\varepsilon_z - \frac{\bar{u}}{\lambda_c - \lambda_s} \right)$	$\lambda_s \varepsilon_z + \frac{2Fa_r}{1 - a_r} \left(\lambda_s + G_s + \frac{G_s}{(r/r_l)^2} \right) \left(\varepsilon_z - \frac{\bar{u}}{\lambda_c - \lambda_s} \right)$
Tensión circunferencial, σ_θ'	$\lambda_c \varepsilon_z - 2(\lambda_c + G_c)F \left(\varepsilon_z - \frac{\bar{u}}{\lambda_c - \lambda_s} \right)$	$\lambda_s \varepsilon_z + \frac{2Fa_r}{1 - a_r} \left(\lambda_s + G_s - \frac{G_s}{(r/r_l)^2} \right) \left(\varepsilon_z - \frac{\bar{u}}{\lambda_c - \lambda_s} \right)$
Tensión vertical, σ_z'	$(\lambda_c + 2G_c)\varepsilon_z - 2\lambda_c F \left(\varepsilon_z - \frac{\bar{u}}{\lambda_c - \lambda_s} \right)$	$(\lambda_s + 2G_s)\varepsilon_z + \frac{2Fa_r}{1 - a_r} \lambda_s \left(\varepsilon_z - \frac{\bar{u}}{\lambda_c - \lambda_s} \right)$
Tensión octaédrica, σ_{oct}'	$\left(\lambda_c + \frac{2}{3}G_c \right) (1 - 2F)\varepsilon_z - 2F \left(\lambda_c + \frac{2}{3}G_c \right) \frac{\bar{u}}{\lambda_c - \lambda_s}$	$\left(\lambda_s + \frac{2}{3}G_s \right) \left[\left(1 + \frac{2Fa_r}{1 - a_r} \right) \varepsilon_z - \frac{2Fa_r}{1 - a_r} \frac{\bar{u}}{\lambda_c - \lambda_s} \right]$
Deformación volumétrica, ε_v	$(1 - 2F)\varepsilon_z - 2F \frac{\bar{u}}{\lambda_c - \lambda_s}$	$\left(1 + \frac{2Fa_r}{1 - a_r} \right) \varepsilon_z - \frac{2Fa_r}{1 - a_r} \frac{\bar{u}}{\lambda_c - \lambda_s}$

donde:
$$F = \frac{(1 - a_r)(\lambda_c - \lambda_s)}{2[a_r(\lambda_s - \lambda_c + G_s - G_c) + \lambda_c + G_c + G_s]}$$

Para el caso particular de la deformación volumétrica del suelo, ésta es constante con el radio y viene dada por:

$$\varepsilon_{vol,s} = \Phi_{vs}^e \bar{u} + \Psi_{vs}^e p_a \quad (3.26)$$

y su derivada con respecto del tiempo:

$$\frac{\partial \varepsilon_{vol,s}}{\partial t} = \Phi_{vs}^e \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \quad (3.27)$$

Una sencilla expresión del coeficiente Φ_{vs}^e puede obtenerse si se particulariza la ec. (3.26) para las situaciones sin drenaje (u) y final (f):

$$\Phi_{vs}^e = \frac{\varepsilon_{vol,s,f} - \varepsilon_{vol,s,u}}{\bar{u}_f - \bar{u}_u} = \frac{1}{K_s} \frac{\overline{\sigma'_{oct,s,f}} - \overline{\sigma'_{oct,s,u}}}{\bar{u}_f - \bar{u}_u} \quad (3.28)$$

El valor final del exceso de presión intersticial es obviamente nulo ($\bar{u}_f = 0$), y para la situación sin drenaje, la deformación volumétrica es también nula ($\varepsilon_{vol,s,u} = 0$).

Por lo que la expresión se simplifica a:

$$\Phi_{vs}^e = -\frac{\varepsilon_{vol,s,f}}{\bar{u}_u} = -\frac{1}{K_s} \frac{\sigma'_{oct,s,f}}{\sigma_{oct,s,u}} \quad (3.29)$$

Sustituyendo (3.29) en (3.27):

$$\frac{\partial \varepsilon_{vol,s}}{\partial t} = -\frac{1}{K_s} \frac{\sigma'_{oct,s,f}}{\sigma_{oct,s,u}} \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \quad (3.30)$$

Comparando esta expresión con la ec. (3.13), la ecuación de la consolidación vuelve a tener la misma forma que en el caso básico pero con un nuevo coeficiente de consolidación modificado:

$$c_{vr}^{zre} = c_{vr} \frac{K_s}{E_{ms}} \frac{\sigma_{oct,s,u}}{\sigma'_{oct,s,f}} = c_{vr} \frac{1 + \nu_s}{3(1 - \nu_s)} \frac{\sigma_{oct,s,u}}{\sigma'_{oct,s,f}} \quad (3.31)$$

donde el superíndice “zre” se refiere a la influencia de la deformación elástica tanto vertical como radial de la columna. El valor de c_{vr}^{zre} puede obtenerse a partir de la ec. (3.31) una vez que las tensiones y deformaciones son conocidas para la situación inicial

y final. Para ello, se puede emplear la solución obtenida por Balaam y Booker (1981, 1985) que es consistente con todas las hipótesis realizadas en el desarrollo de esta solución. El resultado final es:

$$c_{vr}^{zre} = c_{vr} \cdot \frac{[a_r(\lambda_c + 2G_c) + (1 - a_r)(\lambda_s + 2G_s)] [H - (\lambda_c - \lambda_s)] - (1 - a_r)(\lambda_c - \lambda_s)^2}{(\lambda_s + 2G_s)[H - (1 - 3a_r)(G_c - G_s)]} \quad (3.32)$$

$$\text{con: } H = G_s - G_c + (\lambda_c + G_c + G_s) \frac{1}{a_r}$$

El cociente (c_{vr}^{zre}/c_{vr}) depende únicamente del coeficiente de Poisson del suelo y la columna (ν_s, ν_c) , de la relación de módulos (E_c/E_s) y del área de sustitución (a_r) . Con c_{vr}^{zre} , la ecuación general de la consolidación puede ser integrada por cualquiera de los métodos usuales, y su resultado es la variación del exceso de presión intersticial medio \bar{u} con el tiempo. Con este valor, la ec. (3.22) define el grado de consolidación, U . La ec. (3.21) se puede emplear para interpolar el valor de cualquier componente de tensión o deformación para un estado entre el no drenado y el final.

3.3.2. Deformación plástica de la columna

Las deformaciones plásticas en la columna pueden ser adecuadamente modelizadas empleando el criterio de plastificación de Mohr-Coulomb y una ley de flujo no asociada para las deformaciones plásticas, con un ángulo de dilatancia constante $(\psi_c \neq \phi_c)$:

$$\frac{\sigma_{rc}}{\sigma_{zc}} = \frac{1 - \sin \phi_c}{1 + \sin \phi_c} = k_{ac} \quad (3.33)$$

$$-\frac{\varepsilon_{zc}^p}{2\varepsilon_{rc}^p} = \frac{1 - \sin \psi_c}{1 + \sin \psi_c} = k_{\psi c} \quad (3.34)$$

En el desarrollo que se va a realizar, los incrementos de deformación elástica en la columna durante la deformación plástica son despreciados. Por tanto, la componente plástica, cuando exista, es igual a la deformación total, y el superíndice p puede ser eliminado.

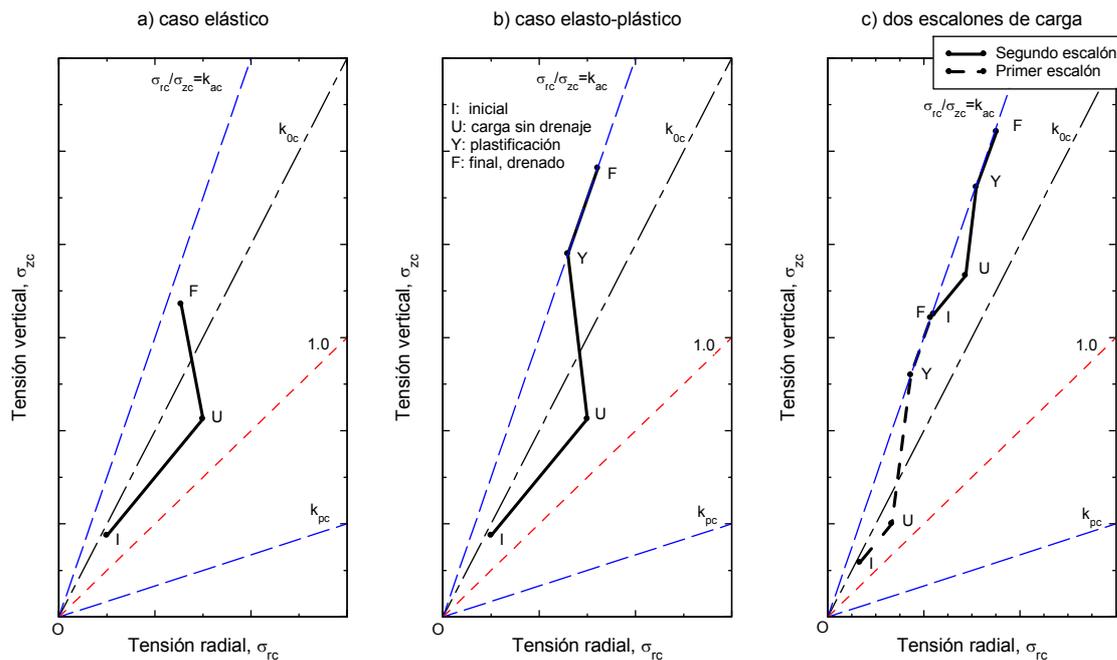


Figura 3.5. Trayectoria de tensiones de la columna en condiciones habituales: a) caso elástico, b) caso elasto-plástico y c) dos escalones de carga

En el análisis elástico presentado en el apartado anterior, el problema era formulado en incrementos de tensiones producidos por la carga aplicada, los cuales en la “celda unidad” estudiada (Figura 3.1) eran constantes con la profundidad, por lo que el proceso de consolidación radial era el mismo para cualquier profundidad y la ordenada z podía ser ignorada en el desarrollo de la solución. En un análisis elasto-plástico, la tensión efectiva que se considera al imponer la condición de plastificación debe incluir también las tensiones existentes antes de aplicar la carga. Como las tensiones pueden variar en general con la profundidad, el análisis de este problema debe depender de la profundidad, z . Al ser un análisis elasto-plástico, el estado final depende de la trayectoria de tensiones seguida, y por lo tanto, el análisis debe realizarse a lo largo del tiempo, teniendo en cuenta el desarrollo de las tensiones y deformaciones para cada profundidad a lo largo del proceso de consolidación.

La Figura 3.5 muestra las trayectorias de tensiones seguidas por la columna en unos ejes $(\sigma_{rc}, \sigma_{zc})$ para un caso típico. Si se desprecian los efectos de la instalación de la columna, las tensiones iniciales (punto I) son:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{zs,i} &= \gamma'_s z \\
 \sigma_{zc,i} &= \gamma'_c z \\
 \sigma'_{rs,i} &= \sigma_{rc,i} = k_{0s} \sigma'_{zs,i} \\
 u_i &= 0
 \end{aligned} \tag{3.35}$$

Toda la columna se encuentra en estado elástico, ya que siempre se cumple que $k_{0s} > k_{ac}$, y en la mayoría de los casos $k_{0s} > k_{0c}$. Inmediatamente después de la aplicación de la carga, el suelo se comporta como no drenado con una rigidez mayor que la rigidez drenada de la columna, y por ello soporta una carga vertical mayor que la columna. De esta forma, la columna se encuentra bien confinada lateralmente por el suelo circundante, con una tensión vertical incluso inferior a la horizontal (punto U).

Cuando el suelo comienza a consolidar, parte de la carga vertical se va transfiriendo progresivamente del suelo a la columna, y al mismo tiempo la tensión lateral en el contacto columna-suelo disminuye. La columna puede permanecer en estado elástico hasta el final de la consolidación (caso a) punto F), o alcanzar el estado plástico en un determinado instante (caso b) punto Y).

Como las tensiones iniciales (punto I) facilitan el confinamiento de la columna y aumentan con z , y los incrementos de tensiones que provocan la plastificación (trayectoria IUF) son independientes de la profundidad, la situación más desfavorable ocurre en superficie. La plastificación comienza en la superficie y progresa en profundidad con el tiempo. Una vez plastificada, la rigidez vertical de la columna disminuye y su deformabilidad radial aumenta debido a la dilatación. Esto afecta a la transferencia de carga vertical del suelo a la columna. Como conclusión, la carga vertical en la columna varía con la profundidad. No obstante, por debajo de la zona plástica, es constante, y la solución elástica descrita en el apartado anterior sigue siendo válida.

Para cualquier profundidad, z , el tiempo de plastificación puede ser obtenido de la condición de plastificación (3.33) aplicada a la solución elástica en la frontera elasto-plástica:

$$\frac{\sigma'_{rc,y}}{\sigma'_{zc,y}} = \frac{k_0 \gamma'_s z + \Delta \sigma_{rc,y}}{\gamma'_c z + \Delta \sigma_{zc,y}} = \frac{1 - \sin \phi_c}{1 + \sin \phi_c} = k_{ac} \tag{3.36}$$

donde los incrementos de tensión (designados como $\Delta\sigma$) son debidos a la aplicación de la carga, y el sufijo “y” se refiere al momento de plastificación.

Cada incremento de tensión puede ser expresado de acuerdo con la ec. (3.21):

$$\Delta\sigma_y = \Delta\sigma_u + U_y^e(\Delta\sigma_f^e - \Delta\sigma_u) \quad (3.37)$$

donde U_y^e es el grado de consolidación elástico en el momento en el que la columna plastifica para la profundidad considerada. Y se define como un factor de interpolación entre los estados inicial y final, si la columna se comportase elásticamente hasta el final de la consolidación, $\Delta\sigma_f^e$. Debido a las deformaciones plásticas, las tensiones finales van a diferir de $\Delta\sigma_f^e$, y el factor de interpolación será por tanto diferente de U_y^e . De hecho, no será el mismo para todas las componentes. Únicamente para la presión intersticial el valor final permanece invariable y, por tanto, no varía con respecto al caso elástico ($u_f = 0$), así:

$$\bar{u}_y = (1 - U_y^e)u_u \quad (3.38)$$

Por tanto, U_y^e es el verdadero grado de consolidación en términos del exceso de presión intersticial medio en el momento de la plastificación. De las ecs. (3.36) y (3.37):

$$U_y^e = \frac{(k_0\gamma'_s - k_{ac}\gamma'_c)z + \Delta\sigma_{rc,u} - k_{ac}\Delta\sigma_{zc,u}}{k_{ac}\Delta\sigma_{zc,f}^e - \Delta\sigma_{rc,f}^e + \Delta\sigma_{rc,u} - k_{ac}\Delta\sigma_{zc,u}} \quad (3.39)$$

En la ec. (3.39), sólo el primer término del numerador depende de la profundidad, z . El resto de los términos son incrementos de tensiones elásticas iniciales y finales, todas ellas proporcionales a la carga aplicada p_a . Por consiguiente, el grado de consolidación elástico en el momento de la plastificación, U_y^e , depende de la profundidad z y de la carga aplicada p_a únicamente a través del factor $(k_0\gamma'_s - k_{ac}\gamma'_c)z/p_a$. Obviamente, su valor en la superficie ($z=0$) es independiente de la magnitud de la carga aplicada.

La ec. (3.39) define el tiempo para el que la columna plastifica a una profundidad dada z . Alternativamente, esta expresión sirve para obtener una

profundidad crítica, z_c , hasta donde llega la zona plástica para un tiempo o un grado de consolidación elástico dado U^e .

