

**Modelización numérica del comportamiento  
constitutivo del daño local y global  
y su correlación con la evolución de las frecuencias  
naturales en estructuras de hormigón reforzado**

**Tesis Doctoral**

**Jairo Andrés Paredes López**

**Directores:**

**Sergio Oller Martínez**

**Alex H. Barbat Barbat**

**Barcelona, Julio de 2013**

A row of wind turbines in a field under a clear blue sky. The turbines are white with three blades each, and they are arranged in a line that recedes into the distance. The sky is a uniform light blue, and the ground is a mix of green and brown, suggesting a rural or coastal area.

**Modelización numérica del comportamiento  
constitutivo del daño local y global y su correlación con  
la evolución de las frecuencias naturales en estructuras  
de hormigón reforzado**

**Jairo Andrés Paredes López**  
Profesor Universidad Nacional de Colombia

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CATALUÑA  
BARCELONA TECH

Directores:

Sergio Oller Martínez  
Alex H. Barbat Barbat

Programa de doctorado en Análisis Estructural

Departamento de Resistencia de Materiales y Estructuras en la Ingeniería  
RMEE

Barcelona, Julio de 2013

Tesis presentada como parte de los requisitos para optar al grado de doctor  
en Análisis Estructural



---

## RESUMEN

Esta tesis surge de la necesidad de establecer un método racional y práctico para identificar, a través del cambio de las frecuencias naturales, el daño en estructuras de hormigón armado. Por lo que se desarrolla un nuevo modelo constitutivo de daño diferenciado con dos variables internas de daño utilizando una única superficie de discontinuidad para tracción, compresión y cortante; asimismo, se plantea un procedimiento numérico para el cálculo de las frecuencias naturales con sus formas modales de vibración para diferentes estados de daño de estructuras de hormigón armado; se presenta una metodología para correlacionar daño global y frecuencias naturales. Esta tesis se desarrollará en el marco del análisis de estructuras y la mecánica computacional, particularmente, del análisis de materiales compuestos utilizando la teoría de mezclas serie/paralelo. Los resultados numéricos obtenidos se han comparado con resultados experimentales y numéricos obtenidos de la literatura, se ha observado buenos ajustes de los resultados.

## ABSTRACT

This thesis emerges from the need to establish a rational and smart method to estimate the global damage through changes on eigenfrequency of concrete structures. Therefore, a new constitutive damage model is developed with two scalar inner variables and using only one surface of discontinuity to traction, compression and shear. Additionally, a numerical process has been proposed to calculate eigenfrequencies and eigenvectors of concrete structure with different levels of damage. A methodology to relationship between global damage and changes on eigenfrequencies has been proposed. This thesis is based on structural analysis and computational mechanics and, particularly, on analysis of composite materials using serial/parallel mix theory. The numerical results obtained in this thesis have been compared with experimental and numerical results obtained of literature, and can be seen a good fit.

Palabras Claves: modelo constitutivo de daño; frecuencias naturales; formas modales de vibración; método de los elementos finitos; función de discontinuidad; daño de tracción; daño de compresión.

Keywords: constitutive damage model; eigenfrequencies ; eigenvectors; finite element method; discontinuity function; tensile damage; compressive damage.





---

Quiero expresar mis agradecimientos ...

A Dios por permitirme cumplir esta meta y porque siempre ha rodeado mi vida con personas maravillosas.

A Sergio Oller y Alex Barbat, mis tutores, por compartir conmigo con gran generosidad, sus conocimientos y experiencia, por guiar mis pasos en el desarrollo de esta tesis y contribuir a mi formación como investigador.

A Gilberto y Juanita, mis padres, por enseñarme a caminar, permitirme correr y porque cuando quise volar me dieron su confianza, su apoyo y su amor para ponerle alas a mis sueños; a Oscar Mauricio por su voz de aliento, a Jeannette, mi amada esposa, por su constante apoyo y comprensión; a David y Juanita, mis hijos, por el tiempo donado a esta tesis.

A Jorge Eduardo Hurtado Gómez, promotor de este proyecto, por sus consejos; a Jorge Galindo y su familia, por su amistad y valiosa ayuda; a Gonzalo Duque por su respaldo y confianza; a Pablo Vargas, Joaquín Hernández, Xavier Martínez, Mabel Marulanda, Diego Mora, Mailhyn Cafiero, Jairo Valcárcel, Miguel Mora, Cuauhtemoc Escudero, Yeudy Felipe Vargas, Manuel Caicedo, Ivo Dias, César Dávalos, Elvira Moreno, Fermín Otero, Maritzabel Molina, y Carlos Labra por su amistad y compañía en el doctorado;

A los profesores del Departamento de Ingeniería Civil de la Universidad Nacional de Colombia sede Manizales por su respaldo en este proceso.

Al Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería (CIMNE) y a la Universidad Politécnica de Cataluña FPU por la beca FPU otorgada para el desarrollo de esta investigación. Igualmente a la Universidad Nacional de Colombia Sede Manizales por la comisión de estudios. A estas instituciones le agradezco la financiación de mis estudios.

*Jairo Andrés Paredes López  
Barcelona, Junio de 2013*





---

Mi ser quiere dedicar este trabajo

*A David, Juanita y Jeannette quienes son la luz de mi vida.*

*A la memoria de Carlinita.*

*Jairo Andrés Paredes López  
Barcelona, Junio de 2013*



---

Hoja en blanco





---

## Tabla de contenido

<b>INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS .....</b>	<b>1</b>
<b>Motivación.....</b>	<b>1</b>
<b>Objetivos de la tesis .....</b>	<b>3</b>
Objetivo general .....	3
Objetivos específicos.....	3
<b>Procedimiento, innovación y alcance .....</b>	<b>3</b>
Procedimiento.....	3
Innovación .....	4
Alcance .....	4
<b>Resultados académicos proyectados y obtenidos .....</b>	<b>5</b>
<b>Contenido de la tesis .....</b>	<b>7</b>
<b>Bibliografía introducción .....</b>	<b>8</b>
<b>1. ESTADO DEL CONOCIMIENTO.....</b>	<b>11</b>
<b>1.1. Métodos de identificación del deterioro estructural basados en el análisis de vibraciones (VBM).....</b>	<b>11</b>
1.1.1. Métodos tradicionales de identificación del deterioro basados en el análisis de vibraciones .....	13
1.1.2. Métodos avanzados de identificación del deterioro basados en el análisis de vibraciones .....	17
1.1.3. Consideraciones generales de los métodos de identificación de daño estructural basados en el análisis de vibraciones .....	20
<b>1.2. Índices de daño sísmico .....</b>	<b>22</b>
<b>1.3. Cálculo de daño global a través del modelo constitutivo de daño .....</b>	<b>25</b>
<b>1.4. El hormigón armado como un material compuesto.....</b>	<b>26</b>
<b>1.5. Teoría de mezclas serie/paralelo.....</b>	<b>26</b>
1.5.1. Definición de los componentes en serie y en paralelo de los tensores de deformación y tensión.....	26
1.5.2. Hipótesis para el modelo numérico.....	27
1.5.3. Ecuaciones constitutivas de los materiales componentes .....	27



---

1.5.4. Ecuaciones de equilibrio y compatibilidad .....	29
1.5.5. Implementación numérica de la teoría de mezclas serie/paralelo .....	29
<b>1.6. Modelos constitutivos para geomateriales .....</b>	<b>32</b>
<b>1.7. Modelo constitutivo de daño isótropo .....</b>	<b>34</b>
<b>1.8. Modelo constitutivo de daño diferenciado <math>d^+, d^-</math> de Faria.....</b>	<b>36</b>
<b>1.9. Modelo constitutivo de elasto-plasticidad.....</b>	<b>39</b>
<b>1.10. Observaciones .....</b>	<b>42</b>
<b>Bibliografía capítulo 1 .....</b>	<b>42</b>
<b>2. NUEVO MODELO CONSTITUTIVO DE DAÑO DIFERENCIADO A TRACCIÓN Y COMPRESIÓN CON UNA ÚNICA SUPERFICIE DE DISCONTINUIDAD .....</b>	<b>47</b>
<b>2.1. Introducción.....</b>	<b>47</b>
<b>2.2. Formulación del modelo de daño diferenciado .....</b>	<b>48</b>
2.2.1. Definición de los tensores de tensión.....	49
2.2.2. Marco termodinámico, energía libre de Helmholtz .....	50
2.2.3. Definición del tensor de tensiones y del tensor constitutivo .....	51
2.2.4. Criterio umbral de daño .....	52
2.2.5. Leyes de evolución de las variables de daño .....	55
<b>2.3. Leyes de evolución lineal, exponencial e hiperbólica de las variables de daño.....</b>	<b>57</b>
2.3.1. Evolución lineal de las variables de daño .....	58
2.3.2. Evolución exponencial de las variables de daño.....	58
2.3.3. Evolución hiperbólica propuesta para las variables de daño.....	59
<b>2.4. Función umbral de discontinuidad .....</b>	<b>60</b>
<b>2.5. Algoritmo de integración de la ley constitutiva propuesta.....</b>	<b>61</b>
<b>2.6. Validación del modelo .....</b>	<b>62</b>
2.6.1. Carga de compresión axial monótona.....	63
2.6.2. Carga de tracción axial monótona.....	64
2.6.3. Análisis de objetividad de la malla .....	66
2.6.4. Análisis ante cargas cíclicas.....	67



---

2.6.5. Análisis frente a cargas biaxiales .....	70
<b>2.7. Ejemplo de aplicación.....</b>	<b>73</b>
2.7.1. Descripción del ensayo experimental .....	73
2.7.2. Análisis numérico .....	74
2.7.3. Parámetros de entrada .....	75
2.7.4. Resultados.....	75
<b>2.8. Observaciones .....</b>	<b>81</b>
<b>Bibliografía capítulo 2 .....</b>	<b>81</b>
<b>3. METODOLOGÍA DE CORRELACIÓN ENTRE LA EVOLUCIÓN DE LAS FRECUENCIAS NATURALES DE LA ESTRUCTURA Y LA EVOLUCIÓN DEL DAÑO GLOBAL .....</b>	<b>83</b>
<b>3.1. Introducción .....</b>	<b>83</b>
<b>3.2. Determinación del daño local .....</b>	<b>85</b>
3.2.1. Cálculo del tensor secante para daño isótropo .....	87
3.2.2. Cálculo del tensor secante equivalente para daño diferenciado a tracción y a compresión .....	88
3.2.3. Cálculo del tensor secante equivalente para materiales elasto-plásticos.....	89
3.2.4. Cálculo del tensor secante equivalente para materiales compuestos.....	90
<b>3.3. Determinación del daño global .....</b>	<b>93</b>
<b>3.4. Evolución de las frecuencias naturales y relación con la magnitud del daño global.....</b>	<b>94</b>
<b>3.5. Cambio de los modos de vibración y su relación con la ubicación del daño local.....</b>	<b>96</b>
<b>3.6. Metodología para correlacionar la evolución de las frecuencias naturales y el daño global en una estructura .....</b>	<b>96</b>
<b>3.7. Implementación numérica de la metodología propuesta.....</b>	<b>99</b>
<b>3.8. Ejemplo de aplicación.....</b>	<b>104</b>
<b>3.9. Observaciones finales .....</b>	<b>117</b>
<b>Bibliografía capítulo 3 .....</b>	<b>117</b>



---

<b>4. EJEMPLOS DE APLICACIÓN.....</b>	<b>119</b>
<b>4.1. Introducción.....</b>	<b>119</b>
<b>4.2. Análisis de una torre de aerogenerador de hormigón armado aplicando un modelo constitutivo de daño a tracción y compresión .....</b>	<b>120</b>
4.2.1. Descripción del problema .....	120
4.2.2. Descripción general de la estructura .....	121
4.2.3. Modelo numérico .....	123
4.2.4. Resultados.....	128
<b>4.3. Evolución del índice de daño global y su relación con las frecuencias naturales .....</b>	<b>132</b>
4.3.1. Descripción del problema .....	132
4.3.2. <i>Etapa 1:</i> Elaboración del modelo numérico de la estructura .....	134
4.3.3. <i>Etapa 2:</i> Determinación de las cargas que provocan el fallo de la estructura.....	138
4.3.4. <i>Etapa 3:</i> Análisis numérico no-lineal de la estructura .....	139
4.3.5. <i>Etapa 4:</i> Análisis numérico de las frecuencias naturales y de las formas modales de vibración de la estructura en estado no dañado y para las configuraciones dañadas de la estructura .....	143
4.3.6. <i>Etapa 5:</i> Correlación entre el daño global y las frecuencias naturales.....	145
<b>4.4. Análisis numérico de muros de pared delgada prefabricadosde ferrocemento bajo carga lateral.....</b>	<b>150</b>
4.4.1. Descripción de los muros y pruebas experimentales .....	150
4.4.2. Modelo numérico de los muros.....	152
4.4.3. Resultados numéricos .....	155
<b>Bibliografía.....</b>	<b>161</b>
<b>5. CONCLUSIONES Y FUTURAS LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN .....</b>	<b>163</b>
<b>5.1. Conclusiones.....</b>	<b>163</b>
<b>5.2. Futuras líneas de investigación.....</b>	<b>166</b>
<b>ANEXOS</b>	
<b>A. DETERMINACIÓN NUMÉRICA DE LA FRECUENCIA NATURAL Y LAS FORMAS MODALES DE VIBRACIÓN .....</b>	<b>169</b>
<b>A.1. Vectores iterativos iniciales.....</b>	<b>171</b>
<b>A.2. Iteración en el subespacio .....</b>	<b>172</b>

---



---

A.3. Convergencia.....	172
Bibliografía.....	173
<b>B. ANÁLISIS SIMPLIFICADO DE LA FRECUENCIA FUNDAMENTAL DE LA TORRE DEL AEROGENERADOR.....</b>	<b>175</b>
B.1 Introducción.....	175
B.1.1 Determinación de la Rigidez secante de la estructura.....	175
B.1.2 Determinación del Daño Global de la Estructura .....	176
B.2 Cálculo de la Frecuencia natural considerando solo la masa del aerogenerador (Via 1).....	176
B.3 Cálculo de la Frecuencia natural considerando la masa del aerogenerador y la masa de la torre (Via 2).....	177
<b>C. TRATAMIENTO NUMÉRICO DE LA ORIENTACIÓN GLOBAL DE LAS FIBRAS .....</b>	<b>183</b>
C.1 Introducción.....	183
C.2 Cálculo de la orientación del sistema de referencia local de cada elemento finito.....	185
C.2.1 Datos de entrada.....	186
C.2.2 Definición de un sistema local de coordenadas (a nivel de estructura).....	186
C.3 Definición de un sistema local de coordenadas (a nivel de elemento) .....	187
C.4 Teoría de mezclas serie/paralelo con orientación global de la fibra.....	189



---

# Introducción y Objetivos

## Motivación

El tema de estudio de la presente tesis surge de la necesidad de establecer un método racional y práctico para identificar, a través del cambio de las frecuencias naturales, el daño en estructuras de hormigón armado, especialmente en torres para aerogeneradores.

Esta tesis doctoral fue desarrollada con el soporte del Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería CIMNE a través de un contrato con la empresa ACCIONA Infraestructura, y de la Universidad Nacional de Colombia.

Durante la etapa de documentación se identificaron varios temas de interés que, tanto por el reto técnico y científico como por la posibilidad de aportar al desarrollo de la ingeniería se convirtieron en una motivación para iniciar con la investigación doctoral que aquí se presenta.

El desarrollo de un nuevo modelo constitutivo que permita representar el comportamiento mecánico del hormigón, teniendo en cuenta la diferencia entre las respuestas de tracción y compresión y que, además, sea capaz de captar el efecto de los esfuerzos cortantes, fue un verdadero reto.

Lograr incluir adecuadamente los resultados de algunos modelos constitutivos existentes y de un nuevo modelo constitutivo de daño en el cálculo de frecuencias y

modos naturales de estructuras de material compuesto también fue un desafío a cumplir en el desarrollo de la investigación.

Otro reto de esta tesis fue el de definir adecuadamente el tensor constitutivo secante del material compuesto para diferentes estados de daño global, para lo cual se ha utilizado la teoría de mezclas serie paralelo y se ha contribuido al desarrollo de la misma.

Definidos estos temas, se inició una búsqueda bibliográfica sobre la relación entre daño y frecuencia, sin encontrar un método que estableciera una relación clara entre ellos, con lo cual se identificó la posibilidad de proponer una metodología que supla esa necesidad.

Es así como se materializó esta tesis en la cual se desarrolla un nuevo modelo constitutivo de daño diferenciado utilizando una única superficie de discontinuidad para tracción, compresión y cortante; asimismo se plantea un procedimiento numérico para el cálculo de las frecuencias naturales y sus formas modales de vibración para diferentes estados de daño de estructuras de hormigón reforzado y se presenta una metodología que permite correlacionar daño y frecuencia.

Los resultados de esta tesis, pueden proporcionar herramientas teóricas de soporte en diversos campos de la ingeniería, como aquellos que usan técnicas no destructivas de evaluación y diagnóstico de estructuras existentes, y que se conocen bajo el nombre de *identificación de deterioro estructural con base en el análisis de vibraciones (VBM<sup>1</sup>)*.

Igualmente, se espera que los nuevos desarrollos realizados en esta tesis constituyan un aporte técnico y científico para los procedimientos de monitoreo continuo de nuevas estructuras sometidas a cargas dinámicas permanentes, como por ejemplo: torres de aerogeneradores, puentes y edificios sometidos a la acción del viento y/o a la de circulación de vehículos, entre otros.

Los profesionales dedicados a la caracterización estructural de edificios históricos, construcciones que por su valor patrimonial requieren ser evaluadas mediante pruebas no destructivas, pueden encontrar en esta tesis una manera de analizar y utilizar los resultados de sus pruebas de campo.

Siendo Colombia (país del autor) un país donde existe un gran número de las zonas pobladas que se ubican en áreas con amenaza sísmica alta o media, es deseo del autor

---

<sup>1</sup> VMB: Vibration-based monitoring.



---

que los resultados del trabajo aquí presentado sean utilizados por la comunidad de ingenieros dedicados a la evaluación sísmica de estructuras.

## **Objetivos de la tesis**

Los objetivos han sido divididos en dos partes, objetivo general y objetivos específicos, los cuales se plantean a continuación.

### **Objetivo general**

El objetivo general de la tesis es el de formular una herramienta metodológica capaz de correlacionar la evolución del daño global de estructuras de hormigón reforzado (material compuesto) a partir de la evolución de la frecuencia natural de la estructura y viceversa.

### **Objetivos específicos**

Para lograr el objetivo general se plantearon los objetivos específicos que se enumeran a continuación:

- Partiendo del modelo de daño isótropo, formular e implementar un modelo constitutivo de daño diferenciado utilizando una superficie de fluencia única para tracción y compresión y que sea adecuada para geo-materiales (superficie de Mohr-Coulomb).
- Desarrollar e implementar una aplicación computacional para orientar el refuerzo de acuerdo a la localización global de cada elemento finito, incluirla dentro de la teoría de mezclas serie/paralelo e implementarla en un programa de elementos finitos.
- Desarrollar e implementar una aplicación computacional que permita calcular las frecuencias naturales de una estructura, para diferentes estados de daño global, usando el método de los elementos finitos.

## **Procedimiento, innovación y alcance**

### **Procedimiento**

El procedimiento seguido en el desarrollo de la tesis doctoral es el siguiente:



- Revisión bibliográfica relacionada con el análisis dinámico de torres de aerogenerador, materiales compuestos y modelos constitutivos de daño.
- Estudio e implementación de teorías existentes. Desarrollo de algunos ejemplos de aplicación usando las teorías existentes.
- Formulación, implementación y validación de las teorías propuestas, tales como el nuevo modelo constitutivo de daño diferenciado de daño a tracción y compresión; la metodología para el cálculo de la evolución de la frecuencia natural de estructuras; los algoritmos para calcular la dirección global de las fibras según la ubicación del elemento finito dentro de la teoría de mezclas serie/paralelo.
- Desarrollo de ejemplos de aplicación a estructuras usando las teorías propuestas en la tesis doctoral.
- Elaboración de las conclusiones finales.

### **Innovación**

En el desarrollo de este estudio se han realizados varios aportes innovadores, entre estos se puede mencionar, en primer término, el procedimiento de cálculo de las frecuencias naturales y de las respectivas formas modales de vibración, para distintos estados de no-linealidad de estructuras de hormigón reforzado (materiales compuestos); los desarrollos e implementaciones que permiten la inter-relación entre un programa de elementos finitos para el análisis numérico no-lineal y uno de cálculo de frecuencias son sin duda un aporte innovador; también se debe mencionar el nuevo modelo constitutivo de daño diferenciado a tracción y compresión con única superficie de discontinuidad; finalmente, pero no menos importantes, se deben considerar los desarrollos hechos para incluir la dirección global de las fibras según la localización del elemento finito dentro de la teoría de mezclas serie/paralelo, aspecto necesario para el tratamiento del hormigón reforzado como un material compuesto.

### **Alcance**

El alcance y la aplicación del estudio se reduce a estructuras construidas en hormigón reforzado con fibras largas (armadura de acero convencional) también a estructuras con geometría no convencional (lo que requiere que sean analizadas en 3D) sometidas a cargas estáticas y cargas cíclicas.



La investigación se desarrollará en el marco del análisis de estructuras y la mecánica computacional y, particularmente, del análisis de materiales compuestos utilizando la teoría de mezclas serie/paralelo propuesta por Rastellini en 2006 [2] e implementada en el PLCD por Martínez en 2008 [3]. La base teórica se fundamenta en el modelo de daño isótropo propuesto por Kachanov en 1958 [4] y el de daño direccionado propuesto por Faria et al. en 1998 [5] para representar numéricamente la matriz; en la teoría clásica de elásto-plasticidad para representar numéricamente el refuerzo de acero. También se tendrán en cuenta las consideraciones de anisotropía del material compuesto causada por la orientación global de la fibra.

Los aportes técnicos y/o científicos de esta tesis se han implementado en el programa de elementos finitos PLCD [6]. Este programa implícito fue desarrollado en el Departamento de Resistencia de Materiales y Estructuras en la Ingeniería de la Universidad Politécnica de Cataluña, y está orientado hacia la solución de problemas mecánicos y termo-mecánicos, lineales y no lineales. Dicho programa tiene implementado un gran número de modelos constitutivos, la teoría de mezclas clásica y en serie/paralelo como herramientas gestoras de los modelos constitutivos. Además, cuenta con un sistema de gestión y almacenamiento de datos para las variables internas de cada modelo constitutivo que permite hacer el análisis no lineal siguiendo la evolución de cada material componente y sus respectivas variables internas.

Para el cálculo de las frecuencias de las formas modales se desarrolló un nuevo programa de elementos finitos denominado CFYFP, el cual está interconectado con el PLCD, lo que permite el cálculo de los parámetros modales para los diferentes estados no-lineales que se calculan con el PLCD.

Las validaciones de los nuevos desarrollos se realizarán mediante comparación con datos obtenidos de la literatura.

Los procesos de instrumentación de estructuras para medir frecuencia y análisis de este tipo de datos están fuera del alcance de este estudio y será planteado como un tema de trabajo futuro.

## **Resultados académicos proyectados y obtenidos**

Dentro del desarrollo del presente estudio se han obtenido los siguientes resultados académicos: un artículo publicado en una revista internacional [7], una tesina de grado de la UPC [8] y dos ponencias en congresos internacionales. Adicionalmente, se ha

presentado a revisión de la revista *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* un artículo que contiene el nuevo modelo constitutivo. A continuación se relacionan cronológicamente las publicaciones realizadas hasta la fecha:

- 2010, presentación de la ponencia: “*A new damage model for structures subjected to cyclic loads*”. Se presentó en el “*9th World Congress on Computational Mechanics and 4th Asian Pacific Congress on computational Mechanics, Sydney*”, El resumen de este trabajo fue publicado por “*Centre for Infrastructure Engineering and Safety*”.
- 2011, publicación del artículo “*A compression–tension concrete damage model, applied to a wind turbine reinforced concrete tower*”, en la revista “*Engineering Structures*” [7].
- 2011, co-dirección de la tesina de grado “Estudio de la evolución de las frecuencias naturales en estructuras sometidas a efectos del daño y la plasticidad” en el Departamento de Resistencia de Materiales y estructuras en la ingeniería RMEE de la Universidad Politécnica de Cataluña. Este trabajo está enmarcado en el cuarto objetivo específico de esta tesis (“Desarrollar e implementar una aplicación computacional que permita calcular las frecuencias naturales de una estructura, para diferentes estados de daño global”).
- 2012, presentación de la ponencia “*A tool for the identification of low r.c. structural damage levels*” en el “*10th World Congress on Computational Mechanics and 4th Asian Pacific Congress on computational Mechanics*”.

A continuación se enumeran los artículos han sido aceptados en congresos internacionales para el año 2013

- Ponencia “*Experimental and numerical non-linear analysis of ferrocement thin walls under lateral load*” aceptada en “*17th International Conference on Composite Structures (ICCS17)*”, Porto- Portugal, 17 a 21 de Junio.
- Ponencia “*A new tension-compression damage model applied to modeling the ferrocement thin walls under cyclic loads*” aceptada en “*12th U.S. National Congress on Computational Mechanics (USNCCM12)*”, Raleigh, North Carolina, EE.UU, 22 a 25 de Julio.
- Preparación de un nuevo artículo: metodología de correlación daño frecuencia.



---

## Contenido de la tesis

Esta tesis consta de cinco capítulos y tres anexos. En el capítulo 1 se hace una revisión del estado del conocimiento de la base teórica que dará soporte al desarrollo de la tesis. Inicialmente se realiza una reseña de los métodos de identificación del deterioro estructural basados en el análisis de vibraciones y se hace una introducción a los índices de daño sísmico y su tratamiento a través de modelos constitutivos. Se describe la modelización numérica del hormigón armado como un material compuesto a través de la teoría de mezclas serie/paralelo, la cual también se sintetiza en ese capítulo. Se resalta la importancia de la orientación de las fibras de refuerzo en función de la posición que ocupe el elemento finito en la geometría. Se continúa con una reseña de los modelos constitutivos de daño usado en el modelamiento de los geomateriales y estructuras de hormigón reforzado. También se resume la teoría de la plasticidad como modelo constitutivo de las fibras de refuerzo.

En el capítulo 2 se presenta un nuevo modelo constitutivo de daño diferenciado a tracción y compresión utilizando una única superficie de discontinuidad. Este modelo es un aporte teórico para la modelización numérica de geomateriales tales como el hormigón, que presentan umbrales de resistencia a tracción y compresión diferentes. Luego de hacer el desarrollo matemático del modelo, se hace un proceso de validación mediante comparación con datos bibliográficos. La validación se hace para tracción pura, compresión pura, carga biaxial, y para ciclos de tracción, compresión y tracción.

En el capítulo 3 se propone una metodología para obtener la correlación entre la evolución de las frecuencias naturales de una estructura y el daño global o estructural para estructuras de hormigón armado (material compuesto). Se presenta un método nuevo para la determinación del tensor secante de los materiales simples cuando estos han sufrido daño y del tensor secante del material compuesto en estado dañado. Este tensor secantes será usado en el cálculo de las frecuencias naturales para diferentes niveles de daño estructural. Se propone un índice de daño local equivalente que permite calcular este tensor secante, el cual representa la rigidez secante equivalente cuando se usa un modelo constitutivo diferente al daño isótropo. Se plantea un índice de daño global que representa la pérdida de rigidez de la estructura debida a una determinada carga que ha ocasionado que los materiales superen sus umbrales. Se propone un procedimiento para el cálculo de frecuencias relativas para diferentes modos de

vibración y, finalmente, se plantea el marco metodológico para establece la correlación entre la evolución de la frecuencia natural y la evolución del daño estructural.

En el capítulo 4 se presentan diferentes ejemplos de aplicación tanto de las teorías existentes, como de las teorías que se han desarrollado en este trabajo de investigación. Se aplica la metodología de correlación donde se reseñan algunos aportes de la metodología propuesta. En los ejemplos presentados se destaca las ventajas del nuevo modelo constitutivo en la modelización de estructuras de hormigón armado.

Finalmente, en el capítulo 5 se establecen las conclusiones y se plantea las futuras líneas de investigación que darán continuidad a los desarrollos teóricos y metodológicos presentados en esta tesis.

En el anexo A se hace una síntesis de la teoría empleada para el cálculo numérico de frecuencias naturales de estructuras.

En el anexo B se desarrolla el cálculo simplificado de la frecuencia fundamental de una torre de aerogenerador utilizando las ecuaciones básicas de la dinámica de estructuras, considerando un modelo de péndulo invertido para un solo grado de libertad. Además, se considera la torre como una viga empotrada y masa distribuida.

En el anexo C se presenta un algoritmo para el cálculo de los ángulos de Euler, su aplicación en la determinación del tensor constitutivo de un material compuesto mediante la teoría de mezclas serie/paralelo considerando la orientación global de la fibra.

## **Bibliografía introducción**

- [1] S. Oller, A.H. Barbat, J. Miquel, Estudio numérico del comportamiento de los hormigones reforzados con fibras cortas, *Hormigón y Acero*, 232 (2004) 113-123.
- [2] F. Rastellini, Modelización numérica de la no-linealidad constitutiva de laminados compuestos. PhD, Universidad Politécnica de Cataluña, Barcelona, 2006.
- [3] X. Martínez, Micro mechanical simulation of composite materials using the serial/parallel mixing theory. PhD, Universidad Politécnica de Cataluña, Barcelona, 2008.
- [4] L.M. Kachanov, Time of rupture process under creep conditions, *Izvestia Akaademii Nank*, 8 (1958) 26-31.
- [5] R. Faria, J. Oliver, M. Cervera, A strain-based plastic viscous-damage model for massive concrete structures, *International Journal of Solids and Structures*, 35 (1998) 1533-1558.
- [6] S. Oller, B. Luccioni, A. Hanganu, E. Car, O. Salomon, L. Neamtu, F. Zalamea, P. Mata, X. Martínez, M. Molina, J.A. Paredes, F. Otero, *Breve Manual de PLCD*, 2010.



- 
- [7] J.A. Paredes, A.H. Barbat, S. Oller, A compression–tension concrete damage model, applied to a wind turbine reinforced concrete tower, *Engineering Structures*, 33 (2011) 3559-3569.
- [8] J. Baños, Estudio de la evolución de las frecuencias naturales en estructuras sometidas a efectos del daño y la plasticidad. Tesina, Universidad Politecnica de Cataluña, Barcelona, 2011.



# Hoja en blanco

# 1. Estado del conocimiento

## 1.1. Métodos de identificación del deterioro estructural basados en el análisis de vibraciones (VBM)

El término deterioro estructural o daño estructural se puede entender como la pérdida de funcionalidad o seguridad de una estructura debido al cambio de las propiedades físicas (masa) y/o mecánicas (resistencia, módulo de elasticidad) de los materiales que la componen. El cambio de las propiedades físico-mecánicas de una estructura tiene singular importancia en la determinación de sus propiedades modales, pues es sabido que existe una dependencia entre estos dos tipos de propiedades. Así, la presencia de deterioro estructural en una obra de ingeniería ocasiona cambios en sus parámetros modales: frecuencias naturales, modos de vibración y amortiguamiento.

El deterioro estructural afecta directamente la rigidez de la estructura y, por consiguiente, la frecuencia natural y sus respectivas formas modales se verán modificadas; esta dependencia es la base de *los métodos de identificación de deterioro estructural basados en el análisis de vibraciones (VBM)* que hacen parte de una rama de la ingeniería denominada *control de salud estructural (SHM<sup>1</sup>)*.

---

<sup>1</sup> SHM: Structural health monitoring.





El control de salud estructural es una rama relativamente nueva en la ingeniería civil, que, además del análisis estructural, involucra diferentes tecnologías relacionadas con la identificación de sistemas, la adquisición, identificación, análisis y transmisión de datos, la instalación y monitoreo de sensores, entre otras. Entre los principales retos de la SHM está diagnosticar el estado estructural de una construcción y predecir su vida útil remanente, a través de procedimientos no destructivos y/o no invasivos. Los métodos de identificación de daño estructural basados en el análisis de vibraciones proporcionan pruebas no destructivas, continuas y generalmente confiables que permiten cumplir con estos objetivos.

Dado que para la ingeniería civil, mecánica y aeroespacial, resulta de interés la aplicabilidad de estos métodos, su investigación se ha incrementado en las últimas décadas; los avances alcanzados en los métodos de identificación de daño basados en el análisis de vibraciones se pueden consultar en [1-4]. Una revisión del estado del arte en la aplicación de estos métodos para la identificación del deterioro que sufren las estructuras de materiales compuesto es presentada por Montalvão et al. [5], quien establece los diferentes tipos de deterioro que pueden ocurrir en este tipo de materiales y los métodos aplicados para su identificación. Por su parte, Fukunaga et al. [6] presentan un estudio para la identificación del deterioro en materiales laminados a través de fuerzas dinámicas residuales, considerando el deterioro como una disminución de la rigidez, en su modelo numérico establecen de forma arbitraria el porcentaje de disminución de rigidez. Brownjohn et al. [7] presentan un amplio estado del arte en el control de estructuras propias de la ingeniería civil e incluye un gran número de aplicaciones. En el caso particular de estructuras de hormigón armado, son varios los autores que han empleado estos métodos para determinar el deterioro [7-11].

Según la clasificación de los métodos de identificación de daños planteada por Rytter en 1993 y citada por diferentes autores [2, 5, 8], estos métodos se agrupan en 4 niveles según el alcance de cada uno: (1) identificación del deterioro existente en una estructura; (2) identificación del deterioro existente y localización de la zona deteriorada; (3) identificación, localización y cuantificación de la severidad del deterioro; y (4) predicción de la vida útil remanente de la estructura. Según Yan et al. [4] los métodos de identificación de deterioro estructural basados en vibraciones tienen cinco niveles respecto a su alcance: (1) identificación del deterioro existente en una estructura; (2) localización de la zona deteriorada; (3) identificación del tipo de deterioro; (4) cuantificación de la severidad del deterioro; y (5) predicción de la vida útil

remanente de la estructura. Evidentemente la diferencia con la clasificación de Rytter está en la identificación del tipo del daño.

Actualmente, los métodos de detección del daño basados en vibraciones se pueden dividir en dos grandes grupos: tradicionales y modernos [4]. Una diferencia entre estos dos grupos radica en la forma de la adquisición y análisis de los datos de campo puesto que, mientras los métodos tradicionales requieren datos de características modales de las estructuras, obtenidos a partir de pruebas puntuales de difícil ejecución en obras en servicio, los métodos modernos se alimentan de datos obtenidos a partir de monitoreo e instrumentación permanente que, generalmente, se transmite en línea y son el resultado de vibraciones ambientales.

### **1.1.1. Métodos tradicionales de identificación del deterioro basados en el análisis de vibraciones**

Los métodos tradicionales de identificación del deterioro estructural basados en el análisis de vibraciones difieren unos de otros dependiendo del parámetro modal empleado en el análisis. Algunos basan el análisis en el cambio de frecuencias naturales, otros métodos en el análisis de frecuencias y formas modales y otros en el análisis del cambio de la matriz de rigidez o de la matriz de flexibilidad, siendo estas matrices función de la forma modal y de la frecuencia natural. Existen también métodos basados en funciones de transferencia, siendo el más citado el método de función de frecuencia de respuesta (FRF).

#### *a. Métodos basados en el cambio de frecuencias naturales*

Uno de los principales métodos de identificación de daño o deterioro basado en vibraciones es, probablemente, aquel que se basa en el cambio de las frecuencias naturales puesto que éstas son fáciles de obtener experimentalmente y por lo general son confiables, La literatura en este tema es amplia y Salowu [1] presenta una excelente revisión del uso del cambio de la frecuencia natural en la identificación del daño.

La principal ventaja de los métodos basados en el análisis de frecuencias es que las frecuencias naturales son relativamente fáciles de medir, tanto en campo como en laboratorio. Sin embargo, aunque es posible detectar la presencia de daño en una estructura a partir de los cambios en la frecuencia natural, es difícil de determinar la localización del daño. Esto es debido a que dos daños localizados en sitios distintos de la estructura pueden ocasionar el mismo decremento en la frecuencia natural que un



único daño localizado en un solo sitio de la estructura [12]. El daño es un fenómeno típicamente local y, probablemente, no tenga una influencia significativa en las frecuencias naturales bajas de una estructura, que son las mediciones típicas realizadas durante una prueba de vibración [3, 13]. Debido a este hecho, al ruido de las mediciones y a los cambios en la estructura ocasionados por factores ambientales, la identificación de los niveles bajos de daño no es lo suficientemente fiable, principalmente en estructuras grandes, por lo que es necesario realizar mediciones muy precisas para la identificación de estos niveles de daño utilizando únicamente la frecuencia natural [3]. Yam et al. [14] establecen que los daños estructurales o globales menores que el 1% son prácticamente imperceptibles si se utiliza únicamente el análisis de frecuencias.

El proceso directo de identificar el daño está dentro del nivel 1 de la clasificación de Yan et al. [4] y consiste en calcular la disminución de la frecuencia para un tipo de daño conocido que se modeliza matemáticamente y finalmente se comparan las frecuencias medidas con las frecuencias calculadas [2]. Friswell et al. [15] establecen diferentes escenarios de una estructura con daño para detectar dicho daño. Ellos usan modelos estructurales para calcular frecuencias para diferentes modos de vibración tanto para el estado no dañado como para los diferentes escenarios de daño planteados para la estructura. Con estos datos calculan la disminución de la frecuencia en cada modo y lo comparan con los datos medidos.

El problema inverso que corresponde a los niveles 2 o 3 de la clasificación de Yan et al. [4], consiste en calcular los parámetros de daño (longitud y/o localización de fisuras) a partir de la disminución de la frecuencia medida [2]. El problema inverso se aplica a varios de los métodos basados en parámetros modales, Friswell [16]. Una amplia aplicación del problema directo y del problema inverso para la identificación y la localización del daño en un viga es presentado por Verstroni y Capecchi [17].

En términos generales se puede decir que los métodos que utilizan el cambio de la frecuencia únicamente permiten identificar el daño y que algunos de estos métodos permiten cuantificar el daño, más no permiten localizarlo con adecuada precisión.

#### *b. Métodos basados en el cambio de frecuencias naturales y modos de vibración*

Los métodos que utilizan la variación de las frecuencias naturales y los modos de vibración permiten localizar el daño, además de identificarlo y cuantificarlo. Los procesos de localización del daño se basan en la comparación de los vectores modales obtenidos antes y después del daño. Esto requiere un mayor número de puntos de

medición para caracterizar los vectores modales y proveer suficiente información [3]. El criterio de comparación modal MAC (*Modal Assurance Criteria*) que es un indicador estadístico muy sensible a los grandes cambios en los modos de vibración y relativamente insensible a los pequeños cambios [18], es utilizado frecuentemente para comparar cualitativamente vectores modales analíticos y experimentales a través de la expresión

$$MAC(\phi_a, \phi_e) = \frac{\left(\{\phi_a\}^T \cdot \{\phi_e\}\right)^2}{\left(\{\phi_a\}^T \cdot \{\phi_a\}\right)\left(\{\phi_e\}^T \cdot \{\phi_e\}\right)} \quad (1-1)$$

donde  $\phi$  son los vectores modales y los subíndices  $a$  y  $e$  significan analítico y experimental, respectivamente. Si el valor de la correlación es 1, hay ajuste perfecto entre los dos vectores, mientras que si es 0 no hay ninguna coincidencia entre dichos vectores lo que es una señal de la presencia del daño. Este método presenta ciertas desventajas puesto que los datos modales pueden contener errores tanto de medición como de extracción de los valores modales ya que estos son medidos indirectamente [19, 20]; generalmente las mediciones son hechas en el campo de las aceleraciones. Por otro lado, para obtener los datos modales provenientes de pruebas experimentales es necesario contar con una gran densidad de sensores para poder obtener las frecuencias naturales y los modos de vibración de alto orden.

Varios autores han utilizado técnicas de identificación del daño basadas en los cambios de los modos de vibración para estructuras simples, generalmente vigas simplemente apoyadas [13, 21]. Ratcliffe [22] presenta una técnica para la localización del daño tanto para una viga simplemente apoyada como para una viga en voladizo, haciendo una aproximación del operador de Laplace a través de diferencias finitas. En este último caso considera la viga como una estructura de una sola dimensión y simplifica el operador de Laplace para discretizar el vector normal en una dimensión como  $\ell = y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}$ . Esta es una forma particular de localizar el daño mediante la curvatura del vector modal que se obtiene a partir de la doble derivación numérica de los vectores modales. Los métodos basados en la curvatura de las formas modales de vibración son una alternativa para la identificación y localización del daño. Su base teórica es que las segundas derivadas de los vectores modales pueden ser más sensibles a pequeños cambios en los vectores modales, ya que las segundas derivadas de los vectores modales son más sensibles a los cambios en el sistema [3].

*c. Métodos basados en la variación de las matrices de flexibilidad y/o rigidez*

Estos métodos utilizan una medición dinámica de la matriz de flexibilidad para estimar el daño estructural. Una variación de este método es la medición dinámica de la matriz de rigidez. El concepto básico es que cada columna de la matriz de flexibilidad representa el patrón del vector de desplazamientos cuando una fuerza estática unitaria es aplicada en un grado de libertad determinado [2]. La matriz de flexibilidad experimental,  $[G]$ , es obtenida de forma aproximada a partir de los vectores modales medidos y ortonormalizados respecto a la masa o M-ortonormalizados,  $\phi_e$ , y la matriz de autovalores medidos experimentalmente (matriz diagonal del cuadrado de las frecuencias naturales),  $[\Lambda]$ , según la expresión general [3]

$$[G] \approx \{\phi_e\}^T [\Lambda]^{-1} \{\phi_e\} \quad (1-2)$$

La razón por la cual se obtiene la matriz de flexibilidad de forma aproximada es porque no son medidos todos los modos de vibración de la estructura; normalmente se miden los modos de vibración más bajos. Yan et al. [4] afirman que es posible obtener la matriz de flexibilidad con adecuada precisión midiendo únicamente los modos y frecuencias de bajo orden. Normalmente son medidos los primeros tres modos.

En estos métodos el daño, es detectado por comparación de la matriz de flexibilidad medida de la estructura dañada con la matriz de flexibilidad medida en la estructura no dañada o calculada usando un modelo de elementos finitos [2, 3]. Algunos ejemplos de la aplicación de este método se pueden consultar en [21, 23, 24].

*d. Métodos basados en la función de relación de frecuencias*

La función de relación de frecuencias (FRF) es una forma particular de una función de transferencia, que establece el ratio de la amplitud de las señales de entrada y salida en una prueba dinámica. Esta prueba consiste en aplicar una excitación con un determinado rango de frecuencias en un punto de la estructura y medir las frecuencias de salida en varios puntos de la estructura. Para cada punto donde se miden las salidas se tiene la amplitud de la señal de salida  $x_s(\omega)$  y, conocida la amplitud de entrada

$x_e(\omega)$ , se determina la función de relación de frecuencias  $FRF(\omega) = \frac{x_s(\omega)}{x_e(\omega)}$  para cada

frecuencia  $\omega$  del rango de análisis. En las frecuencias cercanas a las de resonancia se encontrarán picos de la FRF. Se realizan mediciones para la estructura en estado no

dañado y en estado no dañado y se obtienen las curvas de FRF y  $\omega$  para los dos estados, en cada punto de medición. El daño se detecta cuando el pico de FRF en la curva del estado dañado se presenta para una frecuencia diferente que en la curva del estado no dañado. La localización se realiza dependiendo del punto de medición en el que se identifique cambio en la respectiva curva. Lee y Shim [19] establecen que este es un problema inverso, ya que, generalmente, el número de datos conocidos (o puntos de medición) es menor que el número de incógnitas a ser determinadas, y, en consecuencia, es necesario el uso de técnicas de optimización.

En este método es necesario conocer de antemano el rango de frecuencias modales de la estructura para definir el rango de frecuencias utilizadas en la vibración de entrada. Adicionalmente, es conveniente conocer a priori las posibles zonas de ubicación del daño para definir la ubicación de los sensores de medición. Wang et al. [20] remarca la imposibilidad de ubicar sensores en todos los puntos de la estructura y propone un algoritmo para identificar, cuantificar y localizar el daño utilizando la FRF junto con un modelo analítico. Propone un método iterativo para solucionar los problemas con pocos puntos de medición y un algoritmo de ponderación para la reducción de los errores de medición.

### **1.1.2. Métodos avanzados de identificación del deterioro basados en el análisis de vibraciones**

Los métodos avanzados de identificación del daño estructural basados en el análisis de vibraciones usan mediciones en línea de las vibraciones de respuesta estructural y técnicas modernas de procesamiento de señales y algoritmos de inteligencia artificial como herramientas de análisis [4]. Esto permite identificar el daño en estructuras mediante ensayos no destructivos a partir de la medición de la respuesta dinámica de la estructura sometida a vibraciones ambientales.

Los métodos modernos más referenciados son aquellos que utilizan la transformada tipo “wavelet”, los algoritmos genéticos y las redes neuronales.

#### *e. Métodos basados en la transformada tipo “wavelet”*

Las “wavelets” son una familia de funciones de base capaces de describir una señal en un determinado dominio del tiempo, o del espacio, y en el dominio de las frecuencias [25]. La transformada tipo “wavelet” es una técnica de procesamiento de señales que utiliza la descomposición de la señal de respuesta de una estructura en una serie de

funciones locales denominadas “wavelets” y que utilizando las propiedades de escalonamiento y transformación de las “wavelets”, detectan las características especiales de la estructura [4]. Entre las principales ventajas de este método se pueden establecer: que no es necesario conocer las mediciones en la estructura en estado no dañado para una adecuada detección del daño; que permite la separación del ruido de la señal; y que permite realizar un análisis en una banda de frecuencias determinadas.

La utilización de este método permite identificar, cuantificar y localizar el daño estructural. Ovanesova y Suárez [25] presentan una aplicación de este método para identificar el daño en una viga empotrada en los extremos y en un pórtico de una sola luz utilizando pruebas estáticas y dinámicas. Por su parte, Young Noh et al. [26] utilizan este método para diagnosticar el estado de daño estructural sufrido tanto por un pórtico metálico en escala a 1:8 como por la columna de un puente de hormigón armado escalada en un 30% al ser sometidos a una carga dinámica fuerte. La carga dinámica es aplicada a cada modelo mediante una mesa vibratoria que reproduce registros de sismos. Los autores remarcan el uso de la transformada “wavelet” en la descomposición de señales no estacionarias como lo son las señales generadas por un terremoto y establecen tres funciones de sensibilidad de daño asociadas a las características de las “wavelets”. Yan y Yam [27] aplican este método para la detección de la delaminación en platinas de materiales laminados. Yam et al. [14] utilizan este método conjuntamente con un algoritmo de redes neuronales para la detección del daño estructural en estructuras hechas de materiales compuestos.

En general, el uso de este método requiere de un modelo de la estructura que permita determinar a priori las zonas de la estructura con mayor posibilidad de sufrir daño y establecer así los puntos que deben ser instrumentados en la estructura.

#### *f. Métodos basados en redes neuronales*

Las redes neuronales son una herramienta poderosa para la identificación de sistemas estructurales que se encuentran sometidos a acciones dinámicas. Estos sistemas son constituidos por unidades interconectadas de procesamiento llamadas neuronas [28]. La rigidez de las interconexiones está definida por pesos o coeficientes de ponderación que son determinados en el proceso de entrenamiento de la red [29]. Usualmente, una red neuronal está compuesta por tres niveles: una capa de entrada, una capa oculta y una capa de salida. La identificación del daño estructural a través de una red neuronal requiere definir el tipo y estructura de la red, los parámetros a ser usados

en la red y normalizar los ejemplos de entrenamiento de la red. El proceso de entrenamiento de la red requiere el conocimiento de una determinada información de entrada y el correspondiente estado de daño estructural que es la salida. Esta información de entrenamiento de la red se puede obtener a partir de datos experimentales o de modelizaciones numéricas. Una vez la red neuronal haya sido suficientemente entrenada, es posible ingresar los datos de entrada obtenidos de las mediciones reales de la estructura y la red entrega como salida la magnitud y localización del daño [4]. La información de entrada con la cual se entrena la red varía dependiendo de cada problema, González y Zapico [29] definen la frecuencia natural y los modos de vibración como parámetros de entrada para identificar el daño en pórticos sometidos a cargas sísmicas. Otros autores [14, 27] utilizan la información obtenida a partir de la transformación “wavelet” como parámetros de entrada para identificar el daño en estructuras de materiales compuestos.

Normalmente, estos métodos utilizan un modelo numérico a partir del cual determinar los parámetros de entrada (frecuencias y modos naturales, matrices de rigidez o flexibilidad, entre otros) y salida (índice de daño local, índice de daño global, localización del daño) para el adecuado entrenamiento de la red neuronal. La precisión de las predicciones depende en gran medida de la calidad del entrenamiento, por lo que es fundamental la selección de un modelo numérico que sea capaz de suministrar, de manera confiable, tanto los datos de entrada como los de salida.

#### *g. Métodos basados en algoritmos genéticos*

Los algoritmos genéticos son herramientas para solucionar problemas de optimización, basadas en la ley de selección natural de Darwin. Este método se utiliza para obtener una serie de posibles soluciones a partir de un espacio de búsqueda y encontrar una respuesta para un problema determinado. Un algoritmo genético simple consiste de tres operaciones básicas: selección, operaciones genéticas y remplazo. El procedimiento se inicia con una población inicial (posibles soluciones al problema determinado) y los sujetos de esta población son sometidos a las tres operaciones básicas y evolucionan. El resultado es una población con mejores capacidades que la población inicial, es decir se ha producido una selección natural. Este proceso es iterativo, con un número de generaciones determinado por un criterio de convergencia [30]. Las operaciones genéticas definen los individuos que tienen mejores capacidades y esto se hace a través de una función objetivo que define el problema a ser optimizado o





minimizado. El uso de los algoritmos genéticos es adecuado para la identificación del daño estructural, especialmente si se requiere localizar el daño.

Villalba y Laier [31] presentan una metodología de identificación del daño utilizando algoritmos genéticos conjuntamente con los parámetros modales de una estructura. Utilizan las frecuencias y los modos fundamentales para definir la función objetivo a ser optimizada o minimizada. La función objetivo está definida en términos de la diferencia entre los parámetros modales medidos y aquellos obtenidos a partir de un modelo numérico, con lo que es posible identificar el daño estructural.

### **1.1.3. Consideraciones generales de los métodos de identificación de daño estructural basados en el análisis de vibraciones**

Los métodos antes descritos requieren de la elaboración de modelos que proporcionen parámetros estructurales y modales adecuados para la identificación, localización y valoración del daño local y global. En los métodos tradicionales de comparación directa, un análisis por elementos finitos proporciona los parámetros a ser comparados, tanto para el estado no deteriorado de la estructura como en el estado dañado. En los métodos avanzados, en los que se usan algoritmos inteligentes de análisis de datos, un modelo adecuado de elementos finitos proporciona la herramienta numérica para el entrenamiento del algoritmo de decisión como es el caso de las redes neuronales o para la formulación de la función objetivo en el caso los métodos basados en los algoritmos genéticos.

Una parte fundamental en la formulación de un modelo numérico es la definición de los modelos constitutivos que representan el comportamiento mecánico de los materiales de la estructura. A partir de la acertada formulación de dichos modelos es posible determinar índices de daño local y global de manera racional. La definición de un índice de daño local y global es una necesidad evidente en la mayoría de los métodos antes citados. En el año 2003 Kim y Stubbs [8] ya remarcan esta necesidad y, más recientemente, en el año 2007, Yan et al. [4] plantearon la necesidad de definir uno o más índices que permitieran determinar el deterioro tanto a nivel global como local. Para ello, establecen que la variable que permita identificar la presencia de deterioro en una estructura debe ser global, mientras aquella que permite localizar el deterioro debe ser local y cumplir con dos requisitos: ser sensible al daño local y ser una función monótona de las coordenadas. Finalmente, plantean como trabajo de investigación futura el desarrollo de un índice de daño adecuado. En este mismo año, Friswell [16]

---

resalta, como un aspecto clave de los métodos de identificación de deterioro, la determinación adecuada del modelo de deterioro a ser utilizado.

Por otro lado, está el hecho de que la mayoría de los ejemplos antes citados son desarrollados en laboratorio bajo condiciones de medición controladas y para estados de daño predeterminados. Esto devela la dificultad de extender estos métodos a estructuras propias de la ingeniería civil (puentes, presas, torres de aerogenerador, edificios, entre otros). Brownjohn et al. [7] remarcan la dificultad de encontrar casos en los que estos métodos hayan pasado del ámbito experimental al ámbito práctico, por lo cual establece la necesidad de desarrollar nuevas tecnologías que permita su aplicación a estructuras típicas de la ingeniería civil.

Luego de dar una mirada crítica a lo antes expuesto, es claro que los métodos de identificación de deterioro buscan alcanzar su objetivo (identificación, localización ó cuantificación del deterioro o pronóstico de la vida útil remanente de una estructura) a través de diversas herramientas de adquisición, transmisión y análisis de los datos provenientes del monitoreo estructural, es decir haciendo uso únicamente de la respuesta dinámica de la estructura. Por esto, la mayoría de estos métodos centran su atención en solucionar los problemas propios de la adquisición de datos y las técnicas de análisis e interpretación de los mismos; sin embargo, poco se encuentra sobre la definición de un índice adecuado de deterioro o sobre los requisitos de los modelos numéricos a ser usados. Es evidente que el desarrollo de una metodología que agrupe el análisis no lineal de estructuras a partir del cual se pueda obtener el daño local, su magnitud, su localización y su efecto en los parámetros globales, con un procedimiento de cálculo de los parámetros modales de la estructura para cada estado de daño, será sin duda un aporte significativo al desarrollo de los métodos de identificación de daño estructural con base en el análisis de vibraciones.

Hasta aquí se ha tratado el término “deterioro” de manera genérica, como la pérdida de las propiedades mecánicas de una estructura independiente del tipo de estructura o de material que la componga. Sin embargo, dicho deterioro que depende del tipo de material del cual este hecha la estructura o el sistema en estudio, puede estar ocasionado por diferentes fenómenos. En el caso de estructuras de acero, el deterioro estructural se puede constituir en plastificación o en agrietamientos; en el caso de materiales frágiles, el deterioro estructural se debe a la fisuración del material lo que conlleva una pérdida del módulo de elasticidad y de la resistencia nominal. Tradicionalmente, el modelo constitutivo que representa el comportamiento no lineal de materiales frágiles se

denomina modelo de daño. En materiales compuestos, este deterioro se debe, normalmente, a fenómenos de fisuración de la matriz, a delaminación, a deslizamiento entre la fibra y la matriz o a la plastificación de la fibra. Así, según sea el caso, se llamará a cada tipo de deterioro por su nombre particular. En el caso del hormigón será denominado como *daño*.

## 1.2. Índices de daño sísmico

El control de salud estructural (SHM) ha llegado a tener una gran significancia dentro de la ingeniería civil ya que existe la necesidad, cada vez mayor, de monitorear los niveles de capacidad y de seguridad de las estructuras sujetas tanto a cargas habituales como a cargas eventuales y extremas como terremotos o huracanes. Esta necesidad ha crecido debido a los mayores requerimientos de seguridad [32]. En los casos en los que las estructuras están sometidas a cargas extremas y específicamente a un terremoto, es vital poder establecer un diagnóstico inmediato del estado estructural de los edificios, que facilite la respuesta de los organismos de socorro. Además, establecer el tipo, localización y magnitud de los daños estructurales luego de cada evento sísmico, permite tomar decisiones acertadas de reparación y rehabilitación de los edificios [26]. Es evidente que el SHM encuentra aplicación en la *ingeniería sísmica*, ya que permite determinar los índices de daño de las estructuras asociados a los diferentes eventos sísmicos.

En el campo de la ingeniería sísmica, tradicionalmente, la identificación, localización y cuantificación del daño estructural post sismo se realiza de forma visual, con las dificultades que esto conlleva, es decir, está sujeta a la experiencia y apreciación del evaluador. Por lo tanto, esta evaluación debe estar soportada por procedimientos estandarizados que permitan definir la magnitud del daño estructural bajo un criterio previamente establecido. Para estructuras porticadas de hormigón armado, los índices de daño sísmico ofrecen un criterio de cuantificación del daño, sufrido por un elemento o por una estructura, ocasionado por un evento determinado. Generalmente, los índices de daño sísmico están basados en la relación que existe entre la demanda sísmica y la capacidad de la estructura. La capacidad estructural está representada, principalmente, por la resistencia de la estructura, por la ductilidad o por la energía disipada [33].

Los índices basados en ductilidad o en resistencia comparan la demanda sísmica de ductilidad o resistencia con la respectiva capacidad de la estructura. La capacidad de la

estructura es obtenida a partir de pruebas de carga monótonas. Es decir, se está comparando una demanda cíclica, como es la debida al sismo con una capacidad monótona. Por esto se está omitiendo el efecto de la disipación de energía durante los ciclos en los cuales la estructura tiene un comportamiento no lineal.

Dado que las estructuras tienen una capacidad limitada de disipación de energía, existe un gran número de índices de daño sísmicos que utilizan la energía disipada como un parámetro de evaluación. Aguilar et al. [33] establecen como los principales modelos definidos en esta corriente los modelos de Banon et al. [34], Banon y Veneciano [35], Park [36] y Park et al [37, 38]. Es probable que la propuesta de índice de daño sísmico local más relevante sea la de Park y Ang [38] quienes, en 1985, propusieron un índice para estructuras de hormigón reforzado sometidas a cargas sísmicas. Dicho índice está enmarcado en los índices basados en disipación de energía de deformación y, además, contempla un valor escalar de ductilidad

$$D = \frac{\theta_m}{\theta_u} + \frac{\beta}{M_y \theta_u} \int dE \quad (1-3)$$

En esta ecuación,  $\theta_u$  es la ductilidad del elemento debido a cargas monótonas;  $\theta_m$  es la máxima ductilidad producida por el sismo;  $M_y$  es la resistencia máxima calculada de la estructura en rango elástico;  $\beta$  es un parámetro experimental para la calibración del modelo y  $dE$  es la incremento de disipación histerética de energía. El primer término del índice de daño de Park y Ang representa el daño debido a la máxima deformación experimentada por un elemento estructural durante un ciclo de carga; el segundo término representa el daño del elemento estructural debido a la disipación histerética de energía. Singhal y Kiremidjian [39] sostienen que este modelo ha sido muy usado debido a que es simple y además ha sido calibrado con datos de varias estructuras dañadas durante diferentes sismos.

En general, los índices de daño sísmico basados en resistencia, ductilidad o energía antes tratados son índices de daño local que son empleados en la evaluación sísmica de estructuras aporricadas. Se enfocan en la determinación del daño local mediante la evaluación del deterioro de cada elemento estructural (viga o columna). Existe también, un cierto número de trabajos enfocados en la determinación de un índice de daño global.

El índice de daño global propuesto por Park y Ang [40] está definido en términos de la disipación de energía de cada uno de los elementos dañados en la estructura

$$D_T = \sum \lambda_i D_i \quad ; \quad \lambda_i = \frac{E_i}{\sum E_i} \quad (1-4)$$

donde  $E_i$  es la energía disipada por el elemento estructural  $i$ . Este índice establece que todos los elementos estructurales tienen la misma importancia en el proceso disipativo global de la estructura, independiente de la historia de cargas y del patrón de deterioro sufrido.

DiPascuale y Cakmak [41] propusieron en 1990 un índice de daño global basado en el cambio del período fundamental de una estructura porticada luego de un evento sísmico

$$I_D = 1 - \frac{T_0}{T_{\max}} \quad (1-5)$$

donde  $T_{\max}$  es el período máximo alcanzado por la estructura durante la respuesta y  $T_0$  es el período inicial, en el rango elástico. Este modelo utiliza el primer modo de vibración de la estructura. En 1996, Oller et al. [42] proponen un índice de daño global para la evaluación del daño sísmico basado en la relación de fuerzas de la respuesta elástica y la respuesta no-lineal de pórticos sometidos a una prueba de carga tipo “push-over”

$$I_D = 1 - \frac{|K_i u_i|}{|K_0 u_i|} \quad (1-6)$$

donde  $K_i$  es la rigidez secante de la estructura en un estado dañado (no lineal) correspondiente al desplazamiento  $u_i$  y  $K_0$  es la rigidez secante de la estructura en el estado no dañado (elástico). Esta propuesta considera la dependencia que tiene la respuesta mecánica no lineal del tipo de carga aplicada, ya que utiliza el vector de desplazamientos nodales  $u_i$  que ha ocurrido en el estado de análisis. Si bien el índice de daño global ha sido definido para pórticos sometidos a cargas tipo “push-over”, es factible de ser usado en estructuras no aporticadas o continuas sometidas a diversas cargas incrementales.

El desarrollo de la tecnología en los sistemas de instrumentación para registrar las vibraciones debidas al ruido ambiental y el uso de diferentes índices de daño sísmico, ofrecen alternativas de diagnóstico pre y post sísmico de las estructuras. Sin embargo, es necesario el desarrollo de nuevas tecnologías que permita relacionar el

comportamiento no lineal de las estructura con sus parámetros dinámicos. El desarrollo de modelos numéricos de análisis no lineales de estructuras y la determinación de parámetros modales para diferentes estados de daño se convierte en una herramienta poderosa para establecer, de forma anticipada, los posibles daños que sufrirá una estructura ante un evento sísmico probable.

### **1.3. Cálculo de daño global a través del modelo constitutivo de daño**

La respuesta global de una estructura depende del comportamiento de cada una de sus partes; mientras más compleja sea la estructura, tanto en geometría como en el comportamiento de los materiales, más complejo es determinar la incidencia que pueda tener el deterioro de un elemento estructural en la respuesta global.

El análisis del daño local requiere la aplicación de modelos constitutivos adecuados que representen la no-linealidad del material y la elaboración de un modelo de elementos finitos que permita establecer su localización. De esta manera, mediante la integración adecuada de las respuestas locales, se puede obtener una respuesta global. Hanganu et al. [43], Oller y Barbat [44], Faleiro et al. [45] y Scotta et al. [46] presentan metodologías basadas en análisis de elementos finitos para la evaluación del daño local y global de estructuras de hormigón armado utilizando un modelo constitutivo de daño continuo para el hormigón.

Una de las ventajas de establecer los índices de daño mediante la modelización del comportamiento de los materiales con modelos constitutivos y un análisis de elementos finitos es poder establecer la magnitud y localización del daño local, puesto que, los cambios en los parámetros modales dependen de la naturaleza, magnitud y localización del daño [1].

En los trabajos antes mencionados [43-46], un aspecto que aun no está resultado es el efectos de la apertura y cierre de fisuras; este es un fenómeno que introduce un comportamiento complejo no lineal y afecta la respuesta modal de las estructuras. Como respuesta a esta necesidad se plantea en esta tesis un nuevo modelo constitutivo de daño a tracción y compresión mediante el cual se puedan establecer los índices de daño local y global y la correlación con la variación de frecuencia natural y con los modos propios de vibración.



## **1.4. El hormigón armado como un material compuesto**

Es de crucial importancia la tarea de determinar los parámetros físicos y mecánicos del hormigón armado que han de ser incluidos en un modelo de elementos finitos. Para la adecuada definición de estos valores es necesario acudir a la teoría del análisis de materiales compuestos. Estos materiales están conformados por una matriz la cual aloja a una o varias familias de fibras. En el caso del hormigón armado es aplicable esta configuración, ya que el hormigón es la matriz que aloja las barras de refuerzo, que, según su orientación, se pueden agrupar en diferentes familias de fibras: longitudinales o transversales. En el caso de estructuras porticadas con configuración ortogonal, la disposición de los refuerzos se hace en las tres direcciones cartesianas. Sin embargo, en el caso de las estructuras con geometría compleja, la dirección de los refuerzos dependerá de la localización y orientación del punto de análisis.

La determinación de los parámetros mecánicos para los materiales compuestos ha pasado en los últimos años de la teoría de mezcla clásica a la utilización de la teoría de mezcla en serie/paralelo. Mientras en la primera, la determinación de los parámetros se hace por el cálculo de un promedio ponderado en términos de la participación volumétrica de cada material componente, en la segunda, la determinación de los parámetros tiene en cuenta la orientación de las fibras en relación con la dirección de las solicitaciones. En el desarrollo de esta investigación se aplica la teoría de mezclas serie/paralelo propuesta por Rastellini en 2006 [47] e implementada por Martínez en 2008 [48] en el programa PLCD [49].

## **1.5. Teoría de mezclas serie/paralelo**

### **1.5.1. Definición de los componentes en serie y en paralelo de los tensores de deformación y tensión**

En la teoría de mezclas Serie/Paralelo (S/P) considera que, en la dirección de cada fibra, el comportamiento de los materiales componentes es en paralelo mientras que su comportamiento es en serie para el resto de direcciones. Para tener en cuenta esta doble condición es necesario dividir los tensores de deformación y de tensión de los materiales componentes en su dirección en serie y en paralelo.

Si se define  $e_1$  como el vector director que determina el comportamiento en paralelo, el tensor proyector en la dirección en paralelo se puede definir como el producto diádico

del vector unitario:  $N_p = e_1 \otimes e_1$  y el tensor proyector de cuarto orden en la dirección en paralelo se define como:  $P_p = N_p \otimes N_p$ .

El tensor proyector de cuarto orden en la dirección en serie se puede evaluar como el complementario del tensor en la dirección en paralelo:  $P_s = I - N_p$ . Estos tensores proyectores de cuarto orden permiten dividir el tensor de deformación  $\varepsilon$  en sus componentes en paralelo  $\varepsilon_p$  y en serie  $\varepsilon_s$ :

$$\varepsilon = \varepsilon_p + \varepsilon_s; \quad \varepsilon_p = P_p : \varepsilon \quad \text{y} \quad \varepsilon_s = P_s : \varepsilon \quad (1-7)$$

De forma análoga, el tensor de tensiones  $\sigma$  se puede dividir en sus componentes en paralelo  $\sigma_p$  y en serie  $\sigma_s$ :

$$\sigma = \sigma_p + \sigma_s; \quad \sigma_p = P_p : \sigma \quad \text{y} \quad \sigma_s = P_s : \sigma \quad (1-8)$$

### 1.5.2. Hipótesis para el modelo numérico

El modelo numérico desarrollado para obtener la relación tensión-deformación del material compuesto a partir de un comportamiento serie/paralelo de sus componentes se basa en las siguientes hipótesis:

- ✓ Los materiales componentes tienen la misma deformación en la dirección en paralelo (condición de iso-deformación).
- ✓ Los materiales componentes tienen la misma tensión en la dirección en serie (condición de iso-tensión).
- ✓ La contribución de los componentes a la respuesta del compuesto es directamente proporcional a su participación volumétrica en el mismo.
- ✓ Se considera una distribución homogénea de los distintos componentes en el compuesto.
- ✓ Los materiales componentes están perfectamente unidos entre ellos.

