2. Definiciones y relaciones entre magnitudes en sistemas eléctricos de potencia desde el punto de vista de la compensación

Como ya se ha comentado, el aumento en los últimos años de cargas con control electrónico que se alimentan de la red de distribución de energía eléctrica así como un sistema de generación cada vez más distribuído y heterogéneo, han originado un notable cambio de las características eléctricas de las redes y de las instalaciones industriales. Esa diferencia se evidencia claramente al analizar las formas de onda de tensión y corriente en cualquier punto de la red, cada vez mas alejadas de las sinusoidales puras, debido a la existencia de perturbaciones como armónicos, huecos de tensión o desequilibrios de fases.

Por tanto, para analizar y modelar un sistema eléctrico de potencia en la situación actual es imprescindible generalizar las definiciones y relaciones entre las magnitudes eléctricas considerando que las señales, tanto tensiones como corrientes, pueden ser no sinusoidales y, en el caso de sistemas polifásicos, presentar cierto desequilibrio. Ya no sirve únicamente la definición de potencia reactiva tradicional sino que hay que ampliar el concepto en un sentido más genérico de potencia no útil mediante la definición de la potencia o corriente no activa. Este término comprende, además de la reactiva, las componentes de corriente o potencia debidas a la distorsión de las formas de onda, la componente de continua o el desequilibrio de fases. La generalización de la teoría, en el sentido expresado, para el caso de sistemas monofásicos y polifásicos no sinusoidales y desequilibrados debe de permanecer válida para el caso particular de red equilibrada y con señales sinusoidales tanto monofásica como polifásica.

A pesar de que ya a principios del siglo XX se presentó una definición generalizada de potencia no activa para el caso de regímenes no sinusoidales, actualmente no se ha alcanzado un consenso universal sobre la misma. Además de otros factores, creemos que una de las razones que complica el planteamiento está en el hecho de que la aproximación al concepto de potencia no activa depende del punto de vista desde el que se aborda. No es lo mismo si se trata de optimizar las infraestructuras de una compañía de distribución de energía eléctrica que si se trata de realizar medidas de magnitudes o si el objetivo es el diseño de un algoritmo de control para un compensador. Mientras que en algunos casos el dominio temporal es el marco de referencia más apropiado para establecer las definiciones, en otros puede ser el dominio frecuencial. En todo caso, el objetivo final que se pretende alcanzar condiciona la perspectiva y por lo tanto, el marco de referencia para establecer las definiciones y relaciones entre magnitudes.

Cuando se trata, como es el caso de este trabajo, de diseñar un método de control para un equipo de compensación de potencia no activa, es imprescindible disponer de unas definiciones y formulaciones precisas de todo lo relacionado con este concepto. En este capítulo se trata precisamente de presentar de forma sintética y coherente las definiciones de potencia y corriente no activa y sus relaciones con otros parámetros eléctricos, desde el punto de vista de la compensación, para sistemas desequilibrados no sinusoidales tanto monofásicos como polifásicos. Con ello se pretende establecer unas referencias precisas para el diseño de filtros activos de potencia y definir unos criterios para la determinación del nivel de eficiencia de un equipo específico que sirvan, además, para comparar el rendimiento de diferentes técnicas de compensación o topologías de FAP.

2.1. Teorías generales sobre potencia

El análisis de las señales en un sistema eléctrico de potencia en régimen no sinusoidal se puede realizar en el dominio frecuencial o en el dominio temporal que, a su vez, se puede abordar partiendo de las definiciones de las corrientes o de las potencias. Dependiendo de la perspectiva adoptada se han originado diferentes teorías que describen la interacción entre generación y consumo. A continuación se realiza una síntesis de las más relevantes describiendo las ventajas y desventajas de cada una [SVE99] [TOL00].

En 1927 Budeanu definió la potencia activa a partir de los valores eficaces de las componentes armónicas de la tensión V_i y corriente I_i y los desfases entre ellas ϕ_i:

$$P = \sum_{i=0}^{N} V_i I_i cos\phi_i \tag{2.1}$$

De un modo similar definió la *potencia reactiva* como:

$$Q = \sum_{i=0}^{N} V_i I_i sen\phi_i \tag{2.2}$$

Sin embargo, puesto que:

$$S^2 = \sum_{i=0}^{N} V_i^2 \sum_{i=0}^{N} I_i^2 \neq P^2 + Q^2 \tag{2.3}$$

Budeanu introduce el término correspondiente a la *potencia de distorsión*:

$$D^2 = S^2 - P^2 - Q^2 \tag{2.4}$$

que se debe fundamentalmente a los productos cruzados de los armónicos de tensión y corriente de diferentes órdenes, siendo su valor nulo bajo condiciones sinusoidales. Como principales objeciones a esta teoría se plantean la falta de significado físico y la imposibilidad de desarrollar un compensador en base a ella [DEP94A]

Fryze en 1931 establece el concepto de potencia *no activa* en sistemas monofásicos mediante la descomposición de la corriente de carga en dos componentes ortogonales, la corriente activa $i_{act}(t)$ y la corriente no activa $i_{ex}(t)$. Como resultado se define la relación entre potencias:

$$S^2 = P^2 + Q^2 \tag{2.5}$$

Donde la potencia *ficticia* Q corresponde, debido a la ortogonalidad de las corrientes definidas, a la potencia asociada a la corriente *no activa*. Esta descripción de la potencia aparente mediante dos términos simplifica la definición de Budeanu. El principal inconveniente de esta descripción es que no se puede asegurar que la suma de potencias ficticias en un nudo sea cero, lo que complica los cálculos de flujo de potencia.