La obtención de las tensiones y deformaciones durante la fase plástica es similar al caso elástico. La única diferencia de este caso con respecto al caso elástico radica en el comportamiento de la columna porque el comportamiento del suelo es siempre elástico. Sólo la columna se deforma plásticamente. Si las deformaciones elásticas son despreciadas en la zona plástica, la solución es incluso más sencilla, ya que las tensiones (radial y vertical) en la columna se relacionan mediante el criterio de Mohr-Coulomb (3.33), independientemente de las deformaciones. En la fase plástica, la condición de fallo puede establecerse en función de incrementos de tensiones. Por otra parte, las deformaciones verticales y radiales están relacionadas mediante la ley de flujo (3.34), sin influencia alguna de las tensiones. Como resultado, la fase plástica puede ser formulada en función de tensiones y deformaciones desde el momento de la plastificación, independientemente de sus valores en la fase elástica.

La solución del problema es como sigue:

1. Para un valor cualquiera del incremento de presión intersticial, $\overline{\Delta u} = \overline{u} - \overline{u}_y$, si el incremento de deformación vertical es $\Delta \varepsilon_z$ (elástico para el suelo, plástico para la columna), el incremento de deformación radial en la columna, $\Delta \varepsilon_{rc}$, está dado por la ley de flujo (3.34).
2. Estas deformaciones dan lugar a unos desplazamientos radiales y verticales que son entonces impuestos al suelo (esto significa que la condición de compatibilidad en el contacto columna-suelo se satisface automáticamente), y todas las tensiones y deformaciones en el suelo se calculan en función de $s_z = \Delta \varepsilon_z H$ y $s_{rc} = \Delta \varepsilon_{rc} r_c$ como un tubo elástico de pared gruesa donde los desplazamientos horizontales y verticales se conocen. Concretamente, se obtienen los incrementos de tensiones efectivas radial y vertical $(\Delta \sigma'_{zs}, \Delta \sigma'_{rs})$.
3. De la condición de equilibrio radial en la pared de la columna, se obtiene el incremento de tensión radial $\Delta \sigma_{rc}$ en la columna.
4. El incremento de tensión vertical $\Delta \sigma_{zc}$ se obtiene mediante la condición de plastificación (3.33).
5. Finalmente, la condición de equilibrio en superficie implica que:

$$\Delta p_a = a_r \Delta \sigma_{zc} + (1 - a_r) \Delta \sigma'_{zs} + (1 - a_r) \overline{\Delta u} = 0 \quad (3.40)$$

6. La ecuación (3.40) puede resolverse para un incremento de deformación vertical $\Delta \varepsilon_z$, el cual puede ser ahora introducido en el paso 1, para obtener todas las variables en función de $\overline{\Delta u}$.

Los incrementos de tensiones, deformaciones y desplazamientos desde el instante en el que se produce la plastificación se muestran en la Tabla 3.8. Las deformaciones elásticas en la fase plástica han sido despreciadas.

Una vez que la situación inicial y final han sido también definidas para la fase plástica, el proceso de consolidación para el incremento plástico puede ser estudiado empleando una de las soluciones disponibles para resolver la ecuación de la consolidación radial de la misma forma que se ha hecho cuando la columna era elástica. El coeficiente de consolidación modificado es ahora:

$$c_{vr}^{zrp} = c_{vr} \frac{1 + \nu_s}{3(1 - \nu_s)} \frac{\overline{u}_y}{\Delta \sigma'_{oct,s,f} - \Delta \sigma'_{oct,s,y}} \quad (3.41)$$

donde \overline{u}_y está definido por las ecs. (3.38) y (3.39), y los incrementos de tensiones octaédricas para el estado final y de plastificación pueden obtenerse de la Tabla 3.8 particularizada para $\overline{u} = 0$ y $\overline{u} = \overline{u}_y$, respectivamente. El resultado final es:

$$c_{vr}^{zrp} = c_{vr} \cdot \frac{(1 - a_r) + \frac{a_r}{(\lambda_s + 2G_s)} \left(\frac{\lambda_s}{k_{\psi c}} + \frac{J}{k_{ac}} \right)}{\left[1 + \frac{a_r}{(1 - a_r)k_{\psi c}} \right] \left(1 - a_r + \frac{a_r}{k_{ac}} \right)} \quad (3.42)$$

$$\text{con: } J = \lambda_s + \frac{G_s + a_r(\lambda_s + G_s)}{(1 - a_r)k_{\psi c}}$$

El cociente (c_{vr}^{zrp} / c_{vr}) depende únicamente del coeficiente de Poisson del suelo (ν_s), de los parámetros plásticos de la columna (ϕ_c, ψ_c), y del área de sustitución (a_r).

Una vez obtenido el valor de c_{vr}^{zrp} , la solución sigue el mismo procedimiento que en el caso elástico.

Tabla 3.8. Incrementos de tensiones y deformaciones plásticas a partir del momento de plastificación para una carga constante p_a , y para un incremento de presiones intersticiales $\overline{\Delta u} = \overline{u} - \overline{u}_y$

	Columna (c)	Suelo (s)
Deformación vertical, $\Delta \varepsilon_z^p$		$-\frac{\left(1 - a_r + \frac{a_r}{k_{ac}}\right) \overline{\Delta u}}{(\lambda_s + 2G_s)(1 - a_r) + \frac{a_r \lambda_s}{k_{\psi c}} + \frac{a_r J}{k_{ac}}}$
Desplazamiento radial, Δr	$r \frac{\Delta \varepsilon_z^p}{2k_{\psi c}}$	$r \frac{a_r}{1 - a_r} \frac{1 - (r/r_l)^2}{(r/r_l)^2} \frac{\Delta \varepsilon_z^p}{2k_{\psi c}}$
Tensión radial, $\Delta \sigma'_r$	$J \Delta \varepsilon_z^p + \overline{\Delta u}$	$\left[\lambda_s + \frac{G_s (r_c/r)^2 + a_r (G_s + \lambda_s)}{(1 - a_r) k_{\psi c}} \right] \Delta \varepsilon_z^p$
Tensión circunferencial, $\Delta \sigma'_\theta$	$J \Delta \varepsilon_z^p + \overline{\Delta u}$	$\left[\lambda_s - \frac{G_s (r_c/r)^2 - a_r (G_s + \lambda_s)}{(1 - a_r) k_{\psi c}} \right] \Delta \varepsilon_z^p$
Tensión vertical, $\Delta \sigma'_z$	$\frac{1}{k_{ac}} (J \Delta \varepsilon_z^p + \overline{\Delta u})$	$\left[\lambda_s + 2G_s + \frac{a_r \lambda_s}{(1 - a_r) k_{\psi c}} \right] \Delta \varepsilon_z^p$
Tensión octaédrica, $\Delta \sigma'_{oct}$	$\frac{(2 + 1/k_{ac})}{3} (J \Delta \varepsilon_z^p + \overline{\Delta u})$	$\left(\lambda_s + \frac{2}{3} G_s \right) \left[1 + \frac{a_r}{(1 - a_r) k_{\psi c}} \right] \Delta \varepsilon_z^p$
Deformación volumétrica, $\Delta \varepsilon_{vol}$	$\left(1 - \frac{1}{k_{\psi c}} \right) \Delta \varepsilon_z^p$	$\left[1 + \frac{a_r}{(1 - a_r) k_{\psi c}} \right] \Delta \varepsilon_z^p$

donde: $J = \lambda_s + \frac{G_s + a_r (G_s + \lambda_s)}{(1 - a_r) k_{\psi c}}$

Contrariamente al caso elástico, el estado final alcanzado después de la consolidación no coincide con el análisis elasto-plástico para el caso de carga drenada (suelo infinitamente permeable) (Pulko y Majes, 2005), ya que la trayectoria de tensiones seguida es muy diferente. Como se ha mostrado en la Figura 3.5, toda la carga sin drenaje ocurre en el rango elástico, y esto afecta a la magnitud del desplazamiento radial de la columna, que gobierna la transferencia de tensiones entre el suelo y la columna.

3.3.3. Integración para toda la columna

Debido a que el momento de plastificación U_y^e es diferente para cada profundidad, el asiento para un tiempo cualquiera debe ser obtenido mediante integración de las deformaciones verticales a lo largo de toda la longitud de la columna, L .

Existen diferentes opciones: (i) integración analítica; (ii) integración numérica; (iii) empleo de un punto representativo de la columna (como se verá más adelante, el punto medio $z=L/2$ da el mejor ajuste a la solución analítica).

La ley asiento-tiempo es esencialmente la más importante del análisis porque el asiento en superficie es la variable que en la mayor parte de los casos reales se monitoriza. Por este motivo, el resultado de la integración analítica de esta variable se muestra aquí. La integración se ha realizado empleando la solución analítica de Barron-Hansbo para la consolidación a una profundidad, z . Integrando el grado de consolidación para toda la columna, se obtienen las siguientes expresiones para el asiento en la superficie, s_z , para 3 fases diferentes:

- Fase A ($z_c \leq 0$), toda la columna se comporta elásticamente:

$$s_z = L \left[\varepsilon_{z,u}^e + \left(\varepsilon_{z,f}^e - \varepsilon_{z,u}^e \right) \left(1 - e^{-\frac{8T_r}{f(a_r)} \frac{c_{vr}^e}{c_{vr}}} \right) \right] \quad (3.43)$$

- Fase B ($0 < z_c < L$), la parte superior de la columna se encuentra plastificada ($z \leq z_c$) y el resto permanece elástico ($z \geq z_c$):

$$\begin{aligned}
 s_z = (L - z_c) & \left[\varepsilon_{z,u}^e + (\varepsilon_{z,f}^e - \varepsilon_{z,u}^e) \left(1 - e^{-\frac{8T_r}{f(a_r)} \frac{c_{vr}^{zpe}}{c_{vr}}} \right) \right] + z_c \left[\varepsilon_{z,u}^e + (\varepsilon_{z,f}^e - \varepsilon_{z,u}^e) P(z_c) \right] + \\
 & + \frac{\Delta \varepsilon_z^p}{\bar{u}^y} u_u \left\{ z_c [1 - P(z_c)] + Q(z_c) e^{-\frac{8T_r}{f(a_r)} \frac{c_{vr}^{zrp}}{c_{vr}}} \right\}
 \end{aligned} \quad (3.44)$$

- Fase C ($L \leq z_c$), toda la columna está plastificada:

$$s_z = L \left[\varepsilon_{z,u}^e + (\varepsilon_{z,f}^e - \varepsilon_{z,u}^e) P(L) \right] + \frac{\Delta \varepsilon_z^p}{\bar{u}^y} u_u \left\{ L [1 - P(L)] + Q(L) e^{-\frac{8T_r}{f(a_r)} \frac{c_{vr}^{zrp}}{c_{vr}}} \right\} \quad (3.45)$$

donde

$$P(z) = \frac{\eta \frac{z}{2} - \kappa_u}{\kappa_f^e - \kappa_u}; \quad Q(z) = \frac{\kappa_f^e - \kappa_u}{(2 - \lambda_{ep}) \eta} \left[\left(\frac{\kappa_f^e - \eta z}{\kappa_f^e - \kappa_u} \right)^{2 - \lambda_{ep}} - \left(\frac{\kappa_f^e}{\kappa_f^e - \kappa_u} \right)^{2 - \lambda_{ep}} \right]$$

$$\kappa = \frac{k_{ac} \Delta \sigma_{zc} - \Delta \sigma_{rc}}{k_{ac}}; \quad \eta = \frac{k_0 \gamma_s' - k_{ac} \gamma_c'}{k_{ac}}; \quad \lambda_{ep} = \frac{c_{vr}^{zrp}}{c_{vr}^{zre}}$$

y donde a su vez $(\kappa_u, \varepsilon_{z,u}^e)$ y $(\kappa_f^e, \varepsilon_{z,f}^e)$ se refieren respectivamente a las tensiones sin drenaje y finales con la hipótesis de comportamiento elástico como se definió en la ec. (3.37). El término $\Delta \varepsilon_z^p / \bar{u}^y$ puede obtenerse de la primera fila de la Tabla 3.8 particularizada para $\bar{u} = 0$.

3.3.4. Varios escalones de carga

Todo lo visto hasta aquí responde al caso de una carga, p_a , aplicada instantáneamente a la celda unidad que se encuentra inicialmente sometida al peso propio. Para el caso más general de una carga en escalones, el procedimiento puede ser fácilmente aplicado a cada escalón de carga, considerando las tensiones iniciales como las finales del escalón anterior. Incluso si la columna está en estado plástico, la carga no drenada vuelve a llevar la trayectoria de tensiones al rango elástico, debido al incremento de tensiones radial (ver Figura 3.5–c).

En este escalón genérico, las tensiones iniciales (punto I) ya no son las geostáticas (3.35). Las tensiones iniciales (punto I) son: $\sigma_{zs,i}$, $\sigma_{zc,i}$, $\sigma'_{rs,i} = \sigma_{rc,i}$ y $u_i = 0$. La expresión del grado de consolidación elástico en el momento en el que la columna plastifica, U_y^e , para la profundidad considerada (3.39) es ahora:

$$U_y^e = \frac{\sigma_{rc,i} - k_{ac}\sigma_{zc,i} + \Delta\sigma_{rc,u} - k_{ac}\Delta\sigma_{zc,u}}{k_{ac}\Delta\sigma_{zc,f}^e - \Delta\sigma_{rc,f}^e + \Delta\sigma_{rc,u} - k_{ac}\Delta\sigma_{zc,u}} \quad (3.46)$$

La resolución del problema es similar al caso anterior pero empleando la ec. (3.46) para obtener el momento de plastificación. La integración del asiento se puede realizar mediante cualquiera de los métodos descritos. Dependiendo de la distribución inicial de tensiones, la integración analítica puede complicarse.

Siendo riguroso, esta aplicación de la carga en escalones está condicionada a que la consolidación del escalón anterior haya finalizado ($u_i = 0$).

3.4. ESTUDIO PARAMÉTRICO Y COMPARACIÓN CON OTRAS SOLUCIONES PREVIAS

3.4.1. Consolidación

Como se ha visto, el proceso de consolidación entorno a una columna de grava deformable está gobernado por la misma ecuación diferencial que para un dren prefabricado (rigidez despreciable), pero usando unos coeficientes de consolidación equivalentes para poder contemplar las diferentes hipótesis de deformación de la columna.

La Figura 3.6 muestra los diferentes valores equivalentes de c_{vr} para una columna en estado elástico (ec. 3.32). El valor equivalente del coeficiente de consolidación es siempre mayor que el básico, indicando una consolidación más rápida en cualquier caso. En la figura se compara la solución propuesta con la solución obtenida suponiendo la deformación horizontal nula (Han y Ye, 2001). La hipótesis de confinamiento lateral conlleva valores mucho mayores de c_{vr} . Este efecto es también observado para el análisis de la transferencia de tensiones en el estado final (ec. 2.205),

donde se obtenían valores anormalmente altos del factor de concentración de tensiones. La introducción de la deformación radial de la columna reduce drásticamente este efecto. En un caso típico, con $a_r=0.20$ y $E_c/E_s=20$, el factor de corrección para c_{vr} con confinamiento lateral (ec. 2.199) es 6.0, mientras que con la solución propuesta, incorporando la deformación radial, se reduce a 3.55.