### 1.5.3. Ecuaciones constitutivas de los materiales componentes

El comportamiento de cada uno de los materiales componentes del compuesto se obtiene con su propia ecuación constitutiva. El hormigón sigue una ley constitutiva de daño y el refuerzo de acero es representado mediante la plasticidad clásica. Para estos



casos, la relación entre las tensiones y las deformaciones del material se puede escribir como

$$\text{Modelo de daño} \quad {}^k\sigma = (1-d) {}^kC_o : ({}^k\varepsilon) \quad (1-9)$$

$$\text{Modelo de elasto-plasticidad} \quad {}^k\sigma = {}^kC_o : {}^k\varepsilon^e = {}^kC_o : ({}^k\varepsilon - {}^k\varepsilon^p) \quad (1-10)$$

donde  ${}^k\sigma$  es el tensor de tensiones del material  $k$  del compuesto;  ${}^kC_o$  es el tensor constitutivo respectivo;  ${}^k\varepsilon$  y  ${}^k\varepsilon^p$  son el tensor de deformaciones totales y el tensor de deformaciones plásticas, respectivamente, y  $d$  es la variable interna de daño isótropo.

Las ecuaciones (1-9) y (1-10) se puede reescribir teniendo en cuenta la descomposición de los tensores en sus componentes en serie y en paralelo

$$\begin{bmatrix} {}^k\sigma_P \\ {}^k\sigma_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^kC_{PP} & {}^kC_{PS} \\ {}^kC_{SP} & {}^kC_{SS} \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} {}^k\varepsilon_P \\ {}^k\varepsilon_S \end{bmatrix} \quad (1-11)$$

El tensor constitutivo de cada material simple, representado por el superíndice  $k$ , se ha dividido en cuatro componentes según su participación. Así, por ejemplo, la componente  ${}^kC_{PP}$  es la parte del tensor constitutivo que actúa totalmente en paralelo, mientras la componente  ${}^kC_{SS}$  es la parte del tensor constitutivo cuyo comportamiento es en serie, las componentes  ${}^kC_{PS}$  y  ${}^kC_{SP}$  contienen los términos del tensor constitutivo que actúan combinados en serie y en paralelo.

La descomposición del tensor constitutivo de cada material simple se define por la doble contracción de los tensores proyectores de cuarto orden y el tensor constitutivo así

$$\begin{aligned} {}^kC_{PP} &= P_P : {}^kC : P_P \\ {}^kC_{PS} &= P_P : {}^kC : P_S \\ {}^kC_{SP} &= P_S : {}^kC : P_P \\ {}^kC_{SS} &= P_S : {}^kC : P_S \end{aligned} \quad (1-12)$$

Teniendo en cuenta que tanto el material de la matriz como el de la fibra tendrán un tensor proyector de cuarto orden común, y en función de la participación volumétrica se determina el tensor constitutivo del material compuesto como

$$\begin{aligned}
 {}^c C_{PP} &= ({}^f k {}^f C_{PP} + {}^m k {}^m C_{PP}) + {}^m k {}^f k ({}^f C_{PS} - {}^m C_{PS}) : A : ({}^m C_{SP} - {}^f C_{SP}) \\
 {}^c C_{PS} &= ({}^f k {}^f C_{PS} : A : {}^m C_{SS} + {}^m k {}^m C_{PS} : A : {}^f C_{SS}) \\
 {}^c C_{SP} &= ({}^m k {}^f C_{SS} : A : {}^m C_{SP} + {}^f k {}^m C_{SS} : A : {}^f C_{SP}) \\
 {}^c C_{SS} &= \frac{1}{2} ({}^m C_{SS} : A : {}^f C_{SS} + {}^f C_{SS} : A : {}^m C_{SS})
 \end{aligned} \tag{1-13}$$

$$A = ({}^m k {}^f C_{SS} + {}^f k {}^m C_{SS})^{-1} \tag{1-14}$$

donde los superíndices  $c$ ,  $m$  y  $f$  designan al material: compuesto, matriz y fibra, respectivamente. Los parámetros  ${}^f k$  y  ${}^m k$  representan la participación volumétrica de cada material simple, fibra y matriz respectivamente.

#### 1.5.4. Ecuaciones de equilibrio y compatibilidad

Las ecuaciones que definen el equilibrio de tensiones y establecen la compatibilidad de deformaciones de los componentes del compuesto se obtienen del análisis de las hipótesis expuestas anteriormente. La teoría de mezclas serie/paralelo desarrollada está ideada para materiales compuestos únicamente por dos componentes: fibra y matriz. Con este planteamiento, la relación entre ambos materiales en las direcciones en serie y en paralelo debe ser

$$\text{Comportamiento en paralelo} \quad \begin{cases} {}^c \varepsilon_p = {}^m \varepsilon_p = {}^f \varepsilon_p \\ {}^c \sigma_p = {}^m k {}^m \sigma_p + {}^f k {}^f \sigma_p \end{cases} \tag{1-15}$$

$$\text{Comportamiento en serie} \quad \begin{cases} {}^c \varepsilon_s = {}^m k {}^m \varepsilon_s + {}^f k {}^f \varepsilon_s \\ {}^c \sigma_s = {}^m \sigma_s = {}^f \sigma_s \end{cases} \tag{1-16}$$

#### 1.5.5. Implementación numérica de la teoría de mezclas serie/paralelo

Interpretando que la teoría de mezclas es un gestor de ecuaciones constitutivas, su implementación en un código de elementos finitos se debe realizar a nivel constitutivo, Es decir, en la parte del código que, a partir de la deformación de un punto de integración de Gauss, proporciona la tensión que le corresponde. Luego, siendo la variable que entra en el algoritmo el tensor de deformación del compuesto,  ${}^c \varepsilon$ , en el instante de tiempo  $t + \Delta t$  el algoritmo deberá encontrar el estado tensión-deformación

de cada uno de los componentes del compuesto que cumplan con las ecuaciones de equilibrio y compatibilidad, ecuaciones (1-15) y (1-16), y devolver al código el tensor de tensiones del compuesto,  ${}^c\sigma$ .

La primera operación a realizar en el algoritmo es separar el tensor de deformación en sus partes en serie y en paralelo, para calcular las deformaciones de los materiales componentes fibra y matriz. Una vez hecha esta separación, la componente en paralelo de la deformación es la misma para ambos materiales componentes, tal como indica la ecuación (1-15).

Por otro lado, la componente en serie requiere una primera predicción de las deformaciones esperadas en alguno de los componentes. Si esta predicción se realiza sobre el material matriz, el incremento de las deformaciones esperadas en el paso de carga actual se puede obtener como

$$\left[ {}^m\Delta\epsilon_s \right]^0 = A : \left[ {}^f C_{SS} : {}^c\Delta\epsilon_s + {}^f k \left( {}^f C_{SS} - {}^m C_{SP} \right) {}^c\Delta\epsilon_p \right] \quad (1-17)$$

A es definida por la ecuación (1-14) y  ${}^c\Delta\epsilon_s$  se define como  ${}^c\Delta\epsilon_s = {}^{t+\Delta t} \left[ {}^c\epsilon_s \right] - {}^t \left[ {}^c\epsilon_s \right]$ .

Con esta primera aproximación de las deformaciones en serie de la matriz, se puede calcular el tensor de deformaciones de la fibra a partir de la ecuación de equilibrio (1-16), obteniéndose la expresión

$${}^{t+\Delta t} \left[ {}^f\epsilon_s \right]^0 = \frac{1}{{}^f k} {}^{t+\Delta t} \left[ {}^c\epsilon_s \right] - \frac{{}^m k}{{}^f k} {}^{t+\Delta t} \left[ {}^m\epsilon_s \right] \quad (1-18)$$

Una vez conocidas las deformaciones en serie del material fibra y del material matriz, éstas se deben reagrupar con las componentes en paralelo para poder obtener el tensor de deformación de cada material componente. En este punto, se debe utilizar las ecuaciones constitutivas de cada uno de los materiales, en este caso las ecuaciones (1-9) y (1-10), de forma independiente, para obtener los respectivos tensores de tensión y la actualización de sus variables internas. Las componentes en serie de las tensiones que se obtengan para el material fibra y el material matriz deberán verificar la condición de equilibrio (1-16) con un margen de tolerancia establecido

$$\Delta\sigma_s = {}^m\sigma_s - {}^f\sigma_s \leq \text{toler} \quad (1-19)$$

donde  $\Delta\sigma_s$  es la tensión residual. Si ésta resulta ser menor que la tolerancia, la predicción inicial de las deformaciones en serie de la matriz habrá resultado ser correcta

y, por tanto, también las tensiones obtenidas. Por otro lado, si la ecuación (1-19) no se verifica, deberá corregirse la predicción inicial de la deformación. Esta corrección se realiza mediante un esquema de Newton-Raphson, para lo cual es necesario obtener el Jacobiano del residuo. En este caso, la expresión del Jacobiano es [47]

$$J = \left. \frac{\partial \Delta \sigma_s}{\partial {}^m \varepsilon_s} \right|_{{}^m \varepsilon_s = [{}^m \varepsilon_s]^n} = [{}^m C_{SS}]^n + \frac{{}^m k}{f k} [{}^f C_{SS}]^n \quad (1-20)$$

siendo  $n$  el número de la última iteración realizada.

Una vez obtenido el Jacobiano, la corrección de la predicción del tensor de deformaciones en serie de la matriz es

$$[{}^m \varepsilon_s]^{n+1} = [{}^m \varepsilon_s]^n - J^{-1} : [\Delta \sigma_s]^n \quad (1-21)$$

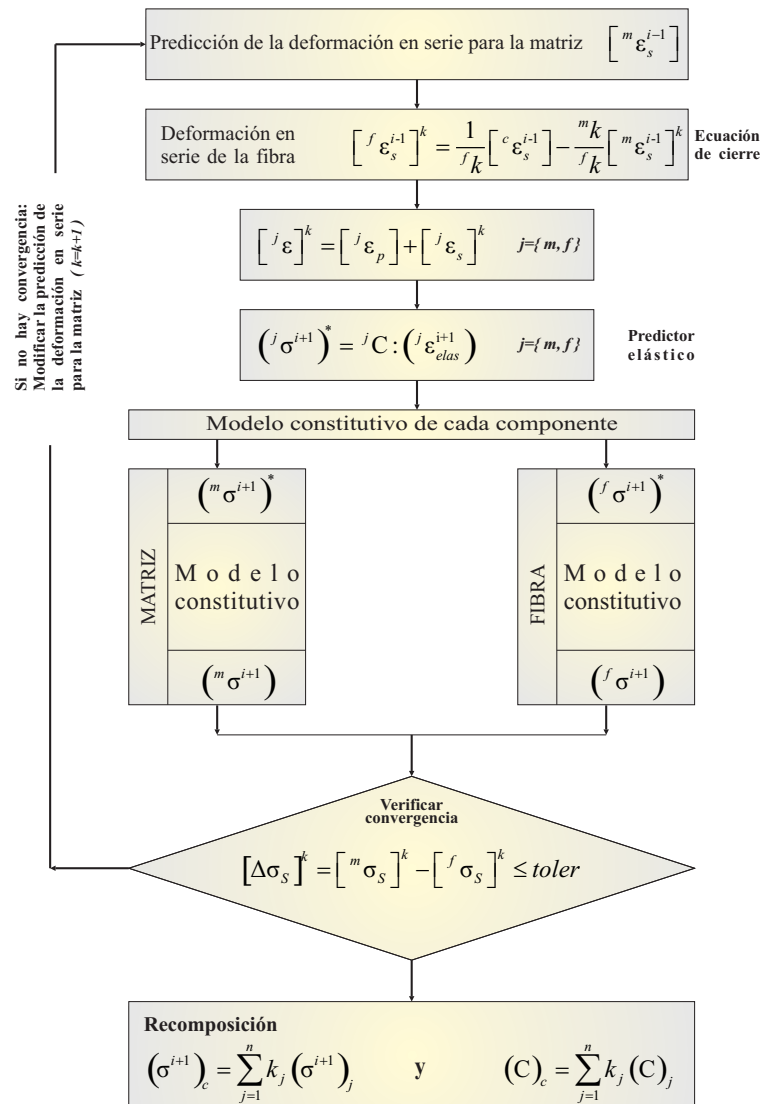


Figura 1-1. Algoritmo de cálculo en la teoría serie/paralelo. Adaptado de [48].



Para obtener una convergencia cuadrática con la teoría de mezclas serie/paralelo, el Jacobiano se debe obtener utilizando los tensores constitutivos tangentes de la fibra y de la matriz. Según la ecuación constitutiva que se utilice para cada uno de estos materiales, puede ser que no exista una expresión analítica con la que obtener el tensor constitutivo tangente. Este problema lo solucionó Martínez [48] implementado en el PLCD [49] un algoritmo de derivación numérica por perturbaciones y obteniendo un algoritmo robusto.

El diagrama de flujo representado en la Figura 1-1 muestra el modo en que funciona el algoritmo de la teoría de mezclas serie/paralelo.

## 1.6. Modelos constitutivos para geomateriales

El comportamiento mecánico de geomateriales o de materiales “quasi-brittle” tales como hormigón, mortero, ladrillos o rocas, es complejo. La formación de micro-fisuras y el deslizamiento entre partículas granulares contribuyen a un comportamiento altamente no-lineal [50]. Estos fenómenos se caracterizan principalmente por la influencia de la cohesión y fricción en la resistencia del material, el ablandamiento que muestra la curva tensión-deformación, la dilatación volumétrica [51] y, como consecuencia obvia, disminuye el módulo de elasticidad del material.

Siendo amplio el campo de aplicación de este tipo de materiales y, en particular, del hormigón, varios autores han desarrollado diferentes modelos constitutivos que permiten representar su comportamiento mecánico. La teoría clásica de fractura (CFM<sup>2</sup>) proporciona bases para este tipo de modelos, principalmente aquellos que permiten simular la apertura y el cierre de fisuras. Unos de los primeros en desarrollar un modelo de fractura no-lineal usando el método de los elementos finitos para modelar el comportamiento del hormigón fueron Hillerborg et al. [52]; también han publicado trabajos en esta área Rots [53] y Bazant [54], entre otros.

A partir de 1958, Kachanov [55] estableció las bases de la teoría del daño, que fue usada para representar el comportamiento mecánico de diferentes materiales. Al inicio, el modelo de daño se aplicó para la representación de fenómenos de dislocación y ablandamiento en piezas metálicas. El aporte de autores tales como Lemaitre [56], Simo y Ju [57, 58] quienes propusieron el modelo de daño isótropo, Oliver et al. [59],

---

<sup>2</sup> CFM: Sigla en inglés de “computational fracture mechanics”.

Chaboche [60, 61] o Ju [62] por mencionar algunos, ha permitido constituir la mecánica de daño continuo (CDM<sup>3</sup>) como una teoría de gran utilidad en modelizar materiales quasi-frágiles.

Sin embargo, fue solo en los inicios de los años ochenta que la CDM se empezó a utilizar en la modelización del hormigón. Algunos de estos modelos se basan en la CDM y la teoría clásica de la plasticidad, como los de Oller [63], Mazars y Pijaudier-Cabot [64], Lubliner et al. [65], Jason et al. [66], Tao [51], entre otros.

Los modelos constitutivos de daño continuo se definen a partir de una variable interna de deterioro de la resistencia y del módulo de elasticidad. Esta variable puede ser de orden escalar o tensorial; en el caso de daño isótropo (escalar) [57, 59] no se considera la orientación de la micro fisuración, lo que omite el efecto local del daño en la anisotropía o el efecto de la anisotropía del material en la dirección de la fisuración.

Existen modelos que tienen en cuenta la anisotropía del material no dañado y dañado, donde la variable de daño está definida en el espacio tensorial de segundo o cuarto orden [67-71]. El uso de una variable de daño de orden mayor no solo permite considerar la orientación del daño (o la carga que lo genera) sino también los diferentes mecanismos de daño [72].

Un reto de los modelos basados en la CDM es la modelización de los procesos de apertura y cierre de fisuras, ya que la variable interna de daño no es decreciente. Por esto, para el análisis de la respuesta mecánica de materiales sometidos a ciclos de carga de tracción-compresión, son necesarios modelos con variables diferenciadas de daño a tracción y a compresión. Mazars et al. [64] y Faria et al. [73] presentan modelos en los cuales la evolución de las variables de daño a tracción y a compresión se activa con funciones de discontinuidad independientes entre sí. En el caso de cargas axiales donde es fácil identificar si el proceso es de tracción o compresión, los resultados de estos modelos son buenos, mientras que cuando las cargas producen cortantes, dichos modelos presentan deficiencias, puesto que realizan una descomposición aditiva del tensor de tensiones y, separadamente, comparan con el respectivo umbral de discontinuidad. Como consecuencia se produce una falta de continuidad en la respuesta y una inadecuada representación de las tensiones cortantes.

Sin embargo, la independencia de umbrales de daño del modelo de Faria et al. [73] se aprovechó como una ventaja estructural en la modelización de juntas constructivas,

---

<sup>3</sup> CDM: Sigla en inglés de “continuum damage mechanics”

en las cuales la resistencia a tracción es nula mientras la resistencia a compresión es alta. Paredes et al. [74] muestran un ejemplo de aplicación de esta alternativa de modelo de juntas.

### 1.7. Modelo constitutivo de daño isótropo

El concepto de daño permite representar la presencia y crecimiento de fisuras y vacíos en un material [75]. En la mecánica de medios continuos, esta representación se puede hacer mediante una variable interna de daño que relaciona el tensor de tensiones efectivas (definido por Kachanov [55]) y el tensor de tensiones reales o tensor de Cauchy

$$\sigma = (1 - d)\sigma_o \quad (1-22)$$

donde  $\sigma$  es el tensor de tensiones de Cauchy y representa la respuesta del material en estado real o dañado;  $\sigma_o$  es el tensor de tensiones efectivas y representa el comportamiento del material en estado no dañado;  $d$  es la variable interna de daño isótropo y es una medida de la pérdida de rigidez y resistencia del material. Si  $d = 0$  significa que el material no ha superado su umbral de resistencia y por lo tanto está en estado no dañado. Cuando el material a llegado a un daño local total la variable interna alcanza su máximo valor:  $d = 1$ .

El tensor de tensiones  $\varepsilon$  se define como la variable libre, y se puede determinar el tensor de tensiones efectivas como

$$\sigma_o = C_o : \varepsilon \quad (1-23)$$

donde  $C_o$  es el tensor constitutivo de cuarto orden del material. En la Figura 1-2 se muestra una representación esquemática de la hipótesis de tensión efectiva.

Este modelo cumple con los principios termodinámicos para procesos no reversibles, adiabáticos e isotérmicos. Para un proceso isotérmico la energía libre de Helmholtz ( $\psi$ ) está definida en términos de la variable de daño y la energía elástica libre ( $\psi_o$ ) como

$$\psi = \psi(\varepsilon, d) = (1 - d)\psi_o \quad (1-24)$$

La energía elástica libre es función de la variable libre y está definida por

$$\psi_o(\varepsilon) = \frac{1}{2} \varepsilon : C_o : \varepsilon \quad (1-25)$$

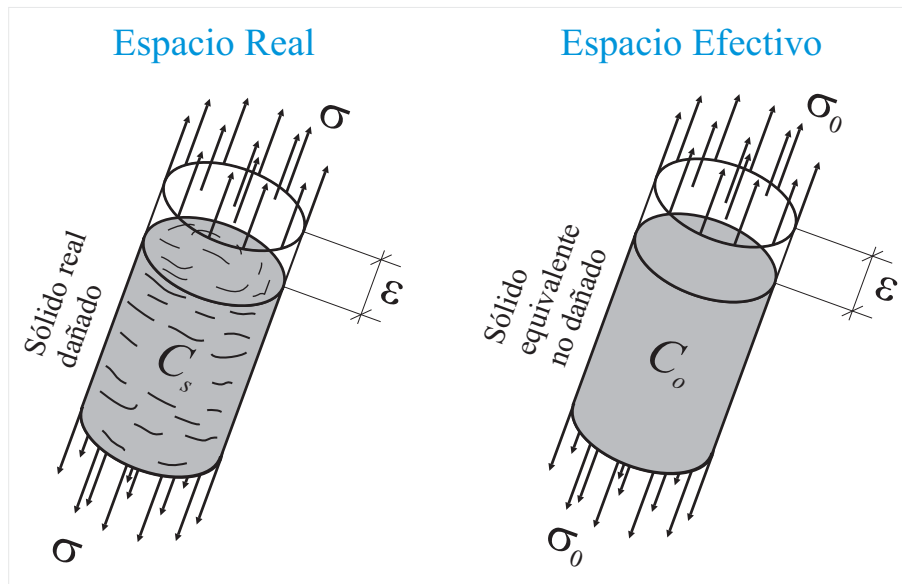


Figura 1-2. Representación esquemática de la hipótesis de tensión efectiva. Figura adaptada del Libro *Fractura mecánica. Un enfoque global* [75].

En procesos térmicamente estables se debe cumplir la inecuación de Clausius–Planck definida por

$$\Xi = \sigma : \dot{\varepsilon} - \dot{\psi} \geq 0 \quad (1-26)$$

donde,  $\dot{\psi}$  es la variación temporal de la energía libre definida como

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} : \dot{\varepsilon} - \frac{\partial \psi}{\partial d} \dot{d} \quad (1-27)$$

Remplazando la ecuación (1-27) en la (1-26) se obtiene la siguiente forma de la desigualdad de Clausius–Planck

$$\Xi = \left( \sigma - \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} \right) \dot{\varepsilon} + \frac{\partial \psi}{\partial d} \dot{d} \geq 0 \quad (1-28)$$

Según el método de Coleman (ver Maugin [76]) la desigualdad se debe cumplir para cualquier variación temporal de la variable libre  $\varepsilon$ , por lo tanto, el multiplicador de  $\dot{\varepsilon}$  tiene que ser nulo, obteniéndose así la ley constitutiva hiperelástica del modelo constitutivo de daño escalar

$$\sigma = \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} \quad (1-29)$$



Considerando la ecuación (1-24), se tiene que la ecuación constitutiva para el modelo de daño isótropo se puede escribir como

$$\sigma = \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} = (1-d) \frac{\partial \psi_o}{\partial \varepsilon} = (1-d) C_o : \varepsilon \quad (1-30)$$

donde  $\sigma$  es el tensor de Segundo orden de Cauchy;  $C_o$  es el tensor constitutivo elástico de cuarto orden; y  $\psi$  es la energía libre por unidad de volumen.

La disipación mecánica se puede obtener de las ecuaciones (1-24) y (1-28)

$$\Xi = \psi_o \dot{d} \quad (1-31)$$

Un desarrollo completo del modelo de daño isótropo se puede encontrar en [75].

### 1.8. Modelo constitutivo de daño diferenciado $d^+, d^-$ de Faria

En 1998 Faria et al. [73] realizaron una formulación de daño continuo contemplando dos variables internas de daño: daño a tracción ( $d^+$ ) y daño a compresión ( $d^-$ ), con el fin de hacer frente a problemas en tres dimensiones de presas de hormigón sometidas a cargas sísmicas. A continuación se hace un resumen de la formulación de este modelo, cuya formulación completa se puede consultar en la referencia [73].

Este modelo requiere de la descomposición aditiva del tensor de tensiones efectivas  $\sigma_o = C_o : (\varepsilon - \varepsilon^p) = C_o : \varepsilon^e$ , en un tensor a tracción más otro a compresión. El tensor de tensiones de tracciones está definido por:  $\sigma_o^+ = \langle [\sigma_o]_i \rangle p_i \otimes p_i$  donde  $\langle [\sigma_o]_i \rangle$  es la función de Macaulay de la  $i$ -ésima tensión principal del tensor de tensiones efectivas, y  $p_i$  es la respectiva dirección principal. El tensor de tensiones de compresión  $\sigma_o^-$  se calcula como  $\sigma_o^- = \sigma_o - \sigma_o^+$ .

Este modelo cumple con los principios termodinámicos de procesos no reversibles y define la energía libre de Helmholtz como  $\psi(\varepsilon, \varepsilon^p, d^+, d^-) = (1-d^+) \psi_o^+ + (1-d^-) \psi_o^-$ , donde las energías elásticas libres de tracción y compresión están definidas por

$$\psi_o^+(\sigma_o(\varepsilon, \varepsilon^p)) = \frac{1}{2} \sigma_o^+ : C_o^{-1} : \sigma_o \quad (1-32)$$

$$\psi_o^-(\sigma_o(\varepsilon, \varepsilon^p)) = \frac{1}{2} \sigma_o^- : C_o^{-1} : \sigma_o \quad (1-33)$$

De esta manera, para el estado elástico se cumple que

$$\psi_0 = \psi_0^+ + \psi_0^- = \frac{1}{2}(\sigma_o^+ + \sigma_o^-) : C_o^{-1} : \sigma_o = \frac{1}{2} \varepsilon : C_o : \varepsilon \quad (1-34)$$

Por la forma cuadrática que tienen las expresiones de las energías elásticas libres de las ecuaciones (1-32) y (1-33), se puede intuir que son positivas y, por lo tanto, la energía  $\psi$  también será positiva. Además, la forma matricial de  $C_o$  es definida positiva y las variables de daño  $d^+$  y  $d^-$  en un punto de análisis (punto de Gauss) están definidas entre 0.0 para un estado virgen del punto del material y 1.0 en estado completamente dañado.

Este modelo define dos criterios de daño, una para tracción y otro para compresión

$$g^+(\bar{\tau}^+, c^+) = \bar{\tau}^+ - c^+ \leq 0 \quad (1-35)$$

$$g^-(\bar{\tau}^-, c^-) = \bar{\tau}^- - c^- \leq 0 \quad (1-36)$$

donde  $\bar{\tau}^+$  y  $\bar{\tau}^-$  son dos funciones que transforman el tensor de tensiones en un escalar. Las funciones de tensión equivalente de tracción y compresión son

$$\bar{\tau}^+ = \left[ \sigma_o^+ : C_o^{-1} : \sigma_o^+ \right]^{\frac{1}{2}} \quad (1-37)$$

$$\bar{\tau}^- = \left[ \sqrt{3}(k\sigma_{oct}^- + \tau_{oct}^-) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (1-38)$$

siendo

$$\sigma_{oct}^- = \frac{I^-}{3}; \quad \tau_{oct}^- = \left[ \frac{2}{3} J_2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (1-39)$$

El parámetro  $k$  se obtiene comparando un ensayo de compresión axial con otro de compresión biaxial y, según Kupfer et al. [77], sus valores están entre 1.16 y 1.2;  $I^-$  es el primer invariante del tensor  $\sigma_o^-$ .

Este modelo define dos umbrales elásticos de cambio de comportamiento  $c^+$  y  $c^-$ , respectivamente, en términos de las propiedades del material; los valores iniciales de los umbrales están definidos como

$$c_o^+ = \frac{f_o^+}{\sqrt{E}} \quad (1-40)$$

$$c_o^- = \left[ \frac{f_o^- \sqrt{3}}{3} (2 - k) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (1-41)$$

donde  $f_o^+$  y  $f_o^-$  son la resistencia máxima del material a tracción y compresión, respectivamente;  $E$  es el módulo de elasticidad del material y  $k$  fue definido en el párrafo anterior.

La ley de evolución de las variables internas de daño se expresan como

$$\dot{d}^+ = \dot{\mu}^+ \frac{\partial G^+(c^+)}{\partial c^+} \quad (1-42)$$

$$\dot{d}^- = \dot{\mu}^- \frac{\partial G^-(c^-)}{\partial c^-} \quad (1-43)$$

Los parámetro de consistencia de daño a tracción y a compresión,  $\dot{\mu}^+$  y  $\dot{\mu}^-$ , respectivamente, permiten controlar los proceso de carga, descarga y recarga. Cuando el umbral inicial es alcanzado, se activa la variable de daño, cumpliendo la condición de consistencia. A partir de esa situación, la función umbral variará igual que la función de tensión equivalente cumpliendo con la condición de permanencia sobre la superficie umbral de daño

$$c_t^+ = \max \{ c_o^+, \max(\tau_s^+) \} \quad ; \quad s \in \{0, t\} \quad (1-44)$$

$$c_t^- = \max \{ c_o^-, \max(\tau_s^-) \} \quad ; \quad s \in \{0, t\} \quad (1-45)$$

Integrando la evolución de la variable interna de daño a tracción, definida por

$$\dot{d}^+ = \dot{G}^+(c^+) \frac{\partial G^+(c^+)}{\partial c^+} \dot{c}^+ \quad (1-46)$$

se obtiene la función de daño a tracción  $d^+$  que representa el ablandamiento del material a tracción uniaxial

$$d^+ = G^+(c^+) = 1 - \frac{c_o^+}{c^+} \exp \left( A^+ \left( 1 - \frac{c^+}{c_o^+} \right) \right) ; \quad \text{si} \quad c^+ \geq c_o^+ \quad (1-47)$$

donde el parámetro  $A^+$  depende de las propiedades mecánicas del material y es definido respetando los criterios de objetividad de la malla. Esta objetividad se logra

regularizando la energía de fractura  $G_f$  con la denominada longitud característica  $l_{ch}$  que depende de la dimensión característica de cada elemento de la malla de elementos finitos

$$A^+ = \left( \frac{G_f E}{l_{ch} (f_o^+)^2} - \frac{1}{2} \right) \quad (1-48)$$

Igualmente, a partir de la ley de evolución de la función de daño a compresión, dada por

$$\dot{d}^- = \dot{G}^-(c^-) \frac{\partial G^-(c^-)}{\partial c^-} \dot{c}^- \quad (1-49)$$

se define la función de daño a compresión  $d^-$  inspirada en la fórmula presentada por Mazars y Pijaudier-Cabot en 1989 [64]

$$d^- = G^-(c^-) = 1 - \frac{c_o^-}{c^-} (1 - c^-) - A^- \exp \left( B^- \left( 1 - \frac{c^-}{c_o^-} \right) \right); \quad \text{si } c^- \geq c_o^- \quad (1-50)$$

Mazars et al. [64] establecen que los parámetros  $A^-$  y  $B^-$  pueden ser definidos a partir de dos puntos de la curva tensión-deformación en un ensayo de compresión axial y propone valores de  $A^- = 1.4$  y  $B^- = 1.850$ ; Paredes et al. [74], también proponen un procedimiento para el cálculo de estos parámetros.

A partir de la segunda ley de la termodinámica y haciendo uso del razonamiento de Coleman (ver Maugin [76]), se obtiene la ley constitutiva de este modelo de daño

$$\left( \sigma - \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} \right) = 0 \quad (1-51)$$

$$\sigma = (1 - d^+) \sigma_o^+ + (1 - d^-) \sigma_o^- \quad (1-52)$$

donde  $\sigma$  es el tensor de tensiones de Cauchy y representa la respuesta del material en estado real o dañado;  $\sigma_o^+$  es el tensor de tensiones efectivas de tracción y  $\sigma_o^-$  es el tensor de tensiones efectivas de compresión.

## 1.9. Modelo constitutivo de elasto-plasticidad

En problemas de pequeñas deformaciones, la teoría de la plasticidad se caracteriza suponiendo que la deformación total es una descomposición aditiva de sus componentes

elástica y plástica  $\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p$ . Debido a que la componente plástica es irreversible, los procesos energéticos que ocurren son disipativos y dependientes de la trayectoria de la relación tensión-deformación. Esta relación está dada por

$$\sigma = C : \varepsilon^e = C : (\varepsilon - \varepsilon^p) \quad (1-53)$$

donde,  $\sigma$  es el tensor de segundo orden de Cauchy y  $C$  es el tensor elástico de cuarto orden. De acuerdo a la teoría de la plasticidad, basada en la mecánica de medios continuos la cual describe el comportamiento de un sólido ideal a nivel macroscópico, la zona elástica -lineal o no lineal- está delimitada por una función de fluencia; mientras la zona elasto-plástica está descrita por una relación no proporcional de tensiones y deformaciones. En esta zona, la relación entre los incrementos de tensiones y los incrementos de deformaciones puede ser positiva, cero o negativa, dependiendo del tipo de comportamiento elasto-plástico: endurecimiento, plasticidad perfecta o ablandamiento, respectivamente. Esta respuesta está condicionada por las características mecánicas del material.

El comportamiento en la zona elástica está descrito por la ley de Hooke; el límite entre la zona elástica y la zona elasto-plástica es dado por una función de fluencia y el comportamiento en la zona elasto-plástica está descrito por: (i) la descomposición de la deformación total en sus componentes elástica y plástica, (ii) una ley de flujo plástico y (iii) un grupo de variables internas y sus respectivas leyes de evolución.

La función de fluencia es una función escalar del tensor de tensiones y se conoce como la función de fluencia plástica

$$g(\sigma; q) = 0 \quad (1-54)$$

donde  $\sigma$  es el tensor de segundo orden de Cauchy y  $q$  es un grupo de variables internas. La función de fluencia plástica en el espacio de tensiones es una superficie que envuelve la zona elástica la cual se puede expandir o contraer dependiendo si el comportamiento plástico del material es de endurecimiento o ablandamiento.

La descomposición del cambio de deformación total ha sido un criterio para establecer diferencias entre las teorías de plasticidad existentes. La teoría de Levi-von Mises admite que el incremento de la deformación total es igual al incremento de la deformación plástica  $\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^p \Rightarrow \dot{\varepsilon}^e = 0$ , mientras que la teoría de Prandtl-Reus sostiene que el incremento de la deformación total es la adición del incremento de la

deformación elástica y el incremento de la deformación plástica  $\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^e + \dot{\varepsilon}^p$ ; de esta forma, la relación entre el incremento de tensiones y el incremento de deformaciones esta dado por

$$\dot{\sigma} = C_t : \dot{\varepsilon} = C_t : (\dot{\varepsilon}^e + \dot{\varepsilon}^p) \quad (1-55)$$

donde  $C_t$  es el tensor elasto-plástico tangente de cuarto orden.

Tabla 1-1. Características del modelo constitutivo de elasto-plasticidad

Característica	Ecuación
Función de fluencia plástica de von Mises	$g(J_2; \tau_{oct}^{\max}) = \frac{1}{2} s : s - [\tau_{oct}^{\max}]^2 = 0$
Potencial de flujo plástico y ley de flujo plástico	$G(J_2; \tau_{oct}^{\max}) = g(J_2; \tau_{oct}^{\max})$
Ley de flujo plástico	$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial (J_2; \tau_{oct}^{\max})}{\partial J_2} = \dot{\lambda} s$
Condición de consistencia plástica de Prager	$\dot{g}(J_2; \tau_{oct}^{\max}) = s : \dot{s} = 0$
Parámetro de consistencia plástica	$\dot{\lambda} = \sqrt{\frac{\dot{J}_2}{J_2}} ; \dot{J}_2 = \frac{1}{2} (e^p : e^p)$
Tensor elasto-plástico tangente de cuarto orden	$C_t = C - \frac{C : s \otimes s : C}{s : C : s}$

En pequeñas deformaciones, la teoría de plasticidad clásica admite la hipótesis de Prandtl-Reus como válida para la descomposición de la deformación total. Por lo tanto, la deformación plástica representa la variable interna fundamental y su evolución está definida por la ley de flujo plástico

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial G(\sigma; q)}{\partial \sigma} \quad (1-56)$$

donde  $G(\sigma; q)$  es el potencial de flujo plástico y  $\dot{\lambda}$  es un escalar no negativo denominado como parámetro de consistencia plástica.

Cuando el potencial de flujo plástico es considerado igual a la función de fluencia plástica se dice que la ley de flujo plástico es asociada

$$G(\sigma; q) \equiv g(\sigma; q) \quad (1-57)$$



Las ecuaciones de Kuhn-Tucker,  $\dot{\lambda} = 0$ ;  $g(\sigma; q) \leq 0$  y  $\dot{\lambda}g(\sigma; q) = 0$ , permiten satisfacer simultáneamente la condición de consistencia plástica de Prager,  $\dot{g}(\sigma; q) = 0$  y las condiciones de carga/descarga.

En la presente investigación, cada barra de acero es representada por una ley constitutiva elasto-plástica asociada. El límite del dominio elástico, ecuación (1-54), se establece por medio de la función de fluencia de von Mises; para el dominio plástico se usa una ley de flujo plástico asociada de acuerdo con la hipótesis de Prandtl-Reus [78]; se considera un comportamiento de elasto-plasticidad perfecta, es decir, no es necesario definir variables internas de efectos de endurecimiento/ablandamiento [79].

### 1.10. Observaciones

En este capítulo se han descrito una serie de temas relacionados con el objetivo de esta tesis. Los temas concernientes a la identificación de daño utilizando análisis de vibraciones, y la determinación de índices de daños sísmicos, se remarcan como un campo de aplicación de los desarrollos constitutivos y numéricos que serán descritos en los próximos capítulos. La teoría de mezclas serie/paralelo, la modelación de materiales compuestos reforzados con fibras cortas y todo lo referente a los modelos constitutivos de daño, será la base teórica de los nuevos desarrollos a ser planteados en este trabajo. En el Anexo A se presenta una revisión global de la teoría de cálculo de frecuencias y modos naturales de vibración.

### Bibliografía capítulo 1

- [1] O.S. Salawu, Detection of structural damage through changes in frequency: a review, *Engineering Structures*, 19 (1997) 718-723.
- [2] S.W. Doebling, C.R. Farrar, M.B. Prime, A Summary Review of Vibration-Based Damage Identification Methods, *Shock & Vibration Digest*, 30 (1998) 91.
- [3] C.R. Farrar, S.W. Doebling, D.A. Nix, Vibration-based structural damage identification, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 359 (2001) 131-149.
- [4] Y.J. Yan, L. Cheng, Z.Y. Wu, L.H. Yam, Development in vibration-based structural damage detection technique, *Mechanical Systems and Signal Processing*, 21 (2007) 2198-2211.
- [5] D. Montalvão, N.M.M. Maia, A.M.R. Ribeiro, A Review of Vibration-based Structural Health Monitoring with Special Emphasis on Composite Materials, *The Shock and Vibration Digest*, 38 (2006) 295-324.

- [6] H. Fukunaga, M. Kameyama, Y. Ogi, Damage identification of laminated composite structures based on dynamic residual forces, *Advanced Composite Materials*, 10 (2001) 209-218.
- [7] J.M.W. Brownjohn, A. De Stefano, Y.-L. Xu, H. Wenzel, A.E. Aktan, Vibration-based monitoring of civil infrastructure: challenges and successes, *Journal of Civil Structural Health Monitoring*, 1 (2011) 79-95.
- [8] J.-T. Kim, N. Stubbs, Nondestructive Crack Detection Algorithm for Full-Scale Bridges, *Journal of Structural Engineering*, 129 (2003) 1358.
- [9] X.Q. Zhu, S.S. Law, Nonlinear Characteristics of Damaged Reinforced Concrete Beam from Hilbert-Huang Transform, *Journal of Structural Engineering*, 133 (2007) 1186-1191.
- [10] S.S. Law, X.Q. Zhu, Nonlinear Characteristics of Damaged Concrete Structures under Vehicular Load, *Journal of Structural Engineering*, 131 (2005) 1277-1285.
- [11] G. Ma, H. Hao, Y. Lu, Y. Zhou, Distributed Structural Damage Generated by High-Frequency Ground Motion, *Journal of Structural Engineering*, 128 (2002) 390.
- [12] Y.-S. Lee, M.-J. Chung, A study on crack detection using eigenfrequency test data, *Computers & Structures*, 77 (2000) 327-342.
- [13] J.-T. Kim, Y.-S. Ryu, H.-M. Cho, N. Stubbs, Damage identification in beam-type structures: frequency-based method vs mode-shape-based method, *Engineering Structures*, 25 (2003) 57-67.
- [14] L.H. Yam, Y.J. Yan, J.S. Jiang, Vibration-based damage detection for composite structures using wavelet transform and neural network identification, *Composite Structures*, 60 (2003) 403-412.
- [15] M.I. Friswell, J.E.T. Penny, D.A.L. Wilson, Using vibration data and statistical measures to locate damage in structures, *Modal Analysis: The International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis*, 9 (1994) 239-254.
- [16] M.I. Friswell, Damage Identification Using Inverse Methods, *Philosophical Transactions: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 365 (2007) 393-410.
- [17] F. Vestroni, D. Capecchi, DAMAGE DETECTION IN BEAM STRUCTURES BASED ON FREQUENCY MEASUREMENTS, *Journal of Engineering Mechanics*, 126 (2000) 761.
- [18] M. Pastor, M. Binda, T. Harčarik, Modal Assurance Criterion, *Procedia Engineering*, 48 (2012) 543-548.
- [19] U. Lee, J. Shin, A frequency response function-based structural damage identification method, *Computers & Structures*, 80 (2002) 117-132.
- [20] Z. Wang, R.M. Lin, M.K. Lim, Structural damage detection using measured FRF data, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 147 (1997) 187-197.
- [21] R. Perera, C. Huerta, J.M. Orquín, Identification of damage in RC beams using indexes based on local modal stiffness, *Construction and Building Materials*, 22 (2008) 1656-1667.
- [22] C.P. Ratcliffe, DAMAGE DETECTION USING A MODIFIED LAPLACIAN OPERATOR ON MODE SHAPE DATA, *Journal of Sound and Vibration*, 204 (1997) 505-517.
- [23] S. Caddemi, I. Calì, The exact explicit dynamic stiffness matrix of multi-cracked Euler–Bernoulli beam and applications to damaged frame structures, *Journal of Sound and Vibration*, 332 (2013) 3049-3063.
- [24] Y. Aoki, O.I. Byon, Damage detection of CFRP pipes and shells by using localized flexibility method, *Advanced Composite Materials*, 10 (2001) 189-198.
- [25] A.V. Ovanesova, L.E. Suárez, Applications of wavelet transforms to damage detection in frame structures, *Engineering Structures*, 26 (2004) 39-49.





- [26] H. Young Noh, K. Krishnan Nair, D.G. Lignos, A.S. Kiremidjian, Use of Wavelet-Based Damage-Sensitive Features for Structural Damage Diagnosis Using Strong Motion Data, *Journal of Structural Engineering*, 137 (2011) 1215-1228.
- [27] Y.J. Yan, L.H. Yam, Detection of delamination damage in composite plates using energy spectrum of structural dynamic responses decomposed by wavelet analysis, *Computers & Structures*, 82 (2004) 347-358.
- [28] G.W. Housner, L.A. Bergman, Structural control: Past, present, and future, *Journal of Engineering Mechanics*, 123 (1997) 897.
- [29] M.P. González, J.L. Zapico, Seismic damage identification in buildings using neural networks and modal data, *Computers & Structures*, 86 (2008) 416-426.
- [30] V. Meruane, W. Heylen, An hybrid real genetic algorithm to detect structural damage using modal properties, *Mechanical Systems and Signal Processing*, 25 (2011) 1559-1573.
- [31] J.D. Villalba, J.E. Laier, Localising and quantifying damage by means of a multi-chromosome genetic algorithm, *Advances in Engineering Software*, 50 (2012) 150-157.
- [32] K.K. Nair, A.S. Kiremidjian, K.H. Law, Time series-based damage detection and localization algorithm with application to the ASCE benchmark structure, *Journal of Sound and Vibration*, 291 (2006) 349-368.
- [33] R. Aguiar, A.H. Barbat, J. Canas, Evaluación del daño sísmico global en edificios porticados de hormigón armado, in: A.H. Barbat (Ed.) *Monografías de Ingeniería Sísmica*, CIMNE, Barcelona, 1997.
- [34] H. Banon, J.M. Biggs, H.M. Irvine, Seismic damage in reinforced concrete frames, *Journal of Structural Division, ASCE*, 111 (1981) 1713-1729.
- [35] H. Banon, D. Veneziano, Seismic safety of reinforced concrete members and structure, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* 10 (1982) 179-193.
- [36] Y.J. Park, Seismic damage analysis and damage limiting desing of R/C structures. Ph.D Thesis, Department of Civil Engineering, University of Illinois, Urbana, 1984.
- [37] Y.J. Park, A.H.S. Ang, Y.K. Wen, Seismic damage analysis of reinforced concrete buildings, *Journal of Structural Division, ASCE*, 111 (1985) 740-757.
- [38] Y.J. Park, H.S. Ang, Mechanistic seismic damage model for reinforced concrete, *Journal of Structural Engineering*, 111 (1985) 722-739.
- [39] A. Singhal, A.S. Kiremidjian, Method for probabilistic evaluation of seismic structural damage, *Journal of Structural Engineering*, 122 (1996) 1459.
- [40] Y.J. Park, H.S. Ang, Seismic damage analysis of reinforced concrete building, *Journal of Structural Engineering*, 111 (1985) 740-757.
- [41] E. DiPasquale, A.S. Cakmak, Detection of seismic structural damage using parameter-based global damage indices, *Probabilistic Engineering Mechanics*, 5 (1990) 60-65.
- [42] S. Oller, B. Luccioni, A.H. Barbat, Un método de evaluación del daño sísmico en estructuras de hormigón armado, *Revista internacional de métodos numéricos para cálculo y diseño en ingeniería*, 12 (1996) 215-238.
- [43] A.D. Hanganu, E. Oñate, A.H. Barbat, A finite element methodology for local/global damage evaluation in civil engineering structures, *Computers & Structures*, 80 (2002) 1667-1687.
- [44] S. Oller, A.H. Barbat, Moment–curvature damage model for bridges subjected to seismic loads, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195 (2006) 4490-4511.
- [45] J. Faleiro, S. Oller, A.H. Barbat, Plastic–damage seismic model for reinforced concrete frames, *Computers & Structures*, 86 (2008) 581-597.

- [46] R. Scotta, L. Tesser, R. Vitaliani, A. Saetta, Global damage indexes for the seismic performance assesment of RC structures, *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 38 (2009) 1027-1049.
- [47] F. Rastellini, Modelización numérica de la no-linealidad constitutiva de laminados compuestos. PhD, Universidad Politécnica de Cataluña, Barcelona, 2006.
- [48] X. Martínez, Micro mechanical simulation of composite materials using the serial/parallel mixing theory. PhD, Universidad Politécnica de Cataluña, Barcelona, 2008.
- [49] S. Oller, B. Luccioni, A. Hanganu, E. Car, O. Salomon, L. Neamtu, F. Zalamea, P. Mata, X. Martínez, M. Molina, J.A. Paredes, F. Otero, Breve Manual de PLCD, 2010.
- [50] S. Oller, Un modelo de daño continuo para materiales-friccionales. Tesis PhD, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, 1988.
- [51] X. Tao, D.V. Phillips, A simplified isotropic damage model for concrete under bi-axial stress states, *Cement and Concrete Composites*, 27 (2005) 716-726.
- [52] A. Hillerborg, M. Modéer, P.E. Petersson, Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements, *Cement and Concrete Research*, 6 (1976) 773-781.
- [53] J.G. Rots, R.d. Borst, Analysis of Mixed-Mode Fracture in Concrete, *Journal of Engineering Mechanics*, 113 (1987) 1739-1758.
- [54] Z.P. Bazant, G. Pijaudier-Cabot, Measurement of Characteristic Length of Nonlocal Continuum, *Journal of Engineering Mechanics*, 115 (1989) 755-767.
- [55] L.M. Kachanov, Time of rupture process under creep conditions, *Izvestia Akademi Nank*, 8 (1958) 26-31.
- [56] J. Lemaitre, Coupled elasto-plasticity and damage constitutive equations, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 51 (1985) 31-49.
- [57] J.C. Simo, J.W. Ju, Strain- and stress-based continuum damage models-I. Formulation, *International Journal of Solids and Structures*, 23 (1987) 821-840.
- [58] J.C. Simo, J.W. Ju, Strain- and stress-based continuum damage models-II. Computational aspects, *International Journal of Solids and Structures*, 23 (1987) 841-869.
- [59] J. Oliver, M. Cervera, S. Oller, J. Lubliner, Isotropic damage models and smeared crack analysis of concrete, in: *Proc. 2nd. Int. Conf. on Computer Aided Analysis and Design of Concrete Structures*, Zell am See, 1990, pp. 945-958.
- [60] J.L. Chaboche, Continuum Damage Mechanics: Part I-General Concepts, *Journal of Applied Mechanics*, 55 (1988) 59-64.
- [61] J.L. Chaboche, Continuum Damage Mechanics: Part II-Damage Growth, Crack Initiation, and Crack Growth, *Journal of Applied Mechanics*, 55 (1988) 65-72.
- [62] J.W. Ju, On energy-based coupled elastoplastic damage theories: Constitutive modeling and computational aspects, *International Journal of Solids and Structures*, 25 (1989) 803-833.
- [63] S. Oller, Un modelo de daño continuo para materiales-friccionales. PhD, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, 1988.
- [64] J. Mazars, G. Pijaudier-Cabot, Continuum Damage Theory -Application to Concrete, *Journal of Engineering Mechanics*, 115 (1989) 345-365.
- [65] J. Lubliner, J. Oliver, S. Oller, E. Oñate, A plastic-damage model for concrete, *International Journal of Solids and Structures*, 25 (1989) 299-326.
- [66] L. Jason, A. Huerta, G. Pijaudier-Cabot, S. Ghavamian, An elastic plastic damage formulation for concrete: Application to elementary tests and comparison with an isotropic damage model, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195 (2006) 7077-7092.



- [67] U. Cicekli, G.Z. Voyiadjis, R.K. Abu Al-Rub, A plasticity and anisotropic damage model for plain concrete, *International Journal of Plasticity*, 23 (2007) 1874-1900.
- [68] J.W. Ju, Isotropic and Anisotropic Damage Variables in Continuum Damage Mechanics, *Journal of Engineering Mechanics*, 116 (1990).
- [69] B. Luccioni, S. Oller, A directional damage model, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192 (2003) 1119-1145.
- [70] R.K. Abu Al-Rub, S.-M. Kim, Computational applications of a coupled plasticity-damage constitutive model for simulating plain concrete fracture, *Engineering Fracture Mechanics*, 77 (2010) 1577-1603.
- [71] I. Carol, E. Rizzi, K. Willam, An 'extended' volumetric/deviatoric formulation of anisotropic damage based on a pseudo-log rate, *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 21 (2002) 747-772.
- [72] J.F. Maire, J.L. Chaboche, A new formulation of continuum damage mechanics (CDM) for composite materials, *Aerospace Science and Technology*, 1 (1997) 247-257.
- [73] R. Faria, J. Oliver, M. Cervera, A strain-based plastic viscous-damage model for massive concrete structures, *International Journal of Solids and Structures*, 35 (1998) 1533-1558.
- [74] J.A. Paredes, A.H. Barbat, S. Oller, A compression-tension concrete damage model, applied to a wind turbine reinforced concrete tower, *Engineering Structures*, 33 (2011) 3559-3569.
- [75] S. Oller, *Fractura Mecánica. Un enfoque global.*, in, CIMNE, Barcelona, 2001, pp. 200-217.
- [76] G.A. Maugin, *The thermodynamics of plasticity and fracture*, Cambridge University press, 1992.
- [77] H. Kupfer, H. Hilsdorf, H. Rusch, Behaviour of concrete under biaxial stresses, *Journal of the American Concrete Institute*, 66 (1969) 656-666.
- [78] S. Oller, *Modelización numérica de Materiales Friccionales*, CIMNE, Barcelona, 1991.
- [79] K.J. Willam, *Constitutive Models for Engineering Materials*, in: A.M. Robert (Ed.) *Encyclopedia of Physical Science and Technology*, Academic Press, New York, 2001, pp. 603-633.
- [80] S. Oller, A.H. Barbat, J. Miquel, Estudio numérico del comportamiento de los hormigones reforzados con fibras cortas, *Hormigón y Acero*, 232 (2004) 113-123.
- [81] A. Jayatilaka, *Fracture of engineering brittle materials*, Applied science Publishers, (1979).



---

## **2. Nuevo modelo constitutivo de daño diferenciado a tracción y compresión con una única superficie de discontinuidad**

### **2.1. Introducción**

En el presente capítulo se desarrolla un nuevo modelo de daño diferenciado basado en la CDM que cumple con los principios termodinámicos para procesos no reversibles, adiabáticos e isotérmicos. La motivación para desarrollar el nuevo modelo es que los modelos existentes de daño isótropo, en sus diferentes variantes [1-9], no permiten resolver el problema del análisis de estructuras sometidas a cargas cíclicas, que es un objetivo esencial de la tesis. Esto se debe al hecho de que los modelos que cuentan con una única variable interna de daño no son capaces de modelizar numéricamente los fenómenos de apertura, cierre y reapertura de fisuras.

En la literatura consultada se han encontrado modelos constitutivos de daño que cuentan con variables diferenciadas a tracción y compresión [10, 11]; sin embargo, en estos modelos el estado de fallo del material no está definido por un único criterio, es decir, los modelos cuentan con dos funciones de discontinuidad, una para las acciones de tracción y otra para las acciones de compresión. Por esta razón no es posible



establecer una continuidad de la respuesta cuando las acciones son complejas y estos modelos no permiten realizar una adecuada representación de la respuesta mecánica de los materiales cuasi-frágiles ante cargas de cortante.

El nuevo modelo propuesto permite representar numéricamente la respuesta mecánica de materiales cuasi-fragiles ante cargas axiales, cortantes, biaxiales y cíclicas garantizando la continuidad en la respuesta; además es capaz de representar numéricamente los fenómenos de apertura, cierre y reapertura de fisuras. En el modelo se definen dos variables internas escalares de daño diferenciadas a tracción  $d^+$  y a compresión  $d^-$ . El estado no-lineal se controla por una única superficie umbral y la activación de la respectiva variable de daño se controla mediante un parámetro que relaciona las tracciones y compresiones de respuesta del material en estado dañado. Este nuevo parámetro se obtiene a partir del modelo propuesto por Oller en 1988 [5]. El objetivo de proponer un modelo con una única función umbral y con un parámetro de activación de la variable de daño que corresponda, es el de garantizar la continuidad en la respuesta en estados complejos de carga.

En este orden de ideas, se formula el marco teórico del modelo, se propone una nueva ley de evolución de las variables internas de daño con una ley tangente hiperbólica, se realiza la validación del modelo a solicitaciones de carga monótona creciente axial de compresión y se compara con los resultados experimentales presentados por Kupfer en 1969 [12]. Bajo carga monótona creciente axial de tracción, los resultados se comparan con los datos experimentales publicados por Gopalaratnam y Shah en 1985 [13]. Una vez hecha la validación ante cargas axiales monótonas, se valida la respuesta ante una carga cíclica y, finalmente se valida la respuesta ante estados cortantes y se compara con el trabajo de Kupfer [12]. Se muestra, como ejemplo de aplicación, el planteado por Arrea e Ingrassia [14] que someten un viga de hormigón a un estado complejo de tensiones que, a la luz de la CFM, corresponde a una evolución de estados de fractura de modo I y II a modo mixto.

## 2.2. Formulación del modelo de daño diferenciado

La formulación del nuevo modelo constitutivo de daño diferenciado a tensión y compresión necesita la definición de dos nuevos conceptos: *daño estructural* y *daño constitutivo*.

- **Daño estructural:** Está asociado al daño por tracción (apertura de fisuras) que sufre el material en un punto de análisis. Este daño no disminuye la capacidad del material a resistir tensiones de compresión en los siguientes estados de carga y, por lo tanto, la estructura puede soportar un estado de compresión posterior al de tracción.
- **Daño constitutivo:** Está asociado al daño de compresión (“*crushing*”) que sufre el material en un punto de análisis. El proceso mecánico que conlleva el fallo a compresión del material implica la degradación constitutiva del material y, en consecuencia, la pérdida de resistencia tanto a compresión como a tracción.

### 2.2.1. Definición de los tensores de tensión

El concepto de tensión efectiva definido por Kachanov [1] es aplicado para definir el tensor de tensiones de Cauchy de forma similar que en la teoría de daño isótropo (véase Oller [15]). El tensor de tensiones de Cauchy,  $\sigma$ , se definirá en términos de la descomposición aditiva del tensor de tensiones efectivas,  $\sigma_o$ , y las variables de daño a tracción y compresión  $d^+$  y  $d^-$

$$\sigma = (1 - d^+) \sigma_o^+ + (1 - d^-) \sigma_o^- \quad (2-1)$$

La descomposición aditiva del tensor de tensiones efectivas está dada por

$$\sigma_o^+ = \langle \sigma_{oi} \rangle \nu p_i \otimes \nu p_i \quad (2-2)$$

$$\sigma_o^- = \sigma_o - \sigma_o^+ \quad (2-3)$$

donde,  $\langle \sigma_{oi} \rangle$  es la función de Macaulay de la  $i$ -ésima tensión principal del tensor de tensiones efectivas  $\sigma_o$  y  $\nu p_i$  es la respectiva dirección principal.

Definiendo el tensor de deformaciones  $\varepsilon$  como variable libre, se obtiene el tensor de tensiones efectivo

$$\sigma_o = C_o : \varepsilon \quad (2-4)$$

como una suma tensorial de los tensores de tensiones de tracción y compresión

$$\sigma_o = \sigma_o^+ + \sigma_o^- \quad (2-5)$$

En la ecuación (2-4),  $C_o$  es el tensor constitutivo elástico de cuarto orden del material no dañado. La hipótesis de partida está dada por la ecuación (2-1) que se debe cumplir luego de verificar que el modelo constitutivo cumple con los principios termodinámicos para procesos no reversibles, adiabáticos e isotérmicos.

### 2.2.2. Marco termodinámico, energía libre de Helmholtz

Usualmente, en los procesos mecánicos de daño de tracción compresión, la energía libre de Helmholtz está dada por la siguiente forma aditiva

$$\psi = \psi(\varepsilon, d^+, d^-) = (1 - d^+) \psi_o^+ + (1 - d^-) \psi_o^- \quad (2-6)$$

La energía libre de Helmholtz elástica del material no dañado para pequeñas deformaciones se define como

$$\psi_o(\varepsilon) = \frac{1}{2} \varepsilon : C_o : \varepsilon \quad (2-7)$$

Considerando la simetría de  $C_o$  y  $\varepsilon$ , y haciendo uso de las ecuaciones (2-4) y (2-5), se puede expresar la ecuación (2-7) como

$$\psi_o(\varepsilon) = \frac{1}{2} \sigma_o : \varepsilon = \frac{1}{2} (\sigma_o^+ + \sigma_o^-) : \varepsilon \quad (2-8)$$

y de aquí se obtiene la energía libre de Helmholtz elástica por tracción y compresión del material no dañado (ver la Figura 2-1)

$$\psi_o(\varepsilon) = \psi_o^+(\varepsilon) + \psi_o^-(\varepsilon) = \frac{1}{2} \sigma_o^+ : \varepsilon + \frac{1}{2} \sigma_o^- : \varepsilon \quad (2-9)$$

La parte mecánica de la disipación debe cumplir la desigualdad de Clausius – Plank, que se define como

$$\Xi = \sigma : \dot{\varepsilon} - \dot{\psi} \geq 0 \quad (2-10)$$

donde la variación temporal de la energía libre está definida por

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} : \dot{\varepsilon} - \frac{\partial \psi}{\partial d^+} \dot{d}^+ - \frac{\partial \psi}{\partial d^-} \dot{d}^- \quad (2-11)$$

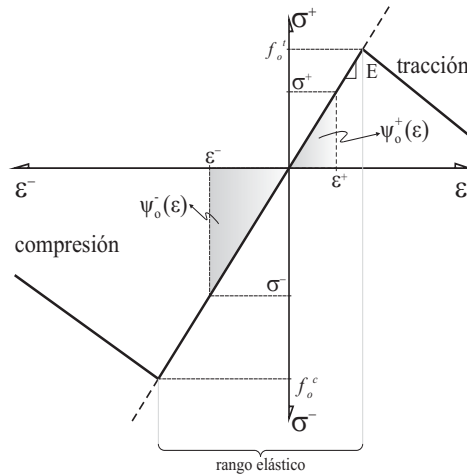


Figura 2-1. Energía elástica de tracción y compresión.

### 2.2.3. Definición del tensor de tensiones y del tensor constitutivo

La disipación mecánica  $\Xi$  se obtiene al remplazar la ecuación (2-11) en la ecuación (2-10) que, reordenando los términos, queda como

$$\Xi = \left( \sigma - \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} \right) \dot{\varepsilon} + \frac{\partial \psi}{\partial d^+} \dot{d}^+ + \frac{\partial \psi}{\partial d^-} \dot{d}^- \geq 0 \quad (2-12)$$

Según el método de Coleman [16], la inecuación (2-12) se debe cumplir para toda variación temporal de la variable libre  $\varepsilon$ ; sólo se garantiza el cumplimiento de esto si el término que multiplica a  $\dot{\varepsilon}$  es nulo. Bajo este criterio se puede obtener la ley siguiente constitutiva hiperelástica del modelo

$$\sigma = \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} \quad (2-13)$$

y, en consecuencia, la expresión de la disipación mecánica. Dicha disipación y consecuentemente, la expresión de la ley constitutiva hiperelástica del modelo en términos de las variables internas de daño  $d^+$  y  $d^-$  y de la variable libre  $\varepsilon$ , es obtenida remplazando la ecuación (2-6) en la ecuación (2-13)

$$\sigma = \frac{\partial \psi(\varepsilon, d^+, d^-)}{\partial \varepsilon} = (1-d^+) \frac{\partial \psi_o^+}{\partial \varepsilon} + (1-d^-) \frac{\partial \psi_o^-}{\partial \varepsilon} \quad (2-14)$$

A partir de la ecuación (2-9) se obtienen las energías libres de tracción y compresión, las cuales se expresan como

$$\begin{aligned} \psi_o^+(\varepsilon) &= \frac{1}{2} \sigma_o^+ : \varepsilon \\ \psi_o^-(\varepsilon) &= \frac{1}{2} \sigma_o^- : \varepsilon \end{aligned} \quad (2-15)$$

La ecuación constitutiva del modelo se obtiene remplazando las ecuaciones (2-15) en la ecuación (2-14) y desarrollando la derivada, para finalmente obtener la expresión

$$\sigma = \frac{\partial \psi(\varepsilon, d^+, d^-)}{\partial \varepsilon} = (1-d^+) \sigma_o^+ + (1-d^-) \sigma_o^- \quad (2-16)$$

Nótese que  $\frac{\partial \psi_o^\pm}{\partial \varepsilon} = \frac{1}{2} \sigma_o^\pm + \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_o^\pm}{\partial \varepsilon} : \varepsilon = \sigma_o^\pm$ , dada la dependencia lineal de  $\sigma_o^\pm$  respecto a  $\varepsilon$ .

Con la ecuación (2-16) se confirma la hipótesis de partida. La disipación mecánica queda expresada como





$$\Xi = \psi_o^+ \dot{d}^+ + \psi_o^- \dot{d}^- \geq 0 \quad (2-17)$$

Cada uno de los términos de la ecuación (2-17) es mayor o iguales a cero, para cualquier instante del proceso.

Desarrollando la ecuación (2-13) se obtiene una expresión general del tensor constitutivo secante del modelo

$$C^s = \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} = (1-d^+) \frac{\partial^2 \psi_o^+}{\partial \varepsilon \otimes \partial \varepsilon} + (1-d^-) \frac{\partial^2 \psi_o^-}{\partial \varepsilon \otimes \partial \varepsilon} \quad (2-18)$$

#### 2.2.4. Criterio umbral de daño

Para cualquier tensor de tensiones, el criterio umbral de daño permite establecer el límite del comportamiento elástico del material a tracción o compresión, según sea el caso, y de forma general está definido por la siguiente expresión:

$$F(\sigma_o, d^+, d^-, r) = f(\sigma_o) - [1 - H(r, R_0)] c^c - [H(r, R_0)] c^t \leq 0 \quad (2-19)$$

donde  $f(\sigma_o)$  es una función del tensor de tensiones efectivas que está definido por la ecuación (2-4);  $c^c = c^c(d^+, d^-, r)$  y  $c^t = c^t(d^+, d^-, r)$  son dos funciones de resistencia que definen los umbrales de daño a tracción o a compresión según el valor de  $r$ ;  $H(r, R_0)$  es la función Heaviside;  $R_0 = \frac{f_o^c}{f_o^t}$  es la relación entre las resistencias iniciales de compresión  $f_o^c$  y tracción  $f_o^t$  del material;  $r(d^+, r_o)$  es un nuevo parámetro que determina la proporción de tracciones y/o compresiones en un estado tensorial complejo.

El parámetro  $r = r(d^+, r_o)$  depende de la variable interna de daño a tracción  $d^+$  y del parámetro que determina si las tensiones son tracciones y/o compresiones [5] que en el desarrollo del presente modelo se denomina  $r_o$  y está expresado por

$$r_o = \frac{\sum_{i=1}^3 \langle \sigma_i^o \rangle}{\sum_{i=1}^3 |\sigma_i^o|} \quad (2-20)$$

donde  $\langle \sigma_i^o \rangle$  es la función de Macaulay de la  $i$ -ésima tensión principal del tensor de tensiones efectivas. Nótese que: si  $r_o = 1$  el estado de tensiones corresponde a tracción

pura; si  $r_o = 0$  el estado de tensiones corresponde a compresión pura; y si  $0 < r_o < 1$  el estado de tensiones es complejo es decir de tracción-compresión.

En geomateriales, en los cuales la resistencia a tracción es menor que la resistencia a la compresión, los procesos de degradación del material sometido a estados complejos de tensiones se inician con un proceso de fisuración por tracción. Dicho proceso implica que en la configuración dañada del material la proporción entre las respuestas a tracción y compresión es diferente de la proporción que se obtiene en el estado no dañado. Para el caso del modelo de daño isótropo, la proporcionalidad de tensiones se conserva constante y, por lo tanto, es válido el parámetro de proporcionalidad de tensiones  $r_o$  [5]. Sin embargo, esta proporción es variable en el caso del modelo de daño diferenciado propuesto; por lo tanto se introduce un nuevo parámetro,  $r$ , que depende de la variable de daño a tracción  $d^+$  y representa el cambio de la proporción entre tracciones y compresiones de respuesta

$$r = \frac{\sum_{i=1}^3 \langle (1-d^+) \sigma_i^o \rangle}{\sum_{i=1}^3 |\sigma_i^o|} = (1-d^+) r_o \quad (2-21)$$

De manera general, la variable  $r$  se puede expresar como

$$r = \begin{cases} 1 & \text{si } r_o > 1 - 1/R_o \\ (1-d^+) r_o & \text{en otros casos} \\ 0 & \text{si } r_o < 1/R_o \end{cases} \quad (2-22)$$

Dado que la variable libre de este modelo es el tensor de deformaciones,  $\varepsilon$ , y que cada tensión principal  $\sigma_i^o$  representa la respuesta lineal (no dañada) del material ante un estado de cargas dado, se puede decir que en el estado no dañado del material existe una proporcionalidad entre las acciones aplicadas y las respuestas del material. Por lo tanto, se tiene que en el estado no dañado el parámetro  $r_o$  es un indicador de la proporción de tracciones y compresiones tanto de las cargas aplicadas como de la respuesta del material.

En el momento en el que se abre una fisura en el material (inicio de daño a tracción), la relación de la respuesta a tracción y compresión del punto material cambia, y se debe obtener mediante el nuevo parámetro dado en la ecuación (2-22) que representa la respuesta del material en presencia del daño a tracción, o daño estructural.