En 1950 Buchholz extiende la definición de Fryze a un sistema polifásico con M fases introduciendo los términos colectivos de las magnitudes instantáneas y eficaces:

$$\begin{aligned} i_\Sigma(t) &= \sqrt{\sum_{l=1}^{M} i_l^2(t)}, \qquad \| i_\Sigma(t) \|^2 = \sum_{l=1}^{M} \| i_l^2(t) \| \\ v_\Sigma(t) &= \sqrt{\sum_{l=1}^{M} v_l^2(t)}, \qquad \| v_\Sigma(t) \|^2 = \sum_{l=1}^{M} \| v_l^2(t) \| \end{aligned} \tag{2.6}$$

Depenbrock completa en 1962 el trabajo de Buccholz introduciendo los conceptos de potencia colectiva instantánea $p_{\Sigma}(t)$, conductancia instantánea colectiva $G_p(t)$, corriente de potencia colectiva instantánea $i_{\Sigma p}(t)$, corrientes de potencia de fase instantáneas $i_{lp}(t)$ y el tratamiento individualizado mediante *porciones* de ciertas perturbaciones o grupos de éstas [DEP93].

Shepherd y Zakikhani (1972) realizan una descomposición de las corrientes de carga en el dominio de la frecuencia estableciendo que los conjuntos de armónicos *comunes* en los espectros de la corriente y de la tensión permiten determinar la componente activa y no activa respectivamente. Pudiendo esta última ser compensada mediante elementos pasivos.

Bajo esta descomposición de corrientes, la potencia aparente se puede dividir en:

$$S^2 = S_R^2 + S_X^2 + S_D^2 \tag{2.7}$$

correspondiendo S_D a la potencia asociada a los armónicos no comunes y que, por tanto, no puede ser compensada con elementos pasivos.

Kusters y Moore en 1979 adoptan la definición de Fryze de corriente activa, sin embargo, descomponen la corriente *no activa* en dos componentes, una componente reactiva inductiva o capacitiva, $i_{ql}(t)$ o $i_{qc}(t)$ respectivamente, y una componente reactiva residual $i_{qr}(t)$ definida como diferencia de la anterior con la corriente de carga y la corriente activa:

$$\begin{cases} i_{qlr(t)} = i(t) - i_a(t) - i_{ql}(t), \\ i_{qcr(t)} = i(t) - i_a(t) - i_{qc}(t) \end{cases} \tag{2.8}$$

En este caso, la descomposición de la potencia aparente se realiza de la forma:

$$S^2 = P^2 + Q^2 + Q_r^2 \tag{2.9}$$

Donde Q_r corresponde a la potencia reactiva residual, que no puede ser compensada mediante elementos puramente inductivos o capacitivos.

Akagi, Kanazawa y Nabae introduce en 1983 [AKA84], tras la transformación de las corrientes y tensiones de línea al plano complejo estacionario, la potencia activa de Park como:

$$p_p(t) = \mathbf{u}_{\alpha}(t) \cdot \mathbf{i}_{\alpha}(t) + \mathbf{u}_{\beta}(t) \cdot \mathbf{i}_{\beta}(t) \tag{2.10}$$

y la potencia asociada a las componentes de secuencia homopolar como:

$$p_0(t) = \mathbf{u}_0(t) \cdot \mathbf{i}_0(t) \tag{2.11}$$

También define la potencia reactiva instantánea como:

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{u}_\alpha \times \mathbf{i}_\beta + \mathbf{u}_\beta \times \mathbf{i}_\alpha \tag{2.12}$$

Que es perpendicular al plano $\alpha - \beta$ y no presenta dimensión de W, VA o VAR. Cuando las tensiones son simétricas, la norma de q coincide con la potencia no activa trifásica, bajo otras condiciones un compensador basado en esta teoría operaría de forma incorrecta.

En 1984 Rossetto y Tenti llegan a una definición equivalente a la de Depenbrock para la corriente activa de la carga en el caso de emplear la conductancia de la carga instantánea. El planteamiento en el que se basan es la búsqueda de la corriente de norma mínima que suministra la misma potencia que consume la carga mediante el método de los Multiplicadores de Lagrange.