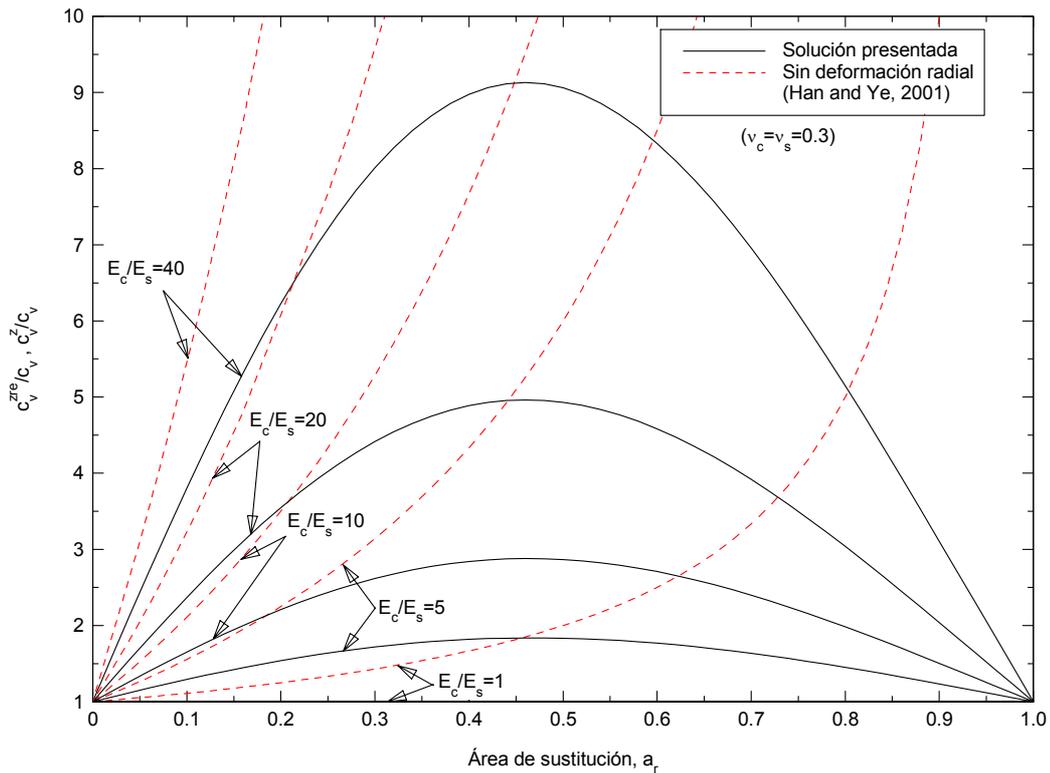


Figura 3.6. Coeficiente de consolidación equivalente. Columna elástica. Influencia de la relación de módulos

Los coeficientes de consolidación equivalentes también se han comparado con resultados de ensayos de laboratorio (Cimentada, 2008). En la Figura 3.7, se comparan los valores obtenidos con las soluciones teóricas y los obtenidos en ensayos de laboratorio, para áreas de sustitución usuales. Se representa el valor medio y el rango de variación de los ensayos. Teniendo en cuenta que el valor medio de la relación de módulos es $E_c/E_s = 8.8$, la relación obtenida en los ensayos es ligeramente superior a los valores arrojados por las distintas soluciones teóricas. Una de las causas puede ser el empleo como coeficiente de consolidación del suelo sin mejorar (c_v) el resultante de un ensayo edométrico, en el cual el flujo es vertical en lugar de radial. A pesar de que el

suelo ensayado en el laboratorio es amasado, la aplicación de cargas verticales provoca una estratificación. Ésta puede provocar que el coeficiente de consolidación para flujo vertical sea inferior al obtenido para flujo radial. La diferencia entre los dos coeficientes será pequeña, pero puede ser suficiente para explicar esa discrepancia en los resultados. Como comprobación adicional y para eliminar la influencia del coeficiente de consolidación obtenido en el edómetro, se compara la relación de coeficientes de consolidación obtenidos para una relación de radios de 3 y 4. Este cociente es 1.14 para los ensayos de laboratorio y 1.19 con la solución analítica desarrollada.

Si la relación de sustitución aumentase hasta valores cercanos a 1 (es decir, sustituir prácticamente todo el suelo por grava), el valor equivalente de c_{vr} tiende al infinito para la hipótesis de confinamiento lateral, pero cuando se considera la deformación radial, éste disminuye y tiende a valores cercanos a 1 (valor básico). Esta consolidación tan rápida si se asume confinamiento lateral se debe a la imposibilidad de tener en cuenta el elevado asiento inicial que tiene lugar (Figura 3.8).

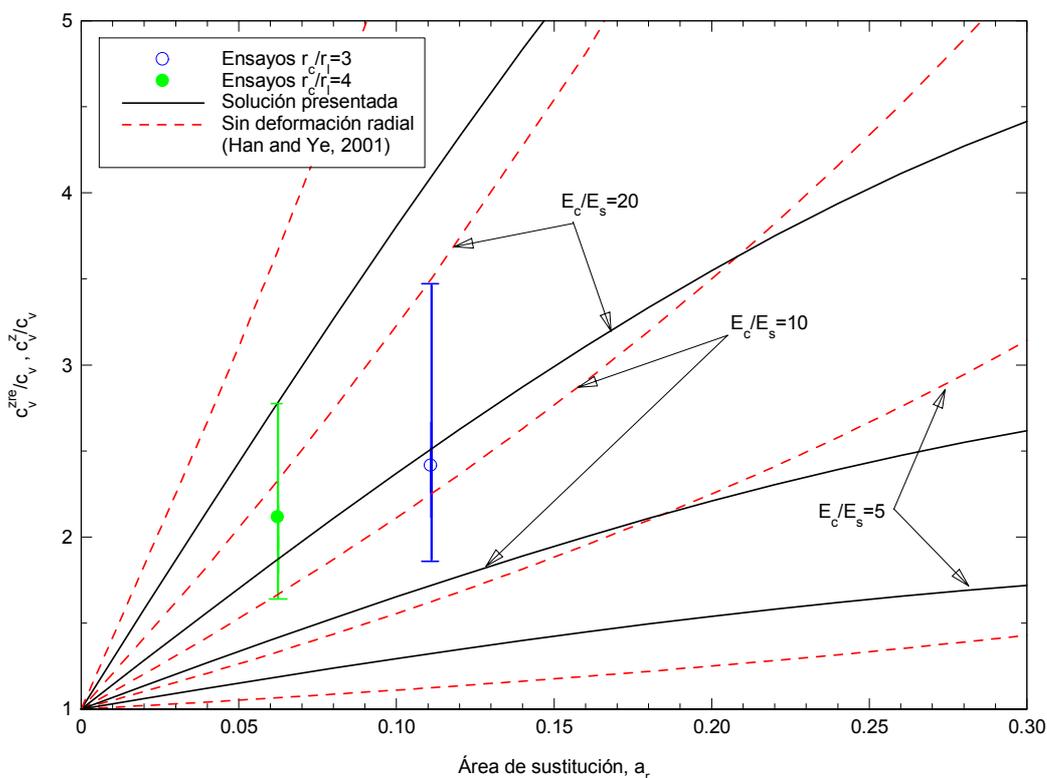


Figura 3.7. Coeficiente de consolidación equivalente. Columna elástica. Comparación con ensayos de laboratorio (Cimentada, 2008)

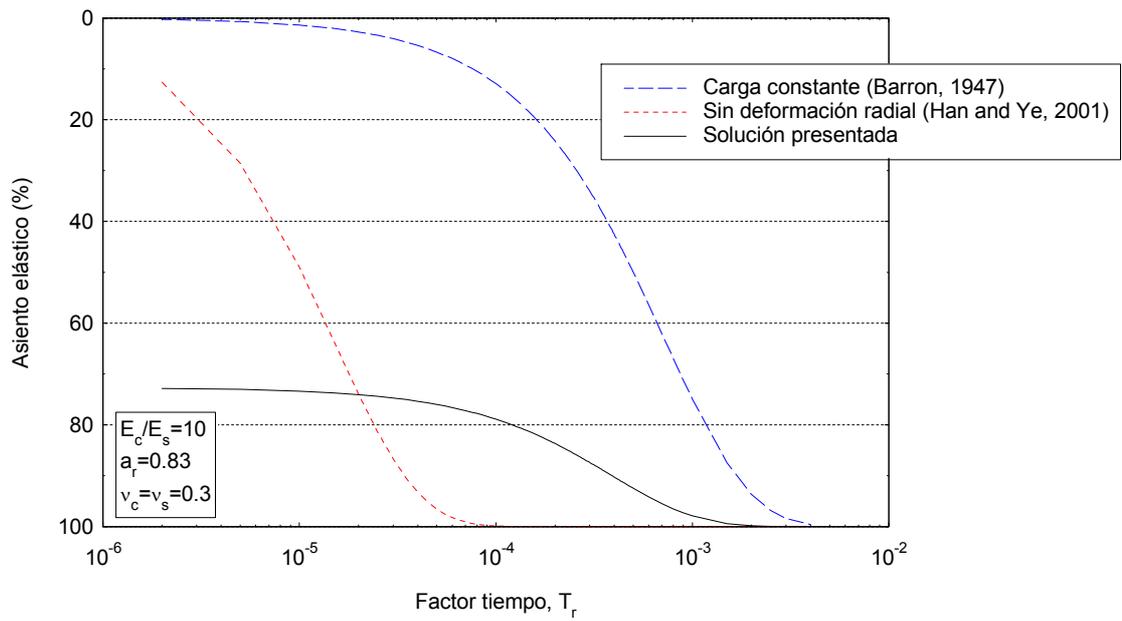


Figura 3.8. Asiento elástico en el tiempo para un área de sustitución elevada

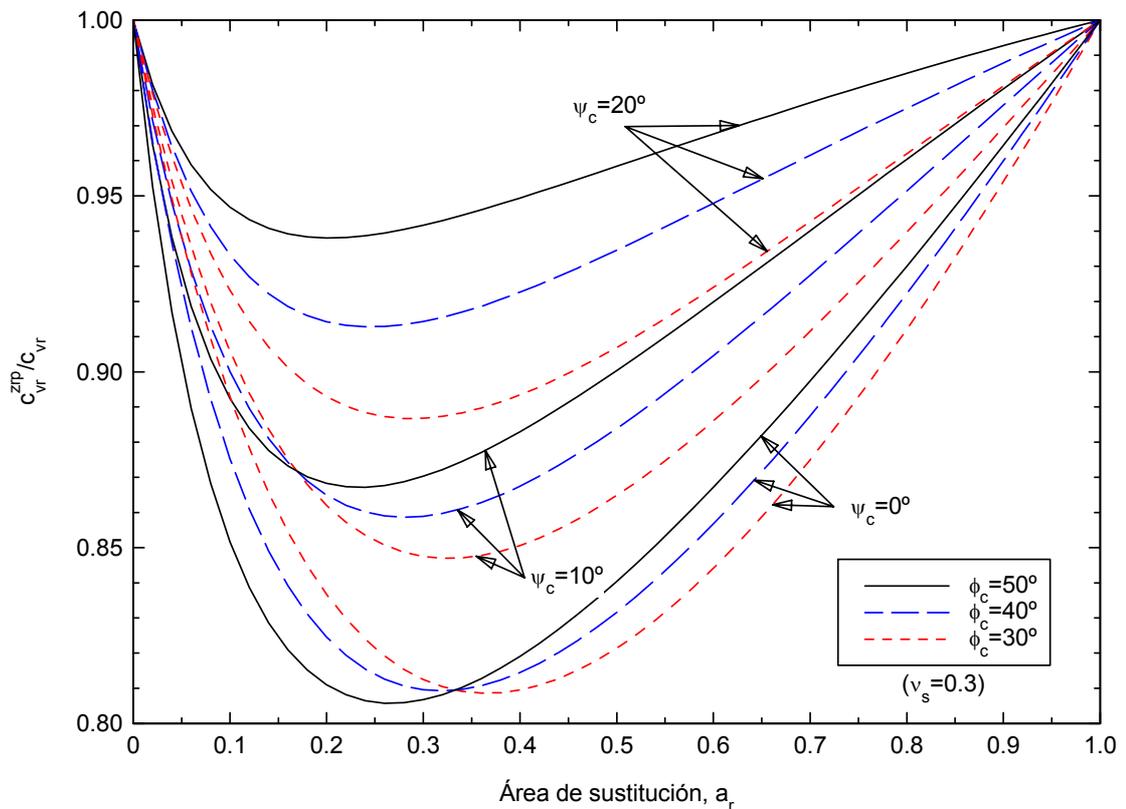


Figura 3.9. Coeficiente de consolidación equivalente. Columna plástica. Influencia de los ángulos de rozamiento y dilatancia

La influencia del comportamiento plástico de la columna (ec. 3.42) se muestra en la Figura 3.9. La deformación plástica hace la columna más endeble, reduciendo por ello su capacidad para soportar carga, lo que implica valores equivalentes de c_{vr} incluso menores que el básico. Sin embargo, el efecto de las deformaciones plásticas es pequeño, reduciendo el coeficiente de consolidación sólo un 10-15% con respecto al básico para casos normales.

La Figura 3.10 muestra un caso de columna elástica analizado por Balaam y Booker (1981) empleando un modelo numérico para estudiar la consolidación radial acoplada. Ésta se compara con la presente solución, con la solución para confinamiento lateral (Han y Ye, 2001), y también con la solución básica para carga vertical constante (Barron). En el artículo original, los resultados son dados en forma de coeficiente de consolidación función de los asientos, eliminando el asiento instantáneo para poder comparar con la solución de Barron. Desgraciadamente, la componente de asiento inmediato eliminada no era dada en el artículo, por lo que el resultado numérico mostrado en la Figura 3.10 ha sido obtenido añadiendo el asiento inmediato obtenido de la solución analítica. Como se puede ver, la consolidación bajo carga constante (solución de Barron) es mucho más lenta que la obtenida del análisis numérico. Por el contrario, la hipótesis de carga variable con confinamiento lateral (Han y Ye, 2001) resulta en un proceso muy rápido, particularmente para grados de consolidación superiores al 50% (los asientos inmediatos no son considerados en esta solución).

La presente solución muestra un mayor parecido con los resultados numéricos. Las diferencias son mayores para grados de consolidación inferiores al 30%. Sin embargo, esto ocurre también para otros métodos. Balaam y Booker (1981) señalan que es evidente que existe una anomalía y que la solución de Barron para la hipótesis de carga flexible se ajusta mejor a la solución obtenida mediante elementos finitos para la hipótesis de carga rígida y relación de módulos, $E_c / E_s = 1$, que la solución de Barron para la hipótesis de carga rígida. Atribuyen este hecho a hipótesis inherentes a la solución de Barron, que desprecia los desplazamientos radiales. Esto provoca que la distribución inicial de presiones intersticiales no sea constante con el radio y la solución no de un buen ajuste para valores pequeños del grado de consolidación. En la solución de Barron para carga flexible, la distribución inicial de presiones intersticiales es

constante, lo que explicaría un mejor ajuste con este tipo de solución, a pesar de que la hipótesis realizada en el cálculo numérico ha sido de carga rígida.

A modo de ejemplo, y sin que sea riguroso desde un punto de vista teórico, en la Figura 3.11 se muestra el mismo caso que en la Figura 3.10 pero empleando como solución de referencia la solución de Barron para carga flexible. Se pretende mostrar que las diferencias entre el ajuste de los resultados del modelo y el análisis numérico se deben a la solución que se emplea para resolver la ecuación diferencial (Barron/Hansbo), pero que la aceleración provocada por la rigidez de las columnas y el asiento inicial son bien reproducidos por el modelo. El ajuste con el modelo presentado para una relación de rigideces cualquiera, será en general similar al alcanzado para el caso de $E_c / E_s = 1$.

En cualquier caso, incluso para la solución de Barron para carga rígida que es la que normalmente se utiliza y la región correspondiente a grados de consolidación pequeños, los resultados del presente método suponen una sustancial mejora con respecto a los métodos previos, ya que tiene en cuenta el asiento inicial.

Un ejemplo tipo, que incluye deformaciones plásticas en toda la columna, se presenta en la Figura 3.12. El grado de consolidación en función de las presiones intersticiales para diferentes profundidades se muestra en la Figura 3.12.a). Existe una única curva elástica, válida para todas las profundidades. El grado de consolidación en el momento de la plastificación es de 38% en superficie, 55% a la profundidad media ($z=5$ m), y 72% en la base ($z=10$ m). Las deformaciones se muestran en la Figura 3.12.b). Las diferencias en el momento de plastificación son las que provocan diferencias en las deformaciones finales, que son mayores en la parte superior de la columna. Debido a la linealidad con z de la ec. (3.39), la deformación vertical en cualquier instante varía linealmente con z , de esta forma el asiento de la parte plástica de la columna está definido por la deformación en su punto medio.