Nótese que la combinación de los dos parámetros  $r_o$  y  $r$  dentro del modelo permite considerar tanto la complejidad de las cargas aplicadas como el cambio en la respuesta mecánica del material dañado. En la ecuación (2-22) se puede ver que en los procesos de carga con componentes predominantemente axiales,  $r$  permanecerá constante mientras que, en estados de carga con presencia de tensiones tangenciales,  $r$  será variable.

La función general que define el umbral de daño dada por la ecuación (2-19) se puede particularizar para el daño a tracción o daño a compresión dependiendo del valor de  $r$  según lo establecido por la ecuación (2-22), con lo que la función Heaviside  $H(r, R_0)$  en términos de  $r$  quedará definida

$$H(r, R_0) = \begin{cases} 0 & \text{si } r \leq \frac{1}{R_0} \\ 1 & \text{si } r > \frac{1}{R_0} \end{cases} \quad (2-23)$$

En virtud de las ecuaciones (2-22) y (2-23) se puede reescribir el criterio umbral de daño de la ecuación (2-19) para estados extremos de tensión como

$$F(\sigma_o, d^+, d^-, r) = \begin{cases} F^-(\sigma_o, d^+, d^-, r) = f(\sigma_o) - c^c(d^+, d^-, r) \leq 0 & \text{si } H(r, R_0) = 0 \\ F^+(\sigma_o, d^+, d^-, r) = f(\sigma_o) - c^t(d^+, d^-, r) \leq 0 & \text{si } H(r, R_0) = 1 \end{cases} \quad (2-24)$$

*Función umbral de compresión:* Si  $H(r, R_0) = 0$  el proceso de carga está controlado por la resistencia a compresión del material, por lo que el umbral está definido por

$$F^-(\sigma_o, d^+, d^-, r) = G^- [f(\sigma_o)] - G^- [c^c(d^+, d^-, r)] \leq 0 \quad (2-25)$$

donde  $c^c(d^+, d^-, r)$  es la función que define el umbral de daño a compresión.

*Función umbral de tracción:* Si  $H(r, R_0) = 1$  el proceso de carga está controlado por la resistencia a tracción del material y, por lo tanto, el umbral está definido por

$$F^+(\sigma_o, d^+, d^-, r) = G^+ [f(\sigma_o)] - G^+ [c^t(d^+, d^-, r)] \leq 0 \quad (2-26)$$

donde  $c^t(d^+, d^-, r)$  es la función que define el umbral de daño a tracción.  $G^-[*]$  y  $G^+[*]$  son funciones escalares, invertibles, positivas, con derivadas positivas y monótonamente crecientes.

Los valores iniciales de las funciones umbrales establecen el límite a partir del cual el comportamiento será no lineal. Debido a que las resistencias iniciales a tracción y compresión están relacionadas por  $R_0$  y que este parámetro está incluido dentro de la función de discontinuidad, el modelo de daño puede ser formulado en una forma más objetiva usando un único umbral inicial de daño,  $c_o$ . Normalmente, este valor es definido como la resistencia a compresión

$$c_o^c = c_o \quad (2-27)$$

$$c_o^t = c_o \quad (2-28)$$

### 2.2.5. Leyes de evolución de las variables de daño

#### a. Variable de daño a compresión

La ley de evolución se puede definir a partir del siguiente potencial

$$\dot{d}^- = \dot{\mu}^- \frac{\partial F^-(f(\sigma_o))}{\partial f(\sigma_o)} \cong \dot{\mu}^- \frac{\partial G^-[f(\sigma_o)]}{\partial f(\sigma_o)} \quad (2-29)$$

donde  $\dot{\mu}^-$  es el parámetro de consistencia de daño a compresión y permite controlar si el proceso es de carga o de descarga de acuerdo a las condiciones de Kuhn-Tucker [15]

$$\dot{\mu}^- F^-(\sigma_o, d^+, d^-, r) = 0 \quad (2-30)$$

En la ecuación (2-30) se tienen las siguientes posibilidades:

$$\text{si } F^-(\sigma_o, d^-, r) < 0 ; \dot{\mu}^- = 0 \Rightarrow d^- = 0 \quad (2-31)$$

$$\text{si } \dot{\mu}^- > 0 \Rightarrow F^-(\sigma_o, d^-, r) = 0 ; d^- \neq 0 \quad (2-32)$$

A partir de la desigualdad de la ecuación (2-25) y de la condicione establecida en la ecuación (2-32) se tiene

$$G^-[f(\sigma_o)] = G^-[c^c(d^+, d^-, r)] \Rightarrow f(\sigma_o) = c^c(d^+, d^-, r) \quad (2-33)$$

Dado que la función  $G$  es monótonamente creciente, los argumentos de la ecuación (2-33) son iguales y en consecuencia

$$\frac{\partial G^-[f(\sigma_o)]}{\partial f(\sigma_o)} = \frac{\partial G^c(d^+, d^-, r)}{\partial c^c(d^+, d^-, r)} \quad (2-34)$$

De la variación temporal de la función umbral de daño a compresión se tiene



$$\dot{F}^-(\sigma^o, d^-, r) = \frac{\partial G^- [f(\sigma_o)]}{\partial f(\sigma_o)} \dot{f}(\sigma_o) = \frac{\partial G^- [c^c(d^+, d^-, r)]}{\partial c^c(d^+, d^-, r)} \dot{c}^c(d^+, d^-, r) \quad (2-35)$$

La condición de permanencia en la superficie de fallo se verifica con la ecuación (2-35), de donde se puede concluir que

$$\dot{f}(\sigma_o) = \dot{c}^c(d^+, d^-, r) \quad (2-36)$$

Además, la variación temporal de la función  $G$  se puede expresar como

$$\begin{aligned} \frac{\partial G^- [f(\sigma_o)]}{\partial t} &= \dot{G}^- [f(\sigma_o)] \\ \dot{G}^- &= \frac{\partial G^- [f(\sigma_o)]}{\partial f(\sigma_o)} \dot{f}(\sigma_o) \end{aligned} \quad (2-37)$$

Ahora, a partir de las ecuaciones (2-29) y (2-37)  $\dot{d}^- = \dot{G}^-$  y sabiendo que

$$\dot{\mu}^- = \dot{f}(\sigma_o) = \dot{c}^c(d^-, r) \quad (2-38)$$

$$\dot{f}(\sigma^o) = \frac{\partial f(\sigma_o)}{\partial \sigma_o} : \dot{\sigma}^o = \frac{\partial f(\sigma_o)}{\partial \sigma_o} : C_o : \dot{\varepsilon} \quad (2-39)$$

es posible obtener la ley de evolución de la variable de daño a compresión

$$\dot{d}^- = \frac{\partial G^- [f(\sigma_o)]}{\partial f(\sigma_o)} \frac{\partial f(\sigma_o)}{\partial \sigma_o} : C_o : \dot{\varepsilon} \quad (2-40)$$

La variación temporal de la disipación por daño a compresión es obtenida mediante la ecuación (2-40) y puede ser escrita como

$$\dot{\Xi}^- = \psi_o^- \dot{d}^- = \psi_o^- \left\{ \frac{\partial G^- [f(\sigma_o)]}{\partial f(\sigma_o)} \frac{\partial f(\sigma_o)}{\partial \sigma_o} : C_o : \dot{\varepsilon} \right\} \quad (2-41)$$

Una vez la no linealidad debida a los componentes de tensiones de compresión es alcanzada, la función umbral de compresión debe ser actualizada de la siguiente forma

$$c^c = \max \{c_o; f(\sigma_o)\} \quad \text{si } H(r, R_0) = 0 \quad (2-42)$$

#### b. Variable de daño a tracción

La ley de evolución de la variable de daño a tracción puede ser obtenida a partir de la función potencial de forma similar que en el caso de la variable de compresión

$$\dot{d}^+ = \dot{\mu}^+ \frac{\partial G^+ [f(\sigma_o)]}{\partial f(\sigma_o)} \quad (2-43)$$

De esta manera, la ley de evolución de la variable de daño a tracción puede ser derivada de forma análoga

$$\dot{d}^+ = \left\{ \frac{\partial G^+ [f(\sigma_o)]}{\partial f(\sigma_o)} \frac{\partial f(\sigma_o)}{\partial \sigma_o} : C_o : \dot{\varepsilon} \right\} \quad (2-44)$$

con lo que se obtiene que la variación temporal de la disipación por daño a tracción está definida como

$$\dot{\Xi}^+ = \psi_o^+ \dot{d}^+ = \psi_o^+ \left\{ \frac{\partial G^+ [f(\sigma_o)]}{\partial f(\sigma_o)} \frac{\partial f(\sigma_o)}{\partial \sigma_o} : C_o : \dot{\varepsilon} \right\} \quad (2-45)$$

Una vez que se alcance la no linealidad debido a los componentes de tensiones de tracción, la función umbral de tracción debe ser actualizada de la siguiente forma

$$c^t = \max \{c_o; f(\sigma_o)\} \quad \text{si } H(r, R_0) = 1 \quad (2-46)$$

El concepto de *daño constitutivo* introducido al inicio del desarrollo de este modelo obliga a realizar la actualización del daño a tracción siempre que exista daño de compresión

$$d^+ = \max \{d^+; d^-\} \quad \wedge \quad c^t = \max \{c^t; c^c\} \quad (2-47)$$

Finalmente, la variación temporal de la disipación por tracción y compresión es la suma de las ecuaciones (2-41) y (2-45).

$$\dot{\Xi} = \dot{\Xi}^+ + \dot{\Xi}^- \quad (2-48)$$

### 2.3. Leyes de evolución lineal, exponencial e hiperbólica de las variables de daño

Las leyes de evolución de las variables de daño a tracción y compresión se pueden plantear con variación lineal, exponencial o hiperbólica. Aunque la función de  $f(\sigma_o)$  es única, se puede considerar que los proceso de disipación a tracción y compresión pueden tener leyes de evolución diferentes. A continuación se describen las leyes de evolución lineal, exponencial e hiperbólica para cada tipo de daño.



### 2.3.1. Evolución lineal de las variables de daño

- *A compresión*

$$d^- \cong G^- \left[ c^c(d^+, d^-, r) \right] = 1 - \frac{c_o}{c^c(d^+, d^-, r)} \quad (2-49)$$

- *A tracción*

$$d^+ \cong \max \begin{cases} G^+ \left[ c^t(d^+, d^-, r) \right] = 1 - \frac{c_o}{c^t(d^+, d^-, r)} \\ d^- \end{cases} \quad (2-50)$$

### 2.3.2. Evolución exponencial de las variables de daño

Debido a que en el modelo propuesto la evolución del daño es igual a la evolución de las funciones umbral que están expresadas en términos de la deformación elástica, es posible aplicar la fórmula propuesta por Mazars y Pijaudier-Cabot en 1989 [10] en la forma dada por Faria et al. [11] para describir la evolución exponencial de las variables de daño

- *A compresión*

$$d^- = G^- \left[ c^c(d^+, d^-, r) \right] = 1 - \frac{c_o}{c^c} (1 - A^-) - A^- \exp \left( B^- \left( 1 - \frac{c^c}{c_o} \right) \right); \quad \text{si } c^c \geq c_o \quad (2-51)$$

- *A tracción*

$$d^+ = \begin{cases} G^+ \left[ c^t(d^+, d^-, r) \right] = 1 - \frac{c_o}{c^t} (1 - A^+) - A^+ \exp \left( B^+ \left( 1 - \frac{c^t}{c_o} \right) \right); & \text{si } c^t \geq c_o \\ d^- \end{cases} \quad (2-52)$$

Para las ecuaciones (2-51) y (2-52) se tiene:  $c_o$  es el umbral inicial de daño (común a tracción y a compresión);  $c^t$  y  $c^c$  son los valores de las funciones umbral de tracción y compresión, respectivamente;  $A^-$  y  $B^-$  son constantes a determinar a partir de una curva experimental de compresión uniaxial;  $A^+$  y  $B^+$  son constantes a determinar a partir de una curva experimental de tracción uniaxial. Un procedimiento para la obtención de estas constantes fue propuesto por Paredes et al. [17]. Nótese que las

ecuaciones (2-51) y (2-52) garantizan el cumplimiento del concepto de **daño constitutivo**.

### 2.3.3. Evolución hiperbólica propuesta para las variables de daño

Un objetivo del modelo constitutivo que se propone es el de representar los estados complejos de tensiones. Esto se logra con la interrelación entre la disipación correspondiente a la respuesta a tracción y a compresión. Mediante la ley de disipación lineal se mantiene la relación entre las tensiones umbral de tracción y compresión, pero no es posible capturar el efecto del endurecimiento. Por otro lado, la ley de disipación propuesta por Mazars y Pijaudier-Cabot [10] requiere definir, para el comportamiento a compresión, la resistencia inicial de compresión,  $\sigma_o^c$ , como dato de entrada y en función de las constantes  $A^-$  y  $B^-$  se calcula internamente el valor máximo de compresión,  $\sigma_u^c$ , con lo que se obtiene el efecto de endurecimiento de compresión. La disipación en hormigones no muestra endurecimiento, por lo que es necesario establecer como umbral de daño a tracción el valor de tracción último,  $\sigma_u^t$ , en lugar del la resistencia inicial de tracción,  $\sigma_o^t$ . De esta manera, se llega a un problema operativo que necesita dos resistencias iniciales,  $\sigma_o^c$  para compresión y  $\sigma_u^t$  para tracción. Para poder definir un umbral de inicio de daño a tracción que guarde la relación con el umbral de inicio de daño a compresión y que, además, logre capturar los efectos de endurecimiento en tracción y compresión, se propone la siguiente ley de disipación hiperbólica:

- *A compresión*

$$d^- = G^- \left[ c^c(d^+, d^-, r) \right] = 1 - (1-q) \frac{e^{k1}}{e^{k1} + e^{-k1}} - q \frac{e^{k2}}{e^{k2} + e^{-k2}}; \quad \text{si } c^c \geq c_o$$

$$k1^- = A1^- \left[ \frac{c^c - \left(1 + \frac{5}{A1^-}\right)(c_o)}{c_o} \right]; \quad k2^- = A2^- \left[ \frac{(c^c)^2 - \left(1 + \frac{5}{A2^-}\right)(c_o)^2}{(c^c)(c_o)} \right] \quad (2-53)$$

- *A tracción*





$$d^+ = G^+ \left[ c^t(d^+, d^-, r) \right] = 1 - (1 - q) \frac{e^{k_1}}{e^{k_1} + e^{-k_1}} - q \frac{e^{k_2}}{e^{k_2} + e^{-k_2}}; \quad \text{si } c^t \geq c_o$$

$$k_1^+ = A1^+ \left[ \frac{c^t - \left(1 + \frac{5}{A1^+}\right)(c_o)}{c_o} \right]; \quad k_2^+ = A2^+ \left[ \frac{(c^t)^2 - \left(1 + \frac{5}{A2^+}\right)(c_o)^2}{(c^t)(c_o)} \right] \quad (2-54)$$

$c_o$  es la cohesión inicial de compresión;  $Ai^{\pm}$  y  $q$  son constantes de ajuste establecidas a partir de curvas experimentales.

## 2.4. Función umbral de discontinuidad

Para este modelo constitutivo es posible aplicar diversas funciones umbral de discontinuidad. La solución de una u otra se debe hacer buscando la que represente mejor el comportamiento del material que se está analizando. La función umbral de Mohr-Coulomb Modificada [18] será usada en la implementación y validación del modelo constitutivo propuesto. Dicha función es adecuada para representar el comportamiento mecánico del hormigón porque permite tener en cuenta la relación de resistencias a tracción y compresión del material,  $R_o$ . La función del tensor de tensiones efectivas estará definida por

$$f(\sigma_o) = f(I, J_2, \theta, \phi) = \left\{ \frac{I}{3} K_3 + \sqrt{J_2} \left[ K_1 \cos(\theta) - K_2 \frac{\sin(\theta) \sin(\phi)}{\sqrt{J_3}} \right] \right\} \frac{2\sqrt{N_\phi}}{\cos(\theta)} \quad (2-55)$$

De esta forma, la función de fluencia de forma general definida en la ecuación (2-19) quedará como

$$F(\sigma_o, d^+, d^-, r) = f(I, J_2, \theta, \phi) - c_o = 0 \quad (2-56)$$

donde  $c_o = \sigma_o^c$  es la resistencia a la compresión del hormigón,  $I$  es el primer invariante del tensor de tensiones efectivas,  $J_2$  es el segundo invariante del tensor desviador de tensiones efectivas,  $\theta$  es el ángulo de similaridad de Lode y  $\phi$  es el ángulo de rozamiento interno del material; las constantes de la ecuación (2-56) se establecen como



$$\begin{aligned}
 K_1 &= \left[ \frac{1+\alpha}{2} - \frac{1-\alpha}{2} \sin \phi \right] ; K_2 = \left[ \frac{1+\alpha}{2} - \frac{1-\alpha}{2} \frac{1}{\sin \phi} \right] \\
 K_3 &= \left[ \frac{1+\alpha}{2} \sin \phi - \frac{1-\alpha}{2} \right] \\
 R_o &= \left| \frac{f_o^c}{f_o^t} \right| ; \quad \alpha = \frac{R_o}{N_\phi} ; \quad N_\phi = \tan^2 \left[ \frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right]
 \end{aligned} \tag{2-57}$$

## 2.5. Algoritmo de integración de la ley constitutiva propuesta

El procedimiento que permite integrar la ley constitutiva propuesta se muestra en el diagrama de flujo de la Figura 2-2. Partiendo de las propiedades mecánicas del material, se establece el umbral inicial  $c_o$ , el cual es común tanto para procesos de tracción como de compresión. Comúnmente, los análisis no lineales se realizan por pasos incrementales de carga; para el incremento  $i$ -ésimo y para un punto de análisis del medio continuo, se tendrán como parámetros iniciales aquellos valores alcanzados en el paso anterior, tanto para las variables internas de daño  ${}^{i-1}d^+$  y  ${}^{i-1}d^-$ , como para los umbrales de daño  ${}^{i-1}c^+$  y  ${}^{i-1}c^-$ . Para el estado de cargas del paso  $i$  se tiene como variable libre el tensor de deformaciones  $\varepsilon$ , a partir del cual es posible calcular el tensor de tensiones efectivas  $\sigma_o$ . Con el tensor de tensiones efectivas se realiza la descomposición aditiva según lo establecido por las ecuaciones (2-2) y (2-3) con lo que se obtiene el valor del parámetro de relación de tensiones  $r$ , mediante la ecuación (2-22) y también el valor de la función Heaviside  $H(r, R_o)$ , de acuerdo con la ecuación (2-23). El valor de la función umbral de discontinuidad  $f(\sigma_o)$  se obtiene a partir del tensor de tensiones efectivas  $\sigma_o$ . Conocido el valor de la función Heaviside  $H(r, R_o)$  se establece si el proceso es de daño a tracción o a compresión y se compara el valor de la función umbral de discontinuidad  $f(\sigma_o)$  con el respectivo umbral de discontinuidad,  ${}^{i-1}c^+$  ó  ${}^{i-1}c^-$ , según sea el caso.

Este procedimiento se debe realizar para cada punto material de análisis; luego se hace una integración en el espacio y se verifica la convergencia por equilibrio de todo el sistema. Si se establece la convergencia, se continuará con un paso de carga nuevo; de lo contrario se realizará un proceso de ajuste y se repetirá el proceso antes mencionado.

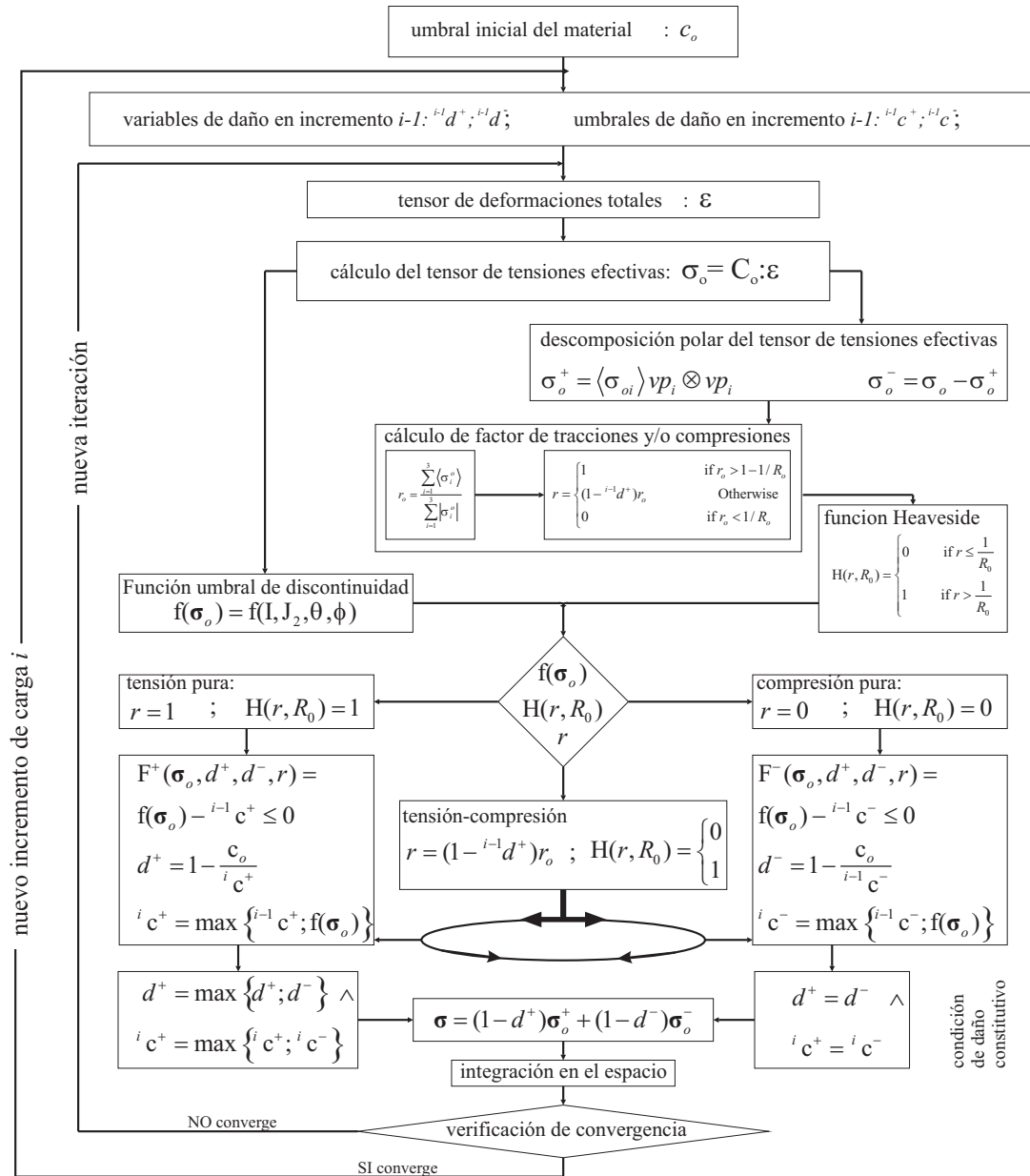


Figura 2-2. Diagrama de flujo para la integración de la ley constitutiva propuesta

## 2.6. Validación del modelo

El modelo propuesto se ha implementado en el programa de elementos finitos PLCD [19], y se ha validado por comparación con los resultados numéricos y con datos experimentales obtenidos de la literatura. Algunas de las comparaciones realizadas incluyen pruebas a compresión, tracción y corte que permitan su validación. Además, se han realizado pruebas a cargas monótonas y cíclicas. Las cargas cíclicas se realizaron cambiando el sentido de la carga de tracción a compresión y viceversa.

### 2.6.1. Carga de compresión axial monótona

Una carga monótona de compresión fue aplicada en un espécimen estructural de hormigón que tienen forma de hexaedro de 0.20 x 0.20 x 0.05 metros. La respuesta del modelo se validó por comparación de los resultados obtenidos numéricamente con los resultados experimentales de Kupfer et al. [12]. Los resultados experimentales se muestran en la Figura 2-3 y corresponden a valores de  $A^- = 1.38$  y  $B^- = 0.22$ , ver ecuación (2-51), módulo de elasticidad de 28657000 kPa, resistencia de compresión donde inicia la no-linealidad  $f_o^c = 13120$  kPa y resistencia máxima o última de compresión  $f_u^c = 32800$  kPa. Para estos valores se comprobó la respuesta de un elemento de dimensiones 1 x 1 x 1 metros. Los resultados obtenidos fueron similares a los obtenidos con el hexaedro de 0.20x0.20x0.05 metros. Esto demuestra que los parámetros de ajuste  $A^-$  y  $B^-$  de la ecuación (2-51) son independientes del tamaño de la malla, es decir, que cumplen la condición de objetividad.

Una vez calibrados los parámetros de la curva exponencial, se ajusta la curva lineal, que tiene igual umbral máximo de tracción que la curva exponencial; además, la energía disipada por unidad de volumen en los dos casos es prácticamente igual. Partiendo del área bajo la curva de las gráficas mostradas en la Figura 2-4, con las dimensiones del elemento analizado y la relación de resistencias compresión/tracción  $R_o = 10$ , se puede calcular la energía de fractura por unidad de superficie  $G_f = 0.3$  kN-m/m<sup>2</sup>.

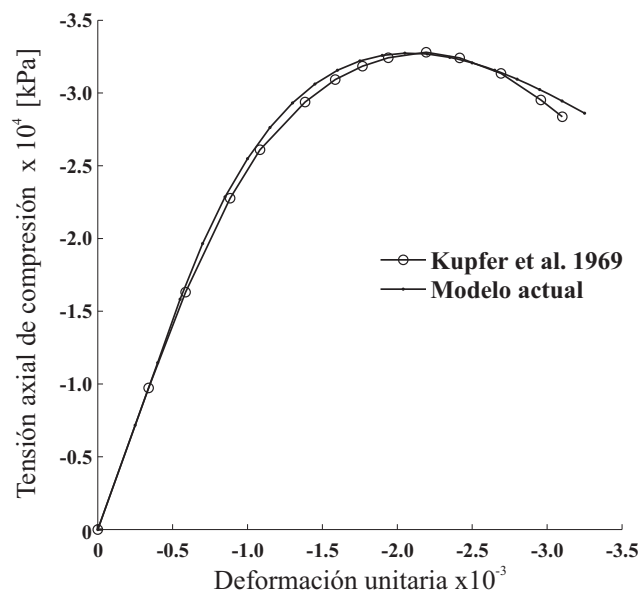


Figura 2-3. Curva de tensión deformación bajo compresión axial, comparada con curva de Kupfer  $\sigma_1/\sigma_2 = -1/0$  [12].

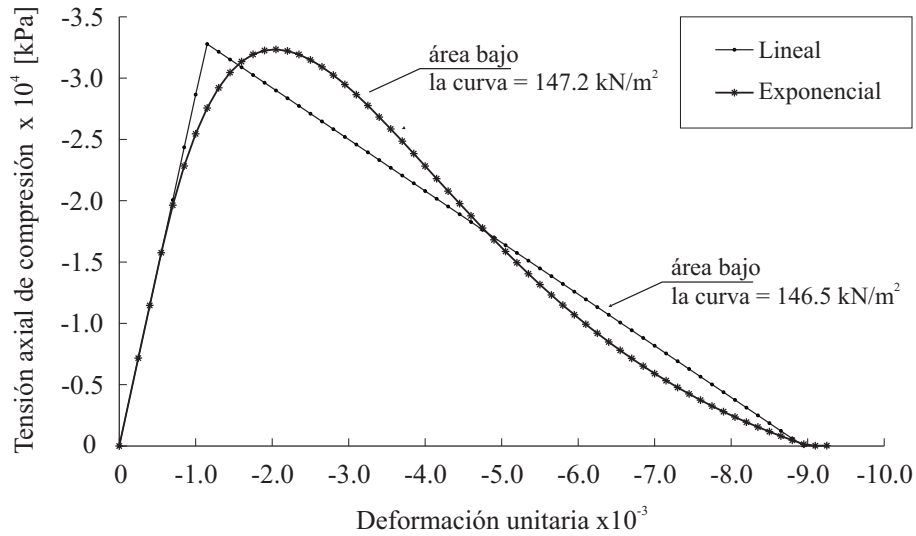


Figura 2-4. Disipación lineal y exponencial. Compresión axial.

### 2.6.2. Carga de tracción axial monótona

Para la calibración del modelo propuesto se usaron los resultados experimentales de Gopalaratnam and Shah [13]. Las probetas ensayadas por Gopalaratnam miden 76 x 19 x 305 milímetros con un entalle 13 x 3 milímetros a cada lado; de esta manera el área efectiva transversal a la carga es de 50 x 19 mm. Los desplazamientos promedio se midieron en una longitud de 83 mm. Los análisis numéricos se hicieron sobre un elemento hexaédrico de 50 x 19 x 83 mm, teniendo en cuenta el área efectiva y la longitud instrumentada del ensayo experimental.

Las propiedades mecánicas del material que se han usado en el análisis numérico fueron obtenidas directamente de la referencia [13], excepto la energía de fractura por unidad de área,  $G_f$ , que fue calculada como el área bajo la curva experimental tensión – desplazamiento. Estas propiedades se muestran en la Tabla 2-1.

Tabla 2-1. Propiedades del material tomadas de Gopalaratnam and Shah [13]

Energía de Fractura $G_f$ [kJ/m]	Módulo de elasticidad $\times 10^6$ [kN/m <sup>2</sup> ]	Tensión última $\sigma_p^t$ [kN/m <sup>2</sup> ]	Deformación $\varepsilon_p^t \times 10^{-6}$ en $\sigma_p^t$	Tensión de daño $\sigma_o^t = 0.4\sigma_p^t$ [kN/m <sup>2</sup> ]
0.0564	33.469	3662.1	120	1464.8

Se cargó el elemento hexaédrico con un desplazamiento axial incremental en la dirección z ( $\delta_z$ ), considerando condiciones de apoyo que garanticen la axialidad de la carga. En la Figura 2-5 se muestran las curvas fuerza-desplazamiento obtenidas mediante el modelo propuesto para los tres diferentes tipos de disipación descritos

anteriormente y se comparan con la curva experimental. En la Figura 2-6, se muestra las curvas tensión-desplazamiento. Se calculó la energía por unidad de área para cada tipo de análisis y los resultados se muestran en la Tabla 2-2. Finalmente, en la Figura 2-7 se muestran las curvas de tensión-deformación. De estas tres curvas se puede concluir que con los tres tipos de análisis se obtiene un ajuste adecuado.

Tabla 2-2. Calibración del modelo con carga axial de tracción, parámetros y resultados

Ley de disipación	Lineal	Exponencial propuesta	Exponencial Mazars
Parámetros	$Le=0.083$	$A1=2.24;$ $A2=0.20;$ $q=0.30$	$A^+=0.92;$ $B^+=2.0$
Tipo de disipación	lineal	exponencial	exponencial
Energía total disipada. $W_f$ [kN-m]. Figura 2-5	$5.359e-5$	$4.384e-5$	$4.146e-5$
Energía disipada por unidad de área. $G_f$ [kN-m/m <sup>2</sup> ]. Figura 2-6	0.0564	0.0462	0.0436
Energía disipada por unidad de volumen. $g_f$ [kN/m <sup>2</sup> ]. Figura 2-7	0.6797	0.5560	0.5259

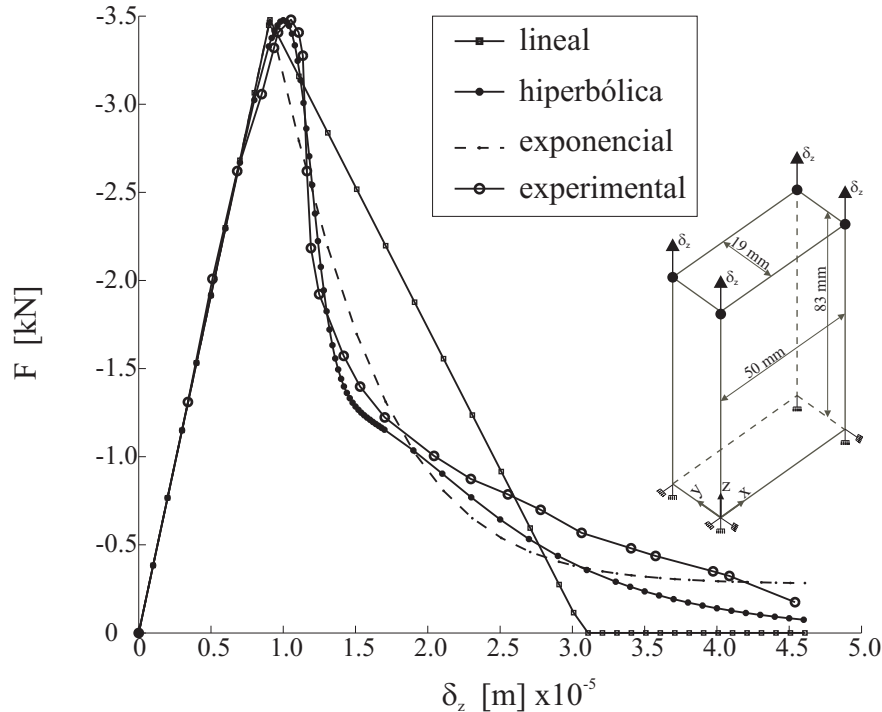


Figura 2-5. Curvas fuerza-desplazamiento. Disipación lineal, hiperbólica, exponencial y curva experimental de comparación (Gopalaratnam and Shan [13])

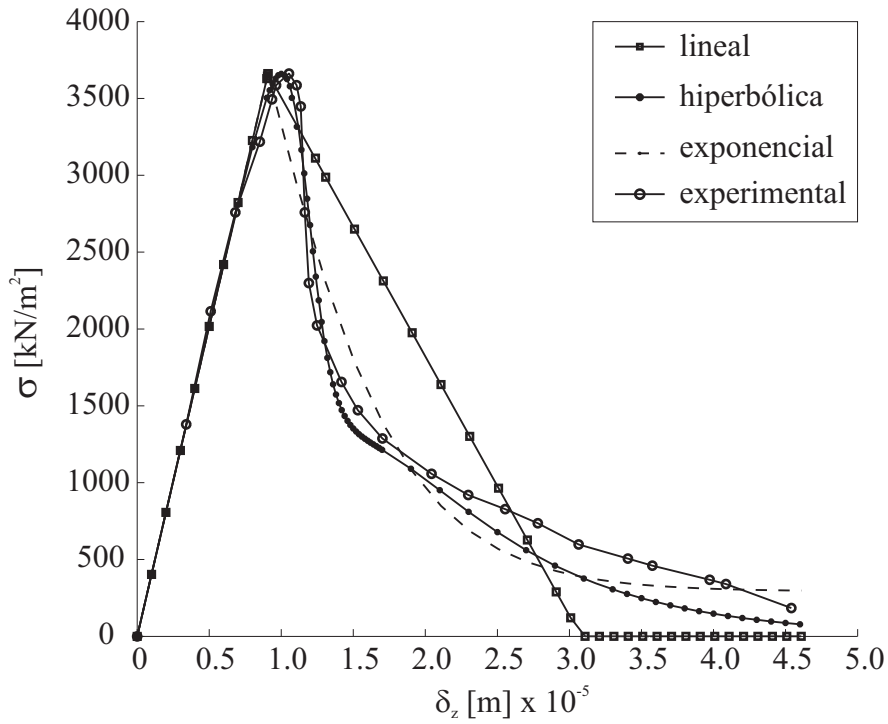


Figura 2-6. Curva tensión–desplazamiento. Disipación lineal, hiperbólica, exponencial y curva experimental de comparación (Gopalaratnam and Shan [13])

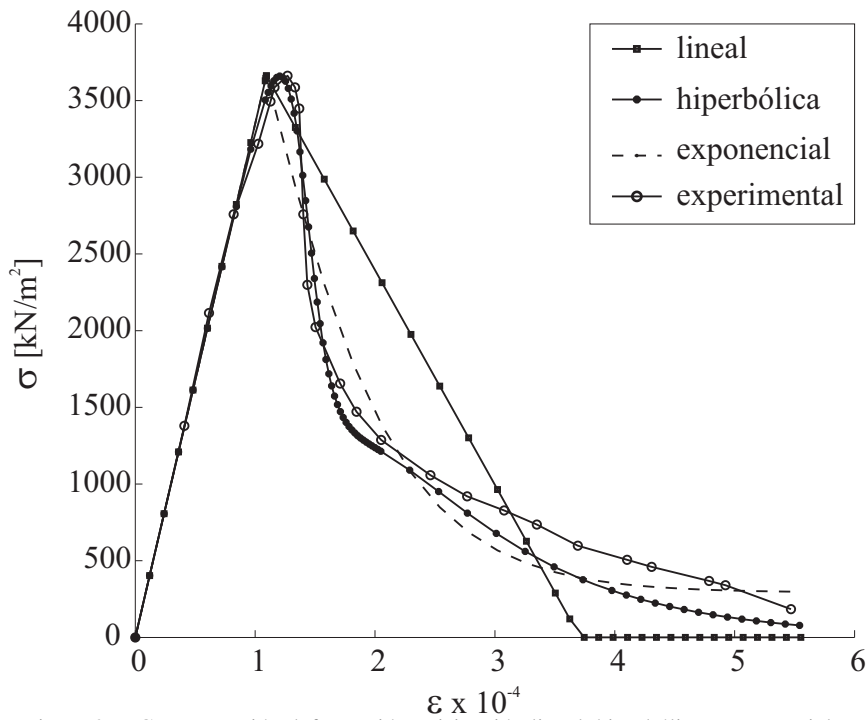


Figura 2-7. Curvas tensión deformación. Disipación lineal, hiperbólica, exponencial y curva experimental de comparación (Gopalaratnam and Shan [13])

### 2.6.3. Análisis de objetividad de la malla

Para el análisis de objetividad se analizaron 3 mallas diferentes de elementos finitos; la malla 1 con 504 nodos y 312 elementos; la malla 2 con 990 nodos y 680 elementos; y la malla 3 con un único elemento y 4 nodos. En los nodos superiores de cada uno de

estos modelos se aplicó un desplazamiento axial incremental en la dirección  $z$  ( $\delta_z$ ); todos los nodos inferiores se restringieron en la dirección  $z$ , de tal manera que se garantice la condición de axialidad. La geometría, las mallas y las condiciones de apoyo se muestran en la Figura 2-8. Los resultados fuerza-desplazamiento obtenidos mediante las pruebas hechas sobre las 3 mallas se ajustan muy bien entre sí (ver la Figura 2-9). Por lo tanto, se puede concluir que el modelo constitutivo propuesto, cumple con los requisitos de objetividad y que la disipación de energía es independiente de la malla empleada.

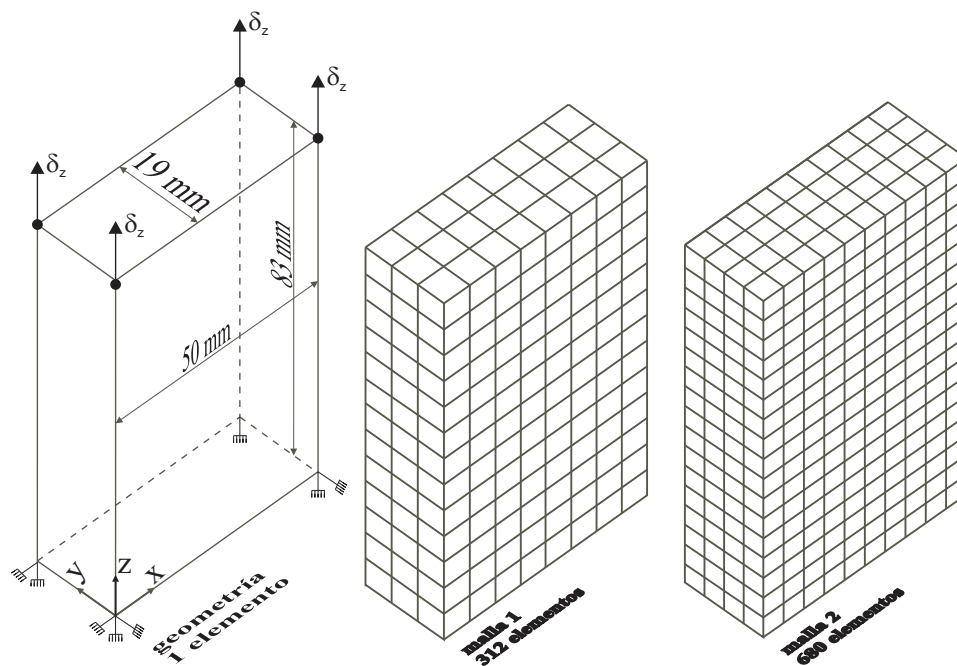


Figura 2-8. Geometría, mallas y condiciones de apoyo.

#### 2.6.4. Análisis ante cargas cíclicas

Este ensayo numérico muestra que bajo un ciclo de carga el modelo mantiene la rigidez a compresión después de iniciado el daño a tracción. Existen muchos modelos que pueden simular este efecto pero el modelo propuesto tiene la particularidad de definir el espacio de daño con una única función de discontinuidad. Este hecho permite usar las funciones clásicas de discontinuidad como Mohr-Coulomb, Mohr Coulomb modificado, Drucker-Prager, etc. El daño a compresión puede ser visualizado para una trayectoria de carga-descarga en las Figuras 2-10 a 2-12.

La respuesta del modelo bajo cargas cíclicas fue probada para algunos ciclos de carga, descarga y recarga. Todos los ciclos fueron aplicados en un elemento de hormigón con dimensiones 1 x 1 x 1 m e inician con tracción seguida de compresión.



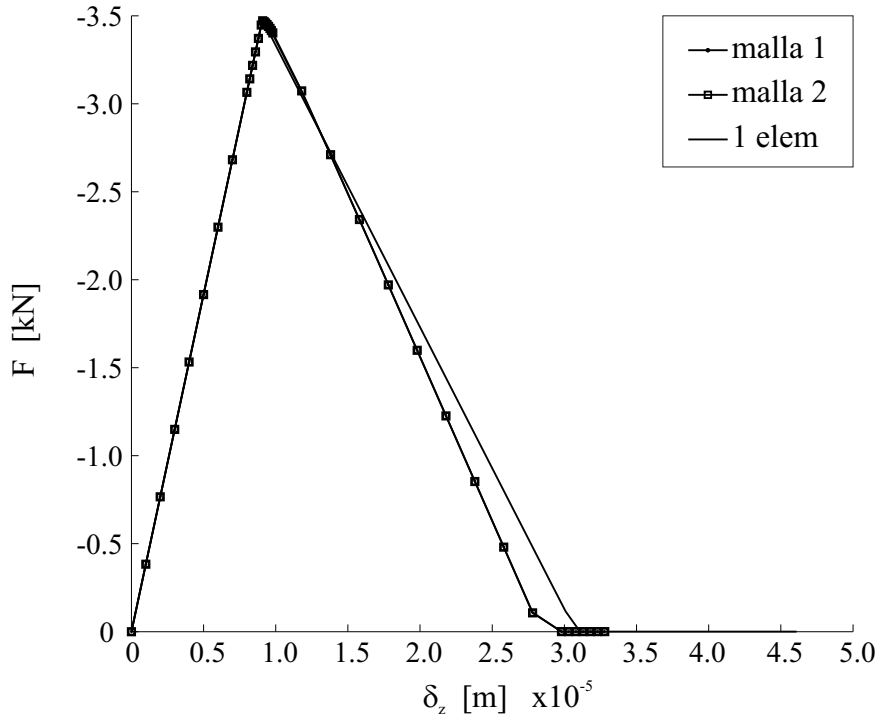


Figura 2-9. Análisis de objetividad para las tres mallas analizadas. Curva fuerza desplazamiento, geometría discretizada con 312 elementos (malla 1), 680 elementos (malla 2) y un elemento (1 elem; malla 3). Disipación lineal.

La carga de tracción fue aplicada hasta el umbral de daño a tracción (o-a) y se observa el efecto de ablandamiento a medida que la variable de daño a tracción crece (a-b). Se inicia el proceso de descarga de tracción (b-o) seguido por un proceso de carga de compresión hasta superar el umbral de compresión del material (o-c-d). Se realiza la descarga de compresión (d-o). Se realiza la recarga de tracción hasta superar el último umbral de tracción (o-b-e). Luego, se repite el proceso de descarga de tracción (e-o) seguido por un proceso de recarga de compresión (o-f-g). Finalmente, se realiza una nueva descarga de compresión (g-o) seguido por recarga de tracción (o-h-i).

La variable de daño a tracción fue activada en a-b; sin embargo, la carga de compresión (o-c) se produce con la rigidez no dañada del material. Las grietas de tracción se abrieron en a-b y, subsecuentemente, se cerraron en b-o. La resistencia inicial de compresión y la rigidez inicial de compresión del material fueron mantenidas en o-c, mientras que la variable de daño de compresión se mantuvo nula. La variable de daño de compresión creció en c-d; sin embargo, la variable de daño a tracción en el punto b es mayor que la variable de daño de compresión en el punto d. Por esto, la pendiente de descarga de compresión d-o es mayor que la pendiente de recarga a tracción o-b. Se puede decir que hasta el punto d ha ocurrido daño estructural, lo que explica el concepto de daño estructural que ha sido introducido antes. La evolución de

la variable de daño de tracción en función del ciclo de carga es mostrada en la Figura 2-11.

La variable de daño a compresión en el punto f es menor que la variable de daño a tracción en el punto e. La carga de compresión es aplicada en f-g, con lo que el valor de la variable de daño de compresión iguala el último valor de la variable de daño de tracción (punto e) durante el tramo f-g. A partir de aquí, la evolución de la variable de daño a tracción debe ser igual que la evolución de la variable de daño a compresión. Esto implica que la pendiente del proceso de recarga de tracción en el tramo o-h debe ser igual a la pendiente de la descarga de compresión en el tramo g-o. Nótese que la variable de daño de tensión en el punto h es mayor que en el punto e sin que se haya aplicado carga de tracción. Por lo tanto existe una discontinuidad en la curva entre los puntos h y e. Todo esto explica el concepto de daño constitutivo que ha sido introducido antes. La evolución de la variable de daño de compresión en función del ciclo de carga es mostrada en la Figura 2-12.

De acuerdo con las Figuras 2-10 a 2-12, es posible remarcar que el daño de compresión induce daño de tracción, mientras que el daño de tracción no induce daño de compresión.

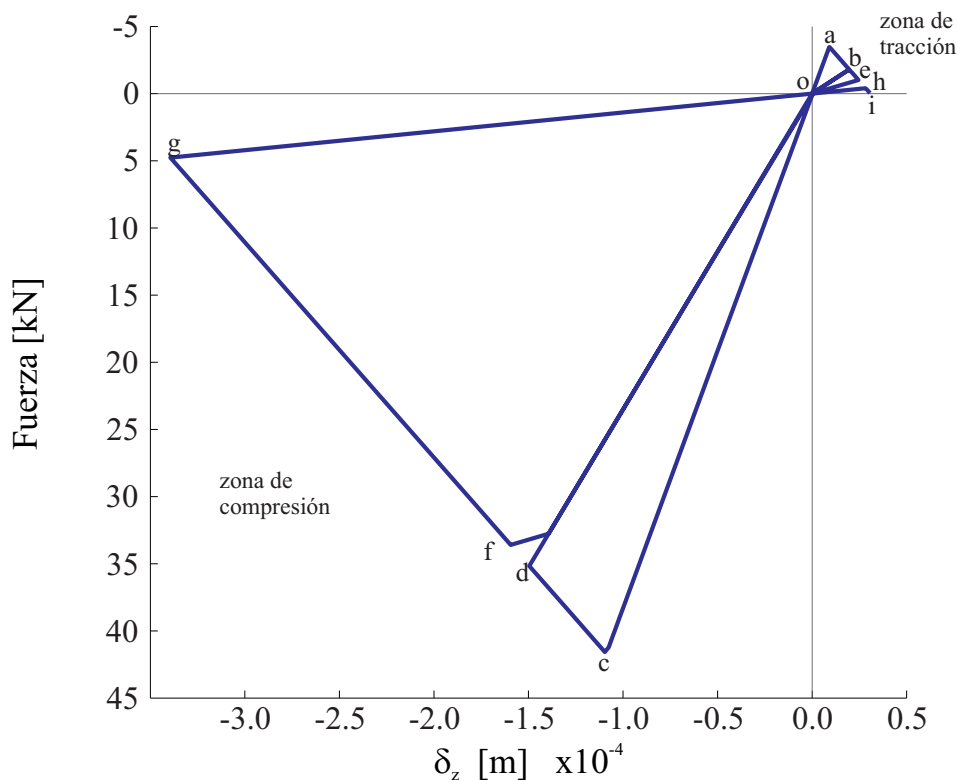


Figura 2-10. Respuesta ante cargas cíclicas. El paso de carga es diferente para los tramos (o-d) y (o-f), esto explica el salto entre los puntos d y f.

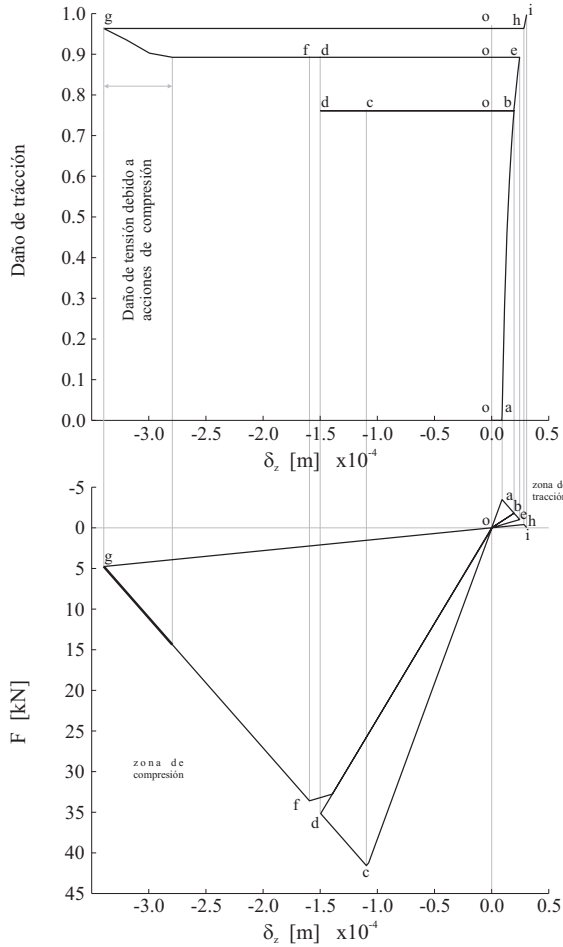


Figura 2-11. Evolución del daño de tracción en función del ciclo de carga.

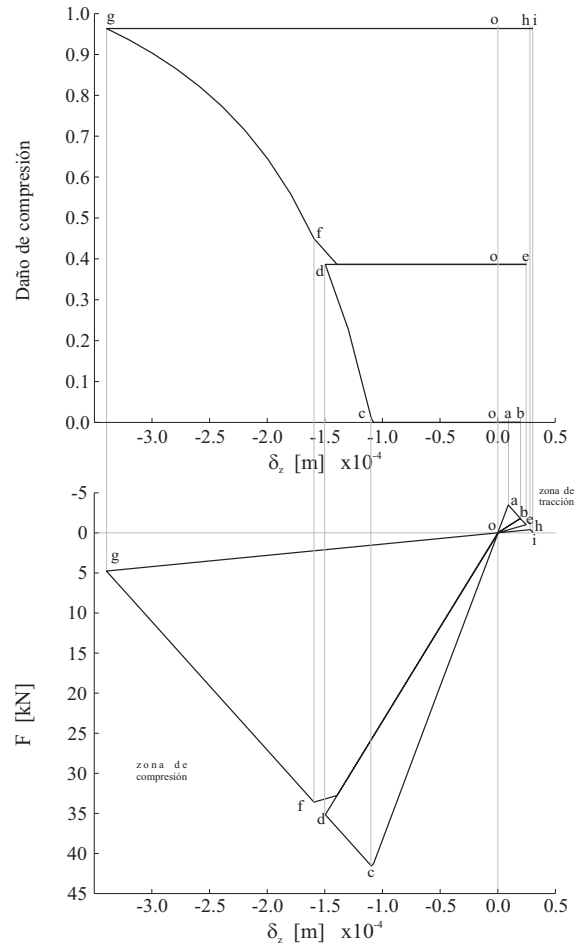


Figura 2-12. Evolución del daño de compresión en función del ciclo de carga.

### 2.6.5. Análisis frente a cargas biaxiales

La capacidad del modelo para analizar problemas biaxiales fue validada de acuerdo con los resultados experimentales de Kupfer et al. [12]. Las pruebas para el análisis frente a cargas biaxiales se realizaron sobre el mismo espécimen descrito antes, es decir, el elemento tipo hexaedro de 0.20 x 0.20 x 0.05 metros. El espécimen se somete simultáneamente a tensiones de tracción  $\sigma_1$  y tensiones de compresión  $\sigma_2$ . Se realizaron análisis numéricos para varios relaciones de  $\sigma_2/\sigma_1$  cuyos resultados son mostrados en la Figura 2-13 donde se pueden ver las curvas de tensión deformación tanto a en la zona de tracción como de compresión.

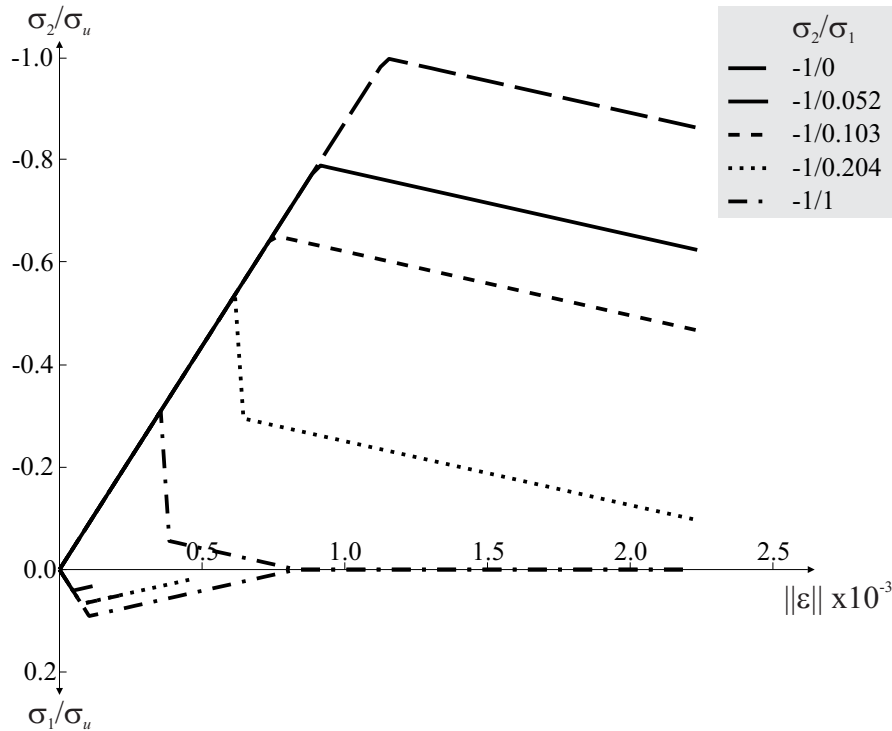


Figura 2-13. Curvas tensión-deformación para cargas bi-axiales.

Las curvas experimentales de resistencia del hormigón bajo acciones combinadas de tracción compresión publicadas por Kupfer et al. [12] corresponden a tres valores diferentes de resistencia última de compresión del hormigón  $\sigma_u = 190 \text{ kg/cm}^2$ ,  $\sigma_u = 315 \text{ kg/cm}^2$  y  $\sigma_u = 590 \text{ kg/cm}^2$ . Los resultados numéricos fueron obtenidos para  $\sigma_u = 328 \text{ kg/cm}^2$  de acuerdo con los resultados experimentales (ver Figura 14). El modelo constitutivo propuesto proporciona mejores resultados bajo cargas complejas, que es una ventaja para modelizar geomateriales. Además, permite representar la secuencia de los procesos de fisuración y aplastamiento de forma acoplada.

Resistencias última a la compresión usadas por Kupfer (1969):

—\*—  $\sigma_u = -19,0 \text{ MPa}$ ;    —□—  $\sigma_u = -31,5 \text{ MPa}$ ;    —●—  $\sigma_u = -59,0 \text{ MPa}$

Resistencia última de compresión para el modelo actual:    ---○---  $\sigma_u = -32,8 \text{ MPa}$

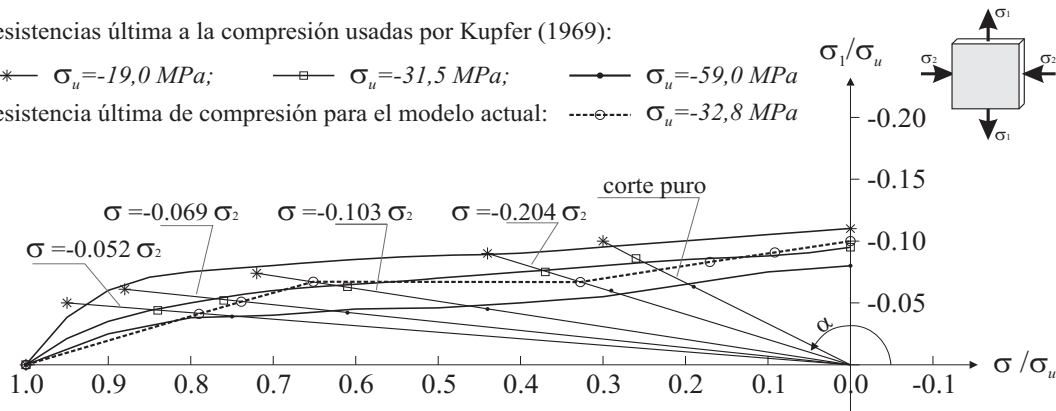


Figura 2-14. Curvas de comportamiento biaxial. Esta figura ha sido adaptada de Kupfer et al. [12].



En el caso de corte puro  $\sigma_2/\sigma_1 = -1/1$ , se ha analizado la secuencia de fallo del modelo. Las disipaciones a tracción y a compresión se pueden ver en la Figura 2-15, donde puede observarse que, cuando la función umbral del material se supera ( $a_t$  ó  $a_c$ ), la resistencia de tracción decrece (tramo  $a_t - b_t$ ) debido a que la variable de daño a tracción aumenta, mientras la resistencia a compresión sigue creciendo (tramo  $a_c - b_c$ ) hasta el punto  $b_c$ . En este punto, la variable de daño de compresión es activada porque la relación de tracción-compresión  $r$  ha cambiado. La variable  $r$  llega a ser menor que  $1/R_0$  en el tramo  $b_t - c_t$ , ver la ecuación (2-22) con lo que el valor de la función Heaviside  $H(r, R_0)$  cambia, ver la ecuación (2-23) y, en consecuencia la función umbral de compresión es activada, ver la ecuación (2-24). A partir de este punto ( $c_t$  ó  $c_c$ ) las dos variables de daño evolucionan conjuntamente y su valor será igual, es decir, se produce daño constitutivo.

Este comportamiento fue comparado tanto con el modelo de daño isótropo [18] como con el modelo constitutivo de daño de Faria et al. [11]. En el caso del modelo constitutivo de daño isótropo [18], la respuesta que se obtiene es diferente. El fallo que se produce en el punto  $a_t$  ó  $a_c$  es seguido de un ablandamiento tanto a tracción (tramo  $a_t - c_t$ ) como a compresión (tramo  $a_c - c_c$ ), tal como se muestra en la Figura 2-15.

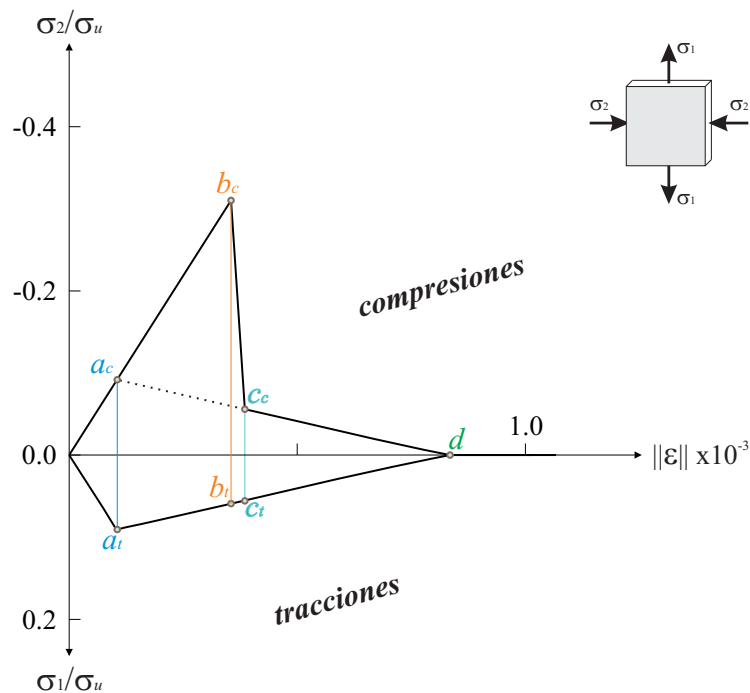


Figura 2-15. Corte puro.

En el caso del modelo de daño diferenciado de Faria et al. [11] sometido a un estado de corte puro ( $\sigma_2/\sigma_1 = -1/1$ ), el fallo se produce en dos puntos: cuando la tensión principal de tracción alcanza la resistencia de tracción del material y, subsecuentemente, cuando la tensión principal de compresión alcanza la resistencia de compresión del material. Esto sucede debido a que este modelo utiliza dos funciones umbral de discontinuidad independientes entre sí. Por lo tanto, la respuesta a tracción y la respuesta a compresión obtenidas mediante el modelo de Faria et al. [11] son independientes de la relación  $\sigma_2/\sigma_1$ . El modelo constitutivo propuesto es adecuado para corregir estas desventajas en la modelización numérica de geomateriales sometidos a cargas de cortante.

En el modelo constitutivo propuesto, en la zona de compresión biaxial, la resistencia máxima alcanzada es igual a la resistencia a compresión axial. Esto se debe a que se utiliza la superficie de fluencia de Mohr-Coulomb, con la que no es posible visualizar el incremento de resistencia de compresión debida al efecto del confinamiento. El efecto del confinamiento por compresión biaxial o triaxial se logra usando como función umbral de fluencia propuesta por Oller [5].

## **2.7. Ejemplo de aplicación**

### **2.7.1. Descripción del ensayo experimental**

Los resultados de los ensayos experimentales obtenidos por Arrea e Ingraffea en 1982 [14] han sido usados para validar el modelo propuesto. Dichos ensayos, usados tradicionalmente para la validación de modelos constitutivos de hormigón [5, 20-22], fueron planteados desde la óptica de la mecánica de fractura para estudiar el modo mixto de fractura (Modo I y Modo II) del hormigón. Arrea e Ingraffea [14] consideran una viga de hormigón con una entalladura en el centro de la luz; la viga está sometida a dos cargas puntuales asimétricas respecto al centro de la luz y los apoyos. En la Figura 2-16 se muestra un esquema del ensayo original.

La relación entre las dos cargas aplicadas es de 0.13/1 y se mantiene utilizando una viga de acero de gran rigidez. Tanto en los puntos de aplicación de la carga como en los puntos de apoyo se utilizaron platinas de distribución de la carga puntual. La carga fue aplicada en ciclos que consistieron en un incremento de la carga seguido de un mantenimiento de la carga constante (momento en el cual se hacía el trazado de las fisuras) y, finalmente, la descarga. En la prueba experimental realizada sobre vigas de



hormigón por Arrea e Ingraféa [14] se encuentran resultados para dos series de vigas: serie B y serie C; la diferencia entre las dos series radica en la resistencia de compresión del material ( $f_o^c = 45.5 \text{ MPa}$  y  $f_o^c = 43.4 \text{ MPa}$ , respectivamente) y en la forma de la entalla. La longitud de la entalla es de 82.4 mm para las dos series.

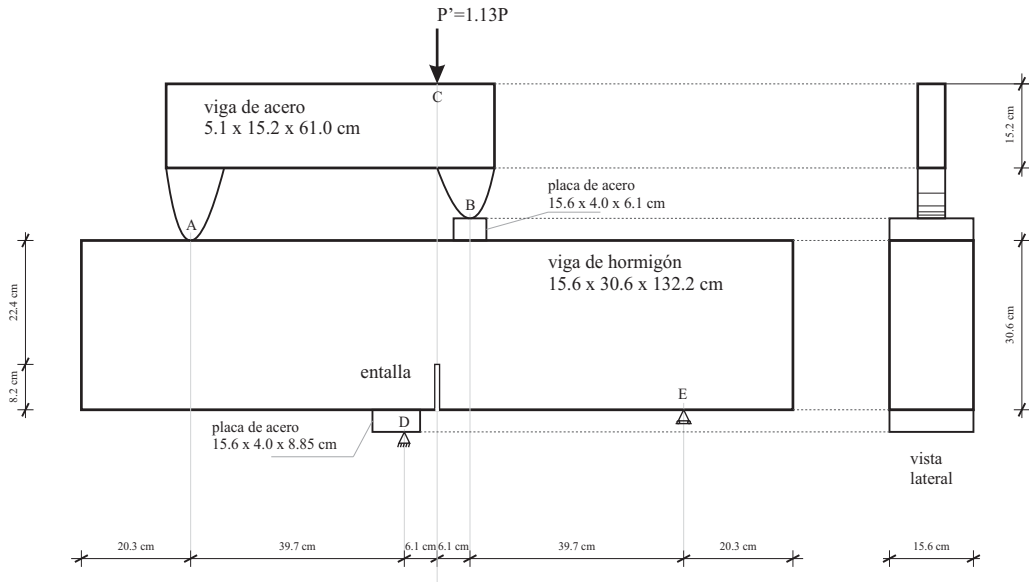


Figura 2-16. Descripción geométrica de la viga de doble modo de fractura propuesta por Arrea-Ingraffea, Reproducida de [5].

### 2.7.2. Análisis numérico

En el análisis numérico se utilizó una malla de 13014 tetraedros de 1 punto de integración y 2842 nodos. En la Figura 2-17(a) se muestra la malla empleada y en la Figura 2-17(b) se muestra las cargas aplicadas y las condiciones de apoyo establecidas. Las fuerzas en los puntos A y B se aplicaron en pasos incrementales y el proceso de la carga se realizó en 63 pasos.