Czarnecki en 1985 realiza una descomposición en el dominio frecuencial de acuerdo a las definiciones instantáneas de Fryze. Bajo este planteamento propone la descomposición de la corriente no activa de Fryze en dos corrientes, la corriente de dispersión $i_s(t)$ y la corriente reactiva $i_r(t)$. La corriente de dispersión se define como:

$$i_s(t) = \sqrt{2}Re\sum_i \left(G_i - Ge\right) V_i e^{ji\omega_1 t} \tag{2.13}$$

Siendo G_i la componente real de la conductancia compleja equivalente de la carga a la frecuencia del armónico de orden i, G_e la conductancia equivalente de la carga promedio según la definición de Fryze, V_i la amplitud del armónico de tensión de orden i y ω_1 la pulsación angular a la frecuencia fundamental de la red. La corriente reactiva puede expresarse como:

$$i_s(t) = \sqrt{2}Re\sum_i jB_i V_i e^{ji\omega_1 t} \tag{2.14}$$

Donde B_i corresponde a la componente imaginaria de la conductancia compleja de la carga para la frecuencia de la componente armónica de la tensión i. Basándose en la ortogonalidad de estas corrientes se puede obtener su valor eficaz y a partir de él la relación de potencias en esta teoría:

$$S^2 = P^2 + D_s^2 + Q_r^2 \tag{2.15}$$

Siendo Q_r la potencia que puede ser compensada mediante elementos pasivos paralelo y D_s la potencia que debe ser compensada mediante un filtro activo

La determinación de la corriente activa y de las componentes no activas de la corriente se complica si se incluye en el análisis la posibilidad de señales no peródicas. Bajo esta condición Enslin y Van Wyk (1988) generalizan las ecuaciones de Fryze para el caso de formas de onda no periódicas mediante la utilización de técnicas de correlación. Definiendo en el dominio del tiempo la función de autocorrelación:

$$R_{uu}(\tau) = \frac{1}{dT}\int_0^{dT} u(t)u(t-\tau)dt \tag{2.16}$$

Se pueden obtener los valores eficaces de la tensión y la corriente como:

$$V = \sqrt{R_{vv}(0)} \qquad I = \sqrt{R_{ii}(0)} \tag{2.17}$$

El cálculo de la potencia activa consumida por la carga se realiza empleando la función de correlación:

$$R_{vi}(\tau) = \frac{1}{dT}\int_0^{dT} v(t)i(t-\tau)dt \tag{2.18}$$

Resultando $P = R_{vi}(0)$ y pudiendo definir, por tanto, la conductancia equivalente de la carga como:

$$G = \frac{P}{V^2} \tag{2.19}$$

Empleando este valor, y del mismo modo que la definición de Fryze, se puede calcular la corriente no activa de la carga y, mediante la relación de ortogonalidad, plantear las potencias de la carga:

$$S^2 = P^2 + Q^2 + D^2 \tag{2.20}$$

Siendo Q la potencia asociada a la corriente reactiva y D a la corriente *deactiva.*

También Tolbert, Xu, Chen , Peng y Chiason [TOL03] [XU03] proponen el análisis en régimen no sinusoidal y con señales no periódicas mediante la utilización de la definición de Fryze y variando el período de integración T_c en el cálculo de la potencia activa de la carga y los valores eficaces de la tensión. Así, si se define el operador promedio sobre una señal $u(t)$ como:

$$< u(t) >_0 (t) = \frac{1}{T_c} \int_{t-T_c}^{t} u(\tau) d\tau \tag{2.21}$$

Válida en el intervalo de tiempo $[t - T_c, t]$, se puede definir la corriente activa como:

$$\mathbf{i}_p(t) = \frac{< p(t) >_0}{< \mathbf{v}^\top(t)\mathbf{v}(t) >_0} \tag{2.22}$$

Si $T_c = \frac{2\pi}{\omega_1}$ la definición de $i_p(t)$ corresponderá a la corriente activa de Fryze. Con $T_c = 0$ se tratará de la definición correspondiente a la conductancia instantánea de la carga de Depenbrock.

El propio Depenbrock propone modificar la conductancia instantánea equivalente de la carga introduciendo variaciones de ésta que se calculan sobre cortos períodos de tiempo. Esta modificación permite el tratamiento de transitorios [DEP94] [DEP98A].

2.2. Consideraciones sobre las teorías de potencia en relación a la compensación

Como ya se ha comentado, a pesar de los esfuerzos realizados por unificar las teorías de análisis de sistemas eléctricos de potencia en régimen no sinusoidal, actualmente no se ha alcanzado un acuerdo general.

En particular, en el campo de la compensación se emplean multitud de variantes dependiendo de los objetivos de la compensación. Desde el punto de vista de la compañías eléctricas, los objetivos principales de la compensación deben ser aumentar la calidad de la tensión de la red y reducir las pérdidas en la línea mediante la disminución de las corrientes en la línea [DEP98]. Desde el punto de vista del consumidor, el objetivo es que la carga presente un comportamiento puramente resistivo.

Independientemente del objetivo de la compensación, el equipo de filtrado activo debe generar una corriente instantánea de compensación de acuerdo al criterio seleccionado. Además, el equipo de compensación debe responder de la forma más rápida posible ante situaciones transitorias en la red manteniendo los objetivos de la compensación.

En consecuencia, es necesario adoptar una definición de potencia capaz de determinar los valores instantáneos de la corriente de compensación. Esta condición hace poco viables a los métodos que realizan el cálculo de la corriente de compensación en el dominio frecuencial.

Por otro lado, los métodos basados en la determinación de la corriente activa de forma instantánea, dependiendo de las características de la conductancia equivalente de la carga determinada, presentan el inconveniente de una lenta respuesta ante transitorios en las condiciones de operación, como es el caso de la teoría de Fryze y Buchholz, o la imposibilidad de compensar la potencia reactiva de una carga reactiva monofásica, en el caso de la conductancia instantánea de Depebrock o de la definición de Rossetto y Tenti.

