

VICENÇ FONT MOLL

PROCEDIMENTS PER OBTENIR EXPRESSIONS SIMBÒLIQUES
A PARTIR DE GRÀFIQUES. APLICACIONS A LES DERIVADES

Departament de Didàctica de les Ciències Experimentals i de la Matemàtica

Programa de Didàctica de les Ciències Experimentals i de la Matemàtica

Bienni 1994-1996

Per optar al títol de Doctor en Filosofia i Ciències de l'Educació
Secció Ciències de l'Educació

Director: Josep Maria Nuñez i Espallargas

Tutor: Josep Maria Nuñez i Espallargas

UNIVERSITAT DE BARCELONA

BARCELONA 1999

“naturaleses essencials” de les coses - les realitats que s’oculten sota les aparences- Tals teories són “explicacions últimes”, i trobar-les és l’objectiu últim del científic.

Segons Popper, el rebuig de l’instrumentalisme requereix l’acceptació de 1) tal com ell fa. En canvi, rebutja 2) basant-se en la seva teoria de la falsabilitat i encara que ell no nega les essències postulades en 3) opina que creure-hi no ens ajuda de cap manera. El rebuig de l’instrumentalisme i dels principis 2) i 3) de l’essencialisme, juntament amb la seva acceptació de 1) porta a Popper a exposar com a tercera alternativa la següent consideració de les teories: *“las teorías son conjeturas genuinas, suposiciones acerca del mundo, de alto contenido informativo y que, si bien no son verificables (es decir, si bien no es posible demostrar que son verdaderas), pueden ser sometidas a severos tests críticos. Son intentos serios de descubrir la verdad. A este respecto, las hipótesis científicas son exactamente iguales a la famosa conjetura de Goldbach de la teoría de números. Goldbach pensaba que quizás fuera verdadera, y bien puede serlo de hecho, aunque no sepamos, y quizás no lleguemos a saberlo nunca, si lo es o no”* (Popper 1983, pàg. 150). Popper considera que les teories confereixen realitat als móns que descriuen en el sentit que, encara que siguin hipotètiques i conjeturals, pretenen descriure quelcom real *“Acepto la tesis (implícita en la teoría clásica de la verdad o teoría de la correspondencia) de que sólo debemos llamar “real” a un estado de cosas si (y sólo si) el enunciado que lo describe es verdadero. Pero sería un grave error concluir de esto que la incerteza de una teoría, es decir, su carácter hipotético o conjetural, disminuye de algún modo su aspiración implícita a describir algo real.....Las teorías son nuestras propias invenciones, nuestras propias ideas; no nos son impuestas desde fuera, sino que son nuestros instrumentos de pensamiento forjados por nosotros mismos: esto lo han visto muy claramente los idealistas. Pero algunas de esas teorías nuestras pueden chocar con la realidad; y cuando esto sucede, sabemos que hay una realidad; que hay algo que nos recuerda el hecho de que nuestras ideas pueden estar equivocadas. Y es por esto por lo cual el realista tiene razón.”* (Popper 1983, pàgs. 152-153). Segons Popper, les teories no són descobriments deguts a l’observació, sinó que els nostres descobriments estan guiats per la teoria. Popper considera que no té sentit la distinció entre termes observacionals i termes teòrics: *“Podemos expresar todo esto afirmando que la distinción habitual entre “términos observacionales” (o “términos no teóricos”) y “términos teóricos” es errada, puesto que todos los términos son teóricos en algún grado, aunque algunos son más teóricos que otros”* (Popper 1983, pàg. 155). Popper considera que encara que el llenguatge descriptiu de la ciència posseeix una càrrega teòrica, la terminologia de la ciència no està vinculada de forma monolítica a les teories associades a ella. Es poden mantenir simultàniament diverses teories associades a ella, i no tots els termes descriptius obtindran el seu contingut teòric o disposicional a partir de la mateixa teoria. Això fa que sigui possible la comparació de teories, així com la seva falsabilitat mitjançant experiments crucials. Popper manté que hi ha enunciats observacionals bàsics que es refereixen a objectes materials públicament observables i que, per tant, poden ser clarament afirmats o negats com a vertaders o falsos. L’existència d’aquest tipus de llenguatge observacional neutral facilita encara més la comparació de teories en competència.

En contraposició al punt de vista realista de Popper, s'han desenvolupat altres punts de vista sobre les teories científiques de tipus instrumentalista. Aquest punt de vista considera que les teories són instruments lògics per a organitzar el món de les nostres experiències i per a posar ordre en les lleis experimentals i que no es poden caracteritzar com a vertaderes ni com a falses, ni tan sols com a probablement falses ni probablement vertaderes. Aquest tipus de teories poden donar peu a una concepció subjectivista i relativista de la ciència i a algun tipus d'agnosticisme en relació a l'existència de la realitat exterior objectiva (posicions que en aquesta memòria hem anomenat, en sentit ampli, no-representacionalistes).

Reichenbach (1938) va introduir les expressions "context de descobriment" i "context de justificació" per distingir entre la manera com s'arriba a un resultat científic o matemàtic, i la manera com se'l justifica, presenta, defensa, etc., davant de la comunitat científica o matemàtica. Amb aquesta distinció pretén assenyalar la diferència existent, per exemple, entre l'analogia, que va servir de guia a Kepler, que el sistema solar havia d'assemblar-se a la Santíssima Trinitat i la teoria resultant, empíricament justificada que Kepler va presentar al final. Per a Reichenbach, els problemes que cauen dins del context de descobriment són un assumpte de la psicologia i de la història, mentre que l'epistemologia s'ha d'ocupar únicament del context de justificació. Segons aquest punt de vista, una anàlisi filosòfica de les teories ha d'ignorar els factors relatius a la seva gènesi, centrant la seva atenció en les teories com a productes acabats. Si bé el punt de vista de Reichenbach era acceptat per la majoria dels neopositivistes de l'escola de Berlín i pel cercle de Viena, fou discutit per un grup de filòsofs de la ciència que van considerar que la ciència era una empresa social en marxa, amb llaços lingüístics, metodològics, etc., comuns. Per a aquests filòsofs, influïts per l'obra del darrer Wittgenstein, una comprensió epistemològica total de les teories científiques només es podria aconseguir considerant la dinàmica del desenvolupament teòric, l'acceptació i rebuig de teories, l'elecció d'experiments a realitzar, etc., ja que comprendre una teoria equivalia a comprendre'n l'ús i el desenvolupament. Una anàlisi d'aquest tipus ha de fer atenció a la idea que la ciència es fa des d'una perspectiva conceptual que determina força quines qüestions són dignes d'investigació i quin tipus de respostes resulten acceptables; aquesta perspectiva ofereix una forma de pensar sobre una classe de fenòmens que, a la vegada, defineix la classe de problemes legítims i delimita els criteris per a determinar quina en seria la solució acceptable. Aquesta perspectiva està estretament vinculada al llenguatge de cadascú, el qual configura conceptualment la forma d'experimentar el món. Resumint, la ciència es fa des d'un marc lingüístico-conceptual en què són interpretades les teories. Aquesta forma d'analitzar l'epistemologia de la ciència ha de dedicar una atenció considerable a la història de la ciència i als factors sociològics que influeixen en el desenvolupament, articulació, ús i acceptació o rebuig d'aquests marcs lingüístico-conceptuals en la ciència. Aquests epistemòlegs consideren que Popper, encara que considera el context de descobriment, l'ha menysvalorat, sobrevalorant, en canvi, el context de justificació. Popper, segons ells, ha deixat massa de banda l'anàlisi de com realment ha anat la història i, en canvi, n'ha fet una reconstrucció racional en la qual importen les teories acabades, independentment de les causes històriques, psicològiques, etc. que les han motivades.

Entre les anàlisis d'aquest tipus tenim, entre d'altres, les de Toulmin (1953, 1961 i 1977), Hanson (1967) i Kuhn (1971 y 1982). Aquests autors consideren la ciència com quelcom que sorgeix d'un marc lingüístico-conceptual; per tant, teories distintes requereixen o produeixen marcs lingüístico-conceptuals distintes. Les consideracions que fan aquests autors de com aquest marc contribueix a l'empresa científica inclouen segons Suppe (1979) alguna versió de les tres tesis següents:

<<1) *La observación posee una carga teórica: la "weltanschauung" determina o influye en cómo se considera describe o interpreta el mundo; de ahí que los defensores de teorías diferentes observen cosas diferentes cuando consideran los mismos fenómenos.*

2) *El significado depende de la teoría: los términos descriptivos (tanto teóricos como observacionales) usados en una ciencia experimentan un cambio de significado cuando se los incorpora a una teoría o se los emplea junto con ella; por tanto, los principios de una teoría ayudan a determinar el significado de los términos que aparecen en ellos y por eso el significado de dichos términos variará de una teoría a otra; de ahí que los cambios de teoría se traduzcan en cambios de significado.*

3) *Los hechos poseen una carga teórica: qué se considere un hecho es algo que viene determinado por la "weltanschauung" asociada a la teoría; en este sentido no hay un conjunto neutral de hechos que permita juzgar la adecuación relativa de dos teorías en competencia; sino que la adecuación de una teoría se debe juzgar en relación con el conjunto de normas proporcionadas por la "weltanschauung" a ella asociada.>>* (Suppe 1979, pàg. 224).

Aquestes tesis admeten diferents interpretacions. Una, és que les dades d'observació de cadascú són intencionals, és a dir son fenòmens personals organitzats pel marc lingüístico-conceptual de cadascú. Només si dos individus estan dins del mateix marc podran mantenir entre ells una comunicació que els permeti creure que observen el mateix. Aquesta interpretació porta a una concepció subjectiva del coneixement que és incompatible amb la idea de l'objectivitat de l'observació científica, ja que aquesta última pressuposa que l'objectivitat de la ciència es basa en el fet que les seves afirmacions es poden controlar per proves independents, la qual, a la vegada, es basa en la suposició ontològica que suposa un món real d'objectes amb les seves pròpies determinacions, l'existència dels quals és independent del subjecte. Aquesta primera interpretació implica que els defensors de diferents teories no poden observar el mateix en l'intent de decidir entre elles i, en conseqüència, aïlla a cada científic en un món d'observació que està en consonància amb les seves creences teòriques. També porta a la tesi que no hi ha progrés científic segons criteris estàndard, sinó només una rivalitat entre diferents punts de vista teòrics i la substitució dels uns pels altres. Seguint aquest punt de vista subjectivista, s'arriba a la consideració ontològica que no hi ha una realitat independent, ja que cada punt de vista genera la seva pròpia realitat. En aquesta interpretació el procés de representació només es pot considerar entre objectes del mateix món (versió dèbil).

Aquesta tesi també es pot interpretar d'una forma menys subjectivista de la manera següent: encara que els objectes que un observa, així com les propietats que presenten,

siguin com ho són, independents del marc lingüístico-conceptual de l'observador, el tipus d'objectes que s'observa que hi ha i les propietats que s'observa que tenen, ve determinat en part pel marc lingüístico-conceptual de l'observador. Aquesta interpretació admet una ontologia realista i la representació com a relació entre objectes de móns diferents (versió forta) però posa en qüestió la idea que el resultat del procés de representació, la representació mental, sigui homeomòrfica a la realitat. Aquesta última interpretació permet mantenir una ontologia de tipus realista però obliga a abandonar el punt de vista epistemològic que hem anomenat representacionista realista al considerar que les nostres representacions "encaixen" amb la realitat, però no podem assegurar que són homeomòrfiques a ella. La síntesi entre una opció ontològica realista i una epistemologia de tipus no-representacional la podem trobar en la didàctica de les matemàtiques en les formulacions, per exemple, de Schmidt (1998) i en les del constructivisme radical (Glaserfeld, 1991).

1.16 Història interna del coneixement científic versus sociologia del coneixement científic.

La importància que van donar els nous filòsofs de la ciència al context de descobriment els portà a estudiar la història de la ciència. Com a disciplina professional independent, la història de la ciència és un camp nou, en ple desenvolupament però amb una llarga prehistòria. Els estudis històrics anteriors a la creació d'aquesta disciplina professional han estat qüestionats en l'actualitat perquè el seu enfocament predominant era "intern". Actualment els estudis històrics es realitzen majoritàriament des d'un enfocament "extern", anomenat sociologia de la ciència, que tracta les activitats dels científics com a grup social dins d'una cultura determinada. Dos dels corrents que més han influït en el desenvolupament de la sociologia de la ciència, conjuntament amb els plantejaments dels nous filòsofs de la ciència, són la sociologia del coneixement alemanya i la historiografia marxista, les quals ja s'havien preocupat anteriorment pel paper dels factors institucionals i socioeconòmics en el desenvolupament del coneixement humà.

La tasca de la sociologia del coneixement consisteix en l'estudi sistemàtic de les condicions socials que generen el coneixement humà i s'interessa per tot allò que es considera "coneixement" en la societat, per la seva distribució social i pels mecanismes que permeten aquesta distribució. La sociologia del coneixement de Berger i Luckmann (1993) agafa de Marx la seva proposició bàsica: la consciència de l'home està determinada pel seu ésser social. Marx considerava que el pensament humà es fonamenta en l'activitat humana (el "treball" en el més ampli sentit de la paraula) i en les relacions socials provocades per aquesta activitat. Una de les idees centrals de la sociologia del coneixement és que el coneixement humà es dona en la societat com un "a priori" de l'experiència individual, proporcionant a aquesta última la seva ordenació de significat. Aquesta ordenació, si bé és relativa amb respecte a una situació històrico-social particular, assumeix per a l'individu l'aparença d'una manera natural de contemplar el món. Aquest coneixement "a priori" s'anomena "concepció relativa-natural del món" d'una societat. Dit d'una altra manera, "el coneixement del sentit comú" constitueix el

tema central de la sociologia del coneixement perquè constitueix l'edifici de significats sense el qual cap societat podria existir.

Les respostes a les preguntes Com és possible que els significats subjectius es tornin facticitats objectives del sentit comú? Com es subjectiva el sentit comú corresponent a una situació històrico-social particular? les expliquen els sociòlegs del coneixement Berger i Luckmann (1993) a partir d'una anàlisi fenomenològica basada en la fenomenologia de Schutz (1962 i 1967), la qual al seu torn es basa en la fenomenologia de Husserl i molt especialment en les nocions de "intersubjectivitat" i de "món de la vida". El seu punt de vista sobre el coneixement del sentit comú aporta idees molt interessants sobre les relacions entre els significats subjectius i els objectius. Algunes d'aquestes idees són clarament aplicables a les relacions entre els significats subjectius i objectius matemàtics i a la relació "cara a cara" que es produeix a l'aula entre el professor i els alumnes. A partir de l'anàlisi fenomenològica, Berger i Luckmann expliquen:

- Com la realitat de la vida quotidiana s'organitza al voltant del "aquí" del meu cos i el "ara" del meu present, i com objectes diferents apareixen davant la consciència com a constitutius de les diferents esferes de la realitat.
- Com la realitat de la vida quotidiana se'm presenta com un món intersubjectiu que comparteixo amb altres.
- Com s'experimenta a aquests altres en la vida quotidiana en les situacions "cara a cara" o de manera indirecta.
- Com l'expressivitat humana és capaç d'objectivar-se en sistemes de signes gesticuladors, de moviments corporals pautats, de diversos grups d'artefactes materials, escrits i vocals.
- Com el llenguatge i altres sistemes de signes, són capaços de transformar-se en dipòsit objectiu de vastes acumulacions de significat i experiència, que pot preservar a través del temps i transmetre a les generacions futures.
- Com es produeixen les institucions a partir de les activitats socials.
- Com es genera el coneixement objectiu en les institucions i com el coneixement subjectiu dels membres de la institució per un procés dialèctic compost de tres moments: externalització, objectivació i internalització.

Per a Berger i Luckmann el coneixement és un producte de les institucions de la societat i, malgrat l'objectivitat que el caracteritza, no per això adquireix un status ontològic diferent de l'activitat humana que l'ha produït.

Un dels camps que més ha interessat a la sociologia del coneixement és el coneixement científic. Seguint a Potter (1998) distingirem dues etapes en la sociologia del coneixement científic (SCC a partir d'ara):

a) SCS tradicional: La SCS tradicional s'ha centrat en dues qüestions: Com s'organitza la ciència com a institució social perquè els científics produeixin fets objectius amb regularitat i èxit? I a la inversa, quins factors socials deformants poden causar la producció d'errors científics? Dins de la sociologia de la ciència tradicional, la persona que més s'ha dedicat a formular aquestes preguntes i a intentar contestar-les ha estat

Merton (1977).

b) SCS moderna: La SCS tradicional de Merton i d'altres prescindia de l'estudi dels fets i es limitava a examinar-ne el contingut sociològic. L'anàlisi sociològica completa del contingut de la ciència- les seves idees, teories, mètodes, etc.- es reservaven únicament per a les falsedats, de manera que van centrar el seu interès en fets i teories que els científics ja havien rebutjat com a errònies per alguna raó. La SCS moderna no accepta aquesta autolimitació.

La SCS moderna ha superat aquesta autolimitació gràcies a les reflexions dels filòsofs i dels historiadors de la ciència que van posar de manifest els aspectes socials (comentats en l'apartat anterior). La idea que els fets són un producte de l'observació (la doctrina empirista) era una de les creences bàsiques dels científics sobre la seva pràctica habitual. Les anàlisis filosòfiques i històriques recents l'han qüestionada fortament, i ara la idea dominant és que no es pot separar l'observació de la teoria. Aquesta impossibilitat porta a considerar el coneixement científic estructurat en forma de xarxa, de manera que cap observació científica pot tenir un efecte determinant sobre aquesta xarxa. Aquesta manera de comprendre la ciència implica que mai hi pot haver un experiment crucial, un estudi que, per si sol, obligui definitivament a triar una de dues teories oposades; en realitat, alguns treballs històrics han mostrat que experiments considerats cabdals només van ser considerats com a tals després que la teoria anterior fos abandonada. Abandonar la idea que l'observació proporciona una base concloent per al coneixement, porta a posar èmfasi en qüestions com la coherència de les teories, o el paper cabdal de la pràctica científica i de la comunitat científica en l'acceptació dels resultats. Un dels filòsofs que més ha desenvolupat aquest punt de vista ha sigut Thomas Kuhn (1971 i 1982). Aquest historiador i filòsof considera que les teories científiques s'encarnen en el coneixement i en les pràctiques de grups de científics específics, és a dir que les creences científiques s'expressen en els debats i es plasmen en els escrits científics. Kuhn argumenta, sobre la base d'estudis de casos històrics, que la comunitat de científics seguirà fent "ciència normal" malgrat les anomalies i els problemes que plantegi la investigació fins que, arribats a un cert punt, la tensió en tot el sistema s'accentuarà tant que experimentarà per força uns reajustaments radicals. Només després d'aquest període de "ciència revolucionària" podrà restablir-se la serenitat de ciència normal. El model de desenvolupament de la ciència de Kuhn no és l'únic basat en la comunitat de científics que ha estat desenvolupat. Lakatos (1983) considera que la unitat social central per fer ciència és el "programa d'investigació": el desenvolupament d'una successió de teories organitzades entorn d'un conjunt de supòsits teòrics més o menys bàsics acceptats per la comunitat de científics. Un programa d'investigació està constituït per: 1) Un nucli ferm, 2) Un cinturó protector d'hipòtesis auxiliars i 3) L'heurística, o conjunt de procediments aplicables a la solució dels problemes.

Dins de la SCC moderna Pottter (1998) considera tres enfocaments: 1) El programa empíric relativista, 2) La teoria dels interessos socials i 3) Les teories constructivistes. El programa empíric relativista considera que la SCC tradicional adoptava les distincions dels propis científics entre allò que és vertader i allò que és fals i pressuposava, d'acord

amb els científics, que un coneixement científic vàlid no necessita cap explicació social, ja que és explicat adequadament per la naturalesa dels fenòmens naturals que s'estudien. Per a aquest programa d'investigació és crucial alguna forma de relativisme metodològic. És a dir, les afirmacions dels científics sobre allò que és vertader i allò que és fals no s'han d'agafar com a punt de partida per a l'anàlisi, sinó que s'haurien de convertir també en tema d'anàlisi. En moltes àrees de la ciència contemporània en lloc d'existir un consens sobre allò que és vàlid i allò que no ho és, el que hi ha és una forta controvèrsia. També existeixen grans àrees científiques en què hi ha un consens aparent sobre qüestions de veritat i falsedat. Però fins i tot en aquestes àrees la SCC no sol haver d'esforçar-se gaire per trobar una quantitat considerable de veus discrepants. A més, el contingut del punt de vista consensuat es pot modificar; és a dir, els científics poden assumir la "mateixa" teoria, però allò que entenen per aquesta teoria pot ser radicalment diferent. Més encara, si adoptem una perspectiva històrica més extensa veurem que moltes afirmacions científiques que havien estat àmpliament acceptades en una època determinada, més endavant han estat revisades dràsticament o abandonades per complet. A vegades aquest procés s'ha donat a la inversa: idees inicialment ridiculitzades arriben després a aconseguir acceptació. El programa empíric relativista ha centrat gran part de les seves investigacions en camps científics on es dona una controvèrsia permanent i proposa que el procés d'oferir el relat sociològic d'una controvèrsia consta de tres etapes. La primera etapa comporta documentar la flexibilitat amb què es poden interpretar els resultats experimentals. Com es pot determinar si uns resultats particulars recolzen o no una teoria? Com es pot determinar si una replicació confirma o no un resultat?. La segona etapa se centra en la manera d'abordar aquesta flexibilitat perquè es produeixi un resultat determinat. Com es resol finalment la controvèrsia?. La tercera etapa es refereix a l'intent de relacionar el final de les controvèrsies amb institucions socials i polítiques més àmplies de la societat.

La teoria dels interessos socials (Bloor 1998) és una altra tradició de la SCC que ha tractat de relacionar l'elecció de teories i el desenvolupament de controvèrsies amb les aliances entre científics i, en darrera instància, amb el context social més general. És a dir, ha tractat d'explicar el contingut del coneixement científic en funció de diversos interessos. Aquests investigadors consideren que els científics fan certes afirmacions perquè els interessa fer-les. Alguns d'aquests interessos poden ser un producte del context disciplinari local en què treballa un científic: per exemple, un científic pot tenir interès en aconseguir que el seu treball sigui publicat, ja que això és beneficiós per al seu currículum. Allò que té de distintiu i provocatiu la teoria de l'interès social és el seu èmfasi en el paper dels antecedents culturals i de les lleialtats socials més àmplies dels científics: la seva pertinença a grups amb els seus punts de vista polítics.