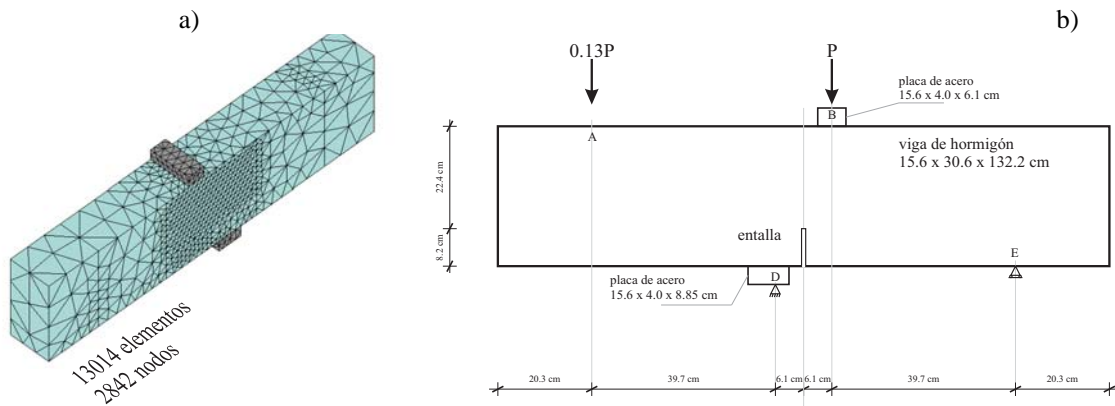


Figura 2-17. a) Malla de elementos finitos. b) Fuerzas aplicadas y condiciones de apoyo.

En la zona de ablandamiento de la curva se controló con arc-length el deslizamiento relativo entre los labios de la entalladura CMSD<sup>1</sup> en 10 parejas de nodos. Se restringieron los desplazamientos en las direcciones longitudinal  $x$  y vertical  $z$  de los nodos del punto D, mientras que en los nodos del punto E solo se restringieron los desplazamientos en dirección vertical  $z$ .

### 2.7.3. Parámetros de entrada

Como parámetros de entrada para el análisis numérico se emplearon de acuerdo con la referencia [14], la resistencia a compresión del hormigón  $f_o^c = 43.4$  MPa, el módulo de elasticidad de 24.8 GPa y el coeficiente de Poisson de 0.18. La resistencia a tracción  $f_o^t$  del hormigón, con valores de 2715.5 y 2630.3 kPa, se calculó como una función del parámetro  $R_0 = f_o^c / f_o^t$ ; de igual forma se varió la energía de fractura  $G_f$ , con valores entre 0.045 y 0.065 kN-m/m<sup>2</sup>. Debido a que no se contaba con datos experimentales de resistencia a tracción  $f_o^t$  ni energía de fractura  $G_f$ , fue necesario realizar un análisis de sensibilidad para estas dos propiedades del hormigón cuyos valores se muestran en la Tabla 2-3.

Tabla 2-3. Valores de parámetros empleados en el análisis numérico de sensibilidad

Curva	a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7
$G_f$ [kN-m/m <sup>2</sup> ]	0.060	0.060	0.065	0.065	0.045	0.050	0.055
$R_0 = f_o^c / f_o^t$	16.0	16.5	16.0	16.5	16.5	16.5	16.5
$f_o^t$ [kN/m <sup>2</sup> ]	2712.5	2630.3	2712.5	2630.3	2630.3	2630.3	2630.3

### 2.7.4. Resultados

Los resultados obtenidos con el nuevo *modelo constitutivo de daño diferenciado a tracción y compresión con única superficie de fallo* se ajustan adecuadamente a los resultados experimentales de Arrea e Ingrassia [14]. Los resultados obtenidos con el modelo propuesto fueron también comparados con los resultados numéricos obtenidos por Oller [5] (ver Figura 2-18) y con los resultados numéricos obtenidos por Gálvez y Cendón [22] (ver Figura 2-19). Para los dos casos se encuentra un buen ajuste. Los resultados del análisis de sensibilidad para la energía de fractura  $G_f$  y para la

<sup>1</sup> CMSD : Crack mouth sliding displacement; CMOD: crack mouth opening displacement



resistencia de tracción  $f_o^t$  se muestran en las curvas de reacción vertical total ( $P'$ ) y CMSD de las Figura 2-18 y 2-19.

A medida que aumenta la energía de fractura  $G_f$ , la respuesta es más dúctil. Los cambios en la tendencia de la curva representan el cambio en el mecanismo de fallo de la estructura. Dado que las curvas obtenidas conservan la tendencia, se puede concluir que el mecanismo de fallo es independiente del valor de los parámetros  $f_o^t$  y  $G_f$  en los rangos de variación analizados. La resistencia pico aumenta con el valor de la energía de fractura  $G_f$  lo que se puede ver en las curvas a2 y a4-a7 de la Figura 2-18 y la Figura 2-19. Igualmente, comparando las curvas a1 y a2 que tienen igual energía de fractura ( $G_f = 0.060$ ), se puede observar que a mayor resistencia a tracción del material se obtiene un mayor valor pico de la estructura. El mismo análisis es válido para las curvas a3 y a4 ( $G_f = 0.065$ ).

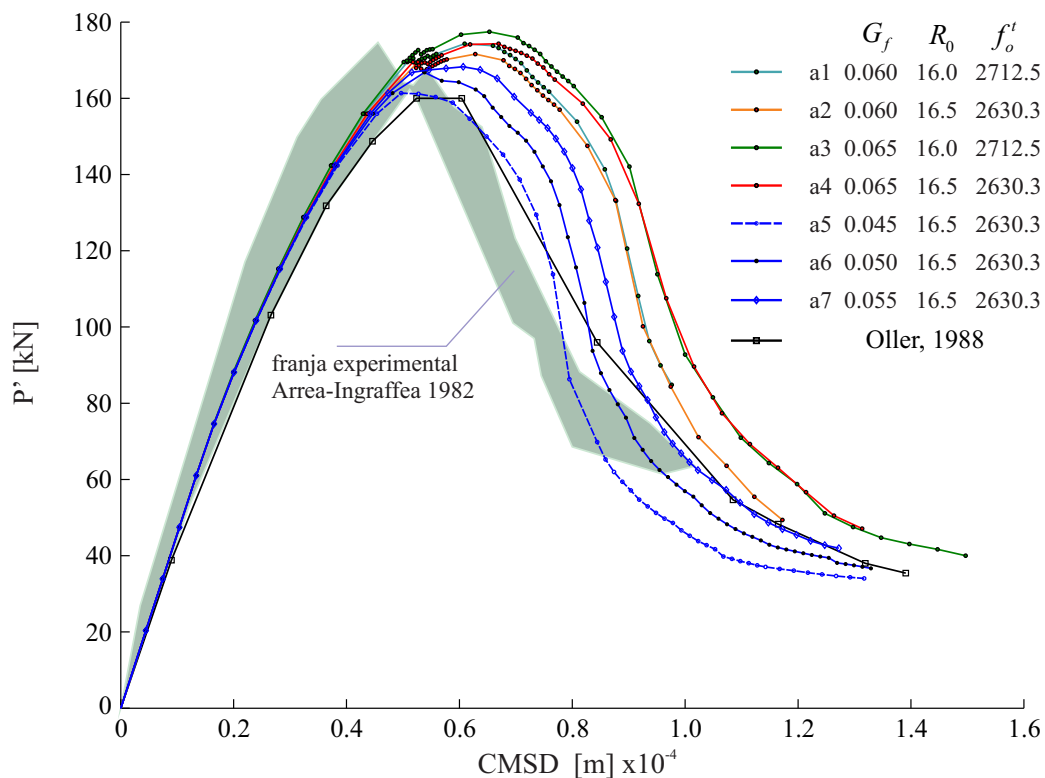


Figura 2-18. Reacción vertical vs CMSD. Resultados comparados con resultados numéricos de Oller [5].

Considerando que la curva a6 ( $G_f = 0.050 \text{ kN}\cdot\text{m}/\text{m}^2$  y  $f_o^t = 2630 \text{ kPa}$ ) tiene un buen ajuste tanto con la franja experimental de la serie B presentada en la Figura 2-18 como con la franja experimental de la serie C presentada en la Figura 2-19, se ha seleccionado

para mostrar los resultados numéricos correspondientes al daño de tracción, daño de compresión, campo de desplazamientos y distribución de tensiones principales máximas y mínimas, estos resultados serán presentados a continuación.

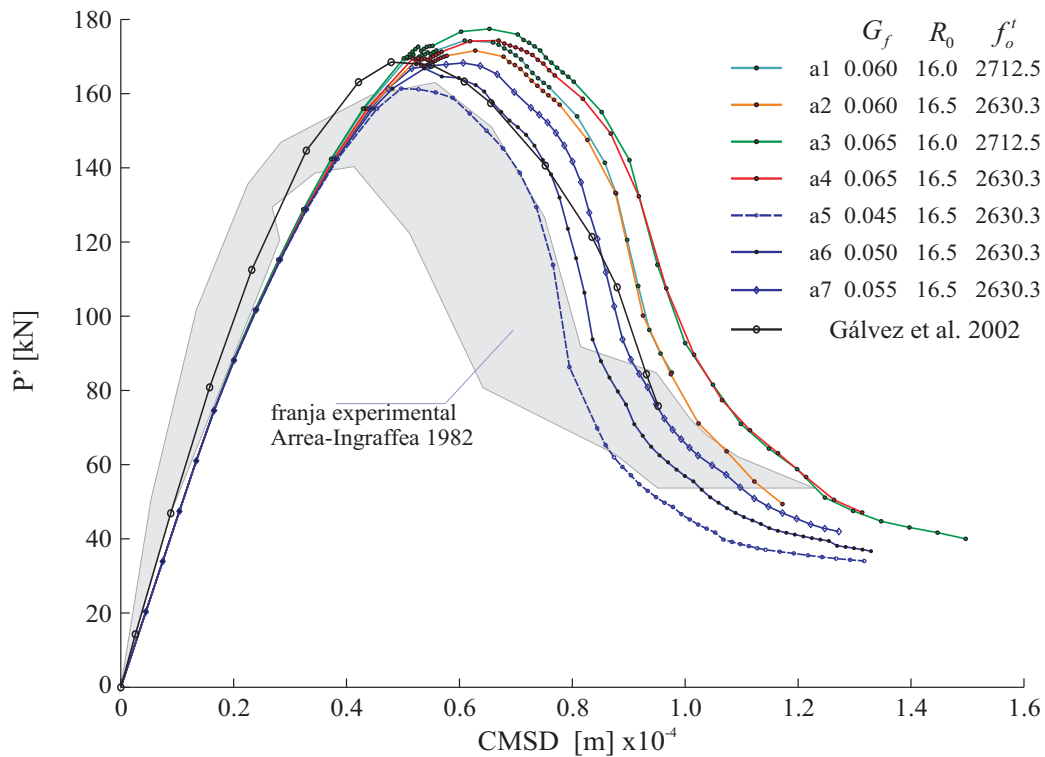


Figura 2-19. Reacción vertical vs CMSD. Resultados comparados con resultados numéricos para la serie C de Gálvez y Cendón [22].

En la DCM, la evolución de las fisuras a fracturas es representada por la evolución de la variable interna de daño. La magnitud del daño en la cual se diferencian estos dos conceptos es un tema abierto. Sin embargo, se puede considerar que la evolución de las variables internas de daño representa la zona en la cual se localiza la fractura y la fisuración de un elemento estructural. Los resultados numéricos para las variables de daño muestran que el patrón de fisuración proporcionado por el modelo de daño propuesto presenta un buen ajuste si se compara con la envolvente de las grietas medidas en las vigas ensayadas por Arrea e Ingraffea [14]. En la Figura 2-20 se superponen los resultados de daño a tracción obtenidos numéricamente con el modelo propuesto y la envolvente de la zona experimental de fractura.

Analizando la evolución de los valores de la variable de daño a tracción, se observa que en el paso 5 se inicia el daño a tracción con un valor máximo de 0.1731, mientras que en el paso 13 se alcanza la resistencia pico de la reacción vertical con un valor de 166.78 kN. En el paso 23, la curva está en descenso y en el paso 45 la curva empieza a volverse asintótica. El último paso de carga fue el 63, para el cual el máximo valor de la

variable de daño de tracción fue 0.9959. La evolución del daño a tracción se muestra en la Figura 2-21, en la que se puede observar que el proceso de fisuración corresponde al modo II de fractura en cortante hasta el paso de carga 13. Sin embargo, existe tensiones de compresión en las caras de la entalladura lo que implica que puede existir daño de compresión en esas zonas. En el paso 23 (ver Figura 2-21), la apertura de la fisura es pronunciada lo que indica que a las acciones cortantes se le añade una componente de tracción. Nótese que entre los pasos de carga 13 y 23 se presentó un cambio en el modo de fractura, desde el modo I al modo mixto. Esto se debe a que la zona de fractura está sometida a un estado de tensiones complejo, que contiene acciones cortantes y de tracción. A partir de aquí, en los pasos de carga 45 y 63, la zona de fractura crece siguiendo el mecanismo antes descrito, aunque la componente de tensiones de tracción es predominante en estos pasos.

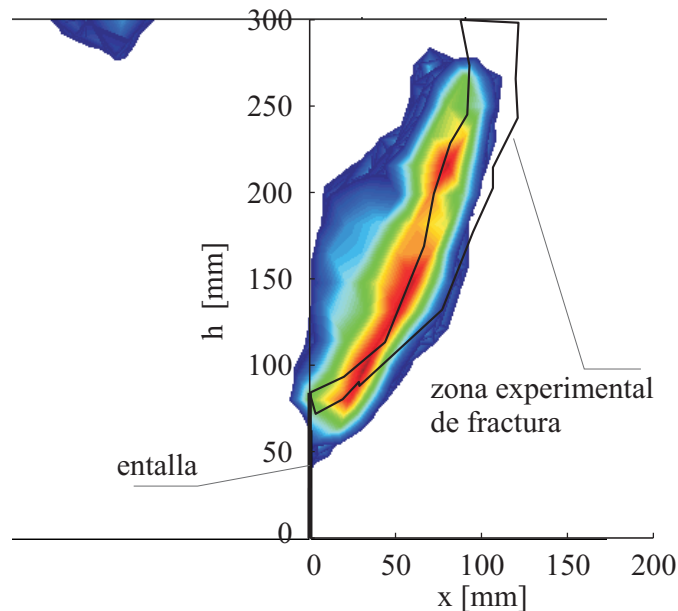


Figura 2-20. Daño a tracción en paso 63 comparado con zona experimental de fractura

La variable de daño a compresión se inicia en el paso 13 con un valor de 0.1325 y crece hasta un valor de 0.6884 en el paso 63. La evolución de esta variable se muestra en la Figura 2-22. La zona en la cual se activa la variable de daño está en la parte inferior de la zona fracturada, cerca de la parte superior de la entalladura, zona en la cual se concentran tensiones cortantes y de compresión en los primeros pasos de carga. Es decir, esta zona es sujeta a estados de tensiones de mayor complejidad. En los pasos finales del análisis, se observan zonas con daño a compresión en la zona superior de la fisura debido a que la tensión de compresión necesaria para el equilibrio de la viga es alta.

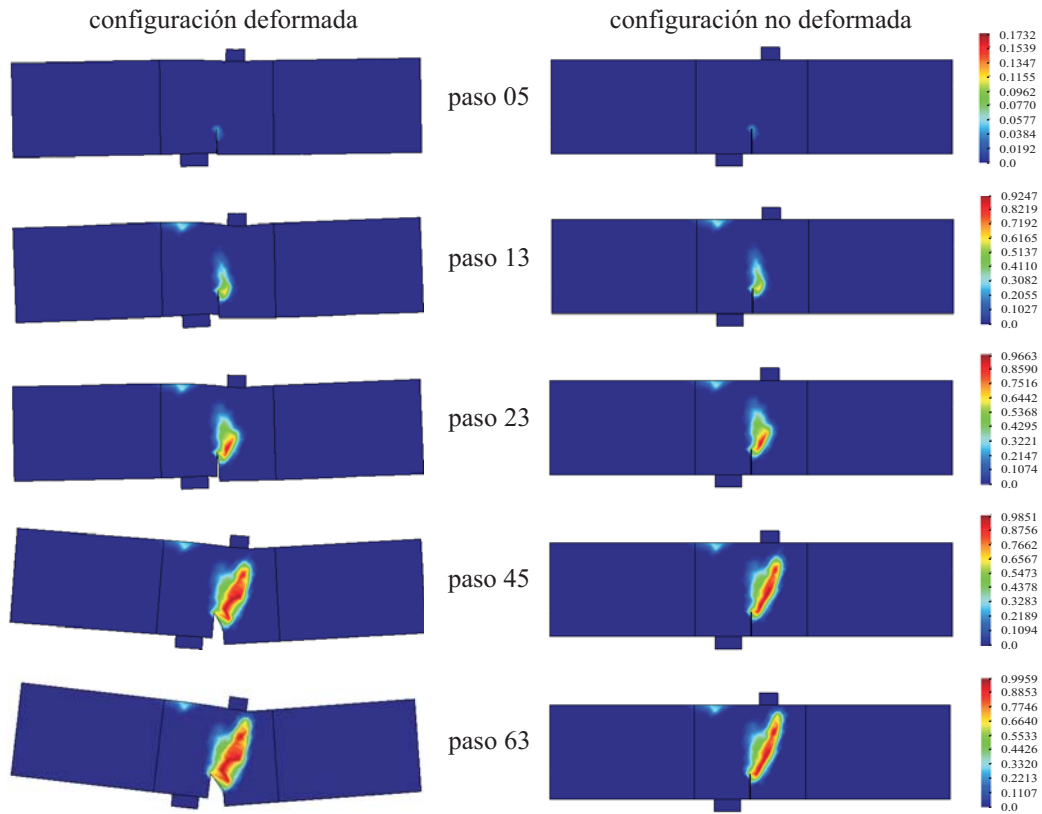


Figura 2-21. Evolución de la variable interna de daño a tracción y deformada ampliada 200x. Resistencia a tracción 2630 kPa; resistencia a compresión 43400 kPa;  $R_o=16.5$ ; Energía de fractura  $0.050 \text{ kN}\cdot\text{m}/\text{m}^2$ .

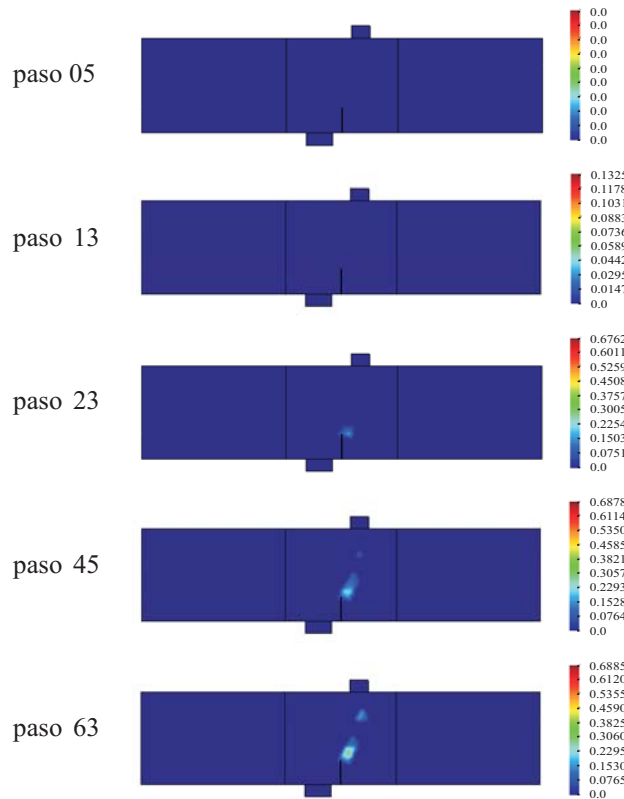


Figura 2-22. Evolución de la variable interna de daño a compresión. Resistencia a tracción 2630 kPa; resistencia a compresión 43400 kPa;  $R_o=16.5$ ; Energía de fractura  $0.050 \text{ kN}\cdot\text{m}/\text{m}^2$ .

*a. Localización de desplazamientos*

El modelo constitutivo propuesto no considera la fractura como una discontinuidad del medio continuo sino como una discontinuidad del campo de desplazamientos y, en consecuencia, como una discontinuidad en el campo de deformaciones. Esta premisa se cumple en el análisis numérico realizado y se muestra en la Figura 2-23, donde está claramente representada la discontinuidad en el campo de desplazamientos dentro de la zona experimental de fractura.

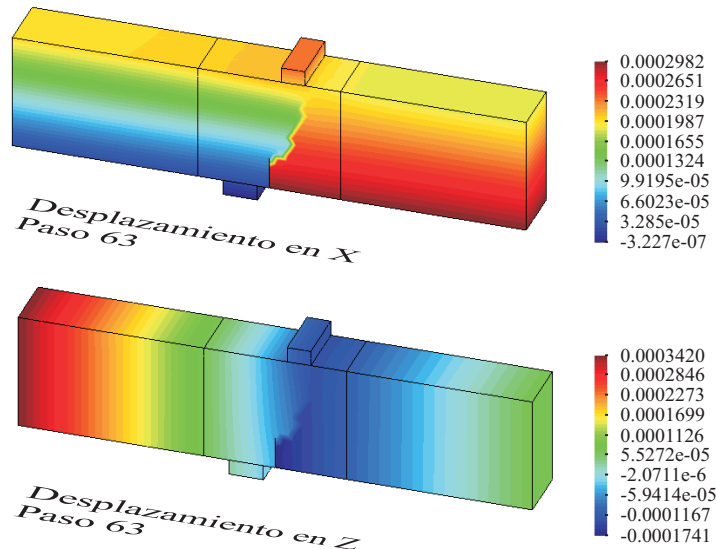


Figura 2-23. Desplazamientos. Paso 63

*b. Campo de tensiones principales*

El estado de cargas y las condiciones de frontera impuestas a la viga generan un estado de tensiones complejo, predominando las acciones cortantes y con concentración en la parte superior de la entalladura. Dado que las acciones impuestas no son de corte puro, es necesario observar el campo de las tensiones principales que permita comprender la respuesta tensorial del elemento analizado. En la Figura 2-24 se muestra el campo de las tensiones principales máximas (de tracción) y mínimas (de compresión) para el paso de carga 13, donde se puede observar que el máximo valor de la tensión principal de tracción alcanza un valor de 3.3 MPa, mientras el máximo valor encontrado para la tensión principal de compresión es de -19.244 MPa. Estos valores son altos alrededor de la parte superior de la entalladura, lo que confirma que en esta zona el estado de tensiones es de naturaleza compleja. La evolución de la variable de daño a compresión se inició en el paso 13 de carga (ver la Figura 2-22), mientras que la evolución de la variable de daño a tracción se inicia en el paso 5 (ver la Figura 2-21).

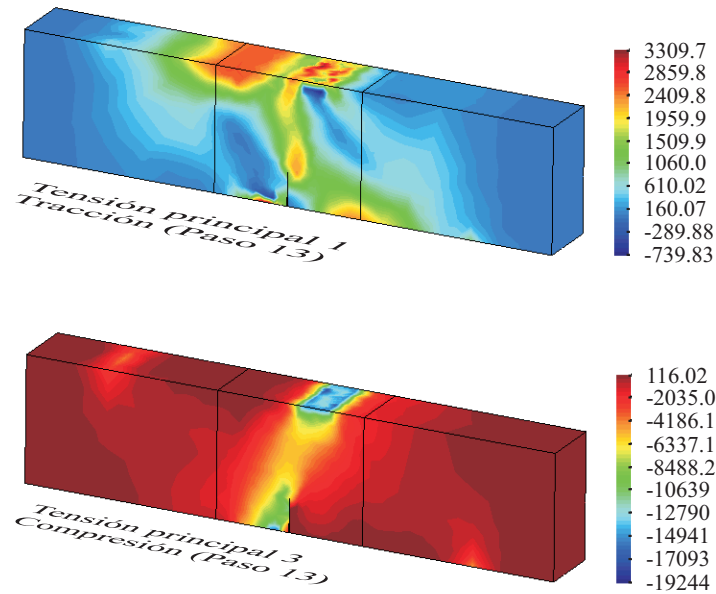


Figura 2-24. Tensiones principales máximas (tracción) y mínimas (compresión) en el paso 13.

## 2.8. Observaciones

En este capítulo se propone un nuevo modelo constitutivo de daño diferenciado a tracción y compresión con única superficie de discontinuidad. Dada la adecuada respuesta que se obtiene para cargas de tracción, de compresión, cortantes, biaxiales y complejas, es posible concluir que este modelo es una alternativa valiosa de modelización de las estructuras de hormigón. Además, el hecho de que el estado de no linealidad sea definido por una única superficie de discontinuidad permite definir (a manera de post proceso) un índice de daño local equivalente que será usado en el cálculo del tensor secante equivalente. El tensor secante equivalente es fundamental para poder determinar los parámetros modales tales como frecuencias naturales y modos de vibración. En el siguiente capítulo será desarrollado este tema y se hará evidente la aplicación e importancia de este nuevo modelo constitutivo en la determinación de la correlación entre la evolución del daño global y el cambio sufrido por los parámetros modales en estructuras de hormigón armado.

## Bibliografía capítulo 2

[1] L.M. Kachanov, Time of rupture process under creep conditions, Izvestia Akaademii Nank, 8 (1958) 26-31.



- [2] J.C. Simo, J.W. Ju, Strain- and stress-based continuum damage models-II. Computational aspects, *International Journal of Solids and Structures*, 23 (1987) 841-869.
- [3] J.C. Simo, J.W. Ju, Strain- and stress-based continuum damage models-I. Formulation, *International Journal of Solids and Structures*, 23 (1987) 821-840.
- [4] J. Lemaitre, Coupled elasto-plasticity and damage constitutive equations, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 51 (1985) 31-49.
- [5] S. Oller, Un modelo de daño continuo para materiales-friccionales. Tesis PhD, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, 1988.
- [6] J. Lubliner, J. Oliver, S. Oller, E. Oñate, A plastic-damage model for concrete, *International Journal of Solids and Structures*, 25 (1989) 299-326.
- [7] J.L. Chaboche, Continuum Damage Mechanics: Part II-Damage Growth, Crack Initiation, and Crack Growth, *Journal of Applied Mechanics*, 55 (1988) 65-72.
- [8] J.L. Chaboche, Continuum Damage Mechanics: Part I-General Concepts, *Journal of Applied Mechanics*, 55 (1988) 59-64.
- [9] X. Tao, D.V. Phillips, A simplified isotropic damage model for concrete under bi-axial stress states, *Cement and Concrete Composites*, 27 (2005) 716-726.
- [10] J. Mazars, G. Pijaudier-Cabot, Continuum Damage Theory -Application to Concrete, *Journal of Engineering Mechanics*, 115 (1989) 345-365.
- [11] R. Faria, J. Oliver, M. Cervera, A strain-based plastic viscous-damage model for massive concrete structures, *International Journal of Solids and Structures*, 35 (1998) 1533-1558.
- [12] H. Kupfer, H. Hilsdorf, H. Rusch, Behaviour of concrete under biaxial stresses, *Journal of the American Concrete Institute*, 66 (1969) 656-666.
- [13] V.S. Gopalaratnam, S.P. Shah, Softening response of plain concrete in direct tension, *Journal of the American Concrete Institute*, 82 (1985) 310-321.
- [14] M. Arrea, I. A, Mixed Mode Crack Propagation in Mortar and Concrete, in: Technical report 81-13, Dpt. of Structural Engineering, Cornell University, 1982.
- [15] S. Oller, Fractura Mecánica. Un enfoque global., in, CIMNE, Barcelona, 2001, pp. 200-217.
- [16] G.A. Maugin, The thermodynamics of plasticity and fracture, Cambridge University press, 1992.
- [17] J.A. Paredes, A.H. Barbat, S. Oller, A compression-tension concrete damage model, applied to a wind turbine reinforced concrete tower, *Engineering Structures*, 33 (2011) 3559-3569.
- [18] S. Oller, Modelización numérica de Materiales Friccionales, CIMNE, Barcelona, 1991.
- [19] PLCD-Manual, Non-linear thermo mechanic finite element oriented to PhD student education., in: Code developed at CIMNE, Barcelona, 2008.
- [20] J.G. Rots, R. de-Borst, Analysis of Mixed-Mode Fracture in Concrete, *Journal of Engineering Mechanics*, 113 (1987) 1739-1758.
- [21] S. Blanco Ibáñez, Contribuciones a la simulación numérica del fallo material en medios tridimensionales mediante la metodología de discontinuidades fuertes de continuo. PhD, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, 2007.
- [22] J.C. Gálvez, D.A. Cendón, Simulación de la fractura del hormigón en modo mixto., *Revista Internacional Métodos numéricos para cálculo y diseño en ingeniería*, 118 (2002).



---

### **3. Metodología de correlación entre la evolución de las frecuencias naturales de la estructura y la evolución del daño global**

#### **3.1. Introducción**

En el presente capítulo se propone una metodología para identificar bajos niveles de daño estructural mediante la correlación de la evolución del daño global y la evolución de las frecuencias naturales de una estructura. Como parte de la metodología propuesta se define un índice de daño local basado en un análisis constitutivo y que es el resultado de la respuesta mecánica del material; asimismo, se propone un índice de daño global basado en la respuesta de la estructura y que tiene en cuenta el índice de daño local. Con esto se da respuesta a la necesidad de establecer índices racionales y adecuados de daño local y global basados en el análisis de vibraciones (VMB) [1-3].

De acuerdo con la metodología propuesta, establecer una correlación entre la evolución del daño global y la evolución de las frecuencias naturales de una estructura permitirá no solo evaluar *a priori* el estado de daño de la estructura mediante un estudio de vibraciones *in situ*, sino también estimar la ubicación de las zonas de la estructura en las que los materiales hayan superado sus límites de resistencia. Los análisis numéricos





no lineales que hacen parte de la metodología propuesta permiten ubicar el daño local y establecer su correlación con la evolución de las frecuencias naturales; esto proporcionará un patrón para el análisis de los datos obtenidos en los procesos de instrumentación dinámica de estructuras.

Se espera que esta metodología se convierta en una base teórica para diversas áreas de la ingeniería tales como: la evaluación y diagnóstico de estructuras existentes usando técnicas no destructivas, el monitoreo continuo de nuevas estructuras sometidas a cargas dinámicas permanentes, la caracterización y diagnóstico estructural de edificios históricos (construcciones que por su valor patrimonial requieren ser evaluadas mediante pruebas no destructivas) o la evaluación pre y post sísmica de estructuras.

El daño global de las estructuras está condicionado por la pérdida de rigidez global que sufre una estructura cuando es sometida a cargas que superan los límites elásticos de los materiales. Existe una relación entre los daños locales que sufre el material y el daño global de la estructura. Para el cálculo del daño local se deben utilizar modelos constitutivos que representen el comportamiento no lineal del material, mientras que para determinar el daño global es necesario comparar la respuesta estructural de una estructura en estado no dañado con su respuesta en estado dañado.

Para el caso de estructuras construidas de materiales compuestos y, específicamente, de hormigón armado, la rigidez estará determinada por el aporte en módulo de elasticidad y resistencia de los materiales componentes (hormigón y acero) que, mediante una ponderación adecuada, se agruparan en el tensor constitutivo del material compuesto. Así, el tensor constitutivo del material compuesto y la configuración geométrica de cada estructura determinan la rigidez de la misma. Para niveles de daño bajos, normalmente, la geometría de una estructura permanece constante ante la aplicación de cargas; sin embargo los materiales sufren cambios en sus propiedades mecánicas que se producen cuando las cargas provocan que los umbrales de los parámetros que caracterizan los materiales se superen. Esto significa que, si al menos en uno de los materiales que conforman al material compuesto el límite de resistencia es superado, la rigidez del material compuesto será disminuida. En consecuencia, la rigidez de la estructura también se disminuye lo que, finalmente, implicará un cambio en las frecuencias y de los modos naturales de vibración de dicha estructura.

En este punto surgen preguntas: ¿En qué medida se afecta el tensor constitutivo del material compuesto debido a la disminución de las propiedades mecánicas de uno o varios de sus componentes? ¿Si en un punto de la estructura el tensor constitutivo del

material compuesto disminuye, como cambia la rigidez global de dicha estructura? ¿Cómo cambian las frecuencias naturales y los respectivos modos de vibración de la estructura por el cambio de rigidez?

Para dar respuesta a estas preguntas es necesario establecer una metodología que involucre diferentes teorías nuevas y existentes. La teoría de mezclas serie/paralelo [4, 5] permite la modelización del hormigón armado como un material compuesto. El modelo constitutivo de daño isótropo [6-9] y el nuevo modelo constitutivo de daño diferenciado a tracción y compresión permiten la modelización del comportamiento no lineal del hormigón. La teoría de elasto-plasticidad clásica permite la modelización del comportamiento no lineal del acero.

Aunque este trabajo se ha enfocado al análisis de hormigón reforzado, es evidente que la metodología que se está proponiendo podrá ser aplicada a diferentes materiales compuestos y para modelos constitutivos diferentes a los ya mencionados.

### **3.2. Determinación del daño local**

El daño local hace referencia a la disminución de la resistencia y módulo de elasticidad del material en un punto de análisis cuando las acciones impuestas superan el ó los umbrales del material. Existen diferentes modelos constitutivos que permiten representar este comportamiento no lineal. En el caso de los modelos constitutivos de daño isótropo [6, 9], la disminución del módulo de elasticidad o del tensor constitutivo del material se representa mediante una variable interna denominada variable de daño. En el caso del nuevo modelo constitutivo de daño diferenciado a tracción y compresión que se propuso en el capítulo anterior, existen dos variables de daño que pueden influir en la magnitud que reduce el tensor constitutivo del material. En estos dos casos, el tensor constitutivo del material será transformado en un tensor constitutivo secante. Para el caso del modelo constitutivo elasto-plástico el comportamiento no lineal es representado, normalmente, por un tensor constitutivo tangente, siendo necesario establecer un índice de daño o deterioro equivalente que permita considerar la pérdida de rigidez de este material. En las Figura 3-1 y 3-2 se muestran las representaciones típicas del modelo de daño isótropo sometido a tracción y del modelo elasto-plástico.

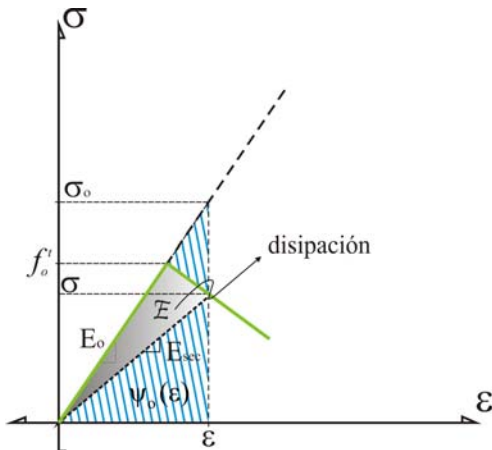


Figura 3-1. Representación del modelo constitutivo de daño isotrópico para materiales frágiles.

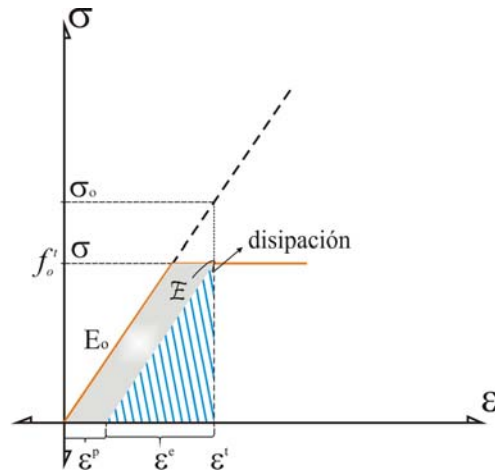


Figura 3-2. Representación del modelo constitutivo elasto-plástico para materiales metálicos.

Considerando las diferentes posibilidades que existen para definir un índice de daño local que permita establecer la pérdida de rigidez del material en un punto, se propone un índice que dependa de la función umbral de discontinuidad, que se denomina índice de daño local equivalente,  $d^{eqv}$ , y puede ser establecido para diferentes modelos constitutivos como los antes expuestos

$$d^{eqv} = 1 - \frac{f(\sigma_o^c)}{f(\sigma_o)} \quad (3-1)$$

donde  $f(\sigma_o)$  es el valor de la función de discontinuidad evaluada con el tensor actual de tensiones efectivas y  $f(\sigma_o^c)$  es el valor de la función de discontinuidad evaluada con el tensor de tensiones efectivas umbral del material. Normalmente, este último está definido como

$$\sigma_o^c = \begin{bmatrix} f_o^{umbral} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3-2)$$

donde  $f_o^{umbral}$  es el umbral nominal de resistencia del material. En el caso del hormigón, el umbral de resistencia está definido por la resistencia inicial a compresión, mientras que en el caso del acero el umbral de resistencia está definido por la tensión de fluencia. Nótese que el valor umbral del material hace referencia a la tensión para la cual el material deja de tener un comportamiento lineal. Dependiendo del modelo constitutivo que se esté empleando, podrán ser representados fenómenos de endurecimiento y ablandamiento.

### 3.2.1. Cálculo del tensor secante para daño isótropo

Tal como ya se ha dicho, cuando en el material se supera los umbrales de resistencia, tanto la resistencia como las propiedades elásticas del material disminuyen. La disminución de las propiedades elásticas de un material quasi-frágil como el hormigón se representa al nivel tensorial mediante el tensor constitutivo secante. En el caso del modelo constitutivo de daño isótropo [6, 9] que fue descrito en el apartado 1.7, esta disminución está afectada directamente por la variable de daño isótropo,  $d$ , es decir  $d^{eqv} = d$ , por lo que el tensor secante equivalente está definido como

$$C_{sec} = (1-d)C \quad (3-3)$$

donde  $C$  es el tensor constitutivo elástico del material y  $d$  es la variable de daño isótropo;  $d = 0$  representa un estado no dañado y  $d = 1$  representa un estado totalmente dañado. El tensor constitutivo elástico del material está definido como

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + 2\mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (3-4)$$

donde  $\delta_{ij}$  es el delta de Kronecker y  $\lambda$  y  $\mu$  son las constantes elásticas de Lamé

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}; \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (3-5)$$

$$\delta_{ij} \begin{cases} = 1 & \text{si } i = j \\ = 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (3-6)$$

$E$  es el módulo de elasticidad y  $\nu$  es el coeficiente de Poisson. El tensor constitutivo elástico puede ser escrito en notación matricial o de Voigt como

$$C = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ & & & \mu & 0 & 0 \\ & & & & \mu & 0 \\ \text{sim} & & & & & \mu \end{bmatrix} \quad (3-7)$$

Con esto el tensor secante equivalente se puede escribir en notación matricial como



$$C_{\text{sec}} = (1-d) \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ & & & \mu & 0 & 0 \\ & & & & \mu & 0 \\ \text{sim} & & & & & \mu \end{bmatrix} \quad (3-8)$$

### 3.2.2. Cálculo del tensor secante equivalente para daño diferenciado a tracción y a compresión

El nuevo modelo constitutivo de daño propuesto utiliza dos variables escalares de daño:  $d^+$  a tracción y  $d^-$  a compresión. La evolución de cada una de estas variables depende de las condiciones de carga y de la relación de resistencias a tracción y compresión,  $R_o$ , que tiene el material. Para estados complejos de carga, este modelo constitutivo puede conducir a la existencia de las dos variables de daño con magnitudes diferentes, (véase la Figura 2-15). Este mismo efecto se puede presentar cuando una estructura es sometida a cargas cíclicas pues, para un estado cualquiera del ciclo, se puede dar el caso que tanto la variable de daño a tracción como la variable de daño a compresión hayan iniciado su evolución en momentos diferentes y, por lo tanto, cada una puede tener valores diferentes, tal como puede verse en las Figuras 2-10 a 2-15.

Contar con dos variables de daño diferenciadas a tracción y a compresión constituye una ventaja a nivel constitutivo a la hora de realizar un análisis numérico no lineal de geomateriales. Como ya se ha dicho, los geomateriales tienen resistencia a tracción diferente de la resistencia a compresión y, por lo tanto, la evolución de los daños a tracción y a compresión será diferente. Sin embargo, para efectos de calcular la variación de las frecuencias y las formas modales naturales de vibración, es necesario establecer un índice de daño equivalente que represente la pérdida de rigidez del material debido al inicio y evolución de al menos una de las variables de daño. Esto se logra haciendo uso de una de las características fundamentales del nuevo modelo constitutivo propuesto: el estado no lineal está definido por una única función de discontinuidad, lo que permite determinar el índice de daño local equivalente  $d^{eqv}$  mediante la ecuación (3-1).

En este caso, el tensor secante equivalente se define en términos de la variable de daño local equivalente

$$C_{\text{sec}} = (1 - d^{eqv})C \quad (3-9)$$

donde  $C$  es el tensor constitutivo elástico del material definido mediante las ecuaciones (3-4) a (3-7) y, por lo tanto, el tensor constitutivo secante, en notación matricial, queda definido como

$$C_{\text{sec}} = (1 - d^{eqv}) \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ & & & \mu & 0 & 0 \\ & & & & \mu & 0 \\ \text{sim} & & & & & \mu \end{bmatrix} \quad (3-10)$$

Esta forma de establecer el índice de daño local a través de una variable de daño equivalente,  $d^{eqv}$ , permite concluir que la magnitud de las frecuencias naturales de una estructura se ve afectada por la presencia, en algún instante de análisis, tanto de grietas de tensión (“*cracking*”) como por el fenómeno de aplastamiento del material (“*crushing*”).

### 3.2.3. Cálculo del tensor secante equivalente para materiales elasto-plásticos

Como es sabido, existen modelos constitutivos en los que se consideran las deformaciones permanentes o deformaciones plásticas como variables internas del modelo. Incluir la evolución de dichas deformaciones en los modelos permite representar el comportamiento de materiales como los metales que tienen comportamiento elasto-plástico. También existen modelos constitutivos de daño que contemplan la presencia de deformaciones permanentes en el comportamiento mecánico de los geomateriales [6, 10-13], específicamente en el hormigón sometido a compresión, donde las variables internas están representadas por la ó las variables de daño y también por la deformación plástica o permanente. En los modelos constitutivos donde la deformación plástica es considerada como una variable interna, es necesaria la descomposición del tensor de deformaciones totales en deformaciones elásticas y deformaciones plásticas

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p \quad (3-11)$$

donde  $\varepsilon$  es el tensor de deformaciones totales,  $\varepsilon^e$  es el tensor de deformaciones elásticas y  $\varepsilon^p$  es el tensor de deformaciones plásticas. En la ecuación (3-1), la función de discontinuidad  $f(\sigma_o)$  está definida en términos del tensor de tensiones efectivas y, a



su vez, el tensor de tensiones efectivas  $\sigma_e$  está definido en términos del tensor de deformaciones totales  $\varepsilon$ . Por lo tanto, para este tipo de modelos constitutivos, también es posible determinar un índice de daño local equivalente,  $d^{eqv}$ , en términos de la función de discontinuidad de acuerdo con la ecuación (3-1). Finalmente, el tensor constitutivo secante para materiales elasto-plásticos se puede determinar por las ecuaciones (3-9) y (3-10).

Es pertinente anotar que la evolución de las variables internas tienen sus propias leyes de evolución según lo determine el respectivo modelo constitutivo y su resultado es independiente de la determinación del índice de daño local equivalente, ya que el cálculo de dicho índice se realiza a fines de post proceso y con el objeto de calcular la disminución de la rigidez en el punto de análisis para el posterior cálculo de frecuencias naturales.

#### **3.2.4. Cálculo del tensor secante equivalente para materiales compuestos**

Para la modelización numérica de un material compuesto es necesario tener en cuenta la compatibilidad de deformaciones de cada componente, el equilibrio interior de tensiones y el aporte de rigidez que proporciona cada material componente. Todo esto se logra mediante la selección adecuada de la teoría de mezclas a usar. En el desarrollo de esta tesis se utiliza la teoría de mezclas serie/paralelo [4, 5], un resumen de esta teoría puede verse en el Apartado 1.5. El uso adecuado de esta teoría permite realizar la modelización numérica de materiales compuestos conformados por  $n$ -materiales componentes; cada material componente puede ser representado por un modelo constitutivo diferente ya que la teoría de mezclas actúa como un gestor de modelos constitutivos.

Un material compuesto representado por la teoría de mezclas serie paralelo está conformado por un determinado número de capas o “*layers*” y cada capa tiene un porcentaje de participación en el compuesto proporcional a la porción de volumen que represente. Así, las propiedades mecánicas del material compuesto, particularmente el tensor constitutivo, será la suma tensorial ponderada de cada uno de los tensores constitutivos de cada capa. A su vez, cada capa está conformada por un material tipo matriz y un material tipo fibra. Normalmente, el material tipo matriz se considera isótropo y el material tipo fibra tiene asociada la ortotropía con la dirección axial de la fibra. Esto permite establecer el aporte en paralelo y el aporte en serie que proporciona

la fibra al material compuesto y, además, capturar los efectos de anisotropía del material compuesto.

El tensor constitutivo de una capa del material compuesto, según lo establecido por la teoría de mezclas serie/paralelo, se obtiene mediante la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
 {}^{cl}C_{PP} &= ({}^f k {}^f C_{PP} + {}^m k {}^m C_{PP}) + {}^m k {}^f k ({}^f C_{PS} - {}^m C_{PS}) : A : ({}^m C_{SP} - {}^f C_{SP}) \\
 {}^{cl}C_{PS} &= ({}^f k {}^f C_{PS} : A : {}^m C_{SS} + {}^m k {}^m C_{PS} : A : {}^f C_{SS}) \\
 {}^{cl}C_{SP} &= ({}^m k {}^f C_{SS} : A : {}^m C_{SP} + {}^f k {}^m C_{SS} : A : {}^f C_{SP}) \\
 {}^{cl}C_{SS} &= \frac{1}{2} ({}^m C_{SS} : A : {}^f C_{SS} + {}^f C_{SS} : A : {}^m C_{SS})
 \end{aligned} \tag{3-12}$$

$$A = ({}^m k {}^f C_{SS} + {}^f k {}^m C_{SS})^{-1} \tag{3-13}$$

donde los superíndices  $cl$ ,  $m$  y  $f$  designan a: capa del compuesto, matriz y fibra, respectivamente. Los parámetros  ${}^f k$  y  ${}^m k$  representan la participación volumétrica de cada material simple, fibra y matriz respectivamente, en la capa. La suma de la participación volumétrica de la matriz y la fibra en cada capa debe ser igual a 1.

La parte del tensor constitutivo que actúa totalmente en paralelo está dada por  ${}^{f,m}C_{PP}$ , mientras la componente  ${}^{f,m}C_{SS}$  es la parte del tensor constitutivo cuyo comportamiento es solo en serie y las componentes  ${}^{f,m}C_{PS}$  y  ${}^{f,m}C_{SP}$  contienen los términos del tensor constitutivo que actúan combinados en serie y en paralelo.

El tensor constitutivo del material compuesto  ${}^c C$  se obtiene a partir de

$${}^c C = \sum_{cl=1}^n {}^{cl} k {}^{cl} C \tag{3-14}$$

donde el superíndice  $cl$  designa a la capa respectiva. El parámetro  ${}^{cl} k$  representa la participación volumétrica de cada capa en el material compuesto. La suma de los  ${}^{cl} k$  de las  $n$  capas del compuesto debe ser igual a 1.

El tensor constitutivo de la ecuación (3-14) está definido para el estado no dañado de cada uno de los materiales componentes. Si durante el incremento de las cargas aplicadas en un análisis no lineal, las tensiones superan la respectiva resistencia umbral en al menos uno de los materiales componentes, el tensor constitutivo de ese material componente cambiará y, por consiguiente, el tensor constitutivo de todo el compuesto también cambiará. Por lo tanto, es necesario calcular el tensor secante equivalente del material compuesto mediante la adecuada modificación de las ecuaciones (3-12) a (3-





14), en las cuales se debe incluir el tensor secante equivalente del o de los materiales componentes que hayan alcanzado el comportamiento no lineal. Así, las ecuaciones (3-12) a (3-14) en el caso en que la matriz esté en estado no lineal

$$\begin{aligned} {}^{cl}C_{PP}^{sec} &= \left( {}^f k {}^f C_{PP} + {}^m k {}^m C_{PP}^{sec} \right) + {}^m k {}^f k \left( {}^f C_{PS} - {}^m C_{PS}^{sec} \right) : A : \left( {}^m C_{SP}^{sec} - {}^f C_{SP} \right) \\ {}^{cl}C_{PS}^{sec} &= \left( {}^f k {}^f C_{PS} : A : {}^m C_{SS}^{sec} + {}^m k {}^m C_{PS}^{sec} : A : {}^f C_{SS} \right) \\ {}^{cl}C_{SP}^{sec} &= \left( {}^m k {}^f C_{SS} : A : {}^m C_{SP}^{sec} + {}^f k {}^m C_{SS}^{sec} : A : {}^f C_{SP} \right) \\ {}^{cl}C_{SS}^{sec} &= \frac{1}{2} \left( {}^m C_{SS}^{sec} : A : {}^f C_{SS} + {}^f C_{SS} : A : {}^m C_{SS}^{sec} \right) \end{aligned} \quad (3-15)$$

$$A = \left( {}^m k {}^f C_{SS} + {}^f k {}^m C_{SS}^{sec} \right)^{-1} \quad (3-16)$$

$${}^c C^{sec} = \sum_{cl=1}^n {}^{cl} k {}^{cl} C^{sec} \quad (3-17)$$

donde  ${}^c C^{sec}$  es el tensor secante equivalente del material compuesto,  ${}^{cl} C^{sec}$  es el tensor secante equivalente en la capa,  ${}^m C_{PP}^{sec}$  es la componente en paralelo del tensor secante equivalente del material matriz,  ${}^m C_{SS}^{sec}$  es la componente en serie del tensor secante equivalente del material matriz y  ${}^m C_{SP}^{sec}$  y  ${}^m C_{PS}^{sec}$  son las componentes en serie y paralelo del tensor secante equivalente de la matriz. El tensor secante equivalente de la matriz se debe calcular con las ecuaciones (3-3) ó (3-9) según sea el caso.

Dado que las capas que constituyen un material compuesto son ponderadas bajo la hipótesis de comportamiento en paralelo que establece que las deformaciones de cada capa son iguales a las deformaciones del compuesto y, dado que en los modelos de daño la variable independiente es el tensor de deformaciones, se puede concluir que, si la matriz entra en estado no lineal en una capa, también estará en estado no lineal en todas las capas del compuesto. Referente al material de la fibra, al tener en cada capa una orientación diferente, es posible que entre en no linealidad en una capa mientras que en las otras se mantenga dentro del rango elástico. Esto, significa que en la composición del tensor constitutivo equivalente del material compuesto  ${}^c C^{sec}$  se deben aplicar las ecuaciones (3-15) y (3-16) tantas veces cuantas capas existan y, en cada capa, se debe emplear el tensor constitutivo secante para el material que este en no linealidad ó el tensor constitutivo elástico si el material componente está en estado no dañado.

### 3.3. Determinación del daño global

El daño global de una estructura está directamente condicionado tanto por la ubicación de los puntos en los cuales existe daño local como por la magnitud de dicho daño. Diferentes factores, tales como el tipo de carga, la concentración de tensiones o la diferencia entre las resistencias de los materiales asignados a cada parte de una estructura, determinan las zonas en las cuales se produce daño local. El daño local, representado por el índice de daño local equivalente, se determina a nivel constitutivo en cada material y en cada punto de integración o punto de Gauss. Utilizando la teoría de mezcla serie paralelo se obtiene el tensor constitutivo secante equivalente del material compuesto, con el que se calcula cada matriz de rigidez elemental.

La rigidez global de una estructura depende básicamente de la geometría de la estructura y de los materiales de los cuales está hecha y, numéricamente, está representada por la matriz global de rigidez. A su vez, la matriz global de rigidez es el resultado del ensamblaje, según la conectividad nodal, de cada una de las matrices de rigidez elementales.

El índice de daño global de una estructura,  $D_{global}$ , se puede establecer mediante la comparación entre la respuesta global elástica y la respuesta global de la estructura dañada, Oller et al. [14].

$$D_{global} = 1 - \frac{|F_i|}{|F_o|} = 1 - \frac{|K_i U_i|}{|K_o U_i|} \quad (3-18)$$

donde  $K_i$  es la matriz de rigidez de la estructura para cada estado dañado  $i$ ,  $K_o$  es la matriz de rigidez de la estructura para el estado no dañado,  $U_i$  es el vector de desplazamientos nodales de la estructura para el estado dañado  $i$ ,  $F_i$  es la magnitud de la fuerza real resultante en el estado dañado  $i$ , y  $F_o$  es la magnitud de la fuerza elástica resultante en el estado dañado  $i$ . Nótese que  $|K_i U_i|$  es la magnitud de la fuerza resultante de reacción en estado dañado (real), mientras que  $|K_o U_i|$  es la magnitud de la fuerza resultante de reacción en un estado ficticio no dañado.

De acuerdo con la ecuación (3-18), el análisis no lineal de estructuras para determinar el daño global permite identificar el cambio en la respuesta estructural debido a un determinado tipo de carga, por lo que su daño global no es un valor absoluto sino que está asociado a las sollicitaciones a las que está sometida. Así, para

cada estructura será necesario establecer la o las cargas a las cuales está sometida, o las cargas que podrían actuar sobre la misma en algún tipo de situación extrema (por ejemplo de sismo ó vientos).

### 3.4. Evolución de las frecuencias naturales y relación con la magnitud del daño global

La magnitud de las frecuencias naturales disminuye a medida que aumenta el valor del daño global; sin embargo, para cada modo de vibración existe una evolución diferente, es decir, la evolución de la magnitud de la frecuencia fundamental será diferente a la evolución de la magnitud de la frecuencia en modo 2. Esto depende del tipo de estructura que se esté analizando y de la ubicación del daño local.

En el caso de la frecuencia fundamental para un sistema de un grado de libertad es posible expresar el daño global en función de la variación de la frecuencia como

$$D = 1 - \frac{K_d u_i}{K_o u_i} = 1 - \frac{M}{K_o} = 1 - \frac{(\omega_d)^2}{(\omega_o)^2} = 1 - \left( \frac{\omega_d}{\omega_o} \right)^2 \quad (3-19)$$

donde  $M$  es la masa del sistema;  $\omega_d$  es la frecuencia fundamental del sistema en estado dañado;  $\omega_o$  es la frecuencia fundamental del sistema en estado no dañado. En la Figura 3-3 se muestra la evolución teórica del daño global en función de la evolución de la frecuencia fundamental de un sistema de un grado de libertad.

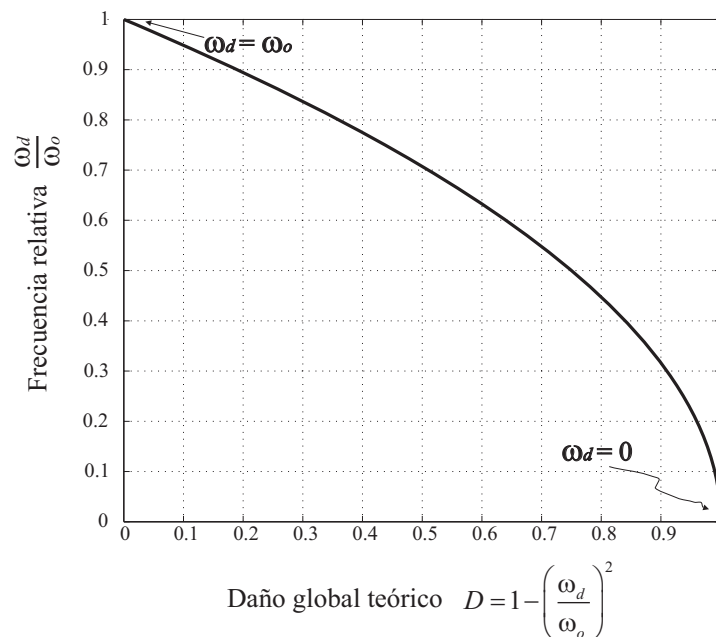


Figura 3-3. Daño global teórico en función de la evolución de la frecuencia fundamental para un sistema de un grado de libertad.

A partir de este análisis teórico se tiene que, el daño global depende de la relación entre la frecuencia de la estructura en estado dañado y la frecuencia de la estructura en estado no dañado. De donde se tiene que para establecer la incidencia de la magnitud del daño global en el cambio de la magnitud de las frecuencias fundamentales es necesario establecer el cambio relativo de la magnitud de la frecuencia para cada uno de los modos de vibración que se esté analizando

$$rf_i^m = \frac{f_i^m}{f_o^m} \quad (3-20)$$

donde  $rf_i^m$  es la frecuencia relativa para el modo  $m$  de vibración y para la configuración  $i$ , la cual hace referencia al estado de la estructura; si  $i=0$  se tendrá la configuración de referencia o no dañada, para cuyo caso se tiene  $rf_0^m=1$  para cualquier modo de vibración  $m$ . Cuando  $i=1,2,3,\dots,n$  se tiene la frecuencia relativa para cada estado dañado  $i$  y para cada modo de vibración  $m$ , donde la frecuencia relativa para estos casos será menor que 1:  $rf_i^m < 1$ . En el análisis de la evolución de la frecuencia en términos del daño global, se obtendrá la matriz de correlación entre frecuencias relativas y daño global que se muestra en la Tabla 3-1.

Tabla 3-1. Matriz de correlación entre frecuencias relativas y daño global

		Índice de daño global	Frecuencias			
			Modo 1 $rf_i^{m=1}$	Modo 2 $rf_i^{m=2}$	...	Modo m $rf_i^m$
Configuración	No dañada	0.0	1.0	1.0	...	1.0
	Dañada $i=1$	$D_{g1}$	$rf_1^{m=1}$	$rf_1^{m=2}$	...	$rf_1^m$
	Dañada $i=2$	$D_{g2}$	$rf_2^{m=1}$	$rf_2^{m=2}$	...	$rf_2^m$
	Dañada $i=3$	$D_{g3}$	$rf_3^{m=1}$	$rf_3^{m=2}$	...	$rf_3^m$
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	Dañada $i=n$	$D_{gn} \cong 1$	$rf_n^{m=1}$	$rf_n^{m=2}$	...	$rf_n^m$

Utilizando la información de la Tabla 3-1, es posible establecer una correlación entre la variación del índice de daño global y la frecuencia relativa para cada modo de vibración. Comparando los valores de la frecuencia relativa de los diferentes modos de vibración analizados de Tabla 3-1, para una determinada configuración se puede establecer en qué modo de vibración la magnitud de la frecuencia natural muestra mayores o menores cambios.



### **3.5. Cambio de los modos de vibración y su relación con la ubicación del daño local**

La ubicación del daño local y el cambio en las formas modales están directamente relacionados. Es decir, para el modo de vibración fundamental el valor de la frecuencia debe tener una tasa de cambio diferente dependiendo de la ubicación del daño local. Dicho de otra manera, para una determinada ubicación del daño local el cambio en la magnitud de la frecuencia de cada modo de vibración debe ser diferente para una determinada configuración dañada. Esto se puede establecer al analizar cada una de las filas de la matriz de correlación entre la frecuencia relativa y el daño global establecida en la Tabla 3-1. Es sabido que el daño global depende de la magnitud y ubicación del daño local y, en análisis no lineales, la respuesta es dependiente del tipo de carga a la que esté sometida la estructura, lo cual condiciona la ubicación del daño local.

Así, se tiene que el tipo de carga a la cual ha sido sometida la estructura, el daño global, la ubicación del daño local y la variación de la frecuencia relativa para cada modo de vibración, están correlacionados. En términos de la metodología propuesta la ubicación del daño local se obtiene a partir de los resultados del análisis no lineal de la estructura bajo un tipo de carga incremental determinada, al igual que la magnitud del daño global. Los valores de la frecuencia natural para cada modo de vibración se obtienen con los tensores secantes del material compuesto asignado a cada elemento finito; dichos tensores están afectados por el valor del daño local equivalente en los puntos en los cuales los materiales superaron los umbrales de linealidad. Utilizando el método de iteraciones por sub espacios [15] se calculan las frecuencias naturales para  $n$  modos de vibración.

### **3.6. Metodología para correlacionar la evolución de las frecuencias naturales y el daño global en una estructura**

Los conceptos y procedimientos de cálculo mostrados hasta ahora permiten realizar un análisis que correlacione el daño global con la frecuencia natural. A continuación se establece la metodología que permite realizar dicha correlación para cualquier tipo de estructura. La metodología consta de cinco etapas:

- *Etapa 1:* Elaboración del modelo numérico de la estructura a ser analizada.
- *Etapa 2:* Determinación de las cargas que provocan el fallo de la estructura.

- *Etapa 3:* Análisis numérico no-lineal de la estructura aplicando las cargas de fallo de forma incremental para determinar las áreas en las cuales se produce el daño local.
- *Etapa 4:* Análisis numérico de las frecuencias naturales y las formas modales de vibración de la estructura en estado no dañado y para las configuraciones dañadas de la estructura.
- *Etapa 5:* Correlación entre el daño global y las frecuencias naturales.

En la Figura 3-4, se muestra las etapas de la metodología propuesta en un diagrama de flujo, las cuales se describen a continuación.

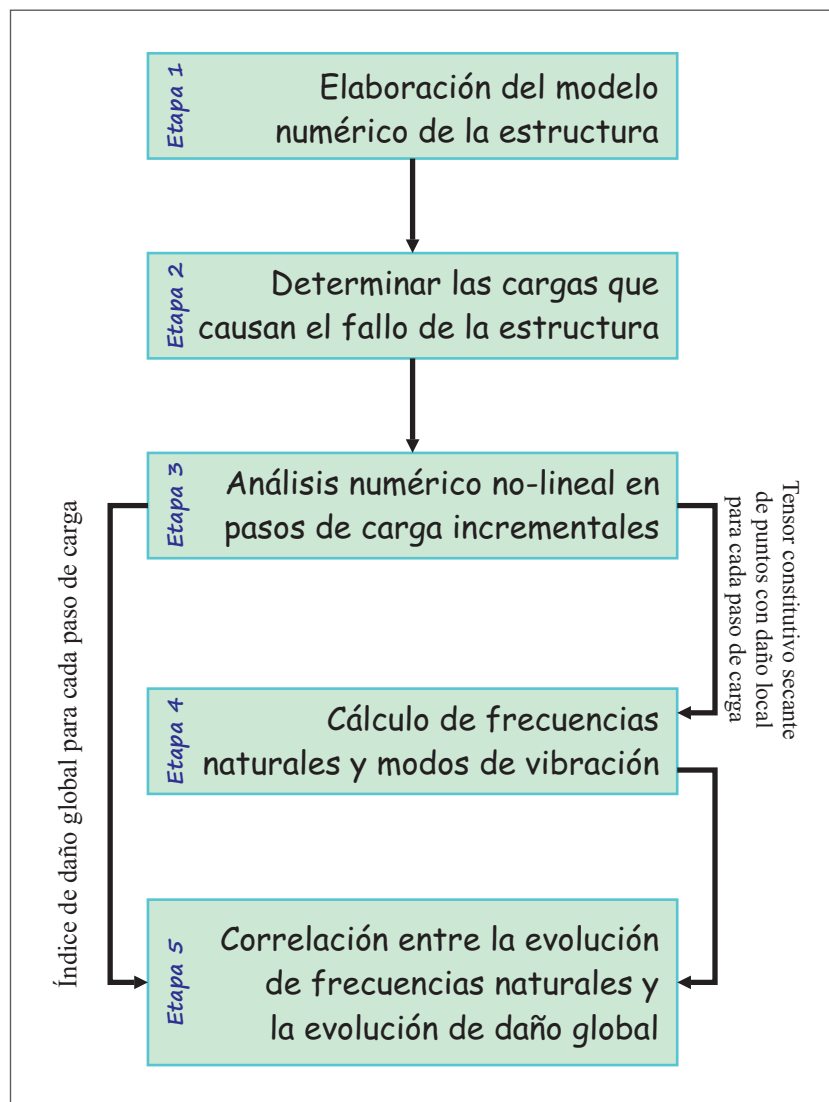


Figura 3-4. Etapas de la metodología para la correlación entre la evolución de frecuencias naturales y la evolución del daño global.

*Etapa 1:* el modelo numérico de la estructura es de elementos finitos y se le asigna un material compuesto a cada elemento finito de acuerdo con la teoría de mezclas serie/paralelo. Es decir, se asignan las propiedades físicas y mecánicas de cada uno de



los materiales simples de los materiales compuestos, se fijan las leyes constitutivas de cada material simple y se establecen las condiciones de frontera.

*Etapa 2:* en los análisis no lineales, la respuesta estructural es altamente dependiente del tipo de carga que hace que la estructura falle. Por lo tanto, la correlación entre el daño global y la frecuencia natural que se establece está definida para unas condiciones específicas de carga. La determinación de las cargas es una etapa importante dentro de la metodología, ya que permite establecer con buena aproximación los mecanismos de fallo de una estructura ante las condiciones de solicitación real.

*Etapa 3:* una vez definida el tipo de carga, se realizará un análisis numérico no lineal de la estructura, en el cual se aplicará esta carga sobre el modelo numérico de la estructura en pasos incrementales. Para un número determinado de estados dañados, se obtendrán los tensores secantes equivalentes en los elementos (a nivel de punto de Gauss) en los que se ha superado la linealidad de los materiales y, por consiguiente, se ha producido daño local. El índice de daño global se calcula para cada estado dañado mediante la ecuación (3-18). Los resultados de desplazamientos, deformaciones, tensiones y variables internas son obtenidos para cada paso incremental del análisis no lineal, lo cual permite observar la distribución de cada variable de interés. Particularmente, es importante analizar en el post-proceso la ubicación de las variables internas de daño que muestran el daño local.

*Etapa 4:* luego de realizar el análisis no lineal y haber obtenido los tensores constitutivos secantes para cada punto de Gauss y para cada estado dañado a ser analizado, se calculan las frecuencias naturales para los  $p$  modos diferentes de vibración. Normalmente, el valor de  $p$  se escogen alrededor de 10 y estos modos corresponden a los  $p$  valores menores de las frecuencias de la estructura. Se debe tener en cuenta que un modo de vibración se puede presentar en diferentes planos, lo cual implica que el valor de la frecuencia en ese modo es diferente según el plano en el cual se produzca el movimiento.

*Etapa 5:* Con los datos obtenidos en la etapa 3 (índice de daño global) y en la etapa 4 (frecuencias naturales para  $p$  modos) se establece la matriz de correlación entre frecuencias relativas y daño global (ver la Tabla 3-1). El índice de daño global para cada estado dañado es obtenido del análisis no lineal (ecuación 3-18). La variación de frecuencias naturales en diferentes modos de vibración permite calcular la frecuencia relativa (ecuación 3-20). Con los datos de la matriz de correlación de frecuencias relativas y daño global se obtienen las curvas de frecuencia relativa en función del daño

global para las frecuencias en cada modo y para las diferentes localizaciones de daño local. Se determina la frecuencia o las frecuencias que sean menos influenciadas por la ubicación del daño local, y se obtiene una ecuación de correlación. Normalmente en la frecuencia fundamental (frecuencia del primer modo) es en la que menos influye la localización del daño local, por lo cual se recomienda establecer la ecuación de correlación para esta frecuencia. La ecuación de correlación se establece para un modo de vibración específico.

Para establecer la influencia de la ubicación del daño local sobre la variación de la frecuencia en un determinado modo de vibración, es necesario variar la posición de la carga de análisis en por lo menos, 3 posiciones diferentes; de esta forma se pueden obtener diferentes zonas de concentración del daño local.