2.3. Definiciones y relaciones entre magnitudes eléctricas en régimen no sinusoidal

Las teorías que tratan sobre las relaciones de potencia en régimen no sinusoidal en el dominio del tiempo y las que lo hacen en el dominio frecuencial presentan ventajas y limitaciones dependiendo del objetivo de su aplicación.

En el caso de la compensación es interesante unificar la representación de las señales estableciendo relaciones entre ambos dominios, lo que facilita el diseño y evaluación de los filtros activos de potencia. En este apartado se pretenden exponer las definiciones y relaciones entre magnitudes eléctricas en sistemas no sinusoidales desde esta perspectiva [LEV03].

2.3.1. Corrientes instantáneas en un sistema polifásico

En la figura 2.1 se representa un esquema genérico de un sistema eléctrico de potencia con n fases y $(n+1)$ conductores. Uno de los conductores es el que se toma como referencia (neutro) de los n restantes. El sistema se puede definir mediante los vectores n dimensionales $\mathbf{v}(t)$ e $\mathbf{i}(t)$.

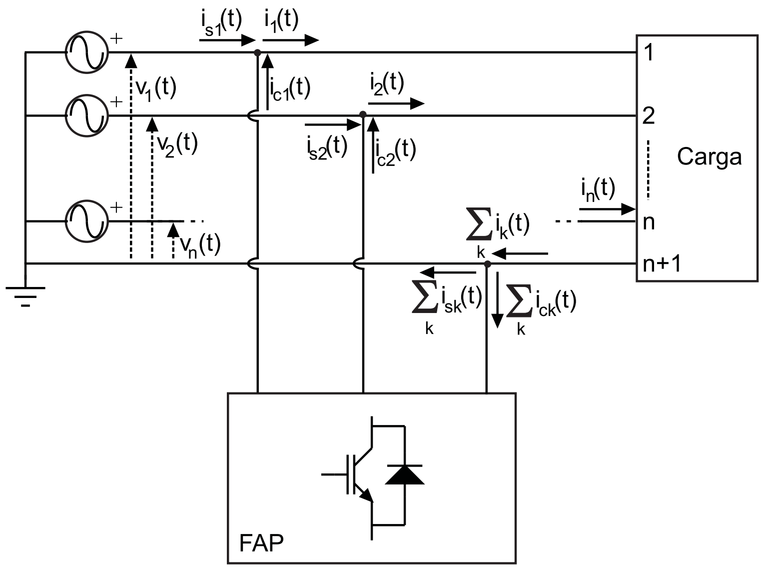

Figura 2.1: Esquema general de un sistema eléctrico con compensador activo

Todas las formas de onda contenidas en los vectores de tensión y corriente pueden considerarse periódicas con una frecuencia fundamental f_1, correspondiente a la pulsación angular ω_1. Se consideran señales periódicas de potencia finita [LEV03] y se asume por tanto que:

$$\frac{1}{T_1}\int_0^{T_1} \mathbf{x}^\top(t)\mathbf{x}(t)dt < \infty \tag{2.23}$$

Siendo $T_1 = \frac{1}{f_1}$ y designando la operación de transposición mediante $\top$. Bajo esta condición, los vectores de tensiones y corrientes pueden ser representados mediante series de Fourier:

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{X}_k e^{jk\omega_1 t} \tag{2.24}$$

Donde j es la unidad imaginaria, k es el orden del armónico considerado y $\mathbf{X}_k$ es el vector formado por los coeficientes de Fourier para la componente armónicas de orden k de cada una de las n fases. El vector de los coeficientes de Fourier se define de la forma:

$$\mathbf{X}_k = \frac{1}{T_1}\int_0^{T_1} \mathbf{x}(t)e^{-jk\omega_1 t} =< \mathbf{x}(t) >_k \tag{2.25}$$

A partir de la expresión de la norma de un vector:

$$\| \mathbf{x}(t) \| = \sqrt{\mathbf{x}^\top(t) \cdot \mathbf{x}(t)} \tag{2.26}$$

se pueden definir la tensión y corriente eficaz en la carga en función de sus componentes espectrales respectivamente como:

$$V = \sqrt{<\| \mathbf{v}(t) \|^2>_0} \qquad I = \sqrt{<\| \mathbf{i}(t) \|^2>_0} \tag{2.27}$$

La potencia instantánea suministrada a la carga de la figura 2.1 se define como:

$$p(t) = \mathbf{v}^\top(t) \cdot \mathbf{i}(t) \tag{2.28}$$

Desde el punto de vista instantáneo se define la corriente activa $\mathbf{i}_a(t)$ como el vector de corriente de norma mínima que suministra la misma potencia instantánea $p(t)$ que la corriente de carga $\mathbf{i}(t)$ [DEP93] [ROS94]:

$$\mathbf{i}_a(t) = \frac{\mathbf{i}^\top(t)\mathbf{v}(t)}{\| \mathbf{v}(t) \|^2}\mathbf{v}(t) = \frac{p(t)}{\| \mathbf{v}(t) \|^2}\mathbf{v}(t) = g(t)\mathbf{v}(t) \tag{2.29}$$

Donde $g(t)$ es la conductancia instantánea equivalente que consume la misma potencia instantánea que la carga con el vector de corriente de norma mínima.