Les teories constructivistes en la SCC són les que posen en qüestió el punt de vista que considera la ciència com a generadora de descripcions cada cop més precises i sòlides d'una realitat externa. En contrast amb aquest punt de vista Knorr Cetina (1996) i d'altres autors s'han proposat estudiar els aspectes interns de l'empresa científica que consideren constructius, en lloc d'examinar les relacions externes entre la ciència i la "naturalesa" que, segons les postures realistes, descriu. Els estudis constructivistes (Golinski 1998) són

estudis etnogràfics realitzats en els llocs on treballen els científics. Els investigadors d'aquesta tradició consideren que els productes de la ciència s'elaboren mitjançant la interacció social entre individus específics seguint criteris "ad hoc" i en circumstàncies idiosincràtiques que s'aborden de manera oportunista. Gran part del temps d'un investigador es dedicarà a "fer tripijoc", és a dir, a utilitzar els recursos disponibles - aparells, matèries brutes, habilitats disponibles, etc. - per "fer que les coses funcionin", en un context en què també s'han desenvolupat els criteris que serveixen per a determinar que quelcom "funciona". Els seus estudis s'han centrat en documentar el paper d'aquestes diferents activitats constructives en la producció de fets. El punt de vista constructivista en la SCC posa l'èmfasi en la importància de la negociació de significats en l'elaboració dels coneixements científics. Diversos autors constructivistes han mostrat que una àmplia gamma d'aspectes de la vida científica no tenen uns significats universals determinats, sinó que estan subjectes a processos de negociació i d'interacció.

Moltes de les idees de la sociologia del coneixement i de la sociologia del coneixement científic han influït en les investigacions en didàctica de les matemàtiques. La manifestació més clara d'aquesta influència és la consideració que l'activitat matemàtica escolar s'ha d'integrar en el camp de les activitats matemàtiques institucionals, les quals passen a constituir el nou i més extens objecte de la investigació en didàctica de les matemàtiques. Aquest nou enfocament comporta el desplaçament del centre d'interès de les investigacions didàctiques des de la psicologia cognitiva cap a l'antropologia cognitiva.

1.17 Anàlisis sistèmiques versus anàlisis centrades en l'individu (alumne o professor)

Un dels principals corrents psicològics que va mostrar una preocupació especial en relació als continguts matemàtics, va ser la Psicologia de la Gestalt o de les Formes (nascuda al començament del segle XX). Aquesta teoria contrasta clarament amb la que considera l'aprenentatge com una concatenació d'estímuls-resposta (el conductisme). Segons aquesta teoria, els estímuls i experiències que arriben a la ment humana es perceben de forma organitzada com un tot, produint algun tipus de comprensió significativa. Una de les qüestions que va interessar als psicòlegs de la Gestalt va ser el fenomen del "insight" en la resolució de problemes. En una situació problemàtica, que no és immediatament evident, es produeix un conflicte; la ment, per resoldre el conflicte, busca l'equilibri a través d'una reorganització de la situació problemàtica, que resoldria la tensió revelant la veritable estructura del problema i, per tant, el camí per trobar la solució. L'insight es produeix en el moment de la reorganització. L'estructura del problema que apareix gràcies a l'insight determina les funcions i les inter-relacions dels elements del problema i, per tant, també les habilitats que es poden aplicar per resoldre'l. Fins que no es capta l'estructura fonamental del problema gràcies a l'insight, la situació problemàtica no té significat per a la persona que el vol resoldre i, per tant, és irresoluble.

La psicologia de la Gestalt considera que la totalitat no es pot considerar com la suma de

las parts. Si apliquem aquest punt de vista a las situacions en què hi ha interacció entre individus, resulta que l'explicació de la interacció a l'aula centrada en l'individu (representacions, valors, rols, actituds, motivacions, etc.) és insuficient per explicar-ne la complexitat. És a dir, quan la interacció es considera a partir de propietats de l'alumne o del professor (representacions, valors, etc.), la totalitat (professor i alumne interactuant) és un munt sumatori més que una totalitat diferent a la suma de les seves parts. En canvi, si es considera la interacció a l'aula com un sistema, aquest és una totalitat que no es pot reduir a la suma de las parts.

Si s'opta per considerar la interacció a l'aula com un sistema, tenim quelcom qualitativament diferent de la suma de les propietats dels individus i objectes que hi participen. Aquesta opció ens porta des d'una perspectiva introspectiva a una altra centrada en observacions consensuables. Quan es desplaça l'accent des dels processos intrapsíquics cap als fenòmens interaccionals, s'expandeix considerablement la comprensió d'allò que passa a l'aula, i la psicologia passa a adquirir un paper més secundari del que té quan es fan anàlisis centrades en els individus.

Aquest enfocament sistèmic té el seu origen en camps tan diversos com l'enginyeria de comunicacions, la cibernètica o l'antropologia. Malgrat les diferències que presenten els diferents sistemes particulars, tenen tants aspectes en comú que ha sorgit una teoria general dels sistemes. Si bé inicialment aquesta teoria es va aplicar a sistemes clarament no humans, en particular en el món de la informàtica, després es va anar aplicant a sistemes humans. Per exemple, Watzlawick, Beavin i Jackson (1983) van aplicar l'enfocament sistèmic a la comunicació humana. Aquest anàlisi sistèmica de la comunicació va tenir força incidència en el naixement de l'enfocament que, dins el camp de la didàctica de la matemàtica, es coneix com la didàctica fonamental.

Un sistema és un conjunt d'objectes, de les relacions que tenen entre si i dels seus atributs, en el qual els objectes són els components o parts del sistema, els atributs en són les propietats, i les relacions mantenen unit al sistema. Un sistema es troba sempre relacionat amb un medi, que és el conjunt de tots els objectes tals que els seus atributs poden ser modificats per la conducta del sistema. El caràcter flexible de la relació sistema-medi o sistema-subsistema facilita l'aplicació de la teoria de sistemes per estudiar els sistemes interaccionals en què intervenen persones perquè aquests són sistemes oberts que interactuen amb el seu medi. La interacció a l'aula es pot considerar un sistema obert amb relacions estables, determinades per regles, que pel fet de ser-ho, resulten importants per als participants. Amb una teoria dels subsistemes oberts jeràrquicament ordenats resulta fàcil ubicar la interacció a l'aula com un sistema obert i estable dintre d'un sistema d'ensenyament, una comunitat i un sistema cultural.

Una de les propietats que presenten els sistemes oberts és tenir un cert grau de totalitat. Cada una de les parts d'un sistema està relacionada de tal manera amb les altres que una modificació en una d'elles provoca una modificació en totes les altres i en el sistema total. És a dir, un sistema es comporta no com un compost d'elements independents, sinó com

un tot inseparable i coherent. La no-sumativitat porta a considerar que un sistema no es pot entendre com la suma de les seves parts; de fet, l'anàlisi de parts artificialment aïllades destrueix el sistema que es vol estudiar, de manera que cal deixar de banda les parts i centrar-se en la complexitat de l'organització. Un dels aspectes que interessin més dels sistemes són les propietats emergents, que resulten de la complexitat del sistema i que no es poden explicar si considerem els elements del sistema per separat.

Una altra de les propietats que caracteritza els sistemes oberts és la retroalimentació, funcionament segons el qual la conducta d'un element del sistema n'afecta un altre, el qual produeix una nova conducta que l'afecta a ell. Una altra característica dels sistemes oberts és l'equifinalitat. Aquesta propietat ve a dir que en la consecució d'un determinat resultat les condicions inicials són menys importants que l'organització del sistema.

La interacció a l'aula es pot considerar com un sistema estable de comunicació governat per regles, caracteritzat per les propietats dels sistemes generals: el temps com a variable, relacions sistema-subsistema, totalitat, retroalimentació i equifinalitat. Estudiar allò que passa a l'aula des d'un punt de vista sistèmic no només n'amplia considerablement la comprensió, sinó també el bagatge d'instruments d'anàlisi que es poden utilitzar, així com el nombre de temes que es poden investigar.

El punt de vista sistèmic no ha passat desapercbut a la investigació en didàctica de les matemàtiques i fou recollit en les reunions del T.M.E. (Theory of Mathematics Education), grup de treball constituït en el ICME V. Un dels tres components del programa d'aquest grup era: *"El desarrollo de una aproximación comprensiva a la Didáctica de la Matemática, que debe ser vista en su totalidad como un sistema interactivo, comprendiendo investigación, desarrollo y práctica. Esto lleva a destacar la importancia de la teoría de sistemas, especialmente de las teorías de los sistemas sociales, basadas en conceptos como interacción social, actividad cooperativa humana, diferenciación, subsistemas, autoreproducción, y sistemas auto-organizados, auto-referencia y reflexión en sistemas sociales, etc. Asimismo, interesa la identificación y el estudio de las múltiples interdependencias y mutuos condicionantes en la Didáctica de la Matemática, incluyendo el análisis de las complementariedades fundamentales"* (citat en Godino 1991, pàg. 121).

Una de les característiques del positivisme és l'intent de convertir les ciències socials en objectives. El primer positivisme de Comte postulava que això es podia aconseguir aplicant-los els mètodes positius de les ciències naturals. El neopositivisme va recollir aquest objectiu al formular que totes les ciències havien d'intentar seguir el mètode fisicalista. Ara bé, malgrat que els neopositivistes van intentar aconseguir aquest objectiu amb una competència científica i un rigor lògic molt superiors als dels primers positivistes, avui dia l'intent d'assolir la científicitat de les ciències socials a base de l'aplicació d'el "mètode científic" és un camí abandonat perquè: o bé no hi ha un mètode científic que serveixi com a criteri de demarcació, o bé si, d'acord amb Popper, acceptem que sí que existeix, i que serveix com a criteri de demarcació entre allò que és ciència i allò que no

ho és, hem de concloure que les ciències socials no ho són. Ara bé, la renúncia a l'aplicació del mètode científic a les ciències socials no implica la renúncia a convertir-les en ciències objectives de tipus positivista. Determinades aplicacions del punt de vista sistèmic a les ciències socials es poden considerar un nou intent perquè aquestes es converteixin en disciplines científiques de tipus positivista. L'aplicació de la teoria de sistemes permet obtenir un objecte que té unes propietats "objectives" que la ciència social en qüestió pot estudiar elaborant programes d'investigació provisionals que són susceptibles de ser modificades quan les noves observacions ho requereixin. Podem notar la influència d'aquest punt de vista en la teoria de les situacions didàctiques de Brousseau (1986) i en la teoria de la transposició didàctica de Chevallard (1997/1991), aquesta última anterior al seu punt de vista antropològic.

1.18 Repercussions en la Didàctica de les Matemàtiques. Psicologia cognitiva versus antropologia cognitiva.

En els apartats anteriors hem esbossat una sèrie de controvèrsies sobre les quals tota persona que es preocupa de la construcció del significat s'ha de posicionar de manera explícita o implícita. A continuació exposarem com el posicionament, explícit o implícit, sobre aquestes controvèrsies ha produït una evolució de la didàctica de les matemàtiques des de posicions centrades en la psicologia cognitiva fins a posicions centrades en anàlisis antropològiques. El nostre punt de vista sobre l'evolució de la disciplina "didàctica de les matemàtiques" és que no es pot explicar solament des d'un punt de vista intern (Gascón 1998) sinó que és imprescindible tenir en compte les controvèrsies que hem apuntat per tenir-ne una visió més completa. En aquesta evolució podem trobar quatre enfocaments diferents: 1) el que se centra en l'aprenentatge de l'alumne, 2) el que se centra en el pensament de l'alumne i en el del professor, 3) el que se centra en anàlisis sistèmiques i 4) el que se centra en anàlisis antropològiques. Des del nostre punt de vista, les limitacions que presenten cada un dels quatre enfocaments anteriors fan necessari un cinquè enfocament, que es comença a desenvolupar actualment, que intenti aconseguir una síntesi entre les anàlisis antropològiques, les anàlisis psicològiques i les anàlisis semiòtiques. Per últim, acabarem justificant el nostre posicionament en aquest darrer i incipient enfocament i explicarem com l'hem utilitzat per dissenyar les activitats de la unitat i per analitzar l'evolució del significat personal dels alumnes com a resultat del procés d'instrucció.

El primer enfocament està centrat en l'individu, concretament en l'aprenentatge de l'alumne, i els seus elements d'anàlisi són importats de la psicologia: aprenentatge significatiu, representacions mentals, valors, rols, actituds, motivacions, etc. El segon enfocament amplia la problemàtica didàctica en intentar explicar la complexitat de la interacció a l'aula tenint en compte aspectes relacionats amb el professor: el seu coneixement matemàtic, el seu punt de vista sobre el procés d'ensenyament-aprenentatge, les seves representacions, actituds, valors, etc. Malgrat aquesta ampliació de la problemàtica didàctica, la interacció a l'aula es considera a partir de propietats de l'alumne o el professor tals com representacions, valors, etc. La totalitat (professor i

alumne interactuant) és un munt sumatori més que una totalitat diferent de la suma de les seves parts. Aquests dos enfocaments, que es poden considerar el punt de vista clàssic en la didàctica de les matemàtiques, tenen per objecte primari de les seves investigacions les representacions mentals dels alumnes i dels professors. El seu posicionament en relació a algunes de les controvèrsies que hem apuntat abans és força clar: fan una opció molt definida pels enfocaments centrats en l'individu i per la utilització d'elements d'anàlisi desenvolupats per la psicologia..

Per als crítics dels enfocaments centrats en les representacions mentals dels individus (alumnes o professors), el punt de vista clàssic presenta limitacions importants que el porten a renunciar implícitament a l'ambició de construir la didàctica de les matemàtiques com a disciplina científica perquè, en interpretar la didàctica de les matemàtiques com una aplicació d'altres disciplines alienes a la pròpia didàctica com la psicologia, aquesta es converteix en un simple saber tècnic que té la seva justificació en altres disciplines (especialment la psicologia) alienes a la didàctica de les matemàtiques. Un nou enfocament en la didàctica de les matemàtiques va néixer quan Brousseau (1986) va apuntar la necessitat per a la didàctica d'utilitzar un model propi de l'activitat matemàtica escolar que permetés derivar o modificar els conceptes necessaris que eren importats d'altres disciplines: <<..El enfoque clásico considera como central la actividad cognitiva del sujeto, que, en primer lugar, debe ser descrita y comprendida de forma relativamente independiente. Supone después, al menos implícitamente, que los conocimientos sobre el conocimiento, necesarios para la enseñanza, deben establecerse también de manera independiente, por ejemplo, por la matemática y la epistemología. ocurre lo mismo con los conocimientos sobre las relaciones sociales específicas de la educación, etc. El enfoque clásico consiste, por tanto, en obtener consecuencias para la enseñanza de estos saberes preliminares, haciéndolo directamente, es decir, con el único apoyo de reflexiones "ingenuas".

Se trata de algo más que un matiz. ¿Los saberes importados de disciplinas fundamentales permiten por sí mismos, sin modificaciones e independientemente los unos de los otros, explicar fenómenos de enseñanza y producir de forma controlada las modificaciones deseadas? ¿Por el contrario, es necesario, crear conceptos nuevos, un campo de conocimiento y métodos cercanos (próximos a dichas disciplinas), para estudiar las situaciones didácticas?

Una de las hipótesis fundamentales de la didáctica consiste en afirmar que sólo el estudio global (la negreta és nostra) de las situaciones que presiden las manifestaciones de un saber, permite elegir y articular los conocimientos de orígenes diferentes, necesarios para comprender las actividades cognitivas del sujeto, así como el conocimiento que él utiliza y la forma en que lo modifica.

Una segunda hipótesis, más fuerte, consiste en decir que un primer estudio de las situaciones (didácticas) debiera finalmente permitir derivar o modificar los conceptos actualmente importados de otros campos científicos:

¿Existe una "variedad didáctica" de los conceptos de sentido, memoria, estructura, decimal, etc, desconocida en lingüística, en psicología o en matemáticas?>>(Brousseau 1986, pag. 39).

Brousseau comença estudiant els fenòmens lligats a la transposició didàctica (efecte Topaze, efecte Jourdain, el lliscament metacognitiu, l'ús abusiu de l'analogia i l'envelliment de les situacions didàctiques). El següent pas és explicar aquests fenòmens a partir de considerar l'ensenyament com la devolució d'una situació d'aprenentatge pel professor a l'alumne. La seva teoria de les situacions (situació didàctica, situació a-didàctica, situacions fonamentals, diferents tipus de situacions, contracte didàctic, etc) modelitza aquesta devolució com la negociació d'un contracte i permet en gran part explicar aquests fenòmens i preveure l'existència d'altres. Per últim, el resultat d'aquest enfocament el porta a considerar la situació escolar com un "sistema" i les relacions entre dos dels seus subsistemes: el sistema "ensenyant" i el "sistema ensenyat", que està format per dos subsistemes: el "sistema alumne" i el "sistema medi" i a modelitzar les relacions entre aquests sistemes a partir de les relacions que es produeixen en el joc: *"Modelizar una situación de enseñanza consiste en producir un juego específico del saber apuntado, entre diferentes subsistemas: el sistema educativo, el sistema alumno, el medio, etc. Se trata de describir precisamente estos subsistemas por las relaciones que mantienen en el juego."* (Brousseau 1986, pag. 75)

Brousseau opta clarament per un enfocament sistèmic com a alternativa al punt de vista clàssic en didàctica de les matemàtiques. Però a més ho fa d'una forma bastant radical, ja que opta per un punt de vista sistèmic que deixa poc joc als processos intrapsíquics d'interiorització. En fer aquesta opció aconsegueix, per una banda, allunyar-se de la psicologia i, per l'altra, obté un objecte que pot ser estudiat per una nova disciplina científica: la didàctica fonamental: *<<El enfoque (sistémico) clásico de las situaciones de enseñanza acentúa los sistemas concretos presentes (el maestro, el alumno) y sus funciones, sus propiedades. Conduce a examinar, con ayuda del modelo de funcionamiento social, la manera en que estas funciones se aseguran y se interiorizan. Las dificultades que se observan serán entonces imputadas a malas respuestas dadas a las necesidades del sistema. Este razonamiento constituye una "reificación", (Berger y Luckmann, 1966), es decir, que el esquema abstracto y la realidad "deben" coincidir, y que no hay lugar para la experiencia y para la falsación. Por el contrario, la descomposición en subsistemas, considerados aquí, tiene por objeto la definición de juegos que permitan coordinar las estrategias opuestas de los "jugadores" que están en relación. Encontraremos así los juegos del alumno con su entorno didáctico, relativos al saber, los juegos del maestro que juega con los juegos del alumno...Se trata de postular el objeto del estudio didáctico y probar su existencia. El método apareció en los años setenta, en los trabajos que reagrupamos a continuación, y fue mejorado de forma empírica. Este método se aproxima al preconizado por Crozier y Friedberg (1977) para el estudio de los sistemas sociales y políticos:*

"Si se pudiesen... descubrir estrategias suficientemente estables dentro de un conjunto (de personas) y se pudiesen, por otra parte, descubrir los juegos, las reglas del juego y las reglamentaciones de estos juegos a partir de los cuales estas estrategias pueden ser efectivamente consideradas como racionales, se tendría a la vez, la prueba efectiva de que este conjunto puede ser considerado como un sistema y respuestas

precisas sobre su modo de gobierno>> (Brousseau 1986, pàgs. 84-85).

Chevallard també considera que l'aplicació del punt de vista sistèmic a les situacions escolars ens porta a un objecte preexistent i independent de nosaltres, que pot i ha de ser estudiat per una nova disciplina científica. <<*Para ello conviene partir de muy lejos: de la posibilidad misma de la existencia de una ciencia que llamamos "la didáctica de las matemáticas". Toda ciencia debe asumir, como primera condición, pretenderse ciencia de un "objeto", de un objeto real, cuya existencia es independiente de la mirada que lo transformará en un objeto de conocimiento. Es la posición materialista mínima (...)* Pero ¿cuál es en realidad ese objeto? El didacta de las matemáticas se interesa en el juego que se realiza -tal como lo puede observar, y luego reconstruir, en nuestras clases concretas- entre un "docente", los "alumnos" y un "saber matemático". Tres lugares, pues: es el "sistema didáctico" >>. (Chevallard 1997, pàgs. 12-15).

Una de les principals característiques de l'enfocament sistèmic de Chevallard és el paper tan important que juga la relació del sistema amb l'entorn. Per a Chevallard, els sistemes didàctics són sistemes oberts, és a dir, no es comprèn allò que ocorre en el seu interior si no es té en compte el seu exterior. Els sistemes didàctics són formacions que apareixen cada any cap al mes de setembre: al voltant d'un saber (designat ordinàriament pel programa), es forma un contracte didàctic que agafa aquest saber com a objecte d'un projecte compartit d'ensenyament-aprenentatge que uneix docents i alumnes en un mateix lloc. L'entorn immediat d'un sistema didàctic està constituït inicialment pel sistema d'ensenyament, que reuneix el conjunt de sistemes didàctics i té al seu costat un conjunt diversificat de dispositius estructurals que permeten el funcionament didàctic i que intervenen en aquest procés en diversos nivells. El sistema d'ensenyament té el seu propi entorn, que és la societat. Aquest entorn és d'una gran complexitat; s'hi troben els matemàtics, els pares i les autoritats educatives. La part més pròxima al sistema d'ensenyament és el lloc on es troben els representants del sistema d'ensenyament amb els representants de la societat (els pares, els especialistes en la disciplina i les autoritats educatives). Per a aquesta instància Chevallard utilitza el nom "noosfera". La importància que dóna Chevallard a la relació entre el sistema didàctic i el seu entorn el porta a afirmacions com la següent: "*¡El sistema didáctico no existe sino para ser compatible con su entorno; y esta compatibilización pasa por una disminución de la conciencia del entorno por parte de los agentes del sistema!*" (Chevallard 1997, pàg. 18).