### **3.7. Implementación numérica de la metodología propuesta**

La metodología de correlación entre la evolución del daño global y la evolución de las frecuencias naturales de una estructura se implementó en dos programas de ordenador: PLCD [16] para el análisis no-lineal y el CFYFP para el cálculo de frecuencias naturales y formas modales de vibración. El PLCD [16] permite calcular problemas lineales, no lineales, con pequeñas o grandes deformaciones y realizar análisis térmicos y termomecánicos acoplados. También permite utilizar materiales con viscoelasticidad, daño y plasticidad generalizada no asociada con endurecimiento isótropo positivo, nulo o negativo.

CFYFP es un programa nuevo desarrollado en el marco de esta tesis [17], implementa el SIM (Subspace Iteration Method) que resuelven el problema de autovalores y calcula las frecuencias naturales y formas modales de vibración de una estructura tanto para su estado no dañado como para un determinado número de estados con diferente índice de daño global. El nuevo programa está acoplado con el PLCD, ya que para el cálculo de frecuencias debe recibir la información suministrada a partir del cálculo no lineal.

La implementación numérica de la metodología propuesta se realiza en tres frentes fundamentales:

- Implementación de las nuevas herramientas numéricas para el cálculo no lineal de materiales compuestos (programa PLCD).





- Implementación del algoritmo de cálculo de frecuencias naturales y valores propios con el método SIM (programa CFYFP).
- Implementación de herramientas de escritura y lectura de resultados necesarios para el cálculo de frecuencias naturales (PLCD y CFYFP).

En el programa de elementos finitos PLCD se implementaron los nuevos desarrollos constitutivos y numéricos tales como el modelo constitutivo de daño diferenciado a tracción y compresión propuesto en el capítulo anterior de esta tesis y algoritmos de orientación global de la fibra en función de la localización del elemento finito (Anexo C), igualmente se implementó el modelo constitutivo de daño de Faria et al. [18].

Cuando para la carga aplicada en un determinado paso del análisis no lineal se supera el rango lineal de la estructura, se activan las variables internas de daño en aquellos puntos de análisis en los cuales se superan los umbrales del material. Para esos puntos de análisis se calculan los tensores constitutivos secantes de cada material simple, se compone el tensor constitutivo secante del material compuesto y se escribe como resultados de salida. Para esto, se implementaron una serie de algoritmos que permiten escribir en ficheros el tensor constitutivo secante en cada punto de integración que entra en no linealidad. La escritura de esta información se realiza una vez se haya alcanzado la convergencia en el paso de carga respectivo. Los estados iniciales, tanto del índice de daño como de los tensores constitutivos del material compuesto en estado no dañado o en el campo elástico, se escriben una sola vez cuando converge el primer paso de carga, el cual debe ser lo suficientemente pequeño para garantizar que el material permanezca en el campo lineal. En la Figura 3-5 se muestra el diagrama de flujo del análisis no lineal, en el que se hace énfasis en los puntos clave para el cálculo y escritura de los datos necesarios para el posterior cálculo de las frecuencias naturales y de las formas modales de vibración para los diferentes pasos de carga.

El análisis de las frecuencias naturales se realiza en dos grandes etapas. En la primera se calculan las  $p$  frecuencias naturales y sus respectivas formas modales de vibración de la estructura en estado lineal. Los valores de frecuencia calculados para cada modo de vibración se establecen como valores de referencia para el análisis de la evolución de cada frecuencia. En la segunda etapa se calculan las  $p$  frecuencias para diferentes estados de daño global de la estructura. El número de estados dañados para los que se debe calcular las frecuencias naturales se determina en el análisis no lineal procurando que el rango de carga a la cual se somete la estructura cubra las

solicitaciones a las cuales será sometida la estructura en estados extremos de fallo. Normalmente, el número de estados de daño analizados son 10 o 15.

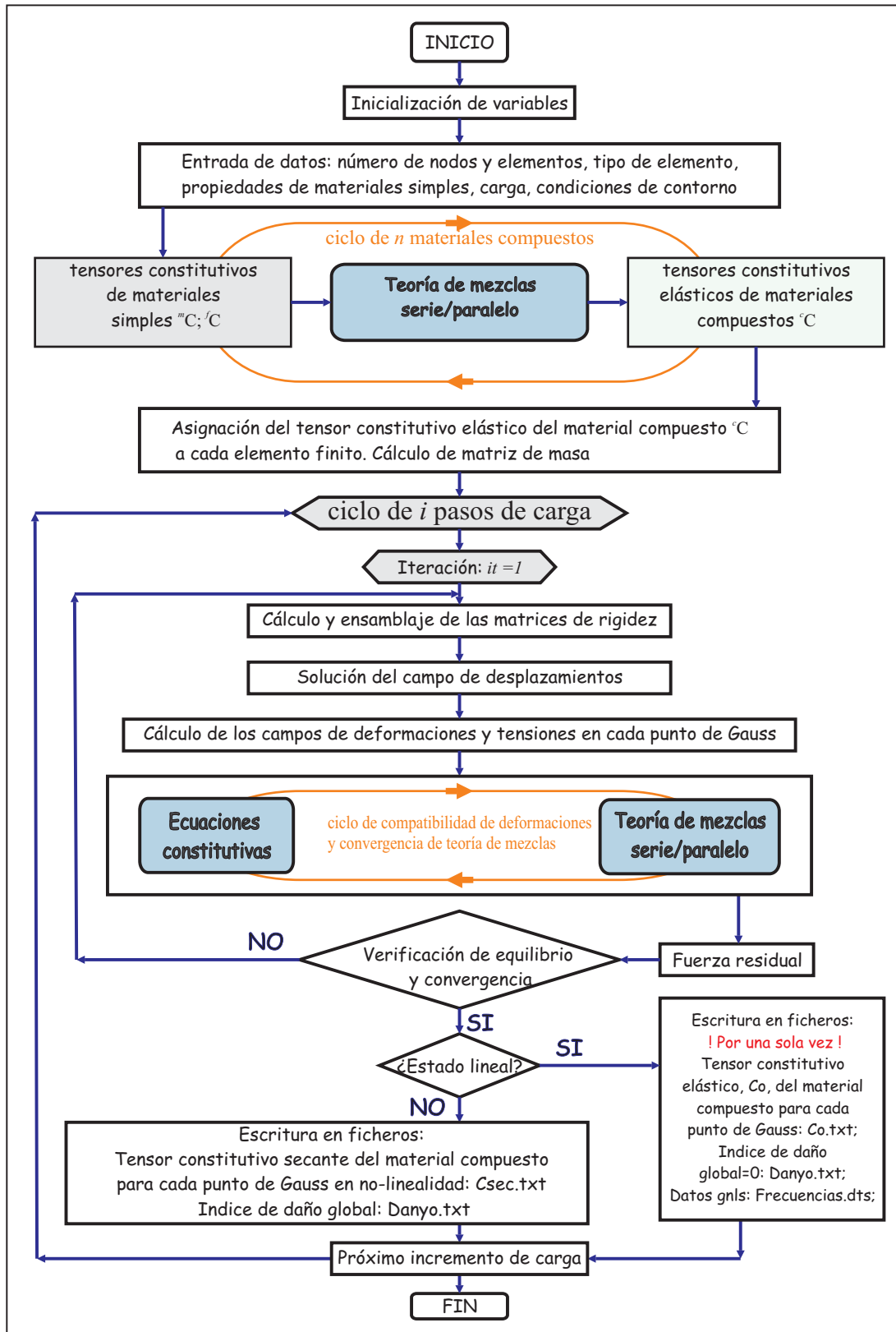


Figura 3-5. Diagrama de flujo para el análisis no lineal de estructuras de materiales compuestos con énfasis en el cálculo de los datos necesarios para establecer la correlación entre la variación de frecuencias naturales y la variación de daño global.



Los datos de salida que se obtienen en las dos etapas se escriben en dos ficheros principales. En un primer fichero denominado danyo-frecuencia.txt se escribe en cada fila una configuración de la estructura. Así, la primera fila corresponde a la configuración no dañada de la estructura, la segunda fila corresponde a la configuración que tiene el menor índice de daño global (primer estado no lineal) y la última fila corresponde a la configuración con mayor índice de daño global obtenida. Es decir, se escriben tantas filas como estados dañados se analicen, más una que corresponde al estado no dañado o de referencia. En cada fila, el primer registro corresponde al índice de daño global; del segundo al último registro se escriben los  $p$  valores de frecuencias naturales calculadas, ordenadas de menor a mayor. El número de frecuencias que se calculan es, normalmente, entre 8 y 10. Es pertinente anotar, que los análisis se realizan en tres dimensiones y que, si existen simetrías de la estructura en el plano es posible la duplicidad de las frecuencias en cada modo, es decir la frecuencia en un modo se presente tanto en el plano x-z como en el plano y-z. Con lo cual se tiene que las  $p$  frecuencias, pueden corresponder a un número menor de modos. Este hecho tiene una ventaja a la hora de establecer criterios para la ubicación del daño local en una estructura.

En un segundo fichero se escriben los vectores de desplazamientos nodales normalizados que representan las formas modales de vibración para cada frecuencia natural analizada y para cada configuración de la estructura. Este fichero se denomina \*F.post.res donde \* representa el nombre del problema que se está analizando. Este fichero se ha escrito para ser leído en el pre – post procesador GID [19].

En la Figura 3-6 se muestra el diagrama de flujo del cálculo de las frecuencias naturales y los modos de vibración (Etapa 4 de la metodología).

El programa de cálculo se ha desarrollado de forma secuencial, y los mayores volúmenes de cálculo se encuentran en el ensamblaje de la matriz de rigidez global en cada estado de daño de la estructura y en la posterior solución del problema de autovalores. En este programa, el almacenamiento de las matrices de rigidez y de masa se realiza en formato SPARSE. Para cada estado de la estructura (cada paso de carga al cual se le analiza frecuencias y formas modales de vibración) es necesario actualizar la matriz de rigidez de acuerdo con la evolución del daño local que sufra cada elemento finito; sin embargo, los datos necesarios para cada actualización se pueden leer directamente de los archivos de entrada.

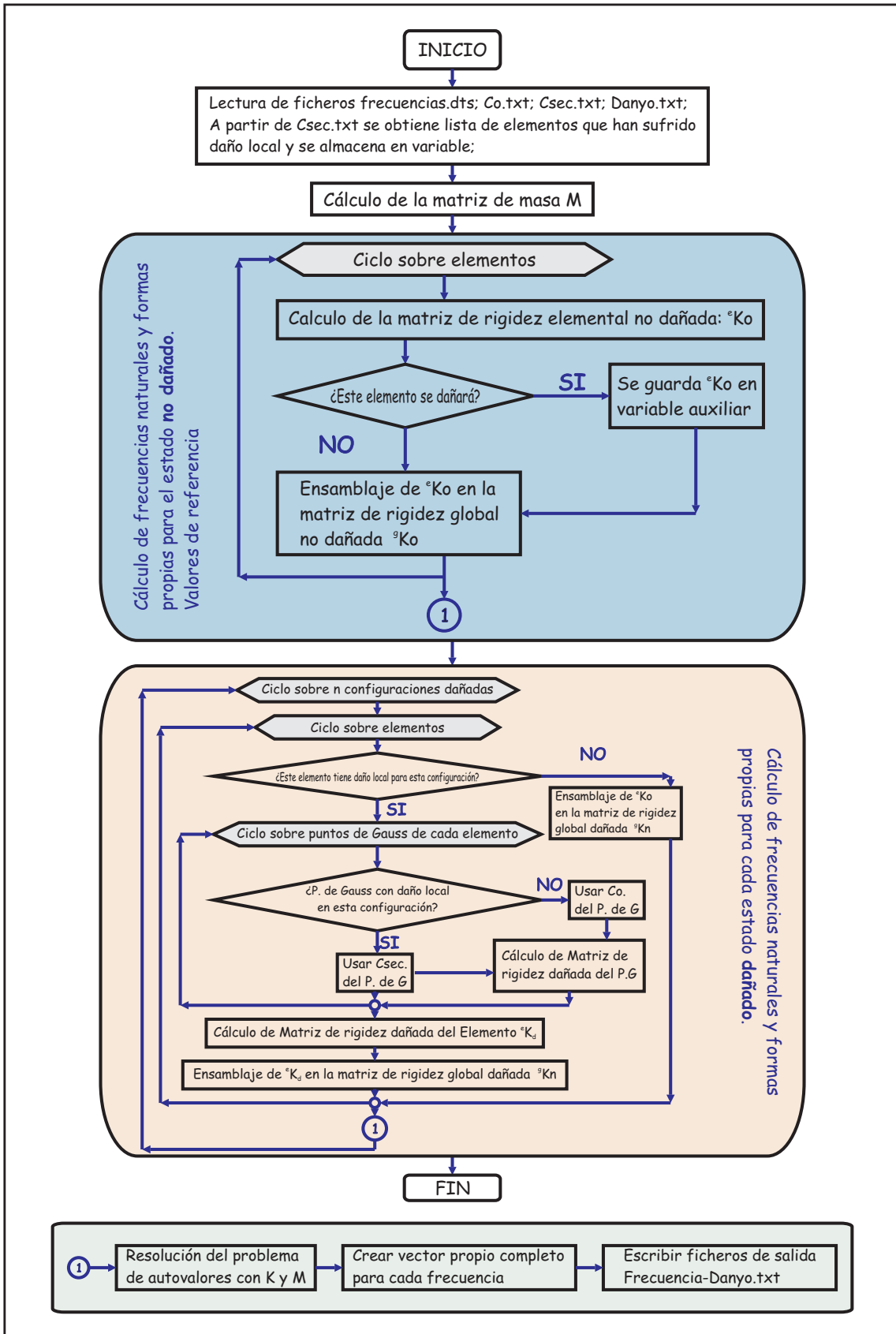


Figura 3-6. Diagrama de flujo del análisis de frecuencias naturales y modos propios de vibración de estructuras de materiales compuestos, para diferentes estados de daño global.

### 3.8. Ejemplo de aplicación

La metodología propuesta se ha aplicado al análisis numéricos a una viga de hormigón armado de 0.3 x 0.4 x 5.0 m. En la Figura 3-7 se muestra el diseño estructural de la viga y la asignación de materiales compuestos según la teoría de mezclas serie/paralelo. Esta viga es sometida a cinco estados de carga diferentes. En cada estado de carga se aplica una carga puntual en un punto diferente de la luz; para todos los casos las condiciones de frontera se establecieron de forma que correspondan a una viga simplemente apoyada. En los nodos del apoyo A se restringió el desplazamiento vertical, mientras que en los nodos del apoyo B se restringió el desplazamiento vertical y longitudinal.

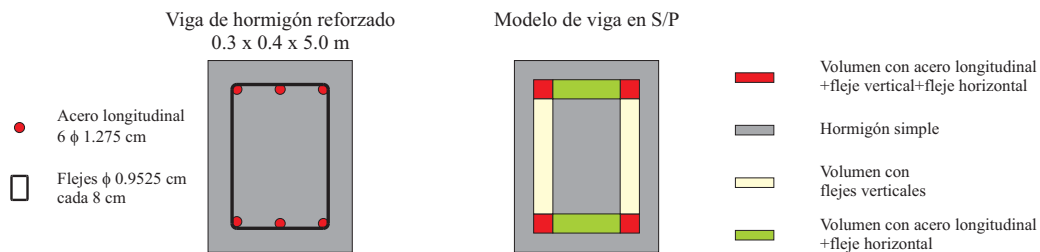


Figura 3-7. Sección transversal de la viga y asignación de materiales compuestos según la teoría de mezclas serie/paralelo.

La viga se discretizó con una malla de elementos finitos hexaédricos de 8 nodos con 8 puntos de integración de Gauss. La malla tiene 2400 elementos y 3213 nodos. En la Figura 3-8 se muestra la viga discretizada.

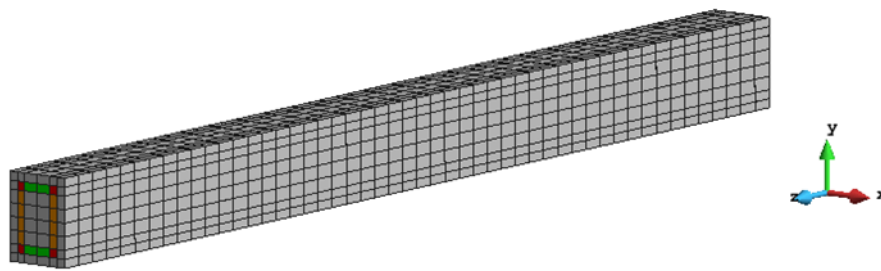


Figura 3-8. Malla de elementos finitos de 2400 elementos hexaédricos y 3213 nodos.

Se analiza la variación de los modos de vibración en términos de la ubicación del daño local y de la magnitud del daño global. En la Figura 3-9 se pueden ver las secciones de aplicación de la fuerza puntual y la ubicación del daño local para cada análisis no lineal realizado.

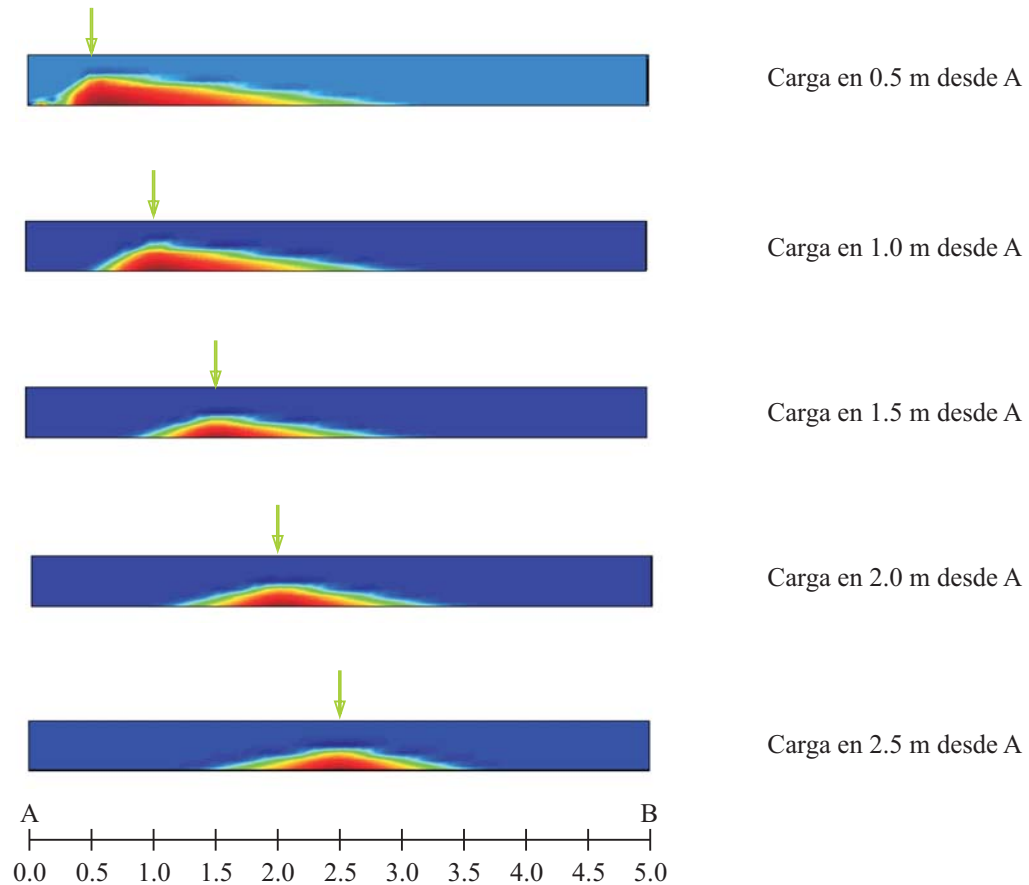


Figura 3-9. Ubicación del daño local para diferentes estados de carga en una viga de hormigón reforzado de 0.3 x 0.4 x 5.0 m.

En la Figura 3-10 se muestran los resultados del análisis no lineal correspondientes al daño global y su evolución respecto a la carga aplicada para cada uno de los diferentes estados de carga. En estas gráficas se puede ver que en el caso de aplicación de la carga a 0.5 m del apoyo A, la reacción vertical máxima es de 196 kN para un desplazamiento del punto de aplicación de la carga de -3.35 mm. En el caso en el cual se aplicó la carga en el centro de la luz (a 2.5 m del apoyo A), la fuerza máxima de reacción es de 56.44 kN para un desplazamiento en el centro de la luz de -4.7 mm. El daño global está entre 91.1% en el caso en que se aplicó la carga a 0.5 m del apoyo A y de 76.4% en el caso en que se aplicó la carga en el centro de la luz.

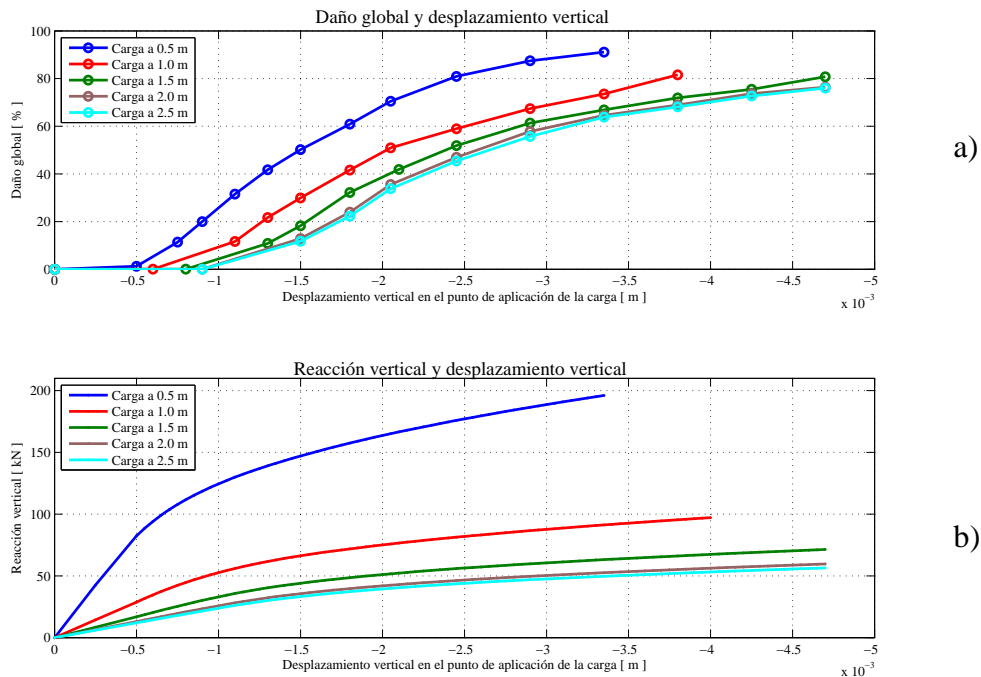


Figura 3-10. a) Daño global en función del desplazamiento vertical en el punto de aplicación de la carga; b) Reacción vertical en función del desplazamiento vertical en el punto de aplicación de la carga.

En el análisis realizado, fueron observadas las 9 frecuencias naturales y las formas modales de vibración se presentan predominantemente en los planos  $x-z$  y  $y-z$ . Así, el modo 1 se encuentra tanto en el plano  $x-z$  como en el plano  $y-z$ ; esto mismo ocurre en el modo 2 de vibración. Los modos torsionales y el modo mixto son fuera de los planos coordenados. En la Figura 3-11 se muestra las nueve formas modales de vibración con sus respectivos valores de frecuencia para la viga en estado no dañado. Estos son las frecuencias de referencia para el cálculo de la frecuencia relativa en cada modo mediante la ecuación (3-20).

Una vez establecido cada forma modal de vibración, se analizará la evolución del valor de la frecuencia relativa respecto al daño global y se establecen las diferencias que existen entre la evolución de la frecuencia relativa para un modo respecto a la evolución de la frecuencia relativa en otro modo, con lo cual se obtendrán conclusiones sobre la relación que existe con la ubicación del daño local.

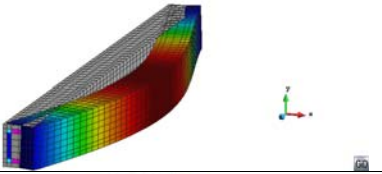
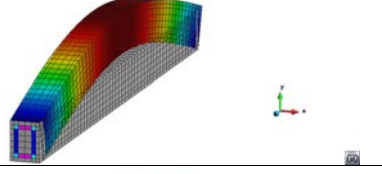
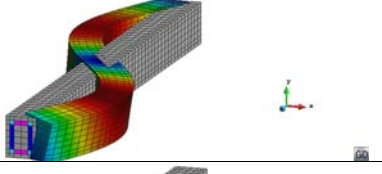
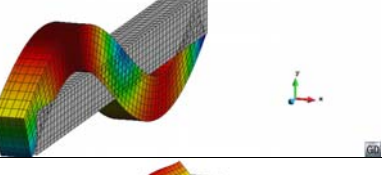
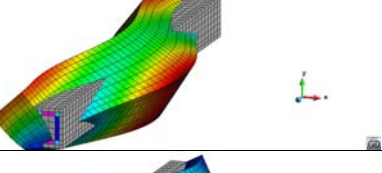
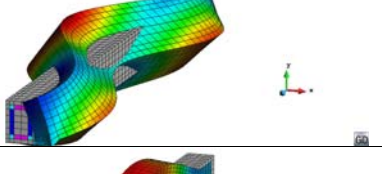
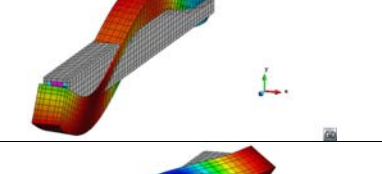
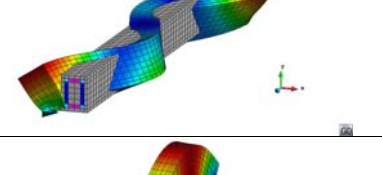
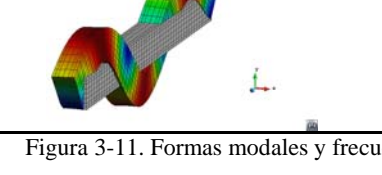
Representación gráfica	Formas modales	Frecuencia
	Modo 1 en plano $x-z$	26.8959 Hz
	Modo 1 en plano $y-z$	28.7424 Hz
	Modo 2 en plano $x-z$	86.8531 Hz
	Modo 2 en plano $y-z$	101.6241 Hz
	Modo torsional 1	144.7951 Hz
	Modo torsional 2	180.4750 Hz
	Modo 2*	155.4220 Hz
	Modo mixto	239.1512 Hz
	Modo 3 en plano $y-z$	253.8944 Hz

Figura 3-11. Formas modales y frecuencias naturales de la viga en estado no dañado.

Es necesario analizar la evolución de cada modo con el cambio de daño global para cada uno de los casos de carga con los cuales fue analizada la viga.





En cada caso estudiado se calcularon las frecuencias relativas para los mismos 9 modos de vibración y para cada configuración dañada. Utilizando la ecuación (3-20) se calculó la matriz de correlación entre la frecuencia relativa y el daño global para cada caso estudiado, las cuales se consignaron en las Tablas 3-2 a 3-6. Estos datos se utilizaron para realizar las curvas frecuencia relativa-daño global.

Tabla 3-2. Matriz de correlación frecuencia relativa-daño global. Carga a 0.5 m desde el apoyo A.

Dg	Fr <sub>1xz</sub>	Fr <sub>1yz</sub>	Fr <sub>2xz</sub>	Fr <sub>2yz</sub>	Fr <sub>1t</sub>	Fr <sub>2*</sub>	Fr <sub>2</sub>	Fr <sub>mix</sub>	Fr <sub>3yz</sub>
0.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
0.01244	0.99847	0.99674	0.99679	0.99469	0.99798	0.99464	0.99642	0.99935	0.99317
0.11356	0.98582	0.97347	0.97495	0.96807	0.97974	0.97107	0.97444	0.98183	0.96716
0.20003	0.97588	0.95463	0.96175	0.95052	0.97020	0.95710	0.96189	0.97324	0.94911
0.31519	0.96195	0.92855	0.94545	0.92873	0.95844	0.94106	0.94610	0.96249	0.92539
0.41765	0.94815	0.90347	0.93040	0.90922	0.94662	0.92764	0.93088	0.95152	0.90329
0.50167	0.93474	0.87948	0.91704	0.89176	0.93556	0.91641	0.91749	0.93492	0.88844
0.60881	0.91539	0.84613	0.89820	0.86892	0.91778	0.90268	0.89759	0.90499	0.87027
0.70496	0.90010	0.82105	0.88349	0.85229	0.90347	0.89318	0.88124	0.88196	0.85494
0.80936	0.87794	0.78547	0.86309	0.82895	0.88331	0.88050	0.85815	0.84899	0.83267
0.87468	0.85517	0.75091	0.84201	0.80593	0.86263	0.86851	0.83431	0.81669	0.80892
0.91108	0.83507	0.72130	0.82347	0.78545	0.84440	0.85822	0.81336	0.78906	0.78687

Dg: daño global; Fr<sub>1xz</sub>: frecuencia relativa del modo 1 en el plano x-z; Fr<sub>1yz</sub>: frecuencia relativa del modo 1 en el plano y-z; Fr<sub>2xz</sub>: frecuencia relativa del modo 2 en el plano x-z; Fr<sub>2yz</sub>: frecuencia relativa del modo 2 en el plano y-z; Fr<sub>1t</sub>: frecuencia relativa torsional 1; Fr<sub>2</sub>: frecuencia relativa torsional 2; Fr<sub>2\*</sub>: frecuencia relativa del modo 2 con desplazamientos predominantes en sentido x; Fr<sub>mix</sub>: frecuencia relativa en modo mixto; Fr<sub>3yz</sub>: frecuencia relativa del modo 1 en el plano y-z.

Tabla 3-3. Matriz de correlación frecuencia relativa-daño global. Carga a 1.0 m desde el apoyo A.

Dg	Fr <sub>1xz</sub>	Fr <sub>1yz</sub>	Fr <sub>2xz</sub>	Fr <sub>2yz</sub>	Fr <sub>1t</sub>	Fr <sub>2*</sub>	Fr <sub>2</sub>	Fr <sub>mix</sub>	Fr <sub>3yz</sub>
0.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
0.00003	0.99999	0.99998	0.99999	0.99997	0.99999	0.99997	0.99999	1.00000	0.99998
0.11667	0.98787	0.97377	0.98558	0.97528	0.99476	0.97920	0.99322	0.99448	0.98357
0.21688	0.97840	0.95457	0.97611	0.96091	0.99071	0.96785	0.98783	0.98984	0.97042
0.29965	0.96826	0.93453	0.96668	0.94706	0.98619	0.95739	0.98195	0.98476	0.95606
0.41604	0.95292	0.90499	0.95338	0.92807	0.97902	0.94380	0.97289	0.97670	0.93425
0.50968	0.94026	0.88184	0.94262	0.91356	0.97269	0.93385	0.96510	0.96894	0.91757
0.58934	0.92150	0.84781	0.92754	0.89287	0.96269	0.92055	0.95337	0.96074	0.88858
0.67408	0.90214	0.81381	0.91282	0.87266	0.95186	0.90849	0.94106	0.94928	0.86085
0.73516	0.88433	0.78401	0.89902	0.85451	0.94106	0.89820	0.92882	0.93840	0.83552
0.81602	0.86815	0.75762	0.88651	0.83796	0.93030	0.88930	0.91732	0.92721	0.81260

Dg: daño global; Fr<sub>1xz</sub>: frecuencia relativa del modo 1 en el plano x-z; Fr<sub>1yz</sub>: frecuencia relativa del modo 1 en el plano y-z; Fr<sub>2xz</sub>: frecuencia relativa del modo 2 en el plano x-z; Fr<sub>2yz</sub>: frecuencia relativa del modo 2 en el plano y-z; Fr<sub>1t</sub>: frecuencia relativa torsional 1; Fr<sub>2</sub>: frecuencia relativa torsional 2; Fr<sub>2\*</sub>: frecuencia relativa del modo 2 con desplazamientos predominantes en sentido x; Fr<sub>mix</sub>: frecuencia relativa en modo mixto; Fr<sub>3yz</sub>: frecuencia relativa del modo 1 en el plano y-z.



Tabla 3-4. Matriz de correlación frecuencia relativa-daño global.  
Carga a 1.5 m desde el apoyo A.

Dg	Fr <sub>1xz</sub>	Fr <sub>1yz</sub>	Fr <sub>2xz</sub>	Fr <sub>2yz</sub>	Fr <sub>1t</sub>	Fr <sub>2*</sub>	Fr <sub>2</sub>	Fr <sub>mix</sub>	Fr <sub>3yz</sub>
0.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
0.00037	0.99993	0.99982	0.99994	0.99985	0.99998	0.99990	1.00000	0.99995	0.99999
0.10818	0.98907	0.97464	0.99264	0.98557	0.99717	0.98942	0.99791	0.99264	0.99014
0.18266	0.98097	0.95696	0.98769	0.97706	0.99491	0.98290	0.99565	0.98759	0.98041
0.32225	0.96714	0.92853	0.97924	0.96382	0.99086	0.97261	0.99143	0.97908	0.96352
0.41906	0.95339	0.90088	0.97103	0.95119	0.98649	0.96311	0.98670	0.97065	0.94573
0.51861	0.93766	0.87057	0.96141	0.93702	0.98111	0.95284	0.98084	0.96083	0.92507
0.61319	0.91845	0.83550	0.94953	0.91995	0.97402	0.94109	0.97346	0.94827	0.90042
0.66854	0.90148	0.80464	0.93897	0.90412	0.96704	0.93114	0.96616	0.93797	0.87621
0.71903	0.88580	0.77733	0.92880	0.88917	0.96007	0.92236	0.95900	0.92699	0.85492
0.75470	0.87147	0.75300	0.91916	0.87487	0.95318	0.91451	0.95205	0.91679	0.83504
0.80757	0.85787	0.73120	0.90970	0.86121	0.94638	0.90735	0.94563	0.90681	0.81697

Dg: daño global; Fr<sub>1xz</sub>: frecuencia relativa del modo 1 en el plano x-z; Fr<sub>1yz</sub>: frecuencia relativa del modo 1 en el plano y-z; Fr<sub>2xz</sub>: frecuencia relativa del modo 2 en el plano x-z; Fr<sub>2yz</sub>: frecuencia relativa del modo 2 en el plano y-z; Fr<sub>1t</sub>: frecuencia relativa torsional 1; Fr<sub>2</sub>: frecuencia relativa torsional 2; Fr<sub>2\*</sub>: frecuencia relativa del modo 2 con desplazamientos predominantes en sentido x; Fr<sub>mix</sub>: frecuencia relativa en modo mixto; Fr<sub>3yz</sub>: frecuencia relativa del modo 1 en el plano y-z.

Tabla 3-5. Matriz de correlación frecuencia relativa-daño global.  
Carga a 2.0 m desde el apoyo A.

Dg	Fr <sub>1xz</sub>	Fr <sub>1yz</sub>	Fr <sub>2xz</sub>	Fr <sub>2yz</sub>	Fr <sub>1t</sub>	Fr <sub>2*</sub>	Fr <sub>2</sub>	Fr <sub>mix</sub>	Fr <sub>3yz</sub>
0.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
0.00036	0.99995	0.99986	0.99999	0.99996	0.99999	0.99999	0.99999	0.99996	0.99990
0.12893	0.98703	0.96732	0.99668	0.99250	0.99667	0.99549	0.99564	0.99141	0.97610
0.23941	0.97521	0.93994	0.99294	0.98550	0.99351	0.99060	0.99167	0.98354	0.95716
0.35572	0.96422	0.91632	0.98911	0.97880	0.99050	0.98575	0.98805	0.97597	0.94123
0.46974	0.94744	0.88073	0.98256	0.96749	0.98568	0.97791	0.98244	0.96370	0.91775
0.57822	0.92918	0.84448	0.97463	0.95411	0.98018	0.96899	0.97639	0.94747	0.89600
0.64589	0.91225	0.81230	0.96658	0.94059	0.97474	0.96047	0.97068	0.93672	0.87182
0.68928	0.89743	0.78406	0.95863	0.92700	0.96959	0.95269	0.96548	0.92396	0.85297
0.73672	0.88348	0.75896	0.95067	0.91349	0.96448	0.94531	0.96055	0.91162	0.83580
0.76405	0.87092	0.73655	0.94273	0.89996	0.95951	0.93845	0.95585	0.90009	0.82013

Dg: daño global; Fr<sub>1xz</sub>: frecuencia relativa del modo 1 en el plano x-z; Fr<sub>1yz</sub>: frecuencia relativa del modo 1 en el plano y-z; Fr<sub>2xz</sub>: frecuencia relativa del modo 2 en el plano x-z; Fr<sub>2yz</sub>: frecuencia relativa del modo 2 en el plano y-z; Fr<sub>1t</sub>: frecuencia relativa torsional 1; Fr<sub>2</sub>: frecuencia relativa torsional 2; Fr<sub>2\*</sub>: frecuencia relativa del modo 2 con desplazamientos predominantes en sentido x; Fr<sub>mix</sub>: frecuencia relativa en modo mixto; Fr<sub>3yz</sub>: frecuencia relativa del modo 1 en el plano y-z.

En la Figura 3-12 se pueden ver las curvas de frecuencia relativa en función del daño global para la viga con carga ubicada a 0.5 m del apoyo A en este caso, el daño local presenta su mayor valor en la parte inferior de la sección de la viga en la que se aplicó la carga. En este caso, se observa que la frecuencia relativa de cada modo analizado disminuye con el aumento del daño global. La tendencia de las curvas es similar para todos los modos de vibración y, por lo tanto, la franja en la que se ubican las curvas es



cerrada. Esto significa que, en este caso, las frecuencias en todos los modos analizados se modifican relativamente igual cuando el daño global crece.

Tabla 3-6. Matriz de correlación frecuencia relativa-daño global.  
Carga a 2.0 m desde el apoyo A.

Dg	Fr <sub>1xz</sub>	Fr <sub>1yz</sub>	Fr <sub>2xz</sub>	Fr <sub>2yz</sub>	Fr <sub>t1</sub>	Fr <sub>2*</sub>	Fr <sub>t2</sub>	Fr <sub>mix</sub>	Fr <sub>3yz</sub>
0.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
0.11738	0.98969	0.97019	0.99836	0.99713	0.99706	0.99881	0.99475	0.99365	0.97289
0.22275	0.97936	0.94305	0.99574	0.99221	0.99411	0.99693	0.99029	0.98641	0.95190
0.33806	0.96958	0.91927	0.99288	0.98678	0.99124	0.99483	0.98625	0.97911	0.93446
0.45425	0.95434	0.88316	0.98754	0.97650	0.98664	0.99091	0.98039	0.96377	0.91234
0.55705	0.93764	0.84620	0.98075	0.96338	0.98139	0.98582	0.97426	0.95327	0.88405
0.63819	0.92183	0.81339	0.97375	0.94977	0.97614	0.98038	0.96849	0.93873	0.86237
0.68103	0.90815	0.78474	0.96660	0.93586	0.97138	0.97499	0.96381	0.92506	0.84424
0.72669	0.89505	0.75915	0.95913	0.92143	0.96654	0.96925	0.95914	0.91178	0.82781
0.76010	0.88353	0.73657	0.95203	0.90759	0.96205	0.96380	0.95513	0.89945	0.81349

Dg: daño global; Fr<sub>1xz</sub>: frecuencia relativa del modo 1 en el plano x-z; Fr<sub>1yz</sub>: frecuencia relativa del modo 1 en el plano y-z; Fr<sub>2xz</sub>: frecuencia relativa del modo 2 en el plano x-z; Fr<sub>2yz</sub>: frecuencia relativa del modo 2 en el plano y-z; Fr<sub>t1</sub>: frecuencia relativa torsional 1; Fr<sub>t2</sub>: frecuencia relativa torsional 2; Fr<sub>2\*</sub>: frecuencia relativa del modo 2 con desplazamientos predominantes en sentido x; Fr<sub>mix</sub>: frecuencia relativa en modo mixto; Fr<sub>3yz</sub>: frecuencia relativa del modo 1 en el plano y-z.

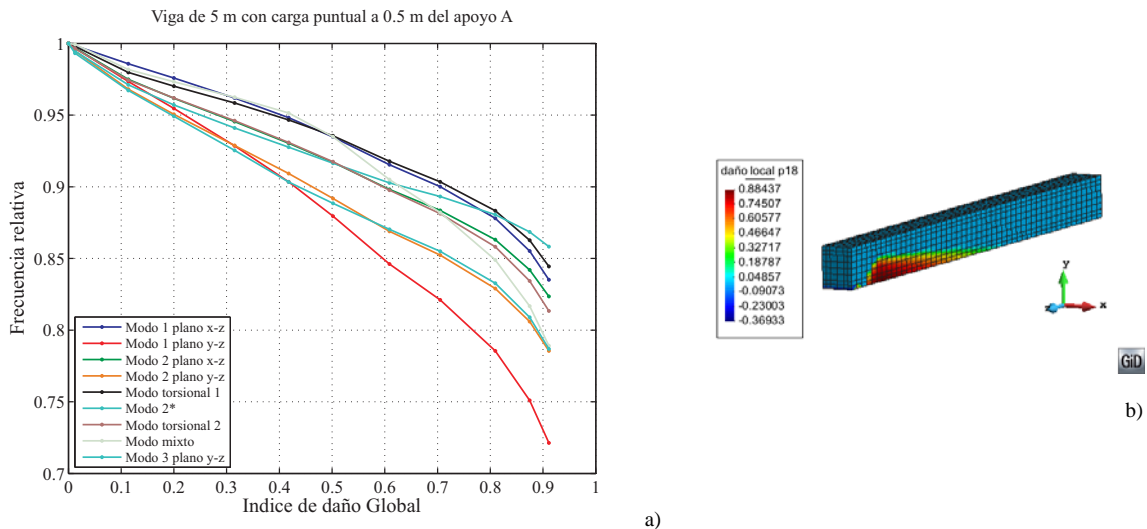


Figura 3-12. a) Curva de frecuencia relativa-índice de daño global; b) Daño local para el paso 18. Viga con carga a 0.5 m del apoyo A.

Se puede observar que para un valor de daño global de 0.5, la frecuencia relativa para el modo 1 en el plano y-z es de 0.8795 y la frecuencia relativa para el modo torsional 1 es de 0.9353. La diferencia entre estas dos frecuencias relativas para el mismo valor de daño global es de 0.0561.

En la Figura 3-13 se pueden ver las curvas de frecuencia relativa contra daño global para la viga con carga ubicada a 1.0 m del apoyo A. En este caso, el daño local tiene su mayor valor en la parte inferior de la sección de la viga en la cual se aplicó la carga. El daño local está concentrado alrededor de la sección de la viga ubicada a 1.0 m del apoyo

A. Para este caso se observa que la frecuencia relativa de cada modo analizado disminuye con el aumento del daño global, presentando una tendencia diferente entre las curvas de cada modo; por lo tanto, la franja en la que se ubican las curvas es menos cerrada que en el caso anterior. Esto significa que, para este caso, existen unos modos que están menos afectados que otros por el aumento del daño global. Se puede observar que, para un valor de daño global de 0.5, la frecuencia relativa del modo 1 en el plano y-z es de 0.8818 y la frecuencia relativa en el modo torsional 1 es de 0.9727. La diferencia entre estas dos frecuencias relativas para el mismo valor de daño global es de 0.0909.

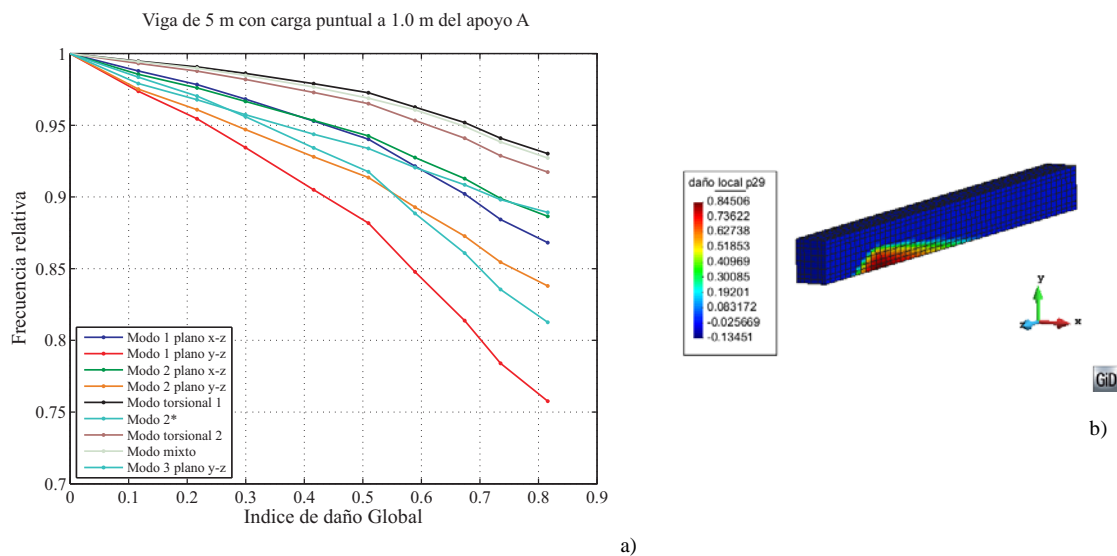


Figura 3-13. a) Curva de frecuencia relativa-índice de daño global; b) Daño local para el paso 29. Viga con carga a 1.0 m del apoyo A.

En la Figura 3-14 se pueden ver las curvas de frecuencia relativa en función del daño global de la viga con carga ubicada a 1.5 m del apoyo A. En este caso el daño local tiene el valor máximo en la parte inferior de la sección de la viga en la que se aplicó la carga; el daño local está concentrado alrededor de la sección de la viga ubicada a 1.5 m del apoyo A. En este caso se observa que la frecuencia relativa de cada modo analizado disminuye con el aumento del daño global, presentando una tendencia diferente entre las curvas de cada modo. Se puede ver que las curvas de los modos torsionales 1 y 2 muestran una menor disminución de la frecuencia relativa que las curvas de los otros modos.

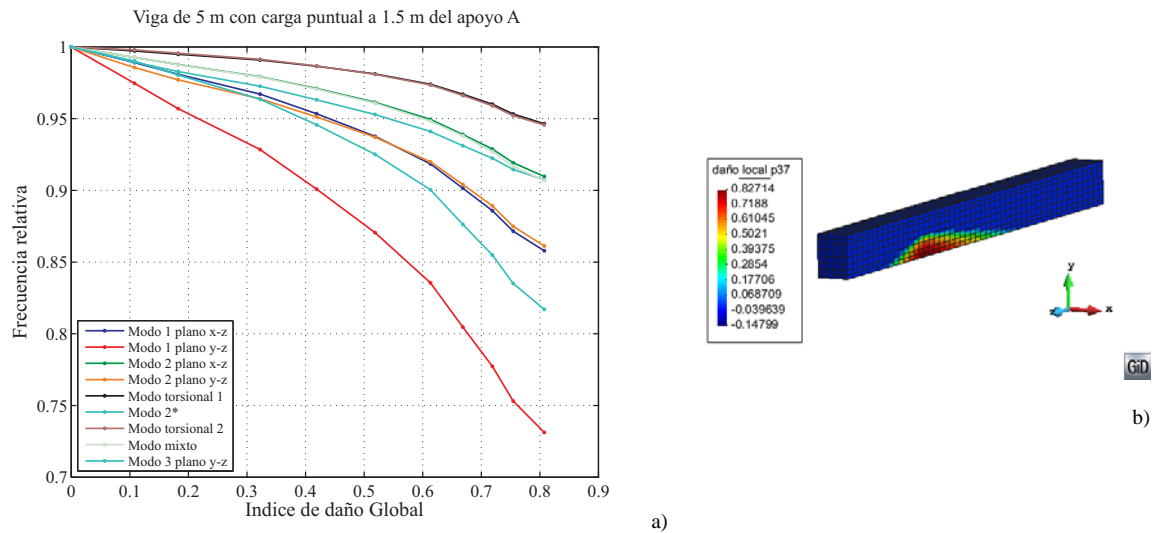


Figura 3-14. a) Curva de frecuencia relativa-índice de daño global; b) Daño local para el paso 37. Viga con carga a 1.5 m del apoyo A.

En la Figura 3-15 se pueden ver las curvas de frecuencia relativa en función del daño global de la viga con carga ubicada a 2.0 m del apoyo A. El daño local tiene el valor máximo bajo la carga y está concentrado alrededor de la sección de la viga ubicada a 2.0 m del apoyo A. Nuevamente, se observa que las curvas de los modos torsionales 1 y 2 muestran una menor disminución de la frecuencia relativa con el incremento de daño global que las curvas de los otros modos. Las curvas de la frecuencia relativa como función del daño global de cada modo de vibración están más separadas que en los casos anteriores.

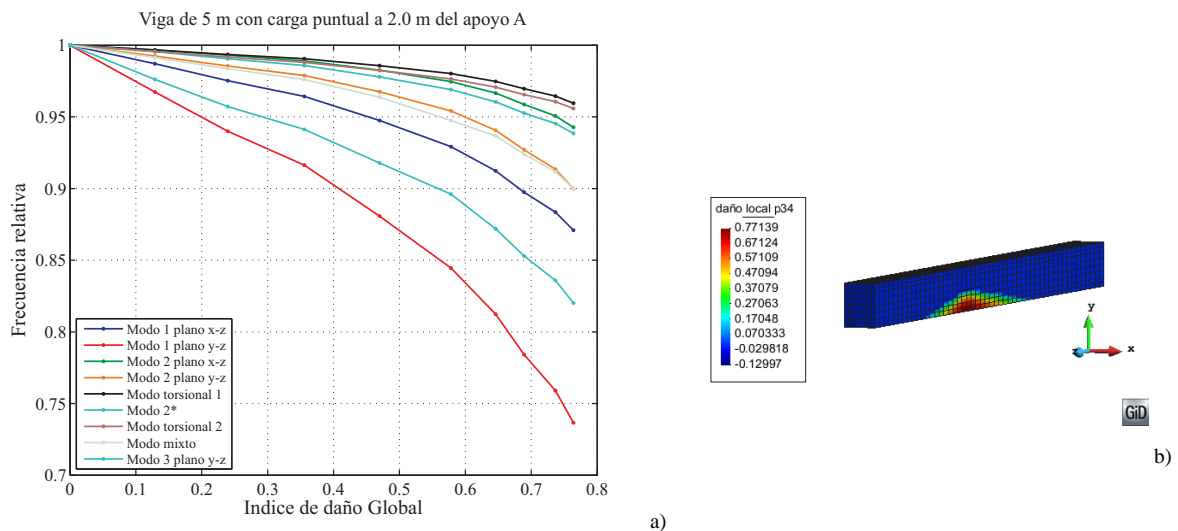


Figura 3-15. a) Curva de frecuencia relativa-índice de daño global; b) Daño local para el paso 34. Viga con carga a 2.0 m del apoyo A.

En la Figura 3-16 se pueden ver las curvas de frecuencia relativa como función del daño global para la viga con carga ubicada a 2.5 m del apoyo A. El daño local tiene su mayor valor en el centro de la luz y está concentrado alrededor de la sección de la viga

ubicada a 2.5 m del apoyo A. Conservando la tendencia, las curvas que muestran la frecuencia relativa como función del daño global de cada modo de vibración están más separadas que en los casos anteriores.

Las Figuras 3-12 a 3-16 permiten observar que la frecuencia relativa del modo 1 en el plano y-z es la que más decrece cuando el daño global aumenta, para los cinco casos analizados. La frecuencia relativa del modo torsional 1 es la que menos decrece cuando el daño global aumenta. También se puede observar que la frecuencia relativa de los modos torsionales 1 y 2 es más sensible a la ubicación del daño local, ya que en el caso en el cual el daño local está concentrado a 0.5 m del apoyo A, la frecuencia relativa del modo torsional 1 varía desde 1.0 hasta 0.84, mientras que en el caso en que el daño local está concentrado en la mitad de la luz de la viga, su variación va desde 1.0 hasta 0.962.

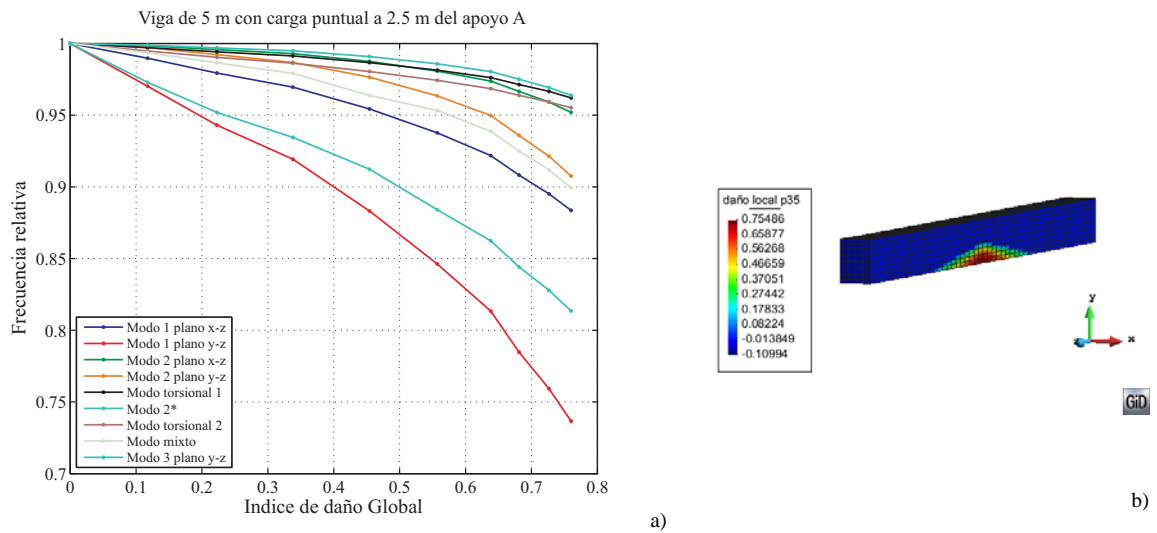


Figura 3-16. a) Curva de frecuencia relativa-índice de daño global; b) Daño local para el paso 35. Viga con carga a 2.5 m del apoyo A.

Al analizar la variación de la frecuencia relativa en función del incremento del daño global para cada modo de vibración de los cinco casos estudiados, es posible identificar la influencia de la ubicación del daño local en el respectivo modo de vibración. Por lo tanto, se han realizado gráficas de la frecuencia relativa como función del daño global para los diferentes casos estudiados y agrupadas por cada modo de vibración, las cuales se muestran en las Figuras 3-17 a 3-20.

En la Figura 3-17 se muestran las curvas de evolución de la frecuencia relativa para el modo 1 respecto al daño global. En estas gráficas se muestran las curvas para los cinco casos analizados, y se puede observar que la evolución de la frecuencia relativa en el modo 1 en el plano x-z (Figura 3-17a) no es afectada significativamente por la ubicación del daño local, ya que las cinco curvas están muy ajustadas entre ellas en todo



el rango del daño global. La evolución de la frecuencia relativa en el modo 1 en el plano y-z (Figura 3-17b) muestra una tendencia similar para las cinco curvas para un rango de daño global entre 0.0 y 0.60. Para valores de daño global mayores que 0.60, los valores de frecuencia relativa de la curva correspondiente al daño local concentrado a 0.5 m del apoyo A son menores que para las otras cuatro curvas. Esto significa que, para este caso, la ubicación del daño local ha influido en la evolución de la frecuencia relativa. La frecuencia relativa del modo 1 en el plano y-z presenta una mayor disminución que la frecuencia relativa del modo 1 en el plano x-z; ya que el daño local está ubicado en la parte inferior de la viga, esto disminuye la inercia alrededor del eje x y favorece el movimiento en la dirección y, con lo que disminuye la frecuencia en el plano y-z.

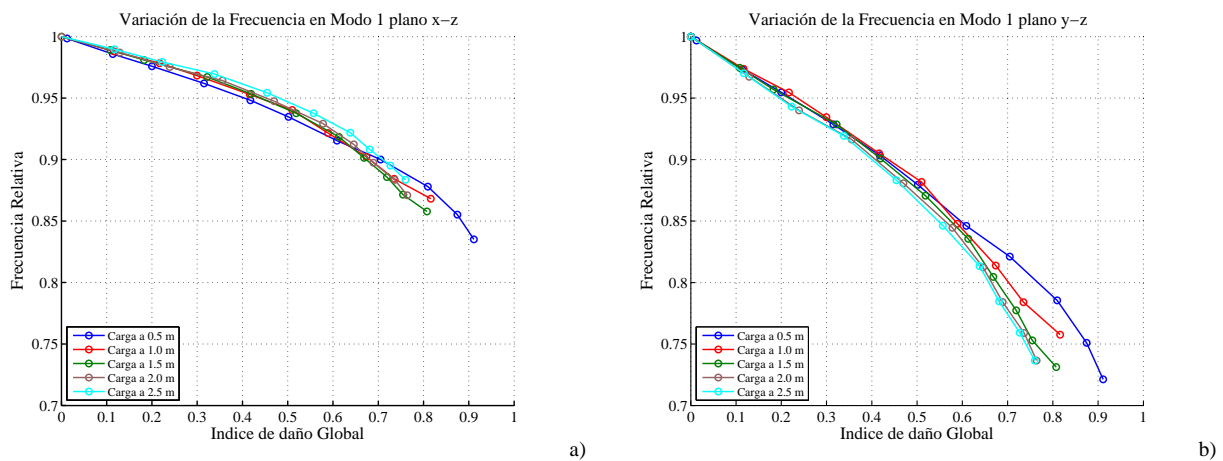


Figura 3-17. Variación de la frecuencia relativa en modo 1 respecto al daño global, para las cinco cargas analizadas. a) Modo 1 en el plano x-z; b) modo 1 en plano y-z.

En la Figura 3-18 se muestra las curvas de evolución de la frecuencia relativa para el modo 2 y modo 2\* respecto al daño global. En estas gráficas se muestran las curvas para los cinco casos analizados, y puede observarse que la evolución de la frecuencia relativa en modo 2 respecto al daño global es diferente según la ubicación del daño local. Cuando el daño local está ubicado cerca al apoyo A (carga a 0.5 m) las frecuencias relativas presentan mayor disminución que en los otros casos. Cuando el daño está ubicado en el centro de la luz (carga a 2.5 m) las frecuencias relativas presentan mayor disminución que en los otros casos. En general, las frecuencias relativas presentan mayor disminución para el modo 2 cuanto más alejado este el daño local del centro de la luz. Aunque el modo 2\* tenga un componente de desplazamiento longitudinal mayor que el del modo 2 en los planos y-z y x-z, la tendencia en la evolución de la frecuencia relativa es similar a la descrita para el modo 2.

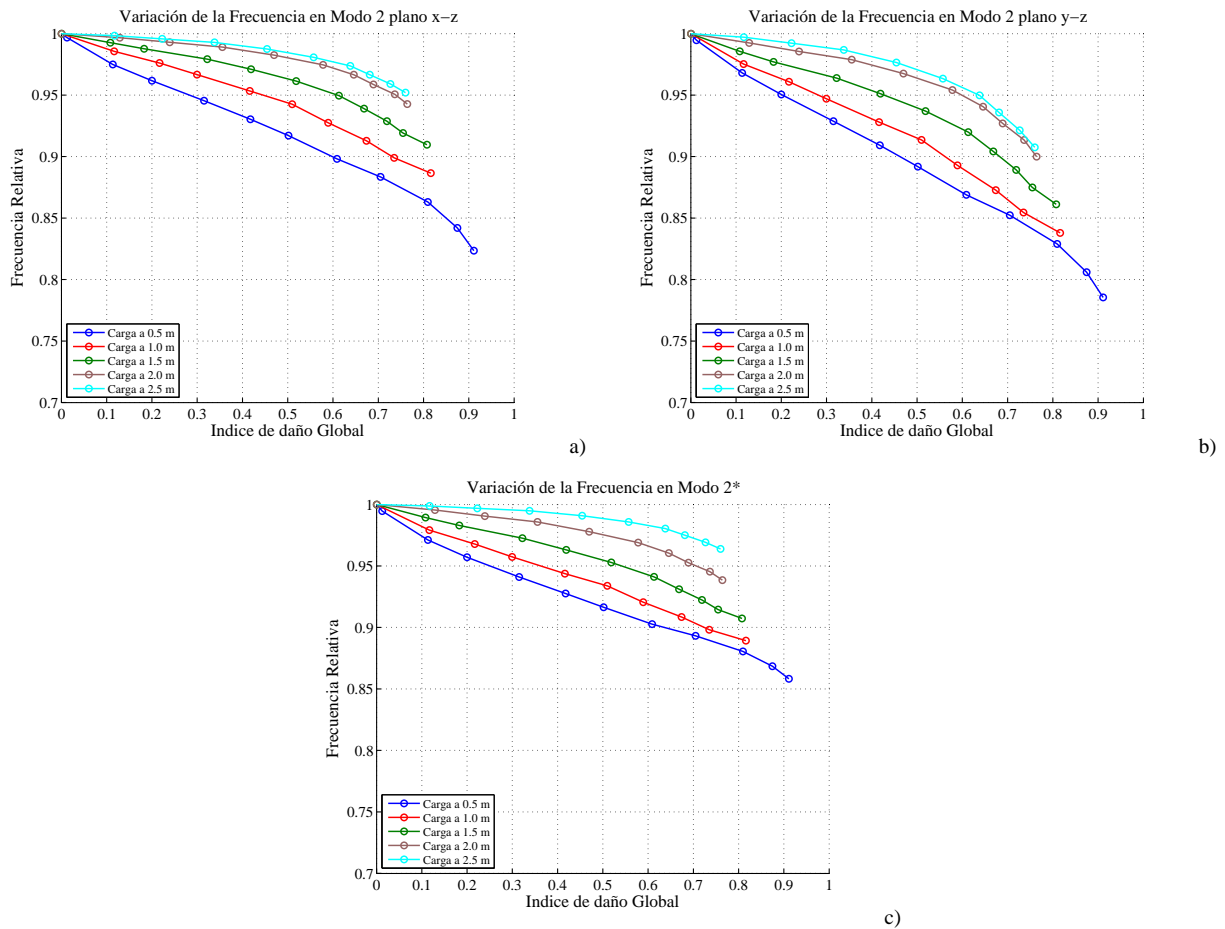


Figura 3-18. Variación de la frecuencia relativa en modo 2 respecto al daño global, para las cinco cargas analizadas. Modo 2 en el plano x-z; b) modo 2 en plano y-z; c) modo 2\*.

En la Figura 3-19 se muestran las curvas de evolución de la frecuencia relativa para el modo torsional respecto al daño global. Se puede observar que existe una influencia de la ubicación del daño global en la evolución de la frecuencia relativa para el modo torsional y que existe una tendencia similar a la observada en el modo 2. Sin embargo, en este caso, cuando el daño local está ubicado entre 1.5 m y 2.5 m, las curvas están concentradas en una franja cerrada y la frecuencia relativa disminuye poco, mientras que para el daño ubicado hacia el apoyo A, las curvas muestran mayor separación y la frecuencia relativa presenta un decrecimiento mayor.

En la Figura 3-20a se muestran las curvas de evolución de la frecuencia relativa para el modo mixto respecto al daño global y en la Figura 3-20b se muestran las curvas de evolución de la frecuencia relativa para el modo 3 en el plano y-z.



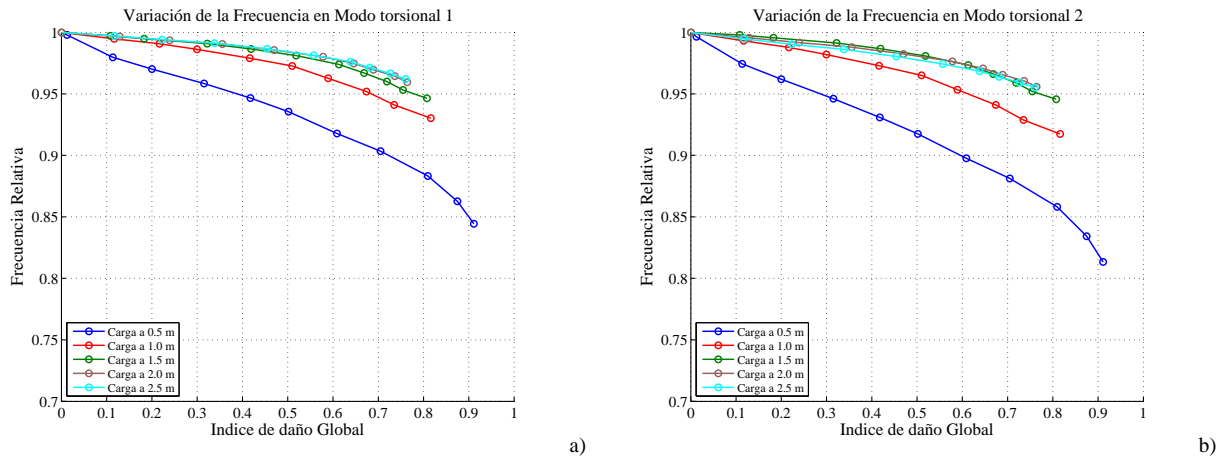


Figura 3-19. Variación de la frecuencia relativa en modo torsional respecto al daño global, para las cinco cargas analizadas. a) Modo torsional 1; b) modo torsional 2.

Para los dos modos analizados en la Figura 3-16, las frecuencia relativa que presentan una mayor disminución respecto al daño global son las correspondientes a las curvas con daño local ubicado a 0.5 m del apoyo y en el centro de la luz. Cuando el daño local está concentrado en 1.0 m, 1.5 m ó 2.0 m la frecuencia relativa muestra una menor disminución.

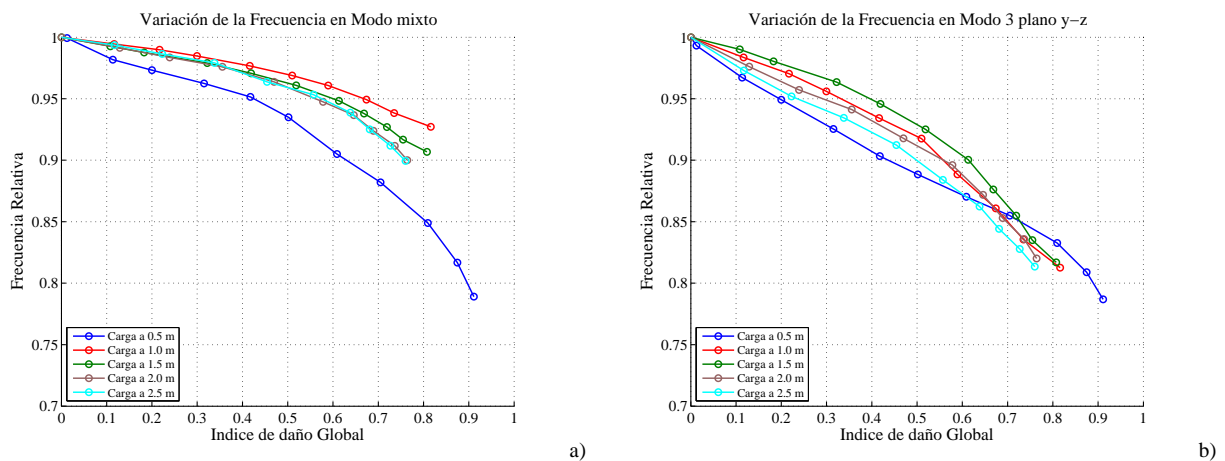


Figura 3-20. Variación de la frecuencia relativa respecto al daño global, para las cinco cargas analizadas. a) Modo mixto b) Modo 3 plano y-z.