Partiendo de la definición 2.29 se puede establecer la corriente no-activa instantánea de la carga:

$$\mathbf{i}_n(t) = \mathbf{i}(t) - \mathbf{i}_a(t) \tag{2.30}$$

Cumpliéndose, por tanto la condición de ortogonalidad:

$$\mathbf{i}_a^\top(t) \cdot \mathbf{i}_n(t) = 0 \tag{2.31}$$

Que implica la relación entre normas:

$$\| \mathbf{i}(t) \|^2 = \| \mathbf{i}_a(t) \|^2 + \| \mathbf{i}_n(t) \|^2 \tag{2.32}$$

En el caso de un sistema monofásico (n=1) la corriente no activa es nula al ser $\mathbf{i}_a(t) = \mathbf{i}(t)$ y verificarse la ecuación 2.29.

Considerando los valores promediados de las tensiones y las corrientes, la corriente activa $\mathbf{i}_{act}(t)$ se define como la mínima corriente eficaz que suministra la misma potencia media $P_0 =< p(t) >_0$ que la corriente de la carga $\mathbf{i}(t)$:

$$\mathbf{i}_{act}(t) = \frac{< p(t) >_0}{V^2}\mathbf{v}(t) = \frac{P_0}{V^2}\mathbf{v}(t) = G\mathbf{v}(t) \tag{2.33}$$

Siendo G el valor promedio de la conductancia equivalente $g(t)$ durante un período a la frecuencia fundamental. Considerando esta definición de corriente activa en aplicaciones de compensación, un compensador óptimo lograría que el consumo de corriente de las líneas fuera puramente resistivo.

Según la definición de corriente activa que se adopte, $\mathbf{i}_a(t)$ o $\mathbf{i}_{act}(t)$, las magnitudes derivadas serán diferentes. En el caso de la definición sobre valores promediados, la corriente no activa, denominada corriente de exceso [LEV03], se define como:

$$\mathbf{i}_{ex}(t) = \mathbf{i}(t) - \mathbf{i}_{act}(t) \tag{2.34}$$

La relación entre las corrientes activas y no activas de las definiciones con magnitudes instantáneas y promediadas se puede establecer a través de la corriente denominada longitudinal o temporal:

$$\mathbf{i}_l(t) = \mathbf{i}_a(t) - \mathbf{i}_{act}(t) = \mathbf{i}_{ex} - \mathbf{i}_n \tag{2.35}$$

La definición de corriente $\mathbf{i}_a(t)$ es especialmente indicada en el diseño de algoritmos de control que no involucren elementos almacenadores de energía, mientras que $\mathbf{i}_{act}(t)$ es apropiada en el desarrollo de compensadores que disponen de esos dispositivos.

Las relaciones geométricas entre las corrientes activas y no activas definidas se representan en la figura 2.2.

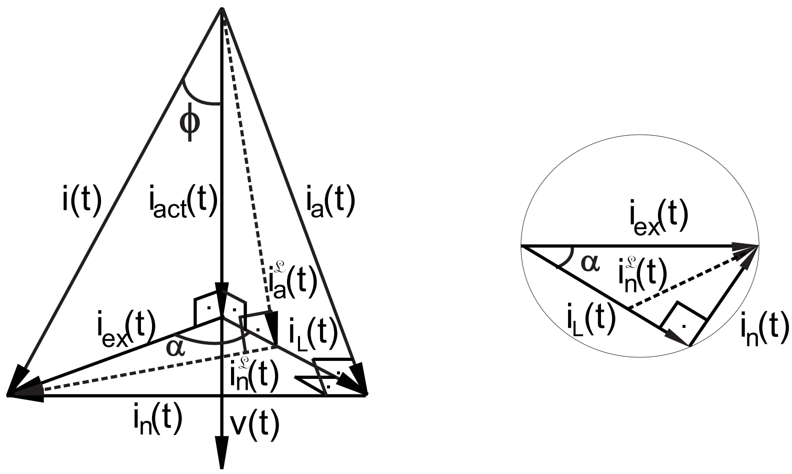

Figura 2.2: Relaciones geométricas entre corrientes

Se puede observar como la corriente de carga $\mathbf{i}(t)$ se puede descomponer en sus componentes ortogonales $\mathbf{i}_{act}(t)$ e $\mathbf{i}_{ex}(t)$ o bien, basándose en valores instantáneos, en sus componentes ortogonales $\mathbf{i}_a(t)$ e $\mathbf{i}_n(t)$. Por otra parte, la corriente en exceso $\mathbf{i}_{ex}(t)$ viene dada por la suma de sus componentes ortogonales transversal $\mathbf{i}_n(t)$ y longitudinal $\mathbf{i}_l(t)$.

Las definiciones y relaciones establecidas desde el punto de vista de los valores instantáneos y promediados de las señales puede abordarse desde un enfoque más general considerando la descomposición espectral de la potencia instantánea. Ésta puede expresarse como:

$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} P_k e^{jk\omega_1 t} \tag{2.36}$$

Donde $P_k =< p(t) >_k$ es la amplitud de la componente armónica de orden k del desarrollo en serie de Fourier de la potencia instantánea $p(t)$.