Per a Chevallard, la relació entre el sistema i el seu entorn passa per la transposició didàctica. Chevallard (1997/1991) considera que els continguts que formen part del coneixement matemàtic han sofert un procés de descontextualització per poder incorporar-se al corpus matemàtic. Aquest corpus és anomenat "saber savi". Perquè el saber savi pugui ser ensenyat pel professor, cal que aquest tingui els coneixements necessaris per poder-lo ensenyar. Allò que ha de saber el professor per poder ensenyar el saber savi s'anomena "saber que es vol ensenyar". Per últim, allò que realment és ensenyat rep el nom de "saber ensenyat". Perquè un concepte del saber savi es

converteixi en saber ensenyat és necessària una adaptació didàctica que permeti un aprenentatge significatiu dels alumnes. Chevallard anomena “transposició didàctica” al procés que converteix el saber savi, primer en saber que es vol ensenyar, i després, en saber ensenyat. Aquest procés implica la recontextualització i la repersonalització dels coneixements que ha de fer el professor per a presentar aquests coneixements a l'alumne, de manera que els conceptes apareguin com la resposta més idònia a la situació concreta (context) presentada pel professor. Per tancar el procés, l'apropiació del concepte per part de l'alumne requereix necessàriament que aquest torni a redescontextualitzar i redpersonalitzar el saber, a efectes d'identificar-lo amb sabers integrants del corpus científic de la comunitat cultural a la qual pertany.

La transposició didàctica relaciona un element del sistema didàctic (saber en el sistema didàctic) amb un element exterior al sistema (el saber savi). Això vol dir que la relació més important entre el sistema i el seu exterior és una relació entre dos objectes que tenen un status ontològic problemàtic. El punt de vista sistèmic de Chevallard deixa obert el problema següent: quin tipus d'existència té el saber? Com es genera el saber savi? Les primeres formulacions de Chevallard basades en les anàlisis sistèmiques i en la transposició didàctica han deixat pas a un nou enfocament en didàctica de les matemàtiques: l'enfocament antropològic. Les causes d'aquest canvi d'enfocament, segons el nostre parer, són bàsicament dues: 1) un qüestionament implícit dels plantejaments sistèmics i 2) la constatació que era necessària una reflexió profunda sobre el saber savi i sobre la seva gènesi, ja que no bastava només amb una reflexió sobre la transposició d'aquest “saber savi” en “saber a ensenyar” i en “saber ensenyat”, ni era suficient la distinció entre objectes matemàtics, paramatemàtics i protomatemàtics. Mentre que aquesta segona causa és molt evident en la proposta antropològica de Chevallard, la primera no ho és tant i només es pot detectar en l'ús d'un nou llenguatge en què han desaparegut els termes sistèmics.

L'enfocament antropològic en didàctica de les matemàtiques proposat per Chevallard (1992) propugna que l'activitat matemàtica s'ha d'interpretar com una activitat humana, i no considerar-la únicament com la construcció d'un sistema de conceptes, com la utilització d'un llenguatge o com un procés cognitiu. L'enfocament antropològic de Chevallard considera que les coses materials, les persones, les idees, les institucions, els conceptes, etc són objectes. Chevallard suposa que el món de les nostres experiències està format per objectes, que tot allò que podem veure, tocar, pensar, etc és objecte. Chevallard resol el problema de l'existència dels objectes intencionals postulant que l'existència dels objectes no es pot considerar independentment de les persones o de les institucions. L'antropologia cognitiva proposada per Chevallard permet resoldre el problema de l'existència dels continguts matemàtics de la manera següent: un objecte matemàtic existirà si les persones (individualment o organitzades en institucions) consideren que existeix. Dit d'una altra manera, el problema no és si existeixen o no els objectes matemàtics sinó entendre com les institucions matemàtiques o les persones, com a resultat de la seva activitat, arriben a considerar que tenen algun tipus d'existència. Aquest enfocament antropològic necessita elaborar un model de com es produeixen les

matemàtiques en les institucions, que inclogui l'ensenyament-aprenentatge escolar de les matemàtiques com una activitat matemàtica institucional particular.

Chevallard (1992) i els seus col·laboradors (Gascón 1998) consideren que el seu enfocament antropològic és un programa d'investigació diferent del programa sistèmic proposat inicialment, però el consideren una conseqüència natural del desenvolupament de la teoria de la transposició didàctica. En canvi, nosaltres considerem que hi ha suficients diferències per considerar-los dos programes d'investigació distints amb una clara ruptura entre ells. Segons el nostre parer, l'enfocament sistèmic inicial està immers en el llenguatge objectivista, ja que la seva pretensió és aconseguir una disciplina científica, mentre que l'enfocament antropològic proposa un joc de llenguatge diferent en què l'objectiu és explicar l'activitat matemàtica en les institucions (que ja no són sistemes). La nostra opinió particular és que un canvi de joc de llenguatge d'aquestes característiques hauria de ser més explícit i explicar clarament quines regles del primer joc de llenguatge han estat abandonades o modificades i quines s'han mantingut. Nosaltres creiem que aquest canvi de joc de llenguatge implica, entre moltes altres coses, l'abandonament de la creació d'una disciplina científica que tingui per objecte d'estudi el "sistema didàctic". Fins i tot no descartem que, si el desenvolupen coherentment, aquest gir antropològic impliqui l'abandonament, no només de l'objecte "sistema didàctic" sinó també de l'objectiu de convertir la didàctica de les matemàtiques en una disciplina científica de tipus positivista.

Si bé Brousseau agafa com a referent la teoria de sistemes aplicada a la sociologia de Crozier i Friedberg (1977), les seves crítiques a la investigació-acció es poden considerar com una controvèrsia local de la controvèrsia global que ha mantingut la teoria de l'acció comunicativa de Habermas (1988) amb la teoria de sistemes aplicada a la sociologia de Luhmann (1998). Segons Habermas, la teoria de sistemes de Luhmann no pot fer-se càrrec del gir lingüístic i pragmàtic en filosofia, dels paradigmes interpretatius en sociologia i antropologia o, del desenvolupament de l'hermenèutica i de l'enfocament psicològic reconstructiu de la moral. Per a Habermas, la intersubjectivitat del llenguatge ordinari i la interacció són incompatibles amb el model sistèmic de comunicació social proposat per Luhmann. La nostra opinió és que la crítica de Habermas també és aplicable al model sistèmic proposat per Brousseau i Chevallard. En canvi, considerem que la teoria antropològica de Chevallard permet fer-se càrrec, en part, del gir lingüístic i pragmàtic en filosofia.

El gir antropològic en la didàctica de les matemàtiques proposat per Chevallard ens sembla interessant perquè obre unes perspectives prometedores de cara a la integració de molts enfocaments parcials (epistemològics, psicològics, lingüístics, sociològics, etc.). La nostra opinió és que l'estudi de les activitats humanes no pot fer-se des d'una sola perspectiva sinó que és necessari el concurs de moltes disciplines diferents. En particular, creiem que en l'activitat matemàtica escolar, els objectes no ostensius dels alumnes (personals) juguen un paper molt important i s'han de tenir en consideració donant cabuda a algun tipus d'anàlisi psicològica. Igualment, considerem molt importants

en l'activitat matemàtica els objectes ostensius, per la qual cosa també cal integrar les anàlisis semiòtiques. Aquestes consideracions ens porten a proposar un nou enfocament que integri, dins del marc antropològic, anàlisis semiòtiques i psicològiques. Creiem que aquesta integració d'enfocaments pot ser més rica per a la disciplina "didàctica de les matemàtiques" que no plantejaments reduccionistes, encara que aquests es justifiquen per l'objectiu de convertir la didàctica de les matemàtiques en una disciplina científica de tipus positivista.

A continuació comentarem breument algunes investigacions en didàctica de les matemàtiques que hem tingut en compte en aquesta investigació, seguint aquest ordre: 1) les que posen l'accent en les representacions mentals, 2) les que van incorporant elements semiòtics i contextuals, 3) les que posen l'accent en l'antropologia cognitiva i 4) les que es plantegen una síntesi entre la semiòtica, l'antropologia i la psicologia cognitiva.

1.18.1 Concepte definició i concepte imatge

Mentre els psicòlegs cognitius discutien quins elements contenien els esquemes arxivats en la memòria a llarg termini, dintre del camp del pensament matemàtic avançat, es va formular una proposta d'esquema que té unes característiques pròpies. Vinner (1991) considera que quan escoltem o veiem el nom d'un concepte, quelcom és evocat en la nostra memòria. Allò que evoquem no és la definició del concepte sinó allò que ell i Tall anomenen "concept image" (Tall i Vinner 1981) i d'altres (Davis 1984) anomena "concept frame". Vinner considera que <<El concepte imatge és quelcom no-verbal associat en la nostra ment amb el nom del concepte. Pot ser una representació visual del concepte en el cas que el concepte tingui representacions visuals; també pot ser una col·lecció d'impressions o experiències. Les representacions visuals, les figures mentals, les impressions i les experiències associades amb el nom del concepte poden ser traduïdes verbalment. Però és important recordar que les expressions verbals no són la primer cosa evocada en la nostra memòria. Apareixen en una fase posterior. Per exemple, quan escoltem la paraula "taula", una figura d'una certa taula pot evocar-se en la nostra ment.....Quan tu escoltes la paraula "funció", d'altra banda, pots evocar l'expressió " $y = f(x)$ ", pots visualitzar la gràfica d'una funció, pots pensar en funcions específiques tals com $y = x^2$ o $y = \sin x$, $y = \ln x$, etc.>> (Vinner 1991, pàg 68). Vinner postula l'existència de dues cel·les diferents en la nostra estructura cognitiva. Una cel·la és per a la definició del concepte i l'altra és per al concepte imatge. Hi pot haver alguna interacció entre les dues cel·les, encara que també es poden formar de manera independent.

Vinner considera que a la definició del llibre li correspon una definició personal, mentre que els exemples i símbols del llibre generen les seves imatges mentals respectives. Aquestes imatges mentals són considerades els elements que formen el concepte imatge juntament amb totes les propietats i procediments que caracteritzen el concepte (Tall i Vinner 1981). Una altra característica és que Vinner (1991) parla de dues cel·les en la

nostra memòria, però no especifica si es refereix a la memòria a llarg termini. La falta de definició sobre aquest tema i la manera de considerar la relació entre el concepte imatge i el concepte definició ens fa considerar que Vinner s'interessa bàsicament per les relacions entre el concepte imatge i el concepte definició quan són activats per la realització d'alguna tasca. Una altra característica és el paper secundari que juga el context. Si bé en la proposta de concepte imatge de Vinner es té en compte la importància del context, perquè consideren que segons el context s'evoca una part o una altra del concepte imatge (Vinner 1991 i Vinner i Tall 1981), aquest no té el paper central que li donen altres propostes.

1.18.2 Esquemes conceptuals

La proposta formulada per Vinner i Tall de distingir entre el concepte imatge i el concepte definició ha tingut força ressò entre els investigadors sobre el pensament matemàtic avançat. Durant els anys 80 i 90 hi ha hagut moltes investigacions que han intentat estudiar l'estructura del concepte imatge dels alumnes (o dels professors) per a diferents conceptes. Un dels projectes que més ha treballat en aquesta direcció ha estat el projecte "Processos de pensament matemàtic avançat" dirigit per la doctora Carmen Azcárate del Departament de Didàctica de les Matemàtiques i les CCEE de la UAB. (Azcárate (1990, 1992, 1995, 1997), Delgado (1998), Delgado i Azcárate (1996), Moreno i Azcárate (1997) i Romero (1996)). Les investigacions del grup de la UAB han desenvolupat i enriquit tant la manera d'entendre el concepte imatge i el concepte definició, que podríem dir que la seva proposta de concepte imatge és força diferent de la proposta inicial formulada per Vinner (1991). Les diferències entre les dues propostes, segons el nostre parer, són bàsicament les següents:

- 1) La investigació està centrada sobre el concepte imatge. El concepte definició, considerat com un concepte institucional previ, és un objecte que no és el focus principal de la investigació, perquè allò que s'investiga és l'estructura del concepte imatge de l'alumne.
- 2) El concepte definició no és considerat com una cel·la en la memòria de les persones diferent de la del concepte imatge, sinó que és considerat com el concepte institucional. Quan es considera la reconstrucció personal d'una definició acceptada per la comunitat matemàtica, aquesta és considerada, de fet, com a part del concepte imatge de la persona.
- 3) La utilització de l'expressió "esquema conceptual" en comptes de la traducció literal "concepte imatge" és una manera implícita de reconèixer que la seva proposta, si bé té el seu origen en el concepte imatge, no és exactament el mateix.
- 4) Una major preocupació per clarificar quins són els components dels esquemes conceptuals: "*Se puede decir que el esquema conceptual que una determinada persona tiene de un concepto matemático, está formado por el conjunto de imágenes mentales, por las propiedades características, por los procedimientos y por las experiencias que la persona en cuestión asocia al concepto, más exactamente al nombre del concepto*" (Azcárate, 1997, pàg. 29). Aquest interès per clarificar l'estructura dels esquemes conceptuals i els components que proposen, s'aproxima molt a la proposta d'esquema que fa la psicologia cognitiva. A més, com que el que interessa són els esquemes en acció,

la polèmica sobre si existeix un format específic de tipus figuratiu, diferent del format proposicional, que serveix per arxivar en la memòria a llarg termini les imatges mentals, perd virulència perquè: 1) o bé existeix la "imatge mental cosa" arxivada en la memòria a llarg termini, 2) o bé la informació en format proposicional arxivada en la memòria a llarg termini permet generar la imatge mental com un objecte construït i mantingut breument en una amplitud d'atenció limitada, que és percebuda com un producte mental que, si es vol, es pot projectar, per exemple, sobre un full de paper. És a dir, si ens proposem investigar els esquemes en acció no resulta problemàtic considerar que les imatges mentals són un dels elements que formen els esquemes.

5) Hi ha una acceptació implícita de la importància del context com a resultat de les seves investigacions. Això és així perquè les investigacions sobre els esquemes conceptuals dels alumnes que ha realitzat aquest grup determinen perfils d'alumnes. Aquests perfils es poden considerar com a diferents nivells de camps semàntics personals. És a dir, com a diferents nivells en la capacitat d'utilitzar el concepte en diferents contextos. Per exemple, Azcárate (1990), en la seva tesi doctoral, a partir d'una investigació sobre els esquemes conceptuals dels alumnes respecte a la noció de pendent d'una recta, classifica els esquemes dels alumnes en tres categories:

- El perfil "geomètric". Correspon a una majoria important i caracteritza els alumnes que en les seves expressions utilitzen elements propis del llenguatge geomètric, tant descriptiu com analític, i suggereix un esquema conceptual amb imatges gràfiques del pendent d'una recta.
- El perfil "operatiu". Caracteritza els alumnes que, davant de la demanda d'explicar el significat de pendent, contesten donant un algorisme operatiu que, o bé serveix per a reconèixer i/o calcular el pendent en l'equació de la recta o bé descriu la funció.
- El perfil "funcional". Caracteritza els alumnes que han definit el pendent com un quocient entre els increments de les variables.

Aquesta classificació també es pot interpretar de la manera següent: el camp semàntic del concepte pendent permet usar-lo en un context geomètric, algèbric, trigonomètric i funcional. Hi ha alumnes que tenen un camp semàntic personal que només els permet utilitzar-lo en un context geomètric, d'altres, només en un context algèbric, etc.

Nosaltres creiem que la proposta d'esquema conceptual formulada pel grup de la UAB, d'una banda, és un intent de desenvolupar la noció de concepte imatge en la direcció que proposa la psicologia cognitiva, i d'altra banda, és una proposta en què el context, almenys implícitament, de cada vegada juga un paper més important.

1.18.3 Camps conceptuals

A França hi ha hagut diverses aportacions sobre la formació de conceptes en general, que també hem tingut en compte. Vergnaud (1990b) considera un concepte com una terna formada per:

- 1) el conjunt de situacions que fan significatiu el concepte, que ell considera com la

referència del concepte,

2) el conjunt d'invariants que constitueixen el concepte, que ell considera com el significat del concepte

3) el conjunt de formes lingüístiques i no lingüístiques que permeten representar simbòlicament el concepte, les seves propietats, les situacions i els procediments de tractament, que ell considera com el significat del concepte.

1.18.4 Concepcions

Una proposta que té molts punts de contacte amb el concepte imatge, l'esquema conceptual i els camps conceptuels és la proposta de "concepció". Artigue (1990) analitza com s'ha utilitzat la noció de concepció en la comunitat d'investigadors en didàctica de les matemàtiques francesa i dona la seva pròpia definició:

"De la mateixa manera que en un concepte matemàtic es distingeix:

- *la noció matemàtica tal com es defineix en el context del saber savi en una determinada època,*
- *el conjunt dels significants associats al concepte,*
- *la classe de problemes en la resolució dels quals adquireix sentit,*
- *els instruments: teoremes i tècniques algorísmiques específiques del tractament del concepte;*

en les concepcions dels subjectes es distingiran diversos components, i, en particular:

- *la classe de situacions-problemes que donen sentit al concepte per a l'alumne*
- *el conjunt dels significants que és capaç d'associar-li, en particular les imatges mentals, les expressions simbòliques,*
- *els instruments, teoremes, algorismes de què disposa per a manipular el concepte." (Artigue, 1990, pàg. 271).*

Artigue en la seva proposta considera com a essencial la classe de situacions- problemes que donen sentit al concepte per a l'alumne. Aquest èmfasi en la importància del context creiem que seria la principal diferència respecte del concepte imatge i de l'esquema conceptual comentats anteriorment.

1.18.5 Teoria de les situacions

La teoria de les situacions postula que, donat un coneixement matemàtic C^M , existeix una "situació fonamental" $S(C^M)$ associada a aquest coneixement, això és, un conjunt mínim de "situacions adidàctiques" que permeten engendrar, per manipulació dels valors que prenen les seves variables didàctiques, un camp de problemes $P(S(C^M))$ que proporciona una representació òptima de C^M .

$$C^M \text{ -----} > S(C^M) \text{ -----} > P(S(C^M)) \text{ -----} > C^M$$

Això vol dir que els problemes de $P(S(C^M))$ únicament poden ser resolts de manera òptima (respecte d'un conjunt de restriccions especificades en la pròpia situació) mitjançant l'estratègia induïda pel coneixement C^M . Llavors es considera que la situació associada $S(C^M)$ proporciona el seu sentit al coneixement C^M , ja que genera una activitat matemàtica al voltant de $P(S(C^M))$ que provoca l'emergència d'un coneixement C^M que té la mateixa forma i les mateixes funcions que té C^M tal com ha estat reconstruït en la institució didàctica I .

Una de les principals afirmacions de Brousseau (1986 i 1997) és que el sentit d'un coneixement, la situació associada $S(C^M)$ en forma part integrant i no se'n pot separar; per tant, l'ensenyament d'un coneixement institucionalitzat no pot deixar de tenir en compte la situació fonamental que li dona el seu sentit.

1.18.6 Joc de quadres i dialèctica útil-objecte.

Douady (1991) comparteix una noció pragmàtica del significat. Atribueix als conceptes matemàtics un caràcter no unitari, identificant-ne dos aspectes: l'aspecte objecte (cultural, impersonal i intemporal), plasmat en definicions i propietats característiques, i l'aspecte útil o eina per a resoldre problemes en un moment donat. D'altra banda considera que el "*significat d'un concepte deriva del context en què està implicat. Per tant, és el status com a útil allò que entra en joc. També deriva de les relacions desenvolupades en el context amb altres conceptes en el mateix domini matemàtic o no*" (Douady 1991, pàg. 116). També considera que un concepte es pot presentar des de diversos punts de vista o "quadres". El concepte de proporcionalitat, per exemple, es pot presentar des de diferents quadres com són: el numèric, el geomètric o el de les magnituds.

1.18.7 Els objectes mentals des de postulats fenomenològics i semiòtics

Des del punt de vista de l'anàlisi fenomenològica, els conceptes matemàtics són mitjans per organitzar fenòmens del món. Aquests són representats en sistemes matemàtics de signes, que es converteixen en fenòmens que són organitzats per un nou concepte en una progressió escalonada de parells fenòmens/mitjans d'organització. Aquesta progressió produeix conceptes matemàtics cada cop més abstractes. Per a Puig (1997) en aquesta progressió escalonada no es generen objectes ideals que se situen en un món aliè al de la nostra experiència. Els conceptes creats no romanen immutables, ja que es modifiquen en la història com a conseqüència del seu ús i dels nous sistemes matemàtics de signes que els descriuen. Això no vol dir, però, que les modificacions d'un concepte indiquin que el concepte original era erroni i que hàgim de veure la història dels conceptes matemàtics com un avanç cap a la veritat, ja que no es considera que els objectes matemàtics tinguin una existència anterior al procés que els crea. Les causes de la modificació dels conceptes al llarg de la història les hem de buscar en la pressió que sofreixen en estar involucrats en la prova de teoremes, en la resolució de problemes o en la manera com es defineixen per ser integrats en teories deductives. Puig (1997), a partir d'una lectura pragmàtica i semiòtica de Freudenthal (1983) explica com les persones constitueixen objectes mentals.

La totalitat d'usos d'un objecte institucional en tots els contextos constitueix el camp semàntic "enciclopèdic" de l'objecte institucional. La identificació del context en què l'objecte institucional s'està usant permet al subjecte tenir en compte la restricció semàntica que estableix el context per poder-lo usar satisfactòriament. El subjecte no opera en la totalitat d'usos produïda per la institució, sinó en un camp semàntic personal que ha anat constituint en contextos que li exigien nous usos. Aquesta manera d'entendre els objectes mentals és el resultat de considerar que el context és l'element bàsic en la construcció del significat. Aquesta focalització en el context té implicacions didàctiques importants. La principal és que l'objectiu de la instrucció ha de ser la constitució d'objectes mentals com més rics millor per a ser usats en la majoria de contextos en què intervenen.

1.18.8 Antropologia cognitiva

Chevallard, en la seva proposta antropològica, considera l'objecte matemàtic com un emergent d'un sistema de pràctiques on són manipulats objectes materials, que es desglossen en diferents registres semiòtics: registre d'allò oral, paraules o expressions pronunciades; registre d'allò gestual; domini de la inscripció, allò que s'escriu o dibuixa (grafismes, formulismes, càlculs, etc.), és a dir, registre d'allò escrit. Anomena "praxema" als objectes materials lligats a les pràctiques i usa aquesta noció per definir l'objecte com un emergent d'un sistema de praxemes. Chevallard no s'interessa per la noció de significat d'un objecte; centra la seva atenció en una nova noció teòrica que denomina relació a l'objecte (*rapport à l'objet*), sobre la qual basa la seva teoria del coneixement, o més ben dit, la seva antropologia cognitiva en què situa la didàctica. En aquest marc teòric: *"un objecte existeix des que una persona X o una institució I reconeix aquest objecte com un existent (per a ella). Més precisament, es dirà que l'objecte O existeix per a X (resp., per a I) si existeix un objecte, que represento per $R(X,O)$ (resp., $R(O)$) que anomeno relació personal de X a O (resp., relació institucional de I a O)"* (Chevallard, 1992, pàg. 9). En els últims desenvolupaments de l'enfocament antropològic (Chevallard, 1996) es modelitza la matemàtica institucional mitjançant la noció d'"obra matemàtica". No es diu allò que és una obra matemàtica, però es proposa un model de la seva estructura a partir dels elements que la constitueixen. Es postula que una obra matemàtica, com tota obra humana, sorgeix sempre com a resposta a un conjunt de qüestions i com a mitjà per resoldre, en el si d'una certa institució, determinades tasques problemàtiques. Les qüestions i les tasques problemàtiques que respon una obra matemàtica acaben cristal·litzant en un o més tipus de problemes per als quals existeix una tècnica matemàtica capaç d'abordar-los i de generar molts més problemes del mateix tipus.