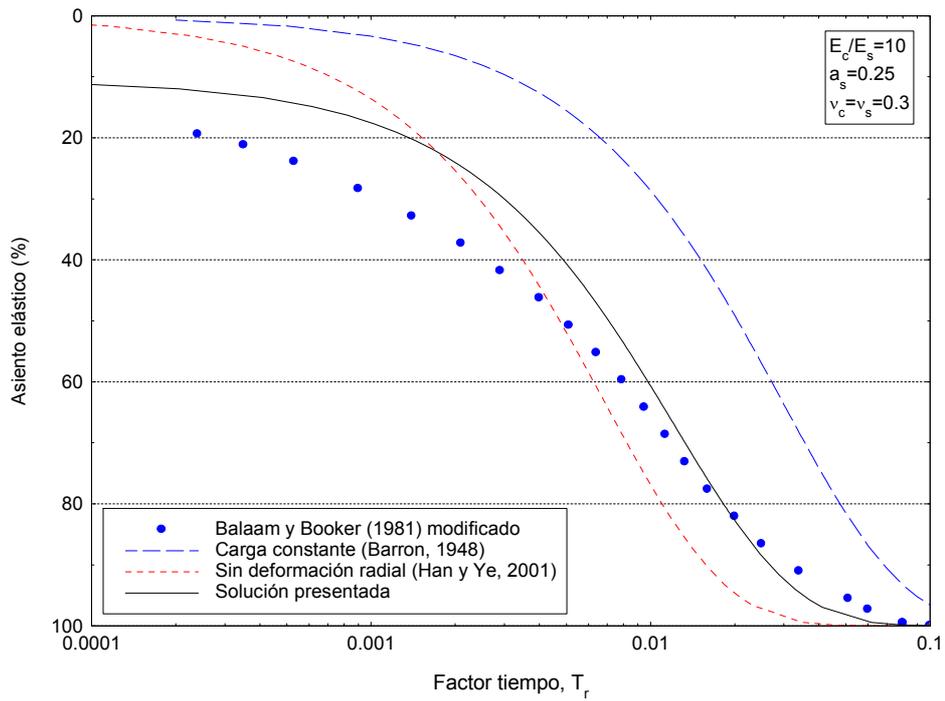


Figura 3.10. Comparación de soluciones elásticas. Caso analizado por Balaam y Booker (1981)

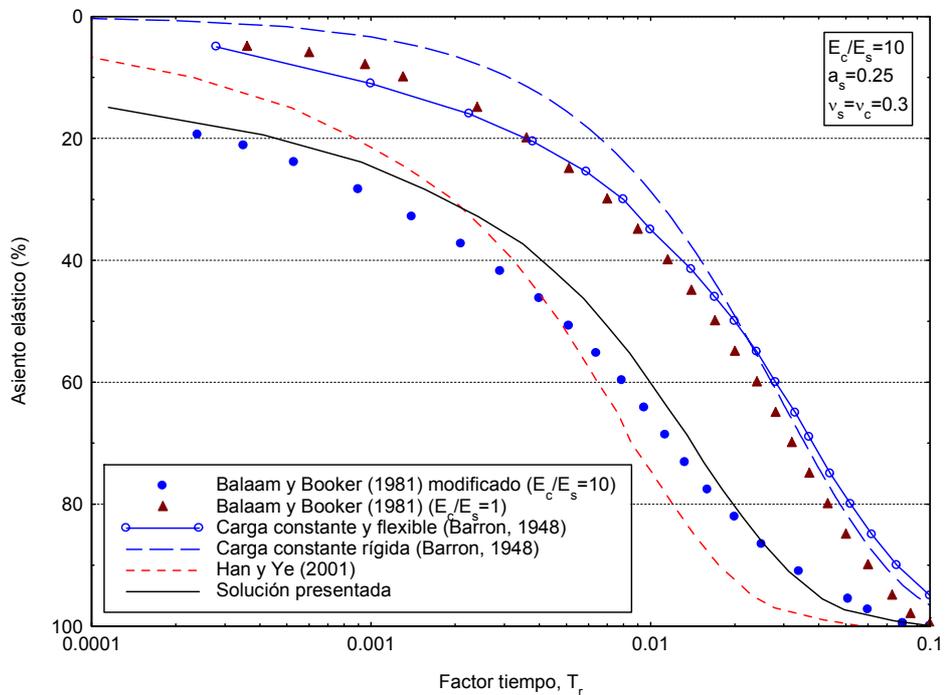


Figura 3.11. Comparación de soluciones elásticas empleando la solución de Barron para carga flexible como base. Caso analizado por Balaam y Booker (1981)

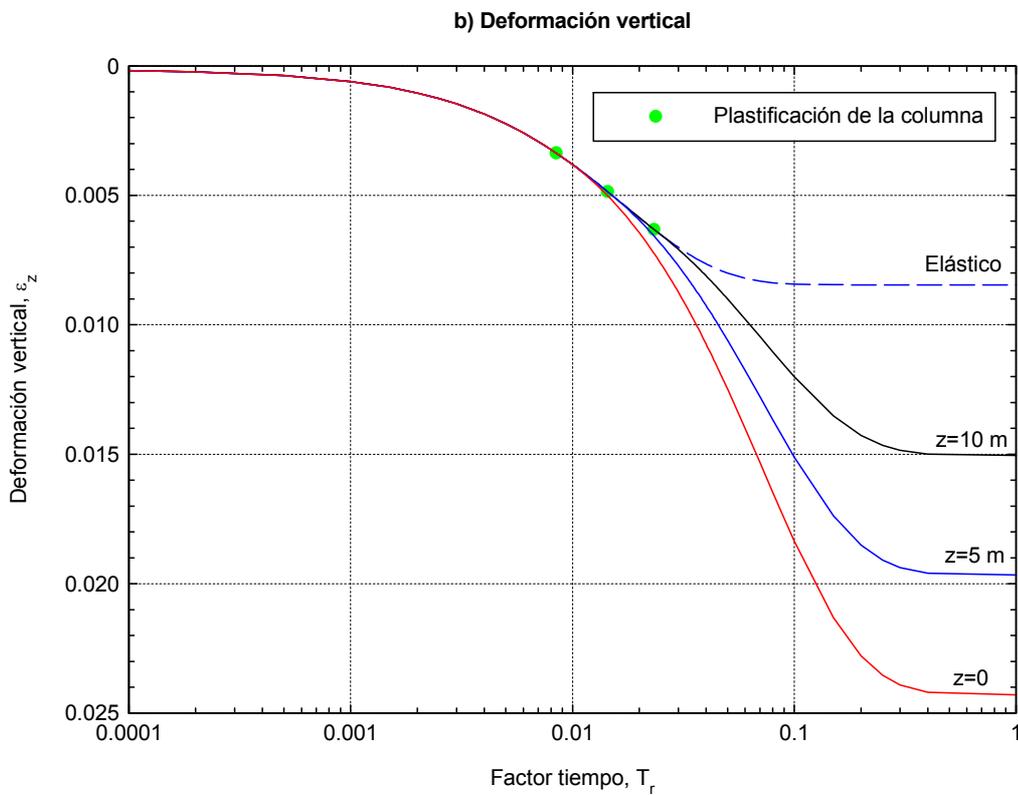
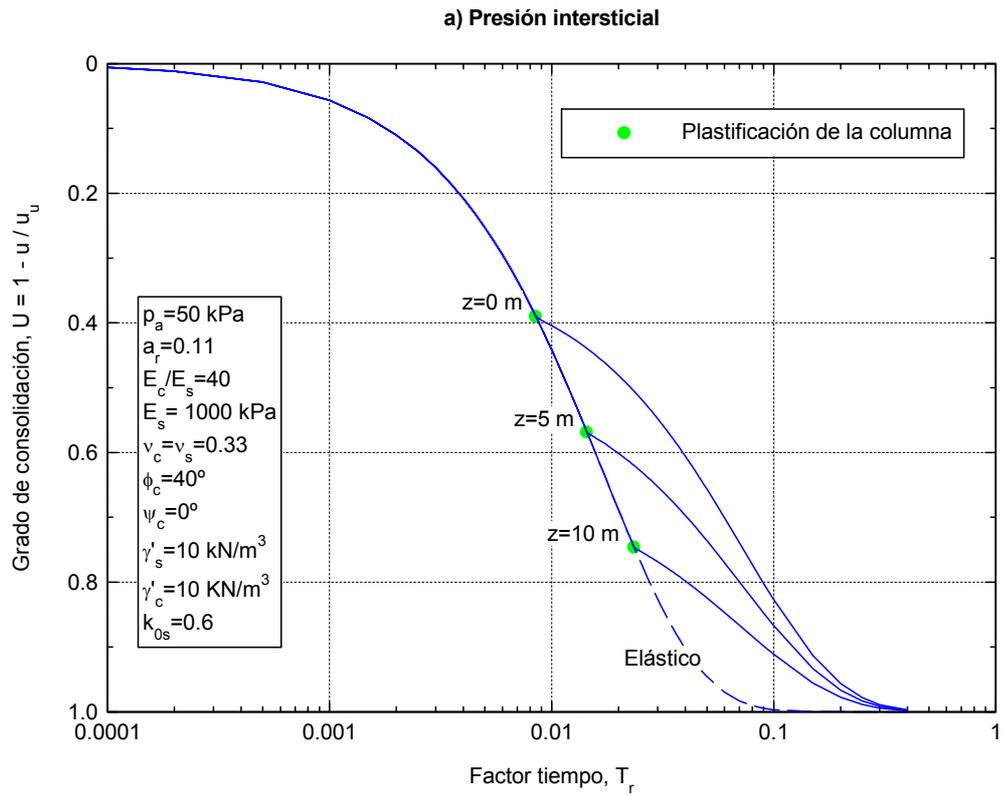


Figura 3.12. Solución de un caso típico. Columna elasto-plástica

3.4.2. Factor de Concentración de Tensiones

La influencia de la deformación horizontal y del comportamiento plástico de la columna en la distribución de las tensiones entre el suelo y la columna se refleja en la Figura 3.13. Con confinamiento lateral (Han y Ye, 2001), el factor de concentración de tensiones ($SCF = \sigma_{zc}/\sigma_{zs}$) comienza en cero y alcanza un valor final igual a la relación de módulos ($E_c/E_s = 40$). Como ya se ha comentado, esto no es realista. Al considerar la deformación radial, manteniendo un comportamiento elástico, se reduce el valor final a 25. Adicionalmente, el valor inicial deja de ser cero debido a la existencia de un asiento instantáneo. Finalmente, las deformaciones plásticas en la columna reducen todavía más el valor final del SCF hasta valores realistas, aproximadamente 5, con una pequeña influencia del ángulo de dilatación del material de la columna. La evolución de las tensiones totales y efectivas en el suelo y la columna se detalla en la Figura 3.14 para los casos mostrados en la Figura 3.13.

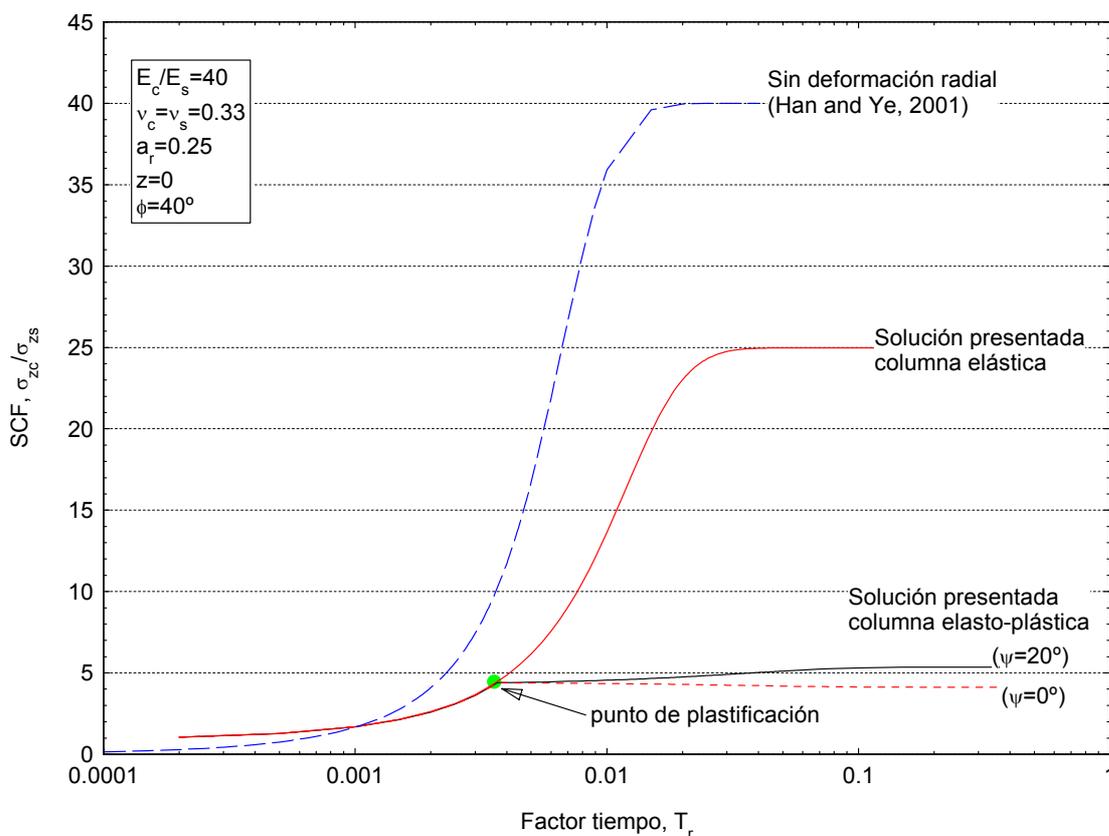


Figura 3.13. Factor de concentración de tensiones. Influencia de la deformación radial y de las deformaciones plásticas de la columna

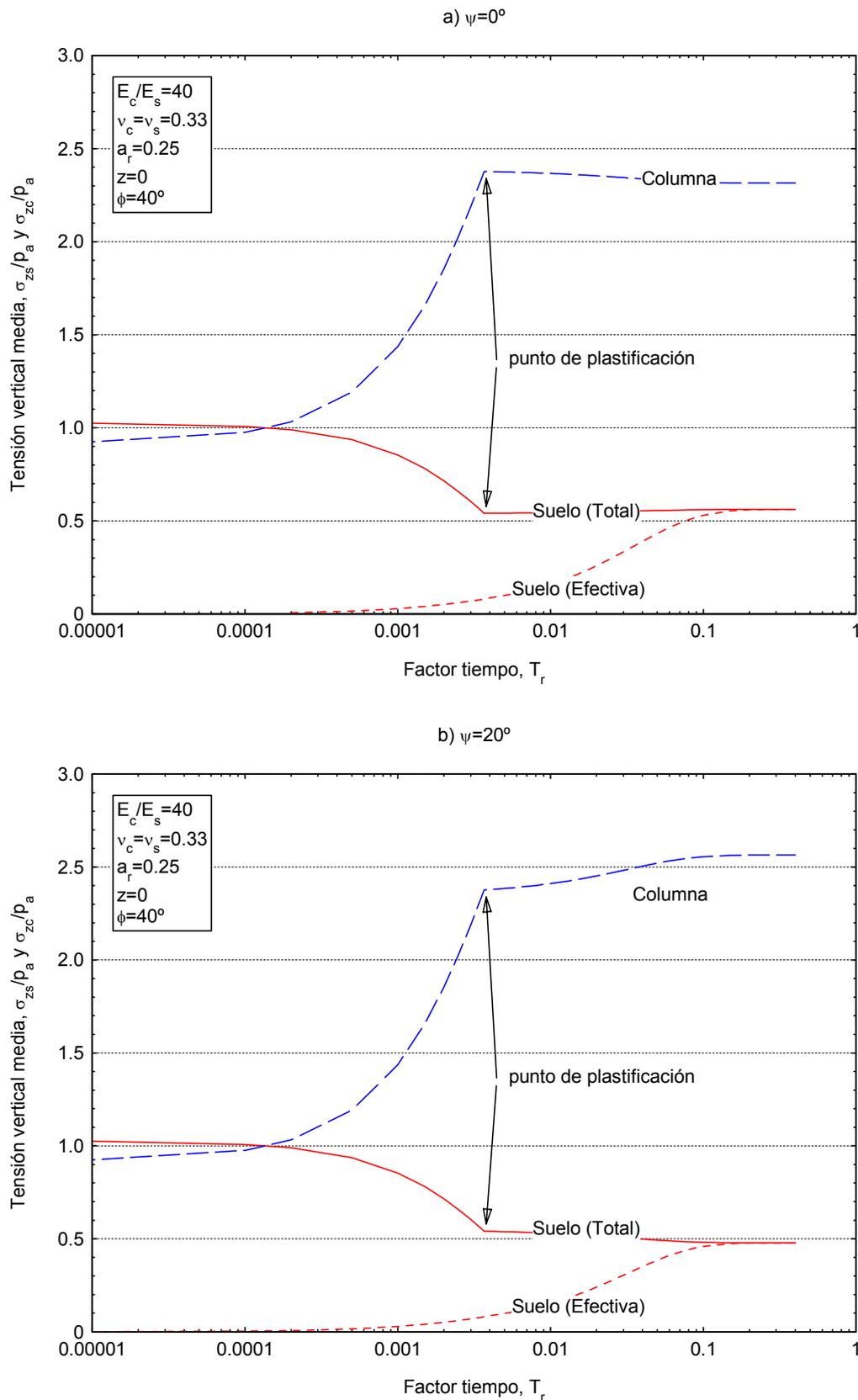


Figura 3.14. Evolución con el tiempo de las tensiones en el suelo y la columna

3.4.3. Reducción del asiento

El factor de reducción del asiento, o su inversa, el factor de mejora, n , son usados en la práctica para evaluar la eficiencia del tratamiento con columnas de grava. En la Figura 3.15 se comparan los valores finales del factor de mejora, n , obtenidos a partir de la presente solución con los obtenidos mediante el método básico de Priebe, sin realizar correcciones posteriores, lo que implica que las deformaciones elásticas de la columna son ignoradas, no se corrige por profundidad y no se tiene en cuenta el ángulo de dilatancia de la columna. Esto hace que para poder comparar, se hayan empleado en la presente solución un módulo de Young infinito para la columna y una profundidad nula. La coincidencia de ambos métodos es bastante buena y la influencia del área de sustitución y del ángulo de rozamiento de la columna son adecuadamente reproducidos por el método de Priebe. La presente solución permite tener en cuenta de una manera explícita la influencia de la profundidad, el módulo elástico de la columna y la dilatancia de la grava. En la Figura 3.15 se muestra claramente la influencia de la dilatancia.