Si se define $\mathbf{i}_a^{\mathcal{L}}(t)$ como el vector de norma mínima que suministra la misma potencia armónica $< p(t) >_{\mathcal{L}}$ que la corriente original de la carga para un conjunto de índices de armónicos suma de todas las componentes espectrales de 0 a N, $\mathcal{L} = \{k : 0 \leq k \leq N\}$.

La potencia activa para el conjunto de armónicos $\mathcal{L}$ será:

$$p^{\mathcal{L}}(t) = \sum_{k=0}^{N} < p(t) >_k e^{jk\omega_1 t} \tag{2.37}$$

De acuerdo a la definición de $\mathbf{i}_a^{\mathcal{L}}(t)$, la conductacia equivalente para el conjunto de armónicos $\mathcal{L}$ se puede expresar como:

$$g^{\mathcal{L}}(t) = \frac{p^{\mathcal{L}}(t)}{\sum_{k=0}^{N} <\| \mathbf{v}(t) \|^2>_k e^{jk\omega_1 t}} \tag{2.38}$$

Por lo tanto, $\mathbf{i}_a^{\mathcal{L}}(t)$ se puede expresar como:

$$\mathbf{i}_a^{\mathcal{L}}(t) = \frac{p^{\mathcal{L}}(t)}{\sum_{k=0}^{N} <\| \mathbf{v}(t) \|^2>_k e^{jk\omega_1 t}} \mathbf{v}(t) = g^{\mathcal{L}}(t)\mathbf{v}(t) \tag{2.39}$$

Se puede comprobar que, si ese conjunto únicamente corresponde a la componente de continua ($N = 0$) entonces el compensador óptimo reduce la corriente de la carga $\mathbf{i}(t)$ en el mismo sentido que $\mathbf{i}_{act}(t)$. Por otra parte, cuando el conjunto $\mathcal{L}$ consiste en todos los armónicos ($N = \infty$), entonces el compensador óptimo reduce la corriente de la carga a $\mathbf{i}_a(t)$.

La corriente no-activa para este conjunto de armónicos viene definida por:

$$\mathbf{i}_n^{\mathcal{L}}(t) = \mathbf{i}(t) - \mathbf{i}_a^{\mathcal{L}}(t) \tag{2.40}$$

Que de acuerdo a la condición de ortogonalidad puede reescribirse como:

$$\| \mathbf{i}_a^{\mathcal{L}}(t) \|^2 + \| \mathbf{i}_n^{\mathcal{L}}(t) \|^2 = \| \mathbf{i}(t) \|^2 \tag{2.41}$$

En la figura 2.2 se muestra la relación geométrica entre estas corrientes.

2.3.2. Definiciones de potencia

Algunas teorías consideran la noción de *potencia reactiva instantánea*, definida como:

$$q(t) = \sqrt{s^2(t) - p^2(t)}, \quad q \leq 0 \tag{2.42}$$

donde $p(t)$ es la potencia instantánea y $s(t)$ vendría dada por :

$$s(t) = \sqrt{\mathbf{v}^{\top}(t) \cdot \mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{i}^{\top}(t) \cdot \mathbf{i}(t)} \tag{2.43}$$

y se denomina potencia aparente instantánea.

La potencia reactiva instantánea es nula en sistemas monofásicos y en sistemas polifásicos puede ser compensada sin elementos almacenadores de energía.

La potencia reactiva instantánea puede también expresarse como:

$$q(t) = \parallel \mathbf{v}(t) \parallel \parallel \mathbf{i}_n(t) \parallel = \sqrt{\mathbf{v}^{\top}(t) \cdot \mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{i}_n^{\top}(t) \cdot \mathbf{i}_n(t)} \tag{2.44}$$

Tomando como referencia las definiciones sobre magnitudes promediadas, la potencia activa P_0 viene dada por:

$$P_0 = < p(t) >_0 = VI_{act} \tag{2.45}$$

Se define la potencia no activa como :

$$Q_{ex} = VI_{ex} = VIsen\phi \tag{2.46}$$

Donde ϕ es el ángulo formado por el vector corriente de carga $\mathbf{i}(t)$ con el vector tensiones de red $\mathbf{v}(t)$ (figura 2.2). La cual es una medida de las pérdidas excesivas en la línea causadas por la corriente en exceso I_{ex}

En estas condiciones, el factor de potencia estará definido por:

$$FP = \frac{P_0}{VI} \tag{2.47}$$

La descomposición ortogonal de corrientes lleva a la expresión:

$$I_{ex}^2 = I^2 - I_{act}^2 \quad \rightarrow \quad Q_{ex}^2 = V^2 I^2 - P_0^2 \tag{2.48}$$

Hay que tener en cuenta que P_0, I^2, I_{act}^2 y I_{ex}^2 se pueden obtener mediante suma de todas las componentes armónicas en todas las fases mientras que Q_{ex} y VI no tienen esa propiedad.

