VICENÇ FONT MOLL

PROCEDIMENTS PER OBTENIR EXPRESSIONS SIMBÒLIQUES A PARTIR DE GRÀFIQUES. APLICACIONS A LES DERIVADES

****

Departament de Didàctica de les Ciències Experimentals i de la Matemàtica

Programa de Didàctica de les Ciències Experimentals i de la Matemàtica

Bienni 1994-1996

Per optar al títol de Doctor en Filosofia i Ciències de l'Educació
Secció Ciències de l'Educació

Director: Josep María Nuñez i Espallargas

Tutor: Josep María Nuñez i Espallargas

UNIVERSITAT DE BARCELONA

BARCELONA 1999

El segment DD' té per longitud q/r perquè:

$$\frac{r}{1} = \frac{q}{DD'} \Rightarrow DD' = \frac{q}{r}$$

El segment HH''' té una longitud igual a $AM\,r/q$ perquè

$$\frac{AM}{\frac{q}{r}} = \frac{HH'''}{1} \Rightarrow HH''' = \frac{AMr}{q}$$

El segment CH''' és la normal perquè $\quad MH''' = \frac{r}{2} - \frac{AMr}{q} \quad$ és la subnormal

4.4.2 La regla de Hudde per trobar subtangents

El mètode de Descartes és aplicable a qualsevol corba algèbrica, però, si l'equació de la corba no és senzilla, el mètode es complica molt a causa dels càlculs que s'han de fer per determinar v i s.

El matemàtic holandès Johann Hudde va trobar un mètode per calcular arrels dobles, que va comunicar a Frans Van Schooten, en una carta que aquest publicà en la seva edició llatina de 1659 de "La Géométrie" de Descartes: *"Si una ecuación tiene dos raices iguales y multiplicamos la ecuación por una progresión aritmética arbitraria de manera que el primer término de la ecuación queda multiplicado por el primer término de la progresión y así sucesivamente, entonces digo que el producto obtenido será una ecuación que tiene de nuevo la raíz dada"* (Andersen 1984, pàg. 32). Hudde va donar una demostració d'aquesta regla que en notació moderna seria:

Sigui $x = x_0$ una arrel doble del polinomi $p(x)$, és a dir:

$$p(x) = (x - x_0)^2 \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x^i = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i (x^{i+2} - 2x_0 x^{i+1} + x_0^2 x^i)$$

i sigui $a, a+d, \ldots\ldots, a+(n+2)d$ una progressió aritmètica arbitrària. Multiplicant el terme constant $\alpha_0 x_0^2$ de $p(x)$ per a, el terme de primer grau per $a+d$, i així successivament, i representant el resultat d'aquesta operació per $(p(x), a, d)$ tenim:

$$(*) \qquad (p(x),a,d) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \{(a+(i+2)d)x^{i+2} - 2(a+(i+1)d)x_0 x^{i+1} + (a+id)x_0^2 x^i\}$$

Si representem per $p'(x)$ la derivada de $p(x)$ tenim: $(p(x), a, d) = a\,p(x) + xd\,p'(x)$

per tant, si substituïm x per x_0 en (*) es compleix que $(p(x), a, d) = 0$.

Aquesta condició necessària perquè un polinomi tingui una arrel doble feia més fàcil aplicar el mètode de Descartes, perquè es podia agafar una progressió aritmètica preparada perquè un possible terme complicat quedés multiplicat per zero. De fet, en els treballs de Newton de la tardor de 1664 es pot observar com aquest troba la subnormal d'una corba aplicant una combinació del mètode de Descartes i de la regla de Hudde[18].

L'exemple següent permet il·lustrar la regla de Hudde amb la notació actual:

Sigui $y = x^2$, el sistema format per $(v - f(x))^2 + x^2 = s^2$ i $f(x) = x^2$ ens porta a l'equació:

$$(v - y)^2 + y = s^2$$
$$v^2 - 2vy + y^2 + y - s^2 = 0$$

considerem la progressió aritmètica de terme inicial $a = 0$ i raó $d = 1$

$$(p(y), a, d) = 2y^2 + (1 - 2v)y + 0(v^2 - s^2)$$
$$2y^2 + (1 - 2v)y = 0$$
$$2y + (1 - 2v) = 0$$

$$\text{Subnormal} = v - y = 1/2$$

D'aquesta manera obtenim el mateix valor per a la subnormal que hem obtingut abans aplicant directament el mètode de Descartes.

Hudde va aplicar el seu mètode al càlcul de màxims i mínims, utilitzant la hipòtesi que si en $x = a$ el polinomi $p(x)$ presenta un màxim o un mínim, llavors el polinomi $p(x) - p(a) = 0$ té una arrel doble. Aquest resultat és equivalent a la condició necessària d'extrem relatiu: $p'(a) = 0$. Hudde també va utilitzar la seva regla per formular un mètode general per trobar subtangents en una carta del 21 de novembre de 1659, publicada en 1713, arran de la polèmica entre Newton i Leibniz. Aquest mètode diu que, si tenim una corba d'equació $p(x, y) = 0$, amb p un polinomi en x i y; llavors la subtangent t corresponent a un punt (x, y) ve donada per:

$$t = \frac{-x(p(x,y),a,d)_y}{(p(x,y),a,d)_x}$$

on els subíndexs signifiquen que el numerador s'ha de considerar com un polinomi en y mentre que el denominador com un polinomi en x.

Tenint en compte que $(p(x), a, d) = a\,p(x) + xd\,p'(x)$, l'expressió anterior es converteix en:

$$t = \frac{-x(ap(x,y)+dyp'_y(x,y))}{ap(x,y)+dxp'_x(x,y)}$$

(El símbol de derivació indica la derivació respecte de la variable del subíndex)
Com que $p(x, y) = 0$, l'expressió anterior queda de la manera següent:

$$t = \frac{-yp'_y(x,y))}{p'_x(x,y)}$$

Aquesta expressió efectivament correspon a la de la subtangent perquè si l'expressió $y = f(x)$ la transformem en $y - f(x) = 0$ i apliquem el resultat anterior tenim:

$$t = \frac{-yf'_y(x,y))}{f'_x(x,y)} = \frac{-y\cdot 1}{-f'(x)} = \frac{f(x)}{f'(x)}$$

que és l'expressió de la subtangent. Per exemple, donada $y = x^2$ la transformem en $y - x^2 = 0$

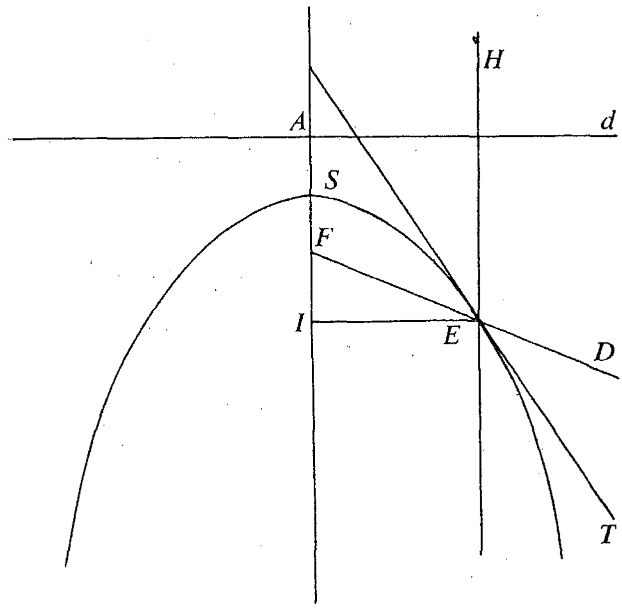
$$t = \frac{-yf'_y(x,y))}{f'_x(x,y)} = \frac{-y\cdot 1}{-2x} = \frac{-x^2}{-2x} = \frac{x}{2}$$

Aquesta regla també fou utilitzada per R. de Sluse. La regla de Hudde-de Sluse té una gran importància històrica perquè dóna un procediment de tipus algorítmic general per al càlcul de tangents de corbes algèbriques que connecta amb l'enfocament algorítmic desenvolupat per Newton i Leibniz.

4.4.3 Roverbal i Torricelli

Roverbal va estendre la metàfora cinètica a una corba en què considera un punt que es mou i la recta tangent a la corba en aquest punt: " *la dirección del movimiento de un punto que describe una línea curva és la tocante de la línea curva en cada posición de ese punto*"(Collette 1985, vol II, pàg. 40). La regla següent permet, segons Roverbal, traçar aquesta tangent a una corba donada: "*Por las propiedades específicas de la línia dada (que os serán dadas) examinad los distintos movimientos que tiene el punto que la describe en el lugar en el que queráis trazar la tocante: de todos estos movimientos compuestos en uno solo, trazad la línea de dirección del movimiento compuesto; tendréis la tocante de la línea curva*"(Collette 1985, vol II, pàg. 40).

El mètode de Roverbal estava basat en el mètode que va utilitzar Arquimedes per trobar la tangent a l'espiral. A continuació il·lustrarem el mètode de Roverbal per a la determinació de la tangent a la paràbola. Sigui la paràbola de la figura, en què F és el focus, d la directriu i S el vèrtex; unim F amb S i perllonguem FS cap a A; fem $SA = SF$. Considerem el punt E de la paràbola pel qual volem traçar la tangent a la corba. Perllonguem FE cap a D, i EI perpendicular a AF, i després tracem HE paral·lela a l'eix ASI. El moviment del punt E que descriu la corba es compon de dos moviments rectes i iguals, un sobre la recta FE i l'altre sobre la recta HE, amb una velocitat igual perquè $FE = AI$. La bisectriu de FEH és la diagonal d'un rombe (direcció del moviment compost de HE i FE) i la tangent que busquem.



Amb aquest mètode, Roverbal va aconseguir traçar les tangents a les còniques i a les concoides, i a diferents corbes com la quadratriu, la cissoide, l'espiral i la cicloide.

Torricelli també va utilitzar un mètode per trobar tangents, que es basa essencialment en un concepció dinàmica de la tangent, la qual resulta de la composició de dos moviments d'un punt mòbil que traça la corba. Traçar la tangent a una corba descrita pel moviment d'un punt que resulta de la composició de dos moviments consisteix a determinar la resultant de les velocitats dels dos moviments.

La construcció de les tangents pel mètode de Roverbal és molt simple, però no és un mètode general, ja que només és vàlid quan el paral·lelogram de velocitats és un quadrat o un rombe. L'any 1831 Duhamel va posar de manifest el defecte d'aquest mètode en alguns casos. Aquest defecte es produeix en la mesura errònia de les velocitats components; ja que aquestes no són proporcionals, en general, als increments infinitament petits dels radis vectors. Les variacions de longitud instantània són determinades per les projeccions ortogonals de la diagonal del paral·lelogram. No hi ha proporcionalitat entre aquestes variacions i les velocitats, excepte quan el paral·lelogram de velocitats és un rectangle o un rombe, tal com eren en els exemples de Roverbal[19].

En el marc de la nostra investigació vam trobar molt interessant la metàfora de Roverball de considerar la corba com la traça que deixa un punt que es mou, i la tangent en aquest punt com la direcció del moviment d'aquest punt. Aquest interès ens va portar a fer una petita investigació sobre la possibilitat que els alumnes amb dificultats utilitzessin la idea que la tangent donava la direcció del moviment del punt, encara que en l'expirimentació final la vam descartar i vam considerar suficient treballar amb programes d'informàtica que permetessin manipular punts que es movien sobre la gràfica i que dibuixaven la tangent en cada punt, sense necessitat d'introduir que la tangent era la direcció del moviment del punt. Creiem que una de les línies que deixem obertes és la possibilitat d'investigar seqüències d'activitats que desenvolupin aquesta idea.

4.4.4 Fermat

Fermat va aplicar els mètodes de Vieta als problemes de llocs geomètrics i, en el seu assaig "Ad locos planos et solidos isagoge", presenta, amb un estil modern i amb les notacions de Vieta, els principis fonamentals de la geometria analítica. En aquesta obra n'enuncia el principi fonamental: *"Cuando una ecuación contiene dos cantidades desconocidas, hay un lugar correspondiente, y el punto extremo de una de estas cantidades describe una línea recta o una línea curva"* (Collette 1985, vol II, pàg. 23). Aquesta proposició a més de ser la base de la geometria analítica introdueix la idea de variable algèbrica.

No exposarem en detall les idees de Fermat sobre les corbes perquè Fermat es preocupa de la traducció de l'expressió simbòlica a la gràfica més que del pas de la gràfica a l'expressió simbòlica. Fermat exposa molt clarament la idea que una equació amb dues incògnites és una expressió algèbrica de les propietats de la corba. Mentre que Descartes considera corbes generades per moviments, l'equació de les quals busca, Fermat introdueix corbes donades per equacions algèbriques. En general, es pot dir que Descartes es preocupa més de la traducció de la gràfica a l'expressió simbòlica, mentre que Fermat es preocupa més de la traducció de l'expressió simbòlica a la gràfica.

L'any 1637 Fermat publica un mètode per determinar màxims i mínims. Aquest mètode es basa en la regla següent:

"I *Sea A un término relacionado con el problema.*
II *La cantidad máxima o mínima está expresada en términos que contienen sólo potencias de A;*
III *Se sustituye A por A+E , y el màximo o mínimo queda entonces expressado en términos de potencias de A y E;*
IV *Las dos expresiones del máximo o mínimo se hacen <<adiguales>>, lo que significa algo así como << tan aproximadamente iguales como sea possible>>;*

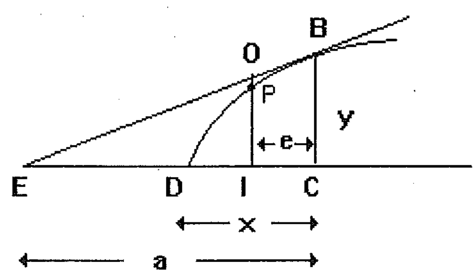
V *Los términos comunes se eliminan;*
VI *Se dividen todos los términos por una misma potencia de E de manera que al menos uno de los términos resultantes no contenga a E;*
VII *Se ignoran los términos que aún contienen E;*
VIII *Los restos se hacen iguales."*
(Andersen 1984, pàg. 38).

Fermat il·lustra el seu mètode trobant el punt E d'un segment CD que fa màxima l'àrea del rectangle $DE\cdot EC$. Si $CD = b$ i anomenem x a l'A de Fermat i e al E de la regla, llavors hem de fer màxima l'expressió $x(b\text{-}x)$. Aplicant el mètode tenim:

$$(x+e)(b-(x+e)) \sim x(b-x)$$

Eliminem termes comuns: $be \sim 2xe + e^2$
Dividim per e: $b \sim 2x + e$
Ignorem el terme e: $b = 2x$

En el mateix assaig fa una determinació de la subtangent a la paràbola i la presenta com una aplicació del seu mètode de màxims i mínims. Per trobar la subtangent en el punt B de la paràbola DB, Fermat considera un punt arbitrari O sobre BE i dibuixa IO paral·lel a BC, sent P el punt d'intersecció del segment IO amb la paràbola.



De la desigualtat $IO > IP$ i de la propietat de la paràbola que diu que l'ordenada al quadrat dividit per l'abscissa és constant: $\frac{BC^2}{DC}=\frac{IP^2}{DI}$ es dedueix que

$$\frac{DI}{DC}<\frac{IO^2}{BC^2}$$

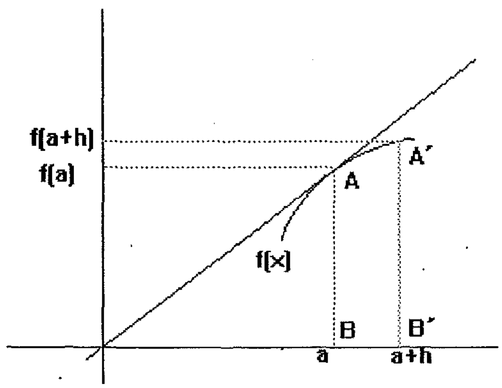
i com que els triangles EIO i ECB són semblants es compleix $\frac{EI^2}{EC^2}=\frac{IO^2}{BC^2}$

i $\frac{DI}{DC} < \frac{EI^2}{EC^2}$. Si $DC = x$, $EC = a$ i $IC = e$ tenim: $\frac{(x-e)}{x} < \frac{(a-e)^2}{a^2}$

o bé: $a^2x - ea^2 < a^2x - 2aex + xe^2$

Fermat substitueix aquesta desigualtat per l'adigualtat: $a^2x - ea^2 \sim a^2x - 2aex + xe^2$ a la qual aplica el seu mètode per calcular màxims i mínims, obtenint $a = 2x$.

Si reproduïm el mètode de Fermat amb la notació actual, tenim:



$$\frac{f(a)}{a} \approx \frac{f(a+h)}{a+h}$$

I, operant:

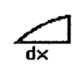
$$(a+h).f(a) = a{\cdot}f(a+h) \Rightarrow a.f(a) + h \cdot f(a) = a{\cdot}f(a+h) \Rightarrow h \cdot f(a) = a{\cdot}f(a+h) - a.f(a)$$

$$\Rightarrow h \cdot f(a) = a{\cdot}\,(f(a+h) - f(a)) \Rightarrow \frac{f(a)}{a} \approx \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

És temptador suposar que Fermat va intuir que aquesta igualtat aproximada seria més certa a mesura que el punt A' s'aproximés cap al punt A, és a dir, a mesura que h fos cada vegada més petit. També podem considerar que en el mètode de Fermat hi ha l'essència de la definició actual de la derivada i donar la raó a Laplace quan reivindica Fermat com el veritable descobridor del càlcul diferencial. És evident, tal com afirma Boyer (1986), que la idea de Fermat de substituir el valor d'una variable per considerar valors pròxims és essencial en el càlcul diferencial; i que si es vol, en el seu mètode de les tangents, hi podem trobar l'actual definició de derivada, però també es pot considerar que aquesta suposició és extrapolar en excés el seu mètode. Aquesta és l'opinió d'Andersen (1984) quan analitza el mètode de màxims i mínims de Fermat "... *En primer lugar, Fermat no pensaba en una cantidad como una función, y en segundo lugar él no decía nada acerca de que E fuese un infinitesimal, ni siquiera una magnitud muy pequeña, y el método no implica ningún concepto de límite, sino que es puramente algebraico...*" (Andersen 1984, pàg. 39).

4.4.5 Semblances i diferències entre els mètodes comentats per resoldre el problema de la tangent

Els mètodes per resoldre el problema de la tangent del període 1630-1660 que hem comentat eren procediments generals a seguir més que procediments algorítmics, exceptuant la regla de Hudde que sí la donava per calcular subtangents. A més, les idees que fonamentaven els diversos procediments eren força diferents: Descartes utilitzava el nombre de punts d'intersecció entre una circumferència i una corba i el triangle format per l'ordenada, la normal i la subnormal o el triangle format per l'ordenada, la tangent i la subtangent; Fermat utilitzava el triangle format per l'ordenada, la tangent i la subtangent, els triangles semblants i el concepte d'adigualtat; mentre que Roverbal es basava en una idea intuïtiva de la velocitat instantània i la llei del paral·lelogram per a compondre velocitats.

Malgrat les seves diferències, hi ha alguns elements en comú: 1) una idea dinàmica de les corbes, en què aquestes es consideren, d'una banda, com la traça que deixa un punt que es mou sobre la corba, i, d'altra banda, com una relació entre dues quantitats geomètriques variables, 2) un interès en la construcció geomètrica de la tangent i la normal en cada punt, 3) la no utilització explícita del triangle diferencial 

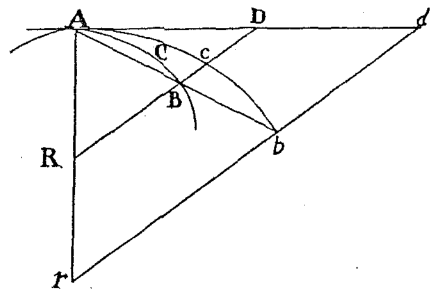
, 4) La no utilització del concepte de límit (encara que una explicació completa dels mètodes proposats implica consideracions de límits) i 5) una concepció de la recta tangent no suficientment explicitada.

En relació al segon punt, cal dir que el procediment constructiu es fa a partir de la solució del problema. És a dir, es considera d'entrada un punt particular amb la tangent o normal dibuixada i, per tant, la seva abscissa i la seva ordenada d'entrada no es consideren variables. A continuació l'aplicació del mètode permet trobar una condició (per exemple que la subtangent és la meitat de l'abscissa) que permet fer la construcció geomètrica de la tangent o de la normal. Per últim, l'aplicació del mètode es fa de manera que és vàlid per a qualsevol punt, amb la qual cosa el punt que d'entrada era concret passa a ser considerat després un punt qualsevol. En la notació actual el que fan és calcular directament $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ considerant primer que x és constant i després variable.

En relació al quart punt, la no utilització del concepte de límit o de mètodes infinitesimals, cal dir que una explicació completa dels seus mètodes implica consideracions de tipus infinitesimals: en el cas de Roverbal perquè utilitza el concepte de velocitat instantània; en el de Fermat el que és difícil és no caure en la temptació de considerar que efectivament els utilitzava; i en el cas de Descartes perquè si considerem que les coordenades dels dos punts de contacte són $C(y\,,f(y))$ i $E\,(y+\Delta y\,,f(y+\Delta y))$, llavors la condició perquè C i E coincideixin és que $v-y=\lim_{\Delta y\to 0}(v-(y+\Delta y))$

En relació al cinquè punt, cal dir que el significat de "tangent" estava obert. Per a determinades corbes, com per exemple les còniques, la definició dels grecs de recta tangent com la recta que toca a la corba només en el punt era suficient mentre que per d'altres no ho era. Roverbal considerava que la tangent era la recta determinada per la velocitat resultant. Descartes, segons Collette (1985), va elaborar tres mètodes per resoldre el problema de les tangents i de les normals: el primer l'exposa en el llibre segon de "La Géométrie"; els altres dos, en la polèmica que va mantenir amb Fermat sobre el seu mètode per calcular tangents. El darrer, expressa el punt de vista actual: la tangent està determinada per una recta que gira al voltant del punt de contacte donat, fins que l'altre punt de tall amb la corba coincideixi amb el primer.

El desenvolupament històric del càlcul diferencial posa de manifest que el procés que té com a punt de partida la noció de recta tangent dels grecs: la recta tangent és la que toca a la corba només en el punt, i com a punt d'arribada la noció de recta tangent actual: la tangent és el límit de les secants, que podem trobar, per exemple, en el lema VI dels "Principia" de Newton: *"Si cualquier arco ACB, en una posición dada, es subtendido por su cuerda AB, y en cualquier punto A situado en medio de la curvatura continua es tocado por una recta AD prolongada en ambos sentidos, si los puntos A y B se acercan el uno al otro y se encuentran, afirmo que el ángulo BAD contenido entre la cuerda y la tangente disminuirá hasta lo infinito; desapareciendo en última instancia* (Newton 1982, pàg. 260),

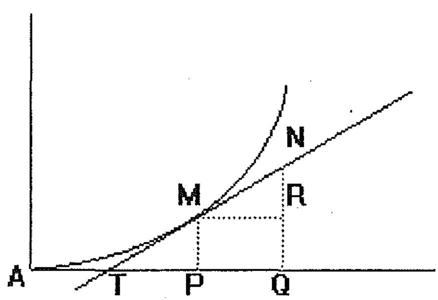


és un procés que no resulta fàcil, per la qual cosa en la unitat didàctica hem donat força importància al desenvolupament del concepte de recta tangent.