Como se puede ver, la relación entre la evolución de la frecuencia relativa, el índice de daño global y la ubicación del daño local no es sencilla, por lo que es necesario hacer un análisis que involucre la mayor cantidad de información posible, para poder establecer una correlación acertada entre la correlación entre la frecuencia relativa y el daño global y estimar con un buen grado de aproximación la ubicación del daño global. Con base en el ejemplo estudiado se puede concluir que:

Dado que la correlación entre la frecuencia relativa y el daño global para el primer modo es prácticamente independiente de la ubicación del daño local, se recomienda

utilizar los datos obtenidos en este modo para definir una regresión que relacione estas dos variables.

El modo 2 de vibración tiene su área de inflexión aproximadamente en el centro de la luz de la viga (ver Figura 3-11); en la Figura 3-18, se observa que cuando el daño local está concentrado en el centro de la viga la disminución de la frecuencia natural con el incremento del daño global es menor que cuando el daño local se acerca al apoyo. Para el modo mixto y modo 3 de vibración se pueden identificar dos áreas de inflexión en la curvatura del modo, una ubicada en la zona de 0.5 m del apoyo y otra ubicada en el centro de la luz de la viga (ver Figura 3-11). En la Figura 3-20 se observa que las curvas que muestran una menor disminución de la frecuencia relativa con el incremento del daño global son aquellas en las que el daño local está ubicado a una distancia de 0.5 m del apoyo y en el centro de la luz. Por lo tanto es posible concluir que, si el daño local está ubicado en las zonas de inflexión de un modo de vibración, tiene menos influencia en el decremento de la frecuencia relativa cuando el daño global crece.

### **3.9. Observaciones finales**

En este capítulo se desarrolló una metodología para el análisis de la evolución de las frecuencias naturales y su correlación con la evolución del índice de daño global en estructuras de materiales compuestos. Se propuso un índice de daño global para estructuras de materiales compuestos que está basado en un procedimiento racional y que es el reflejo del daño constitutivo de los materiales componentes del compuesto y la ubicación espacial del daño local. Se ha usado la teoría de mezclas serie paralelo para analizar la evolución de frecuencias naturales en estructuras de materiales compuestos, específicamente en estructuras de hormigón armado. Se ha propuesto un índice de daño local equivalente para determinar la disminución del aporte de rigidez de cada material componente que entra en no linealidad.

En el capítulo siguiente se desarrollaran una serie de ejemplos de aplicación con base en los nuevos desarrollos.

## **Bibliografía capítulo 3**

[1] J.-T. Kim, N. Stubbs, Nondestructive Crack Detection Algorithm for Full-Scale Bridges, *Journal of Structural Engineering*, 129 (2003) 1358.



- [2] G.M. Joselin Herbert, S. Iniyar, E. Sreevalsan, S. Rajapandian, A review of wind energy technologies, *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, 11 (2007) 1117-1145.
- [3] M.I. Friswell, Damage Identification Using Inverse Methods, *Philosophical Transactions: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 365 (2007) 393-410.
- [4] X. Martinez, Micro mechanical simulation of composite materials using the serial/parallel mixing theory. PhD Thesis, Universidad Politécnica de Cataluña, Barcelona, 2008.
- [5] F. Rastellini, Modelización numérica de la no-linealidad constitutiva de laminados compuestos. PhD Thesis, Universidad Politécnica de Cataluña, Barcelona, 2006.
- [6] S. Oller, Un modelo de daño continuo para materiales-friccionales. PhD, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, 1988.
- [7] S. Oller, Modelización numérica de Materiales Friccionales, CIMNE, Barcelona, 1991.
- [8] S. Oller, Fractura Mecánica. Un enfoque global., in, CIMNE, Barcelona, 2001, pp. 200-217.
- [9] L.M. Kachanov, Time of rupture process under creep conditions, *Izvestia Akademiia Nauk*, 8 (1958) 26-31.
- [10] J. Mazars, G. Pijaudier-Cabot, Continuum Damage Theory -Application to Concrete, *Journal of Engineering Mechanics*, 115 (1989) 345-365.
- [11] J. Lubliner, J. Oliver, S. Oller, E. Oñate, A plastic-damage model for concrete, *International Journal of Solids and Structures*, 25 (1989) 299-326.
- [12] L. Jason, A. Huerta, G. Pijaudier-Cabot, S. Ghavamian, An elastic plastic damage formulation for concrete: Application to elementary tests and comparison with an isotropic damage model, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195 (2006) 7077-7092.
- [13] X. Tao, D.V. Phillips, A simplified isotropic damage model for concrete under bi-axial stress states, *Cement and Concrete Composites*, 27 (2005) 716-726.
- [14] S. Oller, B. Luccioni, A.H. Barbat, Un método de evaluación del daño sísmico en estructuras de hormigón armado *Revista internacional de Métodos numéricos para cálculo y diseño en ingeniería.*, 12 (1996) 215-238.
- [15] K.-J. Bathe, *Finite Element Procedures*, Prentice Hall, Nueva Jersey, 1996.
- [16] PLCD-Manual, Non-linear thermo mechanic finite element oriented to PhD student education., in: Code developed at CIMNE, Barcelona, 2008.
- [17] J. Baños, Estudio de la evolución de las frecuencias naturales en estructuras sometidas a efectos del daño y la plasticidad. Tesina, Universidad Politecnica de Cataluña, Barcelona, 2011.
- [18] R. Faria, J. Oliver, M. Cervera, A strain-based plastic viscous-damage model for massive concrete structures, *International Journal of Solids and Structures*, 35 (1998) 1533-1558.
- [19] CIMNE, GID Pre and postprocessor, in, Barcelona, 2013, pp. <http://gid.cimne.upc.es/home>.



---

## 4. Ejemplos de aplicación

### 4.1. Introducción

En el presente capítulo se desarrollan una serie de ejemplos donde se aplican las teorías propuestas en esta tesis pero también, con fines de comparación, las teorías que han servido de base de partida para el desarrollo de esta tesis.

Inicialmente se realiza el análisis no-lineal de una torre de aerogenerador construida en hormigón armado. En dicho análisis se ha utilizado el modelo constitutivo de daño de tensión y compresión propuesto por Faria et al. [1], profundizando en el uso de este modelo como una herramienta para el análisis de juntas constructivas de piezas prefabricadas de hormigón armado. Estas juntas constructivas trabajan normalmente a compresión y su resistencia a tracción es baja. Su modelización numérica se realiza con elementos de contacto y técnicas de remallado que son procedimientos computacionalmente costosos. Se ha propuesto un procedimiento para la modelación numérica utilizando una técnica constitutiva que simula el efecto de contacto [2].

En el segundo ejemplo se aplica el nuevo modelo de daño diferenciado a tracción y compresión propuesto en esta tesis para realizar el análisis no lineal de la torre de aerogenerador de hormigón armado sometida a un ciclo de carga lateral. Se aplica la metodología propuesta para obtener la correlación entre la evolución del daño global y la evolución de las frecuencias naturales.

Finalmente se analiza una pared delgada prefabricada de ferrocemento utilizando la teoría de mezclas serie/paralelo y el modelo constitutivo de daño diferenciado a tracción y compresión propuesto. Este ejemplo da la posibilidad de aplicar dicho modelo a una estructura de material compuesto y comparar los resultados obtenidos con los ensayos de laboratorios realizados en investigaciones anteriores [3].

## **4.2. Análisis de una torre de aerogenerador de hormigón armado aplicando un modelo constitutivo de daño a tracción y compresión**

### **4.2.1. Descripción del problema**

El incremento del tamaño de las turbinas de los aerogeneradores requiere un incremento en la altura de sus torres. Tradicionalmente estas torres han sido conformadas por secciones cónicas de acero de 20 a 30 m, ensambladas in situ para construir torres de alrededor de 80 m de altura. El incremento en la altura de las torres requiere de un incremento de su rigidez con el consecuente problema de fabricación y transporte de las partes de acero. Harte y Van Zijl [4] establecen que torres de acero de más de 85 m no son adecuadas para garantizar un comportamiento adecuado ante las vibraciones inducidas por el aerogenerador. Petcu y Mari-Bernat [5] establecen que las torres de acero solo pueden ser usadas hasta 80 m de altura. Debido a estos factores, en los últimos años ha empezado a ser usado como material de estas torres el hormigón armado. Dichas torres están en un rango de altura entre los 40 y 140 m y son construidas en piezas prefabricadas que se ensamblan in situ, se ha observado que cuando se realiza un adecuado diseño del hormigón armado, este tipo de torres tiene un buen comportamiento.

El objetivo de este ejemplo es aplicar un procedimiento numérico para el análisis de una torre de aerogenerador prefabricada en hormigón reforzado y ensamblada in situ, la cual estará sometida a un ciclo de carga, descarga y recarga. Este procedimiento permite: a) capturar la apertura, cerrado y reapertura de grietas producidas por una carga cíclica; y b) obtener una curva de capacidad de la estructura para futuros estudios de riesgo sísmico. La acción del viento, los efectos térmicos, las vibraciones producidas por la maquina y los fenómenos de fatiga de los materiales están fuera del alcance de este estudio.

Este ejemplo está basado en la teoría de mezcla serie/paralelo [6, 7]; para representar el comportamiento no lineal del hormigón se ha utilizado el modelo constitutivo de

daño de compresión y tensión de Faria et al. [1] y para representar el comportamiento mecánico del acero la ley constitutiva de elasto-plasticidad. Para aplicar este procedimiento, se han desarrollado dos nuevas herramientas numéricas, el concepto de junta constitutiva y un algoritmo para la orientación espacial de las barras de acero según la ubicación global de cada elemento finito, el cual se puede ver en el Anexo C.

El hormigón armado ha sido representado como un material compuesto mediante el uso de la teoría de mezclas serie paralelo, lo cual permite, junto con el uso del modelo de daño, analizar estructuras de hormigón reforzado ante cargas cíclicas y capturar los ciclos de tensión y compresión. Dado que este modelo constitutivo de daño tiene umbrales de tensión y compresión diferenciados, es posible incluir el concepto de “junta constitutiva” lo que permite evitar el uso de elementos de contacto y de técnicas de remallado en el análisis numérico de las áreas de contacto. Este hecho abre la posibilidad de establecer esta poderosa estrategia para el análisis de este tipo de estructuras con un elevado número de elementos finitos.

Tanto el modelo constitutivo como los algoritmos de orientación de las barras de acero fueron implementados en el programa de elementos finitos PLCD [8]. La base teórica de este ejemplo se puede consultar directamente en las referencias o en el capítulo 1 de esta tesis, en los apartados 1.5, 1.6.2 y 1.6.3.

#### 4.2.2. Descripción general de la estructura

En este ejemplo se analiza una torre de hormigón reforzado con una altura de 77.4 m de altura conformada por 4 secciones prefabricadas de forma troncocónica; en la Figura 4-1 se muestran algunos ejemplos de torres de aerogenerador.



Figura 4-1. Torres prefabricadas de hormigón reforzado de 100 m de altura. Fuente de las fotos [9]. Figura tomada de [2].

El espesores de la pared de la estructura varían con la altura entre 0.15 m y 0.35 m tal como se puede ver en la Figura 4-2. Particularmente, pueden identificarse 3 zonas: la base, donde el espesor cambia de 0.20 m a 0.15 m entre los niveles 0.0 m y 2.14 m. Entre 2.14 m y 75.82 m de altura el espesor se mantiene constante de 0.15 m; en la parte superior el espesor cambia de 0.15 m a 0.35 m entre los niveles 75.82 m y 77.4 m, respectivamente. El diámetro externo de la torre es de 6.3 m en la base y de de 2.4 m en la parte superior.

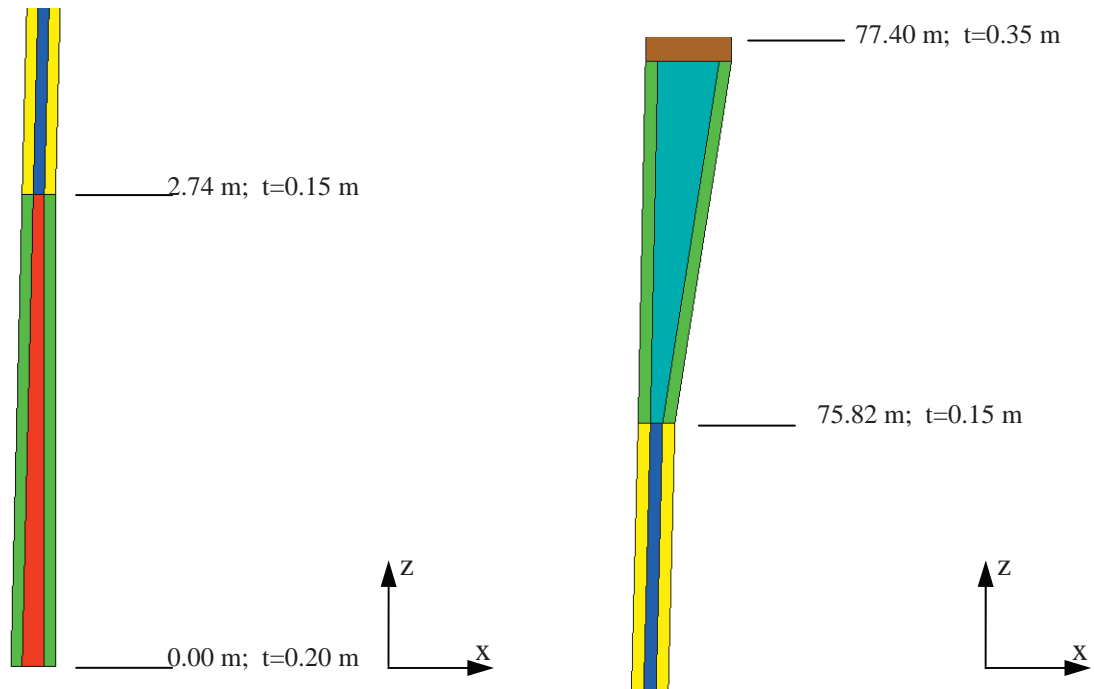


Figura 4-2. Espesores de la pared de la torre en diferentes niveles. Figura tomada de [2]

En los niveles 20.0 m, 40.0 m y 60.0 m existen juntas horizontales donde se unen las piezas prefabricadas mediante pernos verticales. Para representar geoméricamente estas juntas se ha modelizado un área horizontal que es común tanto al volumen superior como al inferior. Además, se han modelizado volúmenes que cubren la longitud de los pernos verticales de anclaje en cada lado de la junta horizontal. El diseño geométrico real de estas torres tiene un recremento del espesor de la pared en las zonas de juntas horizontales; sin embargo en el modelo numérico el espesor se ha contemplado constante de 0.15 m para simplificar el modelo. La conexión de la torre a la cimentación se hace mediante una junta horizontal; el espesor de 0.20 m en la base es el espesor real de la torre. En la parte superior de la torre se consideraron volúmenes que representan las zonas en las cuales están ubicados todos los anclajes que fijan el aerogenerador a la torre. Adicionalmente, un volumen con forma de anillo que representa la base del

aerogenerador fue ubicado en la corona de la torre. En la Figura 4-1 se muestran los detalles de las juntas horizontales.

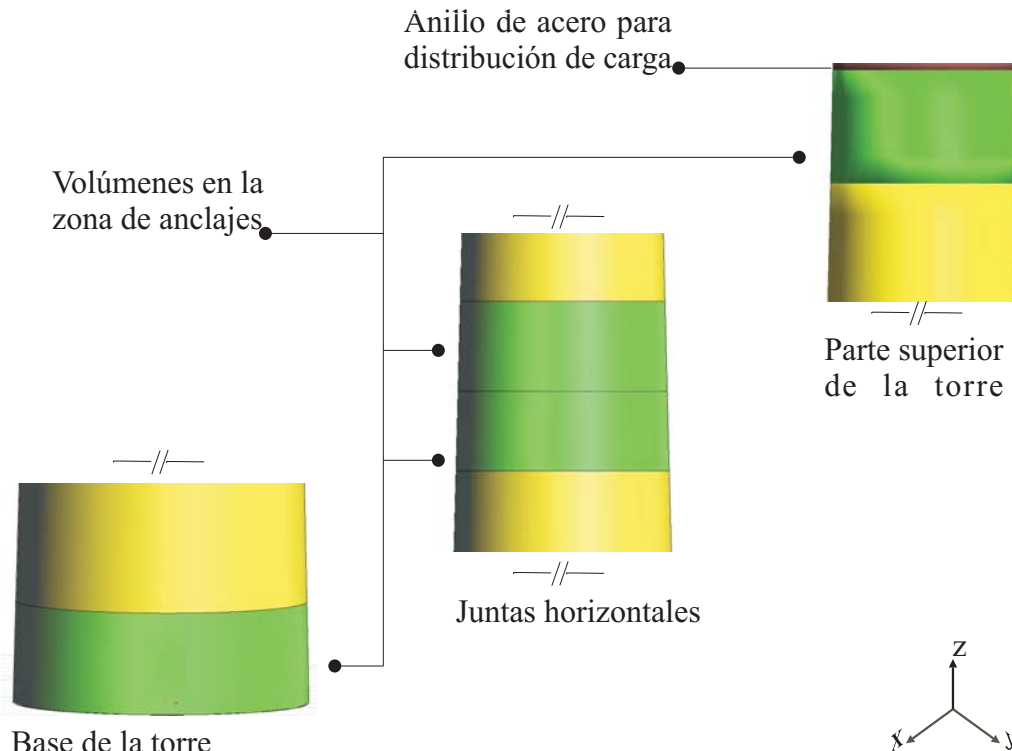


Figura 4-3. Detalles de las juntas horizontales. Tomada de [2]

El refuerzo estructural de la torre está compuesto por barras longitudinales de acero, anillos y flejes transversales de acero. Los anclajes están orientados en sentido longitudinal. En las zonas de los anclajes, los criterios de diseño requieren redondos longitudinales, anillos y flejes transversales, mientras que en la parte central de cada sección prefabricada el refuerzo se realiza con redondos longitudinales y anillos de confinamiento. En la Figura 4-4 se muestra la distribución de los tipos de refuerzos en cada sección de la torre.

#### 4.2.3. Modelo numérico

Se ha desarrollado un modelo numérico en 3D de la estructura con 104976 elementos tipo tetraedro (ver la Figura 4-4). En este caso las diferentes familias de barras de refuerzo cambian de orientación dependiendo de la posición global de cada elemento finito; por lo tanto fue implementado un algoritmo que calcule la orientación global de cada barra de acero en cada elemento finito (véase el Anexo C). El análisis de la torre de aerogenerador de hormigón armado se realizó en dos casos diferentes: Caso A, que considera una estructura con conexiones perfectas en las juntas horizontales, es



decir caso sin “junta constitutiva”; y el Caso B, que considera junta constitutiva en los planos horizontales de unión de las secciones prefabricadas. Para el caso de la junta constitutiva se asigna a los elementos finitos adyacentes al plano horizontal de junta un material con resistencia a tracción casi nula y que conserva sus propiedades mecánicas de modulo de elasticidad y resistencia a compresión.

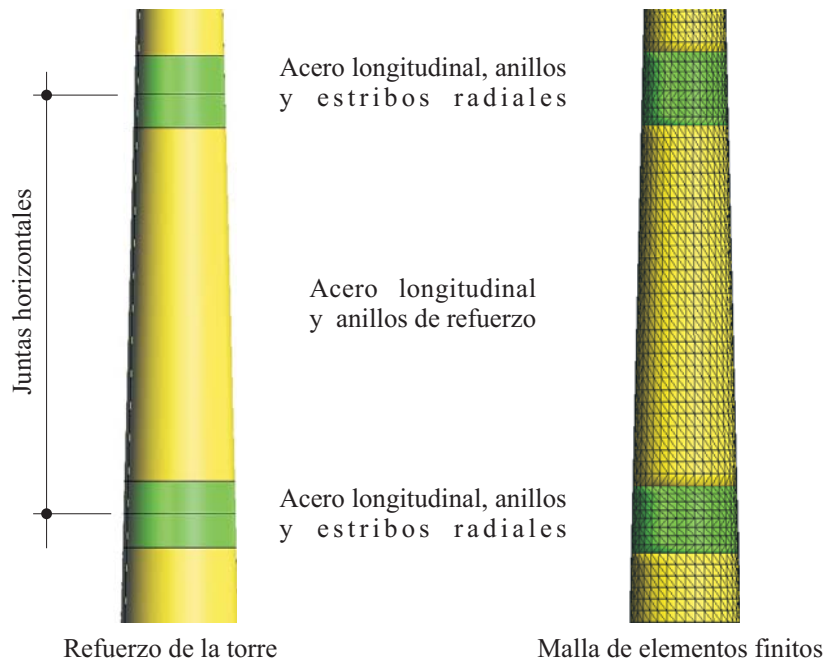


Figura 4-4. Refuerzo de la torre y malla de elementos finitos. Figura tomada de la referencia [2]

Dado que el modelo constitutivo de Faria et al. [1] tiene funciones de discontinuidad de tracción y compresión independientes, es posible mantener la resistencia de compresión aun cuando se produce el fallo a tracción del material. En el ciclo de tracción, las zonas con material de junta constitutiva no opondrán mayor resistencia a las acciones, ya que al material se le ha asignado una resistencia casi nula. Sin embargo, en el ciclo de compresión la resistencia que ejerce el material de junta constitutiva es el correspondiente al efecto de contacto que se genera en la junta horizontal. La resistencia a compresión del material de junta constitutiva no se modifica. Para el Caso A se han diseñado seis materiales compuestos, los cuales se asignan a los respectivos volúmenes que conforman el modelo numérico de la torre y en la Figura 4-5 se muestra la asignación de estos materiales. Para el caso B se han diseñado siete materiales compuestos, siendo el séptimo el correspondiente al material de la junta constitutiva. En la Figura 4-6 se muestra la asignación de estos materiales a los diferentes volúmenes de la estructura.

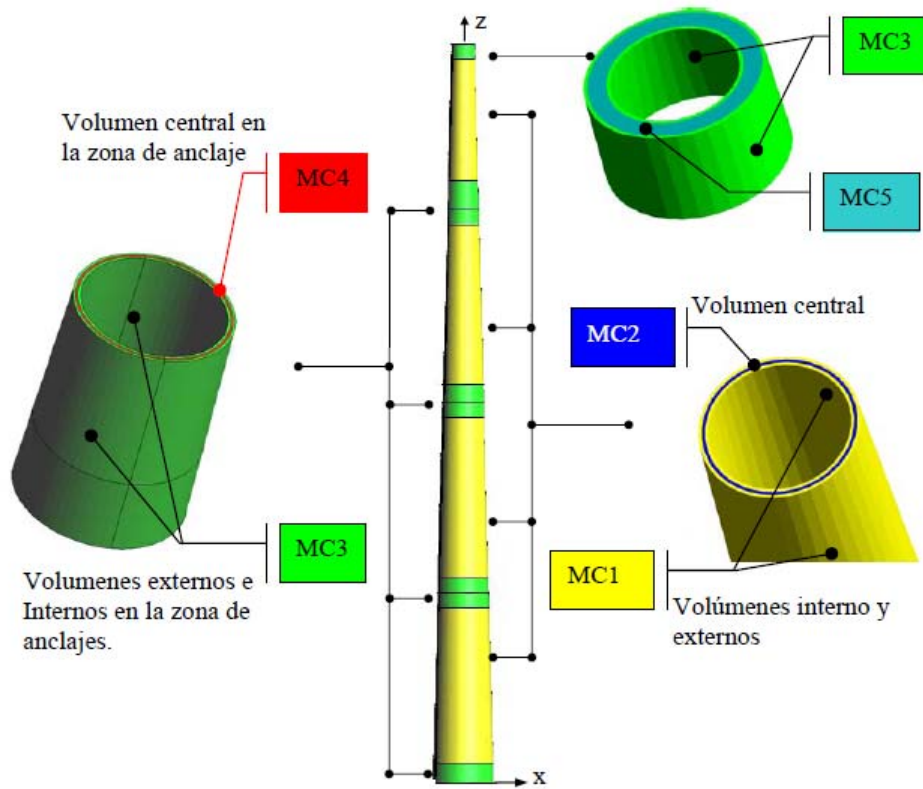


Figura 4-5. Asignación de materiales compuestos. Caso A: modelo estructural sin junta constitutiva. Figura tomada de la referencia [2].

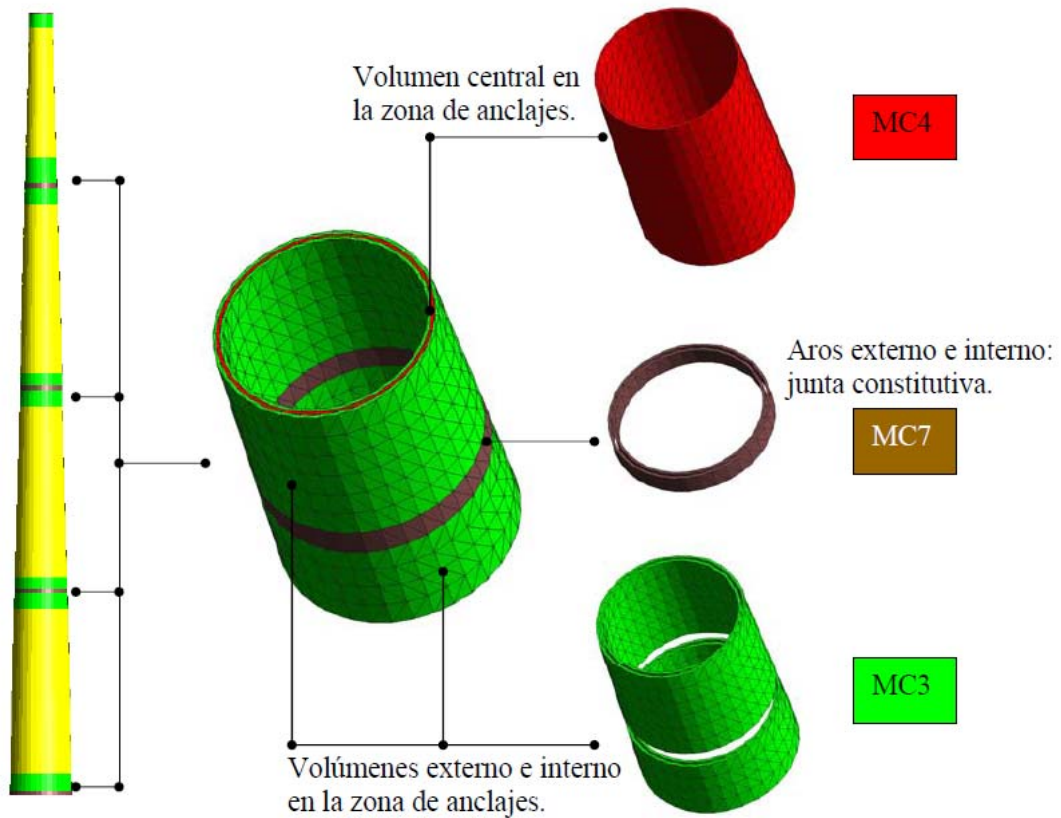


Figura 4-6. Asignación de materiales compuestos. Caso B: modelo estructural con junta constitutiva. Figura tomada de la referencia [2]

Tres materiales simples se han definido en el modelo numérico: hormigón, hormigón modificado para la junta constitutiva y acero. En la Tabla 4-1 se presentan las principales propiedades mecánicas de los materiales simples (MS), donde los ángulos  $\phi^{mat}$ ,  $\theta$  y  $\psi$  son los ángulos de Euler [10] del material en una secuencia 3-1-3 para la orientación local de la fibra.

Tabla 4-1. Propiedades mecánicas de los materiales simples.

Tipo de material	Hormigón	Hormigón junta constitutiva	Acero		
	MS1	MS5	MS2	MS3	MS4
$\phi^{mat}$	0	0	0	0	0
$\theta$	0	0	90	90	0
$\psi$	0	0	91.4	0	0
Modelo constitutivo	$d^+$ $d^-$	$d^+$ $d^-$	Elasto-plasticidad		
E [MPa]	$3.7 \cdot 10^4$	$3.7 \cdot 10^4$	$2.1 \cdot 10^5$		
$\nu$	0.20	0.20	0.00		
$\sigma_c^o$ [MPa]	30	30	500		
$\sigma_c^{ult}$ [MPa]	58	58	500		
$\sigma_t^o$ [MPa]	4.1	0.05	500		
$G_c$ [kPa·m]	100	100	2000		
$G_t$ [kPa·m]	0.68	0.68	2000		

En la Figura 4-7 se muestra la secuencia de orientación de la fibra mediante estos ángulos. Los parámetros mecánicos considerados son la resistencia inicial de compresión,  $\sigma_c^o$ ; la resistencia máxima o última a la compresión,  $\sigma_c^{ult}$ ; la resistencia a la tracción,  $\sigma_t^o$ ; la energía de aplastamiento,  $G_c$ ; y la energía de fractura  $G_t$ .

Los parámetros  $A^-$  y  $B^-$  para el hormigón son obtenidos calculando la variable de daño a compresión,  $d^- = 1 - \frac{\sigma_i}{E \varepsilon_i}$ , en dos puntos diferentes de un curva de tensión

deformación obtenida a partir de un ensayo de compresión simple. La función umbral  $\rho^-$  es calculada a partir de la deformación elástica  $\sigma_o^- = E\varepsilon_i$  y de la función umbral inicial  $\rho_o^-$ . Estos valores son remplazados en la ecuación 1-47 y se soluciona, de forma iterativa, el sistema de 2 x 2 con lo que se obtienen los valores de  $A^-$  y  $B^-$ . Para este ejemplo, han sido usados los valores  $A^- = 3.7627$  y  $B^- = 0.7097$ .

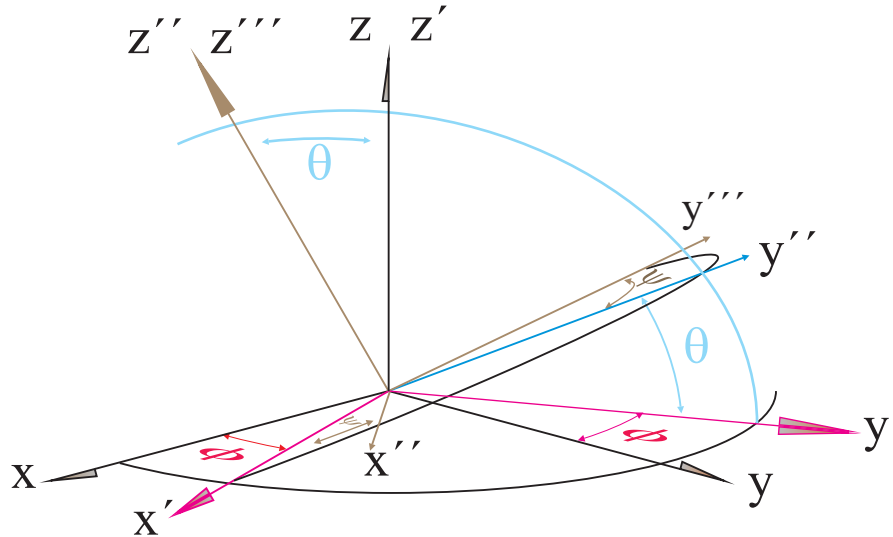


Figura 4-7. Esquema de orientación de los ángulos de Euler.

Han sido definidos cinco materiales simples (MS1 – MS5) y cada material simple tiene una orientación propia definida por los ángulos de Euler  $\phi^{mat}$ ,  $\theta$  y  $\psi$ . Los materiales compuestos (MC1 – MC7) son obtenidos a partir de la participación volumétrica de cada material simple en cada compuesto y en la Tabla 4-2 se muestra la composición de cada uno de los materiales compuesto y la participación volumétrica de cada material simple.

Tabla 4-2. Composición volumétrica de los materiales compuestos

Materiales Compuestos	Materiales simples				
	MS1	MS2	MS3	MS4	MS5
MC1	96.80	2.400	0.800	0.000	0.000
MC2	100.000	0.000	0.000	0.000	0.000
MC3	95.883	2.670	0.217	1.230	0.000
MC4	97.030	2.850	0.000	0.120	0.000
MC5	96.750	1.840	0.706	0.706	0.000
MC6	0.000	0.000	0.000	100.000	0.000
MC7	0.000	0.000	0.000	0.000	100.000

En las Figura 4-5 y 4-6 se muestra la distribución espacial de estos materiales para el caso A y caso B, respectivamente.

Se aplicaron tres etapas de carga; en la primera etapa se aplicó la carga de gravedad debido al peso propio de la estructura; seguidamente se aplicó el peso del aerogenerador como una carga distribuida en la corona de la torre y, finalmente, en la tercera etapa de carga se aplicó un desplazamiento horizontal en la corona de la torre. Este desplazamiento se aplicó de manera incremental en dirección  $x$  desde 0.00 hasta 0.425 m y luego en sentido contrario desde 0.425 m hasta -0.425 m. Los desplazamientos de la base de la torre se restringieron totalmente.

#### 4.2.4. Resultados

En la Figura 4-8 se muestra la curva fuerza-desplazamiento para el ciclo de carga aplicado mediante el desplazamiento de la corona de la torre. Se puede observar que la rigidez global de la estructura no es afectada por el uso de la “junta constitutiva”. En general, la rigidez es significativamente menor en el Caso B en comparación con la rigidez de la estructura en el caso A.

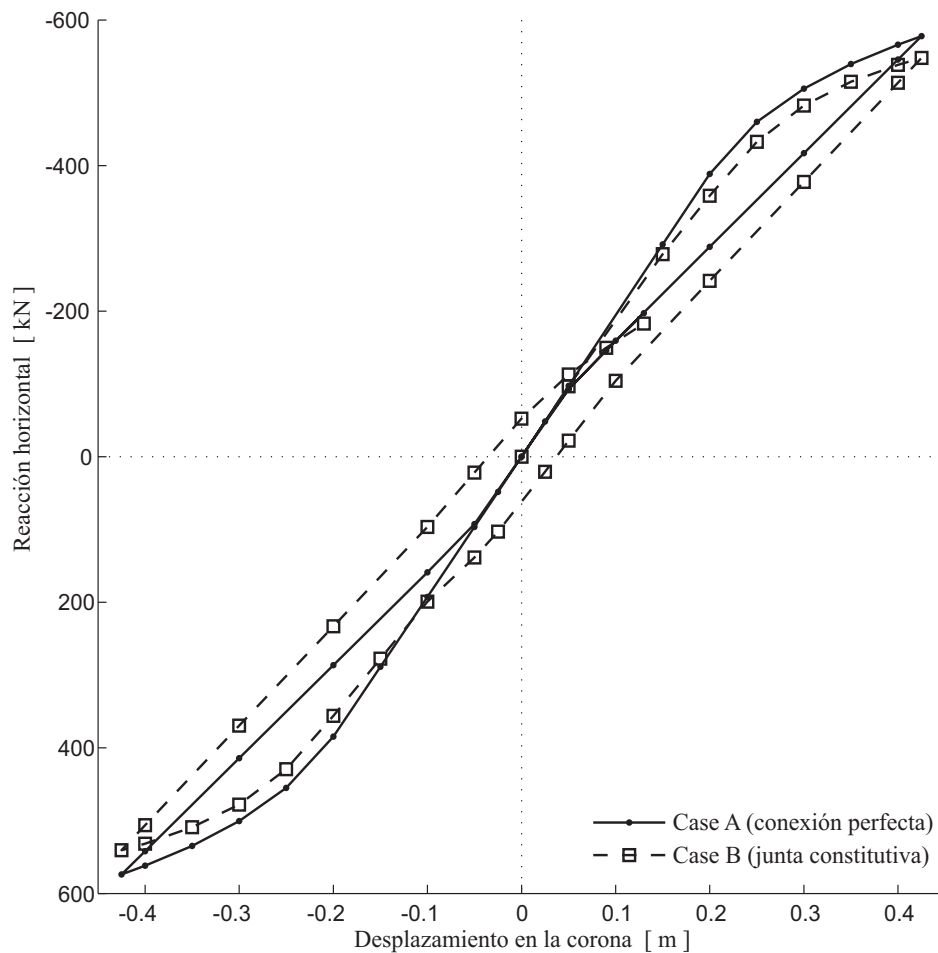


Figura 4-8. Curva carga-desplazamiento para los casos A y B.

El uso de esta herramienta numérica permite capturar los niveles de daño en las áreas estructurales donde realmente están actuando los conectores de las piezas prefabricadas, es decir en el material MC4. En las Figura 4-5 y 4-6 se pueden ver los volúmenes a los cuales fueron asignados este material, mientras que las Figuras 4-9 y 4-10 muestran la evolución de la variable de daño a tracción para esas mismas zonas.

En la Figura 4-8, para el Caso B, que tiene junta constitutiva, se puede ver que en el final de la descarga existe una deformación permanente. Esto se debe a que las tensiones longitudinales son mayores que la resistencia de fluencia del acero de las barras longitudinales del material compuesto MC4. Esto evidencia la ventaja de usar una junta constitutiva en la modelación de este tipo de problemas. Cuando cambia la dirección de la carga, los elementos previamente sujetos a tensiones tracción son comprimidos y viceversa, pero la respuesta global de la estructura no cambia. Este hecho confirma que los elementos con daño de tracción no han perdido su capacidad para soportar las siguientes sollicitaciones de compresión ocasionadas por el efecto de contacto. En el ciclo de descarga se puede ver, para el caso A, que no tiene junta constitutiva, que la rigidez global original de la estructura se recupera gradualmente mientras que los desplazamientos tienden al origen. Esto se debe a que los elementos que están en tracción empiezan gradualmente a trabajar en compresión. Para este estado del ciclo, estos elementos no presentan daño a compresión.

La evolución de la variable de daño a tracción en función del ciclo de carga es mostrada en las Figuras 4-9 a 4-12. Los niveles de daño de tracción cuando se inicia el estado no lineal se pueden ver en las figuras (a), mientras que el daño a tracción para la máxima carga aplicada se puede ver en las figuras (b). Cuando la carga es aplicada en sentido contrario, la evolución de la variable de daño a tracción es mostrada en las figuras (c) y (d).

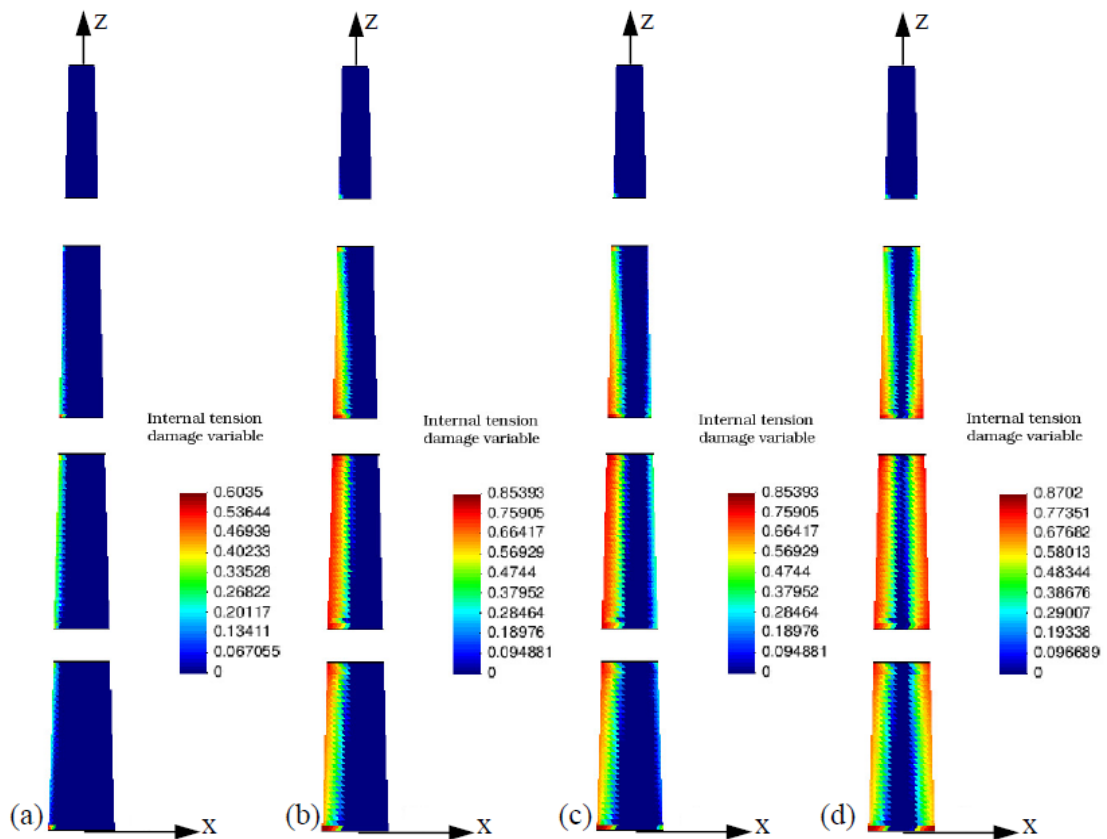


Figura 4-9. Variable de daño a tracción para el modelo estructural sin junta constitutiva (materiales MC1 y MC4). (a)  $dx=0.25$  m; (b)  $dx=0.425$  m; (c)  $dx=-0.25$  m; (d)  $dx=-0.425$  m, donde  $dx$  es el desplazamiento lateral en la corona de la torre.

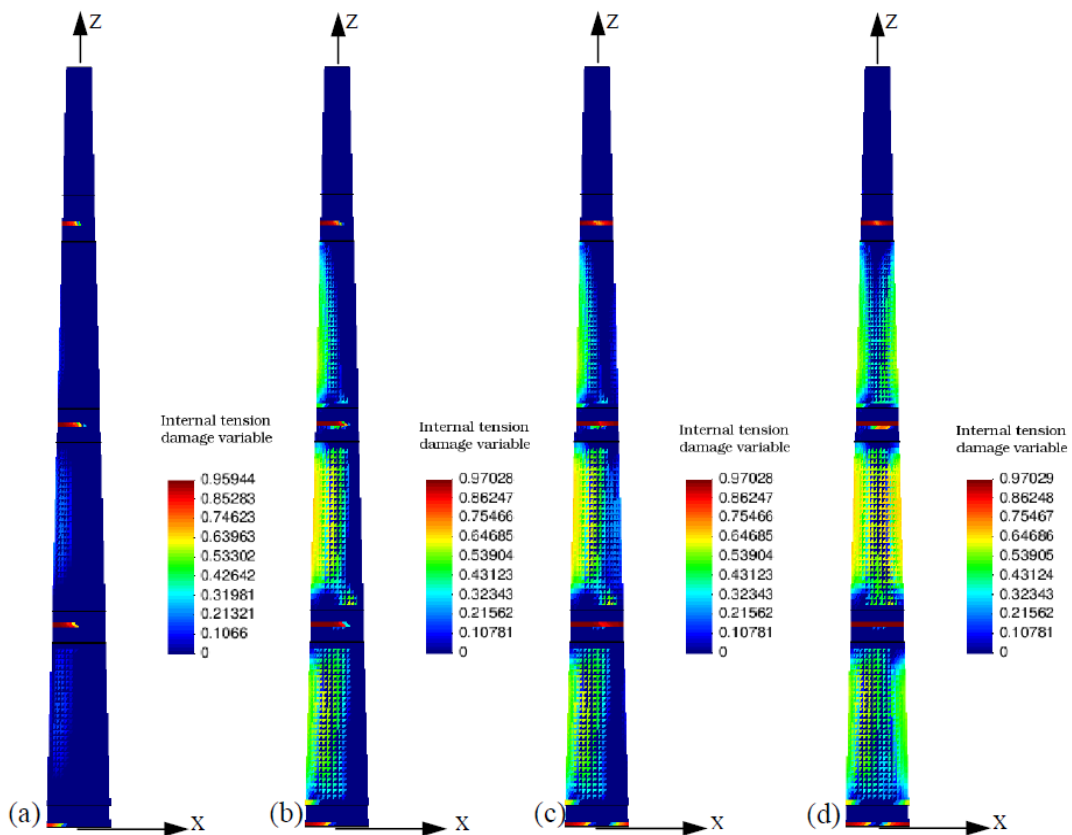


Figura 4-10. Variable de daño a tracción para el modelo estructural con junta constitutiva (materiales MC1 y MC4). (a)  $dx=0.25$  m; (b)  $dx=0.425$  m; (c)  $dx=-0.25$  m; (d)  $dx=-0.425$  m, donde  $dx$  es el desplazamiento lateral en la corona de la torre.

El daño a tracción en la matriz del material compuesto MC1 inicia cuando el desplazamiento lateral de la corona de la torre se encuentra entre 0.15 m y 0.25 m. Comparando los resultados de los dos modelos estudiados, los cuales se muestran en las Figura 4-11 y 4-12, se puede observar que la matriz del material compuesto MC1 muestra un mayor nivel de daño de tensión para el caso A, mientras que la matriz del material compuesto MC4 (ver Figura 4-9 y 4-10) presenta un mayor nivel de daño a tracción en el caso B. Esto es debido a que en el Caso B existe una mayor concentración de tensiones de tracción en la zona de los anclajes (volúmenes con asignación del material MC4) ya que los elementos de la junta constitutiva (elementos con asignación del material MC7) no resisten a tracción. En el caso A, estos mismos elementos tienen asignado el material MC1, con lo que en la zona de junta horizontal hay una mayor distribución de las tracciones.

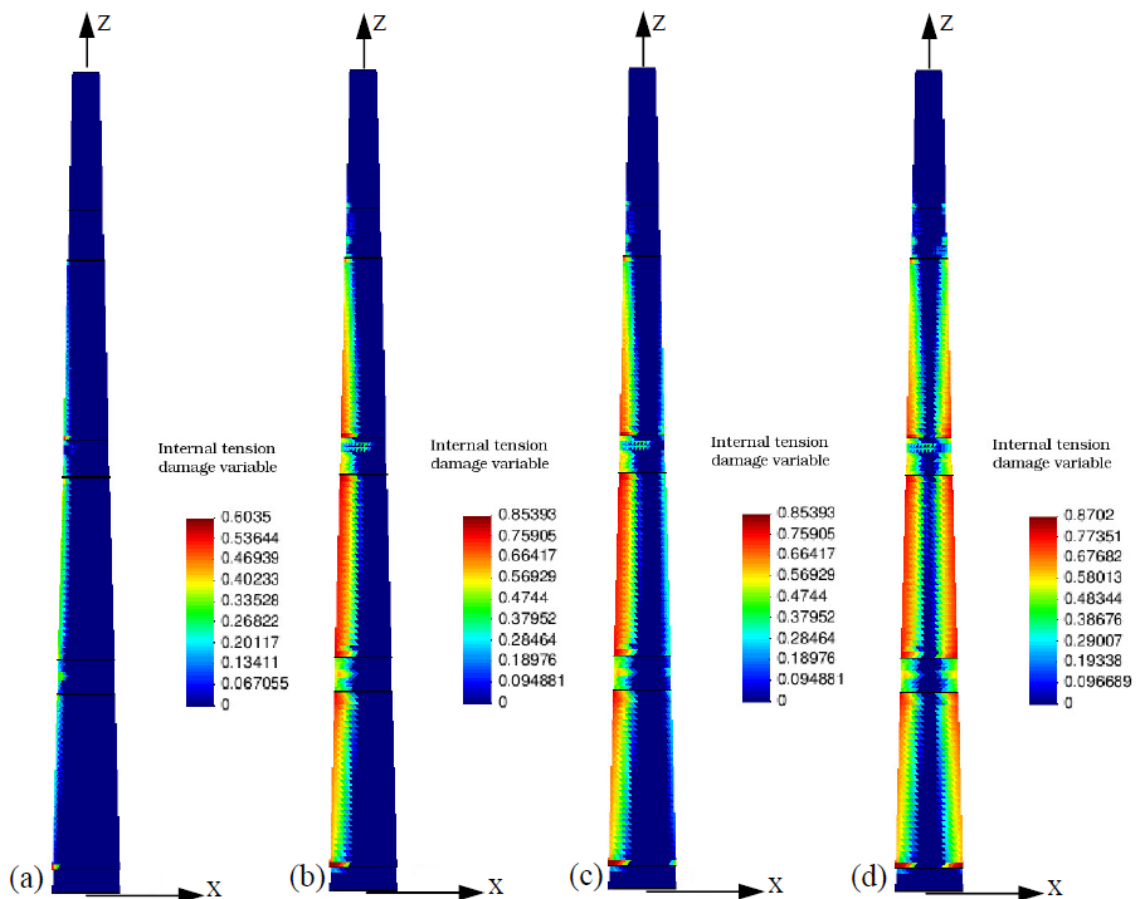


Figura 4-11. Variable de daño a tracción para el modelo estructural sin junta constitutiva (material MC1 ). (a)  $dx=0.25$  m; (b)  $dx=0.425$  m; (c)  $dx=-0.25$  m; (d)  $dx=-0.425$  m, donde  $dx$  es el desplazamiento lateral en la corona de la torre.



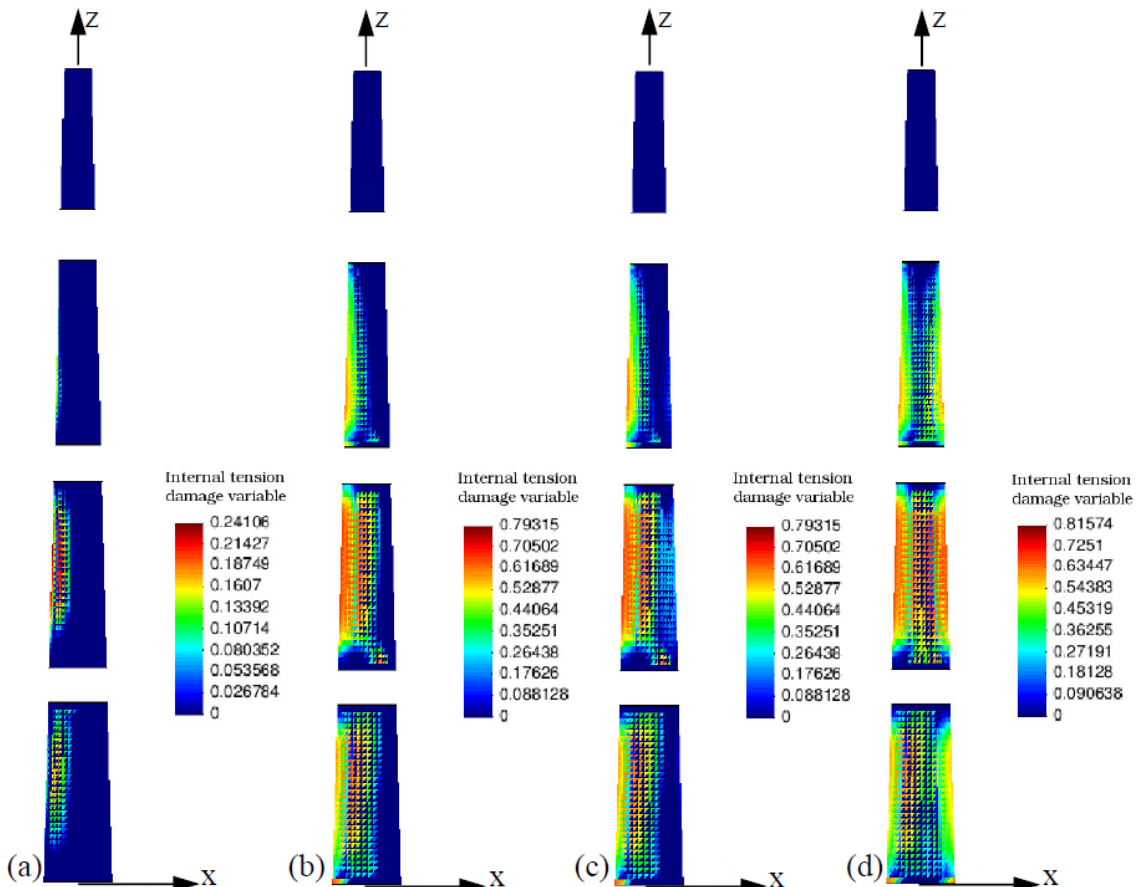


Figura 4-12 Variable de daño a tracción para el modelo estructural con junta constitutiva (material MC1 ). (a)  $dx=0.25$  m; (b)  $dx=0.425$  m; (c)  $dx=-0.25$  m; (d)  $dx=-0.425$  m, donde  $dx$  es el desplazamiento lateral en la corona de la torre.

### 4.3. Evolución del índice de daño global y su relación con las frecuencias naturales

#### 4.3.1. Descripción del problema

Las torres de aerogeneradores son estructuras sometidas a acciones dinámicas continuas debido a las cargas del viento y a las vibraciones producidas tanto por las turbinas como por la rotación de las aspas. Adicionalmente, estas estructuras pueden estar sometidas a eventos aleatorios, sismos o vientos de gran velocidad, lo que puede sobrecargar la estructura con el consecuente agrietamiento o daño local en el material de la torre. Este agrietamiento en función de su magnitud y localización se reflejará en una disminución de la rigidez global de la estructura y, por consiguiente, en un cambio en las frecuencias naturales. Este tipo de estructuras es particularmente sensible al cambio de su frecuencia natural fundamental, por estar sometida a cargas dinámicas. De hecho, un criterio en el diseño de este tipo de estructuras radica en controlar las frecuencias naturales de la torre evitando que estén dentro de los rangos de vibración de la turbina y

las aspas. Harte et al. [4] establecen que el conjunto fundación, torre, aerogenerador y rotor estará sometido a una excitación externa producida por:

- Turbulencia del viento,
- Periodo de excitación debido a la rotación de la turbina: frecuencia de la turbina  $f_{1p}$ ,
- Periodo de excitación debido al rotor y sus aspas: frecuencia del rotor  $f_{3p}$  (Caso del rotor con 3 aspas).

También establecen como criterio de diseño mantener las frecuencias naturales de la torre fuera de estos periodos de excitación, con un rango de tolerancia de  $\pm 10\%$ . En la Figura 4-13 se muestra el rango de frecuencias de excitación propuesto por Harte et al. [4]. Este criterio de diseño considera dos posibilidades: una es aumentar la rigidez de la estructura con lo que las frecuencias naturales estarán en el rango “stiff-stiff” de la Figura 4-13 (recomendado para torres de baja altura); la otra alternativa de diseño es mantener las frecuencias naturales de la estructura entre las frecuencias de excitación de la máquina, con lo que se está en la franja “soft-stiff” (recomendado para torres de gran altura).

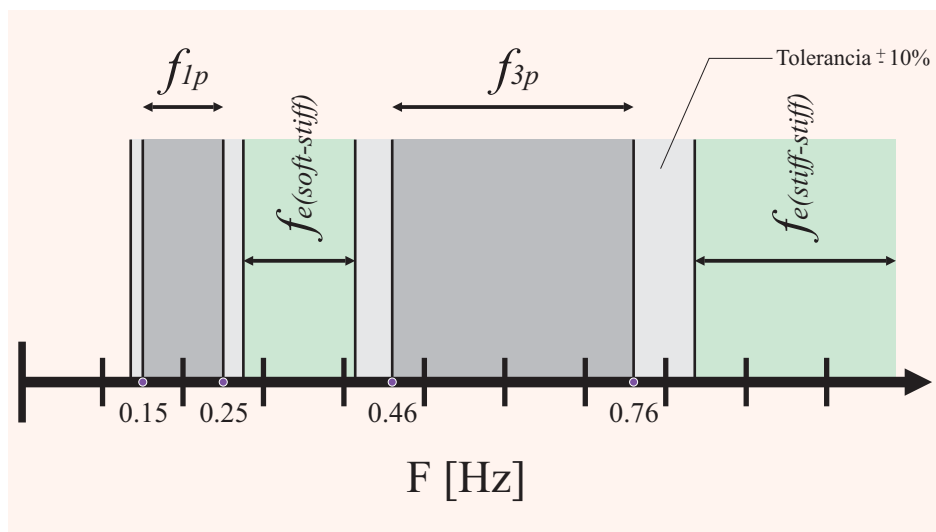


Figura 4-13. Rango de frecuencias de excitación para torres de aerogenerador propuesto por Harte et al. [4]. Figura modificada de la referencia antes citada.

Como se puede ver, el rango de seguridad para torres de gran altura es estrecho y, por lo tanto, es necesario asegurar que la estructura siga dentro de los rangos de frecuencias seguras luego de ser sometida a eventos extremos de viento o excepcionales de sismo o a cualquier otra carga que logre cambiar las condiciones de rigidez de la estructura.

Dado las anteriores consideraciones, se considera que la torre de hormigón armado para aerogeneradores es una estructura a la que se le puede aplicar la metodológica de

correlación entre la evolución del índice de daño global y la evolución de las frecuencias naturales. Se plantea esta metodología como una herramienta teórica para el futuro monitoreo y control de este tipo de estructuras.

A continuación se aplicarán las cinco etapas de la metodología propuesta para encontrar la curva de correlación entre el índice de daño global y las frecuencias naturales de la torre de aerogenerador.

#### 4.3.2. *Etapa 1: Elaboración del modelo numérico de la estructura*

La estructura analizada es la torre para aerogenerador descrita en el apartado 4.2.2, que tiene 77.4 m de altura y está conformada por 4 secciones prefabricadas de forma troncocónica.

**Geometría:** la torre se representa por un modelo geométrico que respeta la variación del diámetro en función de la altura, con diámetro en la base de 6.3 m y 2.4 m en la corona. El espesor de la base de la torre es de 0.25 m y en la corona de la torre se tiene 0.35 m de espesor, establecidos según los espesores de diseño; el espesor en el resto de la torre se consideró constante con un valor de 0.15 m tal como se puede ver en la Figura 4-2.

En las cotas 20.00 m, 40.00 m y 60.00 m existen juntas horizontales donde las piezas prefabricadas se unen mediante pernos verticales de acero (anclajes). Para representar geoméricamente estas juntas se dispuso un área horizontal que es común tanto al volumen superior como inferior. Además, se generaron volúmenes que cubren la longitud de los anclajes hacia los dos lados de la junta vertical. El diseño geométrico real considera recrecidos del espesor en esta zona. Para simplificar el modelo geométrico, el espesor de la pared en estas zonas se mantiene en 0.15 m.

La base de la torre se considera como una junta entre la torre y la cimentación. Se generaron volúmenes en la zona que cubre la longitud de los anclajes y, en esta zona, se consideró el recrecido del espesor respetando el espesor real de diseño. Para la corona de la torre se generaron volúmenes que representan la zona donde están los anclajes que unen el aerogenerador con la torre. Además se colocó un volumen en forma de anillo que representa la base del aerogenerador. Detalles de estas zonas se muestran en la Figura 4-14.

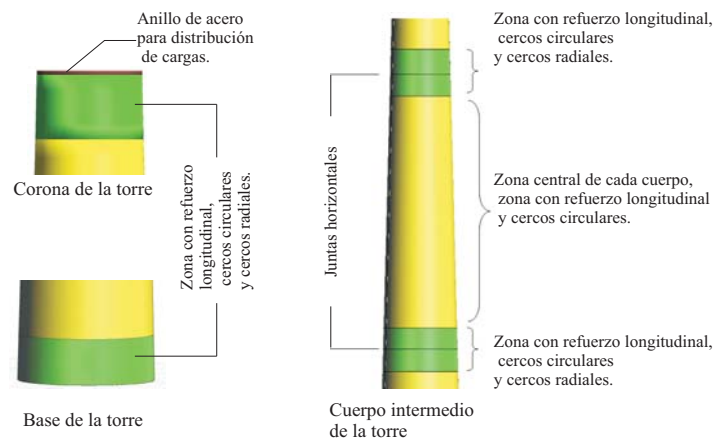


Figura 4-14. Detalles geométricos y de refuerzo del modelo analizado.

**Malla de elementos finitos:** se generó una malla de elementos hexaédricos de 8 puntos de integración. La malla está formada por 20256 elementos y 27136 nodos. En la Figura 4-15 se muestra la malla de elementos finitos con la que fue discretizada la estructura.

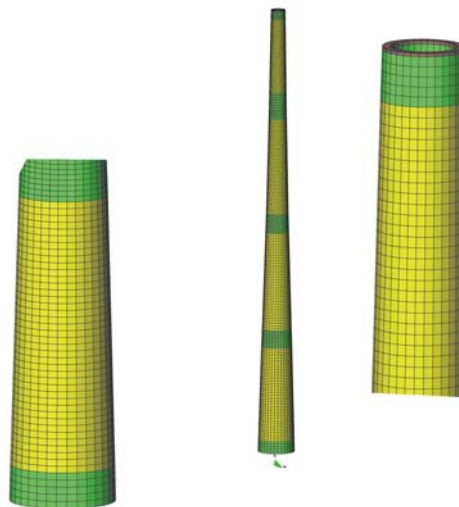


Figura 4-15. Malla de elementos finitos hexaédricos de 20256 elementos y 27136 nodos

**Materiales:** La torre está hecha de hormigón armado. A continuación se describe las propiedades del hormigón y del acero y la composición de los materiales compuestos que se usan en el modelo de la torre. Las propiedades de los materiales simples, según las especificaciones de diseño de la torre, son las siguientes:

Hormigón:                    HA50 ( $f_{ck} = 50 \text{ MPa}$ )  
 Acero:                         B500s ( $f_s = 500 \text{ MPa}$ )

A partir de esta información y de acuerdo con la norma europea Eurocode 2 [11] se han establecido las propiedades mecánicas para el hormigón según su resistencia nominal  $f_{ck}$  :

- Módulo de elasticidad:  $E_{ii} = 37 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$
- Tensión máxima de compresión:  $\sigma_{cm}^o = 58000 \text{ kN/m}^2$
- Tensión umbral de compresión donde inicia el daño:  $\sigma_c^o = 30000 \text{ kN/m}^2$
- Tensión umbral de tracción donde se inicia el daño:  $\sigma_t^o = 4100 \text{ kN/m}^2$
- Energía de fractura por unidad de área:  $G_f = 0.6 \text{ kJ/m}^2$

Las propiedades mecánicas del acero que se utilizan en el cálculo de esta estructura son:

- Módulo de elasticidad:  $E_{ii} = 200 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$
- Tensión de fluencia:  $f_{yk} = 500000 \text{ kN/m}^2$

El modelo constitutivo para el acero es de elasto-plasticidad clásica.

En el modelo numérico desarrollado, se utilizaron 4 materiales simples:

- Material simple 1: Hormigón simple. (MS1)
- Material simple 2: Barras de acero longitudinal. (MS2)
- Material simple 3: Barras de cerco tangencial. (MS3)
- Material simple 4: Barras de acero radial. (MS4)

Como ya se ha dicho, cada orientación de los refuerzos representa un material simple; así los refuerzos de acero se orientan según los ángulos de Euler  $\phi^{mat}$ ,  $\theta$  y  $\psi$  en una secuencia de rotación 3-1-3 (ver Figura 4-7); los ángulos de orientación de los materiales simples se presentan en la Tabla 4-3.

Tabla 4-3. Ángulos de Euler de los materiales simples.

Material simple	$\phi^{mat}$	$\theta$	$\psi$
Material simple 1	0	0	0
Material simple 2	0	90	91.4
Material simple 3	90	0	0
Material simple 4	0	0	0

Dependiendo del diseño estructural de la torre y del modelo geométrico, se han desarrollado 6 materiales compuestos, los cuales se han asignados a los diferentes

volúmenes que componen el modelo y, por consiguiente, a cada elemento finito que haga parte del respectivo volumen. Cada material compuesto se ha asignado a una parte específica de la torre en función del nivel y tipo de refuerzo. En la Tabla 4-4 se describe la distribución de los materiales compuestos en las diferentes partes de la torre y en la Figura 4-16 se muestra un esquema de dicha asignación.

Tabla 4-4. Asignación de materiales compuestos.

<b>Material compuesto</b>	<b>Parte de la torre a la cual se ha asignado cada MC</b>
MC-1 :	Paredes externas e internas en los cuerpos intermedios e inferiores.
MC-2 :	Volumen central, en el cuerpo intermedio.
MC-3 :	Paredes externas e internas, en los cuerpos superior e inferior.
MC-4 :	Volumen central, en los cuerpos superiores e inferiores de los tramos de la torre.
MC-5 :	Volumen central, en el cuerpo superior del tramo superior de la torre.
MC-6 :	Anillo de coronación.

El espesor de la pared de la estructura es de 0.15 m y la armadura de acero está en los dos lados de la pared. La pared se divide en 3 sectores de igual espesor, dos reforzados -los externos- y uno confinado. Así, el material compuesto 1 (MC1) representa el hormigón reforzado del lado externo y del lado interno de la pared. El MC1 está compuesto por MS1 + MS2 + MS3, es un material con una matriz y dos familias de fibras y, por lo tanto, es necesario modelizarlo según la teoría de mezclas serie/paralelo usando dos capa.

El material compuesto 2 (MC2) está conformado por un único material simple, hormigón simple MS1. El MC2 se asigna a los elementos finitos ubicados en el cuerpo intermedio, en el volumen central de la pared.

El material compuesto 3 (MC3) está destinado a los volúmenes externos e internos de los cuerpos superiores en los niveles de 1 a 4 que tienen un espesor de 0,05 m. Sin embargo, esta zona de la estructura cuenta con un refuerzo de confinamiento particular, tanto en sentido tangencial como radial, mientras que el refuerzo longitudinal se puede considerar en la misma proporción que el MC1. El MC3 está compuesto por MS1 + MS2 + MS3 + MS4, es un material con una matriz y tres familias de fibras y, por lo

tanto, es necesario modelarlo según la teoría de mezclas serie/paralelo usando tres capas.