Como se muestra en la figura 2.2 la corriente I_{ex} puede descomponerse en dos componentes ortogonales I_n e I_l. Esto permite a su vez descomponer la componente de potencia no-activa como:

$$Q_n = VI_n \quad Q_l = VI_l \quad Q_{ex}^2 = Q_l^2 + Q_n^2 \tag{2.49}$$

que, por analogía con la descomposición de la corriente en tres elementos, se puede expresar como:

$$V^2 I^2 = P_0^2 + Q_n^2 + Q_l^2 \tag{2.50}$$

Donde Q_n corresponde a la potencia no activa circulante o transversal, que puede ser compensada sin necesidad de elementos almacenadores de energía, y Q_l es la componente no activa temporal o longitudinal que para su compensación requiere este tipo de elementos.

La componente circulante Q_n de la potencia no activa es una alternativa invariante en el tiempo a la potencia instantánea reactiva $q(t)$ en el sentido de $Q_n = 0$ si y solo si $q(t) = 0$. En otro caso no se puede esperar una relación sencilla entre las dos medidas de la potencia no activa puesto que $q(t)$ se determina por el producto de la corriente no-activa $i_n(t)$ con la tensión $v(t)$ en el dominio temporal mientras que Q_n es el producto de los valores eficaces de esas señales. Desde el punto de vista de la compensación Q_n tiene la ventaja de ser más indicativa del nivel de eficiencia alcanzado, verificándose que $\frac{<q(t)>_0}{Q_x} \leq 1$ es cercano a la unidad.

En la tabla 2.1 se presenta un resumen de las definiciones y relaciones entre las corrientes y las potencias según se establezca la conductancia equivalente empleando valores instantáneos de tensiones y corrientes $g(t)$, valores promediados G o espectrales $g^{\mathcal{L}}(t)$.

	CORRIENTE		POTENCIA	
Magnitudes	**Activa**	**No-activa**	**Activa**	**No-activa**
Instantáneas	$\frac{p(t)}{\Vert \mathbf{v}(t) \Vert^2}\mathbf{v}(t)$	$\mathbf{i}_n(t) = \mathbf{i}(t) - \mathbf{i}_a(t)$	$p(t) = \mathbf{v}^\top(t) \cdot \mathbf{i}(t)$	$q(t) = \sqrt{s^2(t) - p^2(t)}$
Promediadas	$G\mathbf{v}(t)$	$\mathbf{i}_{ex}(t) = \mathbf{i}(t) - \mathbf{i}_{act}(t)$	$P_0 =< p(t) >_0$	$Q_{ex} = VI_{ex}$
Unificadas	$\mathbf{i}_a^{\mathcal{L}}(t)$	$\mathbf{i}_{ex}(t) = \mathbf{i}_l(t) + \mathbf{i}_n(t)$	$p^{\mathcal{L}}(t)$	$Q_{ex}^2 = Q_l^2 + Q_n^2$

Tabla 2.1: Resumen de definiciones y relaciones de corrientes y potencias

2.3.3. Medida de la eficiencia de un compensador

La eficiencia de un compensador va a depender de las magnitudes que se consideren para su evaluación. Se puede medir su eficiencia como la habilidad para eliminar la componente $\mathbf{i}_{ex}(t)$. Entonces, atendiendo al esquema que se presenta en la figura 2.1, donde $\mathbf{i}_s(t)$ es el vector correspondiente a las corrientes de línea e $\mathbf{i}_c(t)$ es el vector que contiene las corrientes de compensación, se verifica que $\mathbf{i}_s(t) = \mathbf{i}_c(t) + \mathbf{i}(t)$. Entonces la eficiencia puede definirse como:

$$\eta_I = \frac{I^2 - I_s^2}{I_{ex}^2} \tag{2.51}$$

Un compensador ideal, en términos de valores eficaces, es capaz de cancelar toda la corriente no activa, es decir :

$$\mathbf{i}_s(t) = \mathbf{i}_{act}(t) \quad \rightarrow \quad I^2 - I_s^2 = I_{ex}^2 \tag{2.52}$$

y por lo tanto $\eta_I = 1$.

En el caso de un compensador instantáneo se efectúa la siguiente operación :

$$\mathbf{i}_s(t) = \mathbf{i}_a(t) \tag{2.53}$$

y por tanto su eficiencia vendrá dada por :

$$\eta_I = \frac{I_n^2}{I_{ex}^2} = \frac{Q_n^2}{Q_{ex}^2} \tag{2.54}$$

Considerando un compensador según las definiciones unificadas, un compensador ideal:

$$\mathbf{i}_s(t) = \mathbf{i}_a^{\mathcal{L}}(t) \tag{2.55}$$

y por tanto su eficiencia:

$$\eta_I = \frac{I_n^{\mathcal{L}\in}}{I_{ex}^2} = \frac{Q_n^{\mathcal{L}\in}}{Q_{ex}^2} \tag{2.56}$$

Se puede definir también el rendimiento del compensador en la mejora del factor de potencia del sistema, útil para situaciones no ideales (reales), mediante la expresión:

$$\eta_{FP} = \frac{FP_s - FP}{1 - FP} \tag{2.57}$$

Donde FP_s es el factor de potencia de la instalación medido en el punto de conexión.

Mediante la medida de η_I y η_{FP} se puede comparar el comportamiento de diferentes técnicas de compensación en el sentido de su capacidad para reducir la corriente en exceso y minimizar las pérdidas en las líneas.

2.4. Aplicación de las definiciones y relaciones entre magnitudes a un sistema trifásico a tres hilos con señales periódicas

En el caso de un sistema trifásico a tres hilos en estado estacionario con señales de tensión y corriente de período $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$, estas señales pueden representarse según las expresiones:

$$v_l(t) = \sum_{k=1}^{M_l^v} V_l^k cos\left(k\omega_1 t + \phi_l^k\right) \tag{2.58}$$

$$i_l(t) = \sum_{k=1}^{M_l^i} I_l^k cos\left(k\omega_1 t + \theta_l^k\right) \tag{2.59}$$

Donde M_l^v es el orden armónico de la tensión en la fase l, V_l^k es la amplitud del armónico de tensión de orden k en la fase l, ϕ_l^k es del desfase relativo del armónico de tensión de orden k en la fase l, M_l^i es el orden armónico de la corriente en la línea l, I_l^k es la amplitud del armónico de corriente de orden k en la fase l y θ_l^k es del desfase relativo del armónico de corriente de orden k en la fase l.

La potencia instantánea consumida por la carga será igual a:

$$p(t) = \mathbf{v}\top(t) \cdot \mathbf{i}(t) = \sum_{l=1}^{3} v_l(t) i_l(t) = \sum_{l=1}^{3} p_l(t) \tag{2.60}$$

Donde $p_l(t)$ corresponde a la potencia instantánea suministrada por la fase l, la cual puede expresarse de la forma:

$$p_l(t) = \sum_{k=1}^{M_l^v} V_l^k cos\left(k\omega_1 t + \phi_l^k\right) \sum_{k=1}^{M_l^i} I_l^k cos\left(k\omega_1 t + \theta_l^k\right) \tag{2.61}$$

La potencia promedio suministrada a la carga puede obtenerse como:

$$P_0 = \sum_{l=1}^{3} < p_l(t) >_0 = \sum_{l=1}^{3} \sum_{k=1}^{m_l} V_l^k I_l^k cos\left(\theta_l^k - \phi_l^k\right) \tag{2.62}$$

Donde $m_l = min\{M_l^v, M_l^i\}$.

El valor instantáneo de la norma al cuadrado del vector formado por las tensiones $\| \mathbf{v}(t) \|^2$ para estas señales tendrá la forma:

$$\| \mathbf{v}(t) \|^2 = \mathbf{v}\top(t)\mathbf{v}(t) = \sum_{l=1}^{3} v_l^2(t) = \sum_{l=1}^{3} \left(\sum_{k=1}^{M_l^v} V_l^k cos\left(k\omega_1 t + \phi_l^k\right) \right)^2 \tag{2.63}$$

En el caso del valor eficaz de la tensión al cuadrado, sobre las señales que se ajustan a la ecuación 2.58, se tendrá:

$$V^2 = <\| \mathbf{v}(t) \|^2>_0 = < \mathbf{v}\top(t)\mathbf{v}(t) >_0 = < \sum_{l=1}^{3} v_l^2(t) >_0 = \sum_{l=1}^{3} \sum_{k=1}^{M_l^v} \left(V_l^k\right)^2 \tag{2.64}$$

Sobre estas expresiones, y antes de realizar el cálculo de la corriente activa de la carga, es necesario decidir el tipo de compensador que va a realizarse. Si el objetivo de la compensación es $\eta_I = 100\,\%$, el compensador ideal instantáneo, a la vista de la ecuación 2.54, sólo sería capaz de conseguir esta eficiencia si el valor eficaz de la corriente no activa I_n fuera igual a la corriente de exceso I_{ex}, lo cual solo sucederá si la carga verifica $I_l = 0$. En otros casos, la eficiencia del compensador siempre será menor que $100\,\%$.

Por lo tanto, el cálculo de la corriente activa se realizará empleando magnitudes promediadas. En estas condiciones, la conductancia equivalente de la carga vendrá expresada por:

$$G = \frac{P_0}{V^2} = \frac{\sum_{l=1}^{3} \sum_{k=1}^{m_l} V_l^k I_l^k cos\left(\theta_l^k - \phi_l^k\right)}{\sum_{l=1}^{3} \sum_{k=1}^{M_l^v} \left(V_l^k\right)^2} \tag{2.65}$$

En consecuencia, y teniendo en cuenta la ecuación 2.33, la corriente activa de la carga en una de las líneas puede expresarse según la relación:

$$i_{act,l}(t) = Gv_l(t) = \frac{\sum_{l=1}^{3} \sum_{k=1}^{m_l} V_l^k I_l^k cos\left(\theta_l^k - \phi_l^k\right)}{\sum_{l=1}^{3} \sum_{k=1}^{M_l^v} \left(V_l^k\right)^2} \sum_{k=1}^{M_l^v} V_l^k cos\left(k\omega_1 t + \phi_l^k\right) \tag{2.66}$$

Por tanto, el compensador diseñado con el objetivo $\eta_I = 100\,\%$ deberá inyectar la corriente:

$$i_{c,l}(t) = i_{ex,l}(t) = i_l(t) - i_{act,l}(t) \tag{2.67}$$