4.4.6 Barrow

El mètode que utilitzava Barrow per trobar la recta tangent és molt semblant al de Fermat. Presenta, però, una característica molt important en el desenvolupament del càlcul diferencial: la utilització explícita del triangle diferencial que ja havia estat utilitzat per Pascal en el càlcul d'àrees i per altres matemàtics anteriorment.

En relació a la figura següent, Barrow escriu: <<*Sean AP, PM dos líneas rectas dadas, PM cortando a la curva dada en M, y suponemos que MT toca a la curva en M y corta a la línea recta en T.*
Para encontrar el segmento PT, consideremos un arco de la curva infinitamente pequeño MN. Trazams NQ y NR paralelas respectivamente a MP y AP. Sea MP = m, PT = t, MR = a, NR = e otros segmentos determinados por la curva. Comparamos MR con NR (a través de MP, PT) por medio de una ecuación obtenida por cálculo. A continuación observaremos las reglas siguientes:
Regla 1: En el cálculo omitiremos todos los terminos que contienen potencias de "a" o de "e", o productos de ambos.
Regla 2: Después de formar la ecuación, despreciaremos todos los terminos formados por letras de cantidades determinadas o conocidas, o términos que no contienen "a" o "e" (estos términos si se pasan a un lado de la ecuación seran siempre iguales a cero.
Regla 3: Se substituyen "m" (o MP) por "a", i "t" (o PT) por "e". De aquí se encontrará la cantidad de longitud PT.>>



(Boyer 1959, pàgs. 182-183)

L'exemple següent il·lustra amb la notació actual el mètode de Barrow. Sigui $y^2 = 4x$ l'equació d'una paràbola i substituïm x per $x + e$ i y per $y + a$. Llavors l'equació queda així:

$$y^2 + 2ay + a^2 = 4x + 4e$$

(Regla 1) $$y^2 + 2ay = 4x + 4e$$

(Regla 2) $$2ay = 4e$$

(Regla 3) $$\frac{PM}{PT} = \frac{a}{e} = \frac{4}{2y} = \frac{2}{y}$$

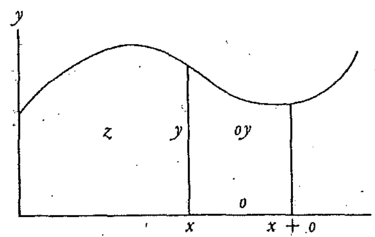
Com que $PM = y$, la subtangent és $$PT = \frac{y^2}{2}$$

En el mètode de Barrow, la semblança entre el triangle format per l'ordenada, la tangent i la subtangent i el triangle diferencial de costats e i a fa possible el càlcul de la subtangent.

El mètode de Barrow és essencialment una generalització del mètode de Fermat (que no coneixia directament, però que és probable que hagués conegut a través dels treballs de Huygens, Gregory i Wallis) amb la diferència que el primer utilitza explícitament el triangle diferencial i, per tant, augmenta en una quantitat infinitesimal tant la x com la y.

4.4.7 Newton

Newton l'any 1669 va fer circular entre els seus amics una monografia titulada "De Analysi per Aequationes Numero Terminorum Infinitas" que fou publicada l'any 1711. En aquest llibre Newton considera increments infinitesimals de x, que anomena moments i representa per o. La manera en què Newton utilitzava aquests increments infinitesimals era la següent:



Suposa que té una corba, y que l'àrea z sota aquesta corba ve donada per:

$$z = ax^m \qquad (*)$$

amb m enter o fraccionari. Considera un increment infinitesimal de x i ho representa per o, l'àrea determinada per la corba, l'eix d'abscisses i l'ordenada corresponent a $x + o$ la representa per $z + oy$, on oy és l'increment de l'àrea:

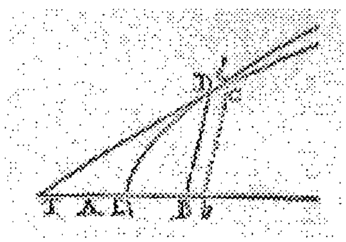
$$z + oy = a(x + o)^m \qquad (**)$$

Aplica el teorema del binomi al segon membre de la igualtat, obtenint una sèrie infinita quan m és fraccionari, resta (*) de (**), divideix per o i menysprea els termes que encara contenen o i obté $y = max^{m-1}$.

Posteriorment, l'any 1671, va escriure el seu llibre "Methodus fluxionum et Serierum Infinitarum" que fou publicat l'any 1736, en què considera els increments infinitesimals d'una manera diferent. En aquest treball diu que considera les variables generades pel moviment continu de punts, rectes i plans, més que com a agregats estàtics d'infinitesimals. A una quantitat variable l'anomena "fluent" i la representa per les lletres x, y, i al seu canvi relatiu "fluxió", que representa per $\dot{x}$ i $\dot{y}$. En aquest llibre Newton considera que el problema fonamental del càlcul és: donada una relació entre fluxions, obtenir una relació entre les seves fluents i recíprocament. També considera que les fluxions canvien amb el temps, és a dir que $x = x(t)$ i $y = y(t)$, i que $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ i

$\dot{y} = \frac{dy}{dt}$. Si dt és un petit increment del temps, els increments infinitament petits de x i de y són $dx = \dot{x}\, dt$ i $dy = \dot{y}\, dt$ i $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{dy}{dx}$

Newton (1740, pàg. 49) aplica en aquest llibre el mètode de les fluxions al càlcul de tangents de la manera següent:



Considera primer una corba qualsevol ED i augmenta Bb sobre la recta AB que fa augmentar l'ordenada en cd, Dc és igual i paral·lel a Bb, si perllonguem Dd es talla a la línia AB en T. Newton diu que els triangles Dcd i DBT són semblants. És a dir, considera el triangle diferencial de Barrow equivalent al triangle format per l'ordenada, la tangent i la subtangent:

$$BD :: Dc = Bb :: Cd$$

Després considera $AB = x$ i $BD = y$ i calcula la subtangent a la corba d'equació $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$ així:

$$3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{x}y + a\dot{y}x - 3\dot{y}y^2 = 0$$

$$\dot{x} : \dot{y} :: 3xx - 2ax + ay : 3y^2 - ax :: BD\,(y) : BT$$

$$BT = \frac{3y^3 - axy}{3x^2 - 2ax + ay}$$

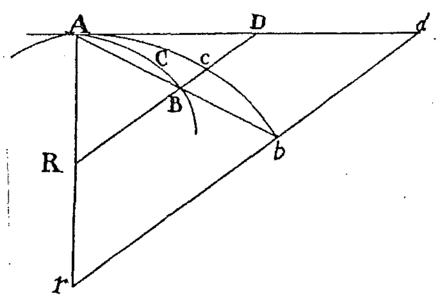
En l'obra de Newton podem observar, d'una banda, la utilització del triangle diferencial i, d'altra banda, la utilització d'un mètode algorítmic per calcular tangents.

Donada una relació entre $\dot{x}$ i $\dot{y}$, obtenir la relació entre x i y resulta més difícil que la simple integració d'una funció respecte de x. Newton tracta diversos tipus d'equacions: 1) quan $\dot{x}$, $\dot{y}$ i x o y estan presents, 2) quan $\dot{x}$, $\dot{y}$, x i y estan presents, 3) quan $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, x, y i z estan presents. El primer tipus és el més fàcil i, en notació moderna, correspon a resoldre $\frac{dy}{dx} = f(x)$

La primera publicació de Newton que inclou el seu càlcul diferencial fou els "Principia" publicat l'any 1687 on utilitza mètodes de demostració de tipus geomètric, segurament perquè considerava que aquest tipus de demostracions eren més comprensibles per als seus contemporanis. En els "Principia" abandona els infinitesimals i les quantitats indivisibles últimes en favor de les "quantitats divisibles evanescents", quantitats que es poden disminuir tant com es vulgui.

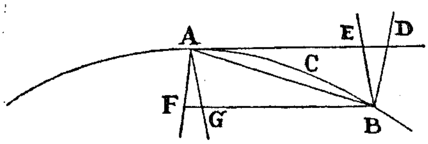
Els "Principia" estan dividits en tres llibres. El primer i el segon són fonamentalment de matemàtiques. El llibre I comença amb una secció sobre el mètode de les primeres i últimes raons de quantitats, explicat geomètricament:

"LEMA VI: Si cualquier arco ACB, en una posición dada, es subtendido por su cuerda AB, y en cualquier punto A situado en medio de la curvatura continua es tocado por una recta AD prolongada en ambos sentidos, si los puntos A y B se acercan el uno al otro y se encuentran, afirmo que el ángulo BAD contenido entre la cuerda y la tangente disminuirá hasta lo infinito; desapareciendo en última instancia



(....) LEMA VII: Suponiendo las mismas cosas, afirmo que la última razón del arco, la cuerda y la tangente entre sí és la razón de igualdad.

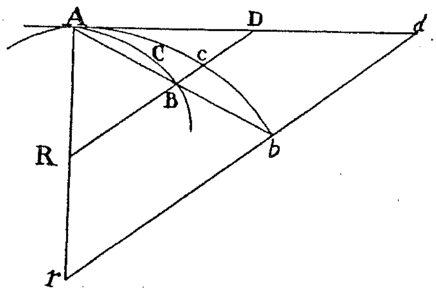
(.....) COROLARIO I. Por lo cual si trazamos por B la recta BF paralela a la tangente, que corta siempre cualquier recta AF que pase por A en F, esa línea BF estará últimamente en la razón de igualdad con el arco evanescente ACB, porque - completando el paralelogramo AFBD- està siempre en una razón de igualdad con AD.



COROLARIO II. Y si se trazan por A y B más líneas rectas, como BE, BD, AF y AG, que cortan la tangente AD y su paralela BF, la razón última de todas las abscisas AD, AE, BF, BG y de la cuerda y el arco AB, los unos respecto de los otros, será la razón de igualdad.

COROLARIO III. Y, por consiguiente, en toda nuestra argumentación sobre razones últimas podemos usar libremente cualquiera de esas líneas por cualquier otra.

LEMA VIII: Si las rectas AR, BR, junto con el arco ACB, la cuerda AB y la tangente AD constituyen tres triángulos RAB, RACB, RAD, y los puntos A y B se aproximan y se encuentran, afirmo que la forma última de esos triangulos evanescentes es la semejanza, y su última razón la igualdad.



(...) COROLARIO I. Y así en todas las argumentaciones sobre razones últimas podemos usar cualquiera de esos triángulos por cualquier otro." (Newton 1982, pàgs. 260-262)

En el "Tractatus de la Quadratura Curvarum" publicat l'any 1704 Newton utilitza el mètode de les primeres i últimes raons de la manera següent: donada la corba $y = x^n$ per calcular la raó entre $\dot{y}$ i $\dot{x}$ es deixa a x fluir fins a $x + o$. Llavors x^n es converteix en:

$$(x+o)^n = x^n + nox^{n-1} + \frac{n^2-n}{2}o^2x^{n-2} + ...$$

La raó dels increments de y i x, és a dir el quocient entre $\quad nox^{n-1} + \dfrac{n^2-n}{2}o^2x^{n-2} + \ldots\ldots \qquad$ y $\quad o$ és igual al quocient entre

$$nx^{n-1} + \frac{n^2-n}{2}ox^{n-2} + \ldots\ldots \qquad \text{i } 1.$$

Si fem que els increments s'aproximin a zero, la darrera raó serà el quocient entre nx^{n-1} i 1.

Per tant: $\quad \dfrac{\dot{y}}{\dot{x}} = \dfrac{nx^{n-1}}{1}$

4.4.8 Leibniz

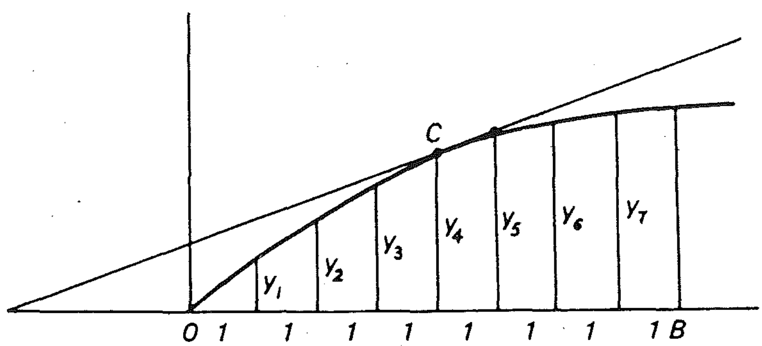
Bos (1984) considera que les tres idees principals que permeteren a Leibniz la invenció del càlcul foren les següents:

1) La primera era una idea filosòfica, la construcció d'una "characteristica generalis", és a dir, un llenguatge simbòlic general per escriure amb símbols i fórmules tots els processos d'argumentació i de raonament; aquests símbols haurien d'obeir certes regles de combinació que garantirien la correcció dels arguments formulats en aquest llenguatge.

2) La segona es referia a les successions de diferències; en els seus estudis sobre successions numèriques a_1, a_2, a_3, ... i les seves successions de diferències primeres associades $b_1 = a_1 - a_2$, $b_2 = a_2 - a_3$, $b_3 = a_3 - a_4$, ... Leibniz habia observat la relació

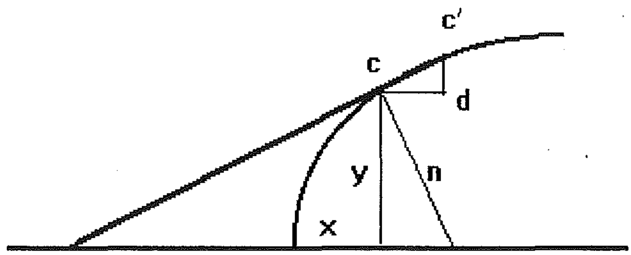
$$b_1 + b_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + b_n = a_1 - a_{n+1}$$

que permetia sumar fàcilment les successions de diferències. Aquests resultats li permeteren adonar-se que formar les successions de diferències i les successions de sumes eren operacions inverses l'una de l'altra. La corba de la figura següent defineix una successió d'ordenades equidistants y. Si la seva distància és 1, la suma d'aquestes ordenades dóna una aproximació de la quadratura de la corba, i la diferència, una aproximació del pendent de la recta tangent.

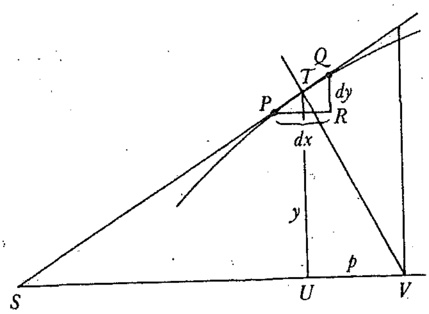


Com més petita sigui la unitat 1, millor és l'aproximació. Leibniz va deduir que si la unitat podia agafar-se infinitament petita, aquestes aproximacions serien exactes; en aquest cas la quadratura seria igual a la suma de les ordenades, i el pendent de la tangent seria igual a la diferencia de dues ordenades successives. De la relació inversa entre sumes i diferències de successions, va obtenir que la determinació de quadratures i tangents eren operacions inverses l'una de l'altra.

3) la tercera fou l'ús del triangle diferencial en les transformacions de quadratures. Estudiant l'obra de Pascal, Leibniz va observar la importància del petit triangle *cc'd* de la figura perquè es podia considerar semblant al triangle format per l'ordenada, la tangent i la subtangent, i al triangle format per l'ordenada, la normal i la subnormal.



A continuació segueix un exemple, que es troba en un manuscrit de l'11 de novembre de 1675 (Kline1992, vol I, pàg. 496), de la utilització del triangle diferencial en un problema invers de tangents. En aquest problema s'ha de trobar una corba tal que la seva subnormal sigui inversament proporcional a l'ordenada .



TV és la normal i la subnormal *p* és *UV*. De la semblança dels triangles *PRQ* i *TUV* s'obté

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{y}$$

o bé: $$pdx = ydy$$

La simbolització de la condició que la corba ha de ser tal que la seva subnormal sigui inversament proporcional a l'ordenada és:

$$p = \frac{b}{y}$$

on b és la constant de proporcionalitat. Per tant, $$dx = \frac{y^2}{b}dy$$

Integrant, $$\int dx = \int \frac{y^2}{b}dy$$

La corba és $$x = \frac{y^3}{3b}dy$$

Per trobar tangents, Leibniz utilitza $\frac{dy}{dx} = \frac{TU}{SU}$ .Per exemple, per calcular la subtangent *SU* en la corba anterior hauríem de fer:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{TU}{SU} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{SU} \Rightarrow SU = \frac{ydx}{dy}$$

A partir de l'equació de la corba, s'ha de trobar una expressió de dx en termes de y i dy

$$x = \frac{y^3}{3b}dy \Rightarrow dx = \frac{y^2}{b}dy$$

Por últim s'ha de substituir el resultat anterior en l'expressió de la subtangent.

$$SU = \frac{ydx}{dy} \Rightarrow SU = \frac{y}{dy} \cdot \frac{y^2}{b}dy \Rightarrow SU = \frac{y^3}{b}$$

Per trobar la subnormal s'ha d'utilitzar $\frac{dy}{dx} = \frac{UV}{TU}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{UV}{TU} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{UV}{y} \Rightarrow UV = \frac{ydy}{dx}$$

A partir de l'equació de la corba s'ha de trobar una expressió de dx en termes de y i dy

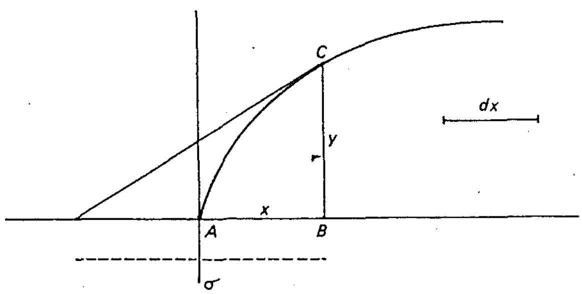
$$x = \frac{y^3}{3b} dy \qquad \Rightarrow \qquad dx = \frac{y^2}{b} dy$$

Por últim s'ha de substituir el resultat anterior en l'expressió de la subnormal

$$UV = \frac{ydy}{dx} = \frac{ydy}{\frac{y^2}{b}dy} = \frac{b}{y}$$

Aquesta última expressió ens dóna la condició que la subnormal a la corba és inversament proporcional a l'ordenada.

Segons Bos (1984), per a Leibniz, el diferencial d'una variable y és la diferència infinitament petita entre dos valors successius de y. És a dir: Leibniz considera successions corresponents de valors de les variables x i y en una figura com la següent, i considera que els termes d'aquestes successions estan infinitament pròxims i que dy és la diferència infinitament petita entre dues ordenades successives, mentre que dx és la diferència infinitament petita entre dos valors consecutius de l'abscissa x. Aquest historiador considera que Leibniz era bastant reticent a presentar el seu nou càlcul al públic matemàtic perquè utilitzava quantitats infinitament petites que no estaven definides rigorosament i que, per tant, no eren del tot acceptables en matemàtiques. Per aquest motiu va prendre la decisió de presentar al públic un concepte de diferencial completament diferent, que ja no era infinitament petit, però que complia les mateixes regles. En la seva primera publicació sobre el càlcul diferencial "Un nou mètode per trobar màxims i mínims, així com tangents" de l'any 1684 introdueix un segment finit anomenat dx, i defineix a partir d'ell dy en el punt C com el segment que satisfà la igualtat següent: $\frac{y}{\sigma} = \frac{dy}{dx}$ on σ és la longitud de la subtangent. Definida d'aquesta manera dy també és un segment finit



Aquesta manera de presentar el càlcul diferencial, per a alguns historiadors com Bos (1984) és un clar retrocés solament explicable por la por que tenia Leibniz de les reaccions al seu mètode. Sense entrar en la discussió de si aquest enfocament és un retrocés o no, nosaltres considerem que la manera d'entendre dx i dy en la primera publicació del càlcul diferencial de Leibniz és utilitzable didàcticament tal com ja ho hem exposat en la introducció d'aquest capítol.

4.4.9 La difusió del càlcul diferencial

El mètode de les fluxions no va ser gaire conegut fora d'Anglaterra, mentre que l'obra de Leibniz fou àmpliament difosa. Entre els difusors del càlcul diferencial de Leibniz, destaquen els germans Bernoulli. L'any 1696 es va publicar el llibre "Analyse des infiniment petits" de L'Hopital. Aquest es considera el primer llibre de text sobre el càlcul diferencial. Posteriorment Euler va ordenar i unificar aquesta nova branca de les matemàtiques en tres grans obres: "Introductio an analysin infinitorum", "Institutiones calculi differentialis" i "Institutiones calculi integralis" publicats respectivament els anys 1748, 1755 i 1768-1770. Al començament, el nou càlcul era inseparable de la geometria ja que consistia en una col·lecció de mètodes analítics per a resoldre problemes sobre corbes i els objectes que es manipulaven eren "quantitats geomètriques variables". Però, a mesura que els problemes que permetia resoldre i les fórmules a manipular es complicaven, l'origen geomètric de les variables es va anar fent cada cop més llunyà i el nou mètode es va anar convertint en una manipulació d'expressions analítiques. L'obra d'Euler va jugar un paper fonamental en la transició del càlcul de "quantitats geomètriques variables" al càlcul que s'ocupa de funcions. En la "Introductio", es defineix per primer cop en una obra, el concepte de funció. Per a Euler aquest concepte és l'organitzador de tots els altres conceptes del càlcul.

4.4.10 El problema dels fonaments

La majoria dels matemàtics que utilitzaven el càlcul diferencial i integral no es qüestionaven els seus fonaments. La principal crítica fou de Berkeley, que va qüestionar les quantitats infinitament petites, afirmant que se sostenen amb idees vagues i contradictòries *"Y qué son estas fluxiones? ¿Las velocidades de incrementos evanescentes? ¿Y qué son estos mismos incrementos evanescentes? No son ni Cantidades finitas, ni Cantidades infinitamente pequeñas sin ser tampoco una simple nada. ¿No podríamos llamarlos los Fantasmas de las Cantidades desaparecidas?"* (Berkeley, The Analyst, citat en Bos 1984, pàg.119).

Berkeley va criticar la inconsistència lògica que suposava treballar amb increments petits que primer se suposaven diferents de zero per poder-los dividir i que després es consideraven iguals a zero. Berkeley, conscient de l'èxit que s'obtenia amb l'aplicació d'aquest instrument teòric, afirmà que això era possible per mitjà d'una doble compensació d'errors, la qual estava implícita en l'aplicació de les regles del càlcul: Per exemple, si un determina una tangent, llavors suposa en primer lloc que el triangle característic és semblant al triangle format per l'ordenada, la subtangent i la tangent, la qual cosa implica un error perquè aquests dos triangles són només aproximadament semblants. A continuació apliquem les regles del càlcul per trobar la raó *dy/dx*, la qual cosa introdueix un nou error, ja que aquestes regles han estat deduïdes menyspreant diferencials d'ordre superior. Segons Berkeley aquests errors es compensen l'un amb l'altre, i així el matemàtic arriba *"bien que no a la Ciencia, sí a la Verdad, porque no puede llamarse Ciencia cuando se procede a ciegas y se llega a la verdad no sabiendo cómo ni por qué medios"* (Bos 1984, pàg. 120).