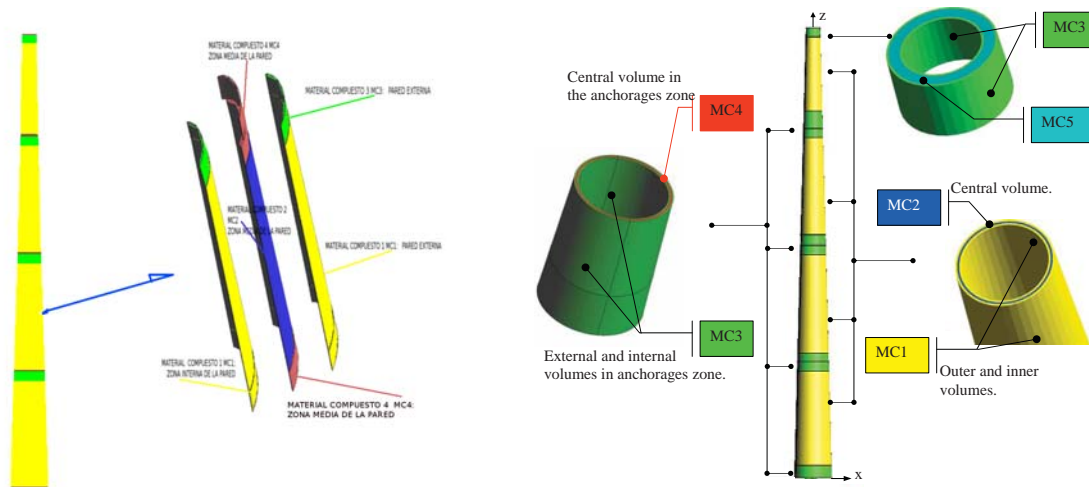


Figura 4-16. Esquema de asignación de materiales compuestos en la torre.

El material compuesto 4 (MC4) está asignado a los volúmenes centrales de los cuerpos superiores e inferiores, en los tramos de 1 a 3, y en el cuerpo inferior del tramo 4. El MC4 se utiliza en la zona de la torre donde se alojan los anclajes de las uniones horizontales de la torre, a excepción de la unión entre la torre y el aerogenerador. El MC4 está compuesto por MS1 + MS2 + MS4, es un material con una matriz y dos familias de fibras, por lo tanto es necesario modelarlo según la teoría de mezclas serie/paralelo usando dos capas.

El material compuesto 5 (MC5) está asignado a los volúmenes centrales del cuerpo superior del tramo 4. El MC5 se utiliza en la zona de la torre que contiene los anclajes de unión entre la torre y el aerogenerador. El MC5 está compuesto por MS1 + MS2 + MS3 + MS4, es un material con una matriz y tres familias de fibras y, por lo tanto, es necesario modelarlo según la teoría de mezclas serie/paralelo usando tres capas.

El material compuesto 6, está definido por el MS4, acero, y se utiliza en el anillo ubicado en la coronación de la torre.

Los tramos o secciones prefabricadas de la torre se enumeran de abajo hacia arriba, siendo 1 el tramo inferior 4 el superior.

#### 4.3.3. **Etapa 2: Determinación de las cargas que provocan el fallo de la estructura**

Las torres de aerogenerador están sometidas constantemente a fuerzas laterales debidas al viento y la magnitud de estas fuerzas depende principalmente de la velocidad del viento. Por lo tanto, las cargas que mayor posibilidad tiene de ocasionar un estado

de fallo en la estructura son las cargas laterales. Debido a esto, el análisis no lineal se realiza sometiendo la estructura a un desplazamiento incremental en la corona de la torre. Para respetar las condiciones de carga real se consideran también las fuerzas debidas al peso propio de la torre y al peso del aerogenerador. Así, las cargas se aplican en tres etapas de carga: 1) peso propio o de gravedad de la estructura  $W$ ; 2) fuerza vertical de 875 kN producida por el peso del aerogenerador, PAG. 3) a) desplazamiento horizontal incremental en la corona en sentido positivo del eje  $x$ ,  $DH^+ = 0.42$  m; b) desplazamiento horizontal incremental en la corona en sentido negativo del eje  $x$ ,  $DH^-$ , hasta tener un desplazamiento  $DH^+ = 0.0$ ; c) desplazamiento horizontal incremental en la corona en sentido negativo del eje  $x$ ,  $DH^-$ , hasta tener desplazamiento  $DH^- = -0.42$  m. El desplazamiento se aplica en la dirección del eje  $x$  por considerarse esa la dirección preferencial del viento.

#### 4.3.4. ***Etapas 3: Análisis numérico no-lineal de la estructura***

El modelo de la estructura se sometió a las cargas de análisis en una serie de pasos incrementales de carga. En la Tabla 4-5 se describe la secuencia de carga y el tipo de respuesta de la estructura en cada paso, donde se puede observar que en la primera parte existe una respuesta lineal de la estructura, cuando el desplazamiento lateral en la corona es menor a 0.25 m. Cuando el desplazamiento es de 0.25 m, la estructura entra por primera vez en comportamiento no lineal y, a partir de ahí, el índice de daño local crece para la fuerza en dirección  $x$  positivo. Luego hay una etapa de descarga donde no hay disipación de energía, por lo que las variables de daño local no crecen en esta zona y la respuesta tiene un componente de no linealidad debido a que existen elementos que han sufrido daño Sin embargo, la respuesta global de la estructura, al invertirse la dirección de la carga, es prácticamente similar a la mostrada en la primera parte de carga, tanto para la descarga como para la primera parte de la recarga. Esto se debe a que se está utilizando el nuevo modelo de daño diferenciado de tracción y compresión que permite que aquellos elementos que entraron en daño de tracción conserven su resistencia a compresión.

Como el índice de daño global depende de la relación entre la fuerza de reacción elástica y la fuerza real de la estructura (ver ecuación 3-18), para la etapa de descarga y la primera parte de recarga el índice de daño global es muy cercano a cero. Esto se explica nuevamente por el efecto que tiene el uso de dos variables de daño, una para tracción y otra para compresión, pues al invertir el sentido de la carga, los elementos



que sufrieron daño a tracción son capaces de resistir totalmente las tensiones de compresión.

Tabla 4-5. Pasos de carga aplicados en la etapa de carga 3.

Paso	Desplazamiento lateral [m]	¿Cálculo de frecuencia?	Índice de daño global	Tipo de respuesta
1	0.00	si	0.00	lineal
2	0.05	no		lineal
3	0.15	no		lineal
4	0.20	no		lineal
5	0.25	si	0.1361	no lineal
6	0.30	si	0.2027	no lineal
7	0.35	si	0.2726	no lineal
8	0.40	si	0.3400	no lineal
9	0.425	si	0.3708	no lineal
10	0.325	no		no lineal
11	0.225	no		no lineal
12	0.125	no		no lineal
13	0.025	no		no lineal
14	-0.01	si	0.0915	no lineal
15	-0.05	no		no lineal
16	-0.15	no		no lineal
17	-0.20	no		no lineal
18	-0.25	si	0.1704	no lineal
19	-0.30	si	0.2305	no lineal
20	-0.35	si	0.2950	no lineal
21	-0.40	si	0.3584	no lineal
22	-0.425	si	0.3879	no lineal

Los resultados proporcionados por el análisis no lineal son, principalmente, el índice de daño global y los tensores secantes equivalentes de cada elemento que está en comportamiento no lineal. Dichos resultados son obtenidos en aquellos pasos para los que se calcularan posteriormente las frecuencias y las formas modales y se escriben en ficheros secuencialmente una vez convergido el paso de carga.

Además de los anteriores resultados, esenciales para la aplicación de la metodología de correlación del daño con las frecuencias, otros resultados del análisis no lineal son la curva de comportamiento de la estructura, la evolución de las variables internas de daño a tensión y a compresión, los campos de desplazamientos, deformaciones y tensiones de la estructura en cada paso de carga. En la Figura 4-17 se muestra la curva de comportamiento de la estructura obtenida numéricamente con el nuevo modelo constitutivo de daño diferenciado a tracción y compresión. Los resultados numéricos son comparados con los resultados experimentados suministrados por la empresa

ACCIONA; sin embargo, por condiciones de confidencialidad, se muestran las fuerzas en valores relativos.

En la Figura 4-17 se puede observar que los resultados numéricos se ajustan muy bien a los experimentales, principalmente en la etapa de carga. En las etapas de descarga no es posible capturar los efectos de deformaciones permanentes que muestra la curva experimental, ya que en el modelo constitutivo utilizado para el hormigón no ha sido incluida una variable interna que permita considerar las deformaciones plásticas o permanentes de ese material.

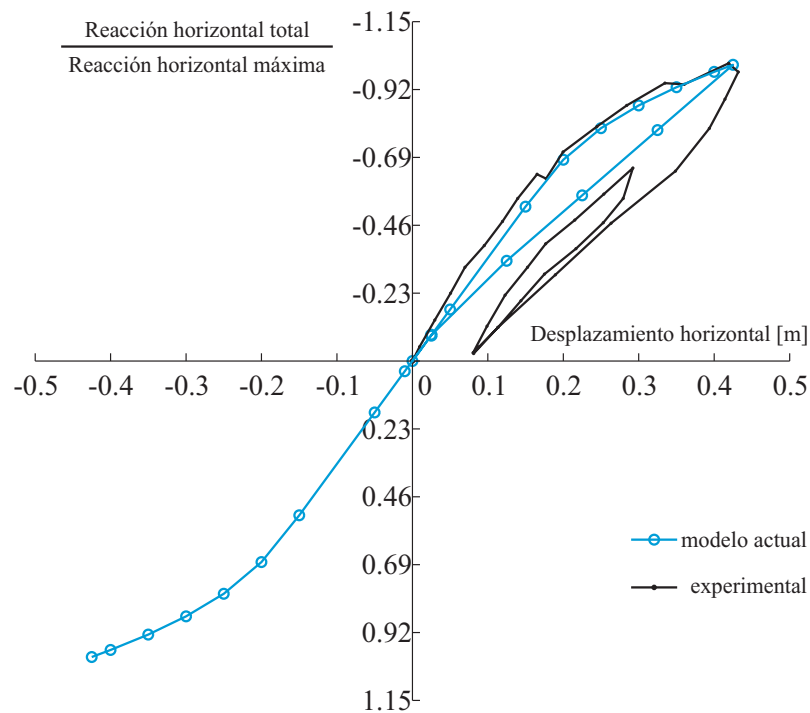


Figura 4-17. Curva de comportamiento de la estructura, resultados experimentales y numéricos obtenidos utilizando el modelo constitutivo de daño diferenciado a tracción y compresión.

La evolución de la variable de daño a tracción representa el agrietamiento sufrido por el hormigón debido a las solicitaciones hechas. Una de las ventajas de la metodología que se propone, es que puede ubicar las zonas de agrietamiento, daño o deterioro de la estructura a partir de los resultados del análisis no lineal.

Si bien el procedimiento no correlaciona directamente la ubicación del daño local y su magnitud con la evolución de la frecuencia, esta información es clave en los análisis de los cambios que presentan las formas modales de vibración o las magnitudes de las frecuencias. En la Figura 4-18 se muestra la distribución de daño a tracción para el final de la etapa de carga a) y para el final de la etapa de recarga b). En estas figuras se puede

observar que la diferencia entre el valor máximo de la variable de daño en los dos estados es del orden de  $10^{-4}$ . Sin embargo, el daño local se ubica en zonas diferentes, adecuadas a las cargas que se aplican. Para la etapa de carga el daño se ubica en la zona sometida a tracciones, con una concentración de los valores máximos alrededor del nivel 20 m. Esto se explica por el estrechamiento del diámetro de la estructura en ese nivel para permitir el libre movimiento de las aspas del aerogenerador. En la recarga se observa que, en la zona que inicialmente sufrió agrietamiento no se aumentan los valores del daño a tracción ya que, al invertirse la dirección de la carga, la zona está sometida a tensiones de compresión (efecto de cerrado de fisuras) mientras que la cara opuesta está sometida a acciones de tracción; es en esta cara donde crece la variable de daño a tracción. Dado que los valores del desplazamiento son iguales en los dos sentidos, la geometría de la torre es simétrica y la distribución de materiales es homogénea en función del diámetro se obtiene tiene valores similares del daño a cada lado de la torre.

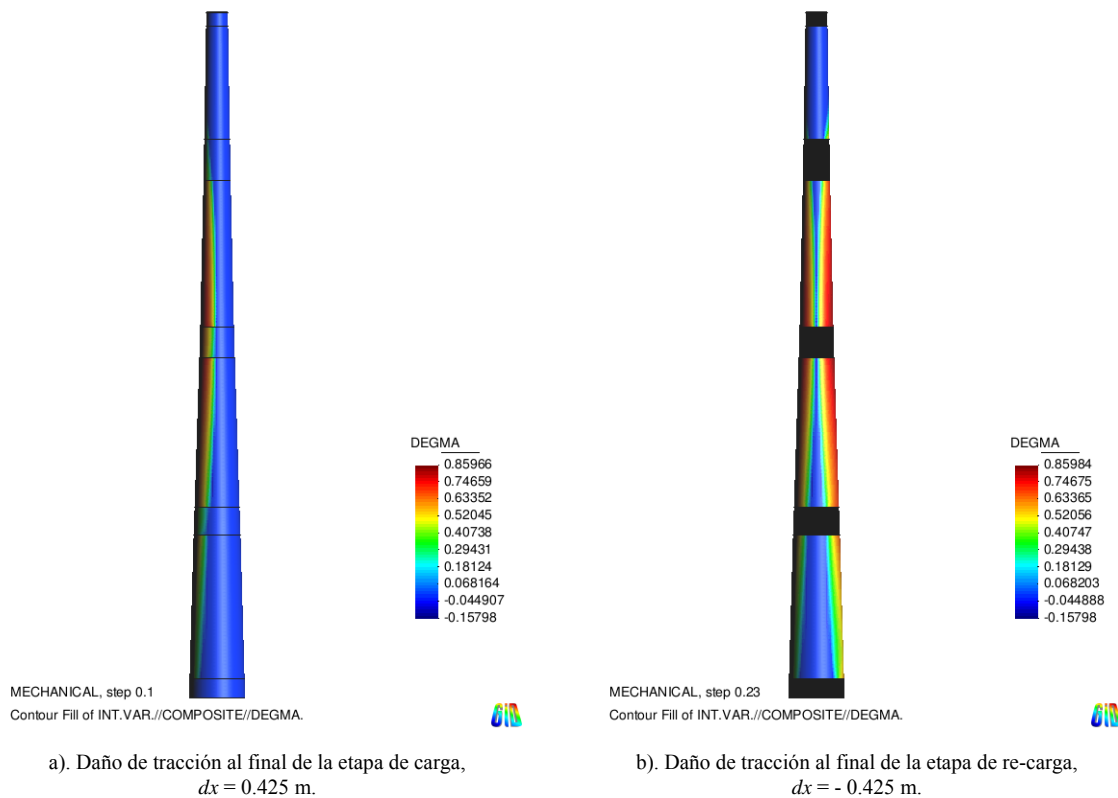


Figura 4-18. Evolución de la variable interna de daño a tracción.

Es pertinente resaltar que el desarrollo, implementación y aplicación del nuevo modelo constitutivo de daño direccionado permite modelizar el efecto de cierre de fisuras, y analizar estructuras como esta, donde la dirección de las acciones puede cambiar de un instante a otro. Adicionalmente, el efecto del deterioro de diferentes caras

de la estructura se ve reflejado en el cambio de las frecuencias naturales y de las formas modales de vibración como se mostrara más adelante.



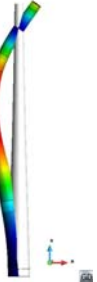
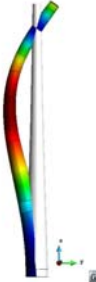




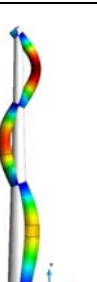
#### 4.3.5. **Etapa 4: Análisis numérico de las frecuencias naturales y de las formas modales de vibración de la estructura en estado no dañado y para las configuraciones dañadas de la estructura**

Las frecuencias naturales se calculan para un estado no dañado de la estructura, con lo que se obtienen los valores de referencia, y para cada uno de los estados dañados definidos en la Tabla 4-5 se calcula las nueve frecuencias más bajas. De acuerdo a lo explicado en el capítulo anterior, a partir del análisis no lineal se obtienen los valores de los tensores constitutivos en cada punto de Gauss, tanto el tensor constitutivo no dañado, como los tensores constitutivos secantes para cada uno de los elementos que sufrieron daño local. Por ejemplo, para el último paso de la etapa de carga, se obtendrán los tensores secantes equivalentes de aquellos elementos ubicados en la zona dañada (ver Figura 4-18a) y, con estos datos y los datos de masa de la estructura, se calculan las nueve frecuencias naturales más bajas de la estructura para ese estado dañado.

Este procedimiento permite tener en cuenta, en el cálculo de las frecuencias naturales de cada estado dañado, la ubicación del daño local. Nótese que cada estado dañado tiene una matriz de rigidez global diferente, donde queda contenida la magnitud y la ubicación del daño local. Los modos de vibración para las nueve frecuencias naturales más bajas se muestran en la Tabla 4-6.

El valor de la frecuencia fundamental de la torre en estado no dañado obtenida mediante el procedimiento propuesto es de  $f_1^0 = 0.595$  Hz. El valor de esta frecuencia obtenida por los procedimientos simplificados del Anexo B es de 0.68 Hz (véase las Tablas B-2 y B-3). Al comparar estos dos valores se puede concluir que los dos valores están en el mismo orden de magnitud, con una diferencia absoluta de 0.085 Hz. El mayor valor de la frecuencia natural, obtenida mediante los procedimientos simplificados se debe a que en dichos casos se consideró la torre con forma troncocónica, es decir, el diámetro se considero a través de una variación lineal en función de la altura. Mientras que, en el cálculo de la frecuencia natural mediante el procedimiento numérico se utilizó el diámetro real, que tiene un estrechamiento a partir del nivel 20 m para garantizar el libre movimiento de las aspas del rotor.

Tabla 4-6. Modos y frecuencias naturales de la torre en estado no dañado

Descripción	Representación gráfica	Valor frecuencia		Descripción	Representación gráfica	Valor frecuencia
Modo 1 plano x-z		$f_{1,xz}^0 = 0.595$ [Hz]		Modo 1 plano y-z		$f_{1,yz}^0 = 0.595$ [Hz]
Modo 2 plano x-z		$f_{2,xz}^0 = 2.8174$ [Hz]		Modo 2 plano y-z		$f_{2,yz}^0 = 2.8168$ [Hz]
Modo 3 plano x-z		$f_{3,xz}^0 = 7.3495$ [Hz]		Modo 3 plano y-z		$f_{3,yz}^0 = 7.3435$ [Hz]
Modo torsión		$f_{tor}^0 = 11.8153$ [Hz]		Modo mixto		$f_{mix}^0 = 12.744$ [Hz]
Modo 4 plano x-z		$f_{4,xz}^0 = 13.878$ [Hz]				

#### 4.3.6. *Etapa 5: Correlación entre el daño global y las frecuencias naturales*

Los resultados obtenidos para las diferentes frecuencias naturales en cada configuración permiten calcular las frecuencias relativas (ver la ecuación 3-20) y, por consiguiente, calcular la matriz de correlación entre las frecuencias relativas y el índice de daño global, tal como se estableció en la Tabla 3-1. Los resultados de las frecuencias relativas obtenidas para la estructura analizada para todos los pasos se muestran en la Tabla 4-7. Nótese que el índice de daño global es creciente en cada etapa del ciclo. En la etapa de carga empieza en 0.00 y crece hasta 0.3708 mientras que para la etapa de recarga empieza en 0.0915 y crece hasta 0.3879. Dado que, en el momento en el cual se inicia la recarga, la zona traccionada de la torre tiene daño de tracción, en el primer paso de la recarga el índice de daño global es diferente de cero. Al analizar la evolución del índice de daño global y la evolución de la frecuencia relativa en el modo I, en la etapa de carga, cuando el valor del índice de daño global llega al máximo de 0.3708 el valor de la frecuencia relativa en modo I es de 0.8039. En la etapa de recarga, cuando el índice de daño global alcanza el máximo valor de 0.3879, el valor de la frecuencia relativa en modo I desciende hasta 0.6548. La evolución de estas variables respecto al desplazamiento lateral en la corona de la torre se presenta en la Figura 4-19.

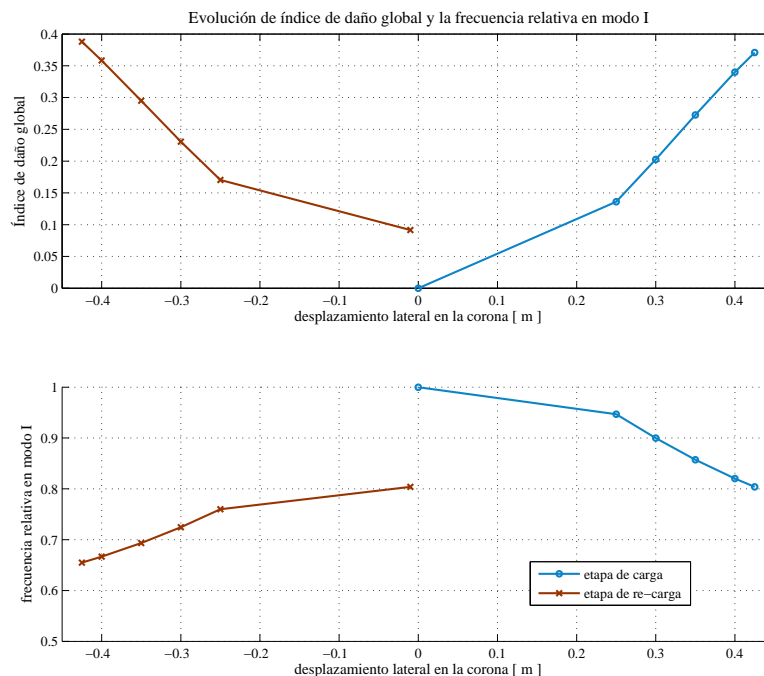


Figura 4-19. Evolución del índice de daño global y de la frecuencia relativa en el modo I en función del desplazamiento lateral.

Tabla 4-7. Matriz de correlación del índice de daño global y frecuencias relativas para la torre de aerogenerador

	Paso	Despla. [ m ]	Dg	$fr_{1xz}$	$fr_{1yz}$	$fr_{2xz}$	$fr_{2yz}$	$fr_{3xz}$	$fr_{3yz}$	$fr_{tors}$	$fr_{mixt}$	$fr_{4xz}$
Etapa de carga	1	0.000	0.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	5	0.250	0.1361	0.9467	0.9903	0.9569	0.9899	0.9631	0.9886	0.9515	0.9700	0.9626
	6	0.300	0.2027	0.8998	0.9751	0.9182	0.9754	0.9293	0.9723	0.8991	0.9438	0.9317
	7	0.350	0.2726	0.8573	0.9570	0.8815	0.9583	0.8962	0.9533	0.8453	0.9199	0.9022
	8	0.400	0.3400	0.8203	0.9373	0.8482	0.9398	0.8658	0.9332	0.7942	0.8984	0.8746
	9	0.425	0.3708	0.8039	0.9276	0.8331	0.9307	0.8516	0.9230	0.7705	0.8888	0.8619
Etapa de recarga	14	-0.010	0.0915	0.8039	0.9276	0.8331	0.9307	0.8516	0.9230	0.7705	0.8888	0.8619
	18	-0.250	0.1704	0.7598	0.9153	0.7991	0.9190	0.8213	0.9120	0.7450	0.8543	0.8268
	19	-0.300	0.2305	0.7244	0.8963	0.7687	0.9023	0.7931	0.8958	0.7171	0.8220	0.8011
	20	-0.350	0.2950	0.6933	0.8739	0.7401	0.8830	0.7660	0.8767	0.6872	0.7923	0.7767
	21	-0.400	0.3584	0.6666	0.8499	0.7144	0.8620	0.7412	0.8563	0.6572	0.7656	0.7539
	22	-0.425	0.3879	0.6548	0.8380	0.7027	0.8517	0.7298	0.8460	0.6427	0.7536	0.7434

Lo observado permite determinar que el índice de daño global propuesto es monótonamente creciente cuando la carga aplicada es creciente; sin embargo, para etapas de descarga este índice tiende a ser cero. Esto se debe a la dependencia que tiene este índice de la carga aplicada. Es decir, la evolución del índice de daño global está asociada a la evolución de dicha carga. En el caso analizado, al cambiar la dirección de la carga cambia la carga de análisis y es necesario analizar la evolución del índice de daño global para cada etapa del ciclo por separado, tanto para la etapa de carga como para la etapa de recarga. En la Figura 4-20 se muestran las evoluciones del índice de daño global y de la frecuencia relativa en modo I de vibración para diferentes pasos del ciclo de carga.

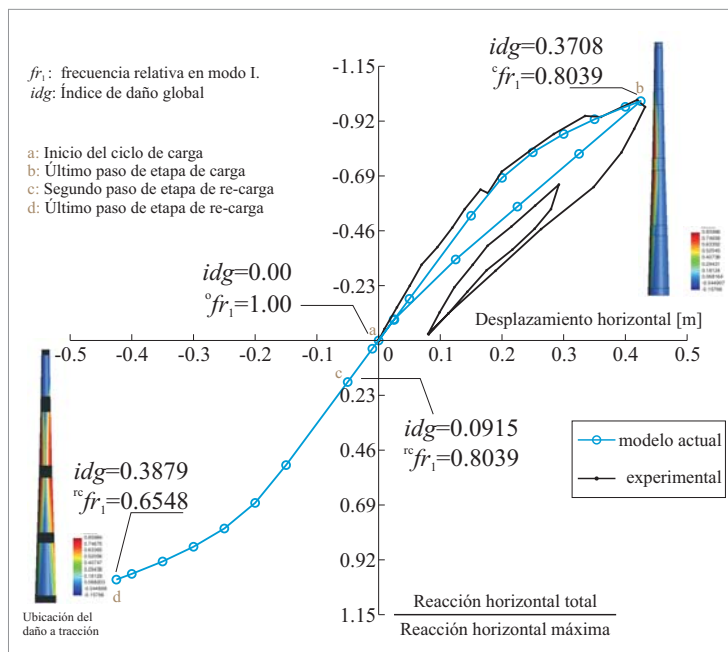


Figura 4-20. Evolución de la frecuencia relativa en modo I, de acuerdo a la curva de comportamiento de la estructura.

Las curvas que correlacionan el índice de daño global y la evolución de la frecuencia relativa para los diferentes modos de vibración se muestran, para la etapa de carga en la Figura 4-21 y para la etapa de recarga en la Figura 4-22. Las curvas para los diferentes modos de vibración muestran una tendencia lineal en la correlación de dichas curvas.

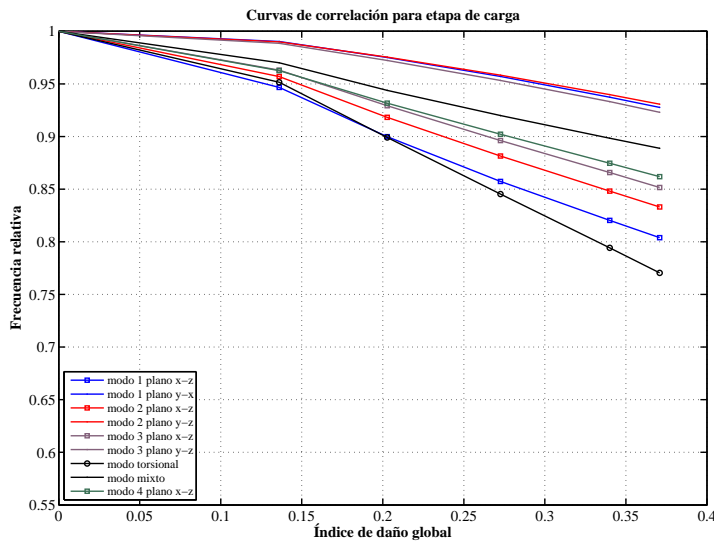


Figura 4-21. Curvas de correlación de índice de daño global y frecuencia relativa para la torre de aerogenerador. Etapa de carga.

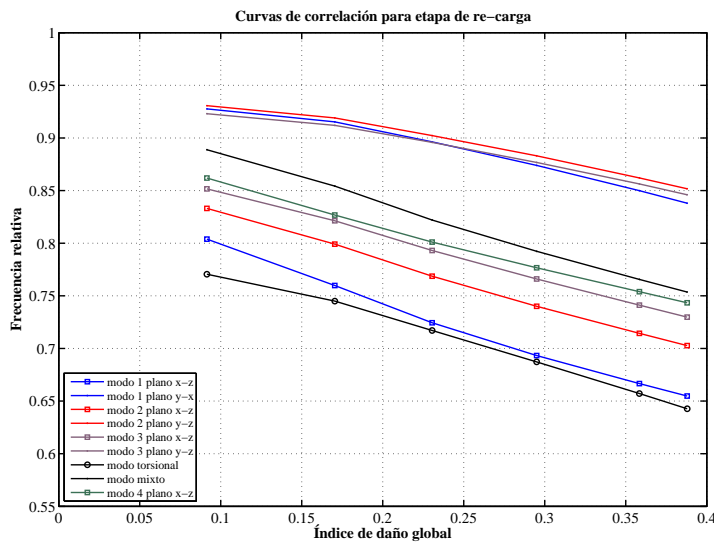


Figura 4-22. Curvas de correlación de índice de daño global y frecuencia relativa para la torre de aerogenerador. Etapa de recarga.

A partir de las curvas obtenidas se puede obtener una ecuación de correlación para cada modo de vibración. Normalmente, la frecuencia del modo I es la más baja y en edificios puede ser la más sencilla de medir en el campo. Por lo tanto, se ha realizado una regresión polinómica y se establece el grado del polinomio para el cual se encuentra el mejor ajuste entre el índice de daño global y la frecuencia relativa del modo I en el plano x-z.



En la Figura 4-23 se muestran las diferentes curvas de regresión para la etapa de carga, donde se observa que el mejor ajuste se logra con una regresión cúbica cuya ecuación es

$$fre_1 = 3.7929 * id^3 - 2.4357 * id^2 - 0.1445 * id + 1.0002 \quad (4- 1)$$

donde  $fre_1$  es la frecuencia relativa estimada en modo I para la etapa de carga, e  $id$  es el índice de daño global y es la variable independiente.

La metodología propuesta ofrece una herramienta numérica para estimar el índice de daño global de una estructura a partir de las mediciones de frecuencias naturales obtenidas en campo. Así, en el caso en el cual se conozca la variación de la frecuencia natural del modo I se puede calcular la frecuencia relativa y estimar el índice de daño global a partir de la ecuación

$$ide_1 = -46.068 * fr_1^3 + 122.7701 * fr_1^2 - 110.4908 * fr_1 + 33.7896 \quad (4- 2)$$

donde  $ide_1$  es el índice de daño global estimado a partir de la frecuencia relativa en modo I ( $fr_1$ ) para la etapa de carga. En esta ecuación la frecuencia relativa en modo I es la variable independiente.

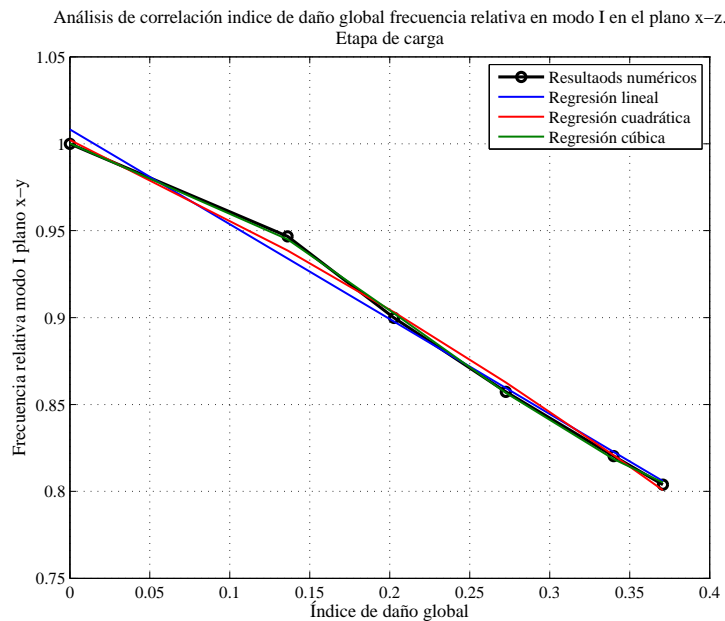


Figura 4-23. Correlación del índice de daño global y la frecuencia relativa en modo I en el plano x-z para la etapa de carga. Regresiones polinómicas.

Para la etapa de recarga se pueden obtener unas ecuaciones de correlación a partir de los análisis numéricos siguiendo el mismo procedimiento. En la Figura 4-24 se muestran las diferentes curvas de regresión para la etapa de carga, donde se observa que el mejor ajuste se logra con una regresión cúbica cuya ecuación es

$${}^{rc} fre_1 = 1.1072 * id^3 - 0.3885 * id^2 - 0.5310 * id + 0.8551 \quad (4-3)$$

donde  ${}^{rc} fre_1$  es la frecuencia relativa estimada en el modo I para la etapa de recarga e  $id$  es el índice de daño global y es la variable independiente.

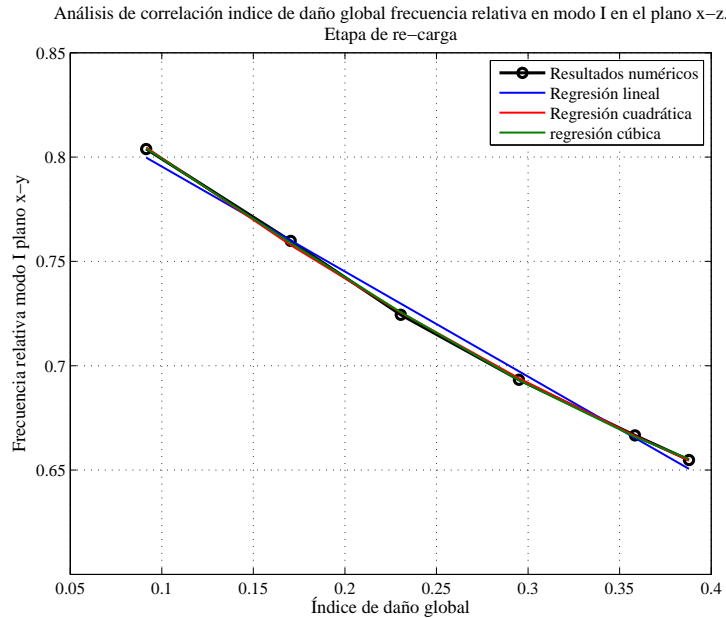


Figura 4-24. Correlación del índice de daño global y la frecuencia relativa en modo I en el plano x-z para la etapa de carga. Regresiones polinómicas.

La ecuación que permite estimar el índice de daño global a partir de la frecuencia relativa en el modo I para la etapa de re-carga es

$${}^{rc} ide_1 = -28.9266 * fr_1^3 + 66.3911 * fr_1^2 - 52.5135 * fr_1 + 14.4298 \quad (4-4)$$

donde  ${}^{rc} ide_1$  es el índice de daño global estimado a partir de la frecuencia relativa del modo I ( $fr_1$ ) para la etapa de recarga. En esta ecuación, la frecuencia relativa en modo I es la variable independiente.

Es importante resaltar que la validez de las ecuaciones 4-1 a 4-4 está limitada a la estructura analizada y al primer modo de vibración. Para los otros modos de vibración, es posible obtener ecuaciones de correlación similares a las ecuaciones 4-1 a 4-4. Decidir de cual o cuales modos se debe obtener dichas ecuaciones depende de un análisis particular que dependerá del tipo de estructura, de la carga de análisis y de la ubicación de las fisuras debidas a la evolución de la variable de daño local (de tracción o compresión). En el caso de un análisis de predicción del índice de daño global a partir de los datos de frecuencia obtenidos en el campo, se debe obtener la ecuación de correlación para la curva de frecuencia relativa de acuerdo al modo de frecuencia que se haya obtenido en campo.

#### **4.4. Análisis numérico de muros de pared delgada prefabricados de ferrocemento bajo carga lateral**

En este ejemplo se utiliza el modelo constitutivo de daño diferenciado a tracción y compresión propuesto en el capítulo 3, conjuntamente con la teoría de mezclas serie/paralelo, para realizar la modelación numérica de un muro de pared delgada prefabricado de ferrocemento sometido a carga lateral. Los resultados numéricos son comparados con resultados experimentales de la referencia [3], producto de una investigación experimental anterior realizada en la Universidad Nacional de Colombia.

Los muros prefabricados de ferrocemento son los elementos fundamentales de vivienda de bajo costo y que cumplen con requisitos de sismorresistencia; este material está siendo cada vez más usado en regiones de alta y mediana actividad sísmica. El ferrocemento se puede definir como un material compuesto conformado típicamente por mortero, malla de refuerzo distribuida y algunos redondos de refuerzo si son necesarios.

##### **4.4.1. Descripción de los muros y pruebas experimentales**

###### *a. Geometría*

Las dimensiones de los muros son 1.0 m de ancho, 2.0 m de alto y 20 mm de espesor.

###### *b. Descripción de los materiales*

Para la construcción de cada uno de los muros se utilizó mortero, malla hexagonal de alambre y barras de acero. El mortero se fabricó con cemento Portland tipo I, arena de uso habitual en la elaboración de concretos reforzados, agua y aditivo superplastificante, en las siguientes proporciones en peso: relación arena–cemento de 1:2, relación agua–cemento de 0.40, aditivo superplastificante 1% del peso del cemento (para mejorar la manejabilidad y penetrabilidad del mortero a través de las mallas). El refuerzo distribuido en la matriz de cemento consistió en 6 capas de malla hexagonal de 1<sup>1/4</sup>” de abertura colocada longitudinalmente y dos barras de 6.35 mm de diámetro (#2) en los extremos.

La resistencia a compresión del mortero ( $f'_{cm}$ ) a los 28 días fue 33 MPa, el módulo de elasticidad  $E_c$  del compuesto fue de 11.050 MPa, el módulo de elasticidad del refuerzo,  $E_r$ , es 81 GPa y el esfuerzo de cedencia fue  $\sigma_{ry}$  de 282 MPa. El esfuerzo a fluencia de las barras de 6.35 mm de diámetro (#2) fue de 420 MPa.

*c. Ensayo de carga estática lateral*

Los muros de ferrocemento de pared delgada están pensados, dentro de la vivienda, no sólo para resistir las cargas axiales, sino también las impuestas por los sismos. En el caso de los muros paralelos a la dirección del terremoto, éstos deben tener la capacidad de resistir las fuerzas de cortante que generan el sismo. Para determinar la resistencia a carga estática lateral se probaron tres muros. En la Figura 4-25 se muestra un esquema de la instalación usada para esta prueba.

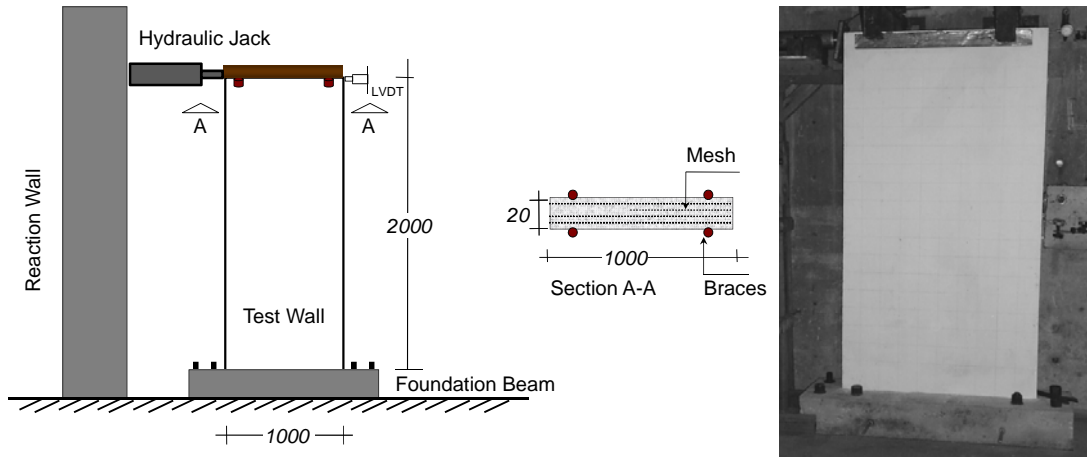


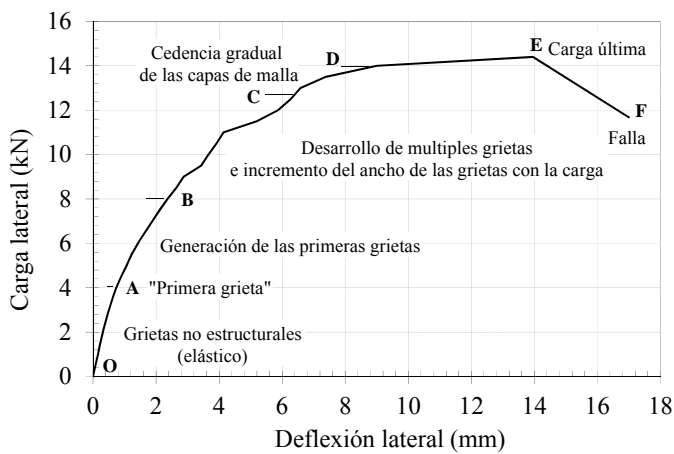
Figura 4-25. Ensayo de carga estática lateral (Todas las dimensiones en mm). a) Montaje del ensayo. b) Muro antes del ensayo

El muro fue empotrado a una viga de cimentación de hormigón reforzado, la cual, a su vez, está sujeta a una losa de carga de reacción. En la parte superior de los muros se colocaron arriostramientos laterales para evitar los posibles desplazamientos o distorsiones del muro fuera de su propio plano. Los desplazamientos horizontales inducidos por el actuador fueron medidos por medio LVDTs colocados en la parte superior del muro.

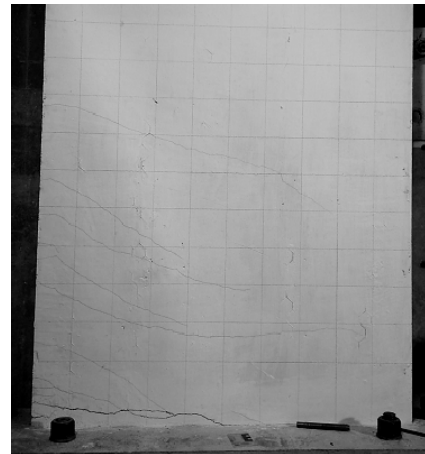
*d. Resultados experimentales de capacidad de carga estática*

En la Figura 4-26a se muestra la curva carga-desplazamiento lateral de los muros de ferrocemento de pared delgada sometidos a carga estática. Inicialmente, el comportamiento predominante fue a flexión, pero los muros están sometidos a un comportamiento combinado donde aparece la contribución de diferentes esfuerzos. En la Figura 4-26a se han identificado algunos estados característicos del ferrocemento bajo cargas que generan flexión. Hasta una carga de 4.0 kN (tramo OA), se observa un comportamiento elástico de los muros; no aparecen grietas apreciables a simple vista o grietas no estructurales. Para este tramo se obtuvo una rigidez inicial de 6.27 kN/mm. Para una carga de 4.0 kN aparece la primera grieta estructural (punto A). Luego la curva

carga-desplazamiento lateral pierde la linealidad (tramo AB, hasta 8.0 kN). A partir de este punto se producen las primeras grietas a lo ancho del muro. Con el aumento de la carga lateral en el tramo BC se desarrollan múltiples grietas, multiplicándose su ancho y su largo. La zona de plastificación de las mallas no está muy bien definida (tramo CD). La carga máxima promedio para los muros de ferrocemento de pared delgada fue de 14.4 kN, a un desplazamiento de aproximadamente 13.9 mm. La falla del panel se produjo a un desplazamiento horizontal máximo promedio de 17.0 mm. En todos los casos, la resistencia obtenida fue superior a la teórica calculada (12.6 kN) [12]. La resistencia a cortante ( $v_{peak}$ ) fue de 14.4 kN/m y el módulo secante a cortante,  $G'$ , fue de 8.7 kN/mm. La capacidad de demanda de ductilidad por desplazamiento lateral es  $\mu = \Delta u / \Delta cendencia = 4.25$ .



a) Curva carga estática –deflexión lateral



b) modo de fallo característico

Figura 4-26. Resultados del ensayo de carga estática lateral

En la Figura 4-26b se observa un muro después del ensayo de la carga estática. En la base del muro aparece un gran número de grietas a medida que se incrementa la carga lateral. Se observa un deslizamiento a cortante en la base del muro, fallo muy habitual en elementos con una relación ancho-altura menor que 2 ó 3 cuando están sometidos a este tipo de carga [13].

#### 4.4.2. Modelo numérico de los muros

##### a. Diseño de materiales compuestos

El ferrocemento es un material compuesto, formado por una matriz (mortero), y diferentes familias de fibras compuestas por la malla hexagonal y por las barra de refuerzo. En este ejemplo la malla hexagonal está colocada longitudinalmente lo cual significa que cada hexágono tiene dos fibras alineadas con el eje longitudinal del muro y

dos fibras a  $+60^\circ$  y otras dos a  $-60^\circ$  respecto al eje longitudinal del muro. En la Figura 4-27 se muestra la geometría de la malla hexagonal de refuerzo.

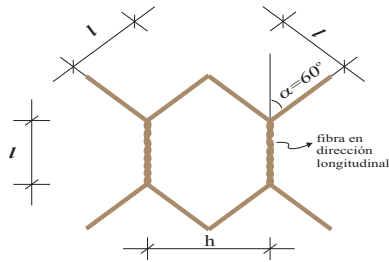


Figura 4-27. Características geométricas de la malla hexagonal.

Además, el muro cuenta con dos redondos de acero de 6.35 mm (redondos #2) de diámetro, localizadas en los extremos del muro, en la Figura 4-28 se muestra el esquema de refuerzo del muro

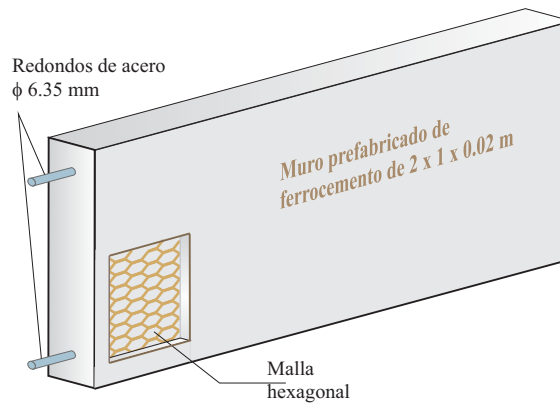


Figura 4-28. Esquema de refuerzo del muro prefabricado de ferrocemento de 2 x 1 x 0.02 m. (Sin proporción de escala)

Se han diseñado 3 materiales compuestos para la representación numérica del muro prefabricado de ferrocemento:

Material compuesto 1 (MC1): mortero simple el cual está asignado a los volúmenes ubicados en los extremos verticales del muro.

Material compuesto 2 (MC2): es un material compuesto de la matriz de mortero, la malla hexagonal y las barras de acero. Está asignado a los volúmenes verticales donde están localizadas las barras de acero. Este material se ha diseñado con 4 capas; en la Tabla 4-8 se muestra la participación volumétrica de cada capa y la participación volumétrica de cada material en su respectiva capa.

Tabla 4-8. Composición del material compuesto 2 (MC2)

Capa	% Capa	% Matriz	%Fibra malla	%Fibra acero	Descripción
1( $0^\circ$ )	81.8	90.31	0.00	9.69	Matriz + barra de acero
2( $0^\circ$ )	6.06	95.51	4.489	0.00	Matriz + fibra longitudinal
3( $+60^\circ$ )	6.06	95.51	4.489	0.00	Matriz + fibra a $+60^\circ$
4( $-60^\circ$ )	6.06	95.51	4.489	0.00	Matriz + fibra a $-60^\circ$

Material compuesto 3 (MC3): es un material compuesto por la matriz y la malla hexagonal y está asignado al volumen central del muro. Este material se ha diseñado con 3 capas. En la Tabla 4-9 se muestra la participación volumétrica de cada capa y la participación volumétrica de cada material en su respectiva capa. La asignación de los materiales compuestos al modelo geométrico se presenta en la Figura 4-29.

Tabla 4-9. Composición del material compuesto 3 (MC3)

Capa	% Capa	% Matriz	% Fibra malla	Descripción
1(0°)	33.34	99.0	1.00	Matriz + fibra longitudinal
2(+60°)	33.33	99.0	1.00	Matriz + fibra a + 60°
3(-60°)	33.33	99.0	1.00	Matriz + fibra a - 60°

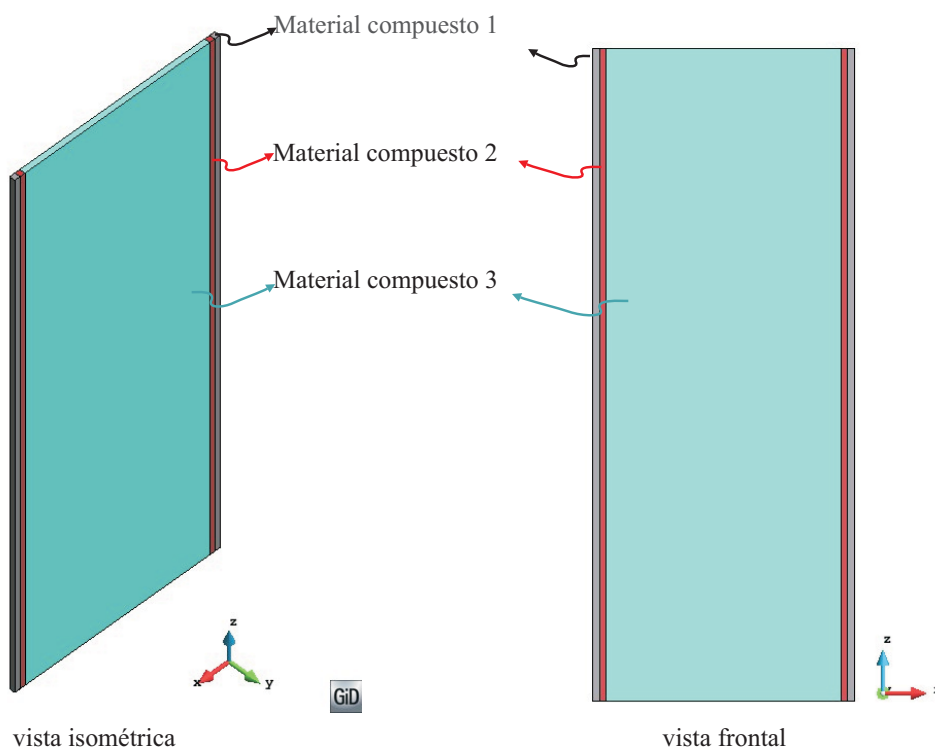


Figura 4-29. Asignación de materiales compuestos al modelo geométrico del muro prefabricado de ferrocemento.

*b. Discretización del muro en elementos finitos*

Para la discretización del muro prefabricado de ferrocemento se han definido 3 tipos de volúmenes diferentes a los cuales se les ha asignado un tipo específico de material compuesto. Estos volúmenes se discretizaron con una malla de elementos hexaédricos de 2000 elementos y 4182 nodos. Cada elemento tiene 8 puntos de integración y cada nodo tiene 3 grados de libertad. En la Figura 4-30 se muestra la malla empleada, donde se resalta en detalle la parte superior del muro.

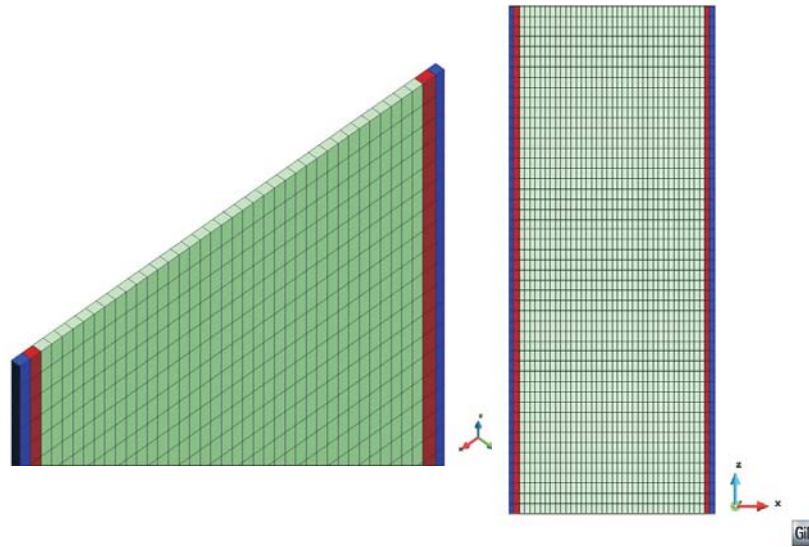


Figura 4-30. Malla de elementos finitos en las tres vistas. 2000 elementos hexaédricos y 4182 nodos.

*c. Cargas aplicadas*

El proceso de carga del muro prefabricado de ferrocemento se llevó a cabo en dos etapas de carga. En la primera se aplicó una carga vertical de 1.46 kN de acuerdo con la carga de confinamiento aplicada en la prueba de laboratorio. Esta carga se dividió uniformemente en los nodos de la corona. En los nodos de los extremos se aplicó la mitad de la carga de los nodos internos ya que tienen la mitad del área aferente. Esta etapa se ejecutó en un solo paso de carga. En la segunda etapa de carga se aplicó un desplazamiento lateral incremental en la corona en todos los nodos de la parte superior del modelo numérico. Esta etapa se ejecutó con 103 pasos de carga. Se consideró empotramiento perfecto en la base mediante la restricción de los tres grados de libertad en los nodos de la base para todas las etapas de carga.

**4.4.3. Resultados numéricos**

*a. Curva de comportamiento*

La curva numérica de comportamiento se ajusta muy bien a la experimental. En la Figura 4-31 se han superpuesto estas curvas. Se puede ver que la pendiente inicial de la curva experimental es sensiblemente mayor que la pendiente inicial de la curva numérica, es decir el espécimen real tiene mayor rigidez que el modelo de cálculo. Este ligero aumento de rigidez puede ser ocasionado por los elementos de apoyo y la aplicación de las carga utilizados en el laboratorio que no son incluidos dentro del modelo numérico. En los ensayos experimentales, el punto A (ver Figura 4-26 y Figura 4-31) corresponden a la aparición de la primera fractura, mientras que para la curva



numérica se remarca el punto a (ver Figura 4-31) como el último punto con comportamiento lineal. Estos dos puntos están muy cercanos, con lo cual se podría decir que el inicio de la fractura fue capturado por el modelo numérico. La resistencia máxima obtenida en el laboratorio está dada por el punto E, mientras que para la curva numérica está dada por el punto e. Estos dos valores son muy cercanos, lo que permite afirmar que el modelo numérico fue capaz de representar la resistencia máxima del muro prefabricado de ferrocemento de pared delgada.

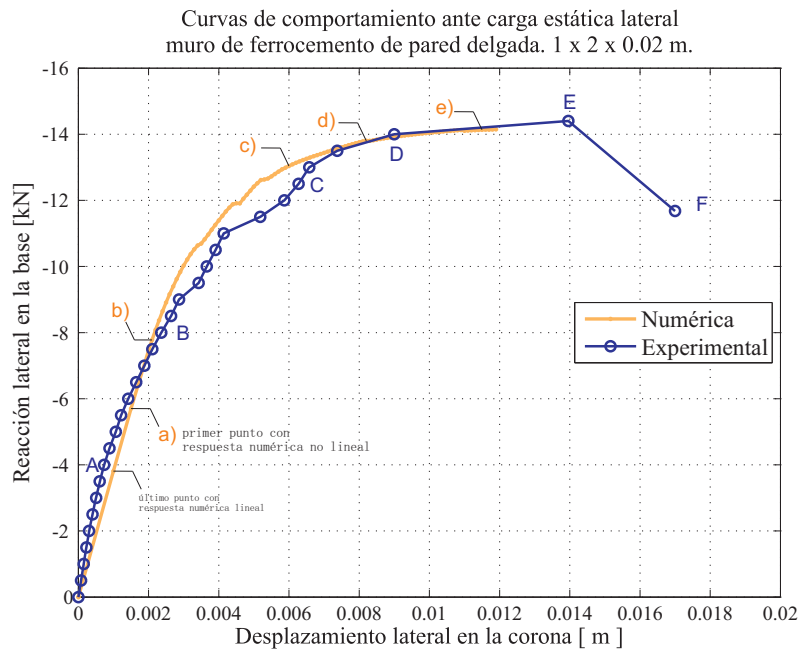


Figura 4-31. Curva de comportamiento ante carga estática lateral. Curvas numérica y experimental.

En la curva experimental se han marcado unos puntos clave (A, B, C, D, E, F) en la Figura 4-26. Para la curva numérica se han marcado los puntos (a, b, c, d, e) para los cuales se presentarán los resultados numéricos: la variable de daño a tracción, las deformaciones axiales y las tensiones. Los puntos de análisis numérico se han escogido procurando que estén lo más cercanos posible a los puntos remarcados en la curva experimental.

*b. Evolución del daño*

El daño de tracción inicia para un desplazamiento lateral en la corona del muro de 0.0015 m con un valor inicial 0.42907 (punto a) ubicado en la esquina inferior del muro que está sometida a tracciones. La evolución de la variable de daño a tracción se muestra en la Figura 4-32 donde se puede apreciar que el daño crece en la zona

traccionada del muro y, a partir de un desplazamiento de la corona de 0.006 m (punto c), existe una localización marcada del daño a diferentes alturas del muro.

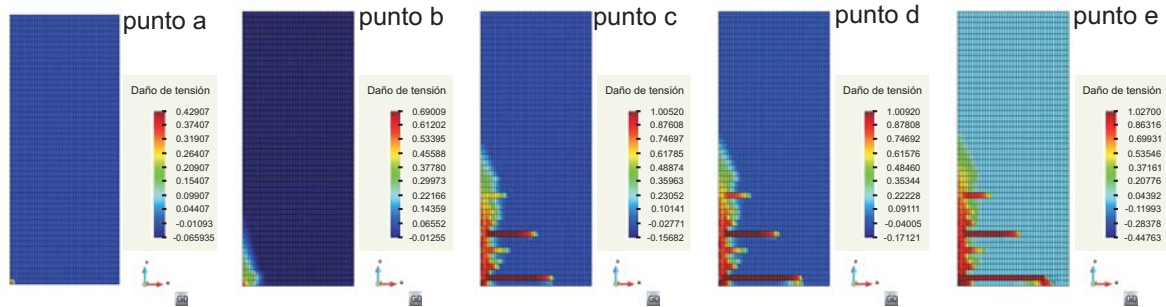


Figura 4-32. Evolución de la variable de daño a tracción para el muro de pared delgada prefabricado de ferrocemento

La zona en la cual la variable de daño tiene valores mayores coincide con el patrón de fisuras correspondiente a los ensayos de laboratorio (ver Figura 4-26b). En la Figura 4-33 se compara la configuración experimental de las grietas y la localización de la variable de daño. Los resultados numéricos corresponden con el desplazamiento lateral en la corona del muro de 0.0115 m (punto e), mientras que la representación gráfica de los resultados experimentales corresponde a la etapa final del experimento. Se puede ver que existe una gran concordancia entre la zona agrietada y la localización del daño.

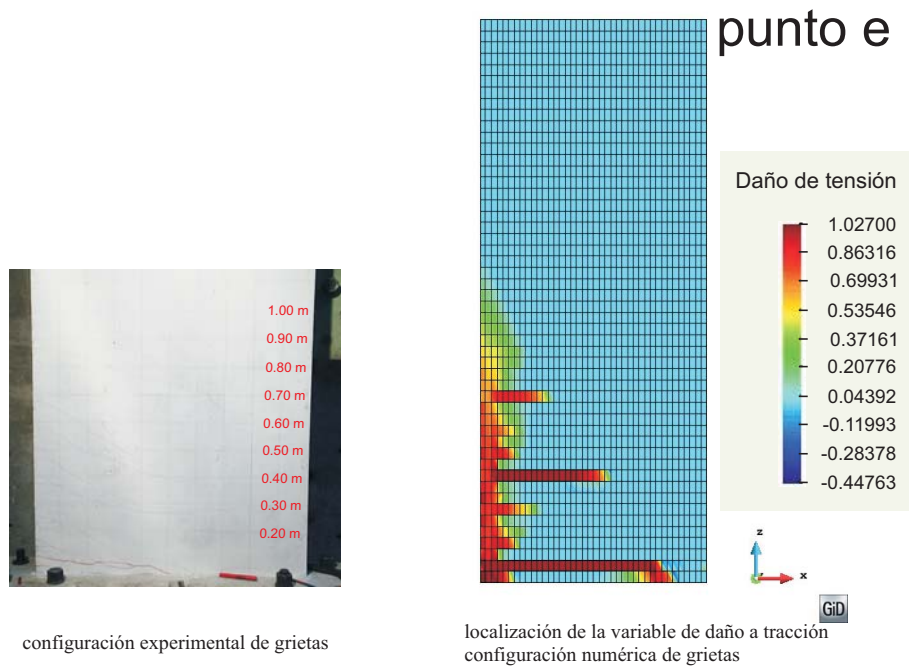


Figura 4-33. Comparación entre la configuración experimental de las grietas y la localización de la variable de daño. Resultados numéricos para un desplazamiento lateral de la corona del muro de 0.0115 m (punto e).

### c. Evolución del campo de deformaciones

El modelo constitutivo de daño diferenciado a tracción y compresión que se utilizó para modelizar el mortero del muro está basado en la mecánica de medios continuos.

Los fenómenos de discontinuidad como la aparición y crecimiento de grietas, en modelos basados en esta teoría, normalmente se representan mediante la localización de las deformaciones. Frecuentemente, la localización de las deformaciones coincide espacialmente con la localización de las zonas con mayor valor de la variable de daño. En la Figura 4-34 se muestra la evolución de la deformación vertical, donde se puede ver que, cuando empieza la evolución del daño (punto b), el campo de deformaciones verticales es relativamente simétrico, mientras que para el punto en el cual la pendiente de la curva de comportamiento empieza a disminuir (punto c), aparecen dos zonas de concentración de deformaciones verticales de tracción. La deformación de tracción es prácticamente 8 veces la deformación de compresión. Para los estados que corresponden al final de la carga (punto d y e), la localización de la deformación de tracción aumenta en la zona baja del muro que es justamente donde está la grieta más pronunciada en los resultados experimentales.

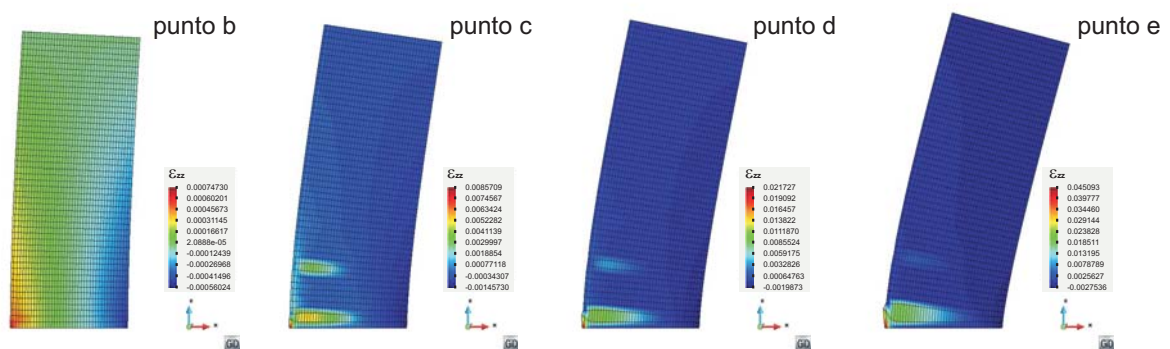


Figura 4-34. Evolución de la deformación en dirección vertical para el muro de pared delgada prefabricado de ferrocemento

#### d. Campo de tensiones

La modelización de los materiales compuestos utilizando la teoría de mezclas serie/paralelo permite obtener el campo de tensiones tanto en el material compuesto como en cada uno de los materiales componentes en la respectiva capa a la que esté asignado. En la Figura 4-35 se presenta la evolución del campo de tensiones verticales en los tres materiales compuestos (ver Figura 4-29) que conforman el modelo del muro analizado.

En el punto donde empieza la evolución de daño (punto b) se puede ver que las tensiones de tracción (7784.5 kPa) y compresión (9029.3 kPa) son relativamente simétricas; estos valores máximos se localizan en el material compuesto 2 MC2 (ver Figura 4-29) donde se tiene el redondo de acero como refuerzo predominante.

Para el punto en el cual la pendiente de la curva de comportamiento empieza a disminuir (punto c), los valores de las tensiones aumenta al más del doble respecto al

punto b; sin embargo, la distribución se conserva. La tensión vertical máxima para los puntos d y e de la curva de comportamiento (ver Figura 4-31) tiende a disminuir, manteniéndose la concentración de estas tensiones máximas en la zona donde está asignado el material compuesto 2, lo cual indica que el momento de flexión interno está desarrollado por los redondos de acero; adicionalmente, para el caso del punto e se puede ver que, en la zona asignada al material compuesto 3, MC3 (ver Figura 4-29), las tensiones tienen valores cercanos a cero; esto se debe a que el daño a tensión en los elementos de la parte inferior es alto (ver Figura 4-32) por lo cual la resistencia que puede ejercer esa parte del muro es baja.

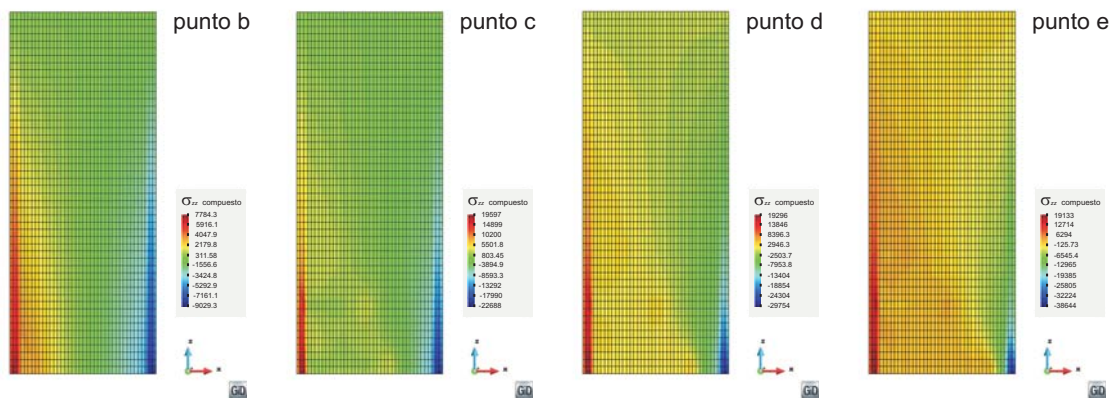


Figura 4-35. Evolución del campo de tensiones verticales (kPa) en los materiales compuestos que conforman el muro de pared delgada prefabricado de ferrocemento.

La distribución de las tensiones longitudinales en la barra de acero (fibra de la capa 1 del material compuesto 2) se muestra en la Figura 4-36 donde se puede ver que las tracciones tienen un valor de 420 MPa y las compresiones de -297 MPa.