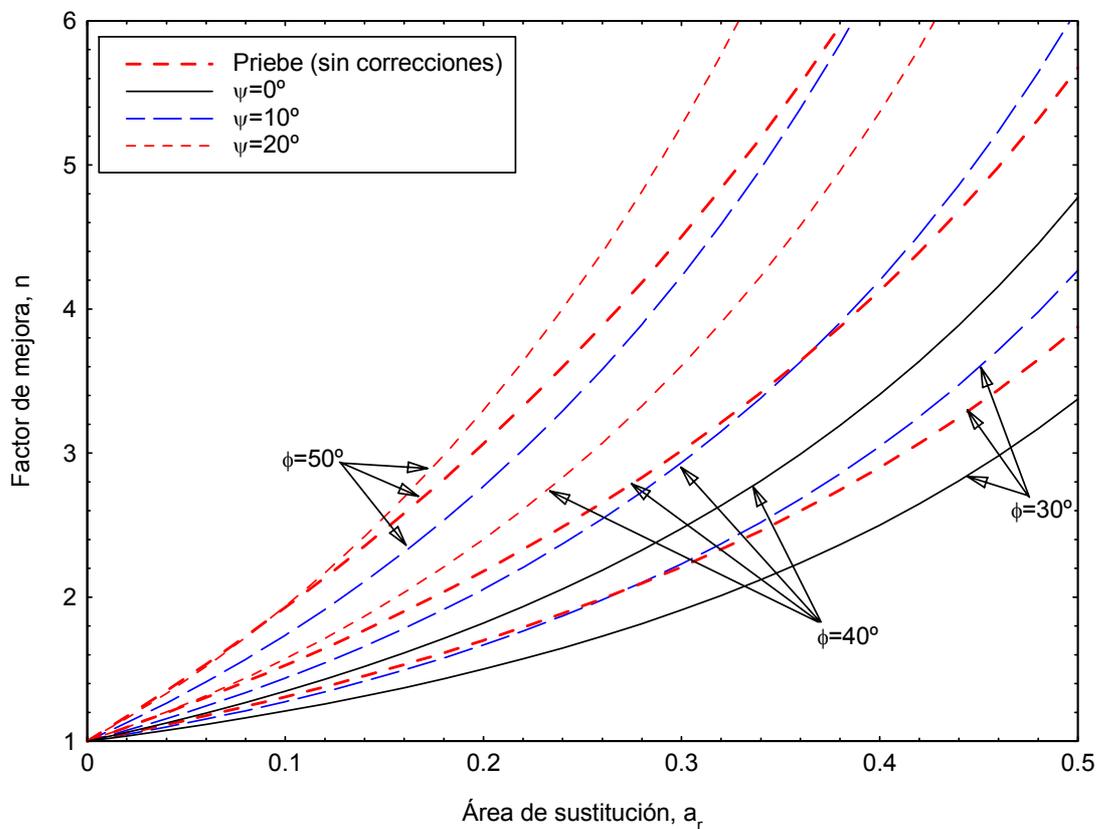


Figura 3.15. Factor de mejora, n . Comparación con el método de Priebe (sin correcciones)

3.5. EJEMPLO DE DISEÑO

Se ha elegido un ejemplo para mostrar el empleo de la solución desarrollada en esta tesis y otras soluciones previas. El caso analizado es un terraplén que aplica una carga vertical uniforme de 100 kPa a una capa de arcilla blanda de 10 m de espesor, reforzada con columnas de grava de 0.7 m de diámetro y espaciadas 2 m en una malla triangular. Por simplicidad, el nivel freático se supone en superficie.

Las propiedades del material de la columna son: peso específico sumergido, $\gamma'_c = 10 \text{ kN/m}^3$; módulo de Young, $E_c = 30 \text{ MPa}$; coeficiente de Poisson, $\nu_c = 0.33$; ángulo de rozamiento, $\phi_c = 40^\circ$; y ángulo de dilatancia, $\psi_c = 10^\circ$. Los parámetros relevantes del suelo son: peso específico sumergido, $\gamma'_s = 10 \text{ kN/m}^3$; módulo de Young, $E_s = 2 \text{ MPa}$; coeficiente de Poisson, $\nu_s = 0.33$; coeficiente de consolidación, $c_{vr} = 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$; y coeficiente de empuje en reposo, $k_{0s} = 0.6$.

El área de sustitución es $a_r = 0.11$, y la relación de módulos, $E_c / E_s = 15$.

Para la aplicación del presente método se pueden seguir los siguientes pasos:

- Los coeficientes de consolidación equivalentes para el caso elástico y plástico pueden obtenerse de las ecs. (3.32) y (3.42).
- Las tensiones y deformaciones elásticas para la situación sin drenaje (u) y final (fe) pueden ser obtenidas de la solución de Balaam y Booker (1981, 1985) (Tabla 2.7 y Tabla 2.6), o de la Tabla 3.7 particularizada para $\bar{u} = \overline{\Delta\sigma_{oct,s}}$ y $\bar{u} = 0$, respectivamente.
- Se aplica la solución de Barron/Hansbo (3.17) entre los estados sin drenaje y final elástico, usando el coeficiente de consolidación elástico equivalente, c_{vr}^{ze} , y se obtiene el exceso de presión intersticial medio \bar{u} en función del tiempo.
- Todas las componentes de tensión y deformación pueden ser obtenidas a partir de p_a y \bar{u} empleando la Tabla 3.7.
- El comienzo de la plastificación en la superficie se evalúa a partir del correspondiente grado de consolidación elástico, U_y^e empleando la ec. (3.39). Si

$(U_y^e > 1)$, es un caso elástico y el cálculo está finalizado. Si $(U_y^e < 1)$, el caso es elasto-plástico.

- f) Si es un caso elasto-plástico, el momento de plastificación se mantiene como el punto inicial para la fase plástica, con un exceso de presión intersticial inicial \bar{u}_y . Desde este punto, la solución de Barron/Hansbo (3.17) se vuelve a emplear con un coeficiente de consolidación plástico equivalente, c_{vr}^{zpp} . El exceso de presión intersticial medio \bar{u} se obtiene de nuevo en función del tiempo.
- g) Todos los incrementos de tensiones y deformaciones son obtenidos a partir de \bar{u} empleando la Tabla 3.8, y estos son acumulados a sus respectivos valores en el momento de la plastificación.

Los resultados se resumen en la Tabla 3.9, empleando 4 métodos diferentes: en las dos últimas columnas, la presente solución, en las hipótesis de comportamiento elástico (Tabla 3.7) y elasto-plástico de la columna (Tabla 3.8). Las dos primeras columnas se incluyen para mostrar los análisis sin deformación lateral de la columna, con la hipótesis convencional de relación de rigideces columna/suelo constante (solución de Barron/Hansbo con una carga constante obtenida de la situación final), y con una relación de rigideces variable con el tiempo, con el método propuesto por Han y Ye (2001).

Todos los resultados de tensiones y desplazamientos aparecen dados en la superficie ($z=0$). El asiento, s_z , se calcula empleando las expresiones integradas (3.43) a (3.45).

Para el presente caso, la columna alcanza su estado activo ($k_{ac} = 0.22$) en la superficie para un grado de consolidación del 53%, en 12 días. La extensión de la zona plástica progresa en profundidad, alcanzando la profundidad media de la columna para $U = 69\%$ en 19 días y el fondo de las columnas para $U = 85\%$ en 31 días (estos resultados no se muestran en la Tabla 3.9).

Tabla 3.9. Resultados del ejemplo de diseño. Tensiones y desplazamientos en superficie (z=0)

Variable	Tiempo (días)	Sólo deformación vertical		Deformación vertical y radial (solución presentada)	
		Relación de rigideces constante (Barron / Hansbo)	Relación de rigideces variable (Han y Ye, 2001)	Columna elástica	Columna elasto-plástica
s_z (mm)	0	0	0	3.5	3.5
	40	93.7	128.8	147.1	159.4
	∞	132.9	132.9	160.8	220.0
n	∞	2.54	2.54	2.10	1.53
s_{rc} (mm)	0	0	0	-0.5	-0.5
	40	0	0	1.5	2.7
	∞	0	0	1.7	4.5
\bar{u} (kPa) ($U\%$)	0	112.5	112.5	102.4	102.4
	40	33.2 (71%)	3.5 (97%)	8.9 (91%)	22.6 (78%)
	∞	0	0	0	0
$\sigma_{zc} / \sigma_{zs}$ (kPa) (SCF)	0	0 / 112.5 (0.00)	0 / 112.5 (0.00)	76.3 / 103.0 (0.74)	76.3 / 103.0 (0.74)
	40	416.3 / 94.1 (4.42)	572.2 / 45.1 (12.68)	467.6 / 54.1 (8.65)	296.9 / 75.4 (3.94)
	∞	590.6 / 39.4 (15.00)	590.6 / 39.4 (15.00)	504.9 / 49.4 (10.22)	293.3 / 75.8 (3.87)
$\sigma_{rc} / \sigma_{zc}$ (kPa) (factor k)	0	(0-112.5) / 0 (*)	(0-112.5) / 0 (*)	99.8 / 76.3 (1.31)	99.8 / 76.3 (1.31)
	40	(148.7-69.8) / 416.3 (0.36-0.17) (*)	(204.4-28.2) / 572.2 (0.36-0.05) (*)	39.9 / 467.6 (0.09)	64.5 / 296.9 (0.22)
	∞	(211.0-23.6) / 590.6 (0.36-0.04) (*)	(211.0-23.6) / 590.6 (0.36-0.04) (*)	34.2 / 504.9 (0.07)	63.8 / 293.3 (0.22)

(*) Discontinuidad de la tensión radial en el contacto columna-suelo. El primer y segundo miembro mostrados entre paréntesis corresponden a la tensión total radial en la columna y en el suelo respectivamente.

El asiento final de la superficie sin tratamiento de mejora del terreno es 337.5 mm. Con las columnas, si se supone confinamiento lateral, éste se reduce a 132.9 mm (factor de mejora igual a 2.54). Sin embargo, aumenta a 160.8 mm si se tiene en cuenta la deformación radial elástica de la columna ($n=2.10$), y a 220.0 mm ($n=1.53$) si se considera la deformación plástica de la columna. Por comparación, el método básico de Priebe da un factor de mejora básico de 1.59, que aumenta hasta 2.02 con las correcciones empíricas por sobrecarga y deformabilidad de la columna (considerando $k_{0s} = 1.0$).

Los desplazamientos radiales de la columna son obviamente cero con el método de confinamiento lateral. Con la presente solución, estos son aparentemente pequeños si se comparan con los asientos, pero del mismo orden de magnitud si se comparan deformaciones unitarias. Se puede comprobar que para la situación sin drenaje, la columna disminuye ligeramente su diámetro, debido a la condición de cambio de volumen nulo, pero esta tendencia se invierte conforme la consolidación progresa.

La disipación de los excesos de presión intersticial sigue la tendencia comentada en el artículo: con confinamiento lateral, la variación de la relación de rigideces implica una considerable aceleración del proceso (el grado de consolidación para 40 días aumenta del 71% al 97%). La deformación radial de la columna reduce esta tendencia y los valores a los 40 días son del 91% para el caso de columna elástica y del 78% con deformación plástica.

El factor de concentración de tensiones (SCF) se muestra también en la Tabla 3.9. Para el método de confinamiento lateral, éste aumenta de cero para la situación sin drenaje a 15 para el final de la consolidación (igual a la relación de módulos). Este valor se reduce a 10.22 al considerar la deformación radial, y a 3.87 por las deformaciones plásticas. El método de Priebe da $SCF=6.2$.

Respecto a la relación entre la tensión radial y vertical en la columna, los métodos con confinamiento lateral dan resultados no válidos, ya que la tensión radial en el suelo y en la columna es diferente, lo que implica una discontinuidad en el contacto columna-suelo debido a los diferentes valores de k_0 y de la tensión vertical en ambos materiales. Estos resultados aparecen reflejados en las últimas filas de la Tabla 3.9. Las diferencias son muy significativas, y las tensiones radiales en la columna son entre 2 y

10 veces las tensiones radiales en el suelo. El considerar la deformación radial elimina esta discontinuidad. Para el caso de columna elástica, la relación de tensiones comienza en un valor de 1.31 (muy por encima de k_0), y disminuye hasta 0.07 al final. Al considerar las deformaciones plásticas de la columna, este valor queda limitado entre los valores activo y pasivo. En este caso, como se comentó, se alcanza la condición de estado activo.

En el Apéndice A se muestra una hoja de cálculo que lleva a cabo el algoritmo presentado.

3.6. ANÁLISIS NUMÉRICO

Se consideró útil y necesario realizar un modelo numérico mediante elementos finitos de la “celda unidad” (Figura 3.1) que facilitase la comprensión del problema y permitiese contrastar los resultados numéricos obtenidos por Balaam y Booker (1981) que han servido de base para validar el modelo teórico expuesto en el apartado anterior.

Para realizar este análisis se ha empleado un código comercial (Plaxis v8) que permite estudiar la consolidación de una manera acoplada en un modelo bidimensional con simetría axial.

3.6.1. Modelo

Existen diferentes alternativas para modelar el problema; de todas ellas, se ha elegido colocar una placa de rigidez elevada en la parte superior del suelo y columna, sin emplear ningún elemento interfaz entre la placa y éstos. Esta solución presenta los inconvenientes de que la placa no puede tener una rigidez infinita y de que el contacto superior entre la placa y el suelo y la columna es rugoso. Sin embargo, estos dos efectos se localizan en la parte superior del modelo y su efecto desaparece en profundidad. Por ello, se elige un modelo de una altura superior a la necesaria, despreciándose la parte superior y estudiando la parte inferior, en la que los asientos son uniformes en planos horizontales y los desplazamientos horizontales son constantes en planos verticales.