El reconeixement de la necessitat de justificar matemàticament els mètodes infinitesimals generada per les crítiques de Berkeley, va impulsar el treball de fonamentació que va culminar amb la solució del problema dels fonaments en el càlcul diferencial modern. La forma moderna del càlcul s'ocupa de funcions, i associa a la funció la seva derivada, que al seu torn és una altra funció definida pel concepte de límit

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Segons Bos (1984), les bases sobre les quals es basa aquest enfocament es desenvoluparen al llarg dels segles XVIII i XIX, i , en resum, són les següents:

1) La idea que el càlcul té a veure amb funcions (més que amb variables).
2) L'elecció de la derivada com a concepte fonamental del càlcul diferencial (en lloc de la diferencial).
3) La consideració de la derivada com a funció.
4) El concepte de límit i, en particular, el límit d'una funció quan la variable independent es comporta d'una determinada manera senyalada explícitament (o sigui, en comptes de parlar simplement del límit de la variable dependent p, es fa una indicació explícita tal com

$$\lim_{h \to 0} (p(h))$$

4.4.11 Semblances i diferències entre els mètodes de Newton i Leibniz entre si i en relació al càlcul diferencial modern

Newton i Leibniz van descobrir el càlcul diferencial de manera independent. Cap dels dos va inventar el càlcul diferencial en la seva forma moderna i fins i tot es pot dir que no va inventar el mateix càlcul diferencial. Ambdós càlculs, tant el de Newton com el de Leibniz, tractaven de quantitats variables. Ara bé, Newton considerava que aquestes quantitats variaven amb el temps, mentre que Leibniz les considerava més aviat com recorrent una successió de valors infinitament pròxims. Això dóna lloc a una diferència en els conceptes fonamentals dels dos càlculs: el concepte fonamental per a Newton era el de fluxió (rapidesa de canvi de la variable amb respecte al temps), mentre que el concepte fonamental de Leibniz era el de diferencial, és a dir, la diferència infinitament petita entre dos valors successius en la successió.

Tant Newton com Leibniz treballaven amb quantitats infinitament petites i ambdós eren conscients de les dificultats lògiques inherents al seu ús. Newton, per la seva part, afirmava que al seu càlcul se li podia donar una fonamentació rigorosa per mitjà del concepte de raó primera i última, concepte que recorda (però no és el mateix) al concepte de límit. Leibniz atribuïa una gran importància a la notació, i la seva elecció de símbols per formular el càlcul va resultar ser més afortunada que la de Newton. En línies generals, el càlcul de Leibniz era més analític que el de Newton, el qual estava més pròxim a les figures geomètriques i als raonaments en llenguatge usual.

Aquestes són les diferències principals entre els dos sistemes. Si els comparem amb la forma moderna del càlcul, en primer lloc observem que aquest últim té a veure amb funcions més que amb variables. En segon lloc, el concepte de diferencial ha estat desplaçat pel de derivada com a concepte fonamental del càlcul diferencial. En tercer lloc, i contràriament al que va passar al segle XVII, l'anàlisi moderna ha aconseguit un tractament del problema de la fonamentació del càlcul, que ha estat acceptada en general, i que passa per una definició rigorosa dels nombres reals, en lloc del concepte vague de "quantitat", que va servir com a base de l'anàlisi fins a 1870, per acabar finalment amb l'ús del concepte de límit ben definit.

5 Conclusions i proposta didàctica

1) Cada una de les quatre formes de representar una funció (enunciat, taula, fórmula i gràfica) té una gènesi històrica diferent i, per tant, un estudi històric dels mètodes i procediments que s'han utilitzat per calcular l'expressió simbòlica a partir de gràfiques pot donar idees utilitzables a les aules. Si bé les corbes són presents en tota la història de les matemàtiques, un dels moments en què es planteja clarament el pas del gràfic a l'expressió simbòlica és en el moment del naixement de la geometria analítica. Els treballs de Descartes parteixen de les dues metàfores clàssiques sobre les corbes:

- Les corbes són seccions.
- Les corbes són la traça que deixa un punt que es mou subjecte a determinades condicions.

per afegir-ne una tercera:

- Les corbes són la traça que deixa un punt que es mou subjecte a determinades condicions. L'anàlisi d'aquestes condicions permet trobar una equació que compleixen els punts de la corba.

Una variació d'aquesta última metàfora és la que es pot trobar en els llibres d'anàlisi infinitesimal fins a principis del segle XIX, quan Cauchy en va començar la reorganització. És a dir, fins a l'aritmetització de l'anàlisi, les gràfiques de funcions eren considerades com la trajectòria descrita per un punt en moviment que es movia sobre la gràfica, la qual es podia expressar mitjançant una fórmula. Aquesta manera d'entendre les gràfiques de funcions queda molt clara en l'obra de Newton. Per exemple, en els Principia (Newton 1982) podem trobar constants referències a un punt que es mou sobre una paràbola, una hipèrbola, etc. A partir dels treballs de Fourier, Cauchy i Dirichlet, entre d'altres, es varen acceptar com a funcions corbes que no podien ser trajectòries. Amb la posterior aplicació de la teoria de conjunts a les funcions va acabar d'agafar cos la metàfora conjuntista:

- La gràfica d'una funció $f(x)$ és el conjunt format pels punts de coordenades $(x, f(x))$.

Les reflexions sobre la història de les matemàtiques ens van portar a considerar que, en el disseny de les activitats pensades per fer el pas de la gràfica d'una funció a la seva expressió simbòlica, havia de considerar les diferents metàfores que històricament han estructurat el concepte de gràfica d'una funció. Si considerem que una corba és el resultat d'una secció (per exemple una el·lipse) aquesta manera d'entendre la corba és global. És a dir, la corba és un tot que després es pot considerar formada per parts (punts). En canvi, entendre la corba com la traça que deixa un punt que es mou subjecte a determinades condicions és considerar primerament un punt que genera la corba en moure's. En el primer cas anem de la corba al punt, mentre que en el segon, anem del punt a la corba. Una manera de sintetitzar aquests dos punts de vista és considerar que una corba és la traça que deixa un punt que es mou sobre la gràfica. Aquesta última manera d'entendre la gràfica està implícita en moltes de les activitats que hem proposat als alumnes. Per exemple, quan treballem amb el Cabri que la tangent en un punt A és el límit de les rectes secants, estem utilitzant aquesta manera d'entendre la gràfica d'una funció, ja que es considera que l'altre punt que determina la secant, B, es mou sobre la gràfica.

L'aplicació de la teoria de conjunts a les funcions va permetre entendre que la gràfica d'una funció $f(x)$ és el conjunt format pels punts de coordenades $(x, f(x))$. Aquest punt de vista ens dóna a la vegada el tot i les parts perquè considera el conjunt (tot) format pels punts (part), però és una visió estàtica de la corba. En les activitats que hem proposat als alumnes en aquesta investigació, cal que puguin entendre la gràfica d'una funció com la traça que deixa un punt subjecte a determinades condicions, com la traça que deixa un punt que es mou sobre la gràfica o bé com el conjunt format pels punts de coordenades $(x, f(x))$. En canvi, no hem utilitzat el punt de vista que considera les gràfiques com a seccions. Entendre la gràfica com a trajectòries implica estructurar el concepte de gràfica en termes cinètics, la qual cosa es reflecteix en el llenguatge utilitzat (punt que es mou). Com totes les metàfores, aquesta té els seus avantatges i les seves dificultats. Un dels fenòmens que hem observat en aquesta investigació són algunes dificultats inherents a aquesta metàfora.

2) L'anàlisi infinitesimal moderna nasqué a principis del segle XVII. Aquesta nova branca de les matemàtiques té el seu origen en l'interès per resoldre quatre dels grans problemes que més interessaven als matemàtics d'aquella època El primer estava relacionat amb el progrés de la cinemàtica a la qual havia contribuït Galileu. Els conceptes més característics de la cinemàtica, com els de velocitat i acceleració necessitaven ser considerats com una relació entre la variació d'una magnitud i la variació d'una altra. El segon d'aquests problemes era de natura geomètrica i consistia en la determinació de la tangent a una corba en un punt. L'interès d'aquest problema estava en la seva aplicació a l'òptica per dissenyar lents i en l'estudi del moviment, ja que la direcció del moviment d'un cos mòbil és la direcció de la tangent a la trajectòria El tercer problema estava

relacionat amb el càlcul de màxims i mínims per la seva possible aplicació a la balística (trobar l'angle que feia màxim el recorregut d'una bala) i amb l'estudi dels moviments dels planetes (determinar la distància màxima i mínima d'un planeta al sol). El quart problema estava relacionat amb el càlcul de longituds, àrees i volums. La solució dels tres primers portà al càlcul diferencial, mentre que el quart portà al càlcul integral.

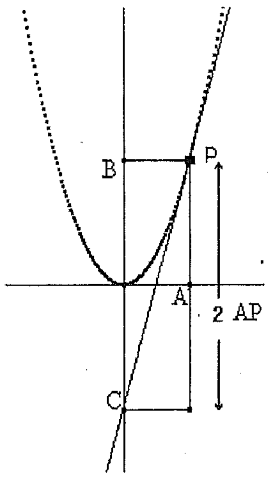
En aquesta investigació hem considerat que la introducció del concepte de derivada s'ha de fonamentar en els dos primers problemes. La introducció del concepte de derivada en un punt a partir del concepte de velocitat instantània té prou fonamentació històrica perquè en el moment de prendre decisions curriculars sobre la manera d'introduir la derivada, els conceptes de taxa mitjana de variació (velocitat mitjana) i el de taxa instantània (velocitat instantània) d'una funció tinguin un paper important. Segons Kline (1992), l'obra de Newton es diferencia de la de Leibniz en la importància que tenen les raons del canvi de dues variables entre les quals hi ha dependència funcional: <<*La distinción principal entre el trabajo de los dos es que Newton utilizó los incrementos infinitamente pequeños en "x" y en "y" como medio para determinar la fluxión o derivada. Era esencialmente el límite del cociente de los incrementos, cuando éstos se hacían cada vez más pequeños. Por otra parte, Leibniz trató directamente con los incrementos infinitamente pequeños en "x" y en "y", es decir, con diferenciales, y determinó las relaciones entre ellos. Esta diferencia refleja la orientación física de Newton, en la que un concepto como el de velocidad es central, y la preocupación filosófica de Leibniz por las partículas últimas de la materia, que llamó mónadas. Como consecuencia, Newton resolvió los problemas de áreas y volúmenes pensando enteramente en términos de cambio relativo. Para él, la diferenciación era básica; este proceso y su inverso resolvían todes los problemas del càlculo y, de hecho, el uso de la sumación para obtener una àrea, un volumen o un centro de gravedad aparece raramente en sus trabajos. Leibniz, en cambio, pensaba primero en términos de sumación aunque, por supuesto, estas sumaciones se calcularan mediante antidiferenciación.*>> (Kline 1992, vol I, pàg. 501). L'opció de construir l'objecte personal "derivada" a partir de l'objecte personal "velocitat", a més de la justificació històrica, té al seu favor que els conceptes de velocitat mitjana i velocitat instantània formen part de l'experiència dels alumnes. En la nostra proposta d'unitat, aquest punt de vista ha estat àmpliament recollit, ja que els continguts de taxa mitjana de variació (velocitat mitjana) i el de taxa instantània (velocitat instantània) d'una funció tenen un paper molt important.

3) Un dels aspectes originals d'aquesta investigació és la proposta d'activitats guiades per calcular funcions derivades a partir de l'observació d'una condició que compleixen les tangents, o bé a partir d'un procediment que permet construir-la. Per aquesta raó, hem centrat les consideracions històriques fonamentalment en l'anomenat problema de les tangents. Un dels problemes que més va interessar els matemàtics del segle XVII fou el problema de les tangents: trobar un mètode que permetés construir la normal i la tangent en un punt d'una corba donada; i el seu problema invers: determinar una corba a partir d'una propietat que compleixen totes les tangents.

En el segle XVII el problema de trobar la tangent s'entenia d'una manera força diferent de com s'explica actualment al batxillerat. En efecte, el procediment per trobar la recta tangent $y = mx + n$ a la gràfica d'una funció $f(x)$ en $x= a$ que s'ensenya actualment als alumnes consisteix en:

1) Buscar $f\,'(a)$, què és el pendent m de la recta tangent, utilitzant la tècnica de la derivació.
2) Buscar la segona coordenada del punt de tangència $(a\,, f(a))$ substituint x per a en la fórmula de la funció.
3) Trobar n sabent que la recta tangent passa pel punt de tangència.

Seguint aquest procediment, l'alumne pot trobar l'equació de la recta que, si vol, pot dibuixar donat valors a la x. En el segle XVII el que interessava no era l'equació de la recta tangent o de la normal, sinó trobar un procediment que permetés dibuixar la normal i la tangent (o més exactament la subnormal i la subtangent) en un punt d'una corba donada. El que interessava era trobar procediments del tipus següent: per dibuixar la tangent a la paràbola $f(x) = x^2$ en un punt basta unir el punt de la corba amb un punt de l'eix d'ordenades C tal que la longitud del segment CB sigui el doble de la longitud del segment AP.



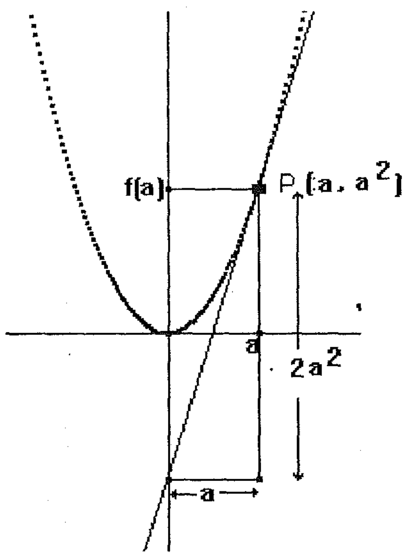
El problema invers de les tangents consistia a trobar una corba a partir d'una propietat que complien les tangents. En aquest cas s'ha d'expressar la condició en forma d'equació diferencial i després trobar la formula de la corba utilitzant mètodes d'integració. Per exemple, la condició que compleixen totes les tangents de la paràbola anterior es pot expressar mitjançant l'equació diferencial $f'(x) = \frac{2 \cdot f(x)}{x}$ que es pot resoldre utilitzant mètodes d'integració:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \int \frac{2}{x}dx \quad \Rightarrow \ \ln f(x) + C = 2\ln x + C \ \Rightarrow \ \ln f(x) - 2\ln x = C \ \Rightarrow$$

$$\ln \frac{f(x)}{x^2} = C \quad \Rightarrow \quad \frac{f(x)}{x^2} = c \quad \Rightarrow \quad f(x) = cx^2$$

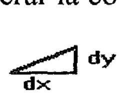
Una de les conclusions de l'estudi del càlcul infinitesimal del segle XVII és que és possible dissenyar activitats d'ensenyament-aprenentage inspirades en la manera que tenien els matemàtics del segle XVII d'entendre el problema de la tangent i del seu invers, gràcies a alguns programes informàtics actuals. Aquest convenciment ens va portar a buscar programes informàtics que permetessin dibuixar simultàniament la corba i la tangent a la corba en un punt, de manera que els alumnes poguessin fer accions sobre aquest punt i observar invariants de les seves accions. Els programes al nostre abast que complien aquestes condicions van ser el Cabri-géomètre (versió 1) i el Calcula (versió 3).

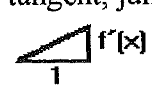
La primera idea que vam utilitzar a l'experimentació definitiva fou la de considerar construccions com la de la figura següent (qüestionari 5 pàgs. 552-554):



Aquesta construcció està a meitat de camí entre el problema de la tangent i el seu invers. No és exactament el problema de la tangent, perquè aquí ja tenim construïda la tangent, ni és el problema invers perquè sabem l'expressió simbòlica de $f(x)$. Aquestes construccions permeten les accions dels alumnes a fi de trobar una condició que compleixin totes les tangents (utilitzant el triangle format per l'ordenada, la tangent i la subtangent). La simbolització d'aquesta condició porta a establir una equació diferencial (en sentit ampli) que permet calcular $f'(x)$ sense necessitat d'utilitzar el càlcul integral.

$$f'(x) = \frac{2 \cdot f(x)}{x} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{2x^2}{x} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 2x$$

La segona idea fou recuperar la construcció geomètrica de la tangent, juntament amb la utilització del triangle 

amb la notació següent: 

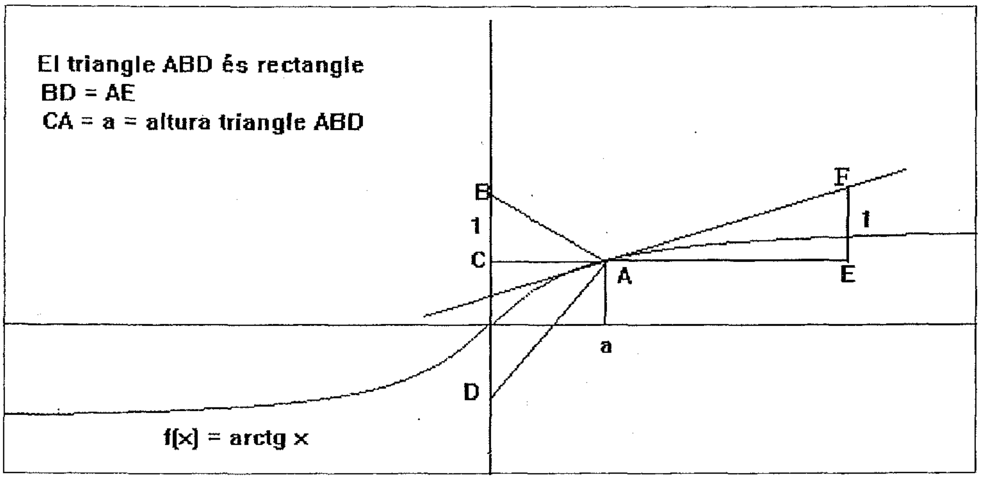
, presentant

a l'alumne la gràfica d'una funció i un procediment per dibuixar la recta tangent. La simbolització dels passos del procediment també porta a establir una equació diferencial (en sentit ampli) que permet calcular $f'(x)$ sense necessitat d'utilitzar el càlcul integral. Per exemple, per trobar la funció derivada de la funció arc tangent (veure qüestionari 9, pàgs. 716-717) basta utilitzar el següent procediment que permet dibuixar la recta tangent a la funció $f(x)$ = arctg x en qualsevol punt.

Procediment

Per dibuixar la recta tangent a la funció $f(x)$ = arctg x en el punt A d'abscissa $x = a$ s'han de seguir els passos següents:

1 Sobre l'eix d'ordenades dibuixar el segment CB de longitud 1
2 Dibuixar el segment BA
3 Dibuixar la recta perpendicular al segment BA que passa pel punt A
4 Determinar el punt D on la recta anterior talla l'eix d'ordenades
5 Dibuixar un segment AE de longitud igual al segment BD
6 Dibuixar el segment EF de longitud 1
7 Dibuixar la recta que passa per A i F



Utilitzant que el triangle BDA és rectangle en A i el teorema de l'altura, és relativament fàcil demostrar que la derivada de la funció $f(x)$ = arc tg x és $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

CAPÍTOL IV

SEGON OBJECTIU ELABORACIÓ DE LA UNITAT

CAPÍTOL IV. SEGON OBJECTIU

1 Subobjectiu 2.1: Anàlisi d'investigacions prèvies sobre els continguts de la unitat

En aquest apartat comentarem algunes investigacions relacionades amb els continguts de la unitat. És a dir, algunes de les investigacions que es plantegen l'aprenentatge del pensament matemàtic avançat, present en els currículums de BUP i del nou Batxillerat de la LOGSE.

1.1 Estudis sobre els nombres reals

Artigue (1998) considera que la investigació didàctica sobre els nombres reals ha posat de manifest que la concepció desenvolupada pels estudiants no és l'adequada. Per exemple, la distinció entre els diferents tipus de nombres depèn molt de la seva forma de representació. A més, la creixent i descontrolada utilització de les calculadores tendeix a reforçar l'assimilació nombre real / nombre decimal. Artigue (1998) també considera que en el nivell de batxillerat, els nombres reals són objectes algèbrics. L'ordre en $\mathbb{R}$ és reconegut com un ordre dens, però, en funció del context, els estudiants poden conciliar aquesta propietat amb l'existència de nombres just abans o just després d'un nombre determinat; per exemple, 0,99999.... moltes vegades és anomenat com el nombre just abans de 1. Més del 40% dels estudiants que entren a les universitats franceses consideren que, si dos nombres A i B compleixen la condició: $\forall\, n > 0$, $|A - B| < 1/n$, no són necessàriament iguals. L'associació entre els nombres reals i la recta real tampoc és coherent. Fins i tot si els alumnes accepten a priori el principi de la correspondència un a un entre $\mathbb{R}$ i la recta real, no estan del tot convençuts que un determinat nombre tingui un lloc en la recta real.

El camp que dins la didàctica de les matemàtiques s'anomena "Pensament Numèric" s'ocupa d'estudiar els fenòmens d'ensenyament, aprenentatge i comunicació dels continguts numèrics dins del medi educatiu i social, utilitzant una triple orientació: s'ocupa de les estructures numèriques específiques, de les funcions cognitives i de les situacions i problemes que es poden resoldre amb les estructures numèriques considerades. Romero (1997) i Romero i Rico (1999) han treballat dins d'aquesta línia d'investigació centrant-se en el segon aspecte i postulant que la comprensió del concepte de nombre real consisteix en el domini dels seus sistemes de representació i de les diferents classes d'activitats associades. Entre les diferents dificultats observades en la seva investigació, destaca la dificultat per a discriminar entre "conjunt numèric" i "notació numèrica". Als alumnes els costa molt veure els nombres racionals com entitats que poden venir representades en forma de fracció o bé en forma de decimal finit o periòdic. Aquesta dificultat és un exemple d'una classe de dificultats que anomenarem "dificultat per a distingir entre l'objecte no ostensiu i els ostensius associats"

1.2 Estudis sobre el concepte de funció

Respecte als estudis previs del concepte de funció, volem destacar dos tipus d'investigacions: les que s'han ocupat d'analitzar el paper que juguen les diferents classes de representació del concepte de funció. En el subobjectiu 1.3 ja hem comentat els treballs que s'han centrat sobre les formes de representació d'una funció i les traduccions entre elles. El segon tipus d'investigacions, comentades en el subobjectiu 1.2, ha caracteritzat les funcions des de dues perspectives: la funció com a procés i la funció com a objecte. Dubinsky i Harel (1992) i Dubinsky (1996) caracteritzen aquestes dues perspectives de la manera següent: <<*Una concepció procés de funció implica una transformació dinàmica de quantitats d'acord amb algunes regles repetibles, de manera que donada la mateixa quantitat inicial, sempre produiran la mateixa quantitat transformada. El subjecte és capaç de pensar en la transformació com una activitat completa, començant amb objectes d'algun tipus, fent quelcom amb aquests objectes, i obtenint nous resultats d'allò que ha fet(..) Una funció és concebuda com un "objecte" si és possible fer accions sobre ella, accions que la transformen globalment*>> (Dubinsky i Harel, 1992, pàg. 85).