Çap tècnica pot donar-se en una institució si aquesta no la considera vàlida. L'existència d'una tècnica suposa, per tant, que existeixi en el seu entorn un discurs interpretatiu i justificatiu de la tècnica així com del seu àmbit d'aplicabilitat o validesa. Aquest discurs sobre una tècnica rep el nom de tecnologia. A més de justificar-la i fer-la intel·ligible, la tecnologia té la important funció d'aportar elements per a modificar la tècnica amb la

finalitat d'ampliar-ne l'abast, superant així les seves limitacions i possibilitant la producció de noves tècniques. Altres elements que també formen part de la tecnologia associada a una tècnica són les proposicions que descriuen el seu abast, la seva relació amb altres tècniques, les seves possibles generalitzacions i les causes de les seves limitacions. La tecnologia associada a una tècnica és, en general, un discurs matemàtic que, com a tal, requereix també una interpretació i justificació institucional. S'anomena teoria associada a una tècnica a la tecnologia de la seva tecnologia, això és, a un discurs matemàtic prou ampli per justificar i interpretar la tecnologia associada a una tècnica. Chevallard considera que el procés d'estudi d'una obra matemàtica en el si d'una institució s'estructura en diferents moments. Denomina moment del primer exemple aquell que fa aparèixer un camp de problemes als estudiants. El segueix el moment explorador que té com a primera funció que l'estudiant utilitzi el pensament conjectural amb prioritat sobre el pensament lògic, en la cerca d'alguna manera d'enfrontar-se amb els problemes. El moment del treball de la tècnica completa el moment explorador i pretén que els estudiants tinguin un domini potent de les tècniques prèviament explorades, que poden explicitar-les, variar-les i relacionar-les. El procés s'acaba amb els moments d'institucionalització i avaluació.

1.18.9 Significat institucional i personal dels objectes matemàtics

La distinció entre el domini d'allò personal i d'allò institucional i de les seves mútues interdependències és un dels eixos principals de l'antropologia cognitiva. Godino i Batanero (1994) consideren que l'antropologia cognitiva de Chevallard posa un èmfasi excessiu en allò institucional que pot ocultar l'esfera d'allò mental, dels processos de cognició humana, els quals queden diluïts en la teorització de Chevallard. Per a aquests investigadors, un enfocament sistèmic de la Didàctica no pot prescindir de l'esfera d'allò mental. La consideració explícita d'aquest domini els porta a diferenciar entre "objecte institucional", base del coneixement objectiu i "objecte personal" (o mental), base del coneixement subjectiu. Les pràctiques matemàtiques, els objectes que hi intervenen, i els que n'emergeixen, estan organitzats entorn de la finalitat de resoldre situacions problemàtiques. Per aquest motiu Godino i Batanero agafen com a noció primitiva la de "situació-problema" per a la formulació d'una ontologia dels objectes matemàtics que té en compte el triple aspecte de la matemàtica: com a activitat de resolució de problemes, socialment compartida, com a llenguatge simbòlic i sistema conceptual lògicament organitzat. Agafant com a noció primitiva la de situació-problemàtica, defineix els conceptes teòrics de pràctica, objecte (personal i institucional) i significat (personal i institucional).

"DEFINICION 1: Llamamos práctica a toda actuación o manifestación (lingüística o no) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución, validar la solución y generalizarla a otros contextos y problemas." (Godino i Batanero 1994, pàg. 334).

En les pràctiques matemàtiques intervenen objectes materials o abstractes, els quals

poden estar representats en forma textual, oral, gràfica o fins i tot gestual. Les pràctiques personals poden ser actuacions observables, això és, manifestacions empíriques, o també accions interioritzades no observables directament. Aquesta noció general de pràctica permet tenir en compte el principi Piagetian de la construcció del coneixement a través de l'acció.

“DEFINICION 2: Diremos que una práctica personal es significativa (o que tiene sentido) si, para la persona, esta práctica desempeña una función para la consecución del objetivo en los procesos de resolución de un problema, o bien para comunicar a otro la solución, validar la solución y generalizarla a otros contextos y problemas.” (Godino i Batanero 1994, pàg. 335).

Les pràctiques s'entenen tal com ho fa el punt de vista interpretatiu en les ciències socials, és a dir, són considerades accions que tenen un sentit, tant per a qui la realitza com per a qui la interpreta. Generalment, les situacions problemàtiques i les seves solucions són socialment compartides, això és, estan vinculades a institucions.

“DEFINICION 3: Una institución (I) está constituida por las personas involucradas en una misma clase de situaciones problemáticas. El compromiso mutuo con la misma problemática conlleva la realización de unas prácticas sociales compartidas, las cuales están, asimismo, ligadas a la institución a cuya caracterización contribuyen.” (Godino i Batanero 1994, pàg. 336).

La institució matemàtica són les persones que en el si de la societat estan compromeses en la resolució de nous problemes matemàtics. Són, per tant, els productors del “saber matemàtic”. Altres institucions (macro-institucions) involucrades en situacions matemàtiques són els “utilitzadors” del saber matemàtic (matemàtics aplicats) i els “ensenyants” del saber matemàtic (l'escola del saber matemàtic). En el si de les distintes institucions es realitzen certes pràctiques apropiades per aconseguir la solució del corresponent camp de problemes. Interessa considerar el conjunt de tals pràctiques des d'una perspectiva sistèmica, amb la finalitat d'esbrinar-ne l'estructura o principi organitzatiu.

“DEFINICION 4: Sistema de prácticas institucionales, asociadas a un campo de problemas: Está constituido por las prácticas consideradas como significativas para resolver un campo de problemas C y compartidas en el seno de la institución I.”

Su carácter social indica que son observables. Como tipos de tales prácticas sociales citamos: descripciones de problemas o situaciones, representaciones simbólicas, definiciones de objetos, enunciados de proposiciones y procedimientos que son invariantes característicos del campo de problemas, argumentaciones, (...) Representaremos a este sistema por la notación $P_I(C)$ ” (Godino i Batanero 1994, pàg. 337).

Donat que les pràctiques poden variar en les distintes institucions, hem de concedir a l'objecte una relativitat respecte a aquestes.

“DEFINICION 5: Objeto institucional O_I : Es un emergente del sistema de practicas sociales asociadas a un campo de problemas, esto es, un emergente de $P_I(C)$. Los elementos de este sistema son los indicadores empiricos de O_I .” (Godino i Batanero 1994, pàg. 338).

Aquesta emergència és progressiva al llarg del temps. En un moment donat és reconegut com a tal objecte per la institució, però fins i tot després d'aquesta etapa s'està sotmes a transformacions progressives segons es va ampliant el camp de problemes associat. L'objecte institucional pot conceptualitzar-se també com a signe de la unitat cultural constituïda per $P_I(C)$. Els objectes institucionals són els constituents del coneixement objectiu, considerat com a intersubjectiu. Si la institució I és la institució matemàtica M , l'objecte institucional rebrà el nom d'objecte matemàtic (poden ser conceptes, proposicions, teories, ...). S'ha de destacar que d'un camp de problemes poden emergir diversos objectes que, com a conseqüència, estan mútuament relacionats.

Amb aquesta definició d'objecte institucional es postula l'existència (com a producte cultural) de distints objectes, segons la institució de referència, en situacions on la concepció absolutista de les matemàtiques hi veu un únic objecte. El caràcter progressiu de la construcció dels objectes en la ciència té el seu paral·lelisme en l'aprenentatge del subjecte i en la invenció de noves idees matemàtiques. Això porta a proposar, en el pla personal, la introducció de les nocions: “sistema de pràctiques personals” i “objecte personal”.

“DEFINICION 6: Sistema de prácticas personales asociadas a un campo de problemas: Está constituido por las prácticas prototípicas que una persona realiza en su intento de resolver un campo de problemas C . Representamos este sistema por la notación $P_p(C)$ ”

DEFINICION 7: Objeto personal O_p : Es un emergente del sistema de prácticas personales significativas asociadas a un campo de problemas, esto es, un emergente de $P_p(C)$.” (Godino i Batanero 1994, pàg. 339).

L'emergència de l'objecte és progressiva al llarg de la història del subjecte, com a conseqüència de l'experiència i l'aprenentatge. Aquests objectes són els constituents del coneixement subjectiu. Godino i Batanero consideren que el significat dels objectes matemàtics ha d'estar referit a l'acció (interioritzada o no) que realitza un subjecte en relació amb aquests objectes. A més, consideren que cal diferenciar una dimensió personal i institucional per a aquest significat. Això els porta a proposar la següent definició:

“DEFINICION 8: Significado de un objeto institucional O_I : Es el sistema de prácticas institucionales asociadas al campo de problemas de las que emerge O_I en un momento

dado.” (Godino i Batanero 1994, pàg. 340).

Es tracta d'un constructe relatiu a la institució i dependent estocàsticament del temps. Simbòlicament, per a un temps t i una institució I : $S(O_I) = P_I(C)$. Si $I=M$, parlarem del significat matemàtic d'un objecte. Aquesta noció de significat permet introduir en la problemàtica epistemològica i didàctica l'estudi de les pràctiques socials (a partir de les quals emergeixen els objectes matemàtics), així com de la seva evolució temporal i dependència institucional. L'anàlisi semiòtica dels objectes institucionals implica la consideració de les situacions problemàtiques i dels objectes que intervenen en les activitats de resolució corresponents.

En correspondència amb la noció de significat d'un objecte institucional interessa introduir la noció de significat d'un objecte personal O_p en els termes següents:

“DEFINICION 9: Significado de un objeto personal O_p : Es el sistema de prácticas personales de una persona p para resolver el campo de problemas del que emerge el objeto O_p en un momento dado. Depende, por tanto, del sujeto y del tiempo estocásticamente. Simbólicamente, $S(O_p) = P_p(C)$ ” (Godino i Batanero 1994, pàg. 341).

Una part del significat és observable, encara que no ho són directament les pràctiques constituïdes per accions interioritzades. Una institució d'una importància particular per a la didàctica és la classe de matemàtiques. El professor ha de proporcionar a l'alumne un entorn d'aprenentatge que tingui en compte les directrius curriculars, els llibres de text i materials didàctics -que poden ser considerats també com a institucions portadores d'aspectes parcials del significat dels objectes corresponents-. Tot això es tradueix en que, per a un objecte matemàtic O_M , el professor realitza un procés de selecció de situacions, notacions, etc. que es traduiran en un significat restringit per a O_M . Dins d'aquesta institució (la classe de matemàtiques) un aspecte particularment important és l'avaluació de l'aprenentatge de l'alumne per part del professor en què cal confrontar el significat que es tracta de transmetre amb aquell efectivament assolit. Aquesta situació queda descrita en la següent definició:

“DEFINICION 10: Significado de un objeto O_I para un sujeto p desde el punto de vista de la institución I : Es el subsistema de prácticas personales asociadas a un campo de problemas que son consideradas en I como adecuadas y características para resolver dichos problemas.” (Godino i Batanero 1994, pàg. 342).

En conseqüència, d'un mateix camp de problemes C que en una institució I ha donat lloc a un objecte O_I amb significat $S(O_I)$, en una persona pot donar lloc a un objecte O_p amb significat personal $S(O_p)$. La intersecció d'aquests dos sistemes de pràctiques és allò que des del punt de vista de la institució es consideren manifestacions correctes, o sigui, allò que la persona “coneix” o “comprèn” de l'objecte O des del punt de vista de I . La resta de pràctiques personals serien considerades “errònies”, des del punt de vista de la institució. En una situació ideal, i en una institució donada, diríem que un subjecte

“comprèn” el significat de l'objecte O_I -o que ha “captat el significat” d'un concepte, per exemple- si és capaç de reconèixer les seves propietats i representacions característiques, relacionar-lo amb la resta d'objectes matemàtics i usar aquest objecte en tota la varietat de situacions problemàtiques prototípiques dins de la institució corresponent. La comprensió assolida per un subjecte en un moment donat difícilment serà total o nul·la, sinó que abastarà aspectes parcials dels diversos components i nivells d'abstracció possibles.

1.19 Conclusions

1) Considerem que l'exposició realitzada en els apartats anteriors és suficient per a justificar la necessitat de considerar tres nivells de significat (en la institució matemàtica, en la institució escolar i en el nivell personal). També considerem que hem donat prou arguments, si no per justificar, sí com a mínim per considerar plausible la hipòtesi H2 (subobjectiu 1.1).

2) En la didàctica de les matemàtiques les noves tendències tendeixen a fer anàlisis pragmàtiques del significat, a realitzar propostes constructivistes , a posar en qüestió el punt de vista representacionalista, a considerar les teories de la ciència des d'un punt de vista més instrumentalista i a donar més importància a l'antropologia cognitiva que a la psicologia cognitiva. Aquestes darreres tendències, segons Sfard (1998), estructuren l'aprenentatge de les matemàtiques a partir de la metàfora de la “participació” i abandonen la metàfora de “l'adquisició”.

3) En relació als significats personals, les propostes per a las quals el context és l'element bàsic en la construcció del significat permeten explicar com sorgeixen els objectes mentals i com podem fer-los créixer, però no expliquen quina pot ser la seva estructura interna. En relació a l'estructura interna, la psicologia cognitiva presenta propostes d'objectes mentals l'estructura dels quals està més explicitada.

4) La distinció entre el domini d'allò personal i d'allò institucional i de les seves mútues interdependències obliga a tenir en compte tant l'aspecte institucional com l'esfera d'allò mental. Si bé estem d'acord amb la nova direcció de la didàctica de les matemàtiques de tipus antropològic i històrico-social, considerem convenient integrar la psicologia cognitiva en aquesta nova concepció, encara que d'una manera secundària.

5) Des del nostre punt de vista la noció de significat d'un objecte institucional per a un subjecte des del punt de vista de la institució de Godino i Batanero (1994), i la d'objecte mental de Puig (1997) resulten molt operatives per dissenyar unitats didàctiques i per avaluar-ne la implementació, ja que ens permeten fer una anàlisi de dalt-baix que, a partir del significat en la institució escolar, permet una catalogació a priori dels possibles significats personals que podem esperar dels alumnes. La noció d'esquema de la psicologia cognitiva resulta menys operativa, encara que no neguem que també pugui ser eficaç, ja que, en ser estudis de baix-dalt, aquests són més personalitzats i és només a

posteriori, després de comparar els significats personals dels alumnes, que es fa una catalogació dels possibles significats personals que podem esperar-ne.

6) Al nostre parer, els constructes “significat personal”, “significat institucional” i “significat d'un objecte institucional per a un subjecte des del punt de vista de la institució” resulten molt útils per elaborar una unitat didàctica, ja que aquesta implica un procés d'elecció de contextos amb finalitat didàctica. El caràcter observable de les pràctiques socials permet, mitjançant un estudi fenomenològic i epistemològic realitzat adequadament, determinar, per a un objecte donat, el camp de problemes associat, així com el seu significat institucional. L'anàlisi de les variables didàctiques permet fer una reducció del significat institucional per un procés d'elecció de contextos, i dissenyar les possibles tasques pertinents per a l'avaluació dels coneixements subjectius.

7) L'instrument bàsic que hem utilitzat per dissenyar la unitat i per avaluar l'evolució del significat personal dels alumnes com a resultat de la seva implementació, ha estat el constructe <<Significat d'un objecte institucional X per a un alumne des del punt de vista de la institució escolar “classe de matemàtiques de 3r de BUP/1r de batxillerat”>>.

2 SUBOBJETIU 1.2: En relació al significat personal, justificar la hipòtesi H1.1 utilitzant les funcions semiòtiques com a instrument que permet l'anàlisi conjunta de la manipulació d'ostensius en un context social i del pensament que l'acompanya.

En l'apartat anterior hem explicat el marc teòric en què ens hem basat per postular tres nivells de significat (institucional, escolar i personal). En aquest apartat ens centrarem en el significat personal i intentarem aconseguir el subobjectiu 1.2

2.1 Les representacions en la didàctica de les matemàtiques

Fins ara hem utilitzat el terme "representació" amb dos sentits diferents. Per una banda hem considerat la representació com un objecte i, per l'altra, com una relació. També hem vist, en la controvèrsia representacionalisme versus no-representacionalisme, com aquesta relació es pot entendre de diferents maneres, des d'una relació homomòrfica entre objectes de dos móns diferents (versió forta) fins a una relació entre objectes del mateix món (versió dèbil). Aquestes diferents maneres d'entendre el procés de representació tenen una càrrega ontològica molt diferent tal com hem posat de manifest en el subobjectiu 1.1. A continuació exposarem diferents maneres d'entendre les representacions en la didàctica de les matemàtiques.

Per a la psicologia cognitiva, la cognició consisteix en la manipulació mental de representacions (símbols que es refereixen a "quelcom"). Els símbols mentals es consideren amb una certa corporeïtat⁷ (paraules pensades, evocació d'objectes, etc). La psicologia cognitiva no diu que si obrim el cap d'una persona i observem el cervell hi trobarem petits símbols, sinó que postula un nivell simbòlic per a la cognició, encara que accepta que aquests símbols són emergents de l'activitat cerebral. Dit d'una altra manera, la psicologia cognitiva suposa un nivell neurobiològic (1r nivell) del qual emergeixen els símbols (2n nivell), els quals representen "quelcom" (3r nivell). En relació als símbols mentals, els psicòlegs cognitivistes mantenen una polèmica que ha generat una abundant literatura. Hi ha psicòlegs que creuen en l'existència d'imatges espacials en la memòria a llarg termini, mentre que altres se situen en l'extrem contrari i rebutgen que tals imatges mentals es guarden en la memòria en un format figuratiu diferent del format proposicional, perquè consideren que la imatge no està arxivada com a tal en la memòria sinó que es produeix en recuperar, i codificar en format gràfic, el format proposicional arxivat en la memòria.

Els objectes representats pels símbols mentals poden ser objectes no-ostensius (conceptes, idees, etc) i objectes ostensius (amb suport material, intersubjectius en el sentit que es poden mostrar a un altre). Molts investigadors en didàctica de les matemàtiques es refereixen conjuntament als símbols mentals i als no-ostensius que representen com a representacions internes i als objectes ostensius com a representacions externes. Els objectes ostensius que formen part de les experiències materials de les persones, d'acord amb el punt de vista realista representacionalista, es consideren perceptes (representacions personals d'objectes reals exteriors al subjecte). Els no

ostensius es consideren com a objectes personals del subjecte. En el procés d'instrucció es pretén que aquests no-ostensius personals es corresponguin amb uns no-ostensius objectius, la qual cosa planteja el problema de la naturalesa d'aquests no-ostensius objectius, ja que si no tenim una idea clara d'allò que són els objectes matemàtics, difícilment podrem avaluar si una persona els ha après. En relació a la naturalesa d'aquests no-ostensius objectius hi ha bàsicament dos posicionaments: 1) els que els consideren objectes amb una existència independent de les persones i 2) els que els consideren objectes institucionals que són el resultat d'una construcció social. En el primer grup incloem tant el platonisme com el Món 3 de Popper (1992), el qual consisteix a admetre l'existència d'un coneixement sense subjecte cognoscent. Popper considera, a més del món de les coses, que anomena Món 1, i del món subjectiu, que anomena Món 2, un altre, que anomena Món 3, que està constituït per estructures objectives produïdes per les ments dels éssers vius; les quals, un cop produïdes, tindrien una existència independent del seu productor, sempre que estiguin codificades en objectes del Món 1. És a dir: el Món 3, el món de les idees, l'art, la ciència, el llenguatge, etc., és creat pel Món 1, però té existència independent del Món 1. En el segon grup, els no-ostensius objectius són considerats emergents de les pràctiques realitzades en una institució.

Si considerem que hi ha símbols mentals que representen "quelcom", aquest "quelcom" són o bé objectes ostensius, o bé no-ostensius personals. Els ostensius es consideren normalment perceptes d'objectes exteriors al subjecte, mentre que els no-ostensius personals apunten a uns no-ostensius objectius. Aquestes diferents classes d'objectes es poden dividir en dos móns, el de les experiències possibles de les persones on se situen els ostensius, els símbols mentals, els objectes no ostensius personals i els institucionals que n'emergeixen, i el món objectiu hipotètic on cal situar els objectes reals i els no-ostensius objectius que existeixen amb independència de les persones. Cada un d'aquests dos móns es pot dividir en dues esferes. El món de les experiències del subjecte es pot dividir en l'esfera d'allò material i la d'allò mental, mentre que el món objectiu es pot dividir en realitat i idees platòniques (coneixement objectiu). Segons quina d'aquestes esferes eliminem, segons quina emfasitzem i segons com les combinem, tindrem opcions epistemològiques molt diferents.

Aquests dos móns i les diferents esferes es poden il·lustrar amb l'esquema següent:

1	objectes reals
2	experiències materials de les persones (ostensius)
3	símbols mentals
4	no-ostensius personals
5	no-ostensius institucionals que emergeixen a partir dels no-ostensius personals
6	objectes platònics

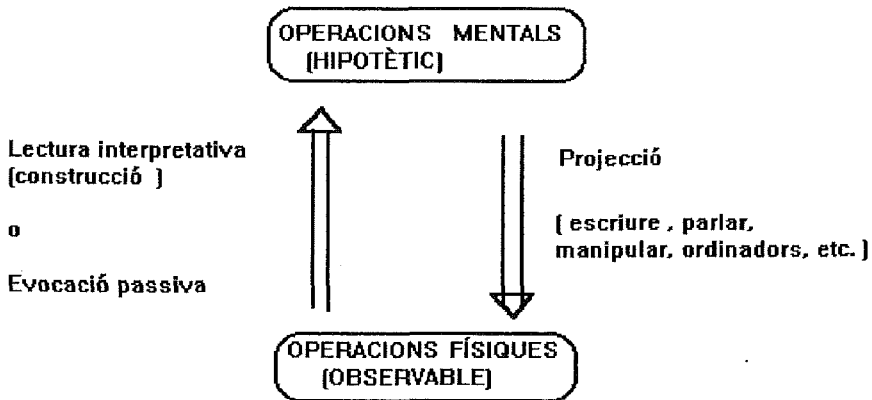
En la majoria d'investigacions sobre les representacions en didàctica de les matemàtiques no es distingeix entre els nivells 1 i 2, i es considera que els objectes ostensius (nivell 2) són les representacions externes i també se considera que els nivells 3 i 4 són les representacions internes. Les representacions externes podem classificar-les en dos grans grups: les digitals, discretes, de caràcter alfanumèric, la sintaxi de les quals ve descrita per una sèrie de regles de procediment, i les representacions analògiques, contínues, de tipus gràfic o figuratiu, la sintaxi de les quals ve donada per regles de composició i convenis d'interpretació. Segons com ens posicionem en la polèmica que mantenen els psicòlegs cognitius en relació al format en què les representacions internes s'arxiven en la memòria a llarg termini, la classificació anterior es pot ampliar a aquestes últimes.

Moltes investigacions han tingut (i tenen) per objectiu l'estudi d'aquestes representacions internes perquè consideren que la comprensió dels alumnes està relacionada amb l'increment en el nombre de connexions entre diferents tipus de representacions internes, la qual cosa es pot aconseguir establint connexions i traduccions entre diferents tipus de representacions externes. Encara que l'objectiu de les investigacions siguin les representacions mentals dels alumnes, aquestes no es poden considerar separatament de les representacions externes, ja que els dos tipus de representacions s'influeixen mútuament en l'activitat de cognició. Algunes d'aquestes investigacions només fan una anàlisi sincrònica de les representacions mentals dels alumnes; altres de més interessants arriben a estudiar l'evolució diacrònica de les representacions mentals dels alumnes com a conseqüència de la instrucció. Un exemple d'aquest últim tipus d'investigacions en didàctica de les matemàtiques són les que han tingut per objecte l'estudi de l'evolució dels esquemes conceptuals (concepte imatge) dels alumnes que hem comentat en el subobjectiu 1.1.

En el camp de la investigació en didàctica de les matemàtiques s'han realitzat moltes investigacions per precisar el terme "representació" i per estudiar el paper que juguen les diferents representacions en el procés de comprensió dels continguts matemàtics (Brown 1996, Kaput 1987, 1991 i 1992 ; Janvier 1987, Duval 1995, Romero i Rico 1999). La majoria estan d'acord que la naturalesa de les representacions matemàtiques ostensives influeix en el tipus de comprensió que genera l'alumne, i, recíprocament, el tipus de comprensió que té l'alumne determina el tipus de representació ostensiva que pot generar o utilitzar. La terminologia que normalment s'usa en aquest tipus d'investigacions prové de la lingüística, de la fenomenologia i de la semiòtica. En la terminologia que ha generat la lingüística, les representacions serien els significants que estan en lloc dels significats, és a dir, els sistemes matemàtics de signes que s'utilitzen per a representar els continguts matemàtics. En la semiòtica s'utilitzen els termes "expressió" i "contingut" d'un signe (o funció semiòtica). Quan una persona interpreta o comprèn un signe, actua el parell expressió/contingut, o sigui, l'expressió remet a un contingut. La funció semiòtica es pot considerar una funció que a una expressió li fa correspondre un contingut.

2.1.1 Els punts de vista de Kaput i de Brown

Entre les investigacions sobre els sistemes de representació que qüestionen el punt de vista realista representacionalista destaquen les de Kaput (1987, 1991 i 1992). Kaput (1991) renuncia a allò que en aquesta memòria hem anomenat la versió forta de la representació i només considera la versió dèbil "(..) Considero la <<representació>> com la <<representació>> d'una experiència per una altra(..)" (Kaput 1991, pàg. 53). Per a aquest autor, la capacitat que tenen les persones per treballar amb objectes i processos molt elaborats es basa en la interacció entre dues fonts d'organització del seu món d'experiències: 1) les estructures mentals amb les quals organitza el seu món d'experiències, i 2) la seva habilitat per a utilitzar mitjans materials per organitzar les seves experiències. Kaput considera el món d'experiències de les persones dividit en dues esferes: 1) les experiències materials, que són observables i 2) les experiències mentals, que són hipotètiques. Totes dues actuen conjuntament en els processos de representació, tal com es veu en el diagrama següent (Kaput 1991, pàg. 57).



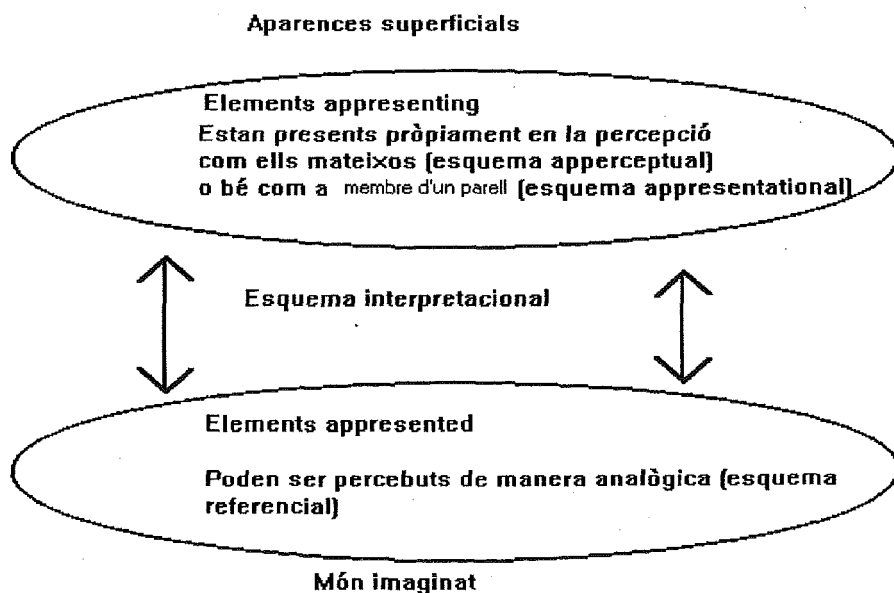
Kaput considera que el nivell inferior d'aquest esquema és allò que normalment es considera "significant" i el nivell superior, al "significat". La fletxa que apunta cap a dalt en la figura correspon a dos tipus de processos: d'una banda, la lectura activa i, de l'altra, els processos menys actius, menys controlats conscientment, que comporten l'evocació de fenòmens mentals a través dels materials físics. Amb aquesta fletxa s'indica l'ús d'objectes materials com a suport de la cognició. La fletxa que apunta cap avall correspon a la projecció de les estructures mentals en el medi material per comunicar, manipular demostrar, etc. A la part inferior del diagrama tenim els sistemes de notació ostensius que Kaput entén com a un sistema de regles per 1) identificar o crear signes, 2) per operar amb ells i 3) per determinar relacions entre ells (especialment d'equivalència). Els ostensius no tenen per què ser cadenes de lletres o dígits, sinó que poden incloure gràfics i diagrames, o fins i tot objectes físics. Els tipus d'accions poden variar segons el tipus de sistema de notació considerat.

Les investigacions de Brown (1996) es basen en la fenomenologia de Husserl i en la de Schutz (1962 i 1967). Brown, seguint a Schutz, també considera la representació com

una relació entre dos fenòmens que poden ser materials o mentals: <<En el present context, em referiré a la noció primitiva de “signe” tal com la descriu C.S. Peirce (...) la qual fa referència a un individual aparallament entre dos fenòmens associats. El signe de Saussure aparella dos fenòmens mentals. Peirce considera la possibilitat que els fenòmens siguin mentals o físics. La noció de Schutz d’“appresentation” desenvolupa el punt de vista de Peirce per poder examinar la forma en que les persones associen parells d’elements.>> (Brown 1996, pàg. 133). Schutz, seguint Husserl i també Peirce, distingeix entre allò que es presenta pròpiament a la consciència (appresenting) i allò amb què es relaciona (appresented), que moltes vegades només està simbòlicament present. Per referir-se a les situacions en les que actua el parell “appresenting- appresented”, Schutz utilitza l’expressió “appresentational situations”. Brown (1996) ha aplicat el punt de vista de Schutz a les “appresentational situations” matemàtiques i exemplifica els quatre esquemes que considera Schutz per explicar com les persones relacionen les accions amb els seus resultats de la manera següent:

- 1) L’esquema “apperceptual”. Els objectes són vistos com a objectes en si mateixos sense cap referència. Per exemple l’expressió $x^2 + y^2 = 1$ és vist com un conjunt de lletres sense cap altre significat.
- 2) L’esquema “appresentational” permet veure el món com un món de signes. Per exemple l’expressió $x^2 + y^2 = 1$ es considera com la representació d’un cercle.
- 3) L’esquema “referencial” comprèn el conjunt d’imatges mentals relacionades amb l’expressió $x^2 + y^2 = 1$. Aquest esquema permet les analogies i les metàfores i l’expressió $x^2 + y^2 = 1$ és vista com un cercle.
- 4) L’esquema “interpretacional” permet la relació entre el món de les aparences superficials i el que jo imagino que existeix, que pot ser diferent del d’una altra persona. Per exemple, les imatges mentals que els experts relacionen amb els símbols algebriacs són molt diferents en el cas dels principiants. En aquest exemple, l’esquema interpretacional es pot considerar que comprèn el conjunt d’estratègies personals per relacionar les imatges mentals amb els símbols algebriacs observats.

Brown (1996, pàg 136) il·lustra aquesta classificació amb la figura següent:



Món imaginat

2.1.2 El punt de vista de Duval

Entre les investigacions sobre les representacions que, al nostre parer, es posicionen en el punt de vista representacionalista tenim les de Duval (1995). Duval es formula la pregunta següent: les activitats d'aprehensió, conceptualització, raonament o comprensió són independents de l'existència d'una pluralitat de registres semiòtics de representació? Considera que la resposta afirmativa implica postular primer algun tipus d'existència per als objectes matemàtics al no confondre l'objecte matemàtic amb la seva representació. En segon lloc implica postular l'existència de representacions mentals internes i de representacions semiòtiques externes, que estan subordinades a les representacions mentals internes, i de les quals són una exteriorització a efectes de comunicació. En definitiva, la resposta afirmativa implica considerar que la semiosi està dirigida per la noesi, entenent per semiosi l'aprehensió o la producció d'una representació semiòtica i per noesi actes cognitius com l'aprehensió conceptual d'un objecte, la comprensió d'una inferència, etc. Duval no està d'acord que la noesi dirigeixi la semiosi, sinó que és partidari de la hipòtesi contrària: *“no hi ha noesi sense semiosi, és a dir, és la semiosi la que determina les condicions de possibilitat de la noesi”* (Duval 1995, pàg. 4). Husserl utilitza els termes “noesi” i “noema” per referir-se als actes intencionals i als objectes intencionals respectivament. La noesi per a Husserl (1962) es correspon amb “captar conscientment”, és a dir, amb la “aprehensió” en un sentit ampli. Duval utilitza el terme d'una manera més restringida, ja que vol distingir entre noesi i semiosi, per la qual cosa utilitza el terme noesi per referir-se només a actes cognitius en els quals es manipulen representacions mentals.

Duval classifica les representacions en conscients i no conscients. Per conscients entén aquelles en què apareix “quelcom”, i per no conscients, les que s'escapen completament a la percepció del subjecte. Per representacions conscients, d'acord amb Husserl, entén aquelles en què apareix un objecte intencional (directament o indirectament). Tot seguit classifica les representacions en internes i externes, entenent per representacions externes aquelles que són visibles i observables públicament, i per internes, les representacions privades que no ho són. Duval considera que les representacions externes són per naturalesa semiòtiques, ja que es produeixen mitjançant un sistema de signes i són accessibles a tots els subjectes capaços d'interpretar aquest sistema de signes. Les representacions externes tenen diferents funcions: serveixen per a comunicar, per a objectivar i poden ser tractades. A partir d'aquestes dues classificacions, Duval distingeix tres tipus de representacions (Duval 1995, pàg. 27).

	INTERNA	EXTERNA
CONSCIENT	mental funció d'objectivació	semiòtica funció d'objectivació funció d'expressió funció de tractament intencional
NO-CONSCIENT	computacional funció de tractament automàtic o quasi-automàtic	

La distinció entre representacions externes i internes tal com la formula Duval és acceptada tant pels no-representacionalistes com pels representacionalistes. El que situa a Duval en el representacionalisme no és, lògicament, la classificació extern/intern en el sentit de públic o privat sinó l'acceptació del punt de vista de la psicologia genètica que considera que les representacions mentals són la interiorització de representacions externes, de la mateixa manera que les imatges mentals són una interiorització dels perceptes.

Hi ha investigadors posicionats en el representacionalisme que postulen una equivalència entre representacions externes i internes *"Se postula que los signos, gráficos o notaciones, con soporte físico externo, que usamos para la representación tienen un equivalente en la mente del sujeto que las utiliza, lo que hace necesario distinguir entre representaciones externas y representaciones internas"* (E. Castro i E. Castro 1997, pàg. 101). Duval reflexiona sobre la relació entre les representacions externes i les internes i es mostra crític amb la suposició que cada representació externa té un equivalent en forma de representació interna, ja que considera que aquesta relació és força més complexa. Per a Duval la hipòtesi d'una correspondència directa entre les representacions mentals i les semiòtiques implica la subordinació d'aquestes a aquelles; és a dir, suposa que la noesi dirigeix la semiosi. Dues de les raons que dóna Duval per a qüestionar aquesta hipòtesi són: 1) el gran desfasament que hi ha entre les representacions mentals del subjecte i les representacions semiòtiques que produeix per a expressar les seves representacions mentals i 2) Les representacions semiòtiques, a diferència de les mentals, presenten un grau de llibertat necessari per a tot tractament de la informació, ja que poden ser l'expressió de continguts diferents en situar-se en el pla de l'expressió, mentre que les representacions mentals tenen un únic contingut en situar-se en el pla del contingut.

Per a Duval, la diversificació de representacions semiòtiques d'un mateix objecte augmenta la comprensió dels subjectes. Recíprocament, les representacions externes (enunciats, fórmules, gràfiques, etc.) són el mitjà pel qual les persones exterioritzen les seves imatges i representacions mentals fent-les accessibles als altres. Les representacions externes juguen un doble paper: 1) actuen com a estímul per als sentits en els processos de construcció de noves estructures mentals i 2) expressen la xarxa de significats personals dels subjectes que les usen. Duval remarca l'existència de diversos sistemes de representació lligats a un mateix objecte matemàtic. Cada un d'aquests sistemes té potencialitats i limitacions, per la qual cosa la seva utilització conjunta és essencial per a produir diferents sentits o bé per a triar-ne l'un o l'altre.

Si bé Duval, al nostre parer, es mou dins del representacionalisme i Kaput i Brown en el no-representacionalisme⁸. Els tres enfocaments coincideixen força en els nivells 2,3 i 4 ja que els tres se centren en l'esfera de les experiències materials (nivell 2), en l'esfera de les experiències mentals (nivell 3 i 4) i en la relació entre aquestes dues esferes. Els tres consideren que les representacions semiòtiques ostensives (sistemes de notació en la terminologia de Kaput i sistemes de signes en la de Brown) permeten: 1) expressar i comunicar (estructures i operacions mentals), 2) manipular (transformacions de

representacions) i 3) objectivar (els sistemes semiòtics independitzen les produccions dels subjectes dels propis subjectes).

3.1.3 La teoria antropològica

Des de la teoria antropològica proposada per Chevallard (1992) també s'han fet estudis sobre els sistemes de representació (Bosch 1994, Bosch i Chevallard 1999). La teoria antropològica agafa com a punt de partida un univers en què tot és objecte. Les persones, les institucions, les coses materials, els pensaments de la persona, les nocions que s'utilitzen en una institució, etc. són objectes. Els objectes i les relacions entre ells emergeixen com a resultat del treball humà (activitat). Les persones, institucions, els altres objectes i les relacions entre ells existeixen perquè hi ha treball humà. Els objectes (institució o persona) amb la seva activitat poden crear-ne de nous, que es consideren existents en el sentit que hi ha una relació entre la persona (o la institució) i el nou objecte. La existència dels objectes no es considera de manera absoluta, sinó com el resultat de la relació entre dos objectes. Per exemple, l'objecte "yeti" existirà per a una persona si aquesta creu que existeix. En la teoria antropològica, dir que un objecte existeix equival a dir que és conegut per una persona o per una institució, entenent per "conèixer" una relació entre l'objecte i la persona (o la institució). Tornant a l'exemple de l'objecte "yeti", suposem una institució formada per alpinistes, els quals no creuen en l'existència del "yeti", que està preparant una expedició a l'Everest, en la qual participarà un sherpa que sí que hi creu, perquè ha vist unes petjades a la muntanya que ell creu que són seves. En termes de la teoria antropològica el sherpa i la institució d'alpinistes coneix l'objecte "yeti" perquè ambdós tenen una relació amb aquest objecte, per tant l'objecte "yeti" existeix per al sherpa i per a la institució en el sentit que és conegut per ells. Per a la institució aquest objecte no té la propietat d'existir amb independència de les persones, mentre que per al sherpa sí que existeix en aquest sentit perquè creu que se'l pot trobar cara a cara en qualsevol moment. Si per a Berkeley existir és ser percebut, per a la teoria antropològica existir és ser conegut.

Una altra característica important de la teoria antropològica és que considera de manera unitària el conjunt d'existents de l'univers que un vol estudiar, descartant a priori les distincions i aproximacions que ens suggereix la cultura. En particular no es distingeix els objectes matemàtics dels no matemàtics. En postular que tot és objecte, ens trobem que hi ha més objectes que noms, per la qual cosa tenim objectes als quals s'ha assignat un nom i altres objectes als quals només em puc referir utilitzant una seqüència de paraules. Des d'aquest punt de vista la nominació d'un objecte no s'ha de considerar només com el fet d'assignar paraules als objectes sinó que ens informa de la importància que té un determinat objecte per a una determinada institució, informa que per a aquesta institució existeix (en el sentit que és conegut). Tota institució construeix el seu lèxic mitjançant creació, préstec o reutilització, i, per tant, el lèxic institucional permet fer-nos una idea dels objectes que existeixen per a aquesta institució i de les relacions que tenen entre si. Els objectes d'una institució i les relacions entre ells emergeixen d'un sistema de "pràctiques" realitzades pels membres de la institució. Les pràctiques consisteixen en la

utilització d'una "tècnica" que mobilitza determinats objectes i pot fer-ne emergir de nous. Tota tècnica es concreta en un conjunt de gestos realitzats dins d'un dispositiu. Per al subjecte de la institució, els elements del dispositiu són objectes (per exemple una calculadora) que ell no ha de produir, ja que només necessita tenir-los disponibles. Els gestos són allò que s'ha de fer. Per a la teoria antropològica, els gestos i els dispositius que els fan possibles són el substrat material on s'expressen les tècniques que activen objectes de la institució o bé permeten l'emergència de nous objectes. La paraula tècnica s'utilitza en la teoria antropològica com una "manera de fer".

Dins d'una institució les "tasques" són aquelles activitats que la institució reconeix "que cal fer" o com "que potser caldria fer"; en definitiva, allò que els subjectes de la institució poden i han de fer. Per tant, l'activitat dins d'una institució consisteix en la realització de tasques que poden estar articulades en un sistema de tasques. A cada tasca li correspon, com a mínim, una tècnica, i al sistema de tasques un sistema de tècniques. El flux d'activitat d'una institució s'estructura en un sistema de tasques institucionals realitzades segons un sistema de tècniques institucionals que s'expressen en gestos i dispositius.

Una tècnica només pot viure en una institució si hi ha un discurs (logos), anomenat "tecnologia", que la justifica i la fa comprensible. La institució dedica una part de la seva activitat a construir el marc tecnològic que permet controlar i justificar les tècniques institucionals. Aquest fenomen és bastant complex, per la qual cosa solament parlarem d'alguns elements. El primer és que l'activitat tecnològica es reserva, en general, als subjectes de la institució que ocupen algunes posicions determinades. En la institució "classe", per exemple, i segons els contractes didàctics habituals, la construcció de la tecnologia correspon més al professor que als alumnes. La segona, és que les nocions de "justificació" i de "intel·ligibilitat" no tenen valor absolut sinó relatiu, ja que allò que es pot considerar justificació en una institució pot ser titllat d'insuficient en una altra. La tercera, és que la justificació de la tècnica suposa la construcció d'objectes que poden ser utilitzats posteriorment. La quarta, és que en tota institució didàctica la validesa d'una tecnologia depèn d'una altra institució que en confirma i avala el valor justificatiu. És a dir, una altra institució que realitza la tecnologia de la institució didàctica. S'anomena "teoria" a la tecnologia d'una tècnica tecnològica.

L'existència d'una tècnica en una institució està parcialment condicionada per l'existència d'una tecnologia que la justifiqui i l'expliqui i, més enllà, per la possibilitat d'invocar una teoria que garanteixi la validesa de la tecnologia. Aquest procés implica l'existència de cert nombre d'objectes institucionals (nocions, teoremes, propietats, etc.) que funcionen com a mitjà de la tècnica i de la tasca corresponent. En la teoria antropològica s'anomena "mitjans institucionals" a tots els objectes institucionals que condicionen l'existència de les activitats que es realitzen en la institució. A més de les nocions, teoremes, propietats, etc. hi ha molts altres mitjans (materials, l'existència d'interlocutor, etc.), alguns dels quals són considerats com a tals per la institució i se'ls anomena "instruments institucionals".

En moltes institucions les tasques solen ser rutinàries i les tècniques a utilitzar estan molt estabilitzades i no plantegen gaires problemes. Ara bé, les tècniques que s'ensenyen i s'aprenen en una classe, són precisament aquelles que no són rutinàries per a la majoria dels subjectes de la institució. S'anomena "problematització" a l'aparició de tasques no rutinàries que no poden ser resoltes com d'habitud. En aquestes situacions problemàtiques, la resposta institucional pot ser molt variada, depenent en particular del "cost" que suposaria la gènesi institucional d'una tècnica adequada. Si aquest cost és molt elevat, se podrà rebutjar el tipus de tasca que crea problemes, o bé mantenir l'antiga tècnica i considerar els "problemes" que planteja la tasca com a simples dificultats contingents. L'examen d'exemples matemàtics permet precisar en què consisteix la gènesi institucional d'una tècnica més adequada, o sigui, com es concreta la introducció, per importació o creació, de nous mitjans tècnics, però també tecnològics i teòrics.

Segons la teoria antropològica, la vida quotidiana d'una institució és el fruit de la seva història. La gènesi institucional d'un tipus de tasques i del sistema de treball (tècniques, tecnologies, teoria) no es pot dissociar de les gènesis personals corresponents per als subjectes de la institució: perquè emergeixi un sistema de treball és necessari que, simultàniament, emergeixi per al subjecte l'univers d'objectes i de relacions que la institució pretén fer viure. La persona és a la vegada el fruit de les subjeccions institucionals i també una condició del funcionament de la institució. El cos teòric que hem esbossat permet a la antropologia cognitiva realitzar una anàlisi (macro i micro) de l'estàtica i de la dinàmica institucional i personal.

Els mitjans de l'activitat matemàtica són un complex d'objectes determinats per les tècniques utilitzades en la resolució de tasques. Es divideixen en dues categories: la dels objectes ostensius i la dels no-ostensius. Es considera objecte ostensiu a tot objecte que pot presentar-se al subjecte humà com una realitat perceptible; no-ostensius són els objectes que habitualment anomenem "conceptes", "nocions", "idees", etc. Els no-ostensius són ostensibles (poden ser mostrats per ostensius). L'activitat humana (i també la matemàtica) requereix per a la seva realització una pluralitat de registres ostensius: el registre de l'oralitat, el del traç o del grafisme, el de la gestualitat i el de la materialitat (objectes ostensius que no pertanyen a cap de les categories anteriors). En l'activitat humana, els complexos d'objectes ostensius activats es distribueixen sempre entre diferents registres, sense que puguem, generalment, veure funcionar un sol d'ells de manera autònoma respecte dels altres. Als objectes no-ostensius que viuen en una institució se'ls associa un conjunt més o menys precís d'objectes ostensius, mitjançant els quals poden ser evocats o invocats (un nom o una sèrie de paraules, cert nombre de grafismes, de gestos, etc.). Igualment que els objectes no-ostensius, els objectes ostensius també poden tenir un nom, és a dir, un altre objecte ostensiu associat que permet certes manipulacions adequades. Així doncs, de la mateixa manera que existeixen interrelacions entre els objectes ostensius i els no-ostensius, també els objectes ostensius estan relacionats entre si. L'antropologia cognitiva postula que en tota activitat humana hi ha una coactivació d'objectes ostensius i no-ostensius, encara que considera difícil d'escatir en cada cas quins són els objectes no-ostensius activats perquè no existeix cap associació

d'objectes ostensius i no-ostensius que estigui unívocament determinada: el recurs a objectes no-ostensius és necessari, però el recurs a tal o qual objecte en particular no ho és. Només restringint-nos a un conjunt molt petit d'activitats en el si d'una institució en un període determinat es pot trobar en alguns casos un avanç del sistema d'instruments ostensius sobre el sistema de no-ostensius (falta un concepte); i en d'altres casos el fenomen invers, provocat per l'absència d'ostensius (falta una notació que permeti un major rendiment).

Dir que els objectes ostensius permeten evocar o invocar certs objectes associats -ja siguin ostensius o no-ostensius-, és el mateix que dir que els objectes ostensius funcionen com a signes d'aquests objectes, ja que permeten representar-los. Per a l'antropologia cognitiva els ostensius actuen com a instruments de l'activitat i, per tant, tenen una valència instrumental. *<<En tanto que instrumento, un objeto ostensivo dado puede tener un rendimiento variable según las actividades en las que intervenga. Podemos decir, por ejemplo, que, en las manipulaciones algebraicas habituales, la notación $\sqrt{\quad}$ y la notación con exponente fraccionario $1/2$ tienen una instrumentalidad equivalente cuando las utilizamos para realizar el siguiente trabajo:*

$$\begin{aligned}\sqrt{6} &= \sqrt{2 \times 3} = \sqrt{2} \times \sqrt{3} \\ 6^{1/2} &= (2 \times 3)^{1/2} = 2^{1/2} \times 3^{1/2}\end{aligned}$$

En cambio, si queremos calcular la derivada de la función \sqrt{x} , la segunda notación se vuelve instrumentalmente superior puesto que nos permite realizar un trabajo que no podemos reproducir con la primera:

$$(\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Diremos entonces que respecto a la operación de derivación (y lo mismo se podría decir respecto a la de integración), la notación exponencial tiene "mayor instrumentalidad" que la notación $\sqrt{\quad}$ >> (Bosch 1994, pàgs.55-56). Els objectes ostensius, a més de valència instrumental, tenen valència semiòtica. Les possibles utilitzacions d'un objecte ostensiu en activitats diferents fan que la seva valència semiòtica estigui sempre oberta, podent evocar o representar diferents objectes, segons el tipus d'activitat que es consideri. En ser mobilitzat en una tècnica concreta és quan adquireix la seva semioticitat efectiva. Dir que els objectes ostensius tinguin valència instrumental i valència semiòtica no vol dir que puguem fixar a voluntat la seva valència ja que tenen una instrumentalitat i valència semiòtica localment estabilitzada (en la història de les institucions). En una institució on les activitats que se realitzen evolucionen molt ràpidament -com, per exemple, en una classe de matemàtiques- es produeixen variacions locals de la instrumentalitat i semioticitat dels instruments ostensius a un ritme accelerat. L'antropologia cognitiva considera que els ostensius no tenen sentit (en contra d'allò que habitualment es considera) sinó que produeixen sentit mitjançant determinats usos. Els objectes ostensius que formen un sistema estan sotmesos a certes regles formals d'ús que permeten articular

certs objectes ostensius entre ells, realitzar certes combinacions i transformacions possibles, etc. Aquestes regles produeixen certes restriccions sintàctiques (relacions entre ostensius no permeses) i relacions entre ostensius que poden ser utilitzades en un futur, encara que actualment no siguin útils. A més del nivell de sintaxi, cal tenir en compte el nivell semàntic (els objectes no ostensius que s'associen als ostensius manipulats) i el nivell pragmàtic (pràctiques efectives en què entra el sistema d'ostensius considerats).

L'antropologia cognitiva considera el pensament, en tant que manipulació de símbols mentals, com un cas particular de manipulació d'ostensius. Aquest punt de vista elimina els símbols mentals al postular només dues categories d'objectes: els ostensius i els no-ostensius. Aquest reduccionisme és coherent amb el seu anticognitivism. Ara bé, una posició tan reduccionista només es pot aconseguir englobant en el terme "ostensiu" tant els objectes intersubjectius (domini d'allò públic) com els símbols mentals (domini d'allò privat). <<A menos que en lugar de "decir" y "escribir" nos limitemos a "pensar" las palabras y escrituras anteriores, lo que consideraremos como otra forma de manipulación de objetos ostensivos>> (Bosch 1994, pàg. 49). Convé remarcar que amb aquest punt de vista, el terme "ostensiu" passa de ser "fenomen material" a ser "fenomen mental". En efecte, per "ostensiu" s'entén normalment allò que es pot mostrar, aquí i ara, a un altre, allò "intersubjectiu". És evident que les paraules pensades o les imatges mentals d'una persona no són ostensives en aquest sentit. Ara bé, què tenen en comú les paraules escrites en un llibre o les paraules pensades? Allò que tenen en comú és que en ambdós casos es presenten directament (pròpiament) a la consciència, en ambdós casos són "fenòmens". Ara bé, mentre que els fenòmens materials es poden mostrar a un altre directament, els mentals han de passar prèviament pels materials per poder ser mostrats a un altre, només es poden mostrar indirectament.

2.1.4 Les funcions semiòtiques

Godino i Recio (1998) consideren que les entitats en matemàtiques poden ser de tipus notacional, intensional o extensional i es presenten en la interacció de l'aula en forma ostensiva. Cada una d'aquestes entitats poden jugar el paper d'expressió o de contingut: <<(. . .) vamos a esbozar un modelo teórico que incluye los siguientes tipos de entidades básicas:

"Fenomenologías", considerando como tales las situaciones-problemas, aplicaciones, tareas, en general, las "entidades extensionales" que inducen actividades matemáticas.

"Notaciones", esto es todo tipo de representaciones materiales ostensivas usadas en la actividad matemática (términos, expresiones, símbolos, gráficos, tablas, diagramas, etc., en general, "entidades notacionales".

"Generalizaciones", ideas matemáticas, abstracciones (conceptos, proposiciones, procedimientos, teorías, esto es "entidades intensionales").

En el trabajo matemático, tanto las generalizaciones como las situaciones-problemas vienen dados por sistemas notacionales que describen sus propiedades características. Ambas entidades son inseparables de los ostensivos que les dan corporeidad, pero no

identificables con ellos, esto es, consideramos que la matemática no es reducible al discurso que la expresa>> (Godino i Recio 1998, pàg. 3-3).

Per a Godino i Recio, els tres tipus d'entitats primàries considerades (extensionals, intensionals i notacionals) poden jugar el paper d'expressió i contingut en les funcions semiòtiques, resultant, por tant nou tipus diferents de tals funcions. A continuació les il·lustrarem amb exemples molt simples. Si veig la paraula triangle i la relaciono amb el dibuix d'un triangle, tinc una funció semiòtica amb expressió notacional i contingut extensional. Si veig la paraula triangle i la relaciono amb "figura plana tancada per tres costats", tinc una funció semiòtica amb una expressió notacional i un contingut intensional. Si veig la paraula triangle i la relaciono amb "ABC" tinc una funció semiòtica amb expressió notacional i contingut notacional. Si llegeixo "figura plana tancada per tres costats" i ho relaciono amb la paraula triangle, tinc una funció semiòtica amb una expressió intensional i un contingut notacional. Si llegeixo "figura plana tancada per tres costats" i ho relaciono amb el dibuix d'un triangle tinc una funció semiòtica amb una expressió intensional i un contingut extensional. Si llegeixo "figura plana tancada per tres costats amb un angle recte" i ho relaciono amb "figura que s'obté en dividir un rectangle per una diagonal" tinc una funció semiòtica amb expressió intensional i contingut intensional. Si veig un triangle i ho relaciono amb "aquesta figura és un triangle" tinc una funció semiòtica amb una expressió extensional i un contingut intensional. Si veig un triangle i ho relaciono amb el dibuix d'un altre triangle, tinc una funció semiòtica amb una expressió extensional i un contingut extensional. Si veig un triangle de vèrtexs *A, B* i *C* i ho relaciono amb "ABC" tinc una funció semiòtica amb una expressió extensional i un contingut notacional.

La taula següent representa les nou funcions semiòtiques de l' exemple anterior

	Ext	Int	Not
Ext	FS1	FS2	FS3
Int	FS4	FS5	FS6
Not	FS7	FS8	FS9

- FS1 Aquesta funció semiòtica relaciona una entitat extensional amb una altra entitat extensional de la mateixa entitat intensional.
- FS2 Aquesta funció semiòtica relaciona una entitat extensional amb l'entitat intensional a la qual pertany.
- FS3 Aquesta funció semiòtica relaciona una entitat extensional amb un signe que la representa.
- FS4 Aquesta funció semiòtica relaciona una entitat intensional amb una entitat extensional (un exemple).
- FS5 Aquesta funció semiòtica defineix una entitat intensional de manera diferent.
- FS6 Aquesta funció semiòtica relaciona una entitat intensional amb un signe que la

representa.

- FS7 Aquesta funció semiòtica relaciona un signe amb l'entitat extensional que representa.
- FS8 Aquesta funció semiòtica relaciona un signe amb l'entitat intensional que representa.
- FS9 Aquesta funció semiòtica canvia la notació d'una entitat (extensional o intensional).

Els objectes matemàtics normalment són classes d'objectes que pertanyen a classes que els contenen. Això fa que les entitats matemàtiques puguin ser considerades com a objectes o bé com a classes d'objectes, segons el context. Per tant, en moltes situacions, la FS3 i la FS6 són difícils de distingir i es poden considerar la mateixa funció semiòtica (igualment amb la FS7 i la FS8).

Aquesta classificació de les entitats matemàtiques en extensionals, intensionals i notacionals ens ha semblat força interessant i l'hem tingut en compte en aquesta investigació. Un dels aspectes més interessants és que aquesta classificació es pot aplicar tant a les representacions ostensives (domini d'allò públic) com a les mentals (domini d'allò privat). És a dir, podem considerar símbols mentals que actuen com a suport d'entitats extensionals o intensionals (noesi en la terminologia de Duval), o bé considerar ostensius que actuen com a suport d'entitats extensionals o intensionals (semiosi).

Considerar, tal com proposa l'antropologia cognitiva, el pensament, en tant que manipulació de símbols mentals, com un cas particular de manipulació d'ostensius ens sembla una posició massa reduccionista. Considerem que, en la situació en què es troba actualment la didàctica de les matemàtiques, pot ser més ric per a aquesta disciplina tractar "la manipulació de símbols mentals" com una esfera amb una certa autonomia respecte de la "manipulació d'ostensius materials". Una esfera, per cert, sobre la qual la psicologia cognitiva ha realitzat aportacions importants. Ara bé, acceptar que en aquests moments pot ser útil tractar la manipulació de símbols mentals com una esfera autònoma respecte de la "manipulació d'ostensius materials" no vol dir situar-nos en l'altre extrem: considerar que el pensament, entès com a processos de manipulació de símbols mentals que tenen lloc en la ment, és la causa de la "manipulació d'ostensius materials". Acceptar aquesta darrera posició implica que la "noesi" dirigeix a la "semiosi" (en la terminologia de Duval (1995)).

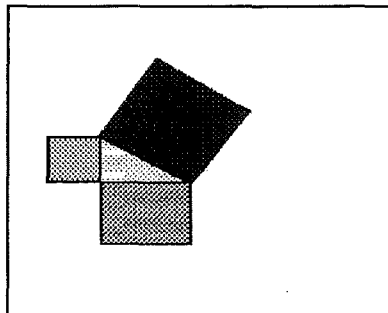
Allò que nosaltres proposem en aquesta investigació és:

- 1) Considerar que la "manipulació d'ostensius materials" es realitza en un context social d'interacció i va acompanyada (i no necessàriament causada de manera mecànica) de "pensaments en què es manipulen símbols mentals".*
- 2) Explorar la possibilitat que les funcions semiòtiques siguin un instrument que permet l'anàlisi conjunta de la "manipulació d'ostensius materials" en un context social i del "pensament" que l'acompanya.*

La Psicologia cognitiva ha estudiat la comprensió a partir dels processos mentals implicats i ha arribat a la conclusió que les funcions semiòtiques que hem comentat anteriorment mobilitzen molts processos cognitius. En efecte, si considerem, per exemple, la funció semiòtica que relaciona un extensiu amb un intensiu (x és P), tenim un procés de comprensió que implica molts processos cognitius. Suposem que identifiquem la finestra d'una casa com a quadrada. Aquest tipus d'experiències que són el resultat de la percepció s'anomenen perceptes. L'explicació més acceptada de com es produeixen els perceptes és de tipus realista representacionalista. Des d'aquest punt de vista el percepte es produeix de la següent manera (Lovell 1986):

- a) El món exterior ens fa arribar una sèrie d'estímuls: visuals, sonors, tàctils, etc.
- b) Es produeix un procés de filtració d'aquests estímuls. Els factors que determinen aquesta selecció són: la naturalesa dels propis estímuls, la probabilitat que apareguin i certes condicions relatives al subjecte com, p.e., el grau d'atenció.
- c) Després d'aquesta selecció arriben al cervell. En aquest moment experimentem determinades sensacions.
- d) Aquestes sensacions són filtrades d'acord a una sèrie de factors: experiències anteriors, motivacions, idees, imatges, cultura, expectatives, aprenentatges anteriors, etc.
- e) El resultat d'aquesta interpretació de les sensacions pren significat. Per exemple, si veiem un triangle amb un quadrat sobre cadascun dels costats, la percepció no s'acaba fins que podem pensar: és el teorema de Pitàgores. Precisament són les paraules les que acaben de donar el significat.

El pas *d* del procés anterior depèn molt de la cultura que tenim. Per exemple, Davant de la fig següent i la pregunta "què veus aquí?" tenim les següents respostes:



- 1) Albert, 7 anys alumne de segon de primària: "un triangle i tres quadrats".
- 2) Joaquim, 13 anys alumne de 2n d'ESO: "el teorema de Pitàgores" (fa poc que a classe ha treballat aquest teorema).
- 3) Francesc, 43 professor de matemàtiques: "depèn... o bé un triangle i tres quadrats o bé el teorema de Pitàgores".

Acceptar que la percepció està condicionada per la nostra xarxa conceptual entra en conflicte amb dues de les idees ingènues que solen tenir les persones sobre el coneixement científic: 1) la ciència comença amb l'observació i 2) l'observació proporciona una base segura a partir de la qual es pot derivar el coneixement. A partir dels estudis de Hanson

(1967) Popper (1980 i 1992) i molts d'altres (Khun, Feyerabend, etc.), es pot dir que tothom accepta que la percepció (individual i col·lectiva) està carregada de teoria, fins i tot els empiristes actuals: <<(....) "Todos" los juicios de percepción, no simplemente los introspectivos, tienen una "carga teórica": toda percepción involucra una interpretación especulativa. Por lo menos así lo afirman las versiones del empirismo desarrolladas más recientemente. La idea básica que subyace en esta afirmación se puede expresar con el siguiente argumento, muy breve per muy general: el "argumento reticular".

1. Todo juicio de percepción supone la aplicación de "conceptos" (por ejemplo, a és F).

2. Todo concepto es un nudo en una "red" de conceptos contrastantes, y su significado lo establece el lugar peculiar que ocupa dentro de esa red.

3. Todo sistema de conceptos es un supuesto especulativo o "teoría": mínimamente respecto de las clases en que se divide la naturaleza y las relaciones principales que se establecen entre ellas.

Por lo tanto,

4. Todo juicio de percepción presupone una teoría.>> (Churchland 1992, pàgs. 125-126).

La psicologia cognitiva s'ha dedicat a estudiar com s'estructura, evoluciona i funciona la nostra xarxa conceptual. Les investigacions de la psicologia cognitiva han posat de manifest la importància dels processos d'abstracció, generalització i metafòrics en la creació i funcionament de la nostra xarxa conceptual. Des del punt de vista d'aquesta investigació, els processos d'abstracció, analògics i metafòrics es poden considerar com a pràctiques privades de l'alumne, les quals poden ser induïdes per la situació que li fem treballar i poden ser tractades a l'aula en termes de "competència". En aquesta investigació les hem considerat molt importants, per la qual cosa tractarem primer amb força detall les aportacions que ha fet el punt de vista cognitiu.

2.2 Processos d'abstracció i generalització

Els enfocaments cognitivistes consideren que els continguts del pensament matemàtic avançat (funcions, límits, infinit, continuïtat, derivades, integrals, etc.) impliquen que l'alumne realitzi uns determinats processos d'abstracció i generalització. En aquesta memòria hem tingut en compte diferents aportacions de tipus general sobre els processos d'abstracció i generalització, així com d'altres de més específiques que analitzen els processos d'abstracció i generalització presents en l'aprenentatge dels conceptes propis del pensament matemàtic avançat.

2.2.1 L'abstracció per comparació

La idea que generalitzem com a resultat d'un procés de comparació té el seu origen en Aristòtil. Posteriorment va ésser recollida pels empiristes dins de la filosofia, i també ha tingut molt de ressò dins de la psicologia que li dona el nom d'associacionisme. Segons aquest punt de vista, els conceptes (entitats intensionals / no-ostensius) es formem a partir

de l'abstracció aristotèlica, la qual ens fa ésser conscients de les similituds entre els exemples positius del concepte (entitats extensionals). Una de les explicacions clàssiques de com es formen els conceptes és la de Skemp (1980). Segons aquest autor totes les persones tenen: 1) una certa classificació de les seves experiències prèvies i 2) intenten incloure l'experiència present en una classe. Això és molt clar quan l'experiència present és un objecte com, per exemple, una cadira; davant les dades sensorials decidim incloure l'objecte present dins de la classe, que ja tenim formada, de les cadires i diem: això és una cadira. Classifiquem cada vegada que reconeixem un objecte com "un que hem vist abans". Però no hi ha dues ocasions en què les dades sensorials siguin exactament iguals, perquè la distància, l'angle, la il·luminació, etc, són diferents. Si $C_1, C_2, C_3, C_4, \dots$ representen successives experiències d'una cadira determinada, nosaltres abstraïm certes propietats comunes que representem per C . Una vegada formada aquesta abstracció, qualsevol experiència posterior C_n evoca C , i es reconeix la cadira: o sigui, la nova experiència C_n es classifica juntament amb $C_1, C_2, C_3, C_4, \dots$. Posteriorment, de les cadires C, C', C'', \dots abstraïm altres propietats invariants que representem per Ch . Les altres cadires que veiem evoquen Ch i són classificades conjuntament amb C, C', C'', \dots formant la classe que anomenem cadira. Aquesta abstracció s'anomena de segon ordre i les propietats invariants que la caracteritzen són més funcionals i menys perceptives. A partir de l'abstracció cadira, juntament amb altres abstraccions tals com taula, armari, etc. pot construir-se una posterior abstracció: moble, i així successivament. "Abstreure" és una activitat per la qual ens fem conscients de similituds entre les nostres experiències. "Classificar o generalitzar" significa reunir les nostres experiències sobre la base d'aquestes similituds. Per poder distingir entre abstreure com a activitat, i una abstracció com a producte final, denominem a aquesta última amb la paraula "concepte". És a dir, un concepte requereix per a la seva formació un cert nombre d'experiències que tinguin quelcom en comú. Una vegada format el concepte, podem parlar d'exemples del concepte. Hem d'ésser conscients que, quan diem que un concepte requereix per a la seva formació un cert nombre d'experiències que tinguin quelcom en comú, estem fent una simplificació, perquè entren en joc molts altres factors, com per exemple el "contrast".

Segons aquesta concepció, normalment anomenada clàssica, un concepte està constituït per una sèrie d'atributs necessaris i suficients, de tal manera que tots els exemples del concepte tenen uns atributs comuns i cap contra-exemple no els té tots. Amb altres paraules, els conceptes tindrien l'estructura de les classes lògiques: $C=R(x,y,\dots)$, on C seria el concepte, x,y els seus atributs i R la relació existent entre els seus atributs. Els conceptes matemàtics es considera que són d'aquest tipus i la manera de formar-los seria a partir de l'abstracció i la comprovació d'hipòtesis. És a dir, l'abstracció ens faria ésser conscients de les similituds entre els exemples del concepte i ens permetria d'elaborar-ne una hipòtesi respecte dels atributs rellevants del concepte. Aquesta hipòtesi seria comprovada en diferents casos i posada en qüestió per l'aparició de contra-exemples que obligarien a modificar la llista d'atributs.

La idea que un concepte és una classe formada per membres que tenen una sèrie d'atributs

comuns fou posada en qüestió per Wittgenstein (1983). Aquest filòsof va proposar que allò que uneix els exemplars en un mateix concepte és un aire de família, basat en una semblança no transitiva entre els membres de la categoria. Aquesta idea fou la base d'estudis sobre formació de conceptes que van aportar dades incompatibles amb la concepció clàssica. Els resultats d'aquests estudis permetien postular models de formació de conceptes alternatius, en què la possessió dels atributs del concepte per part d'un exemplar i la seva inclusió en la categoria no són una qüestió de tot o res, sinó de graus o probabilitats "*(...) Según la concepción probabilística, la mayoría de los conceptos (...) carecen de atributos comunes suficientes, no todos sus ejemplares son igualmente representativos de la categoría y las fronteras del concepto son borrosas, pudiendo atribuirse una misma instancia a más de una categoría, en función del contexto*" (Pozo, 1993, pàg. 95). S'han elaborat diferents teories sobre la formació de conceptes, basades en l'enfocament probabilístic. Una de les més importants és la teoria del prototipus de Rosch: "*(...) Según estos tres principios los conceptos poseen una doble estructura. En primer lugar, tienen una estructura "vertical", según la cual todo concepto está incluido en una jerarquía de niveles de abstracción, que comprende tres niveles: supraordinado (por ej., mueble), básico (silla) y subordinado (silla plegable). Pero, además, los conceptos tienen una estructura "horizontal", por lo que, dentro de un mismo nivel jerárquico habría ejemplos más o menos prototípicos. La existencia de una estructura horizontal rompe con el criterio de homogeneidad dentro de una clase de la concepción clásica. (...) En cuanto a la dimensión horizontal Rosch (1977, 1978) postula la existencia de efectos de "tipicidad", por los que, (...) no todos los ejemplos de la categoría serían igualmente representativos de ella. Así, las categorías no son homogéneas, sino que tienen un centro, ocupado por los ejemplos típicos o prototipos, y una periferia en la que estarían los ejemplos menos representativos. Por ejemplo, normalmente la gente creerá que una silla es mejor ejemplo del concepto "mueble" que un cuadro o un alfombra. Asimismo, si alguien nos pide que pensemos en un profesional liberal, es probable que lo hagamos en un médico o un abogado, pero no en un dibujante de "comics". Los prototipos, según Rosch, serían como las medidas de tendencia central de la categoría, en ellos se reflejaría al máximo la estructura correlacional de la categoría. Serían los ejemplos que comparten un mayor número de atributos con otros miembros de la categoría, los que tienen un mayor "parecido familiar" con el resto de ejemplos del concepto.*" >> (Pozo 1993, pàgs. 96-97).

Una solució intermèdia entre la concepció clàssica i la probabilística consisteix a considerar que els conceptes tenen un nucli que es forma d'acord amb el punt de vista clàssic, i un procediment d'identificació que funciona, en part, de manera probabilística. El nucli es formaria a partir dels atributs rellevants dels exemples positius del concepte que apareixen amb més freqüència. Hí hauria una jerarquia d'ampliacions d'aquest nucli: primer es comença amb un nucli format pels exemples prototipus i després es va ampliant a partir de les experiències del subjecte. Pel que fa al mecanisme d'identificació hi hauria, d'una banda, una comparació amb exemples del nucli i, d'altra banda, algun tipus de raonament. Aquest tipus de raonament pot estar basat en propietats dels exemples prototipus i ens pot portar a judicis d'identificació erronis. En el cas que aquest

mecanisme d'identificació (basat en la comparació visual amb els exemples prototipus o bé en un judici formulat d'acord amb les propietats dels exemples prototipus) no vagi desapareixent i quedi enquistat, és quan es parla de conceptes erronis, encara que seria més adequat parlar de conceptes limitats o poc desenvolupats, o bé de pseudoconceptes en el sentit de Vygotski⁹.

En tot el que hem dit fins ara sobre la formació de conceptes, hem suposat que es formen a partir: 1) de la comparació d'exemples dels conceptes 2) aquesta comparació permet abstraure propietats comunes i 3) els exemples que tenen aquestes propietats comunes es classifiquen conjuntament. Les diferències que hem comentat entre la concepció clàssica i la probabilística estan en les diferents maneres d'explicar el funcionament d'aquesta comparació, així com en la manera d'entendre el resultat de la classificació (classe homogènia, o bé classe amb un nucli central). Aquest punt de vista no té en compte que els conceptes no viuen aïlladament, sinó que formen part de xarxes més grans i que s'usen en diferents contextos, per la qual cosa és una explicació molt incompleta de la formació de conceptes.

2.2.2 Crítiques a la teoria de la generalització per comparació

De la mateixa manera que aquest punt de vista té molts partidaris, també ha rebut moltes crítiques dins del camp de la filosofia i dins el camp de la psicologia. En Dörfler (1991) podem trobar un resum dels principals arguments en els quals es basa aquesta crítica:

1) En la teoria clàssica de la formació de conceptes, allò general es considera present en els objectes i situacions, "solament" és abstrèct i separat d'ells. Allò que és general és descobert i no construït, i, en principi, és detectat pels sentits. Aquesta manera d'entendre l'abstracció deixa sense resoldre el problema de com adquirim el criteri de comparació. Dit amb altres paraules: l'abstracció aristotèlica explica per què un cas particular es considera membre d'una classe, però no pot explicar en tota la seva complexitat com adquirim el criteri general que ens permetrà discriminar entre els exemples positius i negatius. Si considerem l'alternativa probabilística sobre la formació de conceptes que diu que no estem aplicant un criteri, sinó que fem la comparació amb un exemplar prototipus o amb una espècie de plantilla, les dificultats augmenten, ja que no està gaire clar com es forma aquesta espècie de plantilla ni quins són els processos cognitius que ens permeten dir que un exemple s'ajusta a la plantilla. Aquestes limitacions obliguen a ampliar i aprofundir el que s'entén per abstracció i generalització.

2) Aquesta manera d'entendre la formació de la generalitat només depèn del conjunt d'objectes a partir dels quals s'ha desenvolupat. És a dir, el sentit d'aquesta generalitat és purament extensional perquè només considera el referent, és a dir el conjunt d'objectes i situacions que formen aquesta generalitat.

3) La generalitat que s'ha format d'aquesta manera és estàtica i no pot ésser desenvolupada ni generalitzada d'una manera més rica, ja que es troba restringida al

conjunt d'objectes i situacions a partir dels quals s'ha desenvolupat, les quals li donen el seu sentit. Aquesta generalitat està limitada pels objectes que tenen la qualitat comuna que representa; un triangle o un cercle són formes geomètriques-empíriques i no poden ésser generalitzades d'una manera més rica.

4) Les diferents situacions i objectes tenen moltes qualitats diferents en comú. Com seleccionem unes qualitats comunes i en desestimem d'altres que també ho són? Per què hi ha propietats comunes que són essencials i d'altres que també ho són es consideren irrellevants?. A partir dels estudis actuals sembla clar que la selecció d'algunes de les moltes qualitats comunes que presenten els objectes i les situacions depenen molt del desenvolupament de la persona i del context on s'hagi de realitzar aquesta selecció. Si el context varia, una qualitat comuna, que en un altre context era irrellevant, es pot convertir en essencial.

5) Les implicacions didàctiques d'aquest punt de vista (no introduir els conceptes a partir de definicions, assegurar-nos que els conceptes contributius estan assolits, elecció correcta dels exemples positius i negatius, utilització de les possibilitats de la informàtica, procurar una gran variabilitat perceptiva, etc.) són importants i s'han de tenir en compte, però són insuficients per afrontar la complexitat dels processos d'abstracció i generalització.

Segons Dörfler (1991) per què aquesta manera d'entendre la generalització ha tingut tant de ressò dins de la filosofia, la psicologia i la didàctica té dues explicacions:

1) Quan una persona ja ha adquirit un concepte matemàtic, sempre pot fer-ne una reinterpretació i considerar-lo com una propietat comuna (i possiblement essencial) d'una classe de fenòmens (objectes, processos, situacions, etc.). D'aquesta manera retrospectiva, qualsevol concepte es pot considerar com una qualitat comuna, que és el resultat d'una abstracció que detecta aquesta qualitat comuna a una sèrie de fenòmens. Però amb això el que fa és prendre consciència d'una de les condicions necessàries que ha de tenir un concepte que ja està format, sense dir gaire cosa sobre el procés genètic que permet adquirir el concepte. El principal defecte que presenta aquest tipus d'argumentació és que està feta des del punt de vista d'una persona que ja té adquirit el concepte com una classe d'entitat mental i no es posa en la situació de l'alumne que encara no l'ha constituït.

2) Una altra raó per a la persistència del model d'abstracció empírica és el fet que aquesta és la base per organitzar moltes de les nostres experiències de la vida diària. En moltes situacions quotidianes hem de fer classificacions a partir de la forma, el color, etc.

La crítica al model d'abstracció aristotèlica no ens pot portar a negar la importància que té per classificar les experiències de la vida diària, sinó a buscar una teoria de l'abstracció i de la generalització que, sabent que aquest tipus d'abstracció juga un paper important en el reconeixement de les propietats dels objectes, intenti explicar la complexitat dels

processos d'abstracció i de generalització.

2.2.3 *El punt de vista de Piaget*

Dintre de la psicologia, Piaget fou dels que més clarament va posar de manifest les limitacions del punt de vista que considera que generalitzem com a resultat d'un procés de comparació. Del corpus teòric generat per Piaget hem tingut en compte tres aspectes: la teoria de l'equilibració, la teoria de les etapes i les seves consideracions sobre l'abstracció reflexiva. Piaget considera que totes les persones desenvolupen certes estructures sempre que mantinguin una relació normal amb el medi físic i social. A mesura que es va produint aquesta inter-relació es va formant una seqüència d'estructures del pensament cada vegada més complexes. Per classificar les diferents estructures, Piaget utilitza el concepte d'operació. Una operació no és més que una acció interioritzada reversible. Arran dels seus experiments, Piaget va arribar a la conclusió que hi ha èpoques en què els nens pensen de manera operatòria i èpoques en què no, i així podem parlar del període preoperatori i del període operatiu. L'etapa preoperatoria aniria dels dos fins als sis anys aproximadament. Abans de l'etapa preoperatoria, Piaget considera l'etapa sensomotriu, que va del naixement fins a l'adquisició del llenguatge (de 0 a 2 anys aproximadament) i que es caracteritza per la falta de la capacitat de representació. El pas de l'etapa preoperatoria a l'etapa operatòria és un salt qualitatiu en el desenvolupament dels nens, ja que permet, per exemple, un domini del número que abans és impossible perquè, si els nens no tenen la capacitat de la reversibilitat, no poden entendre el principi de la conservació de la quantitat. Arribar al pensament operatiu és un gran èxit per als alumnes, però no és el màxim a què podem aspirar, ja que segons Piaget, existeix una etapa de desenvolupament intel·lectual que va més enllà que l'etapa operatòria. És l'etapa en què les persones són capaces de treballar amb hipòtesis i poden considerar totes les possibilitats lògiques. Aquesta etapa, que s'anomena de les operacions formals, és la que permet el raonament científic i normalment comença als 12-14 anys. És en aquesta etapa on es pot fer un raonament matemàtic a fons.

Aquest punt de vista ha tingut importants repercussions en els currículums escolars i ha influït de forma notable en l'ensenyament-aprenentatge de les matemàtiques, ajustant els continguts matemàtics escolars d'acord a les etapes generals comentades anteriorment i fent conscients els professors de quin tipus de raonament i de comprensió poden esperar dels alumnes en un moment donat del seu desenvolupament. Inhelder i Piaget (1972) varen establir les característiques del pensament formal, que segons l'opinió d'aquests autors, és propi dels adolescents i de les persones adultes. Inhelder i Piaget consideren que les operacions formals sorgeixen al començament de l'adolescència (11-12 anys) a partir de les operacions concretes precedents, i es desenvolupen durant tota l'adolescència, de forma que cap al final d'aquesta els alumnes tindrien el pensament estructurat com el d'un científic ingenu. És a dir: davant un problema, estaran en condicions de formular hipòtesis, planificar experiències, treure conclusions, etc. Aquest punt de vista té conseqüències rellevants per a l'aprenentatge-ensenyament de qualsevol coneixement científic:

- a) Els adolescents (especialment a partir dels 14-15 anys) tenen un pensament qualitativament diferent del que tenen els alumnes de menor edat, però igual al pensament adult pel que fa a estructura i funcionament.
- b) El pensament formal es desenvolupa d'una manera espontània i és, per tant, universal. O sigui, que qualsevol alumne normal de 14-15 anys que hagi estat degudament escolaritzat ha arribat a l'estadi del pensament formal.
- c) El pensament formal és una característica general del funcionament cognitiu, essent per natura uniforme i homogeni, ja que constitueix un sistema de conjunt que permet accedir de manera simultània a diferents esquemes operacionals formals (per exemple, proporció, equilibri mecànic, conservacions no observables, etc.).
- d) El pensament formal es basa, no en els objectes o situacions directament percebudes, sinó en representacions proposicionals o verbals d'aquests objectes. Fa referència a l'estructura formal de les relacions entre els objectes presents i no al contingut. Per tot això, el pensament formal, fent honor al seu nom, és independent del contingut de la feina a la qual s'aplica, és a dir, pot aplicar-se amb èxit a continguts molt diferents.

D'acord amb el punt de vista de Piaget, el que podem esperar d'un alumne que ha arribat a l'etapa de les operacions formals és: a) capacitat per raonar sense referència a una experiència concreta (abstracció reflexiva) b) capacitat per pensar teòricament en les conseqüències dels canvis soferts pels objectes i esdeveniments (pensament proposicional) c) habilitat per raonar sobre la combinació de diferents variables en un problema (lògica combinatòria) d) capacitat de construir models generals a partir d'exemples particulars (raonament inductiu) i e) capacitat per treure conclusions particulars a partir de proposicions generals (raonament deductiu).

Els estudis posteriors a la publicació de l'obra d'Inhelder i Piaget sobre el desenvolupament del pensament formal han fet aparèixer alguns desacords amb el treball piagetian sobre el pensament formal. Així s'ha comprovat: a) que no tothom arriba a la fase del pensament formal b) que no tots els esquemes formals s'adquireixen simultàniament, posant així en dubte l'existència d'una estructura de conjunt en el pensament formal i c) que en la resolució de feines formals no solament influeix l'estructura lògica del problema - tal com postula el model piagetian - sinó també el contingut a què fa referència, i que aquesta influència està mediatitzada essencialment per les idees o concepcions prèvies que té el subjecte sobre el contingut.

Mentre que la teoria de les etapes de Piaget és força discutida, la seva teoria de l'equilibració (Piaget 1978b) gaudeix de més predicament. Els elements clau d'aquesta teoria són: les dicotomies assimilació/acomodació i desequilibració/reequilibració. Per assimilació s'entén l'assimilació dels materials del medi a l'estructura interna de l'individu. Per acomodació s'entén l'aplicació d'una estructura general a un cas particular i porta a la diferenciació d'una estructura prèvia i a l'aparició d'estructures noves. Per reequilibració s'entén el procés que davant d'un trencament de l'equilibri inicial dels esquemes de l'alumne el porta a una nova situació d'equilibri, que no és la inicial sinó una situació millor que la de partida. Piaget considera tres tipus de reequilibració: la primera

(alfa) porta a una situació d'equilibri entre els processos d'acomodació i assimilació, la segona (beta) porta a un equilibri entre els subsistemes sorgits de la variació de l'estructura inicial, mentre que la tercera (gamma) porta a un equilibri entre les diferenciacions i a la integració en un sistema total. La teoria de l'equilibració de Piaget avui dia encara té força acceptació i és un dels principis teòrics sobre els que s'ha formulat la proposta constructivista que serveix de referència al Disseny Curricular de la reforma educativa de la Generalitat de Catalunya (Coll 1989).

Piaget considera que l'abstracció és la facultat que ens permet arribar als conceptes, però no considera que sigui només el resultat de la comparació, sinó que creu que les nostres accions són molt importants a l'hora d'abstreure els conceptes. En funció de les experiències que intervenen en la formació d'un concepte, Piaget distingeix l'abstracció simple o empírica de l'abstracció reflexiva o lògico-matemàtica. En l'abstracció simple, tot el que la persona fa és centrar-se en una propietat determinada de l'objecte, tot ignorant les altres; extreu la informació dels propis objectes. Reconèixer determinats atributs o propietats suposa abstreure dels objectes unes qualitats que els diferencien dels altres. Quan mirem un objecte mai en veiem aïlladament el color o la forma, sinó que totes les qualitats visualment sensibles ens vénen donades simultàniament en un sol acte de percepció. Extreure d'aquest conjunt perceptiu una propietat com pugui ser el color, suposa ja una abstracció mental. En l'abstracció empírica, tot el que fa el subjecte és centrar-se en una determinada propietat, i ignorar les altres. L'abstracció reflexiva treu les seves informacions de la coordinació de les accions que el subjecte exerceix sobre l'objecte. Ni les accions ni la coordinació tenen el seu origen en l'objecte, que té un paper de suport. L'abstracció reflexiva implica la construcció de relacions entre els objectes. Aquesta abstracció es tracta d'una vertadera construcció de la ment més que d'una centració en quelcom que ja existeix en els objectes. En l'abstracció reflexiva, el que s'abstreu no és allò observable, allò que ja existeix en els objectes, sinó que es descobreixen propietats a partir, no dels objectes, sinó de les accions (reunir, separar, ordenar, etc.) que s'efectuen amb ells. Aquests dos tipus d'abstracció funcionen de manera coordinada en la majoria de les situacions en què generalitzem, encara que de cara al seu estudi i anàlisi convé tractar-les separatament.

2.2.4 Les etapes del model Van Hiele

A més dels treballs de Piaget, una de les aportacions que permeten entendre les diferents fases per les quals passa la forma de pensar dels alumnes és el que normalment es coneix com a "model Van Hiele". Aquest model dóna criteris al professor per: 1) saber en quin nivell es troben els seus alumnes i 2) organitzar les classes a fi d'aconseguir que vagin progressant de nivell. A continuació segueix una breu descripció dels cinc nivells de raonament dels alumnes que descriu aquest model:

"Nivell 1: En este nivel los alumnos perciben diagramas geométricos como una totalidad.

Los alumnos no observan:

- a) las partes individuales de la figura,*
- b) las relaciones entre las partes componentes,*

c) las relaciones entre figuras diferentes.

El reconocimiento de figuras es fácil ya que se perciben como formas completas. Este nivel puede ser descrito como global/descriptivo.

Nivell II: Los alumnos empiezan a ver las partes de las figuras. Se pueden establecer experimentalmente las propiedades de las formas, aunque no definidas formalmente. Este nivel puede ser descrito como experimental/analítico.

(Los niveles I i II juntos forman una etapa experimental preliminar basada en situaciones prácticas, en dibujo y medida.)

Nivell III: Los alumnos son capaces de establecer relaciones entre las propiedades de una figura y entre las figuras mismas. Pueden determinar la posibilidad de una propiedad a partir de otra. El proceso de enseñanza desarrolla conclusiones lógicas, clarificándose el papel de la definición. Este nivel puede ser descrito como educativo.

Nivel IV: Los alumnos reconocen el significado de la deducción como un medio de construir y desarrollar la teoría geométrica. Queda claro el papel de los axiomas en este desarrollo.

Nivell V: En el nivel final las teorías se desarrollan sin necesidad de ninguna interpretación concreta.” (Macnab i Cummine 1992, pàgs. 72-73).

Actualment hi ha força acord que s'ha de tenir en compte el nivell de desenvolupament de l'alumne a l'hora de presentar els continguts matemàtics de manera que no es produxi un desfasament que resulti insalvable. És evident que les dues primeres etapes de Van Hiele són de tipus experimental, basades en el treball pràctic, i que és en el nivell III quan comencen a aparèixer les idees deductives. El fet de reconèixer la importància del nivell de desenvolupament i maduració de l'alumnat porta a plantejar-se la pregunta: està l'alumnat preparat per realitzar els processos d'abstracció i generalització que se li exigirà?. En el cas que l'alumne no estigui preparat per al nivell d'abstracció que preveu el currículum de matemàtiques a una edat determinada, una causa de les dificultats d'aprenentatge serà el desfasament que es produeixi entre el grau d'abstracció que se li exigeix i el nivell d'abstracció que ha assolit en els seu procés de desenvolupament. L'àrea d'aplicació més directa del model Van Hiele és la Geometria, però hi ha investigadors que consideren que les etapes d'aquest model són vàlides per organitzar l'ensenyament de les matemàtiques en qualsevol camp. Per exemple, Llorens (1996) ha aplicat el model Van Hiele al concepte de recta tangent a una corba. Aquest autor aplica el model de Van Hiele al concepte de recta tangent a una corba en un punt i aporta una descripció de cada un dels nivells I, II i III que compleix les condicions teòriques per ser considerada pròpia del model Van Hiele.

2.2.5 El punt de vista de Dörfler

Dörfler (1991) explica els processos d'abstracció i generalització que intervenen en la formació dels conceptes matemàtics de la manera següent. El punt de partida és una acció o un “sistema d'accions” que poden ésser materials (p.e. dibuixar un triangle a la pissarra), imaginades (p.e. imaginar-se mentalment l'acció de dibuixar un triangle a la pissarra) o simbòliques (pensar mentalment amb paraules que hem de realitzar l'acció de

dibuixar un triangle a la pissarra); aquestes accions sempre són accions concretes, en particular els elements d'aquestes accions són uns determinats objectes (materials o ideals). L'objectiu, el significat i el curs d'aquestes accions estan dirigits per l'atenció que posa la persona sobre determinades relacions i connexions entre els elements d'aquestes accions. Això succeeix especialment quan planifiquem les accions i quan en fem una avaluació reflexiva.

Aquestes relacions proven que hi ha una certa regularitat quan les accions són repetides (tantes vegades com es consideri convenient). Aquestes regularitats són anomenades "invariants de les accions". Aquests invariants d'acció que s'han comprovat, necessiten perquè els representin un "sistema de símbols" que poden ésser verbals, icònics, algebriacs, etc. Aquests símbols només serveixen per representar els elements de l'acció i en cap cas se'n considera el significat en abstracte, és a dir, el paper que juguen és el de descriure els elements de l'acció. Moltes vegades aquests símbols poden ésser substituïts per prototipus que s'han utilitzat en les accions, és a dir, que la persona pot explicar els invariants de les accions a partir d'un exemple prototipus, però no pot substituir-lo per un símbol.