Otras alternativas para estudiar el problema, como imponer un desplazamiento en la parte superior o aplicar la carga mediante un suelo ficticio muy rígido en la parte

superior, son igualmente válidas, pero la complejidad del modelo y de la obtención de resultados aumenta.

Se analizaron las situaciones correspondientes a áreas de sustitución $a_r = 0.11 - 0.25$ y relación de módulos $E_c / E_s = 1 - 10 - 40$.

En la Figura 3.16 se muestran los dos modelos empleados. Se ha elegido una malla no excesivamente fina de elementos triangulares de 15 nodos con 12 puntos de integración o de Gauss donde se obtienen las tensiones. La malla es más fina en el suelo, donde se realiza el proceso de drenaje y consolidación, que en la columna. Aunque los tiempos de cálculo son pequeños, no es necesario emplear mallas más finas, ya que, tal y como se ha comprobado, el resultado no varía.

Las condiciones de contorno son las siguientes:

- No existen tensiones tangenciales en el borde inferior, ni en los contactos interior y exterior.
- Los bordes inferior, exterior y superior del suelo son impermeables.
- El contacto entre la columna y el suelo es rígido.
- El contacto de la placa rígida con el suelo y la columna es rígido, ya que el empleo de una interfaz sólo resuelve el problema de forma parcial y complica el modelo.

Debido a los objetivos del estudio, se elige una densidad del suelo y la columna coincidente con la del agua para que las tensiones efectivas iniciales sean nulas, y éstas no dependan de la profundidad.

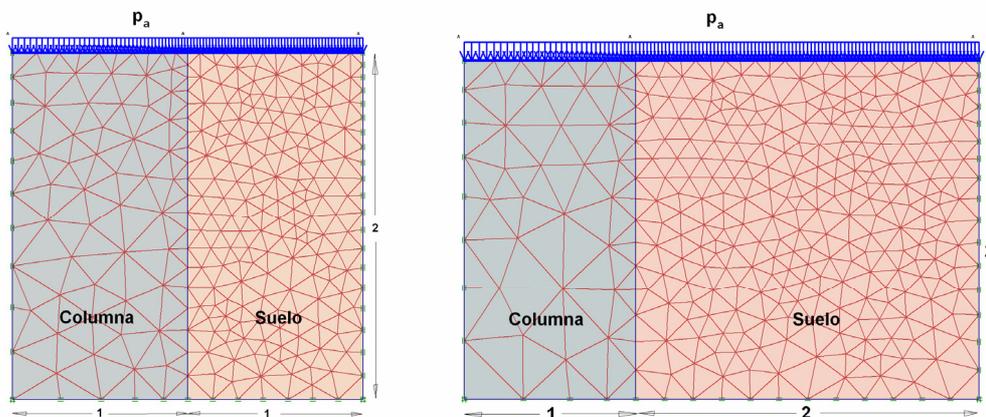


Figura 3.16. Mallas de elementos finitos de los modelos analizados

El modelo de comportamiento empleado para el suelo y la columna es elástico y por ello, las tensiones y deformaciones son linealmente proporcionales a la carga aplicada y la rigidez elegida para el suelo y la columna, siendo únicamente de interés la proporción entre ellos.

El valor de la permeabilidad del suelo no tiene relevancia, puesto que todas las magnitudes se representan en función del factor tiempo adimensional, T_r .

3.6.2. Comparación y resultados

En la Figura 3.17 se muestra la comparación entre el grado de consolidación obtenido en el presente análisis y el mostrado por Balaam y Booker (1981) para diferentes áreas de sustitución y relación de módulos. El grado de consolidación se ha definido en función del asiento, de la misma forma que en Balaam y Booker (1981):

$$U_s = \frac{s_z - s_{z,u}}{s_{z,f} - s_{z,u}} \quad (3.47)$$

Sin embargo, se puede comprobar, mediante el análisis por elementos finitos, que el grado de consolidación es prácticamente independientemente de la magnitud en la que se defina. Ésta es una de las principales conclusiones del análisis teórico presentado en el apartado anterior (3.21). Como ejemplo, en la Figura 3.18 se puede observar que el grado de consolidación obtenido en función del asiento, U_s , coincide con el obtenido a partir de la presión intersticial media, U_u :

$$U_u = 1 - \frac{\bar{u}}{u_u} \quad (3.48)$$

En la Figura 3.20 se muestra la evolución de la tensión vertical total con el tiempo. Se observa que mientras que la presión vertical en la columna es constante a lo largo del radio, no lo es así en el suelo, donde sólo es constante en los instantes inicial y final. Tanto la presión vertical en la columna, σ_{zc} , como la tensión vertical media en el suelo, $\bar{\sigma}_{zs}$, evolucionan en el tiempo de la misma forma que el asiento y la presión intersticial. El cociente entre ambas magnitudes (SCF) se ha representado en la Figura 3.19 y se ha comparado con las soluciones teóricas. Se puede comprobar que el ajuste

con la solución analítica presentada es mucho mejor que si no se considera la deformación radial de la columna (Han y Ye, 2001).

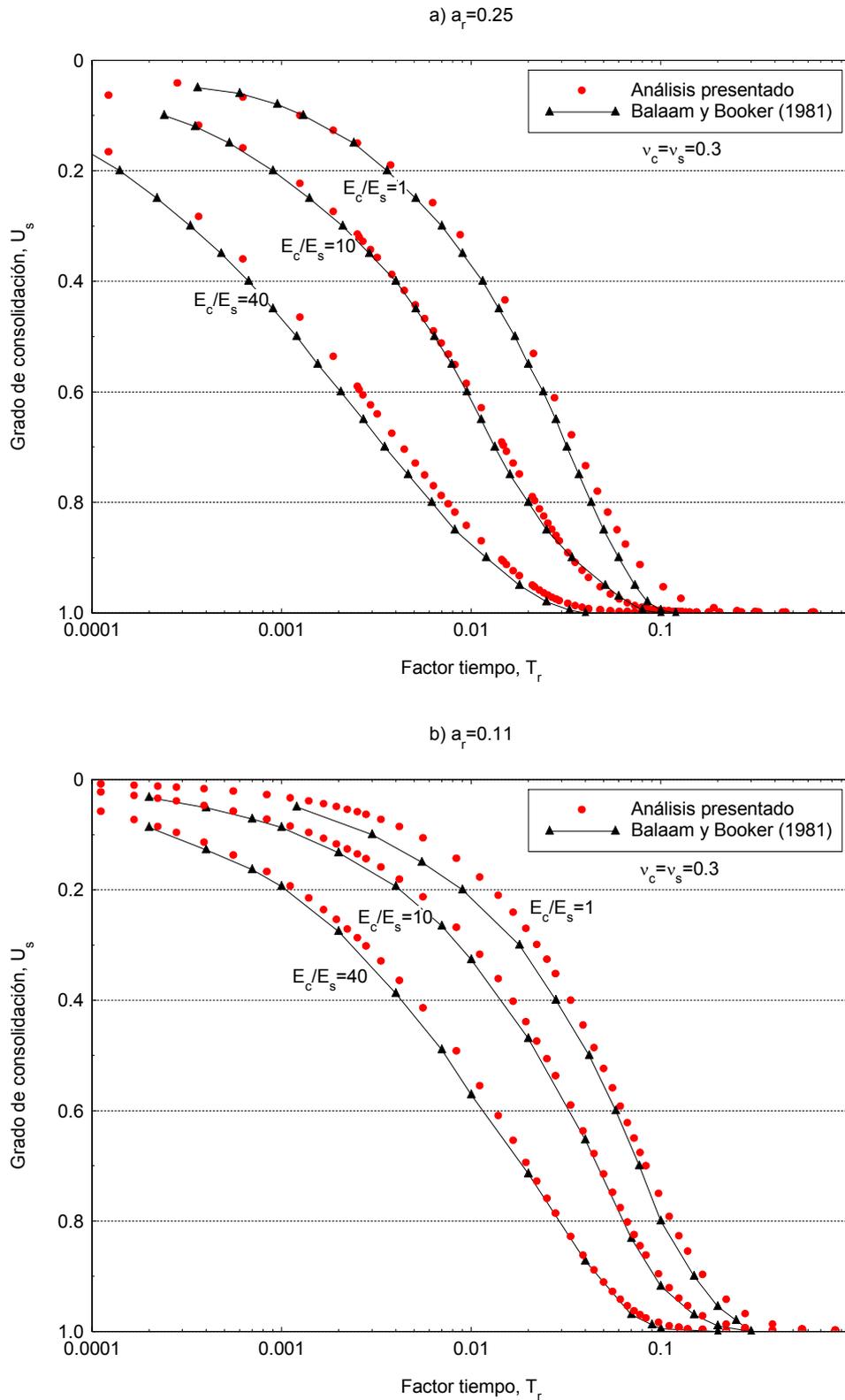


Figura 3.17. Grado de consolidación, U_s , obtenido mediante elementos finitos

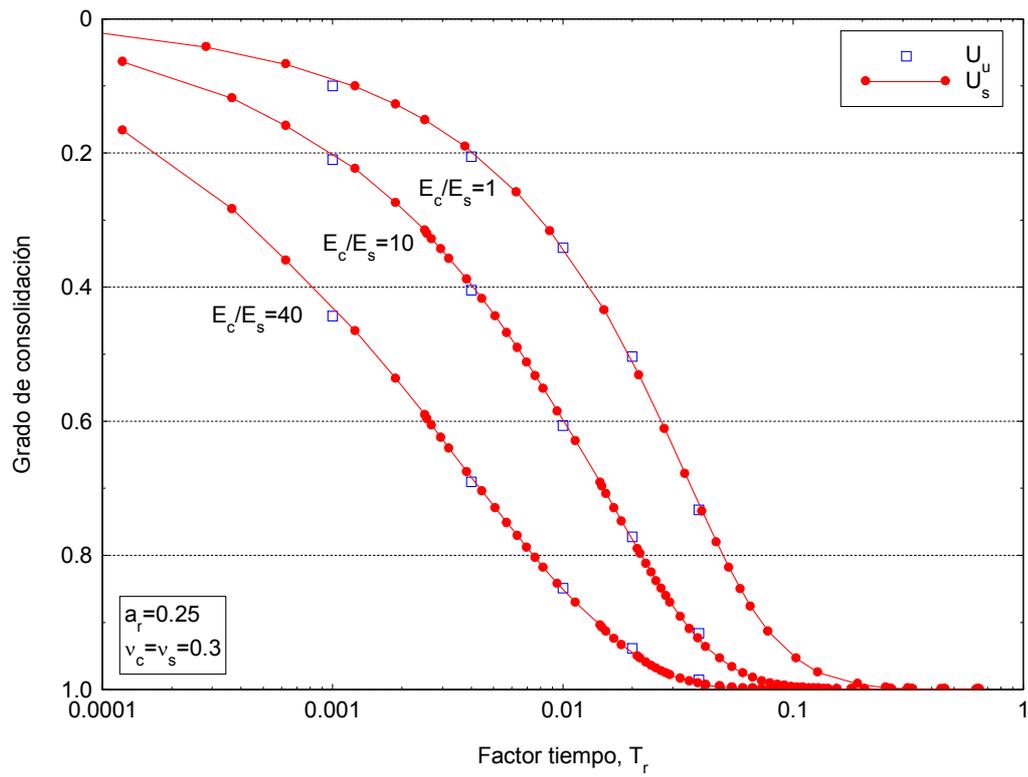


Figura 3.18. Comparación de diferentes grados de consolidación

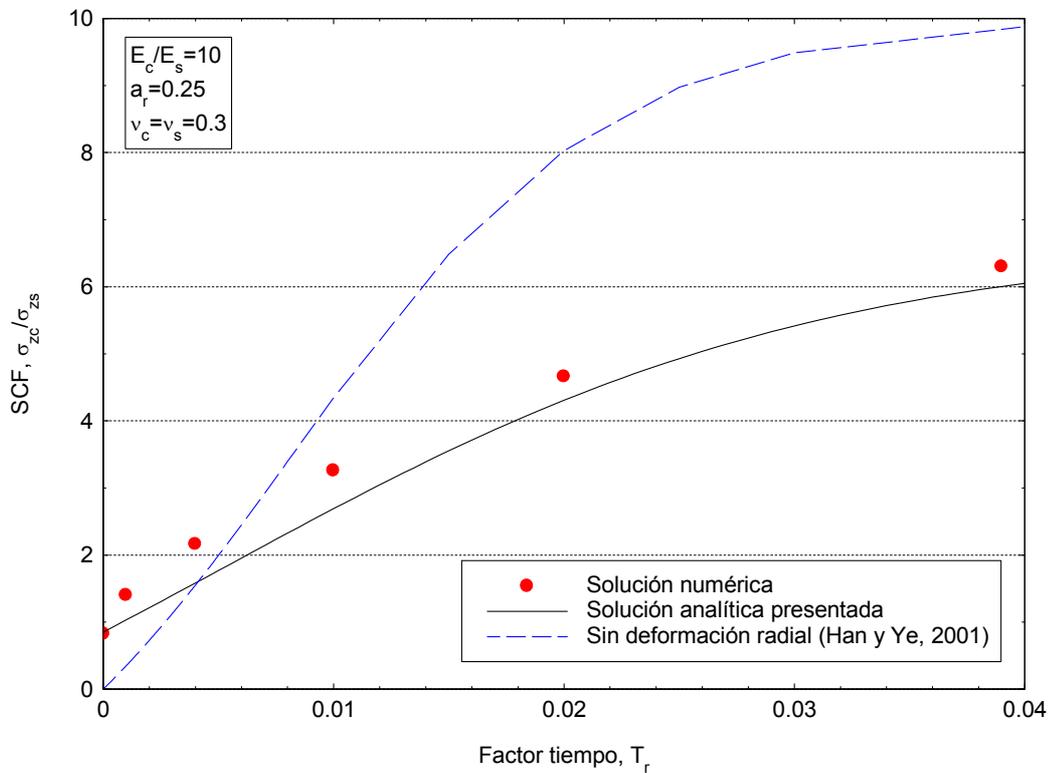


Figura 3.19. Evolución del factor de concentración de tensiones

Las tensiones radial y circunferencial durante el proceso de consolidación se han dibujado en la Figura 3.21. Estas dos magnitudes son muy interesantes, ya que su evolución a lo largo del radio durante el proceso de consolidación no se encuentra reflejada en la bibliografía conocida. Inicialmente, la tensión radial es menor que la circunferencial. Conforme las presiones intersticiales se disipan, ambas magnitudes decrecen. Sin embargo, la tensión radial va siendo cada vez mayor con respecto a la circunferencial, llegando a que la tensión radial es mayor que la circunferencial al final del proceso. Este aumento de la tensión radial con respecto a la circunferencial se produce de una forma uniforme a lo largo del radio en el análisis teórico. Por el contrario, con el análisis mediante elementos finitos, se observa que inicialmente el aumento es brusco y se produce únicamente en las zonas cercanas a la columna. Con el tiempo, este aumento se va transmitiendo a lo largo de todo el radio.

El exceso de presión intersticial y su evolución en el tiempo se representa en la Figura 3.22. Inicialmente la presión intersticial decrece en la zona cercana a la columna. Para radios mayores, su valor permanece constante con el radio, pero disminuye debido a la disminución de la tensión vertical en el suelo. Por este motivo, en este problema no aparece el efecto Mandel-Cryer.

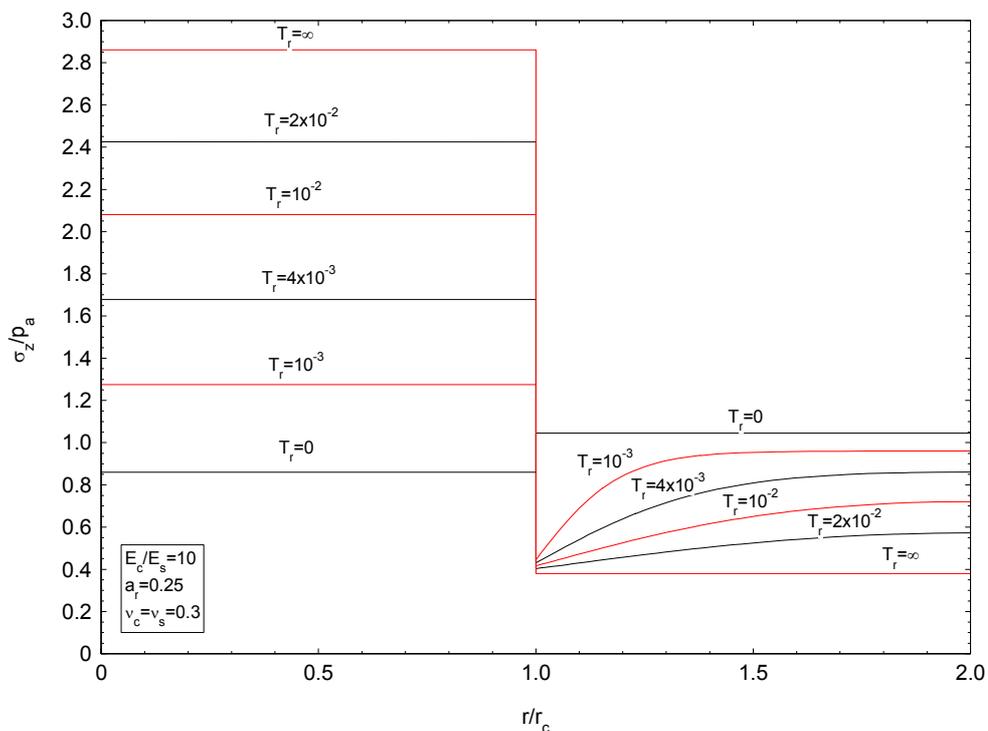


Figura 3.20. Evolución de las tensiones verticales totales

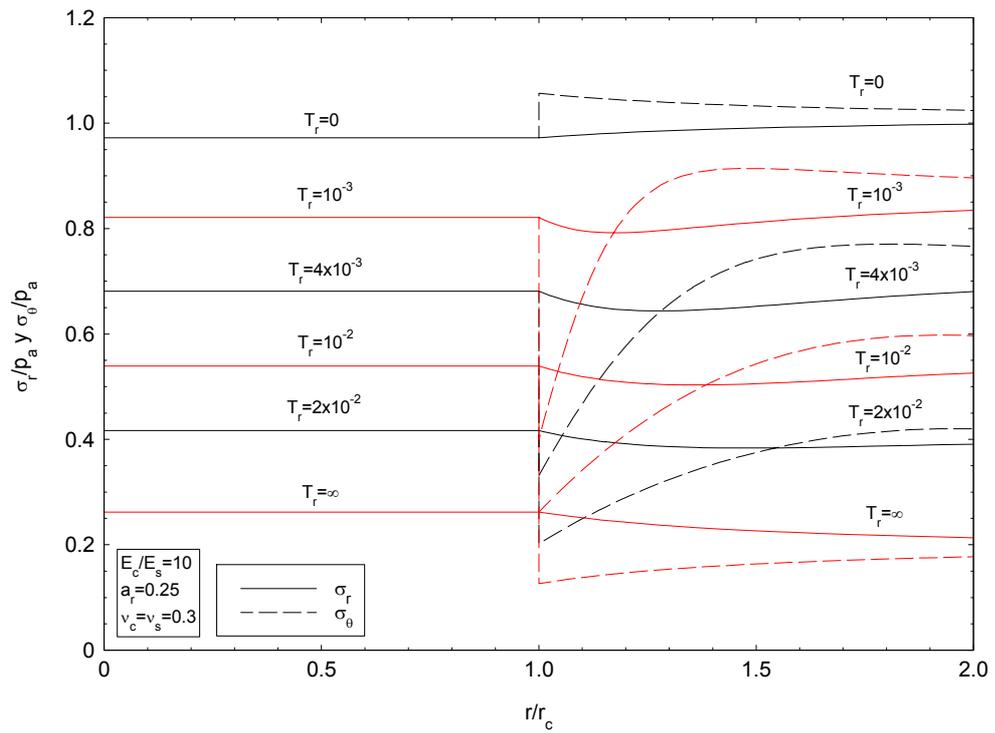


Figura 3.21. Evolución de las tensiones radiales y circunferenciales totales

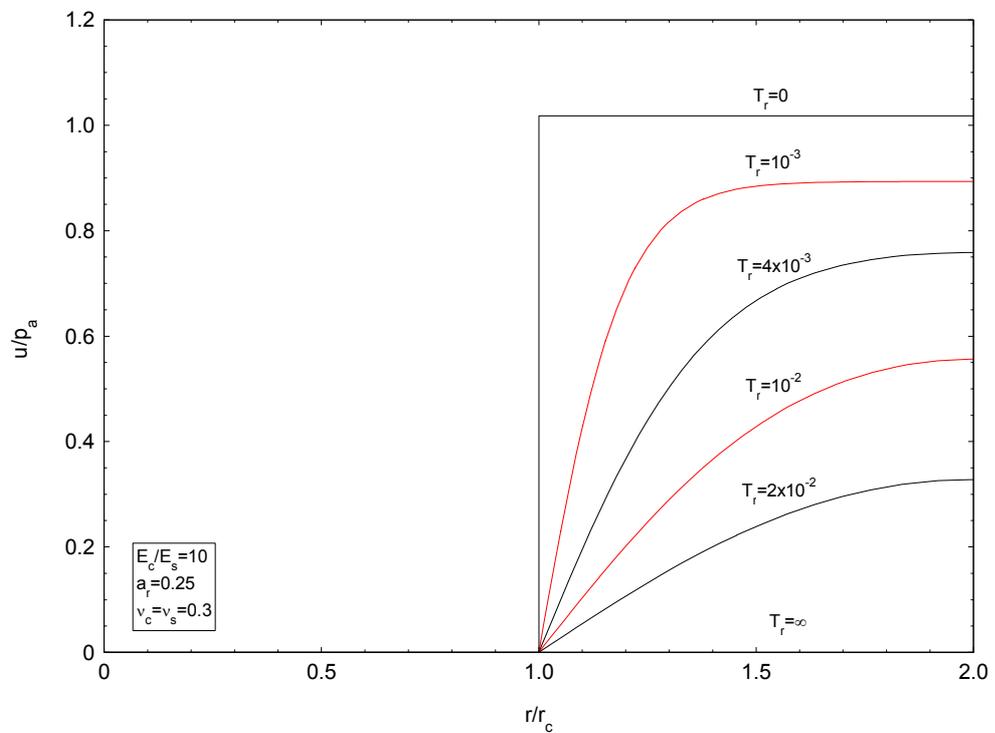


Figura 3.22. Evolución de la presión intersticial

La evolución de la tensión vertical obtenida numéricamente (Figura 3.24) es comparable con la obtenida en ensayos de laboratorio (Cimentada, 2008; Figura 3.23).

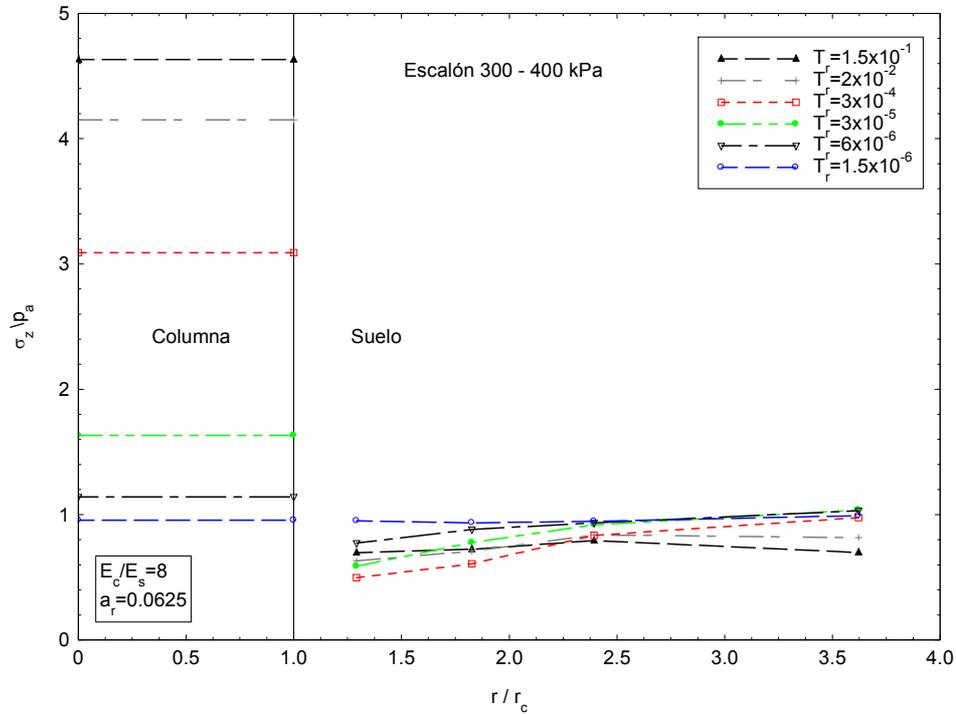


Figura 3.23. Tensiones verticales medidas en laboratorio (Cimentada, 2008)

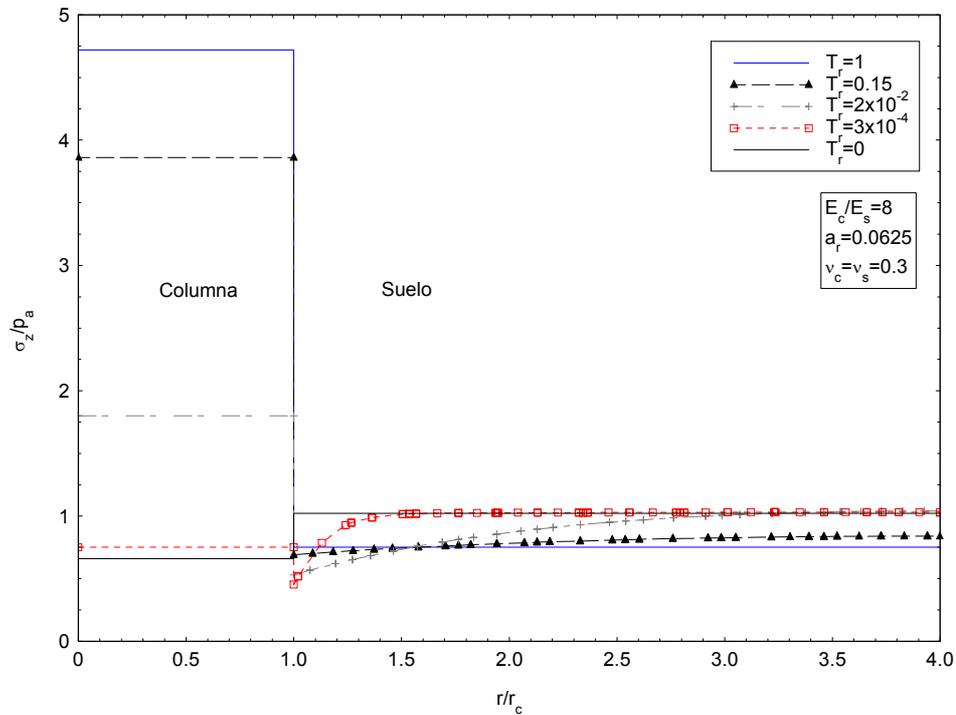


Figura 3.24. Tensiones verticales obtenidas con elementos finitos

Para evaluar la precisión de los resultados se han comparado la situación inicial y final (Figura 3.26 y Figura 3.25, respectivamente). En el ajuste de la situación final no existe ningún problema. Sin embargo, para poder obtener un buen ajuste de la situación inicial se destaca la influencia del módulo de deformación volumétrico del agua en los resultados. En el análisis teórico que se emplea como base, se ha considerado que el agua es indeformable; ahora bien, como el método de los elementos finitos resuelve el problema en desplazamientos, es necesario elegir una matriz de rigidez para el agua, de valor muy elevado pero que nunca puede llegar a ser infinito. Este módulo de deformación volumétrica del agua viene reflejado en el código a través del coeficiente de Poisson no drenado del suelo, ν_{us} . Se ha comprobado que el ajuste de la situación inicial no es suficientemente bueno con valores de $\nu_{us} = 0.495$ y se ha empleado un valor de $\nu_{us} = 0.499$.