En relació al paper que han de jugar les gràfiques i els aspectes visuals en el procés d'ensenyament-aprenentatge en l'AMT hi ha hagut una certa controvèrsia sobre els avantatges de donar més importància als aspectes gràfics de les funcions de la que se li havia donat fins al moment (Eisenberg 1991). Ara bé, cada cop més, hi ha més partidaris d'emfasitzar els aspectes visuals perquè consideren que s'ha de procurar afavorir en els alumnes un raonament de tipus gràfic. Cantoral i Farfán (1998) sostenen que la construcció d'un univers gràfic, ampli i estructurat, és bàsic per afavorir tant el llenguatge com el pensament variacional: <<*Iniciamos con actividades para la construcción, entre los estudiantes, de un universo de formas gráficas que sea a la vez, amplio y estructurado; y continuamos con el desarrollo de la noción de predicción de los fenómenos de flujo apoyados en el binomio de Newton. La combinación de ambas tareas, sostenemos esta hipótesis, favorece al desarrollo del "pensamiento y el lenguaje variacional"* >>(Cantoral i Farfán 1998, pàg. 353).

Un dels objectius d'aquesta investigació és l'anàlisi d'una de les traduccions menys automatitzable: el pas de la gràfica a la seva expressió simbòlica Si bé hi ha molts articles que fan alguna referència parcial a la traducció de gràfiques a expressions simbòliques, on hem trobat una anàlisi més exhaustiva del tema ha estat en Ruthven (1990). Les tasques proposades per Ruthven als alumnes en la seva investigació han estat un gran ajut per elaborar el qüestionari 2 (veure pàgs. 318-322), que hem emprat per investigar els procediments que utilitzaven els nostres alumnes per passar de la gràfica a l'expressió simbòlica. Els resultats obtinguts per Ruthven confirmen, d'una banda, la influència de l'ús de la calculadora gràfica i, de l'altra, la importància del fet que l'alumne reconegui la gràfica com un cas particular d'una determinada classe de funcions de model conegut. Un cop l'alumne ha reconegut la gràfica com a membre d'una família de funcions, Ruthven descriu tres tipus d'estratègies:

- Analítica: l'alumne utilitza el seu coneixement de la relació que hi ha entre la gràfica i la seva forma simbòlica. Per exemple, la relació que hi ha entre les transformacions que experimenta la gràfica d'una paràbola en modificar els paràmetres de la fórmula. Per a aquest tipus d'estratègia no cal la calculadora gràfica.

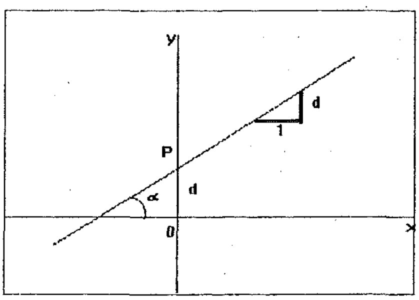
- Gràfica: l'alumne utilitza la facilitat de les calculadores gràfiques per representar la gràfica que resulta de modificar, les vegades que cregui convenient, l'expressió simbòlica que li suggereix la gràfica donada, a fi d'anar comparant les gràfiques obtingudes amb la gràfica inicial.

- Numèrica: l'alumne fa una conjectura d'expressió simbòlica a partir de: 1) un nombre petit de punts de la gràfica i 2) la forma de la gràfica. Aquesta hipòtesi de fórmula es va variant a partir del càlcul de punts amb la fórmula i de la seva comparació amb els corresponents valors de la gràfica donada. En aquest tipus d'estratègia no cal la calculadora gràfica.

1.3 Estudis sobre el concepte de pendent d'una recta

Diferents investigacions han posat de manifest que molts alumnes tenen dificultats amb el contingut pendent d'una recta quan se'ls està ensenyant la derivada. Garcia (1998) ha trobat que hi ha estudiants mexicans d'enginyeria que no entenen l'objecte "pendent d'una recta" com quelcom que descriu una propietat de la recta. Aquests resultats són coincidents amb els resultats obtinguts amb estudiants de secundària per Filloy i Lema (1996). En relació al contingut "pendent d'una recta" Azcárate, en la seva tesi doctoral (1990), a partir d'una investigació sobre els esquemes conceptuals d'alumnes catalans de secundària, respecte a la noció de pendent d'una recta, classifica els esquemes dels alumnes en tres categories:

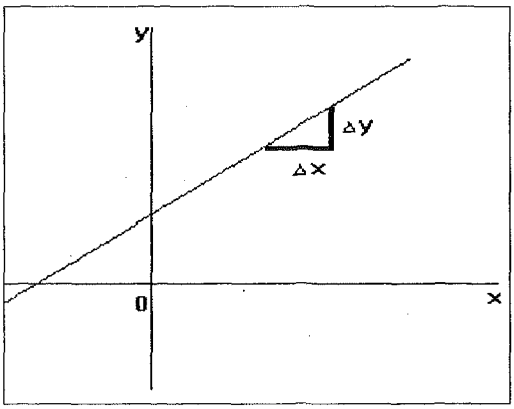
- El perfil geomètric correspon a una majoria important i caracteritza els alumnes que en les seves expressions utilitzen elements propis del llenguatge geomètric, tant descriptiu com analític, i suggereix un esquema conceptual amb imatges gràfiques del pendent d'una recta. Podem dir que aquests alumnes associen a la paraula "pendent" la imatge gràfica d'una recta en un sistema d'eixos cartesians, amb una certa disposició, molt sovint caracteritzada per un angle, i, en alguns casos per una distància o per un punt, tal com suggereix la figura:



Entre els perfils denominats geomètrics, es poden distingir tres nivells: un perfil geomètric-naif, un perfil geomètric (sense qualificatiu) i un perfil geomètric-tangent.

- El perfil "operatiu" caracteritza els alumnes que, davant de la demanda d'explicar el significat de pendent, contesten donant un algoritme operatiu que, o bé descriu la funció, o bé serveix per a reconèixer i/o calcular el pendent en l'equació de la recta. Es pot dir que aquests alumnes es caracteritzen per associar a la paraula "pendent", en la majoria dels casos, la imatge del coeficient a en una fórmula del tipus $y = ax + b$ i erròniament, en alguns casos, la pròpia expressió polinòmica $ax + b$. L'esquema conceptual d'aquests alumnes té, per tant, una faceta numèrica, calculadora, algèbrica, és a dir, algorítmica i li falta la imatge gràfica.

- El perfil "funcional" caracteritza els alumnes que han definit el pendent com un quocient entre els increments de les variables. Es pot dir que aquests alumnes es caracteritzen per associar a la paraula "pendent" la imatge gràfica d'una recta en què destaquen els increments de les variables, tal com indica la figura següent.



1.4 Estudis relacionats amb el concepte de límit

De les investigacions que han estudiat les dificultats dels alumnes relacionades amb el concepte de límit (Sierpinska 1985 i 1987; Cornu 1991, Delgado i Azcárate 1996 i Delgado 1998), considerem convenient destacar la classificació dels obstacles cognitius proposada per Cornu (1991). Els estudis de Cornu posen de manifest que els alumnes tenen concepcions espontànies personals que són fruit de la seva experiència quotidiana. Per exemple, l'expressió "tendeix a" es pot interpretar de maneres diferents: "aproximar-se","inclús mantenint-se a distància, aproximar-se", "sense arribar, aproximar-se", "aproximar-se arribant".... i, fins i tot "assemblar-se". En canvi, la paraula "límit" majoritàriament té el sentit de no sobrepassable, tot i que també pot tenir les interpretacions següents: "no se sobrepassa, però s'hi arriba", "ni se sobrepassa ni s'hi arriba", "un punt al qual ens aproximem sense tocar-lo", "un punt al qual ens aproximem fins a tocar-lo", "un límit superior/inferior","un màxim/mínim", "allò que està immediatament després d'allò fins on es pot arribar", i, fins i tot, "el final".

A l'hora d'estudiar les dificultats dels alumnes, Cornu utilitza la noció d'obstacle cognitiu introduïda per Bachelard (1973) per estudiar el desenvolupament històric del pensament científic. Cornu comenta diferents classes d'obstacles cognitius: els genètics i psicològics, que apareixen en el desenvolupament personal de l'alumne, els obstacles didàctics, que són causats per la forma d'ensenyar i els obstacles epistemològics, que són propis dels conceptes matemàtics. La classificació de Cornu és el resultat, d'una banda, de l'anàlisi històrica del desenvolupament del concepte de límit i, de l'altra, de l'observació de diversos grups d'alumnes quan comencen a treballar el concepte de límit. Les activitats desenvolupades a les classes observades se centren en tres aspectes:
1) Geometria: càlcul de la raó de les àrees de dos cercles a partir de veure que és igual a la raó dels quadrats dels seus radis, utilitzant polígons inscrits, que van augmentant el nombre de costats.
2) Anàlisi: determinar el pendent d'una corba. Aquí es passa de la situació geomètrica (la tangent és un límit) a la situació numèrica (càlcul de pendents).
3) Desenvolupaments decimals: aproximació de nombres reals per nombres decimals racionals.

Els estudis de Cornu el porten a considerar els següents obstacles epistemològics:

1) El fracàs a l'hora de relacionar els aspectes geomètrics amb els numèrics. Malgrat que el mètode d'exhaució sembla que està molt a prop de la noció de límit, no podem assegurar que els Grecs ja tinguessin el concepte modern de límit. El mètode d'exhaució és essencialment geomètric, i permet la demostració de resultats sense haver d'entrar en el problema de l'infinit. S'aplica a les magnituds geomètriques, no a nombres. Si bé la interpretació geomètrica permet resoldre molts problemes, actua com un obstacle quan es vol passar a la noció de límit numèric. Aquest obstacle el poden manifestar alguns alumnes quan els presentem, de manera visual, l'aproximació de les secants a la recta tangent, ja que poden tenir dificultats a traduir numèricament aquesta aproximació.

2) Els conceptes de "infinitament petit" i "infinitament gran". Si seguim el procés històric que porta a l'actual concepte de límit, ens trobem amb la suposició de l'existència de quantitats infinitament petites, quantitats que són tan petites que quasi són igual que zero. Què passa quan una d'aquestes quantitats s'aproxima a zero? Newton considerava quantitats evanescents i calculava la seva darrera ratio. Euler considerva que una quantitat infinitament petita era aquella que, quan convenia, es podia considerar igual que zero. D'Alembert s'oposà al punt de vista d'Euler perquè *"una cantidad es algo o nada; si es algo aún no se ha desvanecido; si no es nada, ya se ha desvanecido literalmente. La suposición de que hay un estado intermedio entre estos dos es una quimera"* (Boyer 1986, pàg 567). La suposició d'un estat intermedi entre res i alguna cosa que no és res també es pot trobar en els nostres alumnes. Per exemple, per a alguns, el símbol ξ representa un nombre que no és zero, però és més petit que qualsevol nombre real positiu. Un altre exemple són els alumnes que consideren que 0,99999.... és el darrer

nombre abans de l'1, però que no és igual a 1. Alguns també suposen que hi ha un nombre que és més gran que tots els altres, però que no és infinit.

3) L'aspecte metafísic del límit. Clarificar el concepte de límit va ser difícil per als matemàtics perquè sembla un concepte que té més a veure amb la filosofia. Molts matemàtics varen manifestar reticències en relació a aquest concepte. Per exemple, D'Alembert considerava que un pot treballar fàcilment en el càlcul diferencial sense tota aquesta "metafísica de l'infinit". Lagrange va expressar un horror similar cap als aspectes metafísics. Encara que inicialment va usar els infinitesimals, després va considerar que els infinitesimals de Leibniz no eren prou rigorosos i va intentar fonamentar l'anàlisi infinitesimal utilitzant sèries infinites en termes purament algèbrics. En els alumnes també podem trobar manifestacions d'aquest obstacle perquè, per a l'alumne, l'ús de l'infinit està envoltat de misteri. Expressions del tipus següent posen de manifest l'existència d'aquest obstacle: "no és realment matemàtiques,...no és molt rigorós però funciona, ...no existeix, és abstracte,.... el mètode és just si ens conformem amb un valor aproximat,...etc".

4) S'arriba o no s'arrriba al límit? Aquest debat es pot trobar al llarg de la història del concepte de límit. Per exemple, Robins considerava que mai s'arribava al límit, de la mateixa manera que els polígons inscrits en un cercle mai són iguals al cercle. D'Alembert també insistia que la quantitat mai és igual al límit, però considerava que sempre es podia aconseguir una aproximació que pot diferir en una quantitat tan petita com un vulgui.

En general, a l'alumnat li costa entendre que a vegades s'arriba al límit i a vegades no. A continuació segueix un exemple en què l'alumne ha de contemplar les dues possibilitats:

Si un alumne ha de calcular $\lim_{x\to 0} \frac{2x^2 - 4x}{x^2 - 2x}$ ha de fer el següent:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x^2 - 4x}{x^2 - 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{2(x^2 - 2x)}{x^2 - 2x} = \lim_{x\to 0} 2=2$$

D'una banda, ha de considerar que quan $x\to 0$, la variable x sempre és diferent de zero per poder fer la simplificació, mentre que per l'altra banda, ha de considerar que les imatges sempre són igual a 2 i, d'aquest fet deduir-ne, que el límit és 2.

5) Obstacle relacionat amb la definició moderna de límit. La definició del concepte de límit d'una funció en termes de deltes-epsilons resulta essencialment difícil perquè està formulada en termes de procés i no d'objecte. En efecte, quan es diu: donat un $\xi > 0$ podem trobar un δ tal que..., estem donant la definició en termes de procés i no en termes d'objecte, com seria si diguéssim:...existeix una funció $\delta(\xi)$ tal que...

Els estudis sobre les dificultats relacionades amb els límits han posat de manifest la gran complexitat d'aquest concepte i han donat peu a un replantejament de com i quan s'ha d'introduir. D'una banda, hi ha propostes d'introduir-lo després de la derivada d'una funció en un punt i, d'altra banda, hi ha propostes d'introduir-lo com una eina de manera implícita. Per exemple, Tall (1986) proposa que el procés del pas al límit sigui utilitzat implícitament en el càlcul diferencial abans de treballar la definició formal.

Tal com hem comentat anteriorment, Tall (1996 i 1998) sosté que un mateix simbolisme compacte pot representar simultàniament un concepte complex i, a la vegada, el procés a través del qual és obtingut. L'amalgama del procés i del concepte, Tall l'anomena "procepte". En el cas particular del límit, aquest autor estableix que aquest procepte és més difícil d'entendre que el procés, que ja és força complicat per si sol. També considera que el major obstacle en l'aprenentatge del procepte límit, així com els de tots els que pertanyen al pensament matemàtic avançat, és que la comprensió de la dinàmica del procés no condueix directament al càlcul del límit, ja que s'han d'utilitzar d'altres mètodes. La conclusió de Tall és que el procepte límit representa per als alumnes un procés no encapsulat revestit d'un simbolisme sense significat.

Delgado (1998), a la seva tesi doctoral, realitza un estudi microgenètic dels esquemes conceptuals associats a les definicions de límit i continuïtat en universitaris de primer curs. Una de les implicacions didàctiques d'aquesta investigació és *"La construcción didáctica, del concepto de continuidad de una función en un punto y, luego, sobre esta base la del concepto de límite asegura el control y la secuenciación de los obstáculos epistemológicos relacionados con estos conceptos, gracias a un andamiaje constituido por situaciones adidácticas que median en la evolución de los esquemas coceptuales de los alumnos. Con ello, se favorece una estrategia constructivista del aprendizaje de los conceptos básicos del Cálculo que toma en consideración los aspectos cognitivos del sujeto"* (Delgado 1998, pàg. 472). L'organització matemàtico-didàctica del tema "continuïtat i límit de funcions", que els alumnes havien treballat abans de començar la unitat objecte d'aquesta investigació, estava estructurada d'acord amb les implicacions didàctiques que es dedueixen de la tesi doctoral de Delgado (1998).

1.5 Estudis sobre la recta tangent

De les investigacions que han estudiat les dificultats que tenen els alumnes quan han de construir el concepte de recta tangent (Cantoral i Alvarez, 1992; Trigueros i Alvarez, 1995; Llorens,1996, Vinner 1991) hem tingut especialment en compte els resultats de Llorens (1996). Aquest autor aplica el model de Van Hiele al concepte de recta tangent a una corba en un punt i aporta una descripció de cada un dels nivells I, II i III, la qual compleix les condicions teòriques per ser considerada pròpia del model Van Hiele.

Nivell I

1.1 El nivell I es caracteritza perquè la seva imatge conceptual és molt semblant al cas de la circumferència; és a dir, per a un estudiant d'aquest nivell la seva idea de tangent és que la recta toca en un punt i, per tant, és capaç de discriminar els casos evidents (secant, exterior).

1.2 En aquest nivell apareix el reconeixement de les idees d'escala i de localitat referides al concepte. L'estudiant d'aquest nivell serà capaç de distingir, davant d'una representació d'una corba i d'una recta, que aquesta recta no és tangent a la corba quan evidentment (visualment) no ho sigui, almenys en la part de la representació que se li mostra. També distingirà si la recta és secant en aquests mateixos casos evidents.

1.3 Ara bé, davant d'una gràfica que representi una corba que pugui ser tangent a una corba, afirmarà sense gaires dubtes que, efectivament, aquesta és la relació que tenen la recta i la corba, sense considerar la necessitat de cap propietat addicional, basant-se en l'aparença.

1.4 Específicament, en la qüestió del comportament d'una corba en un entorn d'un punt quan es fa un procés d'aproximació (zoom) en aquest entorn, és capaç de reconèixer que la forma, l'aparença d'una corba, pot ser molt diferent segons des de quina escala es contempli.

1.5 En aquest nivell pot reconèixer que el vèrtex d'un angle no canvia d'aspecte encara que es faci sobre ell un procés d'aproximació (zoom).

1.6 (Separació del nivell II) En aquest nivell és característic que l'alumne no relacioni la qüestió de l'aproximació amb la de la tangent. Menys encara que una recta que talla una corba pugui ser tangent (simultàniament) a la corba (en el mateix punt).

Nivell II

II.1 En el nivell II, l'estudiant manifesta una total seguretat per fer processos d'aproximació visuals i, per tant, per raonar sobre els canvis de forma o d'aparença que comporten aquests processos sobre la representació gràfica de la corba. Per tant, és capaç de distingir aquelles corbes que, en aquest procés, s'aproximen localment a una recta, d'aquelles que no compleixen aquesta propietat.

II.2 Pel que fa a la tangent, la reconeix precisament com el final d'aquesta aproximació local. De tal manera que, com és característica d'aquest nivell, relaciona el concepte de tangent amb el d'aproximació, i ara no basta que la recta sembli que és tangent, que toqui a la recta en un punt, sinó que s'ha de complir una propietat addicional que, realment, la caracteritza. Així, donades una corba i una recta amb aparença de tangents (en un punt) formularà la necessitat de veure més de prop la figura, d'iniciar l'aproximació, per poder contestar la pregunta de si la recta és tangent o no.

II.3 (Separació del nivell II) En aquest nivell no donarà, en general, respostes a les situacions patològiques, és a dir, a aquelles en què existeix alguna dificultat per realitzar el procés d'aproximació. Per exemple, per als angles o vèrtexs comentats abans.

II.4 Un alumne no podrà progressar des del nivell II al nivell III (ni al IV) mentre mantingui dualitats entre el concepte-imatge i el concepte-definició. El nivell de raonament que permet la comprensió dels conceptes avançats o dinàmics és incompatible amb la dualitat entre imatge i definició. La plena integració entre els conceptes intuïtius i estàtics (tangent a una circumferència) amb els dinàmics (aproximació local) caracteritza l'accés al nivell III.

Nivells III i IV

III.1 En el nivell III (teòric-formal) l'alumne és capaç de demostrar que la tangent a la corba, suposant que existeixi, serà l'única recta que, precisament, és el límit ("el final") d'aquest procés d'aproximació visual o de zoom.

III.2 De fet, serà capaç de definir la tangent d'aquesta manera. Només aquelles corbes que tinguin un comportament patològic en aquest procés, és a dir, que no acaben sent com una recta, no tindran tangent.

III.3 (Separació del nivell IV) El reconeixement de la impossibilitat de predir, en alguns casos, l'existència de la tangent (i, per tant, de la seva inclinació) expressat en termes precisos i formals, encara que amb el llenguatge propi del context i de la definició adoptada, podria ser una manifestació d'aquest apropament al nivell IV i, en tot cas, és una manifestació de l'adquisició del nivell III.

1.6 Estudis sobre la taxa instantània i la velocitat instantània.

Azcárate (1990) en la seva tesis doctoral "La velocidad: introducción al concepto de derivada" presenta els resultats d'una investigació que pretenia avaluar el procés d'aprenentatge de tres classes de 2n de BUP que havien seguit el material curricular del Grup Zero "Introducció a les derivades" (1980) amb la metodologia de classe implicat en ell; els professors de les classes eren membres del Grup Zero que havien participat en la redacció, i posterior revisió del material en qüestió. A continuació reproduïm un resum d'aquesta investigació: <<...*Quizá lo más interesante consista en el análisis de los perfiles cognitivos de los estudiantes y de su evolución a lo largo del proceso de aprendizaje (en el cual los conceptos de velocidad, media e instantánea, desempeñaban un papel importante). Dichos perfiles, característicos en cada momento de las concepciones de los estudiantes que la autora denomina "primitivo", "aproximación" y "límite", se pueden describir de la siguiente manera:*

- *El perfil "primitivo" corresponde a alumnos que no han construido una concepción específica de las nociones de velocidad instantànea o de tasa* *instantànea de variación de una función. Estos alumnos tienen una concepción de "velocidad en general" que responde a la formulación verbal "la velocidad es igual al espacio partido por el tiempo", muy estable y coherente, que no distingue entre velocidad constante, velocidad media y velocidad en un punto. La principal dificultad de estos alumnos consiste en la confusión entre velocidad media desde el origen y velocidad instantánea en un punto, así como su incapacidad por interpretar el concepto de variación instantànea de una función.*

- *El perfil "aproximación" corresponde a alumnos que, en el caso del concepto de velocidad instantánea, han generalizado su concepción de la noción de velocidad media a la noción de velocidad media entre dos puntos próximos que les sirve ahora para describir de manera aproximada la velocidad en un punto dado y, en el caso, de la descripción de la variación puntual de una función, han construido, por analogía con el caso de la velocidad, una concepción de tasa media de variación de una función. En ambos casos, las concepciones de los estudiantes son coherentes y les sirven para resolver situaciones puntuales por aproximación.*

- *El perfil "límite" corresponde a alumnos que, durante la fase de aprendizaje, han construido unas concepciones tanto de la noción de velocidad instantánea como de la noción de tasa instantánea de variación de una función en un punto, de manera que interpretan, describen y representan situaciones de variación instantánea de una función dada por su gràfica.*

El estudio de la evolución de los perfiles de los alumnos a lo largo de la fase de aprendizaje revela que ha habido un cambio y una evolución de progreso importante en las concepciones de los alumnos ya que se aprecia un desplazamiento desde un gran número de perfiles "primitivo" en la situación inicial hasta un gran número de perfiles "límite" en la situación final, pasando por una mayoría de perfiles "aproximación" en el transcurso de la fase de aprendizaje. La existencia del perfil cognitivo "aproximación" pone de manifiesto la importancia de ofrecer itinerarios didácticos que faciliten los procesos de construcción comprensiva y paulatina de las concepciones de los individuos de manera que puedan explicarse los fenómenos que implican un paso al límite.>> (Azcárate i d'altres 1996, pàgs. 14-15).