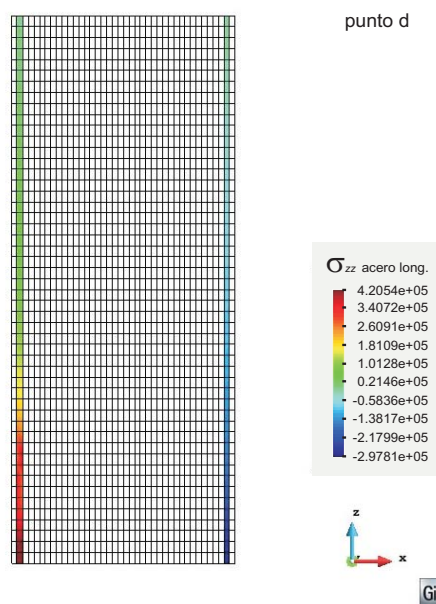


Figura 4-36. Campo de tensiones longitudinales en la barra de acero. Material de fibra en la capa 1 en el material compuesto 2, MC2. Valores en kPa.

La distribución de la tensión principal I, tanto en la matriz como en las fibras de cada capa que conforman el material compuesto 3, MC3, se muestra en Figura 4-37, donde se puede ver que la distribución y magnitud de esta tensión en la matriz para las tres capas son similares, mientras que la magnitud y la distribución de la tensión principal I para la fibra cambia en cada capa.

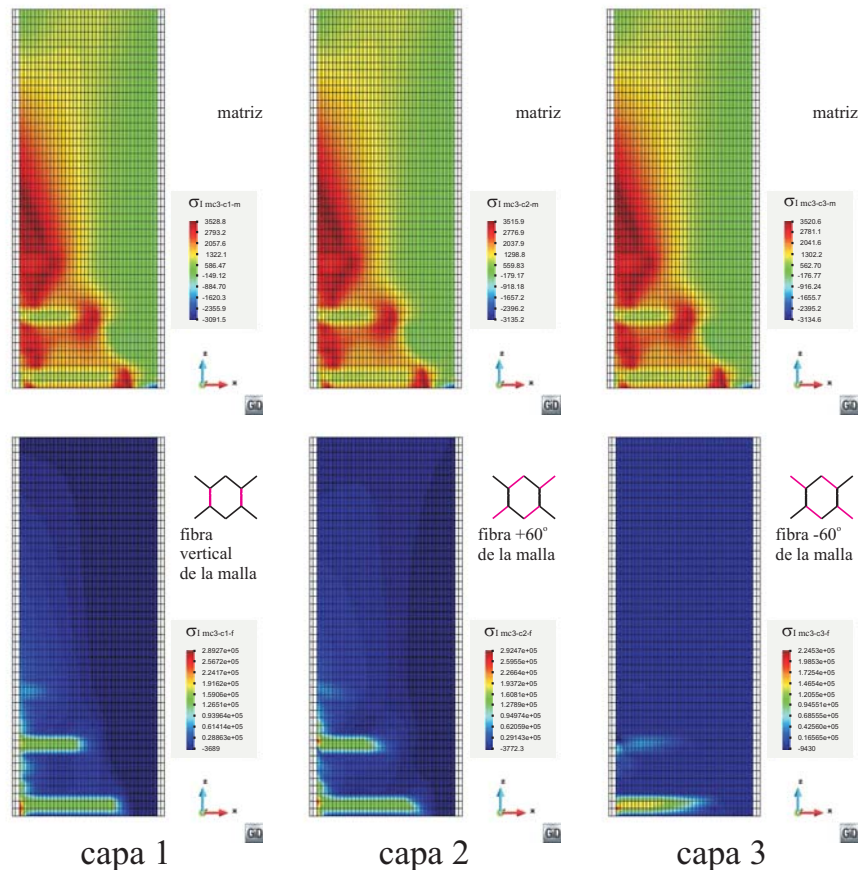


Figura 4-37. Distribución de la tensión principal I (kPa) en el material compuesto 3, MC3, correspondiente a un desplazamiento lateral de la corona de 0.0082 m (punto d).

Para la capa que contiene la fibra de la malla que está en dirección longitudinal, los valores máximos son de tracción y están concentrados en las zonas de mayor daño, debido a que la fibra toma los valores de tensión que la matriz ya no puede soportar. En la capa que contiene la fibra +60° (capa 2) los valores de tensión son mayores que en la capa 1, probablemente porque las cinemática de las cargas aplicadas hace que las tracciones actuantes y esta fibra formen un ángulo bajo. La capa que contiene la fibra a -60° tiene los menores valores de tensión principal I y se concentra en la parte baja del muro, coincidiendo con la zona de máximo daño.





---

## Bibliografía

- [1] R. Faria, J. Oliver, M. Cervera, A strain-based plastic viscous-damage model for massive concrete structures, *International Journal of Solids and Structures*, 35 (1998) 1533-1558.
- [2] J.A. Paredes, A.H. Barbat, S. Oller, A compression–tension concrete damage model, applied to a wind turbine reinforced concrete tower, *Engineering Structures*, 33 (2011) 3559-3569.
- [3] D. Bedoya-Ruiz, Estudio de resistencia y vulnerabilidad sísmicas de viviendas de bajo costo estructuradas con ferrocemento. Tesis doctoral, Universidad Politécnica de Cataluña, Barcelona, 2005.
- [4] R. Harte, G.P.A.G. Van Zijl, Structural stability of concrete wind turbines and solar chimney towers exposed to dynamic wind action, *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 95 (2007) 1079-1096.
- [5] C. Petcu, A. Marí-Bernat, Concept and design of tall reinforced and prestressed wind towers. Tesina, Universidad Politécnica de Cataluña, Barcelona, 2007.
- [6] X. Martínez, Micro mechanical simulation of composite materials using the serial/parallel mixing theory. Ph.D. Thesis, Universidad Politécnica de Cataluña, Barcelona, 2008.
- [7] F. Rastellini, Modelización numérica de la no-linealidad constitutiva de laminados compuestos. PhD Thesis, Universidad Politécnica de Cataluña, Barcelona, 2006.
- [8] PLCD-Manual, Non-linear thermo mechanic finite element oriented to PhD student education., in: Code developed at CIMNE, Barcelona, 2008.
- [9] [www.inneo.es/index.php/es/proceso-de-montaje.html](http://www.inneo.es/index.php/es/proceso-de-montaje.html), in, 27/10/2010.
- [10] J.J. Martínez, *Mecánica Newtoniana*, Ediciones UPC, Barcelona, 2001.
- [11] EUROCODE2, Desing of concrete structures, in: section 3.3.1; Tabla pg. 27, 1992.
- [12] A.E. Naaman, *Ferrocement and laminated cementitious composites*, Ed. Techno Press 3000, Michigan, 2000.
- [13] T. Pauly, M.J.N. Priestley, *Seismic design of reinforced concrete and masonry buildings*, Jhon Waley and Sons, INC., New York, 1991.

# Hoja en blanco

---

## 5. Conclusiones y futuras líneas de investigación

### 5.1. Conclusiones

El desarrollo de este trabajo de investigación ofrece varios aportes importantes.

La metodología para la correlación de la evolución del daño global y las frecuencias naturales para diferentes modos de vibración de estructuras de hormigón armado, es probablemente el principal aporte.

Los resultados obtenidos permiten confirmar la dependencia entre los niveles de daño y la magnitud de la frecuencia. La ubicación de daño local incide de forma diferente en cada modo de vibración, lo cual hace que las frecuencias de cada modo cambien con tendencias diferentes.

La utilización del tensor secante equivalente para la determinación de la matriz de rigidez a ser utilizada en el cálculo de las frecuencias y modos de vibración permite considerar la influencia de la ubicación y magnitud del daño local en la respuesta modal de la estructura.

El tensor secante equivalente que se utiliza en el análisis modal es el que corresponde al material compuesto, el cual es obtenido según lo establece la teoría de mezclas serie/paralelo. Esto, permite considerar la influencia del daño local de cada material componente del compuesto en la respuesta modal de la estructura.



Los daños ubicados en los puntos de inflexión de una forma modal de vibración ocasionan una menor disminución en los valores de la respectiva frecuencia, cuando el índice de daño global crece.

En los ejemplos analizados se encontró que la frecuencia del modo I está poco influenciada por la ubicación del daño local. Sin embargo es muy sensible a la magnitud del daño global. Esto permite concluir que una correlación entre la variación de la frecuencia del modo I y el índice de daño global permite estimar de forma confiable la magnitud del daño global de una estructura. Pero no es una buena alternativa para la determinación de la ubicación del daño local.

La metodología de propuesta permite relacionar el índice de daño global con la frecuencia natural de las estructuras en diferentes modos, con lo cual se puede trazar curvas o escribir ecuaciones de correlación. Adicionalmente se tiene la distribución del daño local como un resultado del análisis no lineal.

La curvas y ecuaciones de correlación entre el índice de daño global y la frecuencia (o frecuencia relativa) se pueden determinar para uno o varios modos de vibración, según las necesidades y tipos de análisis realizados.

El procedimiento propuesto hace posible que una determinada curva (o ecuación) de correlación permita estimar el índice de daño global de una estructura a partir de datos de frecuencia obtenidas de la instrumentación adecuada de la estructura.

Los materiales compuestos presentan un comportamiento anisótropo debido a la orientación de las fibras que los componen. En el desarrollo de esta investigación se ha desarrollado un algoritmo numérico que permita considerar la orientación real de cada fibra para estructuras de geometría no ortogonal. El uso de este algoritmo permite tener en cuenta el efecto de la orientación global de la fibra en la respuesta modal de estructuras cónicas y troncocónicas. Y por consiguiente el efecto anisótropo de los materiales compuestos, independiente de la ubicación global del punto de análisis.

Es bien sabido que la respuesta no lineal de una estructura es dependiente de las cargas aplicadas. Por lo tanto, los patrones de daño están asociados a esa carga y por consiguiente la respuesta modal también estará asociada a la carga.

La metodología propuesta es una herramienta teórica para la identificación de bajos niveles de daño en estructuras de material compuesto, como es el caso del hormigón armado. Esta metodología proporcionará una herramienta fundamental para los análisis de daño mediante los métodos de identificación de deterioro estructural basados en el análisis de vibraciones, ya que proporciona un amplio análisis del comportamiento

---

mecánico de las estructuras tanto en estado no dañado como dañado. Este análisis será la base de interpretación de los datos de instrumentación.

El valor del índice de daño global que ha sido utilizado en esta tesis es el resultado del deterioro local de los materiales de una estructura sometida a una determinada carga. El deterioro local determinado mediante la variable de daño local equivalente es una propuesta con una base constitutiva y racional. La propuesta para determinar los niveles de daño de una estructura da respuesta a las necesidades planteadas por los investigadores del área de los métodos de identificación de deterioro estructural basados en el análisis de vibraciones.

La metodología propuesta se ha aplicado en el desarrollo de esta tesis a estructuras de hormigón armado y modelos constitutivos de daño y elasto-plasticidad, sin embargo su aplicación se puede ampliar a materiales compuestos de diversos tipos.

Otro aporte importante de este trabajo de investigación es la formulación, implementación y validación de un nuevo modelo constitutivo de daño diferenciado a tracción y compresión pero controlado por una única función umbral de discontinuidad.

Los resultados obtenidos con este nuevo modelo constitutivo fueron validados con ensayos tracción axial, compresión axial, cortantes, cargas biaxiales y cargas multiaxiales complejas.

Los resultados obtenidos en los ejemplos de aplicación confirman que este nuevo modelo constitutivo es una herramienta útil para la modelación numérica de estructuras de hormigón armado.

El uso de una única superficie de discontinuidad en el modelo, permite analizar problemas con estados de tensiones complejos como un único problema mecánico acoplado, sin importar que sea esencial la descomposición aditiva del tensor de tensiones para el cálculo de la evolución de las variables de daño a tracción y a compresión.

La definición de un modelo constitutivo con dos variables de daño (daño de tracción y daño de compresión), permite tener en cuenta los efectos de las acciones cortantes en el análisis de problemas con estados de tensiones complejas. Además, garantiza la continuidad en la respuesta no lineal de materiales con resistencia de tracción diferente de la resistencia a compresión.

El modelo constitutivo propuesto permite la modelación numérica del fenómeno de apertura, cierre y reapertura de fisuras en estructuras de hormigón armado sometidas a ciclos de carga compuestos por tracción, compresión y tracción.

El daño a tracción está asociado a la apertura de fisuras de tracción sin pérdida de resistencia de la compresión en el material, mientras que el daño de compresión está asociado a los fenómenos de aplastamiento (“crushing”) con pérdida de resistencia a compresión y tracción en el material.

El modelo propuesto permite, desde la perspectiva de la CDM, capturar adecuadamente el modo mixto de fractura (CFM) a través de la evolución de las variables internas de daño a tracción y daño a compresión.

El modelo constitutivo propuesto fue también utilizado en la correlación de daño global y frecuencias naturales, debido a que la función de discontinuidad depende únicamente del tensor de tensiones efectivas, lo cual permite el cálculo adecuado del índice de daño local equivalente y por consiguiente el tensor constitutivo secante equivalente.

## **5.2. Futuras líneas de investigación**

Las líneas de investigación que se pueden desprender de esta investigación son tan diversas como interesantes. Se pueden agrupar en grandes áreas referentes a los temas de la tesis: aplicación de la metodología de correlación daño frecuencias al análisis de datos de instrumentación dinámica de estructuras. Determinación de la fatiga de geomateriales a través del análisis de la evolución de la frecuencia natural. Ampliación de la formulación del modelo constitutivo de daño diferenciado de tracción y compresión con variables de daño vectorial y/o tensorial. Ampliación de la formulación del modelo constitutivo de daño diferenciado de tracción y compresión incluyendo una o dos variables internas de deformación permanente, deformaciones permanentes de tracción y/o de compresión. Modificación de la teoría de mezclas serie paralelo para tener en cuenta los fenómenos de deslizamiento entre la fibra y la matriz en materiales compuestos.

A continuación se amplía las líneas de investigación propuestas.

Como se planteó en la introducción de la tesis, actualmente se ha incrementado el uso de procedimientos no destructivos para detectar los niveles de daño de estructuras existentes, y entre estos procedimientos está el denominado método de identificación de deterioro estructural basados en el análisis de vibraciones. Este método se basa en la instrumentación y análisis de frecuencias de respuesta de las estructuras existentes ante una determinada excitación puntual (explosión o pulso de carga) o ambiental (viento,

---

circulación de vehículos etc.). A partir del análisis de las señales de entrada y salida emiten un concepto del estado de daño de la estructura, normalmente estos conceptos no son contrastados con análisis mecánicos no-lineales y modales de la respuestas de la estructura. Por lo tanto se considera que una línea abierta de investigación, es comparar y calibrar los resultados de los análisis no-lineales y modales de la metodología propuesta con los análisis propios de los métodos de detección de daño estructural basados en vibraciones. Algunos de estos métodos utilizan algoritmos genéticos y redes neuronales como técnicas matemáticas de análisis de los datos. La metodología o algunos de sus procedimientos, son susceptibles de ser adaptados para que sean capaces de entrenar a estos algoritmos genéticos y lograr herramientas de diagnóstico del nivel de daño de un alto nivel de eficiencia y precisión. Siendo este un importante campo de investigación aplicada para una futura línea de investigación.

En los análisis dinámicos de estructuras de hormigón armado, y en general de materiales compuesto con matriz frágil, un aspecto importante a considerar es la deformación permanente (plasticidad), por ser un mecanismo importante que no contempla el modelo propuesto.

# Hoja en blanco

## A. Determinación numérica de la frecuencia natural y las formas modales de vibración

La premisa fundamental de este trabajo es que tanto los modos propios de vibración como el daño están condicionados por la rigidez y la masa de la estructura. La masa de las estructuras es un valor que se puede considerar constante mientras que la rigidez es el valor que cambia debido al deterioro de los materiales.

Como resultado del análisis no lineal de una estructura se puede obtener las matrices de rigidez de la estructura tanto para la configuración no dañada, en el campo elástico como para diferentes configuraciones dañadas, cada una con grado de daño global diferente. Con esta información se calcula numéricamente, para cada configuración de la estructura, un número determinado de frecuencias naturales y las correspondientes formas modales, a través de la técnica numérica denominada *método de iteración por subespacios*.

Dicho método, también conocido como SIM<sup>1</sup>, es un método eficiente en el análisis de problemas de autovalores. Este método fue desarrollado por el profesor Klaus-Jürgen Bathe en 1971 [1] y, desde entonces, diferentes autores han desarrollado variaciones de este método. Kim et al. [2] enumera algunas de estas. A continuación se presenta un resumen del método de iteración por subespacios [1].

---

<sup>1</sup> SIM: Sigla del nombre del método en inglés, Subspace Iteration Method

El método consiste en tres pasos:

- Establecer  $q$  vectores iterativos iniciales con la condición de que  $q > p$ , siendo  $p$  el número de valores y vectores propios a calcular.
- Usar la inversión iterativa simultánea de los  $q$  vectores y el análisis Ritz para extraer las mejores aproximaciones para los valores y formas propias de los vectores  $q$ .
- Una vez lograda la convergencia en las iteraciones, se usa la secuencia “*Sturm*” [1] para verificar que los valores calculados son efectivamente los que se buscaban.

El método recibe este nombre porque equivale a iterar en un subespacio de  $q$  dimensiones. Una de las grandes ventajas de este método frente a otros es que con unas pocas iteraciones ya se observan buenas aproximaciones a los resultados esperados.

El objetivo básico es encontrar los  $p$  valores propios menores y sus correspondientes vectores, que satisfacen la ecuación

$$K\Phi = M\Phi\Lambda \quad (\text{A-1})$$

donde  $\Lambda = \text{diag}(\omega_i^2)$  es la matriz diagonal que contiene los el cuadrado de la frecuencia natural para cada uno de los  $p$  modos buscados y  $\Phi = [\varphi_1 \ \varphi_2 \ \cdots \ \varphi_i \ \cdots \ \varphi_n]$ , es la matriz que contiene en cada una de sus columnas los vectores que determinan cada uno de los  $p$  modos de vibración buscados.

Los vectores propios o vectores modales  $\varphi_i$  deben cumplir las condiciones de M-ortogonalidad y K-ortogonalidad dadas por

$$\varphi_i^T M \varphi_j = \delta_{ij} \quad (\text{A-2})$$

$$\varphi_i^T K \varphi_j = \omega^2 \delta_{ij} \quad (\text{A-3})$$

La idea fundamental del método se basa en la propiedad de los vectores modales de formar una base **M-ortonormal**  $p$ -dimensional de los subespacios menos dominantes de las matrices de rigidez y masa, **K** y **M**, que se denomina  $\Omega_\infty$ .

La solución de la iteración con  $p$  vectores linealmente independientes se puede considerar como una iteración en un subespacio. Los vectores iniciales representan un subespacio  $\Omega_1$  y las sucesivas iteraciones lo modifican hasta llegar a un subespacio final

$\Omega_\infty$ , dentro de una tolerancia fijada. El número de iteraciones final dependerá de la similitud, o la diferencia, entre el primer subespacio ( $\Omega_1$ ) y el final ( $\Omega_\infty$ ), y no en las similitudes de cada vector iterativo con el vector de valores propios. Es en este aspecto donde reside la ventaja de este método, ya que es más sencillo encontrar un subespacio  $p$ -dimensional cercano a  $\Omega_\infty$  que encontrar  $p$  vectores, cada uno de los cuales ha de ser cercano al vector propio. Además, la convergencia del subespacio es todo lo que se necesita para la convergencia total, y no la convergencia de cada vector de la iteración.

El primer paso y uno de los más importantes, es determinar una serie de vectores iniciales para empezar a iterar ( $X_1$ ). Es importante escoger estos vectores de manera adecuada para reducir el número de iteraciones. Existen series de casos especiales donde la convergencia a la solución exacta se produce en una sola iteración; por ejemplo: en el caso que se pueda realizar condensación estática o si las matrices de rigidez y masa son ambas diagonales.

Sin embargo, en los casos prácticos no se encuentran, por lo general, matrices con estas propiedades, pero la observación de estos casos especiales ha permitido desarrollar una estrategia para encarar los casos generales.

### **A.1. Vectores iterativos iniciales**

Los vectores iniciales deben escogerse de tal manera que afecten en mayor medida a los grados de libertad asociados a valores de masa grandes y rigideces pequeñas. Un algoritmo que se ha demostrado adecuado para la elección de estos vectores es el siguiente [1]: La primera columna de  $M \bullet X_1$  es simplemente la diagonal de  $\mathbf{M}$ . Las columnas restantes, excepto la última, serán vectores unitarios de valor +1 en el grado de libertad con la menor relación  $k_{ii}/m_{ii}$ , donde  $k_{ii}$  y  $m_{ii}$  son los elementos de la diagonal principal de las matrices de rigidez y masa respectivamente. La última columna es un vector aleatorio.

Este primer subespacio es una buena aproximación al espacio  $\Omega_\infty$  requerido pero, cuanto más se parezca  $M \bullet X_1$  a la forma descrita por el algoritmo, menos iteraciones harán falta para llegar a la convergencia. En la práctica, el número de iteraciones dependerá de las matrices de rigidez y masa, del número de valores propios que se deseen calcular y de la precisión exigida.



## A.2. Iteración en el subespacio

El siguiente algoritmo, denominado *iteración en el subespacio*, encuentra una base ortogonal de vectores en  $\Omega_{k+1}$  y calcula los vectores propios en un paso cuando  $\Omega_{k+1}$  converge a  $\Omega_\infty$ .

Para  $k=1, 2, \dots$ , iterar desde  $\Omega_k$  hasta  $\Omega_{k+1}$ :

$$K\bar{X}_{k+1} = M\bar{X}_k \quad (\text{A-4})$$

Buscar las proyecciones de las matrices  $K$  y  $M$  en  $\Omega_{k+1}$ :

$$\begin{aligned} K_{k+1} &= \bar{X}_{k+1}^T K \bar{X}_{k+1} \\ M_{k+1} &= \bar{X}_{k+1}^T M \bar{X}_{k+1} \end{aligned} \quad (\text{A-5})$$

Una vez encontradas las proyecciones de las matrices, se determina el subespacio vectorial  $q$ -dimensional formado por los  $q$  vectores propios. Para esto es necesario resolver el problema de valores y vectores propios

$$K_{k+1} Q_{k+1} = M_{k+1} Q_{k+1} \Lambda_{k+1} \quad (\text{A-6})$$

donde  $Q_{k+1}$  es la proyección en el subespacio de los  $q$  vectores propios, y  $\Lambda_{k+1}$  es una matriz diagonal que contiene  $q$  valores propios. Luego se encuentra una aproximación mejor para los valores propios

$$X_{k+1} = \bar{X}_{k+1} Q_{k+1} \quad (\text{A-7})$$

Siguiendo los procedimientos de convergencia planteados por Bathe [1], se tendrá que:

$$X_{k+1} \rightarrow \Phi \text{ y } \Lambda_{k+1} \rightarrow \omega^2 \text{ para } k \rightarrow \infty \quad (\text{A-8})$$

## A.3. Convergencia

El criterio de convergencia considera que en la iteración  $k$  los valores propios aproximados calculados son  $\lambda_i$  con  $i=1, 2, \dots, p$ . Se alcanza la convergencia cuando se cumpla

$$\left| \lambda_i^{(k)} - \lambda_i^{(k-1)} \right| \leq \text{tolerancia} \text{ con } i=1, 2, \dots, p \quad (\text{A-9})$$

El valor de la tolerancia es  $10^{-2s}$  cuando se desea que los valores propios tengan una precisión de  $2s$  dígitos. Por ejemplo, si se itera hasta que los márgenes sean menores

que  $10^{-5}$ , se puede ver que los valores propios tienen una precisión de al menos cinco dígitos y en los valores más pequeños normalmente se observa una precisión mayor. A pesar de que la iteración se realiza con  $q$  vectores, la convergencia solamente se mide para las  $p$  aproximaciones obtenidas menores.

El último paso en el proceso iterativo en el subespacio es verificar que los valores y vectores propios pedidos han sido calculados, ya que la ecuación (A- 1) se satisface para cualquier par de valor y vector propio.

La iteración converge si los vectores iniciales ( $\mathbf{X}_1$ ) no son ortogonales a ninguno de los vectores propios pedidos. El método descrito anteriormente ha demostrado ser satisfactorio en la práctica, pero no existe ninguna demostración matemática que asegure que la convergencia está garantizada. Cuando la ecuación de la tolerancia ha sido satisfecha, se puede estar seguro que los valores y vectores propios han sido calculados. Finalmente se comprueba que los valores obtenidos cumplen la secuencia “*Sturm*” del polinomio característico del problema  $K\Phi = \lambda M\Phi$  sobre un “shift  $\mu$ ”, donde  $\mu$  es justamente un valor ligeramente superior al último valor propio ( $\lambda_p$ ) calculado. La secuencia “*Sturm*” asegura que, en la factorización Gaussiana de  $\mathbf{K} - \mu\mathbf{M}$  en  $\mathbf{LDL}^T$ , el número de elementos negativos de  $\mathbf{D}$  es igual al número de valores propios menores que  $\mu$ . Para el caso considerado de un valor ligeramente superior al último valor propio, la matriz  $\mathbf{D}$  debería contener  $p$  valores negativos. Se ha de tener en cuenta que, para aplicar de manera correcta la secuencia “*Sturm*”, se ha de utilizar un valor de  $\mu$  teniendo en cuenta el hecho que los valores propios calculados no son exactos sino aproximaciones.

La robustez del método permite asegurar que el algoritmo del subespacio converge de manera efectiva en la inmensa mayoría de los casos. Sin embargo, la velocidad de convergencia no está garantizada en ningún caso, por lo que es importante poner un límite al número de iteraciones que se le permita que haga el algoritmo.

## Bibliografía

- [1] K.-J. Bathe, Finite Element Procedures, Prentice Hall, Nueva Jersey, 1996.
- [2] J.-T. Kim, N. Stubbs, Nondestructive Crack Detection Algorithm for Full-Scale Bridges, Journal of Structural Engineering, 129 (2003) 1358.

# Hoja en blanco

## **B. Análisis simplificado de la frecuencia fundamental de la torre del aerogenerador**

### **B.1 Introducción**

Se realizó el cálculo teórico de la frecuencia natural de la estructura, este cálculo se realiza mediante dos opciones: considerando el sistema como un péndulo invertido con una única masa en el extremo (aerogenerador) y considerando el sistema torre-aerogenerador como una gran viga empotrada. En los dos casos se utiliza los resultados de los cálculos numéricos obtenidos con el PLCD, y las características geométricas y mecánicas de la estructura. El objeto inmediato de este cálculo es establecer un rango de magnitudes de la frecuencia natural de la estructura en su primer modo fundamental, como un punto de partida hacia el cálculo numérico de las frecuencias naturales de la estructura para diferentes modos de vibración.

#### **B.1.1 Determinación de la Rigidez secante de la estructura**

A partir de un análisis numérico de elementos finitos se obtiene la curva de comportamiento de la torre de aerogenerador. Se aplicó una serie de desplazamientos laterales incrementales y se encontró la fuerza horizontal necesaria para producir el respectivo desplazamiento, los resultados se reportan en la Tabla B-1.

Tabla B-1. Resultados de la curva de comportamiento obtenidas del cálculo numérico no lineal de la torre.

<b>Desplazamiento</b> [metros]	0.00	0.05	0.16	0.20	0.24	0.28	0.32	0.36	0.40	0.42
<b>Fuerza Horizontal</b> [kN]	0.00	80,96	256,64	310,82	349,60	378,49	401,62	421,14	438,22	446,09

Al relacionar estos dos resultados se puede calcular la rigidez secante para cada paso de desplazamiento.

$$K_i^s = \frac{\text{Fuerza horizontal}}{\text{Desplazamiento horizontal}} \quad (\text{B- 1})$$

$K_i^s$  es la rigidez secante en el paso de carga  $i$ .

### B.1.2 Determinación del Daño Global de la Estructura

La rigidez inicial  $K_o^s$  (estado no dañado) se puede calcular para un desplazamiento de 0.05 metros. A partir del paso 3 con un desplazamiento de 0.16 metros, la rigidez secante empieza a ser menor que la rigidez inicial. Así, para cada desplazamiento se tiene una rigidez secante (estado dañado) denominada  $K_i^s$ . Calculados estos valores se encuentra el daño global de la estructura  $D_i$  para cada paso de carga lateral, como:

$$D_i = 1 - \frac{K_i^s}{K_o^s} \quad (\text{B- 2})$$

## B.2 Cálculo de la Frecuencia natural considerando solo la masa del aerogenerador (Via 1)

Los resultados obtenidos de los análisis estáticos de la torre permiten obtener la rigidez secante para los diferentes estados de daño global de la estructura. Utilizando esta rigidez y la masa del aerogenerador se puede calcular la frecuencia fundamental angular de la torre, para un sistema no amortiguado de péndulo invertido.

$$\omega = \sqrt{\frac{K_i^s}{m}} \quad ; \quad \left[ \frac{\text{rad}}{\text{seg}} \right] \quad (\text{B- 3})$$

el periodo será:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad ; \quad [seg] \quad (B- 4)$$

y finalmente la frecuencia en Herz será:

$$f = \frac{1}{T} \quad ; \quad [Hz] \quad (B- 5)$$

Los resultados obtenidos se muestran en la Tabla B-2.

Tabla B-2. Cálculo aproximado de la frecuencia fundamental, considerando únicamente la masa del aerogenerador.

Desplazamiento [metros]	Fuerza Horizontal [kN]	Rigidez. [kN/m]	Daño global	Masa Aero.	$\omega = \sqrt{\frac{K_i^s}{m}}$ [rad]	f [Hz]
0,00	0,00	1619,14	<b>0,00</b>	89,29	4,26	<b>0,68</b>
0,05	80,96	1619,14	<b>0,00</b>	89,29	4,26	<b>0,68</b>
0,16	256,64	1603,99	<b>0,01</b>	89,29	4,24	<b>0,67</b>
0,20	310,82	1554,09	<b>0,04</b>	89,29	4,17	<b>0,66</b>
0,24	349,60	1456,67	<b>0,10</b>	89,29	4,04	<b>0,64</b>
0,28	378,49	1351,76	<b>0,17</b>	89,29	3,89	<b>0,62</b>
0,32	401,62	1255,08	<b>0,22</b>	89,29	3,75	<b>0,60</b>
0,36	421,14	1169,83	<b>0,28</b>	89,29	3,62	<b>0,58</b>
0,40	438,22	1095,55	<b>0,32</b>	89,29	3,50	<b>0,56</b>
0,42	446,09	1062,12	<b>0,34</b>	89,29	3,45	<b>0,55</b>

### B.3 Cálculo de la Frecuencia natural considerando la masa del aerogenerador y la masa de la torre (Via 2)

Dada la forma troncocónica de la torre del aerogenerador la masa de la estructura NO es uniformemente distribuida, esto lleva una complejidad adicional para calcular la frecuencia fundamental considerando su propia masa y la masa del aerogenerador. Para realizar este cálculo se utiliza el método energético de Rayleigh para el cálculo de la frecuencia fundamental no amortiguada de sistemas continuos<sup>1</sup>. El método se basa en igualar la energía potencial máxima del sistema  $V^{\max}$ , y la energía cinética máxima del sistema  $T^{\max}$ , es decir no hay variación de la energía total del sistema. Considerando la estructura de la torre como una gran viga empotrada se puede definir la energía potencial máxima como:

<sup>1</sup> Blanco E, Oller S and Gil 2007 *Análisis Experimental de Estructuras*; (BARCELONA CIMNE) p 270-83

$$V^{\max} = \frac{1}{2} K (u^{\max})^2 \quad ; \quad K = \frac{3EI}{L^3} \quad (\text{B- 6})$$

donde  $E$  es el módulo de Young del material,  $I$  es la inercia de la sección transversal que es función de  $z$ , y  $L$  es la longitud de la estructura. Para este caso en el cual existe una fuente de excitación y además la inercia es variable la energía potencial máxima se puede expresar como:

$$V^{\max} = \frac{1}{2} A_o^2 \int_0^L EI \left( \frac{\partial^2 \xi(z)}{\partial z^2} \right)^2 dz \quad (\text{B- 7})$$

donde  $\xi(z)$  es una función normalizada del desplazamiento lateral de un punto de la torre ubicado en  $z$ . Utilizando la energía complementaria se tiene la expresión de la energía potencial máxima como:

$$V^{\max} = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M^2(z)}{EI(z)} dz \quad (\text{B- 8})$$

Por otro lado la energía cinética máxima del sistema torre-aerogenerador está expresada como:

$$T^{\max} = \frac{1}{2} A_o^2 \omega_o^2 \left[ \int_0^L m_b(z) \xi(z) dz + m \xi(0) \right] \quad (\text{B- 9})$$

donde  $m_b(z)$  es la masa de la estructura en cada  $z$ ;  $m$  es la masa del aerogenerador;  $\xi(0)$  es el valor de la función normalizada de desplazamiento evaluada en el sitio donde está el aerogenerador.

Al igualar las energías máximas potencial y cinética del sistema  $V^{\max} = T^{\max}$  se tiene la expresión de la frecuencia angular fundamental  $\omega_o$  como:

$$\omega_o = \frac{1}{A_o} \sqrt{\frac{\int_0^L \frac{M^2(z)}{EI(z)} dz}{\int_0^L m_b(z) \xi(z) dz + m \xi(0)}} \quad (\text{B- 10})$$

En la ecuación anterior se puede ver que para su solución es necesario definir la función normalizada de desplazamientos  $\xi(z)$ , el desplazamiento máximo  $A_o$  y la ley

de momentos  $M(z)$  que se obtienen con el método de Castigliano<sup>2</sup>. La variación de la inercia y el diámetro a lo largo de la longitud de la torre se considera lineal

$$I(z) = I_c + \frac{I_b - I_c}{L} z \quad (\text{B- 11})$$

$$d(z) = d_c + \frac{d_b - d_c}{L} z \quad (\text{B- 12})$$

donde  $I_c$ ,  $d_c$  son, respectivamente, la inercia y el diámetro en la corona de la torre.  $I_b$ ,  $d_b$  son, respectivamente, la inercia y el diámetro en la base de la torre.  $L$  es la longitud, el cero de la coordenada  $z$  para este análisis se considera en la corona de la torre. De igual forma se define la función de variación de la masa de la torre  $m_b(z)$  como:

$$m_b(z) = \pi d(z) t \rho \quad (\text{B- 13})$$

donde  $t$  es el espesor de la pared de la estructura la cual se considera constante de 0.15 metros y  $\rho$  es la masa por unidad de volumen del material.

Aplicando las anteriores ecuaciones se puede calcular la frecuencia natural en modo fundamental para la estructura no dañada. El módulo de elasticidad inicial del material compuesto se obtiene como:

$$E_o = 0.97 E_{\text{hormigon}} + 0.03 E_{\text{acero}} \quad (\text{B- 14})$$

Para determinar la frecuencia natural fundamental para un valor de daño global  $D_i$  cualquiera es necesario tener en cuenta que las ecuaciones antes planteadas están hechas para el campo elástico, sin embargo, como una aproximación se puede aceptar su uso en el campo no-lineal considerando casos sucesivos de elasticidad reducida. Es necesario calcular la reducción del módulo de elasticidad del material en función del daño global  $D_i$ . Se supone que la geometría de la estructura no cambia y que la pérdida de rigidez es debida al cambio del módulo del hormigón, y en consecuencia del cambio del módulo del compuesto. Así se puede expresar el cambio del módulo del material compuesto como:

$$E_d^i = E_o (1 - D_i) \quad (\text{B- 15})$$

---

<sup>2</sup> Blanco E, Oller S and Gil 2007 *Análisis Experimental de Estructuras*; (BARCELONA CIMNE) p 270-83



Es pertinente resaltar que estos resultados son aproximados y sirven como un punto de referencia para comparar los futuros resultados numéricos de las frecuencias de la torre en sus diferentes modos de vibración. Estos resultados son obtenidos sin considerar amortiguamiento.

Tabla B-3. Cálculo aproximado de la frecuencia fundamental, considerando la masa del aerogenerador y la masa de la estructura distribuida en la longitud.

Desplazamiento [metros]	Daño global	$E_d^i$ [kN/m <sup>2</sup> ]	$\omega$ [rad]	$f$ [Hz]
0,05	<b>0,00</b>	42190000	4,28	<b>0,68</b>
0,16	<b>0,01</b>	41795353	4,26	<b>0,68</b>
0,20	<b>0,04</b>	40495013	4,19	<b>0,67</b>
0,24	<b>0,10</b>	37956581	4,06	<b>0,65</b>
0,28	<b>0,17</b>	35222856	3,91	<b>0,62</b>
0,32	<b>0,22</b>	32703599	3,76	<b>0,60</b>
0,36	<b>0,28</b>	30482471	3,63	<b>0,58</b>
0,40	<b>0,32</b>	28546880	3,52	<b>0,56</b>
0,42	<b>0,34</b>	27675709	3,46	<b>0,55</b>

Con los resultados encontrados en el análisis numérico se obtiene la curva de capacidad de la torre del aerogenerador, y la evolución del Daño Global  $D_i$  de la estructura. Estos parámetros se relacionaron con la variación de la frecuencia fundamental de la estructura. En Figura B-1 se puede observar que en la medida que el daño global aumenta la frecuencia fundamental de la torre (considerando la masa de la estructura y la masa del aerogenerador) disminuye.

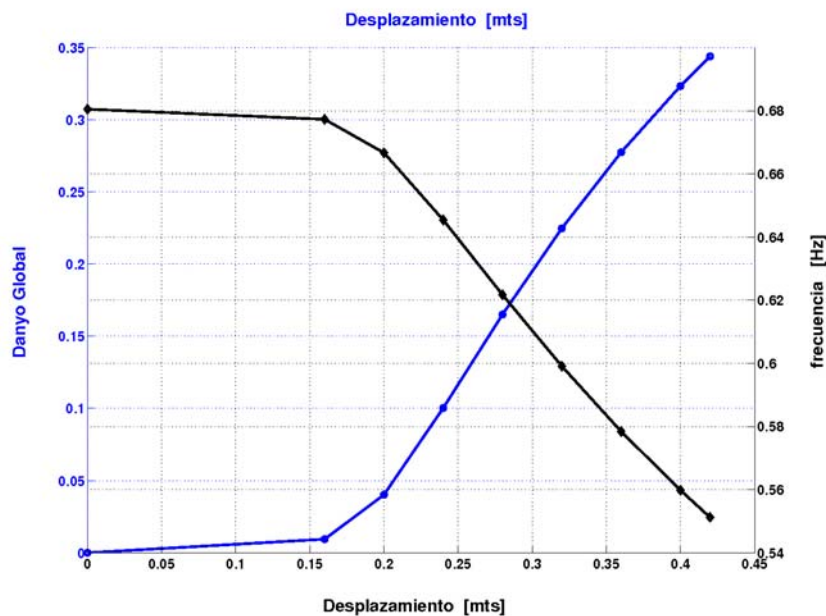


Figura B-1. Variación de la frecuencia fundamental y el daño global de la estructura, para diferentes desplazamientos laterales.

En la Figura B-2 se puede observar la evolución del daño global  $D_i$  con el aumento del desplazamiento de la corona de la torre. En la medida que la estructura se solicita con mayor carga, el daño global  $D_i$  aumenta.

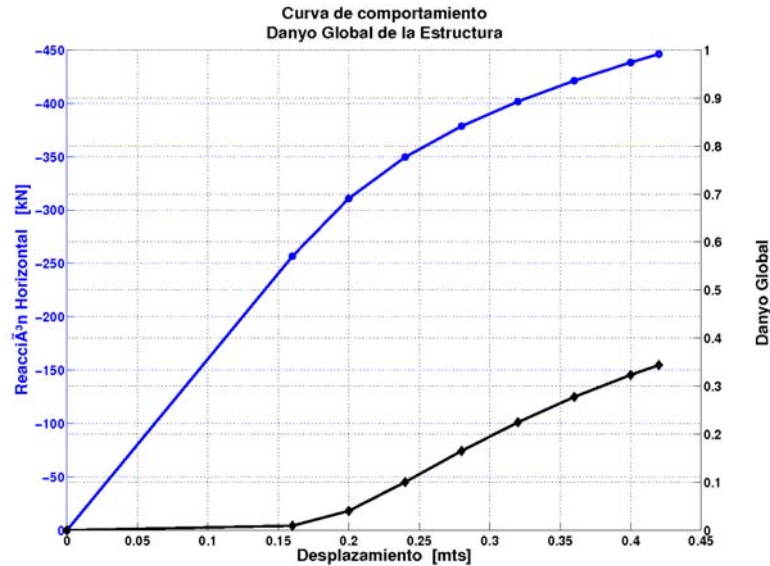


Figura B-2. Variación daño global de la estructura y curva de capacidad.

En la Figura B-3 se puede observar la evolución de la frecuencia fundamental de la estructura para diferentes estados de carga, se debe interpretar esta curva, como la frecuencia fundamental con la cual respondería la estructura a una carga dinámica cuando en su historia ha soportado un desplazamiento horizontal dado. Este desplazamiento no es la amplitud asociada a la frecuencia respectiva.

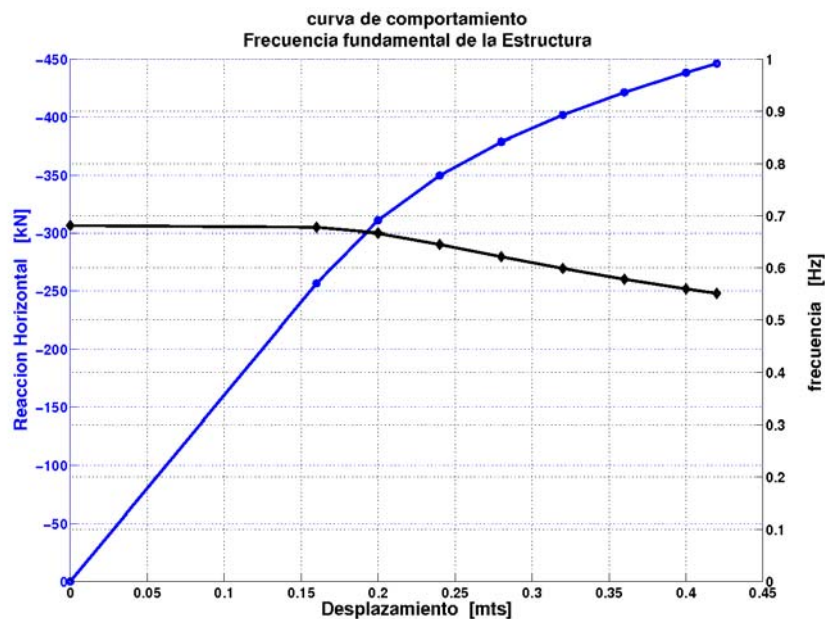


Figura B-3. Variación de la frecuencia fundamental de la estructura y curva de capacidad.



# Hoja en blanco

## C. Tratamiento numérico de la orientación global de las fibras

### C.1 Introducción

En la teoría de mezclas serie/paralelo (SP) los materiales simples que representan la fibra se orientan según los ángulos de Euler  $\phi, \theta, \psi$  en una secuencia de rotación 3-1-3, la Figura C-1 muestra la secuencia de los giros sucesivos, donde un sistema local estará definido por los ejes  $x''', y''', z'''$ .

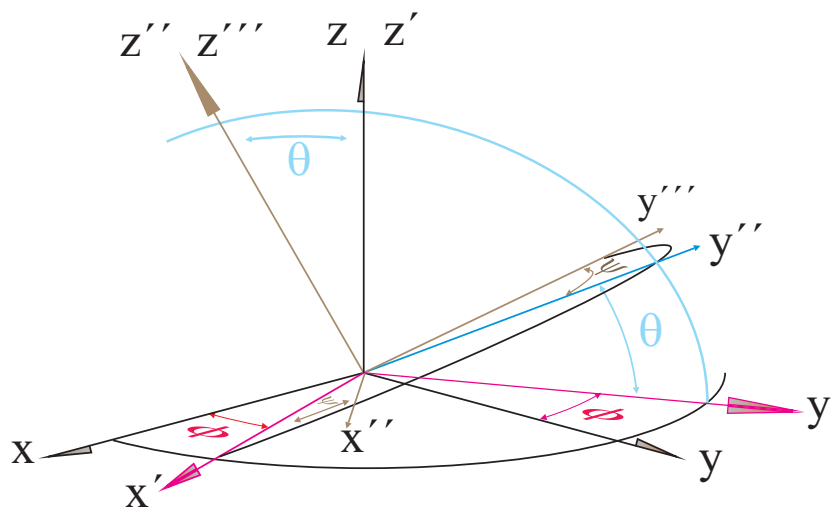


Figura C-1. Esquema de los ángulos de Euler, con secuencia de rotación 3-1-3.

Así, cada material compuesto puede estar definido por varias capas, donde cada capa se conforma por matriz y fibra, generalmente la matriz es isótropa, y la fibra tiene una dirección de comportamiento definido por su eje longitudinal el cual se orienta por los ángulos de Euler asignados al material simple.

En estructuras reticuladas en las cuales el refuerzo es ortogonal y co-lineal a los ejes globales, la orientación de la fibra no cambia con la posición del elemento finito, ya que el sistema de coordenadas de cada elemento es paralelo al sistema de coordenadas globales. Para el caso de estructuras con geometría cilíndrica, troncocónica, o en forma de hiperboloide el refuerzo cambia su orientación global dependiendo de la posición del elemento finito que se esté analizando, en este caso el sistema de coordenadas de cada elemento no es paralelo al sistema global.

El análisis de estructuras o elementos estructurales con geometrías no regulares hechas en material compuesto requiere del desarrollo de un algoritmo que permita determinar la orientación global del refuerzo (fibra) de cada elemento finito, lo cual se logra al definir la orientación del sistema de coordenadas local de cada elemento finito. Este algoritmo tiene como fundamento la teoría de cambio de base en función de los ángulos de Euler. Una columna circular es un ejemplo de elemento estructural con estas características particulares; en las columnas circulares los cercos de confinamiento cambian su orientación global en cada elemento finito, sin embargo en una sección transversal establecida, la orientación de la fibra respecto al sistema local del elemento es idéntica para todos los elementos contenidos en ella. Esto permite concluir que para todos los elementos finitos mallados con el mismo material compuesto las propiedades mecánicas representadas en su sistema local de referencia tendrán la misma expresión.

Sin embargo, para la solución de un problema de elementos finitos es necesario conocer las propiedades mecánicas de cada elemento en el sistema global de referencia. Es evidente que se necesita establecer orientar del sistema local de cada elemento respecto al sistema global. Por otro lado la geometría de los problemas de ingeniería que se analizan por el método de los elementos finitos es cada vez más compleja, esto hace necesario que se utilicen sistemas de coordenadas auxiliares con centro en coordenadas diferentes al origen del sistema global.

## C.2 Cálculo de la orientación del sistema de referencia local de cada elemento finito

Se presenta un algoritmo que permite definir el sistema local de coordenadas de cada elemento finito según su ubicación global en la estructura. Inicialmente es necesario definir un sistema auxiliar para la estructura o la parte de ella que requiera de la orientación global de las fibras, el cual estará definido en el preproceso por la vinculación de una generatriz con el respectivo grupo de elementos. En la Figura C-2 se muestra el sistema auxiliar local, el sistema local del elemento y el sistema global de coordenadas para un elemento finito.

Teniendo en cuenta que los elementos geométricos objeto de esta aplicación tienen un eje generatriz, se propone adoptar esa generatriz como el eje  $z$  local ( $z''''$ ), lo cual conlleva dos ventajas: 1) el eje generatriz se puede definir inequívocamente por los dos primeros ángulos de Euler  $\phi$  y  $\theta$ ; 2) el cambio del sistema de coordenadas de cada elemento, será independiente del eje  $z''''$ , con lo cual solo es necesario calcular el tercer ángulo de Euler  $\psi$  por la posición del centro geométrico de cada elemento en un plano normal al eje  $z''''$ .

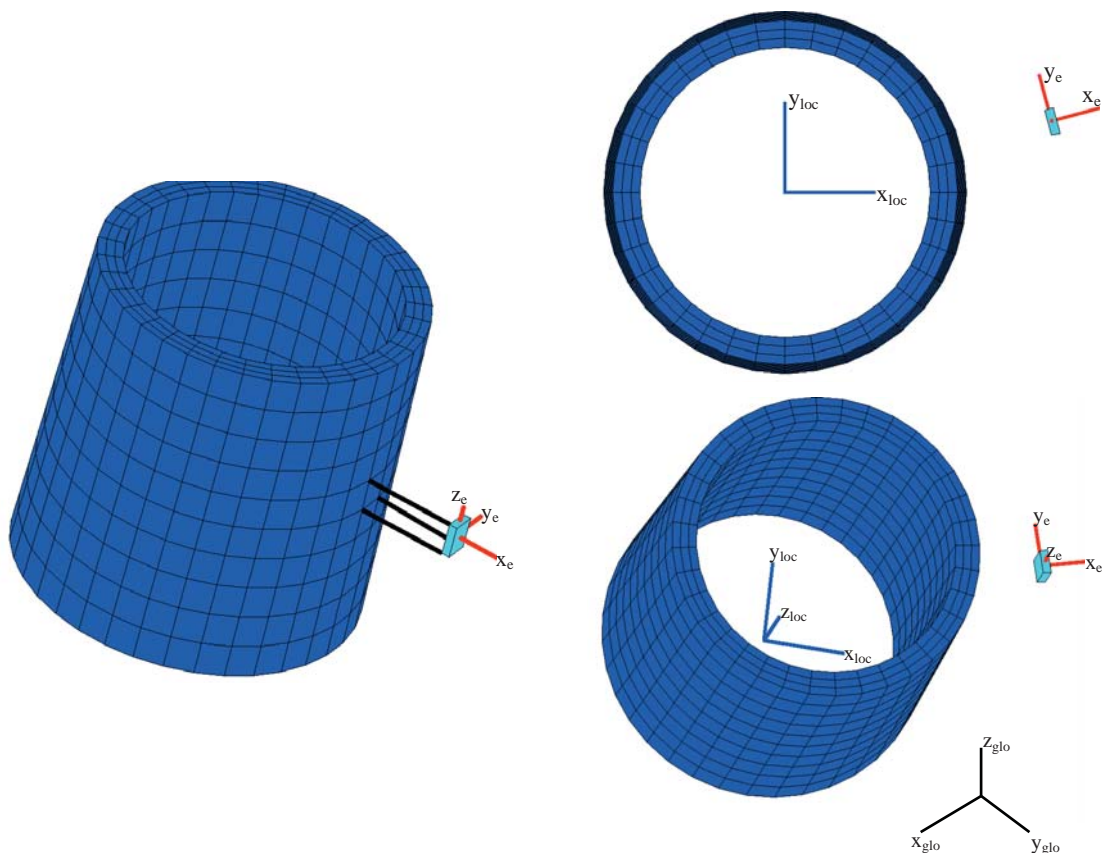


Figura C-2. Malla de una estructura troncocónica. Tres vistas del sistema global y sistema local de coordenadas para un elemento finito.

Así, todos los elementos asociados a una generatriz específica tienen iguales los ángulos  $\phi$  y  $\theta$ , y diferente el ángulo  $\psi$ .

El algoritmo propuesto para calcular los ángulos de Euler de cada elemento finito se describe a continuación en sus diferentes etapas

### C.2.1 Datos de entrada

Los datos de entrada son las coordenadas globales de dos puntos  $p_1$  y  $p_2$  que definen la generatriz; el punto inicial ( $p_1$ ) será el origen del nuevo sistema de coordenadas. Una vez definida la generatriz, en el preproceso se debe asignar las entidades de geometría (volúmenes, o superficies) o de malla (elementos) asociados a esta generatriz.

### C.2.2 Definición de un sistema local de coordenadas (a nivel de estructura)

La generatriz será el eje  $z'''$  de un sistema local de coordenadas, para el cual es necesario determinar su orientación y se necesita:

- Calcular el vector unitario  $e_3'''$  a partir de las coordenadas globales de los dos puntos que definen la generatriz

$$e_3''' = \frac{1}{\sqrt{(x_i^{p1} - x_i^{p2})^2}} [x_1^{p1} - x_1^{p2}, x_2^{p1} - x_2^{p2}, x_3^{p1} - x_3^{p2}] \quad ; \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{C-1})$$

donde  $x_i^{p1}$  y  $x_i^{p2}$  son la  $i$ -ésima coordenada de los puntos 1 y 2 respectivamente.  $e_3'''$  es el vector direccional del eje  $z_{loc}$  que se muestra en la Figura C-2.

- Calcular el ángulo  $\theta$  a partir del producto punto entre los vectores unitarios de los ejes  $z$  y  $z'''$ .

$$\cos(\theta) = e_3 \cdot e_3''' \quad (\text{C-2})$$

Los ejes  $z$  y  $z'''$  forman el ángulo  $\theta$  en un plano que los contiene y que es normal al eje  $x'$ , esto se puede ver en la Figura C-1. También se puede ver que el eje  $x'$  y el eje  $x$  forman el ángulo  $\phi$  en el plano horizontal  $x$ - $y$ .

- Calcular el ángulo  $\phi$  a partir del producto punto entre los vectores unitarios de los ejes  $x$  y  $x'$

$$\cos(\phi) = e_1' \cdot e_1 \quad (\text{C-3})$$

donde  $e_1' = e_3 \times e_3'''$  y  $e_1 = [1 \ 0 \ 0]$ .

Conocido el punto 1 (p1), y los ángulos  $\phi$  y  $\theta$  se tiene definido un plano  $x'''-y'''$  que es independiente del valor del ángulo  $\psi$ , esto permite establecer por definición el valor del ángulo  $\psi = 0$ ; con lo cual queda totalmente definido el sistema local de coordenadas donde estará referida la malla de elementos finitos a la cual será necesario calcular la orientación de las fibras.

Así el sistema local queda definido por los vectores unitarios  $[e_1''' \ e_2''' \ e_3''']$  donde  $e_1''' = e_1'$ ;  $e_2''' = e_3'' \times e_1''$ ; y como ya se ha dicho  $e_3'''$  queda definido según la ecuación C-1.

### C.3 Definición de un sistema local de coordenadas (a nivel de elemento)

Los elementos finitos que estén asociados al sistema local de la estructura tendrán en común los dos primeros ángulos de Euler  $\phi$  y  $\theta$ , y se requiere calcular para cada elemento finito el tercer ángulo de Euler  $\psi$ , a través del siguiente procedimiento:

- Calcular la matriz de transformación de sistema de coordenadas  $T$  con los ángulos de Euler del sistema de coordenadas de la estructura  $\phi$ ,  $\theta$ ,  $\psi = 0$

$$T = \begin{bmatrix} \cos \phi \cos \psi - \sin \phi \cos \theta \sin \psi & \sin \phi \cos \psi + \cos \phi \cos \theta \sin \psi & \sin \theta \sin \psi \\ -\cos \phi \sin \psi - \sin \phi \cos \theta \cos \psi & -\sin \phi \sin \psi + \cos \phi \cos \theta \cos \psi & \sin \theta \cos \psi \\ \sin \phi \sin \theta & -\cos \phi \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (C-4)$$

- Trasladar las coordenadas nodales del origen del sistema global  $x_{glo}$  al origen del sistema auxiliar (local)  $x_{glo}^*$ ; teniendo en cuenta que la generación de geometría y malla en los modelos numéricos están referenciados al sistema global de coordenadas, y el proceso de cálculo de los ángulos de Euler requiere definir un sistema auxiliar (local) de coordenadas, es necesario hacer una traslación de las coordenadas del origen del sistema global hasta el origen del sistema auxiliar (p1). Para esto se requiere restarle a las coordenadas nodales las coordenadas del punto uno (p1).
- Rotar las nuevas coordenadas nodales  $x_{glo}^*$  (obtenidas en el paso anterior) al sistema auxiliar, mediante la matriz de transformación  $T$  de la ecuación C-4.

$$x_{loc} = T x_{glo}^* \quad (C-5)$$



donde  $x_{loc}$  coordenadas nodales en el sistema local de coordenadas,  $T$  matriz de transformación de coordenadas y  $x_{glo}^*$  coordenadas nodales en un sistema paralelo al sistema global con origen en p1.

- Cálculo del centro geométrico de cada elemento finito, el cual se realiza por el promedio simple de las coordenadas nodales en el sistema local de todos los nodos que pertenecen al elemento finito en análisis.

$${}^e x_{cg} = \frac{\sum_{i=1}^n {}^e x_{loc}^i}{n}; \quad {}^e y_{cg} = \frac{\sum_{i=1}^n {}^e y_{loc}^i}{n}; \quad {}^e z_{cg} = \frac{\sum_{i=1}^n {}^e z_{loc}^i}{n} \quad (C-6)$$

donde  ${}^e x_{cg}$  es la coordenada x en el sistema local del centro geométrico del elemento finito  $e$  en análisis,  ${}^e y_{cg}$  es la coordenada y en el sistema local del centro geométrico del elemento finito  $e$  en análisis y  ${}^e z_{cg}$  es la coordenada z en el sistema local del centro geométrico del elemento finito  $e$  en análisis;  $n$  es el número de nodos que conforman el elemento finito;  $i$  es el  $i$ -ésimo nodo.

- Cálculo del tercer ángulo de Euler,  $\psi$ , para cada elemento finito, en el sistema local auxiliar de coordenadas, se proyecta en el plano  $x'''-y'''$  las coordenadas del centro geométrico de cada elemento finito, y se calcula el ángulo central entre un vector que une el origen del sistema local y el punto de coordenadas  $({}^e x_{cg}, {}^e y_{cg})$  con el eje  $x'''$ , ese ángulo se define como el ángulo  $\psi$  de cada elemento finito.

Así, el sistema local de cada elemento finito queda definido por  $\phi$ ,  $\theta$ ,  $\psi = \psi^e$  donde  $\psi^e$  será diferente para cada elemento, dependiendo de su posición respecto a  $x'''$  y  $y'''$  e independiente de la coordenada  $z'''$ . Para terminar esta parte del pre proceso es necesario asignar a cada elemento finito sus respectivos 3 ángulos de Euler e incluirlos en el archivo de entrada de datos (\*.dts).

NOTA: Las coordenadas nodales del archivo de entrada de datos, al igual que las cargas y desplazamientos impuestos son ingresados en coordenadas globales, igualmente los tensores de tensiones y deformaciones de los archivos de salida están referidos al sistema global de coordenadas.

### C.4 Teoría de mezclas serie/paralelo con orientación global de la fibra

La configuración de un material compuesto bajo la teoría de mezclas serie/paralelo se hace por la unión de un número determinado de capas, cada capa está conformada por dos materiales simples: matriz y fibra. Se requiere la definición de la orientación de la fibra en cada capa ya que la teoría de mezclas serie paralelo (S/P) considera que en la dirección de cada fibra el comportamiento de los dos materiales componentes es en paralelo mientras que su comportamiento es en serie para el resto de direcciones, esta condición se cumple en cada capa. Para cada elemento finito, el proceso de composición del tensor constitutivo del material compuesto se realiza dentro de un ciclo que va de 1 hasta el número de capas. Para cada capa se compone el tensor constitutivo Clay en el sistema de coordenadas locales de la fibra, luego se rota al sistema global y ahí se compone el tensor constitutivo del compuesto, el diagrama de flujo se muestra en la Figura C-3.

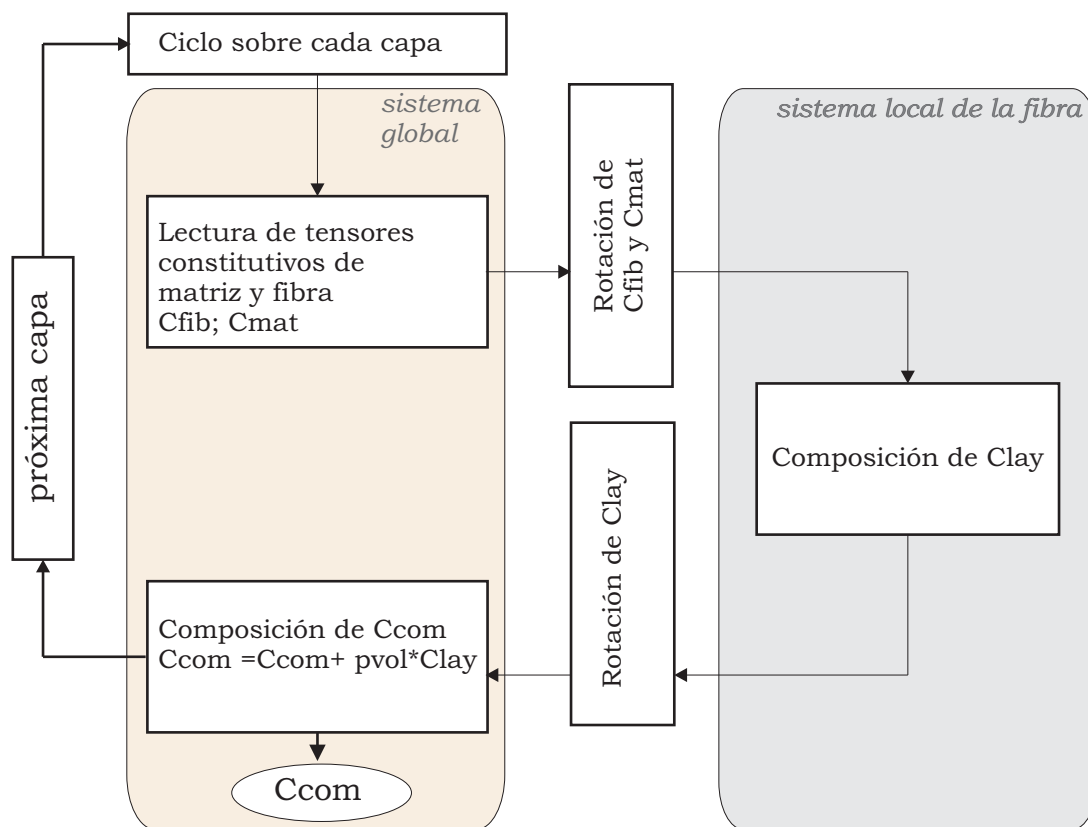


Figura C-3 Diagrama de flujo para la composición del tensor constitutivo de un material compuesto, según la teoría de mezclas serie/paralelo. Clay es el tensor constitutivo de la capa en análisis. pvol es la participación volumétrica de la capa en análisis.

La composición de cada capa en el sistema de coordenadas locales se hace según la ecuación C-7 planteada por Rastellini en su tesis doctoral<sup>1</sup>.

$$\begin{aligned}
 {}^cl C_{PP} &= \left( {}^fk {}^f C_{PP} + {}^mk {}^m C_{PP} \right) + {}^mk {}^fk \left( {}^f C_{PS} - {}^m C_{PS} \right) : A : \left( {}^m C_{SP} - {}^f C_{SP} \right) \\
 {}^cl C_{PS} &= \left( {}^fk {}^f C_{PS} : A : {}^m C_{SS} + {}^mk {}^m C_{PS} : A : {}^f C_{SS} \right) \\
 {}^cl C_{SP} &= \left( {}^mk {}^f C_{SS} : A : {}^m C_{SP} + {}^fk {}^m C_{SS} : A : {}^f C_{SP} \right) \\
 {}^cl C_{SS} &= \frac{1}{2} \left( {}^m C_{SS} : A : {}^f C_{SS} + {}^f C_{SS} : A : {}^m C_{SS} \right) \\
 A &= \left( {}^mk {}^f C_{SS} + {}^fk {}^m C_{SS} \right)^{-1}
 \end{aligned} \tag{C-7}$$

El ensamble de la matriz global de rigidez del sistema que se esté analizando, al igual que la solución y resultados se plantean en el sistema global. Así, se hace evidente que es necesario rotar tensores y vectores entre estos dos sistemas de coordenadas, un esquema de la secuencia de rotación entre sistemas de coordenadas es mostrado en la Figura C-4.

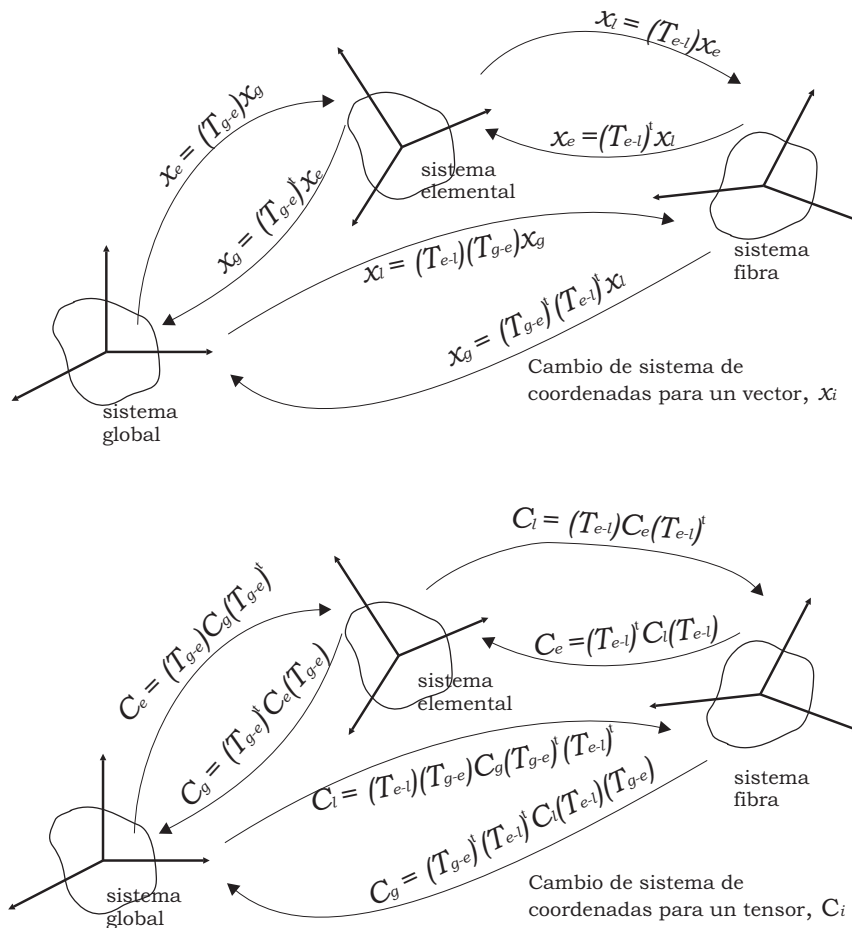


Figura C-4. Esquema de transformación de sistemas de coordenadas.

<sup>1</sup> F. Rastellini, Modelización numérica de la no-linealidad constitutiva de laminados compuestos. PhD Thesis, Universidad Politécnica de Cataluña, Barcelona, 2006

---

En conclusión se tiene

- ✓ En la teoría de mezclas serie/paralelo es imprescindible componer las propiedades mecánicas de un compuesto a partir de su matriz y fibras, considerando en este último caso la orientación local de la misma.
- ✓ Siempre que los tensores constitutivos de las diferentes capas estén en un sistema de coordenadas común a todos, se puede hacer la composición del tensor constitutivo del compuesto y rotar a cualquier otro sistema de coordenadas según sea necesario.
- ✓ Es necesario establecer el sistema de coordenadas en el cual se guardaran los tensores constitutivos en la base de datos. Actualmente se guardan en sistema global.