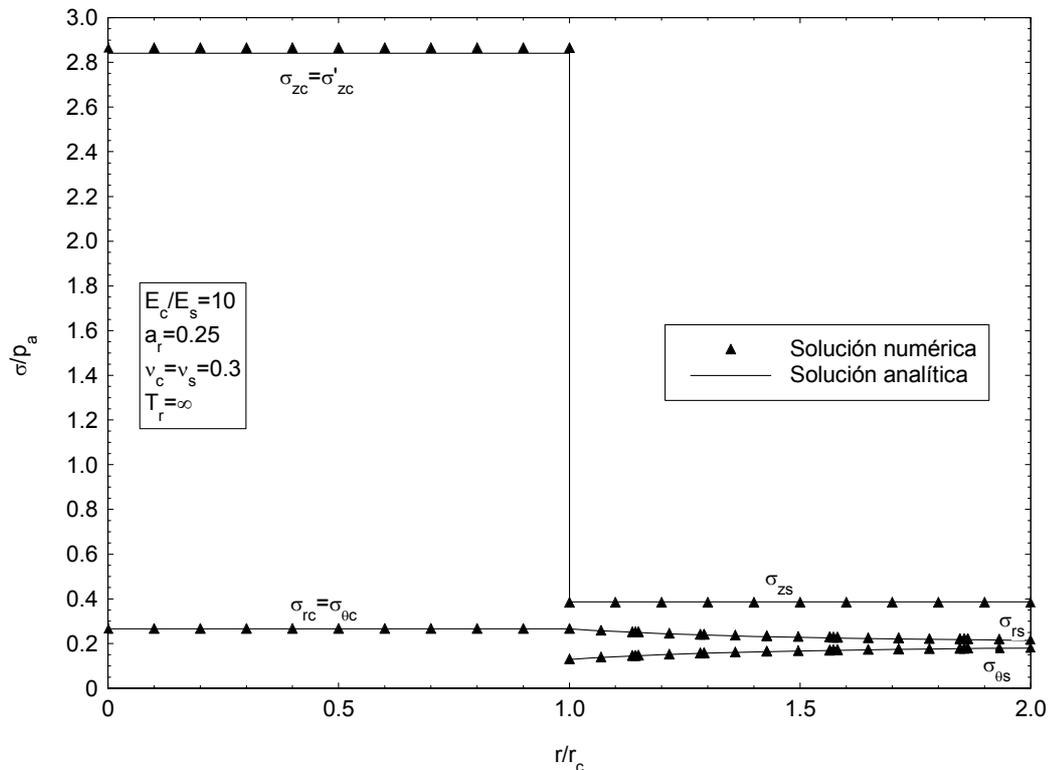


Figura 3.25. Comparación del estado final

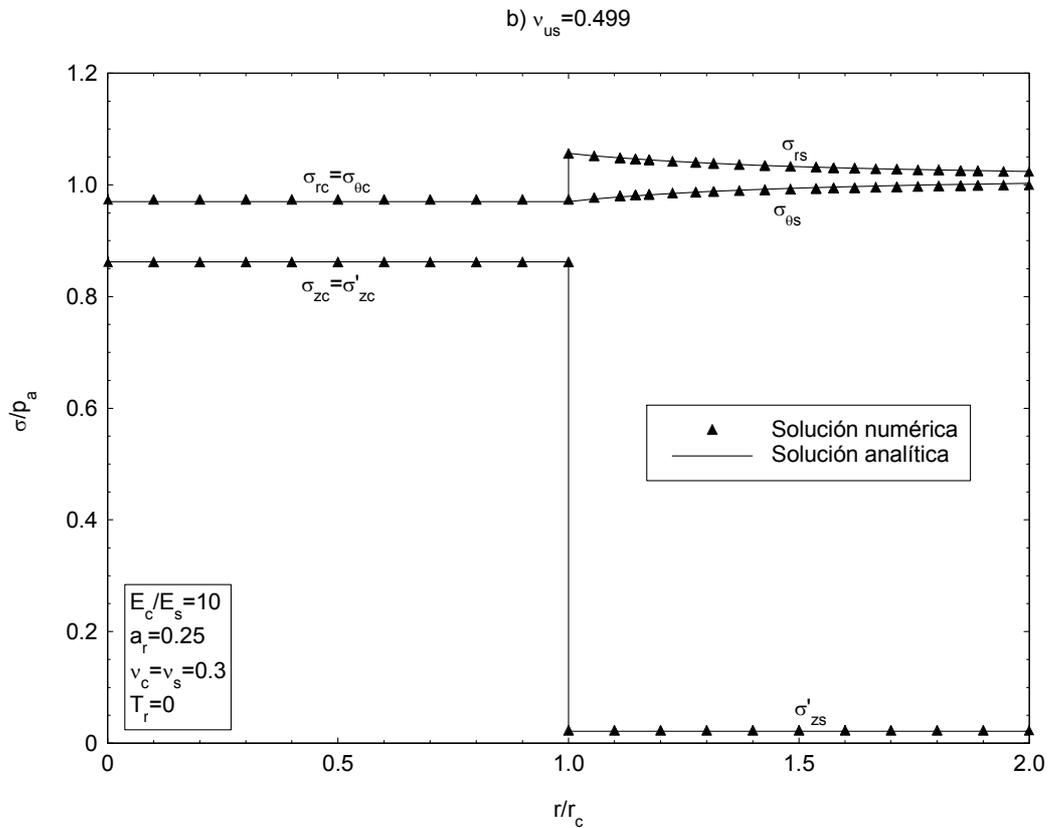
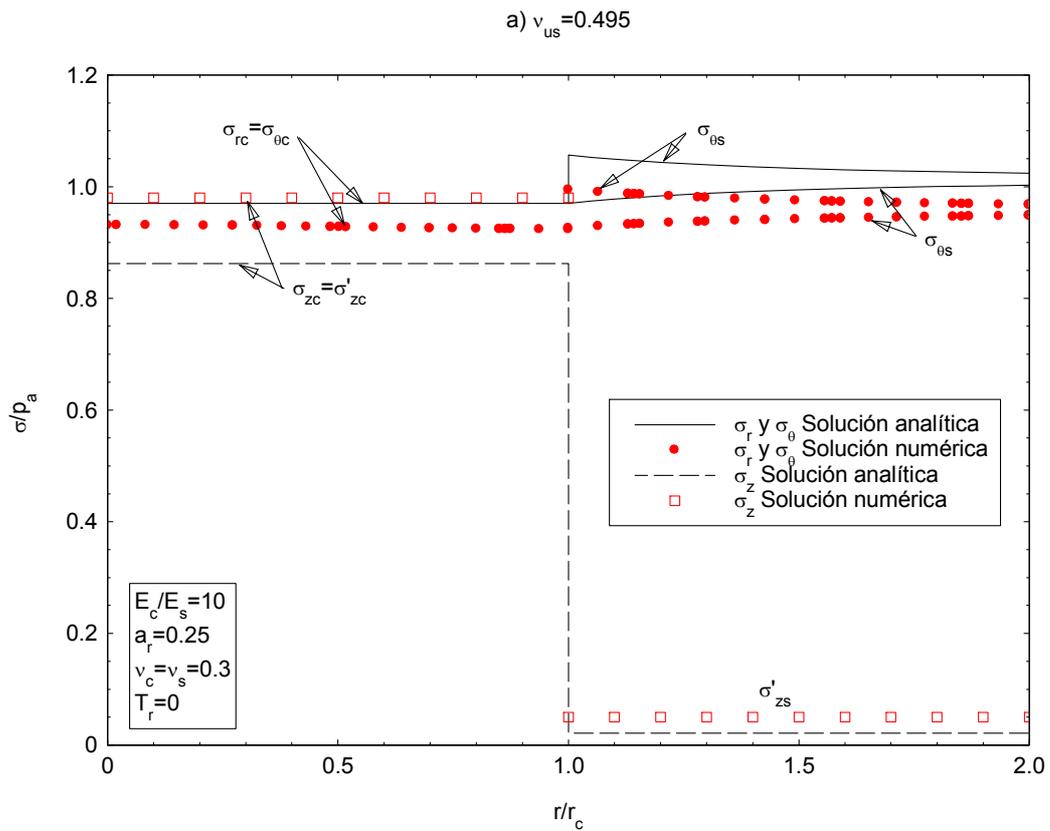


Figura 3.26. Comparación del estado inicial

Como ya se ha comentado, no es necesario que la malla sea muy fina para obtener un buen resultado. No obstante, existe otro parámetro que sí tiene mayor influencia en los resultados, y es el incremento de tiempo dado en cada paso de cálculo del proceso de consolidación. En la Figura 3.27, se muestra la influencia del número de incrementos de tiempo dados. Cada punto dibujado representa cada escalón de tiempo dado en el proceso de consolidación. En este caso, si los incrementos son grandes, el tramo inicial de la consolidación se acelera, mientras que el final se ralentiza. Booker y Small (1975) ya estudiaron la influencia de los incrementos de tiempo dados en el estudio de un problema similar (Figura 3.28).

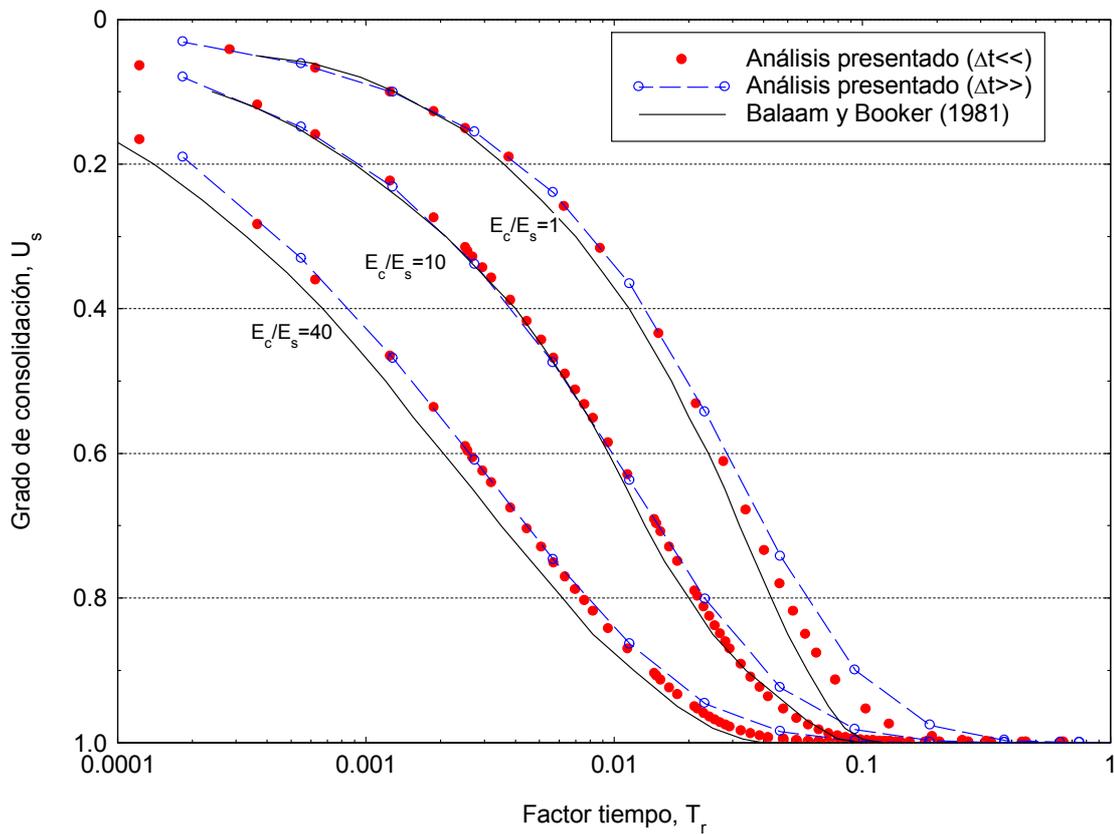


Figura 3.27. Influencia de los incrementos de tiempos fijados

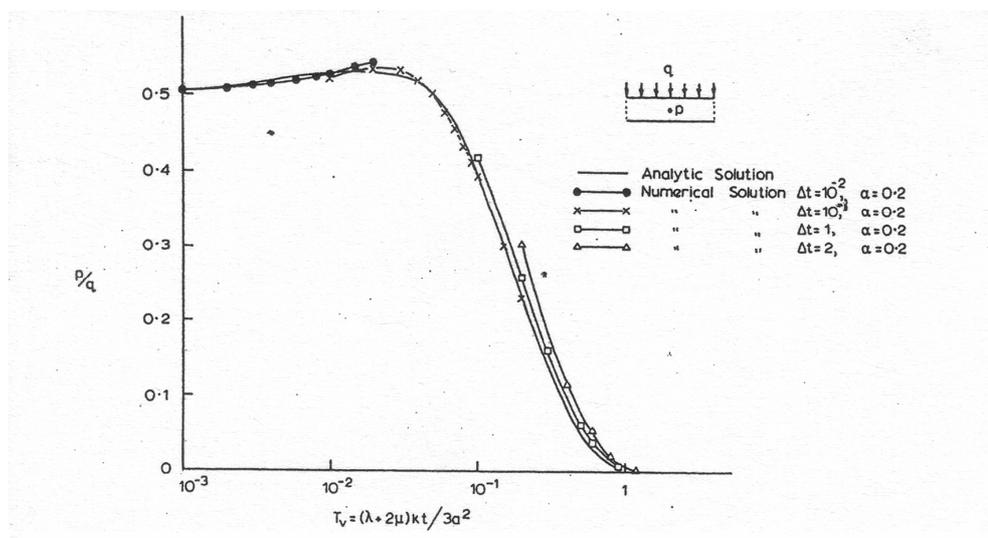


Figura 3.28. Influencia del incremento de tiempo fijado (Booker y Small, 1975)

3.7. RESUMEN

En este capítulo se presenta la solución analítica desarrollada para estudiar la consolidación radial alrededor de columnas de grava bajo carga constante. La solución considera la influencia de la deformación radial y vertical de la columna, ya sea en estado elástico o elasto-plástico, y en este último caso con una ley de flujo no asociada (ángulo de dilatancia constante). Por ello, proporciona el valor de las deformaciones y tensiones en el suelo y la columna en cualquier instante.

La solución se da en términos de un exceso de presión intersticial medio en el suelo. Para el caso de columna elástica, la solución da la variación de las tensiones y deformaciones entre los estados sin drenaje y final, los cuales coinciden con la solución elástica de Balaam y Booker (1981, 1985).

En soluciones previas, la relación de tensiones columna/suelo es anormalmente elevada para el estado final. Si sólo se considera la deformación vertical elástica de la columna, ésta es igual a la respectiva relación de módulos confinados. La inclusión en el modelo de la deformación radial de la columna y sus deformaciones plásticas reduce la relación de tensiones hasta el rango habitual medido en obras reales (3-10).

Todos los resultados están dados mediante expresiones analíticas, y en ambos casos, las deformaciones elásticas y plásticas de la columna llevan a la obtención de un coeficiente de consolidación equivalente para el flujo radial, lo cual permite la

aplicación de los métodos existentes de integración de la ecuación de la consolidación. Este coeficiente de consolidación equivalente permite tener en cuenta la aceleración del proceso debido a la rigidez de la columna de grava, pero no es tan elevado como en soluciones previas, en las que no se tenía en cuenta el ensanchamiento de la columna ni sus deformaciones plásticas.

La solución desarrollada también proporciona valores razonables de la reducción de asientos lograda con el tratamiento. Estos valores son similares a los obtenidos con métodos semi-empíricos existentes (método de Priebe), que han sido utilizados con éxito durante décadas. La diferencia estriba en que la solución desarrollada permite estudiar no sólo la situación final, sino todo el proceso de consolidación, y controlar algunos parámetros, como por ejemplo la dilatancia de la grava, que no se consideran en esos métodos existentes.

También se contrastan los resultados del modelo con los ensayos de laboratorio realizados en una tesis paralela. Estos ensayos muestran un comportamiento cualitativo similar al esperado, aunque son necesarios más ensayos y una menor dispersión en los resultados, para poder contrastar con los valores numéricos.

Para lograr una visión general del problema y comparar la solución desarrollada con las existentes, en la Tabla 3.10 se muestran sus principales características. Se recuerda que el problema estudiado es una celda unidad, con la columna apoyada en un estrato firme y sobre la que se aplica una carga rígida instantánea.

En la Tabla 3.11 se detallan los diferentes parámetros y variables empleadas en cada modelo. Se comprueba que la solución desarrollada permite el control de un gran número de parámetros tanto del suelo como de la columna, mientras que en otros casos estas variables no se tienen en cuenta o se supone un valor para las mismas.

Tabla 3.10. Principales características de las diferentes soluciones

Método de cálculo		Barron	Hansbo	C.J. Leo	Edométrico / Han y Ye	Balaam y Booker	Van Impe	Priebe	Pulko y Majes	Greenwood	Guía de cimentaciones	Solución desarrollada
Configuración de las columnas	Columna aislada							2			2	
	Grupo de columnas							3				
	Malla de columnas.	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
	Celda unidad											
Tipo de cálculo	Empírico							•		•	•	
	Analítico	•	•	•	•	•	•	•	•			•
	Numérico					2						2
Objeto del análisis	Carga de rotura						2			2	2	
	Consolidación	•	•	•	•	2						•
	Asiento				•	•	•	•	•	•	•	•
Comportamiento de la columna	No influye	•	•	•								
	Edométrico				•							
	Elástico					•	3					
	Rígido-plástico						•	•				
Comportamiento del suelo	Elasto-plástico								•			•
	Edométrico	•	•	•	•							
	Elástico					•	•	•	•			•
Longitud de la columna	Elasto-plástico											
	Flotante							4				
Situaciones analizadas	Apoyada	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
	Inicial				•	•						•
	Consolidación	•	•	•	•	2						•
Profundidad estudiada	Final				•	•	•	•	•	•	•	•
	Toda	•	•	•			•		•	•	•	•
Aplicación de la carga	Rebanada				•	•		•	•			•
	Escalón	•	•	•	•	•	•	•	•			•
Tipo de carga	Rampa			•								
	Rígida	•	•	•	•	•	•	•	•			•
Considera permeabilidad	Flexible	•										
	Dren	•	•	•	2							
Drenaje radial y vertical conjuntamente	Zona remodelada	•	•	•	2							

2,3 y 4: Soluciones adicionales a la principal de ese autor

Tabla 3.11. Parámetros manejados en las diferentes soluciones

Método de cálculo		Barron	Hansbo	C.J. Leo	Edométrico / Han y Ye	Balaam y Booker	Van Impe	Priebe	Pulko y Majes	Greenwood	Guía cimentaciones	Solución desarrollada
Columna	Radio, r_c	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
	Rigidez, E_c				•	•	3	•	•			•
	Coef. Poisson, ν_c				•	•	3	•	•			•
	Densidad, γ_c								•			•
	Ángulo de rozamiento, ϕ_c						•	•	•			•
	Cohesión, c'											
	Dilatancia, ψ_c								•			•
	Permeabilidad, k_c	•	•	•	2							
Suelo	Radio, r_l	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
	Rigidez, E_s				•	•	•	•	•			•
	Coef. Poisson, ν_s				•	•	•	•	•			•
	Densidad, γ_s								•			•
	Ángulo de rozamiento, ϕ_s											
	Cohesión, c'											
	Corte sin drenaje, c_u						2			•		
	Permeabilidad, k_s	•	•	•	•	2						•
	Tensiones iniciales, k_{0s}								•			•
Remoldeo	Radio, r_{smear}	•	•	•	2							
	Permeabilidad, k_{smear}	•	•	•	2							
Carga	Valor, p_a						•	•	•			•
	Velocidad de aplicación			•								

2 y 3: Soluciones adicionales a la principal de ese autor