2 Subobjectiu 2.2. Anàlisi de les dificultats, obstacles i errors dels alumnes

2.1 Dificultats, obstacles i errors relacionats amb els continguts de l'anàlisi elemental

La recerca recent en el camp de la didàctica de l'anàlisi infinitesimal (García 1998, Zubieta 1996, Ávila 1996, Hoyos 1996, Cantoral 1992, Artigue 1991, 1995b i 1998) ha fet palès l'existència d'importants dificultats en el procés d'ensenyament aprenentatge d'aquesta àrea. Hem agafat com a guia la classificació de dificultats relacionades amb l'anàlisi elemental proposada per Artigue (1995b i 1998). Segons aquesta autora, la investigació didàctica en el camp del pensament matemàtic avançat ha posat de manifest l'existència de fortes i resistents dificultats. Artigue fa la següent classificació d'aquestes dificultats:
1) Dificultats relacionades amb la complexitat matemàtica dels objectes bàsics de l'anàlisi: nombres reals, funcions, successions, etc. Són objectes que encara estan en fase de construcció quan comença la instrucció de l'anàlisi del currículum de secundària.
2) Dificultats relacionades amb la noció de límit i amb les tècniques del seu càlcul.
3) Dificultats relacionades amb la ruptura necessària amb el pensament algèbric.

2.1.1 Dificultats relacionades amb els objectes bàsics de l'anàlisi

Nombres reals

Artigue (1998) considera que la investigació didàctica sobre els nombres reals ha posat de manifest que la concepció desenvolupada pels estudiants no és l'adequada i comenta les següents dificultats:
1) La distinció entre els diferents tipus de nombres depèn molt de la seva forma de representació.
2) La creixent i descontrolada utilització de les calculadores tendeix a reforçar l'assimilació nombre real / nombre decimal.
3) L'ordre en $\mathbb{R}$ és reconegut com un ordre dens, però, en funció del context, els estudiants poden conciliar aquesta propietat amb l'existència de nombres just abans o just després d'un nombre determinat; per exemple, 0,9999... molts vegades és anomenat com el nombre just abans de 1.
4) L'associació entre els nombres reals i la recta real tampoc és coherent. Fins i tot si els alumnes accepten a priori el principi de la correspondència un a un entre $\mathbb{R}$ i la recta real, no estan del tot convençuts que un determinat nombre tingui un lloc en la recta real.

Funcions

En relació al concepte de funció, Artigue considera quatre tipus de dificultat:
1) Dificultats en la identificació d'allò que realment és una funció i en la identificació de les successions com a funcions.
2) Dificultats relacionades en la utilització de la funció com a procés i com a objecte.

3) Dificultats relacionades en la traducció entre les diferents formes de presentació d'una funció.
4) Dificultats relacionades amb la superació del pensament numèric i algèbric.

2.1.2 Dificultats relacionades amb el concepte de límit.

Artigue considera que, en les investigacions que ha analitzat sobre límits, hi ha força acord sobre els següents obstacles epistemològics:
1) El sentit comú associat a la paraula "límit" indueix concepcions resistents que es manifesten considerant el límit com una barrera que no es pot superar o bé com l'últim terme d'un procés o bé restringint la convergència a la convergència monòtona.
2) La generalització de propietats dels processos finits als processos infinits d'acord amb el principi de continuïtat establert per Leibniz.
3) La interpretació geomètrica dificulta la identificació dels objectes involucrats en el procés del límit i de la seva topologia subjacent. Aquest fet dificulta el joc subtil entre els aspectes geomètrics i els numèrics en el procés del límit.

A més d'aquests obstacles epistemològics, Artigue considera:
4) Les dificultats relacionades amb els dos aspectes del límit: procés i objecte. Per exemple, la dificultat que tenen molts alumnes per identificar 0,9999... amb 1 es pot explicar perquè en el primer cas estem considerant un procés, mentre que 1 és un objecte.
5) Les dificultats relacionades amb la definició formal del concepte de límit.

2.1.3 Dificultats relacionades amb la ruptura amb el pensament algèbric.

L'activitat matemàtica en anàlisi, necessita el domini d'habilitats algèbriques, i també prendre una mica de distància del pensament algèbric. La fissura entre el pensament algèbric i el pensament analític té diverses dimensions diferents. L'essencial, segons Artigue, és que l'anàlisi necessita una altra visió "d'igualtat" per desenvolupar i dominar noves tècniques per demostrar igualtats. En l'àlgebra, per demostrar que dos expressions $a(x)$ i $b(x)$ són iguals, l'estratègia normal és la següent: transformar l'una en l'altra per equivalències successives, o bé transformar les dues per obtenir dues expressions evidentment equivalents, o bé transformar la seva diferència (resp. el quocient) per obtenir 0 (resp. 1). En l'anàlisi, moltes vegades aquesta estratègia està fora de lloc o bé no és la més fàcil d'aplicar. Per exemple, quan es treballa amb propietats locals, cal desenvolupar una visió d'igualtat connectada amb "la proximitat infinita", és a dir: si $\forall \xi > 0$, $d(A,B) < \xi$, per a una distància adequada d, llavors: $A=B$. Com a conseqüència, les desigualtats juguen en l'anàlisi un paper predominant, així com el raonament local basat en condiciones suficients.

Artigue emfasitza la idea de fissura entre els mètodes antics de pensament i el pensament analític perquè sovint l'anàlisi exigeix reconstruir objectes que ja han estat construïts anteriorment. La noció de tangent ens proporciona un exemple típic de tal reconstrucció necessària.

2.2 Dificultats, obstacles i errors. Marc general

Les investigacions sobre les dificultats en el camp del pensament matemàtic avançat no són uniformes en la terminologia, ja que moltes vegades s'utilitza indistintament dificultat i obstacle. En tot cas, els estudis que hem consultat estan focalitzats sobre les combinacions de dificultats que generen obstacles i deixen en un segon pla les dificultats que generen falta de significat personal.

El concepte d'obstacle fou introduït per Bachelard (1973) i va ser traslladat al camp de la didàctica de les matemàtiques per Brousseau (1983), el qual li dóna un significat molt determinat. Per poder parlar d'obstacle s'han de complir les següents condicions:
1) Un obstacle és un coneixement. Per tant, no és una falta de coneixement.
2) L'alumne utilitza aquest coneixement per produir respostes correctes en determinades situacions que troba amb certa freqüència.
3) Quan s'utilitza aquest coneixement en un altre context genera respostes incorrectes. Una resposta universal exigirà un punt de vista diferent.
4) L'alumne es resisteix a les contradiccions que l'obstacle li produeix i al canvi del coneixement antic per un de nou.
5) Malgrat que l'alumne és conscient de les limitacions del coneixement-obstacle, el continua manifestant esporàdicament.

Brousseau considera que els obstacles que es presenten en el sistema didàctic poden ser:
1) D'origen ontogènic o psicogenètic, causats pel desenvolupament de l'alumnat.
2) D'origen didàctic, provocats per les eleccions didàctiques que s'han fet per establir la situació didàctica.
3) D'origen epistemològic, intrínsecament relacionats amb el contingut matemàtic. Es poden trobar en la història dels continguts, encara que no cal reproduir a l'aula les condicions històriques que van permetre superar-los.

La noció d'obstacle, i molt especialment la noció d'obstacle epistemològic, no és gaire clara i ha generat controvèrsia (Artigue 1990 i Sierpinska 1988). Resulta complicat diferenciar la noció d'obstacle de la noció de dificultat. Dit d'una altra manera, la dificultat i l'obstacle se situen en el costat hipotètic de les causes, mentre que els errors se situen en el costat observable dels efectes. Un altre aspecte problemàtic de la noció d'obstacle és el de ser considerat un "coneixement" que produeix pràctiques errònies, ja que sembla que l'obstacle és quelcom que porta a sobre l'alumne i que ha de ser eliminat perquè pugui avançar en el seu procés d'aprenentatge. D'acord amb el marc teòric que hem adoptat, creiem més útil situar l'obstacle clarament en el camp de les pràctiques, per la qual cosa proposem mantenir un únic terme per a les causes: dificultat, i dos termes per als efectes: error i entrebanc. Per tant:
1) Entendrem per dificultat allò que es considera la causa hipotètica dels errors dels alumnes.
2) Un error és una pràctica personal no vàlida des del punt de vista de la institució.
3) Aquesta pràctica es considera que és un entrebanc quan, realitzada en un altre context,

seria vàlida des del punt de vista de la institució.

Des d'aquesta perspectiva no es pot parlar de la superació d'un entrebanc, en el sentit d'eliminar pràctiques que en determinats contextos són vàlides. Per superació d'un entrebanc hem d'entendre: aconseguir un significat personal de l'alumne (conjunt de pràctiques) prou desenvolupat, de manera que la pràctica adequada a un determinat context no es manifesti en un altre context on no és vàlida.

A continuació segueix un marc general on situar les diferents causes hipotètiques dels errors. És a dir, intentarem explicitar la classificació de dificultats des de la qual hem analitzat els errors i entrebancs dels alumnes, tant a priori en el predisseny de la unitat, com a posteriori en el moment de la implementació.

2.2.1 Explicacions habituals de les dificultats d'aprenentatge dels continguts matemàtics

Qui no ha dit o sentit en les avaluacions, sales de professors, converses amb alumnes, etc. alguna de les frases següents? "Les matemàtiques són molt difícils", "Les matemàtiques són molt abstractes", "Amb tants alumnes per classe és molt difícil fer la classe", "Els alumnes vénen molt mal preparats de la primària/ESO","No estan motivats per estudiar", "El que és més important és que el professor domini la matèria","Els professors de secundària tenen pocs coneixements psicopedagògics", "A aquest alumne li costa molt", "M'han posat les classes a unes hores en què és impossible explicar res", "A mi les matemàtiques mai m'han anat bé/ em costen molt", "Ho sabia però a l'examen em poso nerviós i ho faig tot malament", "No serveixo per a les matemàtiques", "Aquest professor s'explica molt malament", "Aquest alumne no fa res però no molesta, en canvi aquest, a més de no fer res, distorsiona la classe", "Quan es va explicar aquest tema jo estava malalt", "Li falten els coneixements previs","Quan jo estudiava tampoc entenia les matemàtiques"...

És evident que aquestes són les explicacions que normalment es donen per explicar les dificultats dels nostres alumnes. En podem fem una classificació en quatre grups de dificultats:
1 Dificultats relacionades amb els continguts matemàtics.
2 Dificultats relacionades amb el professorat.
3 Dificultats relacionades amb l'organització del centre.
4 Dificultats relacionades amb l'alumnat.

El primer grup de dificultats fa referència a les dificultats associades a la complexitat dels objectes matemàtics i a la complexitat dels processos de pensament que s'han d'utilitzar per construir i manejar aquests objectes. El segon i tercer grup fan referència a les dificultats associades al procés d'instrucció en la institució escolar, mentre que el quart grup fa referència a dificultats de tipus general associades al desenvolupament cognitiu i afectiu dels alumnes.

Aquestes classes de dificultats es connecten i reforcen entre elles produint objectes personals amb significats que inclouen pràctiques errònies des del punt de vista de la institució escolar. Cal remarcar que l'error de l'alumne s'ha de considerar sobretot com una pràctica que forma part del significat del seu objecte personal més que com una conseqüència d'una manca de significat o bé d'un descuit. En aquesta investigació considerarem les dificultats com les causes potencials que generen objectes personals insuficients o inadequats, el significat dels quals incorpora actuacions que són considerades com a errors en primer terme, i després com a entrebancs per la institució escolar.

2.2.2 Explicacions de les dificultats relacionades amb el desenvolupament cognitiu i afectiu de l'alumnat

Dels quatre grups de dificultats comentats anteriorment desenvoluparem primer el quart, la qual cosa ens portarà cap a les aportacions que ha fet la psicologia. Començarem considerant les aportacions del conductisme. Els neo-conductistes actuals posen l'èmfasi en les jerarquies d'aprenentatge. Una jerarquia d'aprenentatge es constitueix de dalt a baix. Es comença determinant la capacitat que volem que aprenguin els alumnes situant-la en el cim de la piràmide. Després es fa una anàlisi de quines són les capacitats prèvies que calen per assolir -la. A continuació repetim el procés amb les capacitats que hem situat en el segon nivell de la jerarquia, fins arribar a unes capacitats que els alumnes ja dominen. Per exemple, si volem que dominin l'habilitat de resoldre equacions, hem de veure quines són les habilitats prèvies que són necessàries i ens hem d'assegurar que els alumnes les coneixen; per tant, és important tenir clar l'objectiu que es pretén i fer una programació molt acurada en què tinguem en compte tot el que cal per aconseguir aquest objectiu. L'explicació que dóna aquest punt de vista a les dificultats detectades en el procés d'aprenentatge és la següent: *la causa de les dificultats d'aprenentatge d'un determinat nivell de la jerarquia és la falta de domini dels nivells inferiors.*

En l'apartat 2.2.3 del subobjectiu 1.2 hem comentat breument la teoria de les etapes de Piaget. D'aquesta teoria, *els seguidors de Piaget, conclouen que una font important de les dificultats d'aprenentatge dels alumnes de l'etapa secundària, està a pretendre que alumnes que encara no han superat l'etapa operacional concreta realitzin operacions formals.* Des d'aquest punt de vista hi ha dos aspectes que resulten fonamentals: 1) quins dels objectius de l'àrea de matemàtiques corresponen a l'etapa de les operacions concretes i quins a la de les operacions formals i 2) precisar les edats en què els alumnes passen d'una etapa a l'altra.

Els estudis posteriors a la publicació de l'obra de Inhelder i Piaget (1972) sobre el desenvolupament del pensament formal han fet aparèixer alguns desacords amb el treball piagetià sobre el pensament formal. Així s'ha comprovat: a) que no tothom arriba a la fase del pensament formal b) que no tots els esquemes formals s'adquireixen simultàniament, posant així en dubte l'existència d'una estructura de conjunt en el pensament formal i c) que en la resolució de feines formals, no solament influeix l'estructura lògica del problema

- tal com postula el model piagetià - sinó també el contingut a què fa referència, i que aquesta influència està mediatitzada essencialment per les idees o concepcions prèvies que té el subjecte sobre el contingut. *Aquests estudis, en destacar la influència que tenen les idees espontànies dels alumnes sobre el raonament formal, donen una altra explicació de les dificultats d'aprenentatge de les matemàtiques diferent de la piagetiana (el nen no té assolida l'etapa de les operacions formals) o de la neoconductista (falta de domini dels nivells inferiors de la jerarquia). Aquesta explicació és la que consideren alguns neopiagetians, i essencialment diu que una de les principals causes de la dificultat en l'aprenentatge és el conflicte entre la intuïció ingènua de l'alumne, que ell considera correcta, i el que indica l'anàlisi lògica i racional. Des d'aquesta perspectiva, és important saber quina és la naturalesa d'aquestes concepcions espontànies i quin n'és l'origen, a fi de poder superar el conflicte que es pot produir entre aquestes concepcions i l'anàlisi lògica i racional.* Normalment aquestes concepcions ingènues dels alumnes són espontànies; és a dir, sorgeixen com a resultat de la interacció de l'alumne amb el món que l'envolta i solen servir per explicar i solucionar moltes situacions a què s'enfronta. Són construccions personals; és a dir, són elaborades a partir de l'activitat de descobriment de l'alumne. Algunes són correctes, fins i tot brillants, però en d'altres casos són incorrectes, o com a mínim insuficient. Aquestes concepcions espontànies normalment són implícites, o sigui que molt sovint l'alumne no n'és plenament conscient i, per tant, no les pot verbalitzar. Pel fet que l'alumne no sempre és conscient de les seves pròpies idees, aquestes no formen un sistema elaborat, de manera que en moltes ocasions les concepcions ingènues són incoherents o contradictòries entre si. Una altra característica d'aquestes concepcions espontànies és que són difícils de canviar i que són compartides per molts alumnes, o sigui que la majoria dels alumnes sol caure sistemàticament en els mateixos errors, la qual cosa permet fer un llistat de concepcions espontànies que es presenten segons l'edat dels alumnes.

El constructivisme (Coll 1989) accepta que l'objectiu de la intervenció escolar és la modificació dels esquemes de coneixement de l'alumne d'acord amb la teoria de l'equilibració de Piaget. És a dir, considera que el primer pas per aconseguir que l'alumne realitzi un aprenentatge significatiu consisteix a trencar l'equilibri inicial dels seus esquemes respecte al nou contingut d'aprenentatge. L'explicació que dóna aquesta concepció a les dificultats d'aprenentatge és la següent: *davant d'una tasca que provoca una situació de desequilibri, pot succeir:*

a) que la situació proposada sigui confusa o poc coherent i que, per tant, no sigui potencialment significativa. En aquest cas és el professor el que té la possibilitat de resoldre la dificultat presentant la situació d'una manera que sigui més clara i coherent.

b) que l'alumne no tingui assolits els coneixements necessaris per tornar a la situació d'equilibri. En aquest cas, la solució passa per fixar la distància òptima entre el que sap l'alumne i el nou contingut; és a dir, s'ha de fer una adaptació del nou contingut a allò que ja sap l'alumne.

c) que l'alumne no estigui motivat per l'activitat proposada, de manera que ni tan sols es produeixi la situació de desequilibri, perquè la tasca que li proposem li resulta aliena o no li troba sentit. En aquest cas s'ha de procurar motivar l'alumne.

d) que les concepcions intuïtives sobre el nou contingut i les estratègies desenvolupades no permetin tornar a la situació d'equilibri. En aquest cas caldrà doncs l'ajut del professor perquè l'alumne vagi variant les seves estratègies.

2.2.3 Classificació de les dificultats d'aprenentatge dels continguts matemàtics

Tenint en compte: 1) Les explicacions de la psicologia comentades a l'apartat anterior, 2) L'especificitat del coneixement matemàtic i 3) Que l'ensenyament es realitza dins un centre escolar; es pot fer la següent classificació de dificultats que ens podem trobar en el procés d'ensenyament-aprenentatge de les matemàtiques:

1. Dificultats relacionades amb els continguts matemàtics.

L'elevat grau d'abstracció i generalització és una de les característiques específiques dels continguts matemàtics i una de les possibles causes que presenta el seu aprenentatge. Aquest tipus de dificultats són inherents a les matemàtiques. Un estudi epistemològic del contingut que volem ensenyar, així com un estudi històric de com la societat ha construït aquest coneixement ens pot donar una idea del grau de dificultat potencial d'allò que volem ensenyar. És en aquest nivell on situaríem les investigacions que s'han preocupat dels obstacles epistemològics. Dit d'una altra manera, considerem que els obstacles epistemològics són un tipus de dificultat, més en concret són causes hipotètiques que expliquen els entrebancs dels alumnes.

2 Les activitats proposades no són potencialment significatives.

Es pot donar el fet que la proposta d'activitats que presenta el professor als alumnes no sigui potencialment significativa, per diferents causes: 1) quan el professorat no té els continguts que vol ensenyar ben estructurats, 2) quan els materials que s'han escollit, com per exemple els llibres de text, no siguin clars (exercicis i problemes confusos, mal graduats, rutinaris i repetitius, errors d'edició, etc.), 3) quan la presentació del tema que fa el professorat no és clara ni està ben organitzada (no se l'entén quan parla, parla massa ràpid, la utilització de la pissarra és caòtica, no posa prou èmfasi en els conceptes clau del tema, etc.). Aquest tipus de dificultats són inherents al professorat. La possible solució d'aquesta dificultat està relacionada amb la formació inicial i permanent.

3 Dificultats que s'originen en l'organització del centre.

Moltes vegades l'horari del curs és molt dolent, el nombre d'alumnes és massa gran, no es pot utilitzar l'aula d'informàtica, etc. Aquest tipus de dificultats estan re[illegible]des amb l'organització del centre. La solució a aquest tipus de dificultat [illegible] reorganització del centre, ratio del nombre d'alumnes, organització de l'à[illegible] de l'aula, etc.

4 Dificultats relacionades amb la motivació de l'alumnat.

Pot passar que les activitats proposades pel professorat als alumnes siguin potencialment significatives i que la metodologia sigui l'adequada, però que l'alumne no estigui en condicions de fer-les seves perquè no està motivat. Aquest tipus de dificultat està relacionada amb l'autoestima i la història escolar de l'alumnat.

5 Dificultats relacionades amb les discapacitats o baix nivell d'abstracció dels alumnes

En el cas que aconseguíssim posar l'alumne en situació de desequilibri a causa d'un conflicte cognitiu, pot passar que no estigui en condicions de tornar a la situació d'equilibri perquè el seu nivell d'abstracció o bé algun tipus de discapacitat impedeixen aprendre el contingut . Aquest tipus de dificultat s'ha de resoldre amb una adaptació dels continguts i de la metodologia a la situació de cada alumne.

6 Dificultats relacionades amb la falta de domini dels continguts anteriors.

Pot passar que l'alumne, malgrat tenir un nivell evolutiu escaient, no té els coneixements previs necessaris per poder aprendre el nou contingut, i, per tant, la distància entre el nou continugut i allò que sap l'alumne no és l'adequada. L'avaluació inicial pot detectar els continguts previs que cal assegurar per aconseguir l'aprenentage del contingut previst.

7. Dificultats relacionades amb els significats dels objectes personals dels alumnes

També pot passar que els significats dels objectes personals desenvolupats pels alumnes incloguin pràctiques que siguin considerades un entrebanc per la institució, que no permeten tornar a la situació d'equilibri. Aquesta dificultat es pot resoldre utilitzant una avaluació formadora que permeti superar aquests entrebancs fent les situacions prou complexes perquè l'alumne sigui conscient que determinades pràctiques només són vàlides en determinats contextos.

Aquests set grups de dificultats estan connectades entre si i es reforcen mútuament, produint bàsicament dos tipus d'efecte: 1) pràctiques errònies que es poden considerar entrebancs (combinació bàsicament de les dificultats 1, 2, 3 i 7) i 2) falta de significat personal (produït per la combinació de les dificultats 1 i 6) o per les actituds afectives cap a les matemàtiques (combinació de les dificultats 4 i 5).

2.3 Errors i entrebancs observats en el predisseny de la unitat i en la seva implementació

En els cursos 96-97 i 97-98 vam començar el predisseny de la unitat i vam observar molts errors i entrebancs, molts d'ells ja documentats en d'altres investigacions, que vam tenir molt en compte en l'elaboració definitiva de la unitat. Els principals errors i entrebancs que vam detectar en el predisseny van aparèixer també en l'experimentació definitiva, encara que en percentatges diferents. En el desenvolupament del 3r objectiu, documentem els errors i entrebancs observats en la implementació de la unitat, per la qual cosa no ho farem aquí.