Aquest procés que, a partir de la reflexió sobre el sistema d'accions i la seva simbolització, arriba a trobar relacions invariants i fa la seva descripció simbòlica rep el nom de "procés d'abstracció constructiva". Això vol dir que, en aquest procés, determinades propietats i relacions són assenyalades i l'atenció es focalitza sobre elles, la qual cosa posa de manifest que guanyen un cert grau d'independència respecte dels objectes i situacions amb els quals estan inicialment associades. L'abstracció constructiva dóna un resultat que apareix a partir de l'acció i que guanya sentit i "existència" a partir de l'acció.

En la majoria dels casos, els elements de l'acció, o fins i tot la mateixa acció, poden ésser substituïts per d'altres sense que això afecti els invariants del sistema d'accions que s'han trobat, ni tampoc la seva descripció simbòlica. Aquest fet determina que els símbols que s'utilitzen per representar els invariants de l'acció vagin agafant de manera gradual un referent cada cop més gran. Aquest procés rep el nom de "generalització extensiva". La substitució d'elements de l'acció, inicialment, es fa per elements molt similars als de la situació inicial, però posteriorment els objectes poden ésser substituïts per d'altres objectes sense gaire similitud amb els de la situació inicial, amb la qual cosa els símbols són utilitzats com a variables (presenten la propietat de poder ésser substituïts per objectes diferents).

La reflexió que fem sobre el sistema de símbols que descriuen els invariants del sistema d'accions fa que ells mateixos es puguin convertir en elements sobre els quals actuar. És a dir, els símbols es converteixen en objectes amb els quals podem fer accions, de manera que esdevenen representants (significants) dels invariants del sistema d'accions inicial, sobre els quals es pot actuar. Podem parlar d'una separació o autonomia dels símbols respecte del seu camp de referència, que fa que els símbols es converteixin en objectes que tenen significat a partir de l'estructura que els organitza i que apareix a partir de les

operacions que s'hi poden fer. Arribats a aquest punt, els símbols es converteixen en "variables amb caràcter d'objectes", és a dir, es converteixen en símbols, que tenen un camp de referència potencialment il·limitat, organitzats en un sistema de signes estructurat. Aquest procés rep el nom "generalització intensiva". Aquest sistema estructurat de signes es pot aplicar a d'altres situacions diferents de la inicial, amb la qual cosa el seu referent guanya amb extensió i tornem a tenir una "generalització extensiva".

2.2.6 Els punts de vista de Dubinsky, Sfard i Tall

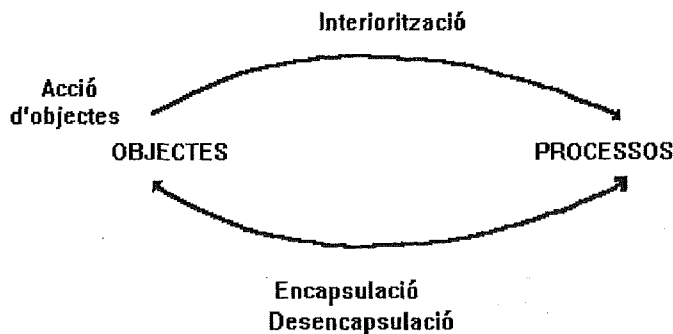
Dubinsky (1991 i 1996) ha intentat aplicar, després d'una revisió, algunes de les idees de Piaget al pensament matemàtic avançat. Les principals dificultats que ha trobat en aquest intent han estat, d'una banda que la teoria de Piaget té la seva font en la manipulació d'objectes físics, però a mesura que el nivell matemàtic augmenta es fa necessari construir nous objectes, no físics sinó mentals, i manipular-los per construir les idees matemàtiques. Dubinsky (1996) considera que un problema important en l'educació matemàtica és trobar substituïts apropiats per als objectes físics i creu que els ordinadors es poden utilitzar amb aquest propòsit. En aquesta investigació, d'acord amb Dubinsky, hem utilitzat construccions dels programes Cabri i gràfiques del programa Calcula com a objectes manipulables sobre els quals els alumnes poden realitzar accions físiques i mentals. D'altra banda, les idees de Piaget estan molt relacionades amb el desenvolupament espontani, però, a mesura que el nivell dels continguts matemàtics augmenta, el paper del professor per crear situacions que fomentin el desenvolupament, és més important que no pas en els nivells elementals sobre els quals Piaget va concentrar la seva atenció: *"La siguiente es una lista de aquellas ideas de Piaget sobre educación, tomadas de la lista precedente, que he tratado de implementar en la investigación y desarrollo del trabajo que yo realizo.*

- *Concentrarse en los mecanismos mediante los cuales se lleva a cabo el desarrollo intelectual. Estos incluyen la abstracción reflexiva y la dicotomía desequilibrio/reequilibrio.*
- *Ayudar a los estudiantes a construir acciones, a interiorizarlas en procesos y a encapsularlos, en objetos.*
- *Ayudar a los estudiantes a tomar conciencia de las estructuras que han construido, a conectarlas con los conceptos matemáticos y a hacer construcciones adicionales para tratar con situaciones nuevas.*
- *Cambiar el papel del maestro de diseminador de información a guía y asistente.*
- *Prestar atención a las voces de los estudiantes, a sus errores y a sus éxitos y tratar de entender su pensamiento.*
- *Crear situaciones que alienten a los estudiantes a hacer construcciones mentales para tratar con las situaciones de los problemas matemáticos.*
- *Permitir que los estudiantes construyan bases sobre la experiencia para los conceptos antes de enfrentar el formalismo que estructura los conceptos.*
- *Dar a los estudiantes una oportunidad de descubrir los conceptos matemáticos antes de que les sean explicados, ya sea por otros estudiantes o por el maestro.*
- *Establecer un ambiente en el cual los estudiantes tengan oportunidad de*

interacciones sociales ricas, tanto con otros estudiantes como con el maestro."
(Dubinsky, 1996, pàgs. 28-29).

El mètode pedagògic que proposa Dubinsky té tres components: investigació en l'aprenentatge, el cicle ACE i l'aprenentatge cooperatiu. La investigació en l'aprenentatge consisteix en estudis qualitius, entre els que s'inclouen entrevistes a fons amb els estudiants per saber com estan pensant mentre s'esforcen per donar sentit a una situació matemàtica. El cicle ACE consisteix a estructurar els cursos amb tres components: activitats amb l'ordinador, treball a classe sobre problemes relacionats amb les activitats en l'ordinador i discussió d'aquests problemes i les seves solucions; i exercicis per reforçar el que s'ha après i introduir el treball futur. Les activitats amb l'ordinador consisteixen en la presentació de tasques que provoquen la desequilibració i els donen oportunitat de construir una base d'experiències per als conceptes matemàtics i per descobrir les idees matemàtiques específiques. L'èxit en aquestes tasques condueix a la reequilibració. Les activitats amb ordinador estan dissenyades de manera que, com a resultat de la seva realització, l'alumne faci abstraccions reflexives mitjançant les quals s'efectuen les següents construccions mentals: accions, processos i objectes. Els estudiants realitzen tot el treball en grups (fins i tot alguns exàmens) cooperatius permanents. Aquest ambient de treball permet una interacció social que millora l'aprenentatge dels alumnes.

Dubinsky considera que, per explicar les diferències en les conductes dels estudiants, cal fer una hipòtesi mentalista, ja que considera que per poder explicar i buscar solucions a aquestes diferències, cal desenvolupar una teoria sobre els processos mentals, que pugui explicar allò que està passant en la ment dels estudiants: *"El conocimiento matemático de un individuo es su tendencia a responder ante situaciones matemáticas problemáticas reflexionando sobre ellas en un contexto social y construyendo y reconstruyendo acciones, procesos y objetos matemáticos y organizándolos en esquemas con el fin de manejar las situaciones"* (Dubinsky, 1996, pàgs. 32-33). La construcció d'accions, processos i objectes és il·lustrada amb la figura següent (Dubinsky, 1996, pàg. 33) :



Una acció és una transformació d'objectes que l'individu percep com a quelcom d'extern. Un individu que només pot entendre una transformació com una acció només pot realitzar-la reaccionant a indicacions externes que li proporcionen detalls precisos sobre

els passos que ha de fer. Per exemple, un estudiant que no és capaç d'interpretar una situació com una funció, a no ser que tingui una fórmula per obtenir valors, està restringit a un concepte d'acció d'una funció. En aquest cas, l'alumne no pot fer gaires coses amb aquesta funció, excepte avaluar-la en punts específics i manipular la fórmula. Les funcions definides a trossos, les inverses de les funcions, la composició de funcions, els conjunts de funcions, la funció derivada són fonts de grans dificultats per a aquests alumnes perquè no poden anar més enllà d'una concepció d'acció d'una funció, i totes aquestes nocions exigeixen concepcions de procés i/o objecte (Breidenbach, Dubinsky i Nichols 1992).

Quan una acció es repeteix i l'alumne pot reflexionar sobre ella, pot interioritzar-se en un procés. És a dir, es realitza una construcció interna que executa la mateixa acció, però ara no necessàriament dirigida per un estímul extern. Un individu que té una concepció de procés d'una transformació hi pot reflexionar, descriure-la, i fins i tot invertir els passos. A diferència de l'acció, l'individu percep el procés com a quelcom d'intern i sota el seu control, en comptes de ser una resposta a indicacions externes. En el cas de les funcions, una concepció de procés permet a l'alumne pensar la funció com quelcom que rep una entrada, o més, de valors de la variable independent, que realitza una o més operacions sobre les entrades i que dóna els valors de la variable dependent com a resultat. Per exemple, per entendre la funció $f(x) = \sin x$, cal una concepció procés del concepte de funció perquè no tenim instruccions explícites de com podem obtenir una sortida per a cada entrada; per trobar imatges, un alumne ha de pensar en el procés que associa a cada nombre real el seu sinus. Amb una concepció procés del concepte de funció, l'alumne pot construir una composició o bé invertir el procés per obtenir funcions inverses.

Quan un individu reflexiona sobre les operacions aplicades a un procés en particular, pren consciència del procés com un tot, realitza aquelles transformacions (siguin accions o processos) que poden actuar sobre ell, i pot construir de fet aquestes transformacions, llavors està pensant en aquest procés com en un objecte. En aquest cas es diu que el procés ha estat encapsulat en un objecte. En el decurs de la realització d'una acció o un procés sobre un objecte, sol ser necessari desencapsular i tornar l'objecte al procés del qual es va obtenir a fi d'usar-ne les propietats i manipular-lo. Un exemple d'encapsulació de processos en objectes i de desencapsulació és la manipulació de funcions per trobar la suma, producte, etc, o bé la formació de conjunts de funcions.

En general es considera que que l'encapsulació de processos en objectes és extremadament difícil. Sfard (1991) considera que els conceptes matemàtics poden considerar-se de dues maneres diferents: estructuralment (com a objectes) i operacionalment (com a processos): << "Mirar" una entitat matemàtica com un objecte vol dir ser capaç de referir-se a ella com si fos una cosa real - una estructura estàtica, existint en algun lloc de l'espai i el temps. Això també significa (..) manipular-la com un tot, sense entrar en detalls (...), la interpretació d'un moviment com un procés implica recordar-lo com a potencial més que com una entitat actual (...). Així, mentre

que la “concepció estructural” és estàtica (...), instantània, i integradora, “l’operacional” és dinàmica, seqüencial i detallada>> (Sfard, 1991 pàg. 4).

Per a Sfard, el pas de la concepció operacional a l’estructural implica tres fases: interiorització, condensació i cosificació. Aquesta última fase és allò que Dubinsky (1991 i 1996) i d’altres investigadors anomenen encapsulació: “*en l’estat d’interiorització un aprenent obté familiaritat amb un procés que podria donar lloc a un nou concepte (...), gradualment l’aprenent es converteix en expert per executar aquests processos (...). La fase de condensació és un període de comprimir llargues seqüències d’operacions en unitats més manejables. En aquest estat una persona comença a ser més i més capaç de pensar en els processos donats com un tot sense tenir la necessitat d’entrar en detalls (...). La cosificació, per tant, és definida com un canvi ontològic- una sobtada habilitat per mirar una cosa familiar des d’un punt de vista completament nou. Així, mentre que la interiorització i la condensació són graduals, canvis quantitativament més que qualitativament, la cosificació és un salt quàntic instantani*” (Sfard, 1991 pàgs. 18-20).

Tall (1996), per explicar el paper de la visualització i la simbolització com a eines mediadores en el procés d’abstracció i, més en general, en els processos cognitius mobilitzats pels continguts matemàtics, aprofundeix i desenvolupa els tres tipus de sistemes de representació proposats per Bruner. Segons Bruner, hi ha tres tipus de representacions:

- 1) La representació enactiva: és una manera de representar experiències anteriors mitjançant una resposta motriu adequada.
- 2) La representació icònica: consisteix a recrear mentalment una situació anterior: per exemple, si hem fet un viatge i hem visitat un lloc que ens ha agradat molt, podem recrear-ne les imatges.
- 3) La representació simbòlica: aquest tipus de representació va lligada a la competència lingüística i permet representar les situacions mitjançant símbols.

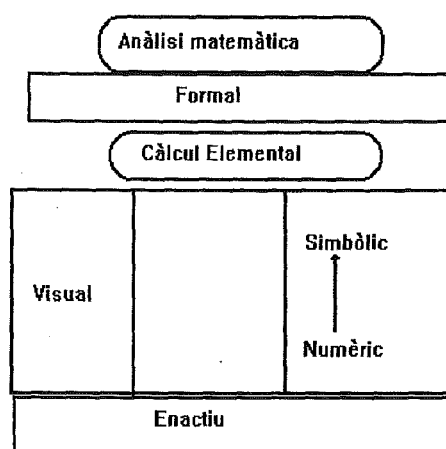
Bruner va proposar que els conceptes s’ensenyessin seguint aquestes tres fases: “*(...)Por tanto, la clave para la enseñanza parecía ser el presentar los conceptos de forma que respondiesen de manera directa a los modos hipotéticos de representación. La forma en que los seres humanos se representaban mentalmente los actos, los objetos y las ideas, se podía traducir a formas de presentar los conceptos en el aula. Y, aunque algunos estudiantes podían estar <<preparados>> para una representación puramente simbólica, parecía prudente, no obstante, presentar también por lo menos el modo icónico, de forma que los estudiantes dispusiesen de imágenes de reserva si les fallaban las manipulaciones simbólicas(...)*” (Resnick, 1990, pag. 140-141).

Tall (1996) adapta la classificació de Bruner a les representacions utilitzades en el càlcul infinitesimal de la manera següent:

- 1) “representacions enactives”: són accions humanes que fan sensació de canvi, velocitat o acceleració.

- 2) “representacions numèriques i simbòliques” : són representacions que poden ser manipulades manualment o amb computadora (incloent la possibilitat de ser programades pels estudiants)
- 3) “representacions visuals” : són representacions que poden ser produïdes manualment de manera aproximada o, més acuradament, amb ordinadors dinàmics.
- 4) “representacions formals” : són representacions que depenen de definicions i proves.

Tall (1996) utilitza el diagrama següent per representar el pes d'aquest tipus de representacions en la construcció dels conceptes del càlcul.



Amb aquest diagrama vol il·lustrar que les experiències enactives són la base intuïtiva per a la construcció del càlcul elemental utilitzant representacions visuals, numèriques i simbòliques, però que l'anàlisi matemàtica requereix un alt nivell de representacions formals.

Tall considera que les representacions simbòliques proposades per Bruner són al mateix temps visuals i simbòliques, per la qual cosa Tall (1998) amplia la classificació anterior amb una nova categoria: “Una combinació de 2 i 3 connectant les representacions simbòliques i gràfiques” (Tall 1998, pàg. 68). Tall proposa un aprenentatge versàtil combinant gestalts visuals globals i manipulacions seqüencials de símbols i considera que els símbols en matemàtiques són usats de dues maneres diferents, com un procés i com un objecte matemàtic. Gray i Tall (1994) consideren que els símbols tenen un gran poder per comprimir informació i afirmen que ells són l'instrument utilitzat per a l'encapsulació de “processos” matemàtics en “objectes”. Usen la paraula “procepte” per a denotar simultàniament “procés” i “concepte”. El terme procepte s'entén com una amalgama de procés i concepte amb un símbol operant dualment per a un o per a l'altre.

Alguns alumnes veuen el simbolisme bàsicament com un procés i d'altres l'usen de manera flexible com a procés o com a concepte, la qual cosa els dóna un gran avantatge. Tall (1998) posa exemples de tres nivells de proceptes:

1) proceptes tals com $5+4$, els quals poden tenir un procés de construcció per computació per produir un resultat. Són proceptes que evoquen tant l'operació de sumar com el concepte de suma.

2) proceptes tals com $3a+2b$, els quals tenen un procés de construcció que no pot ser executat fins que tingui lloc la substitució de valors, però el símbol pot ser manipulat. Són proceptes que evoquen el procés d'avaluació per a un valor determinat i el concepte d'expressió algebraica.

3) proceptes tals com $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$, els quals tenen un procés associat (tendir al límit) però no tenen un mètode de construcció (com a part integral i permanent) per calcular el valor del límit, i que també poden evocar el concepte de límit.

Els punts de vista de Piaget, Dörfler, Dubinsky, Tall i Sfard posen de manifest un aspecte clau: la importància de les accions dels alumnes. La recomanació que els conceptes matemàtics s'han de formar a partir de l'activitat dels alumnes s'ha recollit en molts informes sobre l'educació matemàtica. En el Currículum de Batxillerat de la Generalitat de Catalunya hi trobem a les orientacions següents: *“Pel que fa al material de suport i als llenguatges emprats s'ha d'insistir en l'ús de tots els recursos a l'abast, tot admetent que la diversificació de llenguatges i suports facilita una adaptació a les característiques diverses dels alumnes. No cal recordar que el caràcter procedimental, a què repetidament s'ha fet referència, condicionarà unes activitats d'aprenentatge molt basades en l'acció de l'alumnat, i que per a les activitats d'aprenentatge adreçades bàsicament a conceptes i principis caldrà tenir present els processos inductius i deductius que facilitaran un tractament adequat d'aquests continguts”* (DOG núm 2181, pàg. 2455).

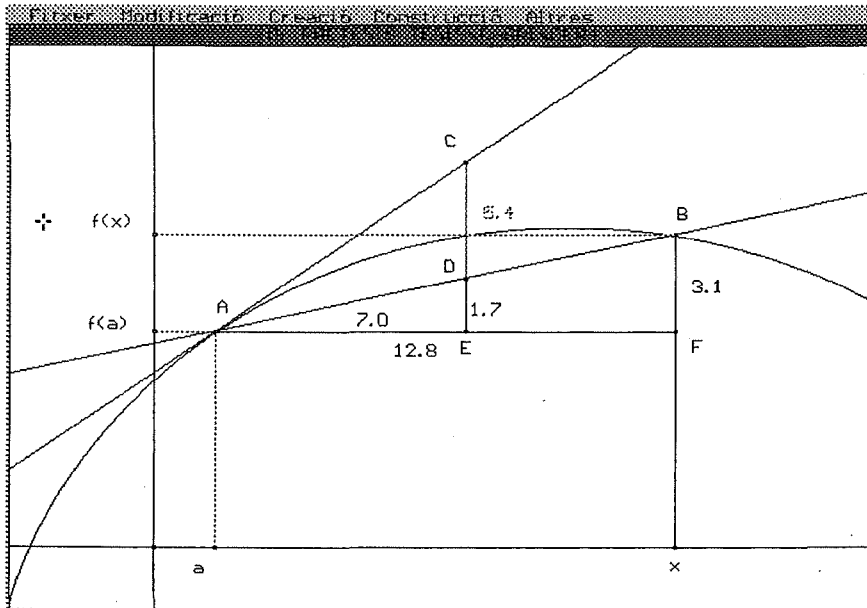
Si per realitzar els processos d'abstracció i generalització prenem com a punt de partida un sistema d'accions de l'alumne, ens hem de preguntar quina és la causa que pot fer que l'alumne realitzi les accions i hi reflexioni. La contestació a la pregunta és: només en el cas que l'alumne tingui curiositat o bé estigui motivat es posarà en funcionament els processos d'abstracció i de generalització. Dit d'una altra manera: des d'aquesta perspectiva, la motivació de l'alumne es converteix en un element no solament important sinó cabdal.

2.2.7 Exemples de com entendrem en aquesta memòria els processos d'abstracció i generalització

A l'hora de dissenyar les activitats en què els alumnes haviem de fer abstraccions i generalització hem tingut en compte les aportacions anteriors. Hi ha activitats en què l'alumne ha de fer una abstracció per comparació (teoria associacionista); d'altres en què la generalitat s'obté a partir d'un sol cas (punt de vista de Husserl); però fonamentalment hem seguit l'esquema de generalització operativa de Dörfler i el punt de vista de Dubinsky. A continuació segueixen dos exemples que il·lustren com hem considerat en aquesta memòria els processos d'abstracció i generalització.

Exemple 1.

L'objectiu d'aquesta activitat és que l'alumne trobi l'invariant següent: les secants s'aproximen a la recta tangent. Les accions que realitzaran els alumnes es fan utilitzant el micromón Cabrigéomètre.



El programa Cabrigéomètre facilita els processos d'abstracció i generalització dels alumnes. En efecte, la construcció obtinguda es pot convertir en un "objecte variable", és a dir, en un objecte "particular dinàmic" perquè aquest programa permet aconseguir que l'objecte particular obtingut en la figura anterior (la recta secant que passa per A i B) vagi variant de manera que pugui convertir-se, potencialment, en infinites construccions que continuen essent secants. Basta situar el punter del ratolí en el punt B i moure'l. Aquest objecte variable se situa en un lloc intermedi entre la secant particular i el concepte "secant que passa per A ", entès com la classe que conté totes les secants particulars que passen pel punt A .

L'alumne, com a resultat de les seves accions observa un "invariant": la recta secant AB s'aproxima a la recta tangent en el punt A (abstracció constructiva). La variació contínua de la secant AB permet, potencialment, dibuixar un conjunt il·limitat de secants que passen per A i situa l'alumne en un nivell de major generalitat que quan només considera un nombre finit de secants, i menys general que quan considera totes les possibles secants que passen per A .

Si a continuació els alumnes canvien la posició del punt A i repeteixen el procés, realitzen la mateixa acció sobre una secant i una tangent inicials diferents, arribant a resultats del