3 Subobjectiu 2.3. Anàlisi de l'ensenyament tradicional anterior a la LOGSE.

3.1 Itinerari tradicional: les derivades després dels límits

Si analitzem la forma en què s'han estat ensenyant les derivades a l'ensenyament secundari abans del batxillerat LOGSE, veiem que la majoria del professorat prioritzava el càlcul de funcions derivades pel mètodo indirecte. És a dir, es tracta que l'alumne aprengui la taula següent:

REGLES DE DERIVACIÓ	
Funció	**Funció derivada**
$cf(x)$	$(cf)'(x) = cf'(x)$
$(f+g)(x)$	$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
$(f-g)(x)$	$(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x)$
$(f\cdot g)(x)$	$(f\cdot g)'(x) = f'(x)\cdot g(x) + g'(x)\cdot f(x)$
$\frac{f}{g}(x)$	$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)\cdot g(x) - g'(x)\cdot f(x)}{(g(x))^2}$
$(g\circ f)(x)$	$(g\circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$
DERIVADA DE LES FUNCIONS ELEMENTALS	
Funció	**Funció derivada**
$f(x) = b$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^k$ amb $k \in \mathbb{R}$	$f'(x) = kx^{k-1}$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \cdot \ln a$
$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = \log_a x$	$f'(x) = \frac{\log_a e}{x}$ o bé $f'(x) = \frac{1}{x\ln a}$

$f(x) = \sqrt[n]{x}$	$f'(x) = \dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$

I que sàpiga aplicar-la, juntament amb altres tècniques com la derivació logarítmica, per calcular la derivada d'una funció. Fins i tot no és estrany que el professor presenti aquesta taula als alumnes sense cap tipus de justificació. Unes vegades per falta de temps "aquest curs porto la programació molt endarrerida", etc. Però en alguns casos, fins i tot és per convenciment "allò important és que aprenguin a derivar, després ja entendran els conceptes. Quan jo vaig estudiar el batxillerat sabia derivar perfectament, però no vaig entendre el concepte fins que estava a la universitat". Si preguntem als alumnes que fa temps que no estudien derivades, què els suggereix aquesta paraula, ens trobarem amb respostes que tenen a veure, principalment, amb el càlcul indirecte de funcions derivades a partir de la taula anterior: "si, ... s'utilitzen unes taules..... la derivada d'una suma és la suma de derivades...", "hi ha unes taules on hi ha el sinus, el cosinus,.........., potències i coses així", "hi ha que multiplicar per l'exponent i restar-li 1.. o quelcom per l'estil", etc.

Aquesta forma d'ensenyar les derivades connecta amb una manera d'ensenyar les matemàtiques en què s'assigna una importància fonamental a la memorització de conceptes i tècniques, sense preocupar-se que l'alumne comprengui les estructures que justifiquen aquestes regles. D'aquesta manera se fomenta una visió de les matemàtiques de tipus mecànic; és a dir, l'alumne considera que allò que és essencial en les matemàtiques és la utilització mecànica d'una sèrie de procediments algorítmics, executats amb una certa rapidesa. Aquesta visió de les matemàtiques pot produir, entre altres, la creença que les matemàtiques no tenen per què tenir sentit. També pot dificultar la comprensió del tema en determinats alumnes, mentre que en d'altres pot produir una sensació de domini del tema perquè, si saben les regles i les apliquen correctament, obtenen resultats correctes. Fins i tot podem trobar resistència en alguns alumnes quan es vol donar significat a la derivada i s'intenten explicar els conceptes subjacents a les regles de derivació (per exemple si són repetidors i dominen la tècnica indirecta de derivació). Normalment els alumnes que han treballat d'aquesta forma el tema de les derivades, si bé saben calcular-ne, són incapaços de donar un significat als continguts del tema. Aquesta manera tradicional d'ensenyar el càlcul diferencial, que ja l'hem comentat en el capítol 1, segueix una estructura jeràrquica i defineix la derivada d'una funció com una aplicació del concepte de límit que s'ha estudiat abans. Aquesta estructura lògica permet un desenvolupament deductiu i formal del càlcul diferencial, però no segueix la gènesi històrica dels conceptes implicats, ja que el concepte de derivada ha precedit als conceptes de límit i continuïtat d'una funció.

3.2 Itinerari alternatiu. Les derivades abans dels límits

Fer dependre la definició de derivada de la definició i del càlcul de límits presenta inconvenients, tal com han posat de manifest algunes investigacions en didàctica de les matemàtiques que s'han ocupat dels obstacles epistemològics relatius al concepte de límit. Aquest punt de vista va portar a un altre itinerari en què s'introdueix el concepte de derivada com una primera introducció al límit. Aquest itinerari segueix més fidelment el desenvolupament històric perquè es basa en el mètode que utilitzava Newton per calcular velocitats instantànies i en el càlcul del pendent de la recta tangent en un punt a partir dels pendents de les rectes secants, quan aquestes s'aproximen a la recta tangent. Aquest mètode té l'inconvenient de partir d'una situació de càlcul de límit força difícil: la de límits de quocients en què tant el numerador com el denominador tendeixen a zero. Ara bé, presenta l'avantatge que el límit apareix com un instrument que permet resoldre problemes, com és, per exemple, el càlcul de la velocitat instantània.

Aquest itinerari ha tingut ressò en el món anglosaxó. A Catalunya fou introduït pel Grup Zero (1980, 1982a i 1984). Els llibres de text d'aquest grup presentaven un material per a alumnes que no necessàriament havien d'haver estudiat els conceptes de límit i continuïtat. De fet, es considerava que l'estudi del concepte de derivada podia servir per a introduir el concepte de límit d'una funció en un punt.

Les propostes que no introdueixen la derivada com un cas particular del límit utilitzen simultàniament dos camins per introduir la derivada d'una funció en un punt: el pendent de la tangent geomètrica com a límit dels pendents de les rectes secants i la determinació de taxes instantànies de variació. El motiu d'utilitzar conjuntament la taxa instantània i el pendent de la recta tangent és que cada un d'aquests conceptes per separat presenta dificultats als alumnes i es considera, implícitament, que la presentació conjunta dels aspectes gràfics, numèrics i algèbrics facilita la superació d'aquestes dificultats (malgrat que hi ha estudis que consideren convenient la seva presentació per separat (Trigueros i Alvarez 1995)).

La introducció de la derivada només a partir del pendent de la recta tangent presenta dos tipus de problemes. D'una banda, no és fàcil que l'alumne entengui que el límit dels pendents de les secants és el pendent de la recta tangent perquè topen amb l'obstacle relacionat amb el límit que abans hem comentat: el fracàs a l'hora de relacionar els aspectes geomètrics amb els numèrics. De l'altra banda, aquesta manera d'introduir la derivada amaga un aspecte fonamental de la derivada, perquè no és fàcil veure una connexió immediata entre una tangent geomètrica que és un objecte estàtic, i el dinamisme d'una derivada que descriu el canvi relatiu d'una magnitud amb respecte a una altra.

La introducció de la derivada primer a partir de la determinació de la taxa de canvi instantània completada després amb la interpretació geomètrica, presenta l'avantatge que segueix el procés històric que va portar al càlcul diferencial, el qual primer va començar desenvolupant de manera intuïtiva la noció de taxa de canvi instantània per després passar a la seva formalització precisant els conceptes de límit, continuïtat i convergència. També presenta l'avantatge que: "la determinació de canvis d'una magnitud que depèn d'una segona, en relació amb els canvis d'aquesta segona magnitud", s'usa en la vida diària com una categoria de pensament matemàtic que no presenta reflexió, però que, malgrat tot, funciona. És a dir, en la vida quotidiana es determinen raons de canvi de processos, però això no es fa en forma de procediment matemàtic abstracte. Aquesta manera d'introduir el càlcul diferencial té l'inconvenient de partir d'una situació de càlcul de límit força difícil: la de límits de quocients en els que tant el numerador com el denominador tendeixen a zero.

Hi ha diferents propostes de com introduir la taxa instantània a partir de les experiències de la vida quotidiana. Per exemple, Wenzelburger (1993a i 1993b) proposa una introducció al càlcul diferencial que no comença amb límits ni amb una definició formal de continuïtat sinó que comença amb un apropament intuïtiu al concepte fonamental de la matemàtica dels canvis. Ara bé, la proposta que més predicament ha tingut ha estat la d'introduir la taxa instantània a partir de la velocitat instantània.

No hi ha gaires estudis que hagin avaluat i comparat a Catalunya l'itinerari tradicional amb el del grup Zero. Azcárate (1990), en la seva tesi doctoral, presenta els resultats d'una investigació que pretenia avaluar el procés d'aprenentatge de tres classes de 2n de BUP que havien seguit el material curricular del Grup Zero "Introducció a les derivades" (1980) amb la metodologia de classe implicat en ell; els professors de les classes eren membres del Grup Zero que havien participat en la redacció, i posterior revisió del material en qüestió, però sense comparar-lo amb l'itinerari clàssic. D'altra banda, un estudi (Casadevall, 1990)[1] en què es comparen els dos itineraris anteriors arriba a la conclusió que els alumnes que han seguit el segon itinerari responen millor a preguntes contextualitzades en què han d'utilitzar el concepte de derivada d'una funció en un punt.

3.3 Altres itineraris alternatius: la funció derivada abans que la derivada d'una funció en un punt.

A més dels dos itineraris anteriors, n'hi ha d'altres que proposen treballar primer la funció derivada, com la funció que ens dóna el pendent d'una corba, abans de treballar a fons el concepte de derivada d'una funció en un punt. Des d'un punt de vista lògic, aquesta proposta no és gaire rigorosa perquè la funció derivada es defineix com la funció que a cada punt li assigna la derivada de la funció en aquest punt. Ara bé, si la funció derivada es treballa com la funció que ens dóna el pendent de la corba en cada punt, és possible introduir la funció derivada de manera intuïtiva, evitant la utilització del límit, i, per tant, sense necessitat de donar una definició rigorosa de la derivada en un punt com el límit del quocient d'increments. La definició de derivada d'una funció en un punt es deixa per a situacions posteriors que exigeixen més rigor, o bé com a activitat d'ampliació. Un exemple de proposta d'aquest tipus (Azcárate, Bosch, Casadevall i Caselles 1996) és la següent:

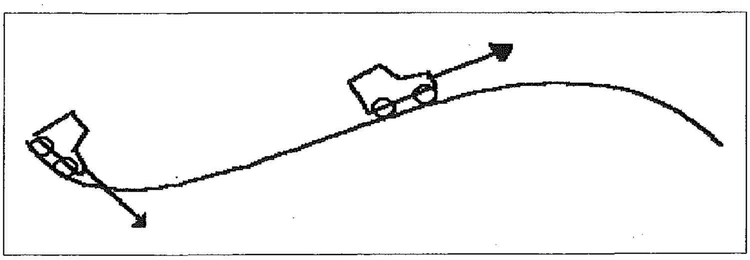
- Treball previ amb els conceptes bàsics del precàlcul: velocitat mitjana, pendent d'una recta i taxa mitjana de variació (que inclou el càlcul del pendent d'una corba utilitzant un aparell mesura-pendents).
- Presentar situacions en què té sentit calcular el pendent de la corba en un punt utilitzant l'aparell mesura-pendents (per exemple el consum d'aigua calenta en un

hotel en cada instant (s'ha de procurar que els dos eixos estiguin graduats de la mateixa manera perquè el pendent coincideixi amb la derivada en el punt).

- Dibuixar el gràfic de la funció derivada a partir de la taula de valors obtinguda amb l'aparell mesura-pendents.
- El problema de trobar el pendent de la corba en un punt a partir de mesurar el pendent de la recta tangent s'aprofita per plantejar quina és la recta que ens dóna el pendent en un punt d'una corba, és a dir la recta tangent.
- Visualització de la recta tangent com la que resulta quan ampliem corbes suaus.
- Trobar el pendent de la corba en un punt com el pendent de la recta que apareix en fer una ampliació de la gràfica centrada en aquest punt (zoom).
- Observar que hi ha corbes que no són suaus en un punt (per molt que s'ampliïn, mai apareix una línia recta).
- Provocar una reflexió sobre el fet que les gràfiques poden enganyar i que convé precisar la idea d'ampliació d'una funció en un punt per poder establir de manera rigorosa el pendent d'una funció en un punt.

3.4 La funció derivada abans que la derivada d'una funció en un punt: pendent d'una corba segons un increment fix

Aquesta proposta (Tall 1985) d'itinerari comparteix amb l'anterior la introducció de la funció derivada abans de la derivada d'una funció en un punt, però sense evitar el pas al límit. Aquest itinerari parteix de la idea intuïtiva, que tenen els alumnes sobre el pendent d'una corba, per plantejar el problema següent: Quan anem amb cotxe, quin pendent té la carretera en cada punt de la trajectòria?



Podem considerar que el pendent de la carretera és la tangent trigonomètrica de l'angle que forma aquesta recta amb l'horitzontal. Aquest pendent varia al llarg de la carretera però també depèn del tipus de cotxe, és a dir, de la longitud entre les rodes. Aquest exemple suggereix una manera de calcular el pendent d'una corba considerant un cotxe imaginari que es mou per la corba. Si la longitud entre rodes és h, podem determinar el pendent de la corba en un punt x qualsevol, segons aquest increment h, substituint h a la fórmula $pf_h(x) = \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Aquesta funció, que s'anomena funció gradient o funció pendent de la funció $f(x)$ segons un increment h, és quasi la funció derivada, si fem que la distància entre les rodes sigui cada cop més petita. En plantejar la possibilitat que la distància entre les rodes dels cotxes sigui cada cop més petita ($h \to 0$) obtenim una família de funcions que s'aproximen a una altra que és la funció derivada.

4 subobjectiu 2.4. Anàlisi del currículum del batxillerat LOGSE

El 13-3-96 es va publicar en el Diari Oficial de la Generalitat (a partir d'ara DOG núm 2181) el primer nivell de concreció del currículum de les tres modalitats del batxillerat LOGSE: de ciències de la naturalesa i de la salut, de tecnologia i ciències socials. El currículum de les modalitats de ciències de la naturalesa i de la salut i el de tecnologia és el mateix. En aquest DOG, per a cada modalitat, podem trobar una introducció, uns objectius generals, uns continguts (classificats en: 1) fets, conceptes i sistemes conceptuals, 2) procediments i 3) valors, normes i actituds) i uns objectius terminals. La introducció és gairebé igual també per a la modalitat de ciències socials, i els objectius generals són els mateixos.

En la introducció hi ha unes consideracions de tipus social de les quals volem remarcar les següents:

"(..) centrar els objectius de l'aprenentatge dels alumnes a generar capacitats per aprendre, més que a dotar-los de continguts estàtics propis d'èpoques més monòtones en l'àmbit social i productiu en particular, i en l'entorn cultural en general." (DOG núm 2181, pàg. 2454).

"(..) Per l'altre, els currículums de batxillerat es dissenyen pensant en una ampliació de la base social a la qual van adreçats i tendeixen a retardar el seu tractament més aprofundit en els currículums post-secundària, ja sigui universitaris o professionalitzadors."(DOG núm 2181, pàg. 2454).

A continuació segueixen unes consideracions sobre la Matemàtica com una ciència fonamentalment procedimental, i com a instrument per a les altres ciències:

"En aquest sentit, els continguts que es detallen en aquest currículum pretenen servir per dotar l'alumnat d'un instrument imprescindible per introduir-se de manera autònoma i creativa en el món de la ciència i la tecnologia" (DOG núm 2181, pàg. 2454).

A continuació fa una reflexió sobre el fet que considerar les matemàtiques com a procedimental no ens ha de fer oblidar que l'aprenentatge ha de ser significatiu, i que per tant, a més d'explicar els procediments, cal explicar els conceptes i principis que hi ha a sota d'aquests procediments:

"No cal dir que, tot i insistir en el caràcter bàsicament procedimental, hi ha un seguit de conceptes i principis que s'han d'assolir per poder plantejar-se un aprenentatge significatiu d'aquells procediments" (DOG núm 2181, pàg. 2454).

Segueix amb unes consideracions sobre els continguts del batxillerat i la seva relació amb els continguts de l'ESO en les quals destaca que la principal novetat del currículum de batxillerat és la introducció de l'anàlisi infinitesimal i del càlcul vectorial, que s'han de tractar d'una manera adequada a l'edat i sense oblidar la història de cadascuna de les grans àrees de la matemàtica. A continuació fa una referència metodològica en què insisteix en l'ús de diferents llenguatges i en els processos inductius:

"Pel que fa al material de suport i als llenguatges emprats s'ha d'insistir en l'ús de tots els recursos a l'abast, tot admetent que la diversificació de llenguatges i suports facilita una adaptació a les característiques diverses dels alumnes. No cal recordar que el caràcter procedimental, a què repetidament s'ha fet referència, condicionarà unes activitats d'aprenentatge molt basades en l'acció de l'alumnat, i que per a les activitats d'aprenentatge adreçades bàsicament a conceptes i principis caldrà tenir present els processos inductius i deductius que facilitaran un tractament adequat d'aquests continguts"(DOG núm 2181, pàg. 2455).

La nostra conclusió de la lectura de les consideracions de la introducció i dels 11 objectius generals del DOG, és que aquestes permeten una lectura del càlcul diferencial menys formalista i més inductiva que la que tradicionalment es tenia en el BUP. Una visió en què la traducció entre diferents formes de representació (llenguatges), els aspectes històrics i l'ús de recursos informàtics, entre d'altres aspectes, hi juguen un paper important.

En relació als continguts i objectius terminals, començarem amb els continguts de fets, conceptes i sistemes conceptuals. Entre aquests continguts hi trobem el contingut que ha estat el nucli de la nostra investigació:

"4.6 La derivada d'una funció en un punt. La funció derivada" (DOG núm 2181, pàg. 2455).

Per interpretar aquest contingut, primer de tot cal fixar-se en tots els continguts de l'apartat 4.

"4 Funció real

4.1 L'estudi global d'una funció: domini, recorregut, fórmula, taula i gràfic d'una funció real.

4.2 Polinomi amb una indeterminada. Grau d'un polinomi. Arrel d'un polinomi. El Teorema del residu.

4.3 Les funcions polinòmiques, racionals, trigonomètriques, exponencials i logarítmiques.

4.4 L'estudi local d'una funció: funció contínua, funció creixent, funció decreixent, asímptota horitzontal, obliqua i vertical d'una funció.

4.5 Punts de tall amb els eixos de la gràfica d'una funció, punt de discontinuïtat, extrem absolut i extrem relatiu d'una funció.

4.6 La derivada d'una funció en un punt. La funció derivada.

4.7 La integral d'una funció en un interval. Primitiva d'una funció. La Regla *de Barrow.*

4.8 *El càlcul infinitesimal i les funcions al llarg de la història."* (DOG núm 2181, pàg. 2455).

A continuació, cal tenir en compte els continguts de procediments que poden tenir relació amb aquest apartat. Són els següents:

"3 Reconeixement, descripció, estudi i representació gràfica de funcions reals.

3.1 *Reconeixement de funcions en situacions pràctiques. Identificació dels elements que defineixen una funció real, des d'una òptica global: domini, recorregut, fórmula, gràfic i taula de valors.*

3.2 *Estudi del signe, continuïtat, monotonia d'una funció en un punt i estudi del seu comportament a l'infinit. Càlcul del punt de tall amb els eixos de la gràfica d'una funció.*

3.3 *Aplicació de la derivada d'una funció al seu estudi local: creixement, decreixement i extrems absoluts i relatius.*

3.4 *Càlcul de l'equació de la recta tangent a la gràfica d'una funció en un punt.*

3.5 *Estudi global i local de les funcions reals, utilitzant eines informàtiques si s'escau.*

4 Càlcul amb funcions polinòmiques, racionals, trigonomètriques, exponencials i logarítmiques.

4.1 *Operacions amb polinomis. El binomi de Newton. Factorització de polinomis.*

4.2 *Operacions amb funcions. Comportament de les funcions respecte de les operacions.*

4.3 *Càlcul de la derivada d'una funció en un punt. Càlcul de la funció derivada d'una funció.*

4.4 *Càlcul de la integral d'una funció en un interval. Càlcul de primitives.*

8 Resolució de problemes

8.1 *Selecció dels conceptes, sistemes conceptuals i procediments a emprar en la resolució de problemes de topografia bàsica (resolució de triangles), d'optimització funcional, de geometria analítica (afí i mètrica) i de mesura de recintes plans.*

8.2 *Discussió de l'existència de possibles solucions.*

8.3 *Plantejament del problema i obtenció de les possibles solucions al problema.*

8.4 *Comprovació, anàlisi de la validesa i interpretació pràctica de les solucions obtingudes a partir de les condicions inicials del problema."* (DOG núm 2181, pàg. 2456).

Per últim, convé tenir en compte els continguts de valors, normes i actituds i, molt especialment, els objectius terminals 9- 22:

"9 *Entendre i aplicar amb soltesa els conceptes relacionats amb les funcions i determinar el corresponent domini i recorregut.*

10 *Compondre i descompondre funcions emprant les operacions bàsiques, en especial amb la composició de funcions. En particular, dominar l'ús de la calculadora i utilitzar programes de representació gràfica per a càlculs amb funcions compostes.*

11 *Interpretar i reconèixer a la pràctica el concepte de funció contínua en un punt. Reconèixer i calcular els tipus de discontinuïtat més usuals. Calcular asímptotes verticals. Justificar de manera intuïtiva i aplicar algun procediment de càlcul aproximat d'arrels de funcions.*

12 *Interpretar i reconèixer a la pràctica el concepte de funció creixent i funció decreixent en un punt. Calcular el creixement o decreixement d'una funció en un punt, els intervals de creixement o decreixement, i interpretar i establir l'existència d'extrems absoluts i relatius d'una funció.*

13 *Interpretar el concepte d'asímptota obliqua i horitzontal i calcular-les per les funcions elementals i les funcions compostes senzilles.*

14 *Comprendre el concepte i calcular la derivada d'una funció en un punt. Relacionar-la amb la tangent a la corba en el punt corresponent i emprar-la per al càlcul de rectes tangents a corbes en punts determinats.*

15 *Comprendre el concepte i calcular funcions derivades. Calcular les derivades successives d'una funció i relacionar el seu signe en un punt amb el creixement, decreixement i existència d'extrem relatiu de la funció en aquest punt.*

16 *Generar el gràfic d'una funció a partir de l'estudi analític del domini, continuïtat, arrels, asímptotes, derivabilitat i extrems relatius de la funció.*

17 *Matematitzar i resoldre situacions pràctiques d'optimització, emprant els procediments bàsics de l'anàlisi funcional.*

18 *Reconèixer i aplicar a situacions pràctiques les funcions polinòmiques i racionals. Tenir soltesa amb el càlcul amb polinomis i fraccions algebraiques elementals i aplicar tots els procediments d'estudi de les funcions als models polinòmic i racional.*

19 *Reconèixer i aplicar les funcions trigonomètriques a l'estudi de diversos fenòmens científics o tecnològics. Tenir soltesa en el càlcul amb funcions trigonomètriques directes i aplicar tots els procediments d'estudi de les funcions a les funcions trigonomètriques elementals.*

20 *Reconèixer i aplicar la funció exponencial a l'estudi de fenòmens científics o tecnològics, en particular en els processos de creixement compost i continu. Aplicar tots els procediments d'estudi de les funcions a la funció exponencial.*

21 *Reconèixer i aplicar la funció logarítmica a l'estudi de fenòmens científics o tecnològics. Interpretar la funció logarítmica com la funció recíproca de la funció exponencial, deduir-ne les propietats corresponents, conèixer el seu comportament respecte a les operacions i aplicar tots els procediments d'estudi de les funcions a la funció logarítmica.*

22 *Reconèixer les situacions que precisen del càlcul integral per la seva matematització. Conèixer i aplicar amb soltesa la relació entre la integral d'una funció i el càlcul d'àrees planes, aproximant àrees amb el full de càlcul si s'escau.* "(DOG núm 2181, pàgs. 2456-7).

A partir de la lectura del DOG, podem fer la distribució de l'anàlisi del batxillerat en cinc blocs:

1 Funcions i famílies de funcions.
2 Continuïtat i límits.
3 Derivades.
4 Aplicacions de les derivades (optimització i representació gràfica)
5 Integrals.

En relació al tercer bloc, que és el nucli d'aquesta investigació, hi ha una pregunta que sorgeix immediatament. Quines són les funcions que ha de saber derivar l'alumne?. Nosaltres creiem que la resposta és: l'alumne ha de saber derivar les funcions que ha treballat. És a dir, ha de saber derivar les funcions polinòmiques, les racionals, les trigonomètriques, les exponencials i les logarítmiques, així com les operacions senzilles d'aquestes famílies de funcions (suma, resta, producte, divisió i composició).

Per trobar les derivades de les funcions trigonomètriques n'hi ha prou de calcular directament la derivada del sinus o del cosinus, perquè les altres es poden calcular aplicant les regles de derivació. De la mateixa manera, per trobar les derivades de les funcions exponencials i logarítmiques basta calcular directament la derivada de $f(x) = \ln x$. Ara bé; com s'ha de justificar als alumnes que la derivada de la funció sinus és el cosinus i que la derivada de $f(x) = \ln x$ és $f'(x) = 1/x$? La resposta que sembla més clara és que, si les hem de calcular directament, ho hem de fer a partir del càlcul dels límits següents:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{sen(x+h) - sen(x)}{h} \quad \text{i} \quad f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h}$$

Aquesta resposta té les següents implicacions curriculars:

1) S'han de treballar els límits abans que les derivades.
2) S'ha de treballar la indeterminació 1^{∞}
2) S'ha de treballar abans la trigonometria perquè en el càlcul de la funció derivada del sinus s'utilitzen les fórmules trigonomètriques que converteixen restes en productes

$$senA - senB = 2\cos\frac{A+B}{2}\cdot sen\frac{A-B}{2} \qquad (\text{amb } A = x + h \text{ y } B = x)$$

Ara bé; si busquem què diu el currículum en relació a la trigonometria, tenim:

"<u>*Fets, conceptes i sistemes conceptuals*</u>

3.3 La relació entre les raons trigonomètriques amb la suma i la resta d'angles.

Procediments

2.4 Justificació i aplicació de les relacions de les raons trigonomètriques amb la suma i la diferència d'angles.

Objectius terminals

8 Interpretar i treballar amb les raons trigonomètriques d'angles de més de 90º. Conèixer el comportament de les raons trigonomètriques amb la suma i la resta d'angles i aplicar-ho al treball amb expressions trigonomètriques senzilles." (DOG núm 2181, pàgs. 2455-6).

La conclusió és força clara: optar per calcular la derivada del sinus directament d'una manera rigorosa implica ampliar considerablement el currículum de trigonometria del batxillerat.

Si analitzem els continguts i objectius terminals referents a l'anàlisi comentats anteriorment, observem que en cap lloc parla de límit. Només es pot argumentar, si es vol contemplar aquest contingut en un desplegament del currículum, que és necessari per a l'estudi de la continuïtat i per introduir el concepte de derivada en un punt. Ara bé, fins i tot si acceptem que cal treballar el concepte de límit i el càlcul d'alguna indeterminació, no està clar que calgui incloure la indeterminació 1^{∞}.

Aquestes consideracions posen de manifest dues qüestions importants a l'hora de fer la concreció del segon i tercer nivell del currículum: 1) Com s'han de calcular les derivades de la funció sinus i de la funció $f(x) = \ln x$? i 2) Quines implicacions té en la modulació dels continguts la manera de calcular la derivada d'aquestes dues funcions?

5 Subobjectiu 2.5. Anàlisi del camp de restriccions que van afectar l'elaboració de la unitat

5.1 Restriccions causades per la hipòtesi H3.1

La principal restricció fou l'adopció de la hipòtesi H3.1, que ens va portar a dissenyar les activitats, tenint en compte les hipòtesis H1.1 i H1.1.1. La hipòtesi H1.1.1 és un procés que es pot concretar en diferents tècniques de càlcul de la funció derivada. En el subobjectiu 1.3 hem mostrat com el procés descrit en H1.1.1 es concreta en quatre tècniques diferents, tres de les quals utilitzen representacions gràfiques de $f(x)$ i de $f'(x)$. Aplicar la tècnica tradicional (tècnica 1) a la funció sinus implicava ampliar considerablement el currículum de trigonometria del batxillerat, mentre que aplicar-la a la funció $f(x) = \ln x$ implicava treballar prèviament la indeterminació 1^{∞}. Aquest fet ens va portar a renunciar a la tècnica tradicional en aquests dos casos i a optar per la introducció de tècniques que permetessin calcular funcions derivades sense calcular límits (tècniques 2, 3 i 4 comentades en el subobjectiu 1.3). Per tant:

Restricció 1: L'elaboració de la unitat s'havia de sotmetre a la restricció que l'alumnat pogués entendre l'esquema següent i pogués utilitzar les tècniques que se'n deriven (entre d'altres, les tècniques 2,3 i 4 del subobjectiu 1.3).

Com es calcula $f'(x)$?	Directament	1) Utilitzant límits Calculant $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. 2) Gràficament 1) Trobar una condició que compleixen totes les rectes tangents 2) Trobar $f'(x)$ a partir de la condició anterior 3) Aproximadament 1) Dibuixar la gràfica de $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ per a un valor de h molt petit 2) Considerar que $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \simeq \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$ 3) Trobar l'expressió de $f'(x)$ a partir de la gràfica de $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$
	Indirectament	4) Utilitzant les regles de derivació, la derivació logarítmica, etc

L'esquema anterior no pot viure aïlladament, sinó que, perquè sigui comprensible per als alumnes cal connectar-lo amb un sistema de tècniques que permetin calcular la derivada d'una funció en un punt, així com amb un sistema de no-ostensius que el justifiquin i el facin significatiu. La necessitat de desenvolupar prèviament un sistema de tècniques per calcular la derivada en un punt i la connexió amb el càlcul de la derivada d'una funció ens va portar a considerar les dues restriccions següents:

Restricció 2: L'elaboració de la unitat s'havia de sotmetre a la restricció que l'alumnat pogués entendre l'esquema següent i pogués utilitzar les tècniques que se'n deriven.

Com es calcula $f'(a)$?

Directament

1) Utilitzant límits

Calculant $f'(a) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

2) Gràficament

Calculant el pendent de la recta tangent

3) Aproximadament

3.1) Calculant $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

per a un valor de h molt petit

3.2) Considerar que

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \simeq \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$$

Indirectament

4) Utilitzant la funció derivada

1) Calcular $f'(x)$

2) substituir x per a

Restricció 3: L'elaboració de la unitat s'havia de sotmetre a la restricció que l'alumnat pogués entendre l'esquema següent, que permet fer la connexió entre el sistema de tècniques disponibles per a calcular la derivada en un punt, amb el sistema de tècniques disponibles per a calcular la funció derivada.

Com es calcula $f'(a)$?

- Directament
  - 1) Utilitzant límits
    - Calculant $f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$
  - 2) Gràficament
    - Calculant el pendent de la recta tangent
  - 3) Aproximadament
    - 3.1) Calculant $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ per a un valor de h molt petit
    - 3.2) Considerar que $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \approx \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$
- Indirectament
  - 4) Utilitzant la funció derivada
    - 1) Calcular $f'(x)$ → Com es calcula $f'(x)$?
    - 2) substituir x per a

Com es calcula $f'(x)$?

- Directament
  - 1) Utilitzant límits
    - Calculant $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.
  - 2) Gràficament
    - 1) Trobar una condició que compleixen totes les rectes tangents
    - 2) Trobar $f'(x)$ a partir de la condició anterior
  - 3) Aproximadament
    - 1) Dibuixar la gràfica de $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ per a un valor de h molt petit
    - 2) Considerar que $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \approx \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$
    - 3) Trobar l'expressió de $f'(x)$ a partir de la gràfica de $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$
- Indirectament
  - 4) Utilitzant les regles de derivació, la derivació logarítmica, etc

La utilització de les tècniques per a calcular la funció derivada en un punt i la funció derivada, perquè siguin comprensibles pels alumnes, necessiten un sistema de no-ostensius complex (pendent, taxa mitjana de variació, recta tangent, derivada en un punt, funció derivada, etc) així com un sistema d'ostensius associats. Aquest sistema de no-ostensius i els ostensius associats ha d'estar disponible per ser activat durant la utilització d'aquestes tècniques. Aquest fet ens va portar a considerar la restricció següent:

Restricció 4: La unitat (en especial la primera part) havia de contemplar activitats que propiciessin l'emergència del sistema de no ostensius així com el sistema d'ostensius associats, que fa comprensible el sistema de tècniques per al càlcul de la derivada en un punt i de la funció derivada descrit en la restricció 3.

Després d'analitzar les diferents línies d'investigació en didàctica de les matemàtiques que hem exposat en el subobjectiu 1.1, vam arribar a la conclusió que els constructes "significat d'un objecte institucional per a un subjecte des del punt de vista de la institució" de Godino i Batanero (1994), i la "d'objecte mental" de Puig (1997) resulten molt operatives per a dissenyar unitats didàctiques i per avaluar-ne la implementació. En l'elaboració de la unitat hem optat bàsicament pel marc teòric que proposa Godino i Batanero (1994) , de manera que:

Restricció 5: L'instrument bàsic que hem utilitzat per dissenyar la unitat i per avaluar l'evolució del significat personal dels alumnes com a resultat de la seva implementació ha estat el constructe <<*Significat d'un objecte institucional X per a un alumne des del punt de vista de la institució escolar "classe de matemàtiques de 3r de BUP/1r de batxillerat"*>> .

Una restricció de caire més general que també ens vam autoimposar fou mantenir el màxim de coherència amb la hipòtesi general de partida de la nostra investigació (H1). Això volia dir entre d'altres coses que:

Restricció 6: A l'hora d'elaborar la unitat no només tindríem en compte aspectes curriculars sinó també aspectes històrics, recursos informàtics, traduccions entre diferents formes de representació, el pensament metafòric, els processos d'abstracció i generalització, els fenòmens que organitza el concepte de derivada, diferents ritmes de treball, dificultats observades en els alumnes, etc.

5.2 Restriccions causades per la institució escolar en la qual s'havia d'implementar la unitat

La primera restricció important va ser la nostra intenció de fer l'experimentació el curs 97/98 en el context on realment es desenvolupa el procés d'instrucció, és a dir, dins una aula d'un institut. Aquesta restricció temporal venia determinada pel nostre interès a situar la nostra investigació en el marc del nou batxillerat LOGSE i no en el marc de l'antic BUP. En el moment que vam començar la nostra investigació, el Departament d'Ensenyament de la Generalitat tenia previst que en el curs 97/98 s'impartiria el primer curs del batxillerat LOGSE. Per tant:

Restricció 7: la unitat que volíem elaborar havia de formar part d'un tercer nivell de concreció del currículum del batxillerat LOGSE (1r nivell de concreció).

Aquesta restricció, juntament amb la nostra intenció de fer l'experimentació en el context on realment es desenvolupa el procés d'ensenyament-aprenentatge ens portà a:

Restricció 8: Elaborar la unitat tenint en compte que s'implantaria en les futures institucions escolars "classe de matemàtiques de1r de batxillerat de la modalitat ciències i tecnologia del curs 97/98 dels IES de Catalunya".

Una altra decisió important fou que l'investigador assumiria alhora el paper d'elaborador de la unitat i de professor dels cursos. És a dir, ens situaríem en el cas d'un investigador immers en la situació que investiga. La decisió que l'investigador elaborés i impartís la unitat oferia moltes possibilitats a l'hora d'abordar el procés d'instrucció en el lloc on es produeix. Això és així perquè la presència constant a l'aula i en la presa de decisions de l'investigador feia més fàcil la recollida de dades significatives per a la investigació. Sobretot si tenim en compte que el procés d'instrucció és interactiu i dinàmic. Ara bé, corríem el perill de fer una proposta didàctica molt personal. Per aquest motiu, la restricció que ens vam autoimposar fou:

Restricció 9: Que la valoració de la viabilitat de la proposta didàctica no la fes únicament l'investigador a posteriori sinó que hi hagués una participació d'altres investigadors i, fonamentalment, d'altres professors que impartissin la unitat abans de l'experimentació definitiva el curs 97/98 i fessin una valoració a priori de la viabilitat de la nostra proposta didàctica.

Aquesta restricció es va concretar de la manera següent:
a) La revisió a priori del director de la tesi i d'altres companys del Departament de Didàctica de les CCEE i de la Matemàtica de la UB.
b) La revisió a priori de la versió definitiva feta pels companys del Departament de Matemàtiques de l'IES Margarida Xirgu i l'experimentació del predisseny de la unitat el curs 96/97 feta per Eudald Ratera, membre d'aquest departament, que va impartir el nivell de 3r de BUP conjuntament amb el doctorand el curs 96/97.
c) La lectura "crítica" de la unitat feta per J.M. Bujosa, J.LL.Cañadilla i M. Fargas (professors de batxillerat en actiu), així com les seves aportacions a la versió definitiva i la seva experimentació tant del predisseny com de la versió definitiva de la unitat.

Les dues primeres concrecions estan determinades pel fet que la implementació s'havia de realitzar a l'IES Margarida Xirgu, mentre que la tercera està relacionada amb el fet que l'investigador va col·laborar amb aquests tres professors durant els cursos 95/96, 96/97 i 97/98 en l'elaboració dels dos llibres de batxillerat de les modalitats de matemàtiques aplicades a les ciències de la naturalesa i de tecnologia, dels dos llibres de batxillerat de la modalitat de matemàtiques aplicades a les ciències socials i de les vuit guies didàctiques corresponents. La unitat que forma el nucli d'aquesta investigació és la unitat 8 del llibre de 1r de batxillerat de la modalitat de matemàtiques aplicades a les ciències de la naturalesa i de tecnologia publicat l'any 97 per l'editorial Castellnou (ISBN 84-8287-077-7).

Un de les decisions que més vam meditar amb el director de tesi fou precisament la conveniència o no que la unitat a experimentar fos el resultat d'un treball en equip que tenia com a principal objectiu oferir un producte viable per ser utilitzat en el nou Batxillerat LOGSE. Després de valorar-la amb molta cura, vam concloure que el fet d'haver de convèncer els coautors del llibre de la consistència de la nostra unitat augmentava molt la viabilitat de la nostra proposta didàctica. També vam tenir en compte que, a més dels coautors del llibre, l'editorial encarregava a altres experts la revisió i valoració del llibre i que la Generalitat també encarregava a un altre expert una valoració del llibre a fi de decidir sobre la seva homologació. També vam considerar molt important que la investigació fos sobre una unitat que seria àmpliament utilitzada a les aules i no sobre una unitat que tindria una difusió posterior molt limitada.

La auotoimposició que la nostra proposta didàctica per introduir les derivades a 1r de batxillerat fos una unitat acceptada i assumida tant pel Departament de l'IES Margarida Xirgu com pels coautors del llibre (restriccions 5, 6 i 7) ens obligava a negociar amb ells no solament la unitat (activitats, utilització de recursos informàtics, enfocaments del tema, temporització, etc) sinó també la proposta de modulació dels continguts del batxillerat (segon nivell de concreció) en què aquesta unitat s'inclouria. És a dir,

Restricció 10: La nostra proposta d'unitat didàctica havia de ser consistent amb el 1r nivell de concreció (currículum) i s'havia d'incloure dins d'una modulació de tot el batxillerat (2n nivell de concreció).

Aquesta restricció es va concretar en la modulació següent:

- Concepte de funció real de variable real.
- Concepte de funció contínua en un punt.
- Concepte de límit d'una funció.
- Càlcul de límits de funcions.
- Determinació dels punts de discontinuïtat utilitzant el càlcul de límits.
- Pendent d'una recta.
- Variació i taxa de variació d'una funció entre dos punts.
- Velocitat mitjana.
- Relació entre la taxa de variació d'una funció entre dos punts i el pendent de la recta secant.
- Concepte de recta tangent d'una funció en un punt.
- Velocitat instantània (utilitzant la notació de límit).
- Taxa instantània de variació d'una funció en un punt o derivada d'una

funció en un punt (utilitzant la notació de límit).

- Relació entre la derivada d'una funció en un punt i el pendent de la recta tangent.
- Càlcul de la derivada en un punt utilitzant diferents tècniques.
- Funció derivada.
- Càlcul de funcions derivades utilitzant diferents tècniques.
- Aplicacions de la derivada. Problemes de màxims i mínims.
- Representació gràfica de funcions.

Aquesta proposta significava acceptar l'itinerari tradicional, és a dir, estudiar els límits i la continuïtat de les funcions abans de treballar el concepte de derivada, amb la important novetat que es treballava primer la continuïtat i el límit emergia com una eina per estudiar-la, per després seguir l'itinerari del grup Zero, utilitzant la notació de límits i el càlcul d'indeterminacions que ja havien treballat els alumnes.

6 Subobjectiu 2.6: Aplicació del constructe <<significat a priori d'un objecte institucional *X* per a un alumne des del punt de vista de la institució "classe de matemàtiques modalitat de ciències de la naturalesa i de tecnologia de 1r de Batxillerat LOGSE / 3r de BUP ">> al contingut derivada.

6.1 Significats personals des del punt de vista de la institució classe de matemàtiques

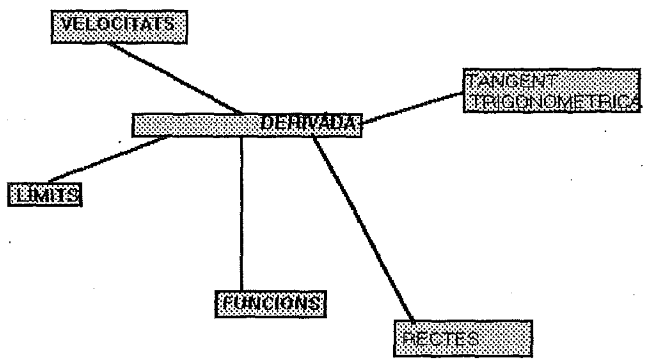
Tal com hem exposat en el subobjectiu 1.1 en la didàctica de les matemàtiques dels últims anys existeix una gamma de línies d'investigació crítiques amb el cognitivisme, estimulades bàsicament per la darrera filosofia de Wittgenstein (1983). L'anticognitivisme posa en qüestió la noció de "representació mental interna". Primer perquè la noció de representació interna ja és per si mateixa problemàtica, i, segon, pel problema de la circularitat que apareix si l'acceptem, ja que les representacions internes s'infereixen a partir de les diverses pràctiques de les persones, les quals són explicades a partir de representacions internes. Un altre problema que també assenyala l'anticognitivisme és que l'adopció d'una perspectiva cognitiva comporta que les representacions se separen de les pràctiques en què s'utilitzen i es contemplen com a entitats estàtiques que els alumnes porten amb ells.

Les posicions anticognitivistes en la didàctica de les matemàtiques s'oposen a les perspectives que agafen com a objecte primari d'investigació els processos de construcció i adquisició de determinats conceptes matemàtics, les quals assumeixen, de manera explícita o implícita, que els conceptes són construïts pels alumnes a través de la seva experiència a l'aula i que els conceptes que construeix l'alumne formen part d'esquemes que estan organitzats en forma de xarxa. Si bé nosaltres estem d'acord que les perspectives conceptualistes presenten moltes limitacions, creiem que més que renunciar completament a aquest punt de vista, que ha fet importants aportacions a la didàctica de les matemàtiques, allò que convé és tenir clar el seus perills les seves limitacions i així poder utilitzar-lo conjuntament amb altres tipus de perspectives.

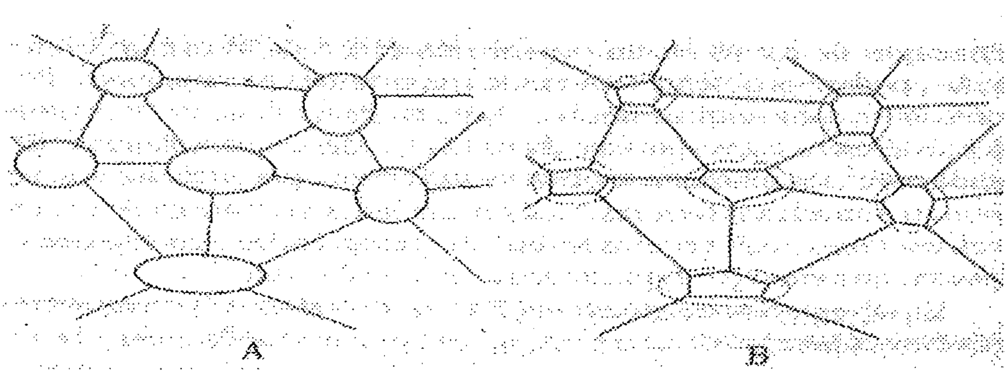
Deixant de banda el problema de la noció de representació interna i el problema de la circularitat que apareix si l'acceptem, de la perspectiva cognitivista ens preocupa especialment el fet que desplaça el focus d'investigació de les representacions utilitzades i construïdes en el procés d'instrucció cap a unes entitats hipotètiques que els alumnes porten amb ells. El nostre punt de vista consisteix a postular unes entitats mentals que no ens allunyin de les pràctiques que s'observen en la interacció que es produeix a l'aula. És a dir, en unes entitats mentals que permetin centrar l'interès en les descripcions i les representacions a mesura que es construeixen en el curs d'una interacció. Aquest posicionament ens ha portat a adoptar la noció de significat d'un objecte personal proposat per Godino i Batanero (1994).

La hipòtesi del punt de vista conceptualista que considera els conceptes estructurats en forma de xarxa ens ha resultat operativa per dissenyar activitats d'ensenyament-aprenentatge, per tant assumim, sense cap tipus de prevenció, la hipòtesi que els objectes personals estan estructurats en forma de xarxa i no renunciem a utilitzar l'aparell de guions, diagrames, etc que sol acompanyar les explicacions cognitivistes.

És important remarcar que considerem els objectes matemàtics personals estructurats en forma de xarxa. És a dir, considerem un conjunt d'objectes personals que es relacionen entre si. Per exemple, el diagrama següent vol representar, de manera molt esquemàtica, les relacions de l'objecte personal "derivada", que volem que desenvolupi l'alumne com a resultat del procés d'instrucció seguint la unitat "introducció a la derivada", amb altres objectes personals:



Ara bé, cada un d'aquests objectes personals a la vegada és una altra xarxa. És a dir, podem desenvolupar en forma de xarxa els objectes personals "límit", "funció", "velocitat", "recta", "tangent trigonomètrica" i "derivada". Des del nostre punt de vista, els objectes personals són xarxes de relacions immerses en xarxes més grans tal com il·lustra la figura següent:



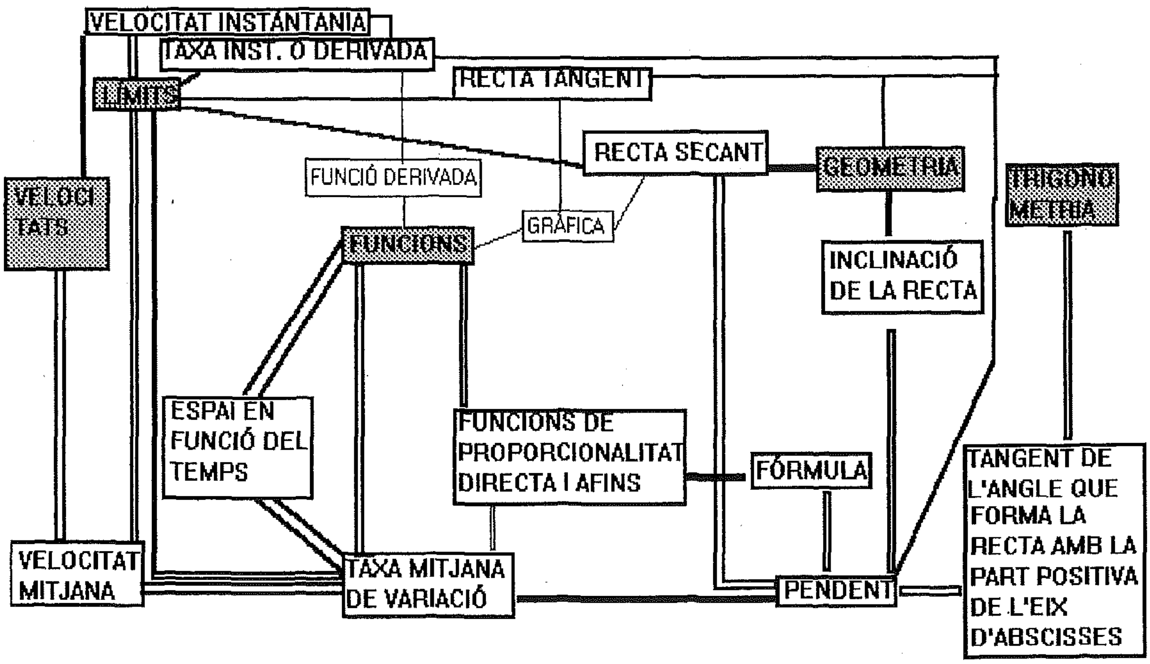
Considerem que l'objecte personal que construeix l'alumne és el resultat de les seves accions al llarg del procés d'instrucció. És a dir, l'objecte personal de l'alumne es pot considerar com la xarxa de relacions que emergeix com a resultat de les pràctiques que ha realitzat l'alumne per resoldre les activitats proposades a l'aula. Aquesta xarxa de relacions que emergeix a partir de les activitats desenvolupades a l'aula es pot recórrer en moltes direccions, la qual cosa permet a l'alumne desenvolupar determinades pràctiques i també li impedeix realitzar-ne d'altres. El conjunt de pràctiques que pot realitzar en un moment determinat l'alumne és el que entendrem per significat de l'objecte personal de l'alumne en aquell moment. Des d'aquest punt de vista, una part del significat personal (les pràctiques públiques) és observable, mentre que una altra part (les pràctiques constituïdes per accions privades) no ho és.

En l'elaboració i la implementació de la unitat "Introducció a les derivades" hem fet una selecció de continguts. Cada un d'aquests continguts és un emergent d'un sistema de pràctiques socials, amb la seva història, formes de representació i contextos d'ús. La totalitat dels possibles usos (pràctiques socials) d'un contingut matemàtic és allò que en aquesta investigació entendrem com a significat institucional d'un objecte matemàtic. A l'hora d'elaborar les activitats de la unitat, hem optat per una determinada organització dels continguts i, per a cada un dels continguts seleccionats, hem fet una selecció de contextos, notacions, etc que es tradueix en un conjunt d'activitats que tenen per objectiu aconseguir, com a resultat del procés d'instrucció, que l'alumne pugui realitzar determinades pràctiques (usar-lo en un una varietat de situacions problemàtiques, reconèixer les seves propietats, les seves formes de representació, les relacions amb altres continguts, etc). Aquest conjunt restringit de pràctiques és el que entenem com a "significat a priori d'un contingut matemàtic per a un alumne des del punt de vista de la institució classe de matemàtiques de 1r de Batxillerat / 3r de BUP". D'altra banda, aquest significat restringit que volem desenvolupar en l'alumne com a resultat del procés d'instrucció malauradament no sempre és el que aquest efectivament desenvolupa. La comprensió assolida per un alumne en un moment donat difícilment serà total o nul·la, sinó que serà parcial. La intersecció entre les pràctiques efectives dels alumnes amb el conjunt de pràctiques que són considerades adequades "a priori" per la institució classe de matemàtiques seran les que, des del punt de vista de la institució, es consideraran manifestacions correctes, mentre que la resta de pràctiques personals seran considerades "errònees", des del punt de vista de la institució. El conjunt de pràctiques desenvolupades per l'alumne (correctes i incorrectes) és el que en aquesta investigació anomenarem "significat d'un contingut matemàtic per a una persona des del punt de vista de la institució classe de matemàtiques de 1r de Batxillerat / 3r de BUP".

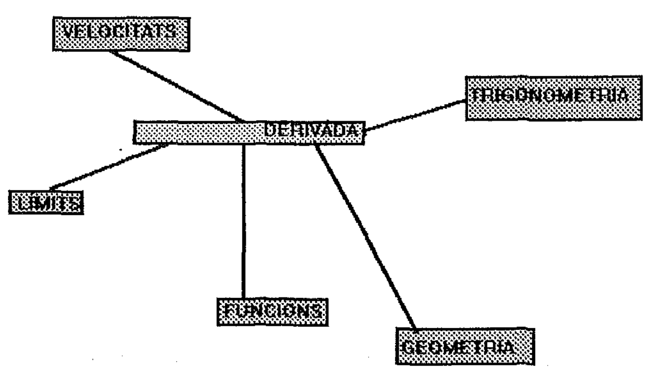
En aquesta investigació ens hem trobat en la necessitat de concretar el constructe "significat a priori de la derivada per a un alumne des del punt de vista de la institució classe de matemàtiques de 1r de Batxillerat / 3r de BUP" per tal d'utilitzar-lo com a guia en l'elaboració de les activitats de la unitat. A continuació explicitarem aquesta concreció que, juntament amb les restriccions que hem exposat en l'apartat anterior, és la que ha servit com a guia per a l'elaboració de les activitats de la unitat.

6.2 Aplicació del constructe <<significat a priori d'un objecte institucional X per a un alumne des del punt de vista de la institució "classe de matemàtiques modalitat de ciències de la naturalesa i de tecnologia de 1r de Batxillerat LOGSE/3r de BUP ">> al contingut derivada.

L'aplicació d'aquest instrument al contingut "derivada" ens va portar a considerar que l'objecte personal "derivada" que volien que l'alumne desenvolupés es podia representar mitjançant la xarxa següent:



Els quadres de color gris són altres objectes personals que també es poden desenvolupar en forma de xarxa. D'altra banda el quadres de color blanc es poden compactar en l'objecte personal derivada de la xarxa següent:



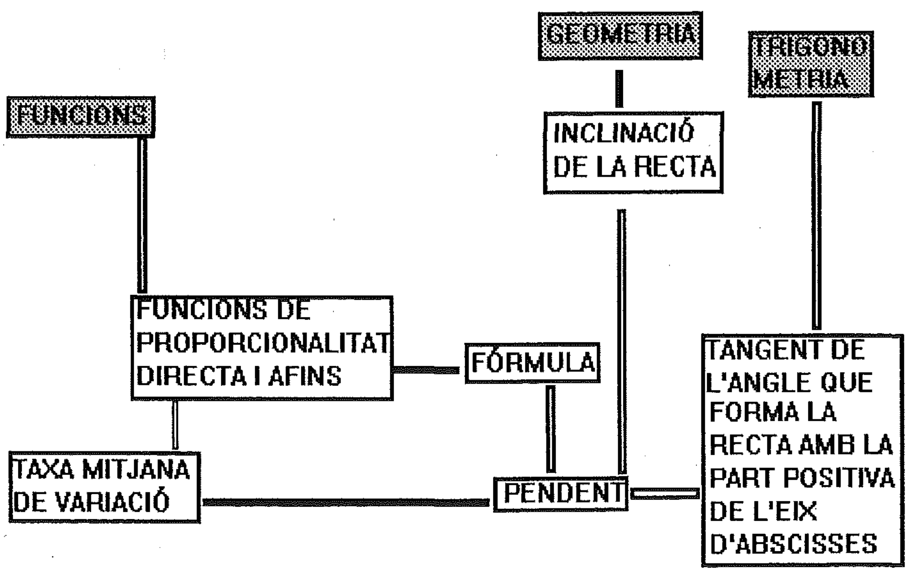
Aquest sistema de no-ostensius és el que l'alumne ha d'activar per utilitzar el sistema de tècniques que permeten calcular la derivada en un punt i la funció derivada. És a dir, el significat d'quest objecte personal "derivada" inclou les pràctiques que permeten calcular derivades en un punt i funcions derivades d'acord amb les tècniques descrites en les restriccions 1,2 i 3 del subobjectiu 2.5.

6.2.1. Significat a priori de l'objecte institucional "pendent" per a un alumne des del punt de vista de la institució escolar "classe de matemàtiques de 3r de BUP / 1r de batxillerat"

Una anàlisi dels contextos en què els alumnes havien treballat el pendent d'una recta i les seves formes de representació abans de començar la unitat "introducció a les derivades" va determinar que els sentits que tenia aquest concepte en els diferents contextos treballats prèviament en la institució escolar eren els següents:

- sentit geomètric: el pendent determina la inclinació de la recta
- sentit trigonomètric: el pendent és la tangent de l'angle que forma la recta amb la part positiva de l'eix d'abscisses.
- sentit algèbric: el nombre que multiplica la x en la fórmula $y = ax + b$
- sentit funcional: l'augment vertical per unitat horitzontal

Vam fer la hipòtesi que un alumne que hagués desenvolupat un bon objecte personal de pendent d'una recta com a resultat de la integració d'aquests diferents sentits tindria un objecte personal que podríem representar amb el diagrama següent:

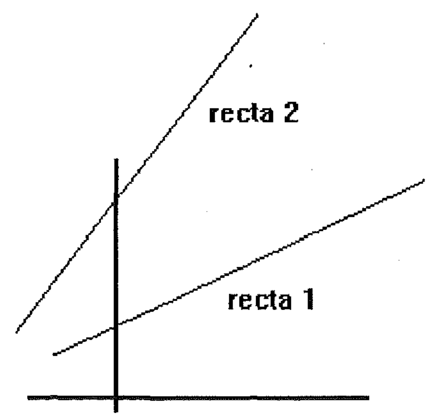


Ha de quedar clar que aquests diagrames que no són mapes conceptuals, sinó una organització hipotètica d'objectes personals que resulta plausible tenint en compte les activitats realitzades a l'aula i que no té més funció que la de ser un diagrama que ens il·lustri sobre els possibles tipus de problemes que pot resoldre un alumne, així com sobre les representacions materials que pot utilitzar i que, per tant, són observables a l'aula.

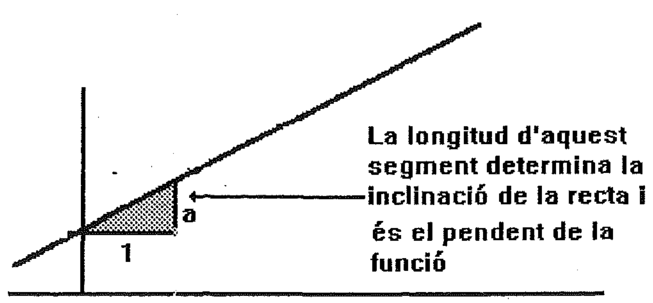
Un alumne que pugui resoldre problemes en què hagi d'utilitzar el sentit geomètric del concepte de pendent, podrà activar la següent part del diagrama anterior:

I davant una tasca com la següent, pot respondre que la recta que té més pendent és la recta 2 perquè té més inclinació

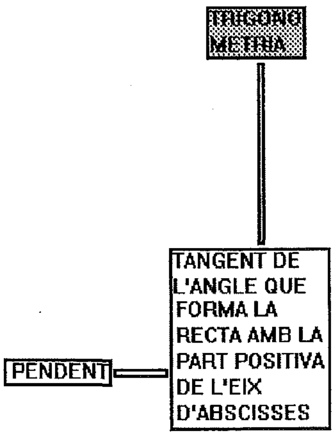
Activitat: Quina de les rectes següents té més pendent



És a dir, és un alumne que pot resoldre un tipus de problemes en què s'ha d'utilitzar que el pendent determina la inclinació de la recta i la representació ostensiva següent:



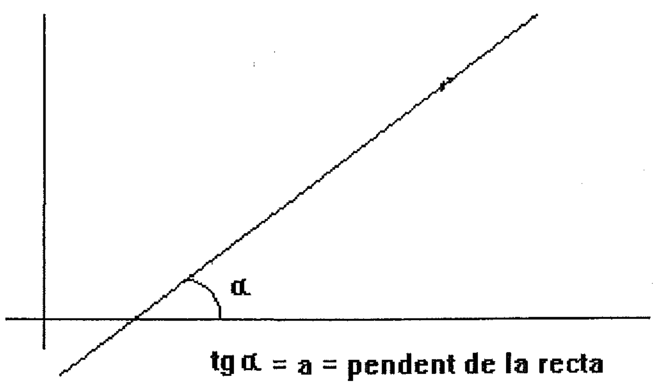
Un alumne que pugui resoldre problemes en què hagi d'utilitzar el sentit trigonomètric del concepte de pendent, podrà activar la següent part del diagrama anterior:



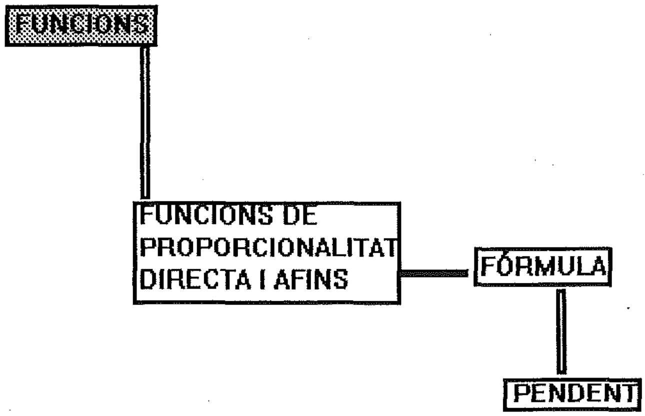
I davant l'activitat següent pot contestar que el pendent és 1 perquè el pendent és la tangent de 45°.

Activitat : Troba el pendent d'una recta que forma un angle de 45° amb la part positiva de l'eix d'abscisses.

És a dir, és un alumne que pot resoldre un tipus de problemes en què s'ha d'utilitzar que el pendent és la tangent de l'angle que determina la recta amb la part positiva de l'eix d'abscisses i la representació següent:



Un alumne que pugui resoldre problemes en què hagi d'utilitzar el sentit algèbric del concepte de pendent serà un alumne que podrà activar la següent part del diagrama anterior:



I davant una tasca del tipus següent, pot escriure com a resposta: $y = -2x$, $y = 3x + 4$ i $y = -5$

Activitat: Escriu la fórmula de les funcions següents:

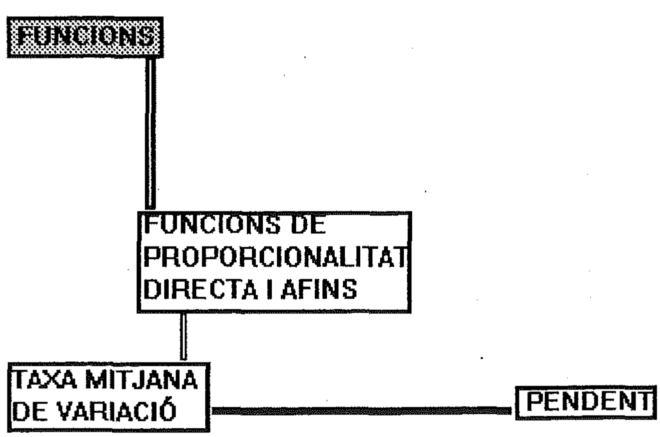
Pendent	-2	3	0
Ordenada a l'origen	0	4	-5

O bé davant una tasca del tipus següent, pot escriure com a resposta: el pendent és 4

Activitat: Digues quin és el pendent de la recta $y = 4x + 5$

És a dir, és un alumne que pot resoldre un tipus de problemes en què s'ha d'utilitzar la representació $y = ax + b$ i que el pendent és el nombre que multiplica la x.

Un alumne que pugui resoldre problemes en què hagi d'utilitzar el sentit funcional del concepte de pendent podrà activar la següent part del diagrama anterior



I davant d'una tasca del tipus:

Activitat: Dibuixa el gràfic de la funció $y = 5x + 1$ digues si són correctes o no els comentaris dels alumnes següents:

Joan: Si ens situem en un punt qualsevol de la recta i ens desplacem una unitat cap a la dreta, després ens hem de desplaçar 5 unitats cap amunt en vertical fins a tornar a tocar la recta.

Alba: Si ens situem en un punt qualsevol de la recta i ens desplacem una unitat cap a la dreta, ens hem de desplaçar 5 unitats cap avall en vertical fins a tocar la recta.

Josep: Si ens situem a l'origen de coordenades i ens desplacem cinc unitats cap a la dreta, ens hem de desplaçar 1 unitat cap amunt en vertical fins a tocar la recta.

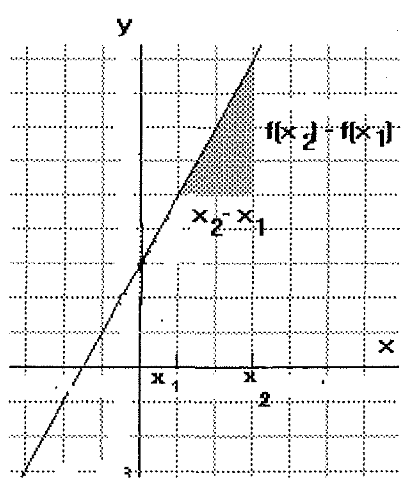
Anna: Si ens situem en un punt qualsevol de la recta i ens desplacem dues unitats cap a la dreta, després ens hem de desplaçar 10 unitats cap amunt en vertical fins a tocar la recta.

Albert: Si ens situem en el punt de tall de la recta amb l'eix d'ordenades i ens desplacem 3 unitats cap a la dreta, després ens hem de desplaçar 15 unitats cap amunt en vertical fins a tocar la recta.

Laura: Si ens situem en un punt qualsevol de la recta i ens desplacem un nombre d'unitats en horitzontal, per tornar a tocar la recta ens hem de desplaçar 5 unitats cap amunt per cada unitat de desplaçament horitzontal.

Pot decidir quins alumnes contesten correctament utilitzant que el pendent ens dóna la variació vertical per unitat horitzontal i pot utilitzar les representacions.

$$pendent = a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{variació \;\; vertical}{variació \;\; horitzontal}$$



En aquesta anàlisi se suposa que el contingut pendent ja és conegut per l'alumne perquè l'ha treballat en cursos anteriors.. Per desenvolupar en l'alumne un objecte personal i un significat personal de pendent el més semblant possible al que acabem de descriure, una hipotètica institució escolar "classe de matemàtiques d'un nivell anterior" hauria d'haver dissenyat una seqüència d'activitats tenint en compte l'esquema següent:

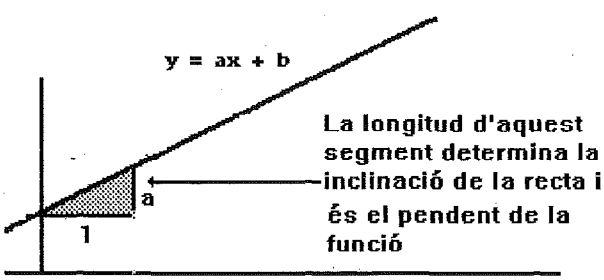
FENÒMENS QUE ES PRESENTEN ALS ALUMNES: Conjunt de problemes de rectes que es poden modelitzar per una funció afí

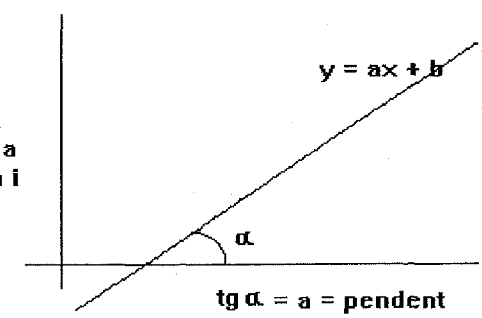
SENTITS QUE AGAFA EL CONTINGUT EN ELS DIFERENTS CONTEXTOS EN QUÈ ES PRESENTEN AQUESTS FENÒMENS: geomètric, funcional, algèbric i trigonomètric

↓

CONTINGUT ORGANITZADOR (EMERGENT): pendent d'una recta.

FORMES DE REPRESENTACIÓ I TRADUCCIONS ENTRE ELLES:





$$pendent = a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{variació \ \ vertical}{variació \ horitzontal} = tg\alpha$$

El no-ostensiu pendent i les seves formes de representació associades produeixen diferents sentits i poden ser activats i utilitzats per les diferents tècniques que permeten calcular el pendent d'una recta. Les tècniques que permeten les representacions anteriors i les traduccions entre elles són, entre d'altres, les següents:

1) Si tenim la fórmula, el pendent és el nombre que multiplica la *x*.

2) Si tenim la gràfica, s'han d'agafar dos punts de coordenades conegudes i calcular

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

3) Si tenim la gràfica, s'han d'agafar dos punts de coordenades conegudes i dibuixar un triangle rectangle d'hipotenusa el segment de recta determinat pels dos punts i dividir la variació vertical per la variació horitzontal.

4) Si tenim l'angle que forma la recta amb l'eix d'abscisses, s'ha de calcular la tangent d'aquest angle.

5) Si tenim la taula, s'han d'agafar dos punts de la taula i calcular $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

6.2.2 Significat a priori de l'objecte institucional "taxa mitjana" per a un alumne des del punt de vista de la institució escolar "classe de matemàtiques de 3r de BUP / 1r de batxillerat"

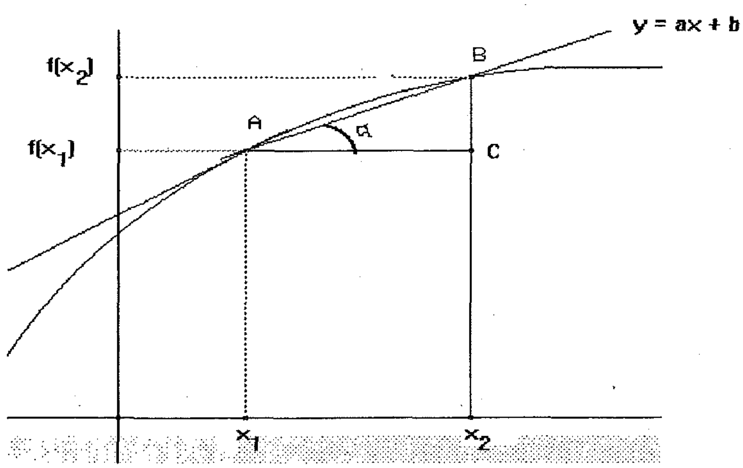
FENÒMENS QUE ES PRESENTEN ALS ALUMNES: Conjunt de problemes que es poden modelitzar per la taxa mitjana de variació d'una funció entre dos punts.

SENTITS QUE AGAFA EL CONTINGUT EN ELS DIFERENTS CONTEXTOS EN QUÈ ES PRESENTEN AQUESTS FENÒMENS: geomètric (pendent de la recta secant) i funcional (augment vertical per unitat horitzontal)

↓

CONTINGUT ORGANITZADOR (EMERGENT): taxa mitjana de variació d'una funció entre dos punts.

FORMES DE REPRESENTACIÓ I TRADUCCIONS ENTRE ELLES:



$$t.m.v. = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\textit{variació vertical}}{\textit{variació horitzontal}} = \textit{pendent de la recta secant} = a = tg\ \alpha$$

L'objectiu és aconseguir que l'alumne desenvolupi un objecte personal que es pot representar per l'esquema següent: