VICENÇ FONT MOLL

PROCEDIMENTS PER OBTENIR EXPRESSIONS SIMBÒLIQUES A PARTIR DE GRÀFIQUES. APLICACIONS A LES DERIVADES

****

Departament de Didàctica de les Ciències Experimentals i de la Matemàtica

Programa de Didàctica de les Ciències Experimentals i de la Matemàtica

Bienni 1994-1996

Per optar al títol de Doctor en Filosofia i Ciències de l'Educació
Secció Ciències de l'Educació

Director: Josep María Nuñez i Espallargas

Tutor: Josep María Nuñez i Espallargas

UNIVERSITAT DE BARCELONA

BARCELONA 1999

alumnes (12% sobre el total i 29% sobre el grup *B*).

Només 1 alumne del grup *A* (2% sobre el total i 5% sobre el grup *A*) respon correctament la pregunta 9 (tangent), mentre que del grup *B* ho fan correctament 5 alumnes (12% sobre el total i 29% sobre el grup *B*).

Només 3 alumnes del grup *A* (7% sobre el total i 16% sobre el grup *B*) responen correctament la pregunta 10 (cosinus), mentre que del grup *B* ho fan correctament 8 alumnes (20% sobre el total i 47% sobre el grup *B*).

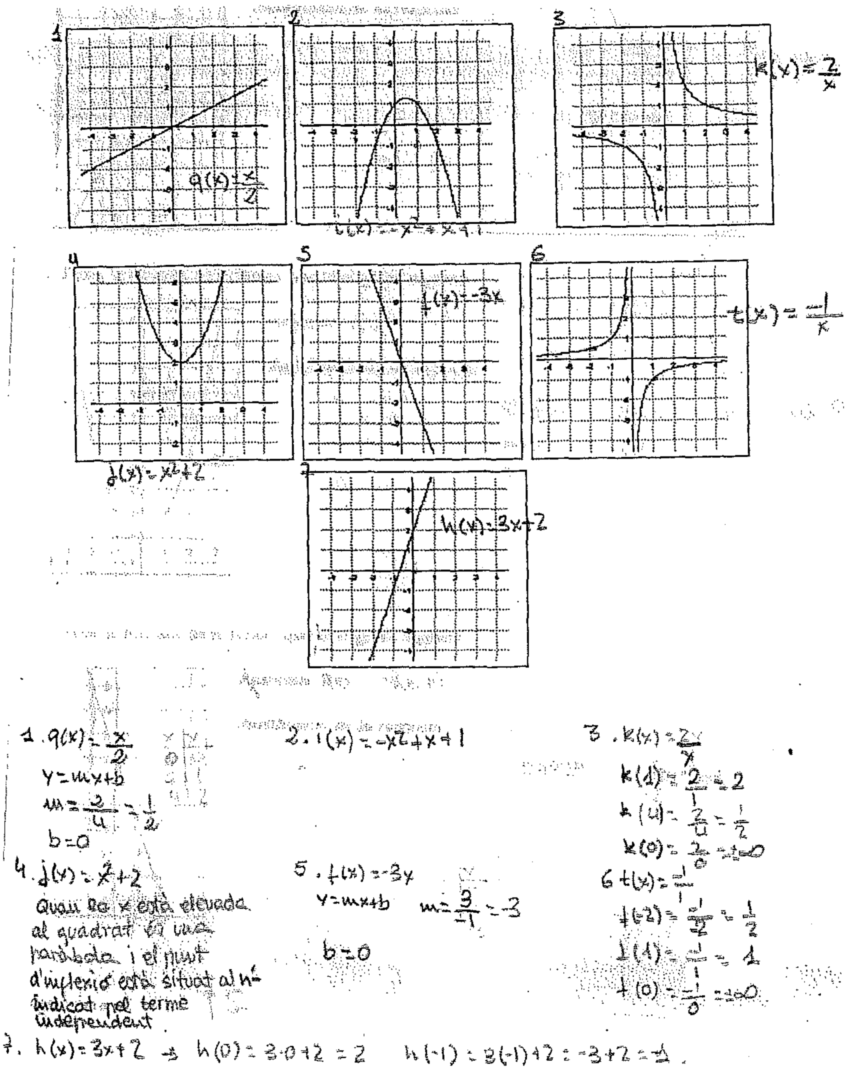
Respostes a la pregunta 11

Resp	$g(x)$	$i(x)$	$k(x)$	$j(x)$	$f(x)$	$t(x)$	$h(x)$
Alum	31 (77%)	32 (78%)	34 (83%)	37 (90%)	35 (85%)	30 (73%)	35 (85%)

Conclusions a partir de les respostes a la pregunta 11.

1) Si bé hi ha hagut alumnes que han tingut en compte el model <<recta>> i el model <<paràbola>> en les seves explicacions no hi ha hagut cap referència al model <<funció de proporcionalitat inversa>>.

2) En aquesta pregunta el percentatge de respostes correctes és força alt. El procediment que han seguit els alumnes és: 1) fer una taula de valors a partir de la fórmula i després veure a quina gràfica corresponien els punts obtinguts o bé una combinació d'aquest procediment amb: 2) fixar-se en el model de la fórmula i pensar el tipus de gràfica que li correspon. La resposta següent (Elia G) és una bona mostra de la combinació dels dos procediments.



Conclusions sobre tot el qüestionari

1) Els alumnes es poden classificar en tres grups. El grup *A* són els que utilitzen bàsicament taules (19 alumnes) , el grup *B* són els que utilitzen el fet que les gràfiques pertanyen a una família de funcions de fórmula tipus coneguda (17 alumnes) i el grup *C* són els que no es poden classificar en cap d'aquests dos grups perquè les seves explicacions no són prou clares per poder-los assignar a un dels dos grups anteriors o bé perquè majoritàriament han contestat en blanc (5 alumnes). L'assignació d'un alumne a un grup, per exemple el grup *A*, no vol dir que justifiqui totes les respostes a partir de taules, sinó que les ha utilitzades majoritàriament en les seves justificacions.

2) El procediment dels alumnes del grup *A* consisteix a fer una taula de valors a partir de la gràfica per després fer una interpolació. Aquest procés és molt poc conscient i bàsicament consisteix a fer una suposició implícita de fórmula de grau 1 o 2 a partir d'alguns punts de la taula per confirmar-la o rebutjar-la a partir d'altres punts. Normalment s'utilitza una taula amb pocs valors i fins i tot hi ha alumnes que només

n'utilitzen un o dos punts. Aquest procediment funciona relativament bé amb funcions de primer grau i amb funcions de segon grau molt senzilles, però dóna molt pocs resultats amb funcions exponencials i trigonomètriques.

3) El procediment del grup *B* consisteix a reconèixer la gràfica com la d'una funció d'una determinada classe de la qual es coneix la fórmula tipus, per determinar a continuació els paràmetres de la fórmula. Aquests alumnes obtenen millors resultats en general que els del grup *A*, especialment amb les gràfiques de les funcions trigonomètriques.

4) La família de les funcions trigonomètriques és poc coneguda, però ho és més que el model <<funció exponencial>> i aquest encara ho és més que el model <<funció de proporcionalitat inversa>>.

5) En relació als ítems 9-16 del subobjectiu 3.3 les conclusions són les següents:

- Quasi tots els alumnes reconeixen una funció afí a partir de la seva gràfica.
- Aproximadament la meitat sap trobar la fórmula d'una funció afí a partir de la seva gràfica.
- Quasi tots reconeixen les funcions quadràtiques a partir de la seva gràfica.
- Quasi tots saben trobar la fórmula d'una funció quadràtica molt senzilla a partir de la seva gràfica.
- Aproximadament el 20% reconeixen una funció exponencial a partir de la seva gràfica.
- Aproximadament el 30% reconeix les funcions sinus i cosinus i el 15% les funcions tangents i cotangents.
- Quasi tots saben associar gràfiques amb fórmules.

Les conclusions de cara a la meva futura intervenció a l'aula foren:

1) En relació els continguts:

- Calia insistir i explicitar que les funcions pertanyen a famílies de funcions.
- Tenir present el poc coneixement que tenien els alumnes de les funcions de proporcionalitat inversa, exponencials, logarítmiques i trigonomètriques
- Insistir més que no havíem previst en les traduccions entre diferents formes de representació de les funcions i molt especialment en la traducció << gràfica ⇒ expressió simbòlica de la funció>>.

2) En relació a l'avaluació:

La situació dels alumnes en relació als ítems 9-16 del subobjectiu 3.3 feia suposar que les activitats de la unitat en les quals s'han d'utilitzar gràfiques de $f(x)$ i de $f'(x)$ serien més lentes del que es podia esperar. També era d'esperar que el fet de treballar una unitat en què es dóna molta importància a les gràfiques augmentés la capacitat de l'alumnat en relació als ítems 9-16. Per comprovar aquesta hipòtesi vam decidir tornar a passar el qüestionari 2 aproximadament un mes després d'haver acabat la unitat i comparar els resultats amb els que havíem obtingut abans de començar la unitat.

5.2 Fase II. Implementació de la unitat

La implementació de la unitat va començar el 18 de novembre de 1997. A continuació descriurem les sessions de classe, reconstruïdes a partir de la gravació que se'n va fer, així com de les notes preses in situ sobre les intervencions dels alumnes i allò que s'escrivia a la pissarra.Presentem les sessions en dos formats:
1) Totes les sessions, tret de la del dia 8-1-98, es presenten en forma de crònica que recull sobretot el paper de mediació desenvolupat pel doctorand.
2) La sessió del 8-1-98 es presenta en tres columnes:

- Transcripció literal de la gravació.
- Descripció del paper de mediació desenvolupat pel doctorand.
- Esquemes per al càlcul de la derivada, representacions implicades i traduccions entre elles.

Si bé ens hauria agradat exposar totes les sessions en aquest últim format, el volum de pàgines que hagués comportat hauria fet excessiu aquest apartat. Hem considerat suficient la descripció del primer tipus en forma de crònica per a allò que ens interessa en aquesta investigació, perquè el que és realment important en aquest treball és com va viure el doctorand el seu paper de mediador en la construcció de significat que van fer els alumnes com a resultat del procés d'instrucció.

5.2.1 Subseqüència 1. Pendent d'una recta

La primera subseqüència d'activitats està formada per les activitats 1-3 de la unitat (veure annex I) i pretén aconseguir que els alumnes siguin capaços d'assolir els següents ítems del subobjectiu 3.3:

17 Reconèixer que el pendent determina la inclinació de la recta.
18 Reconèixer que el pendent és el nombre a de la fórmula $f(x) = ax + b$.
19 Reconèixer que el pendent és la tangent trigonomètrica de l'angle que forma la recta amb la part positiva de l'eix d'abscisses.
20 Reconèixer el significat funcional del pendent:

$$pendent = a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{variació \quad vertical}{variació \ horitzontal}$$

és a dir, si sap que el pendent ens dóna, per cada unitat horitzontal desplaçada cap a la dreta, el nombre d'unitats que cal desplaçar-se en vertical per tornar a la recta (amb signe + si va cap amunt i signe - si va cap avall).
21 Calcular el pendent d'una recta a partir de la seva gràfica.

Aquesta subseqüència es va desenvolupar en les sessions del 18 i 19 de novembre, i estava pensada com a avaluació inicial dels coneixements previs que tenien els alumnes sobre el pendent d'una recta. L'activitat 1 pretén treballar els significats geomètric i algèbric del concepte de pendent. Es tracta de veure si l'alumnat reconeix el pendent com el coeficient de la x i si relaciona aquest nombre amb la major o menor inclinació de la recta. En l'activitat 2, l'alumnat ha de fer una traducció entre fórmula, gràfica i enunciat. Aquesta activitat pretén avaluar si l'alumnat reconeix el significat funcional del pendent. És a dir, si sap que el pendent ens dóna, per cada unitat horitzontal desplaçada cap a la dreta, el nombre d'unitats que cal desplaçar-se en vertical per tornar a la recta (amb signe + si va cap amunt i signe - si va cap avall). L'activitat 3 té per objectiu recordar el càlcul del pendent d'una recta a partir de la gràfica. Aquest procediment s'ha d'utilitzar per resoldre les activitats següents.

Sessió 18-11-97

Planificació prèvia:

1) Treballar alguns exercicis de límits amb indeterminació 1^{∞} pendents del tema anterior.
2) Fer-los conscients que utilitzo d'altres instruments d'avaluació a més dels exàmens.
3) Comentar el qüestionari 1 i explicar la relació entre la gràfica i la fórmula d'una funció.
4) Començar la unitat de derivades.
5) Comentar el qüestionari 2 i fer-los conscients de la importància d'entendre el concepte de pendent.
6) Treballar les activitats 1 i 2.

Desenvolupament de la sessió

Baixes: Esther.G. s'ha donat de baixa i el grup queda amb 40 alumnes.
Falten: Alex.A, Alberto.C., Mike.D, Angela.L. i Toni. G.
Incidències: La primera part de la sessió encara fa referència al tema de límits.

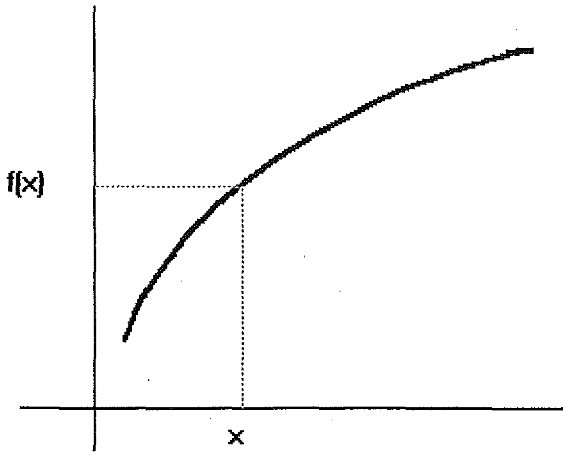
P: Un cop acabat el tema de límits i abans de començar el tema de derivades faig els comentaris següents sobre el mètode d'avaluació:

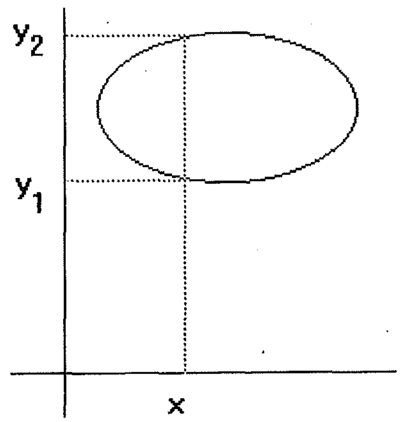
- L'avaluació la faré tenint en compte d'una banda els exàmens i d'altra banda els qüestionaris fets a classe.
- Els exàmens serveixen per tenir informació individual de cada alumne i per posar la nota individual.
- Els qüestionaris no tindran nota, ja que tenen per objectiu conèixer la situació del grup-classe.

Explico que els qüestionaris 1 i 2 tenien per objectiu esbrinar quina era la seva situació en relació a alguns continguts que havien de saber per entendre la unitat de derivades, i anuncio que en aquesta unitat de derivades també els en passaré d'altres.

Comento que del qüestionari 2 he tret la conclusió que la meitat de la classe no té clar el concepte de pendent d'una recta, que és un concepte bàsic per entendre tot el tema de derivades i que del qüestionari 1 he tret la conclusió que hi ha molts alumnes que no saben reconèixer les gràfiques de les funcions elementals.

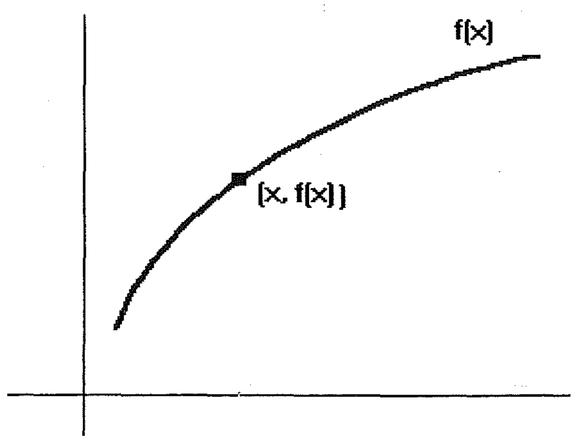
A continuació explico a la pissarra què és una gràfica d'una funció i què no ho és, remarcant que si, en fer una línia vertical, tallem la gràfica en més d'un punt, això vol dir que hi ha valors de la x que tenen més d'una imatge.





Els faig observar també que alguns d'ells encara van cometre aquest error en la primera pregunta de l'examen de límits i continuïtat (Laura N, Patricia.F., Pilar.G., etc).

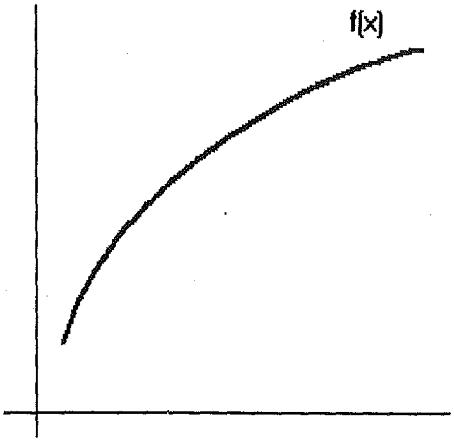
Continuo comentant que del qüestionari 1 he tret la conclusió que quasi tots els alumnes saben aplicar la fórmula a nombres, i que molts la saben aplicar també a lletres, però que una gran part no entenen, i si ho entenen no ho utilitzen, que els punts de la gràfica de $f(x)$ són els punts $(x, f(x))$ (dibuixo a la pissarra).

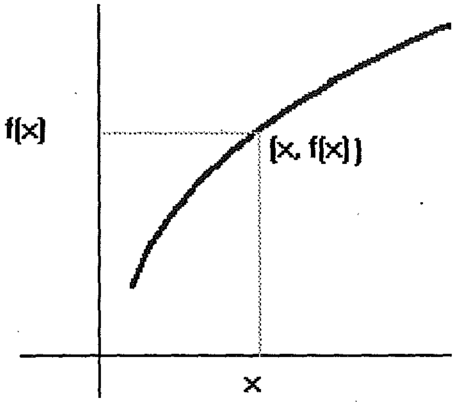


Un cop dibuixada la gràfica, els faig observar que aquest és el motiu pel qual molts d'ells no van contestar la pregunta <<(, $f(x)$)>> del qüestionari 1, i que els que la van contestar no van utilitzar aquesta propietat sinó la fórmula de la funció.

Després faig una explicació a la pissarra insistint en les idees següents:

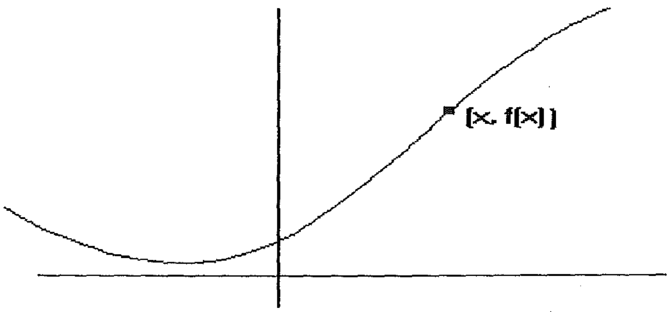
- Doble utilització del símbol $f(x)$:
  - Per anomenar la funció.
  - $f(x)$ és la imatge de x.





Remarco que aquesta doble utilització crea problemes a alguns alumnes.

- Que si ens donen la funció $f(x)$ sense la fórmula, tots els punts de la gràfica són els punts $(x\ ,\ f(x))$ (dibuixo a la pissarra).



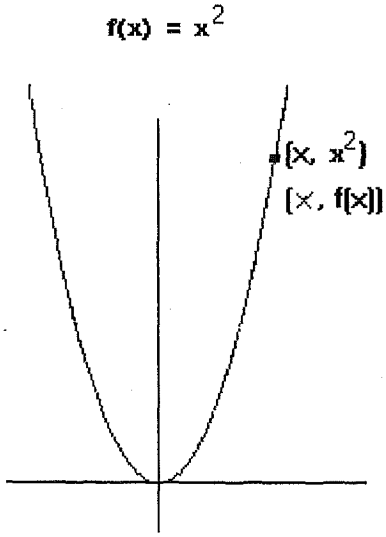
- Si tenim la fórmula, la podem aplicar a lletres, substituint la x per la lletra. Poso a la pissarra l'exemple següent, perquè observin que la taula que fan amb nombres també es pot fer amb lletres:

$f(x) = x^2 \Rightarrow$

x	$f(x)$
0	$0^2 = 0$
1	$1^2 = 1$
2	$2^2 = 4$
....	...
...	...
a	a^2

Per tant $f(a) = a^2$

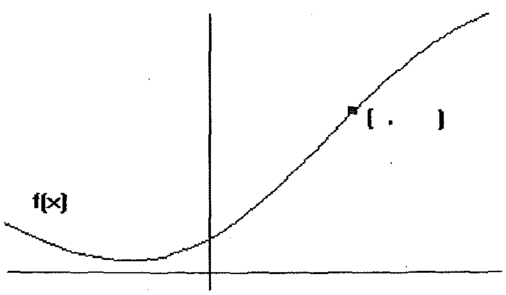
- Insisteixo en la relació entre la fórmula i la gràfica i dibuixo a la pissarra



Remarcant que tots els punts de la gràfica són els punts (x , $f(x)$) i, com que sabem que $f(x) = x^2$, tots els punts de la gràfica són els punts (x , x^2).

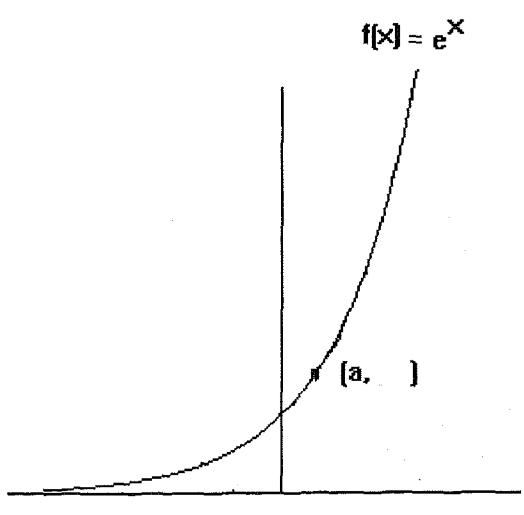
Continuo fent preguntes a diferents alumnes.

P: Raúl C., si tinc a la gràfica de la funció $f(x)$, com es pot representar aquest punt?



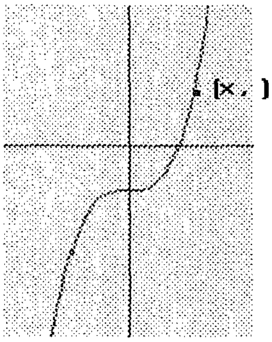
A: (x , $f(x)$).

P: Correcte. David G., si tinc la funció $f(x) = e^x$ (la dibuixo) com es pot representar aquest punt?



A: (a, e^a).

P: Correcte. Raquel G., si tinc la gràfica de $f(x) = x^3 - 1$ (la dibuixo a la pissarra), com es pot representar aquest punt?



A: $(x, x^3 - 1)$.

P: Li dic que molt bé i insisteixo com és d'important que tot el que he dit quedi clar. A continuació faig un comentari sobre la rellevància del tema de derivades, perquè són l´instrument matemàtic per estudiar la manera com varia una magnitud en canviar-ne una altra. Tot seguit els faig llegir la introducció històrica del tema de derivades.

A: Llegeixen la introducció històrica

P: Al cap de 5 minuts aproximadament, comento la nota històrica i els faig treballar el pendent a l'activitat 1, tot recordant-los que és un concepte clau per entendre les derivades. També comento que aquest concepte no és nou perquè ja l'han treballat a 1r i a 2n, i que del qüestionari 2 es dedueix que la meitat de la classe no el té clar.

A: Es posen a fer l'activitat 1.

P: Observo que els alumnes no tenen problemes per fer la gràfica de les funcions afins a partir de les fórmules i que el procediment que utilitzen és fer una taula de valors. Comento als alumnes aquesta observació i demano a Raúl B. que contesti l'apartat *b*.

A: Raúl B. diu que totes són paral·leles i que es diferencien en la distància.

P: Li pregunto que vol dir això de <<la distància>>.

A: Raúl B. ho intenta una altra vegada sense gaire èxit, però amb la mà fa un moviment que permet deduir que es refereix al punt de tall amb l'eix d'ordenades.

A: Jordi L., aixeca la mà per intervenir.

P: Li faig un senyal perquè ho faci.

A: Jordi L., diu que la diferència entre les rectes és que tallen a l'eix d'ordenades en punts diferents i que el que tenen en comú és la inclinació.

P: Toca el timbre i els dic que acabin l'activitat 1 per al proper dia.

Valoracions

1) La falta d'assistència i l'actitud de 3 repetidors (Alex .A., Alberto.C. i Angela.L.) i la de Mike.D, s'està perfilant com un dels problemes d'aquest grup. Els 3 repetidors poden crear problemes de gestió de classe, mentre que l'absentisme de Mike.D. i Toni G. s'està convertint en un problema greu per a ells.

2) Ha estat una sessió en què he hagut d'intervenir molt (forma d'avaluar, idees prèvies sobre funcions, nota històrica).

3) He notat una bona dinàmica de treball i també que és molt positiu fer referències als qüestionaris que ells han respost a la classe.

4) Sembla que han entès:
- La relació entre la fórmula i la gràfica d'una funció.
- Que els punts de la gràfica de $f(x)$ són els punts $(x, f(x))$.
- Quines gràfiques ho són de funcions i quines no.
- La doble utilització del símbol $f(x)$.

5) Els alumnes tenen clar:
- Com dibuixar rectes a partir de fórmules utilitzant taules.
- Que el pendent determina la inclinació de la recta i que si els pendents són iguals, llavors les rectes són paral·leles.
- Que el terme independent determina el punt de tall amb l'eix d'ordenades.
- Que el pendent és el nombre a de la fórmula $f(x) = ax + b$

Sessió del 19-11-97

Planificació prèvia

1) Treballar les activitats 1-3.
2) Començar a treballar la taxa mitjana de variació.

Desenvolupament de la sessió.

Falten: Mike.D.

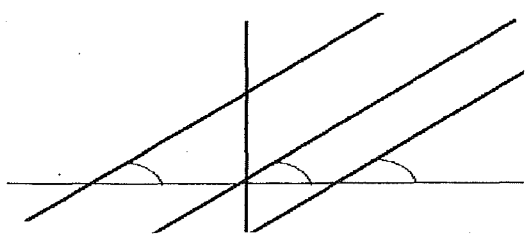
P: Començo la classe recordant que a la sessió anterior havien fet els apartats a i b de l'activitat 1 i que ells l'havien d'acabar a casa seva. Pregunto a Alicia M. quin és el nombre que fa que totes les rectes tinguin la mateixa inclinació i quin és el nombre que fa que les rectes tallin a l'eix d'ordenades en diferents punts.

A: Alicia M. respon que la inclinació depèn del nombre que multiplica a la x i que l'altre nombre determina el punt de tall.

P: Torno a recordar-los la importància que tots tinguin clar el concepte de pendent per entendre el tema de derivades.

A: Els tres repetidors (Alex .A., Albert .C. i Angela .L.) Entren tard a classe.

P: Faig un comentari recriminant la seva actitud. Tot seguit dic que l'apartat c de l'activitat 1 es pot contestar de dues maneres, una de més precisa que l'altra, i pregunto a Laura N. per què són iguals aquests tres angles (dibuixo a la pissarra).

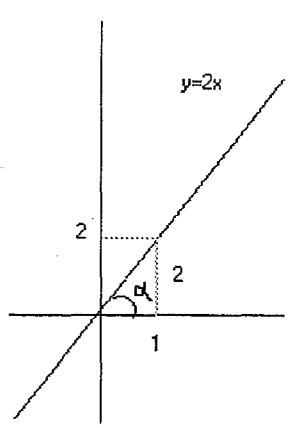


A: Laura N. diu per què tenen el mateix pendent.

P: Comento que aquesta resposta seria una primera aproximació a la pregunta de quina és la relació entre el pendent i l'angle que forma la recta amb la part positiva de l'eix d'abscisses, però que aquesta relació es pot precisar més si recorden el que van estudiar de trigonometria a 2n. Pregunto si algú ho recorda.

A: Responen tots que no.

P: Explico la relació entre el pendent i la tangent trigonomètrica utilitzant la recta $y = 2x$.



Pendent = 2 = 2/1 = tg α

A: Copien en el seu quadern l'explicació de la pissarra.

P: Faig una petita recapitulació dels significats de pendent. Primer comento que el pendent és el nombre que multiplica la *x* i determina la inclinació de la recta, i que segons com sigui aquest nombre, la recta serà més o menys inclinada. Després comento que el pendent és la tangent de l'angle que forma la recta amb la part positiva de l'eix d'abscisses. A continuació faig sortir Laura A. a.la pissarra per fer l'apartat *d* de l'activitat 1.

A: Laura A. dibuixa correctament les rectes a la pissarra i diu que s'observa que totes tallen l'eix d'ordenades en el mateix punt.

P: Pregunto a Jaume G. de què depèn que unes rectes siguin creixents i d'altres decreixents.

A: Jaume G. respon que depèn del signe.

P: Explico què vol dir ser creixent i decreixent i remarco que si el pendent és positiu la funció afí és creixent, i si és negatiu és decreixent. Comento també que segons la forma de la recta, podem saber si el pendent és positiu o negatiu. A continuació dic que llegeixin el <<Recorda>> que segueix a l'activitat 1.

A: Llegeixen el <<Recorda>>.

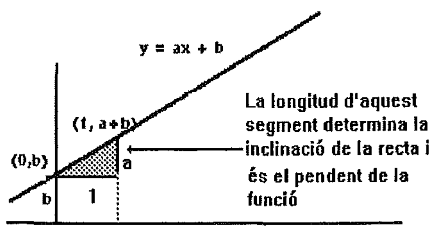
A: Alex A. ha estat parlant tot el temps.

P: Li dic a Alex A. que canviï de lloc i li indico on ha de seure.

A: Alex A. canvia de lloc.

P: Explico el <<Recorda>> remarcant: 1) el motiu pel qual el coeficient *a* determina la inclinació i el coeficient *b* el punt de tall amb l'eix d'ordenades.

x	y
0	$f(0) = a \cdot 0 + b = b$
1	$f(1) = a \cdot 1 + b = a + b$



i 2) faig observar que si la fórmula és del tipus $y = ax + b$, la gràfica és una recta i a l'inrevés.Fent esment que això vol dir que, si tenim la gràfica d'una paràbola, no podem respondre, per exemple, amb una fórmula del tipus $y = ax + b$ i comento que això va passar en algunes respostes del qüestionari 2.

A continuació recordo els tres significats de pendent d'una recta que han vist en les activitats 1 i 2:

- geomètric: el pendent fa que la recta sigui més o menys inclinada.
- l'algèbric: el pendent és el nombre que multiplica a la x.
- trigonomètric: el pendent és la tangent de l'angle que forma la recta amb l'eix d'abscisses.

També dic que el pendent té un altre significat, com veurem a l'activitat següent.

A: Es posen a fer l'activitat 2.

P: Pregunto a Alfonso M. què opina del comentari d'en Daniel a l'activitat 2.

A: Abans que Alfonso M pugui contestar-me, observo que Alberto C. I Angela L. parlen i no treballen.

P: M'hi aproximo i recrimino la seva actitud.

A: Els dos alumnes es posen a treballar.

P: Dibuixo la recta $y = 5x + 1$ a la pissarra i torno a preguntar a Alfonso M. si el comentari del primer alumne és correcte.

P: Sobre la recta de la pissarra vaig senyalant amb gestos el que significa el comentari d'en Daniel.

A: Molts alumnes manifesten que no ho tenen clar.

P: Demano que aixequin la mà els que no ho tenen clar.

A: Uns 10 alumnes aixequen la mà.

P: Dic que deixin aquest comentari per al final i que responguin els altres.

A: Treballen en l'activitat 2.

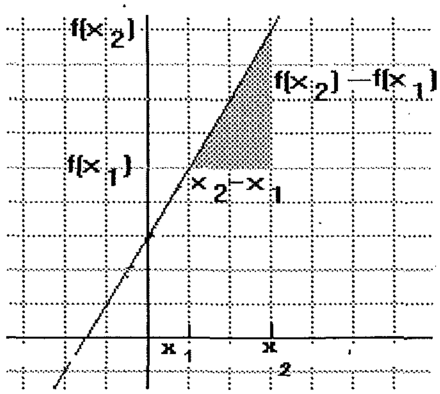
P: Vaig preguntant quants estan d'acord amb cada un dels altres 5 comentaris.

A: Els alumnes tenen molt clar els que són incorrectes, però dubten respecte dels correctes.

P: Explico per què són correctes o incorrectes els comentaris i els faig observar que en els que són correctes sempre que dividim la variació vertical per l'horitzontal surt el pendent de la recta: el nombre 5. A continuació explico el comentari que segueix a l'activitat 2 intentant que l'alumnat entengui que:

$$pendent = a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{variació \quad vertical}{variació \ horitzontal}$$

insistint que aquest quocient ens dóna l'augment vertical per unitat horitzontal. També dic que aquesta igualtat ens dóna un procediment per trobar el pendent de la recta a partir de la seva gràfica. En la meva explicació utilitzo la figura següent i relaciono els punts $(x_1, f(x_1))$ i $(x_2, f(x_2))$ amb l'explicació del dia anterior sobre que els punts de la gràfica són els punts $(x, f(x))$



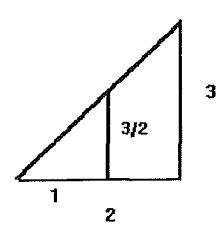
Dic que es posin a fer l'activitat 3.

A: Es posen a fer l'activitat 3 i la comenten molt entre ells.

A: Esther E. Reclama la meva atenció individual per comentar l'activitat 3.

A: Pilar G. i Sandra D. també.

P: Aquestes alumnes o bé no ho saben fer, o bé fan una unitat cap a la dreta i calculen el valor del pendent de $g(x)$ aproximadament. Els explico que en aquests casos han de buscar un triangle semblant més gran i els poso l'exemple següent:



Amb el triangle petit tenim: pendent $= \frac{\frac{3}{2}}{1} = \frac{3}{2}$

Amb el triangle gran: pendent = 3/2

P: Observo que Luís .J.G ha respost correctament i el faig sortir a la pissarra.

A: Luís .J. G. Escriu a la pissarra el pendent de $f(x)$ i $g(x)$

$f(x) = 4/1 = 4$ i $g(x) = 2/3$

P: Repeteixo l'explicació que he fet a Esther, Sandra i Pilar per a tota la classe. Després Pregunto a Raúl C. quin és el pendent de $h(x)$.

A: Raúl C. contesta que el pendent de $h(x)$ és zero.

P: Explico a la pissarra que en aquest cas també es compleix que el pendent és la variació vertical dividida per l'horitzontal i poso a la pissarra el següent:

$$Pendent = \frac{variació \quad vertical}{variació \quad horitzontal} = \frac{0}{1} = 0$$

fent un desplaçament d'una unitat cap a la dreta sobre la recta horitzontal de la pissarra.

A: Laura N. pregunta si és zero o no té pendent.

P: Contesto que la resposta correcta és que el pendent és zero. A continuació toca el timbre i els encarrego acabar a casa seva l'activitat 3.

Valoracions

1) Hi ha bon ambient de treball, encara que el ritme és molt lent. No tinc molt clar com evolucionarà l'actitud dels tres repetidors.

2) Crec que l'explicació del dia anterior que els punts de la gràfica són els punts $(x, f(x))$ ha facilitat la comprensió de la notació $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

3) En relació als ítems del subobjectiu 3.3:

Ítem 17	Els alumnes reconeixen que el pendent determina la inclinació de la recta.
Ítem 18	Els alumnes reconeixen que el pendent és el nombre a de la fórmula $f(x) = ax + b$.
Ítem 19	Els alumnes no entenen la relació entre el pendent i la tangent trigonomètrica.
Ítem 20	No tenen prou clar que el pendent és $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ és a dir, no tenen clar que el pendent ens dóna, per cada unitat horitzontal desplaçada cap a la dreta,el nombre d'unitats que cal desplaçar-se en vertical per tornar a la recta (amb signe + si va cap amunt i signe - si va cap avall).
Ítem 21	Els costa trobar el pendent a partir de la gràfica.

4) En el procés d'instrucció s'ha de continuar treballant que el pendent és la tangent trigonomètrica i que també és $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$, així com el procediment per trobar el pendent a partir de la gràfica.

5.2.2 Subseqüència 2. Taxa mitjana de variació.

Aquesta subseqüència està formada per les activitats 4-11 i pretén aconseguir que els alumnes siguin capaços d'assolir els següents ítems del subobjectiu 3.3:

22 Construir el concepte de taxa mitjana de variació a partir del concepte de pendent d'una recta.
23 Entendre que la taxa mitjana de variació no varia al llarg d'una recta i sí que ho fa al llarg d'una corba.
24 Entendre la interpretació geomètrica de la taxa mitjana de variació.
25 Adonar-se que el concepte de taxa mitjana de variació d'una funció entre dos valors de la variable independent està molt present en la vida diària de les persones

Aquesta subseqüència es va desenvolupar en les sessions del 20-11-97, 25-11-97 i mitja sessió del 26-11-97. En l'activitat 4 es calcula el pendent del gràfic entre dos valors de la variable independent x_1 i x_2 tals que el gràfic entre aquests dos valors és un segment de recta. L'objectiu és que l'alumnat entengui que, sempre que tinguem un gràfic format per segments de rectes, podem considerar el pendent entre dos valors de la variable independent x_1 i x_2 tals que el gràfic entre aquests dos valors sigui un segment de recta.

En els apartats *b* i *c* de l'activitat 5 s'observa que el quocient $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ (*amb* $x_1 < x_2$) no varia quan els punts (x_1, y_1) i (x_2, y_2) estan sobre el mateix segment de recta. A l'apartat *d* d'aquesta activitat es veu que, a vegades, cal calcular el quocient $\dfrac{f(x_2) - (x_1)}{x_2 - x_1}$ entre dos punts que no estan sobre el mateix segment de recta. A l'activitat 6 s'observa que aquest quocient també s'ha de calcular entre dos punts del gràfic d'una funció que té per gràfic una corba.

Després de donar la definició de variació d'una funció $f(x)$ entre x_1 i x_2 i la de taxa mitjana de variació d'una funció $f(x)$ entre x_1 i x_2, l'alumnat ha d'utilitzar aquests conceptes en les activitats 7 i 8. L'activitat 9 i el comentari posterior tenen per objectiu que l'alumnat observi que la taxa mitjana de variació d'una funció entre dos valors de la variable independent depèn dels valors escollits. I que una característica molt important que distingeix les funcions que tenen per gràfic una recta, de les que tenen per gràfic una corba és que, per a les primeres, la taxa mitjana de variació entre dos valors de la variable independent sempre és constant, mentre que per a les segones canvia al llarg de la corba.

A l'activitat 10, l'alumne ha d'observar que la taxa mitjana de variació d'una funció $f(x)$

entre x_1 i x_2, amb $x_1 < x_2$, $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ és el pendent de la recta secant al gràfic de la funció $f(x)$ que passa pels punts $A(x_1, f(x_1))$ i $B(x_2, f(x_2))$. A l'activitat 11, a més de trobar el pendent de la recta secant utilitzant el quocient $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$, ha de trobar l'ordenada a l'origen de l'equació de la recta secant, utilitzant un dels dos punts per on passa la gràfica de la funció. L'objectiu del càlcul de l'equació de la recta secant en aquesta activitat és anar introduint el procediment per trobar l'ordenada a l'origen de l'equació de la recta tangent.

L'objectiu de la lectura del text <<Aplicacions de la taxa mitjana de variació>> d'aquest apartat és que l'alumnat constati que vivim en un món caracteritzat per canvis continus, de tal manera que la taxa mitjana de variació d'una funció entre dos valors de la variable independent està molt present en la vida diària i moltes persones la utilitzen sense adonar-se'n per treure conclusions sobre la variació d'una variable respecte a una altra.. I que una de les taxes de variació amb nom propi més important és la velocitat.

Sessió 20-11-97

Planificació prèvia

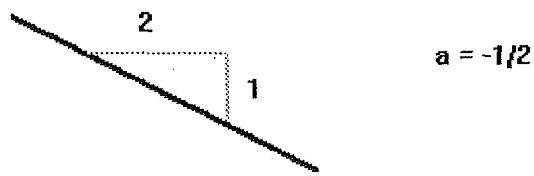
1) Acabar l'activitat 3 i insistir en el procediment per trobar el pendent d'una recta a partir de la gràfica.
2) Treballar les activitats 4-9.

Desenvolupament de la sessió.

Faltes:Toni G.

P: Mentre els alumnes van seient, dibuixo les gràfiques de la 2a part de l'activitat 3 i els recordo que l'havien de portar feta. Faig sortir a la pissarra a Sergi G.

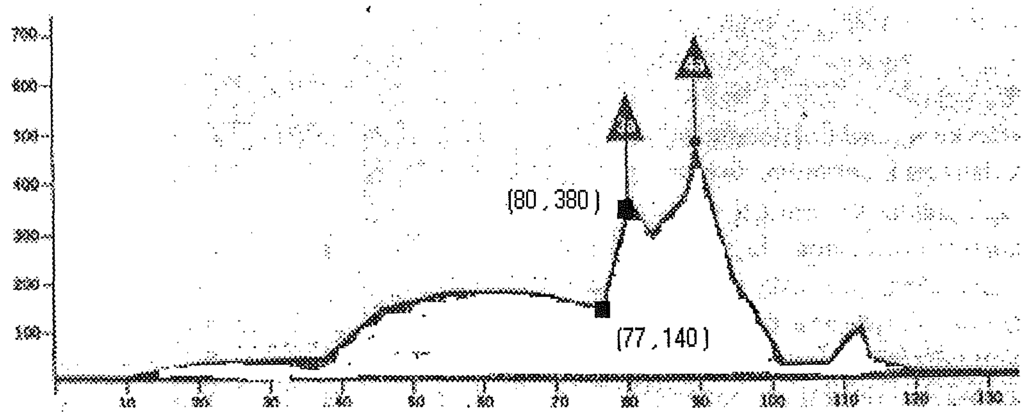
A: Sergi respon correctament. Observo que utilitza el quocient $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$. Per exemple, per a la funció $f(x)$, ha trobat els punts (3 , 1) i (1 , 2) i ha fet $a = \dfrac{1-2}{3-1} = -1/2$. En canvi, observo que d'altres alumnes utilitzen el triangle directament, és a dir, fan:



P: Faig un comentari explicant com ho ha calculat en Sergi i com d'altres alumnes han utilitzat el triangle directament i els faig observar que els dos procediments són equivalents. Després anuncio que tot seguit aplicarem aquest procediment a problemes reals en què tindrem una funció formada per segments de recta. Dic que facin l'activitat 4.

A: Es posen a fer l'activitat 4 i la comenten força entre ells.

P: Mentrestant dibuixo la gràfica de l'activitat 4 a la pissarra i hi poso els punts (77 , 140) i (80 , 380).



Els faig observar amb indicacions sobre la gràfica per què he posat aquestes coordenades i pregunto si el tros de gràfica entre aquests dos punts es pot considerar un segment de recta.

A: Els alumnes responen que sí amb gestos.

P: Faig sortir Patricia F. a la pissarra.

A: Patricia ho fa bé però no utilitza la mateixa unitat, sinó que fa:

$$\text{Pendent} = 240 / 3 = 80$$

P: Pregunto si és normal aquest resultat i també en quin tipus d'unitat està donada l'altura.

A: Els alumnes contesten tots alhora que l'altura està donada en metres.

P: Faig observar que el procediment que ha utilitzat Patricia és correcte, però que en el quocient que ha posat a la pissarra tenim el numerador en metres i el denominador en km. Dibuixo a la pissarra el resultat correcte:

Pendent = 240 / 3000 = 0,08

A continuació, pregunto si han vist mai algun senyal de pendent d'una carretera i com s'indica.

A: Alguns alumnes responen que s'indica en %.

P: Faig observar que 0,08 vol dir 0,08 metres de pujada vertical per cada metre en horitzontal i que 8% vol dir 8 metres en vertical per 100 metres en horitzontal. Després assenyalo el tros de gràfica entre els punts (87, 380) i (90, 510) i pregunto si el gràfic es pot considerar un segment de recta.

A: Diuen que sí.

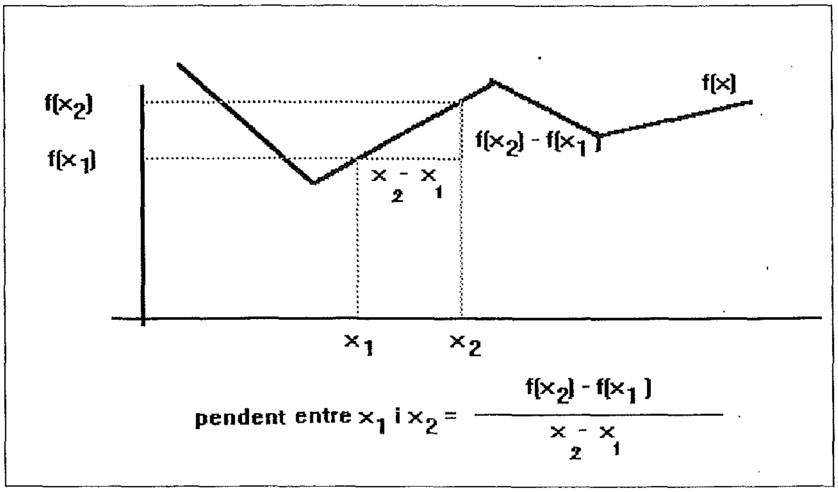
A: Patricia fa a la pissarra l'apartat *c* correctament i dóna el resultat en %

Pendent = 130 / 3000 = 0,04 = 4%

P: Despés de comentar que el que ha fet la Patricia és correcte, pregunto per què un port de muntanya és de 3a categoria i un altre és de 4a (apartat *d*).

A: Molts alumnes responen que el de 3a té més pendent.

P: Faig observar que malgrat tenir més pendent té menys altura. Comento el paràgraf que segueix a l'activitat 4 , remarcant que, en el problema anterior, hem considerat el pendent del gràfic entre dos valors de la variable independent x_1 i x_2 tals que el gràfic entre aquests dos valors era un segment de recta, perquè el perfil de la muntanya es pot considerar la gràfica d'una funció que ens dóna l'altura, si sabem la distància recorreguda. A continuació faig una generalització a partir del gràfic de l'activitat 4, i explico que sempre que tinguem un gràfic format per segments de rectes, podem buscar el pendent entre dos valors de la variable independent x_1 i x_2 tals que el gràfic entre aquests dos valors sigui un segment de recta (dibuixo a la pissarra).



Per tant, el quocient $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ (*amb* $x_1 < x_2$) ens dóna la variació de la variable dependent, per cada unitat de la variable independent. També faig observar que aquest quocient coincideix amb el pendent de la recta que resulta de perllongar el segment. Acabo dient que facin l'activitat 5.

A: Es posen a fer l'activitat 5 i fan molts comentaris entre ells.

A: Jordi A. Reclama atenció personal i em pregunta un dubte de la segona part de l'activitat 3. El seu problema és que no entén com és possible que, sent x_2 més gran que x_1, resulta que $f(x_1)$ és més gran que $f(x_2)$.

P: Li faig observar que la funció és decreixent perquè la gràfica baixa i que en aquest cas $f(x_1)$ és més gran que $f(x_2)$. Si la funció fos creixent, llavors $f(x_1)$ seria més petita que $f(x_2)$. Pregunto a Anna G. quina és la seva resposta a l'apartat *a* de l'activitat 5.

A: Anna G. contesta correctament que va augmentar 3°.

P: Li pregunto quant va augmentar per hora.

A: Respon que 1 grau.

P: Li pregunto per què 1 grau.

A: Respon que ha calculat el pendent.

P: Si calcules el pendent, surt 3/2 (dibuixo a la pissarra la gràfica de l'activitat i amb gestos indico un desplaçament de tres unitats cap amunt i dos cap a la dreta). A continuació comento que, per respondre la pregunta, no cal calcular el pendent, ja que basta fer un raonament de tipus proporcional: si en 2 hores ha augmentat 3 graus, llavors en una hora augmenta 1,5°. Li dic a l'Anna G. que també contesti l'apartat *b*.

A: Anna G. respon correctament que és 1/4.

P: Després li demano que respongui l'apartat *c*.

A: No sap què respondre.

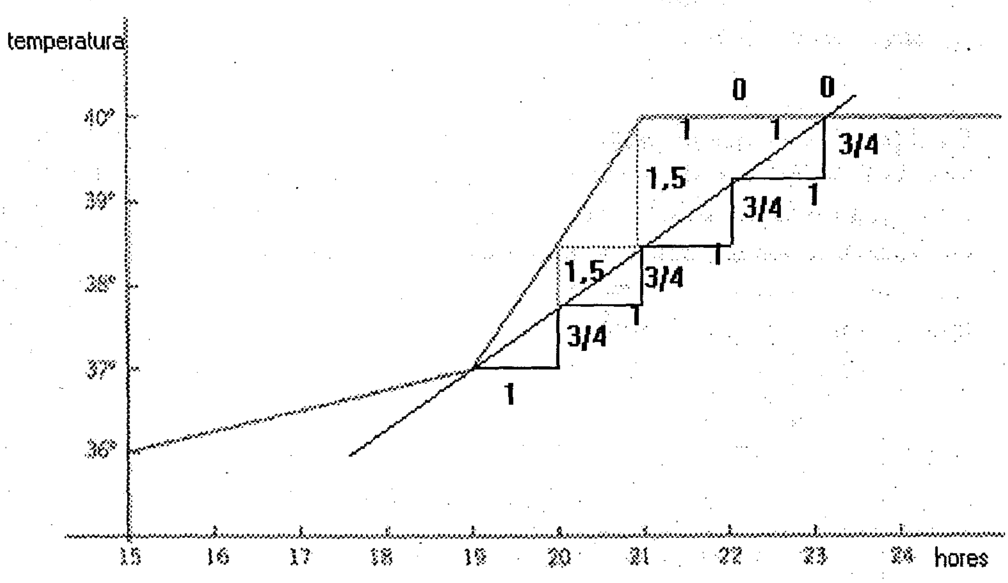
P: Explico que l'augment per hora entre les 15 h i les 19 h és el mateix que entre les 16 h i les 18 h perquè els punts estan sobre la mateixa recta. Li torno a demanar a Anna G. que respongui l'apartat *d*.

A: Respon correctament que són 4 hores.

P: Pregunto quants graus ha augmentat per hora. A continuació explico que si ha augmentat 3° en 4 hores, és com si hagués augmentat 3/4° per hora.

A: Sembla que no ho entenen

P: Repeteixo l'explicació remarcant que no és que hagi augmentat 3/4° per hora sinó que és "com si" hagués augmentat 3/4°. I sobre la gràfica comento l'augment real sobre la gràfica i l'augment sobre la recta secant.



A: Laura N. Comenta que "és com si fes la mitjana".

P: Aprofito la intervenció de Laura N. per fer la següent analogia: si vas per l'autopista i fas 100 km en una hora i després estàs una hora parat dinant, és com si haguessis anat a una velocitat de 50 km/h, encara que el que realment passa és que en la primera hora has fet 100 km i en la segona no n'has fet cap. A continuació els hi dic que llegeixen el comentari que segueix a l'activitat 5.

A: Es posen a llegir-lo, però molts aprofiten per parlar entre ells d'altres coses.

P: Veient que no estan llegint, decideixo explicar el comentari. Faig observar que en els apartats *b* i *c* de l'activitat anterior han vist que el quocient $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ (*amb* $x_1 < x_2$) no varia quan els punts (x_1, y_1) i (x_2, y_2) estan sobre el mateix segment de recta i que el valor d'aquest quocient ens dóna el pendent de la recta que s'obté en perllongar el segment. En canvi, a l'apartat *d* de l'activitat anterior, han vist que, a vegades, cal calcular el quocient $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ entre dos punts que no estan sobre el mateix segment de recta. Comento que també es pot utilitzar aquest quocient amb gràfiques que no estan formades per segments de rectes, és a dir, en gràfiques corbes. Després els dic que responguin l'activitat 6.

A: Es posen a llegir l'activitat 6.

P: Comento que el baròmetre és un aparell que serveix per mesurar la variació de la pressió atmosfèrica i que aquestes variacions es poden utilitzar per fer prediccions sobre el temps. Toca el timbre i els dic que acabin aquesta activitat a casa seva.

Valoracions

1) L'ambient de treball és bo, però en aquesta hora (8 a 9 del matí) estan molt adormits i he de marcar molt el ritme perquè treballin.

2) He notat una millora en relació a les classes anteriors a l'hora de buscar el pendent a partir de la gràfica.

3) El fet de convertir el dibuix en una gràfica a l'activitat 4 no ha creat cap tipus de problema, però he de vigilar que no facin això en d'altres situacions en què no sigui correcte. De totes maneres, malgrat el perill de reforçar la idea que la gràfica és un dibuix de la situació, crec que l'activitat 4 és força interessant per treballar la taxa mitjana de variació.

4) Crec que basta fer l'activitat 4 i després generalitzar a partir d'ella. No calen més

exemples perquè els alumnes entenguin que hi ha funcions que tenen la gràfica formada per segments de rectes.

4) Sembla que entenen: 1)que el quocient $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ es pot aplicar a gràfiques formades per segments de rectes i 2) que aquest quocient coincideix amb el pendent de la recta que resulta de perllongar el segment de recta.

5) Crec que és convenient passar el qüestionari 3 per esbrinar el grau de comprensió del concepte de pendent d'una recta.

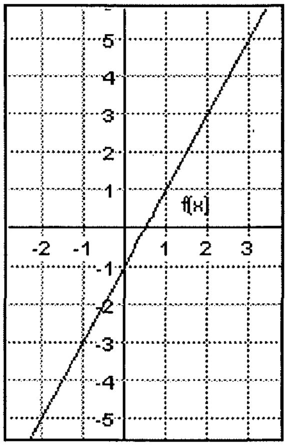
5.2.3. Subseqüència 1 d'avaluació. Qüestionari 3

En el moment d'elaborar la unitat, vam fer la hipòtesi que, com a resultat de la instrucció anterior a la implementació de la unitat, els alumnes tindrien un objecte personal de pendent, el significat del qual incorporaria pràctiques en les quals s'havien d'aplicar els sentits geomètric, algèbric, funcional i trigonomètric. La implementació feta a l'aula fins a aquesta sessió havia servit, d'una banda, per avaluar si els alumnes realment tenien aquest objecte personal, i d'altrra banda, per construir-lo parcialment. Una de les conclusions que havíem tret de la nostra intervenció a l'aula és que el sentit geomètric estava construït, mentre que el sentit trigonomètric del pendent no estava prou assolit i que, per tant, l'havíem d'anar treballant al llarg de tota la unitat.

No estàvem del tot segurs que els significats algèbric i funcional estiguessin prou construïts, per la qual cosa vam decidir passar el qüestionari 3. Aquest qüestionari té per objectiu realitzar una activitat d'avaluació formativa per analitzar si el significat personal del contingut <<pendent>> dels alumnes els permet utilitzar-lo en contextos en què han de posar en funcionament el sentit algèbric i el funcional. Concretament, es tracta de proposar unes activitats als alumnes per esbrinar si les seves produccions són compatibles o contradictòries amb la hipòtesi que han desenvolupat un significat personal que els permet utilitzar els sentits algèbric i funcional del contingut pendent.

El qüestionari que vam elaborar fou el següent:

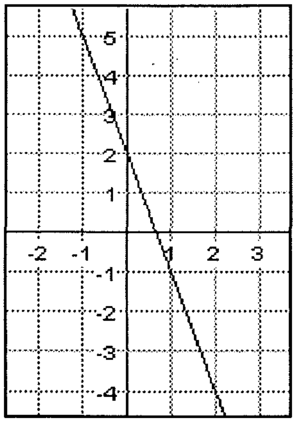
QÜESTIONARI 3



1 Troba el pendent de la funció que té aquest gràfic:

Resposta: pendent = ...

Justificació de la resposta:



2 Troba el pendent de la funció que té el gràfic següent:

Resposta: pendent = ...

Justificació de la resposta:

3 Digues quin és el pendent de les funcions afins següents:

Funció	Pendent
$y = -2x+3$	
$y = 3 - x$	
$y = x+3$	
$y = 3x+3$	

Justificació de la resposta:

4 Una funció afí ve donada per la taula següent:

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	1	3	5	7	9

El seu pendent és =....... *Justificació de la resposta*:

5. Completa els comentaris següents perquè siguin correctes per a la funció $f(x) = 5x+ 1$:

Joan:	Si ens situem en un punt qualsevol de la recta i ens desplacem una unitat cap a la dreta,, després ens hem de desplaçar .... fins a tornar a tocar la recta.
Anna:	Si ens situem en un punt qualsevol de la recta i ens desplacem .... cap a la dreta, després ens hem de desplaçar 10 unitats cap amunt en vertical fins a tocar la recta.

6 Per a una funció $f(x)=ax + b$ explica quin és el significat del pendent a.

Aquest qüestionari es va passar a la meitat dels alumnes a l'hora B del divendres 21-11-97 i a l'altra meitat el divendres 28-11-97.

Sessió 21-11-97

Planificació prèvia

1) Passar el qüestionari 3 sobre el contingut pendent.
2) Utilitzar la 2a part de la classe per comentar els resultats del qüestionari.

Desenvolupament de la sessió

Faltes: No falta cap alumne.

P: Distribueixo els 20 alumnes perquè facin el qüestionari 3 individualment. El reparteixo i els faig observar que l'han de contestar individualment. També dic que ningú suspendrà pels errors comesos en les respostes del qüestionari i que l'objectiu és saber si han progressat en la comprensió del concepte de pendent en relació al qüestionari 2.

A: Es posen a treballar individualment per respondre el qüestionari 3. Tarden entre 20 minuts (el primer de lliurar-lo) i 35 minuts (l'últim).

P: Mentre anaven lliurant el qüestionari, he anat mirant les seves respostes. Quan els he recollit tots passo a comentar-les. Respecte de la primera i segona preguntes (trobar el pendent a partir de la gràfica) comento que són la mateixa que la primera i la tercera del qüestionari 2 i dic quins alumnes van respondre bé, regular o malament en el qüestionari 2:

No ho tenien clar: Jordi A., Laura A., Jessica C., Raúl B., Raúl C., Mike D., Esther E., Javier F., Jaime G., Isabel G.

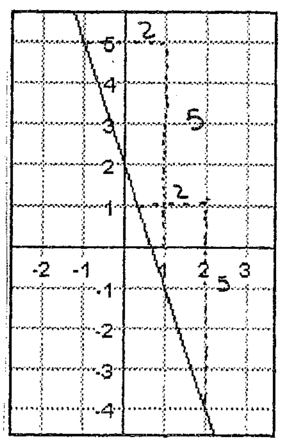
Regular (van contestar bé la pregunta 1 o 3): Sandra D., Alfonso D., Pilar G.

Ho tenien clar (van contestar bé les preguntes 1 i 3): Alex A., Victor B., Alberto C., Jordi C., Patricia F., Raquel G., David G., Sergio G.

A: Observo que queden molt sorpresos davant el fet que jo sàpiga qui ho tenia clar, regular o malament. Encara que tots manifesten estar d'acord amb la meva apreciació.

P: Com que tots han respost bé la primera pregunta , faig sortir a la pissarra Patricia F. i Raúl B. els quals han respost malament la 2a pregunta.

A: Patricia F. escriu a la pissarra la seva resposta a la pregunta 2:



2 Troba el pendent de la funció que té el gràfic següent:

Resposta: pendent = $\frac{5}{2}$...............

Justificació de la resposta:

Pendent = $\frac{\text{alçada}}{\text{base}} = \frac{5}{2}$

(Mirant la gràfica)

Patricia s'adona del seu error mentre reprodueix la resposta: ha comptat malament les unitats horitzontals i ho diu.

P: M'aproximo a la pissarra i li senyalo que també s'ha deixat el signe menys.

A: Patricia fa un gest amb la cara i veig que també entén que no ha tingut en compte que les 5 unitats van cap avall.

P: Li dic a Victor B. que comptar malament les unitats també ha estat el seu error.

A: Victor em respon que ja se n'ha adonat.
A: Mentrestant Raúl B, ha posat a l'altra part de la pissarra la seva resposta a la pregunta 2: -1/3.

P: Li pregunto a Raúl B., si sap quin és el seu error.

A: Raúl B. diu que creu que s'ha equivocat perquè ha dividit base per altura quan hauria d'haver dividit altura per base.

P: Li responc que és així i faig observar a Mike D. que aquest també ha estat el seu error.

A: Mike D. em fa un gest que jo interpreto que vol dir que ja se'n ha adonat.

P: Faig observar a Raquel G. que el seu error és diferent, que és un problema de notació, ja que el pendent és -3 no és $-3x$ (la seva resposta).

A: Raquel G em fa un gest que jo interpreto que vol dir que ho entén.

P: En relació a la 3a pregunta, faig observar el seu error a Isabel G. (ha contestat que el pendent de $y = 3 - x$ és 1) i a Raquel G. que ha contestat $-1x$, $-1x$, $1x$ i $3x$.

A: Raquel G. respon que ha posat la x a tot arreu.

P: En relació a la 4a pregunta, faig observar a Pilar G. que ha contestat $2x$ en comptes de 2 i pregunto a Jordi C., per què ha contestat 4.

A: Jordi C., diu que ha representat la gràfica i que després ha buscat el pendent, però que s'ha equivocat. També diu que entén que ha de ser 2.

P: Faig observar a Mike D. que la seva resposta no és correcta (ha contestat 1), a Raquel G. que ha tornat a posar la x (ha respost $2x$) i Raúl B. que també s'ha equivocat (ha respost -1/2).

A: Mike D., no fa cap comentari, Raquel G. torna a dir que ha posat la x a tot arreu i Raúl B. diu que ha comès el mateix error que a la pregunta 2.

P: En relació a la quinta pregunta, comento que l'únic error és de Laura A. que ha respost 6 en comptes de 5.

A: Laura A. diu que no entén per què ha posat 6, que ella es pensava que posava 5.

P: Comento que en general les respostes són correctes, que es nota una clara millora en la comprensió del concepte de pendent i que probablement tornaré a passar més endavant un qüestionari semblant per veure què és el que realment han assimilat del concepte de pendent.

Valoracions

1) Observo que els alumnes accepten de bon grat fer els qüestionaris, encara que no comptin per a la nota.

2) Crec que és molt positiu fer comentaris sobre les seves respostes a les preguntes dels qüestionaris anteriors. Això fa que estiguin més disposats a contestar els nous qüestionaris i crec que això els fa tenir la sensació que en les meves classes cap alumne passa desapercebut, que no es poden amagar entre la massa.

3) Observo que no hi ha bromes ni comentaris burlescos quan un alumne surt a comentar els seus errors.

4) En relació al contingut pendent, una primera lectura de les respostes dels alumnes posa de manifest una clara millora en la comprensió dels sentits algèbric i funcional del contingut pendent d'una recta.

Valoració de les respostes

Primera pregunta

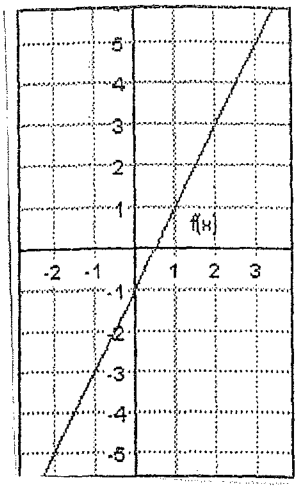
Totes les respostes a la primera pregunta són correctes. Analitzant-les es poden considerar tres grups d'alumnes:

1) Els que utilitzen explícitament el quocient $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ sense cap referència al fet que el pendent ens dóna l'augment vertical per unitat horitzontal (3 alumnes) .

2) Els que utilitzen explícitament el quocient $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ fent algun tipus de referència al fet que el pendent ens dóna l'augment vertical per unitat horitzontal (3 alumnes).

3) Els que calculen el quocient variació vertical / variació horitzontal sense cap referència al quocient $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ o bé fent-hi referències incorrectes (14 alumnes).

Aquests 3 tipus de respostes responen a procediments diferents. El primer grup té molt clar que el pendent és $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ i el que fan és buscar a la gràfica dos punts de la recta de coordenades enteres per poder aplicar aquesta fórmula. Per exemple Jordi A. ha respost:



1 Troba el pendent de la funció que té el gràfic següent.

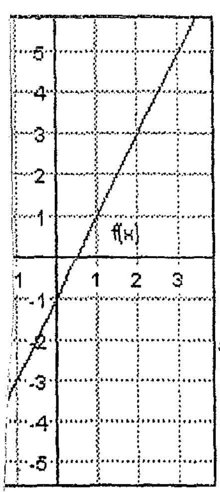
Resposta: pendent = ...2..........

Justificació de la resposta:

$$\frac{j(x_2) - j(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{1 - 5}{1 - 3} = \frac{-4}{-2} = 2$$

En la resposta d'aquest alumne, la gràfica només s'utilitza per trobar les coordenades de dos punts.

El segon grup són alumnes que en aquest cas han utilitzat el quocient $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ (igual que els del primer grup) però que en d'altres preguntes han determinant sobre la gràfica una variació horitzontal i la corresponent variació vertical per fer a continuació el quocient variació vertical / variació horitzontal (igual que els del tercer grup). Per exemple, Jaume G. dona la resposta següent:



1 Troba el pendent de la funció que té el gràfic següent:

Resposta: pendent = ...2.............

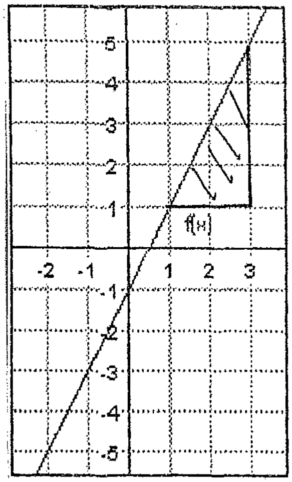
Justificació de la resposta:

$$\text{pendent} = \frac{g(x_2) - g(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$\text{pendent} = \frac{3 - 1}{2 - 1} = \frac{2}{1} = 2$$

per cada unitat que ens desplacem cap a la dreta ens hem de desplaçar dues cap amunt

Els alumnes del tercer grup utilitzen que el pendent s'obté dividint la variació vertical per l'horitzontal i molts d'ells utilitzen la gràfica per dibuixar un triangle. Per exemple Pilar G., respon el següent:



1 Troba el pendent de la funció que té el gràfic següent:

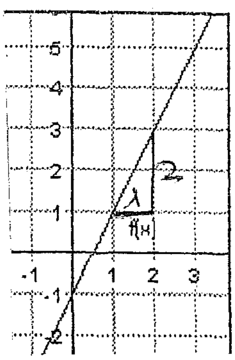
Resposta: pendent = ...2.......

Justificació de la resposta:

pendent $= \frac{4}{2} = 2$

La variació vertical entre la variació horitzontal ens dóna el pendent.

Cal esperar que alumnes del primer grup puguin utilitzar el procediment del tercer grup i viceversa, i així es manifesta en algunes de les respostes a les altres preguntes del qüestionari. Però no és així en tots els casos, com es dedueix de la resposta de l'alumne Albert C., que és l'únic del tercer grup que fa una referència, encara que incorrecta, al quocient $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$. La seva resposta fou:



1 Troba el pendent de la funció que té el gràfic següent:

Resposta: pendent = ...2/1=2..

Justificació de la resposta:

augment vertical entre augment horitzontal

$\frac{f(x)}{x} = \frac{2}{1} = 2$

Segona pregunta.

Les respostes correctes són 16. Els tres grups descrits a la primera pregunta es comporten igual. Només un alumne del segon grup (Raúl B.) dóna ara una resposta sense utilitzar el quocient $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ Les 4 respostes incorrectes corresponen a 3 alumnes del tercer grup (Patricia F., Victor B., i Mike D.) i a aquest alumne del segon grup (Raúl B.). Els errors són els següents: a) errors en comptar les unitats (Patricia F. I Victor B.).
b) errors en el signe (Patricia F. i Mike D.).
c) dividir la variació horitzontal per la variació vertical (Mike D. i Raúl B.).

Cal remarcar que hem considerat com a resposta correcta la de Raquel G. que ha contestat -3*x*.

Tercera pregunta

Tots els alumnes responen correctament menys una alumna (Isabel G.), que en la recta $y = 3 - x$ respon 1. Dels 20 alumnes, n'hi ha 18 que justifiquen la seva resposta dient que el pendent és el nombre que multiplica la x. Només dos no ho fan (Jordi A. i Javier F.). Aquests dos alumnes són del primer grup i en cap de les sis preguntes del qüestionari manifesten reconèixer el significat algèbric del pendent. Això fa que la seva resposta a la pregunta 3 no sigui clara en un cas (Jordi A) i en l'altre (Javier F.) s'expliqui el procediment següent:

FAIG UNA TAULA DE VALORS PER A CADA FUNCIÓ, LES REPRESENTO GRÀFICAMENT I DESPRÉS FAIG SERVIR LA FÓRMULA: PENDENT $= \dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$

Quarta pregunta

La contesten correctament 17 dels 20 alumnes que componen el grup. Els tres que responen incorrectament són:

1) Raúl B ha respost -1/2. Aquest alumne ha aplicat el quocient $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ als punts de la taula determinats per la primera i segona columnes, però ha agafat la primera fila com les imatges, i la segona com les abscisses. És probable que no estigui acostumat a les taules horitzontals.

2) Mike D., que ha respost 1 i no ha donat cap justificació.

3) Jordi C., ha respost 4 . Aquest alumne després manifestà de paraula que primer va representar la gràfica però després es va equivocar buscant el pendent.

En les respostes correctes es detecten els següents procediments:

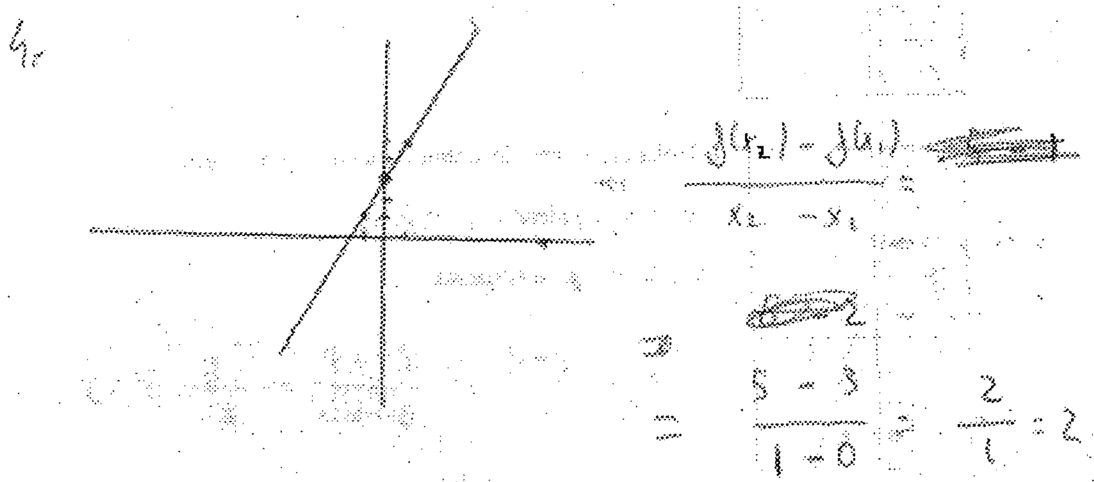
1) Agafar dos punts de la taula i aplicar el quocient $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$. Aquest procediment el manifesten 10 alumnes (50%). Per exemple, Esther E. dóna la resposta següent:

El seu pendent és = 2 *Justificació de la resposta*

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{7-5}{2-1} = \frac{2}{1} = 2$$

Molts d'aquests alumnes són dels que hem agrupat en el tercer grup en la primera pregunta. Això vol dir que hi ha alumnes que segons la forma de presentació de la funció utilitzen un procediment o un altre. Si la funció es presenta en forma de taula utilitzen que el pendent és $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ i ho apliquen a dos punts de la taula, mentre que si la forma de presentació de la funció és la gràfica el que fan és dibuixar un triangle rectangle d'hipotenusa un segment de la recta i a partir d'ell calculen el quocient de la divisió de la variació vertical per l'horitzontal.

2) 2 alumnes (10%) dibuixen la gràfica a partir de la taula i després calculen el pendent calculant el quocient de la divisió de la variació vertical per l'horitzontal (Albert C.) O bé utilitzant el quocient $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ (Jordi A.) La resposta de Jordi A. fou:



3) 5 (25%) alumnes utilitzen el següent procediment: 1) busquen la fórmula a partir de la taula i 2) utilitzen que el pendent és el nombre que multiplica a la x en la fórmula. Tres d'aquests alumnes no expliquen com han trobat la fórmula, mentre que dos si que ho fan. En l'explicació d'aquests alumnes es veu clarament com el model $y = ax + b$ i el sentit algèbric del pendent juga un paper fonamental. Per exemple Raquel G. dóna la resposta següent:

4 Una funció afí ve donada per la taula següent:

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	1	3	5	7	9

El seu pendent és =..2X.. *Justificació de la resposta*:

la funció serà: $y = 2x+3$.

Perquè veiem que subs. donen els resultats.

El terme independent ho hem sabut quan x era 0, veiem que un nº multiplicat per 0 és 0 i com que dona el resultat 3, el terme indep. ha de ser per força 3.

*1 (pel darrere).

→ sabent això, veiem fàcilment que si x és -1, busquem un nº (el pendent) multiplicat per -1 i més 3 dona 1, llavors deduïm que el pendent (el nº que multiplica a l'x ha de ser 2). També veiem que es verifica amb els altres resultats.

Quinta pregunta

19 alumnes donen la resposta correcte. Laura A. contesta 6. Pel que va manifestar la Laura A. a la classe la seva resposta és un descuit.

Sexta pregunta

1) 15 alumnes fan referència al sentit geomètric: "el pendent determina la inclinació de la recta"
2) 10 alumnes fan referència al sentit algèbric: "és el nombre que multiplica a la x".
3) 7 alumnes fan referència al sentit funcional: "és el nombre d'augments verticals per augments horitzontal".
4) Cap alumne fa una referència prou clara al sentit trigonomètric.
5) 12 alumnes només fan referència a un sol sentit.
6) 4 fan referència a dos sentits.
7) 4 fan referència a tres sentits.

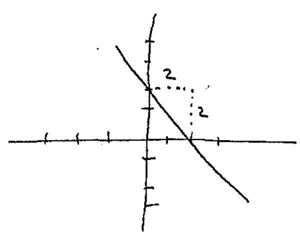
La resposta més elaborada és la de Patricia F. que respon el següent:

6/ En la fórmula $f(x) = ax + b$ el pendent de la recta sempre serà $\underline{\underline{a}}$. Exemples:

$f(x) = 2x - 3$ Pendent $= 2$
$f(x) = -x + 1$ Pendent $= -1$
} el pendent és el número que multiplica la $\underline{\underline{x}}$

* El pendent és la inclinació que té una recta. Quan més gran és el pendent més gran és l'inclinació.
La fórmula per trobar el pendent pot ser: $\text{Pendent} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$
on x_2 i x_1 són dos punts qualsevols de la recta.

Gràficament podem trobar el pendent mirant la recta i aplicant: $\text{Pendent} = \frac{\text{alçada}}{\text{base}}$



$\text{Pendent} = \frac{\text{alçada}}{\text{base}} = \frac{2}{2} = 1$

Conclusions generals

1) La conclusió general és que efectivament la majoria de la classe sap utilitzar els sentits geomètric, algèbric i funcional del pendent i que cal treballar el sentit trigonomètric.

2) Comparant les respostes de les preguntes 1 i 3 del qüestionari 2 amb les d'aquest qüestionari es nota un gran progrés amb molts alumnes, especialment en el grup que utilitzava les taules per trobar les fórmules. Si bé en el qüestionari 2 es preguntava la fórmula i en aquest només el pendent, el tipus de resposta fa suposar que hi ha un desplaçament del model <<taula>> al model <<tipus de funció>> i és d'esperar que quan es torni a passar el qüestionari 2 molts alumnes hagin abandonat el model taula. És de suposar que un alumne com, per exemple, Jaume G. que en la primera pregunta del qüestionari 2 va donar la resposta següent:

Resposta: f(x) = ...x...1

Justificació de la resposta:

x	y
-2	-5
-1	-3
0	-1
1	1
2	3

i en la primera pregunta del qüestionari 3 ha donat la resposta de la pàgina 361, serà un alumne que quan es torni a passar el qüestionari 2, encara que hagi passat molt temps, tindrà més recursos per respondre correctament.

Subseqüència 2 (Continuació)

Sessió 25-11-97

Planificació prèvia.

1) Treballar, com a mínim, les activitats 6-9
2) Determinar si saben construir el concepte de taxa mitjana de variació a partir del concepte de pendent d'una recta.
3) Determinar si entenen que la taxa mitjana de variació d'una funció entre dos punts sempre és constant si la gràfica és una recta, mentre que si la gràfica és una corba varia al llarg de la corba.

Desenvolupament de la sessió.

Faltes: Angela L., Toni G. i Laura A.

P: Començo la classe recordant el que hem fet fins ara:

1) Hem utilitzat el quocient $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ per trobar el pendent d'una recta.

2) Hem utilitzat aquest quocient en gràfiques que estan formades per segments de rectes (problema dels ports de muntanya).

3) Hem utilitzat aquest quocient entre dos punts que no són sobre el mateix segment de recta (apartat *d* de l'activitat 5).

4) Ara utilitzem aquest quocient en funcions que tenen per gràfica una corba.

Observo que quasi tots han fet l'activitat 6 a casa seva i faig sortir a Sergi G. a la pissarra.

A: Sergi G. Surt a la pissarra i utilitza el quocient $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ per respondre correctament a les tres preguntes de l'apartat *a* de l'activitat 6. Suposa que a les 12 h i a les 18 h correspon una pressió de 975 mbar/h i això li fa concloure que entre les 12 h i les 18 h la taxa mitjana de variació és zero.

P: Li dic que està bé i tot seguit faig un comentari explicant que el resultat obtingut és la variació per hora. Insisteixo que entre les 12 h i les 18 h primer ha pujat i després ha baixat, però és <<com si>> no hagués variat. Que els 4,1 mbar/h obtinguts entre les 18 h i les 24 h és <<com si>> hagués augmentat 4,1 mbar/h cada hora. Insisteixo en el <<com si>> i ho relaciono amb el concepte de mitjana aritmètica.

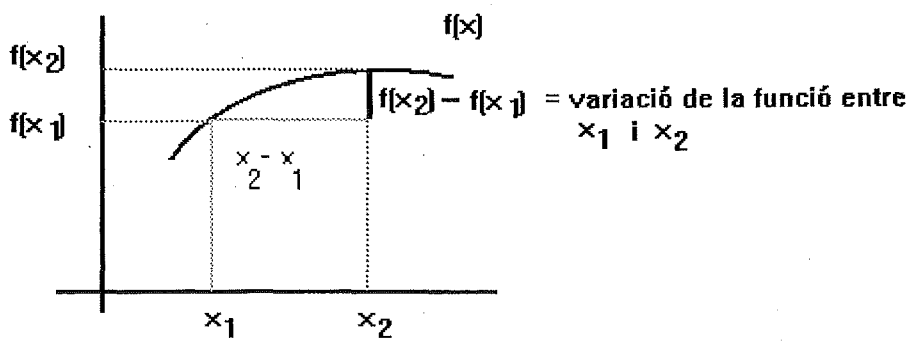
A continuació pregunto a tota la classe quin pronòstic farien a les 12 h, a les 18 h i a les 24 h (apartat *b*).

A: Responen tots plegats dient que a les 12 h i a les 18 h farà mal temps i que a les 24 h el farà bo.

P: Els faig llegir el <<Recorda>> que segueix a l'activitat 6.

A: Es posen a llegir-lo.

P: Explico el <<Recorda>> dibuixant la figura següent a la pissarra senyalant amb la mà quin segment és la variació $f(x_2) - f(x_1)$ i quin segment és $x_2 - x_1$.



Insisteixo que el quocient $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ ens dóna la variació de la variable dependent, per unitat de la variable independent. A continuació dic que facin l'activitat 7.

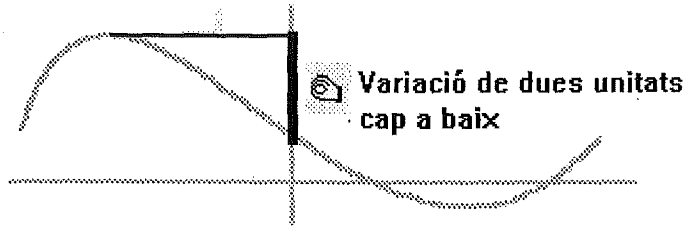
A: Es posen a fer l'activitat.

A: Alex A. i Albert C. reclamen la meva atenció individual per aclarir que és exactament la variació de la funció entre dos valors de l'abscissa. El seu problema és que confonen la variació total amb la variació per unitat.

P: Pregunto a David R. quina és la variació entre -2 i 0.

A: David R. diu que és -2.

P: Dibuixo la gràfica a la pissarra i explico que aquesta resposta es pot donar directament a partir de la gràfica, fent-los observar que per anar des del punt (-2,3) fins el punt (0,1) s'ha de baixar dues unitats



També els faig veure que aquesta variació es pot trobar simbòlicament: $f(0) - f(-2) = 1-3 = -2$.

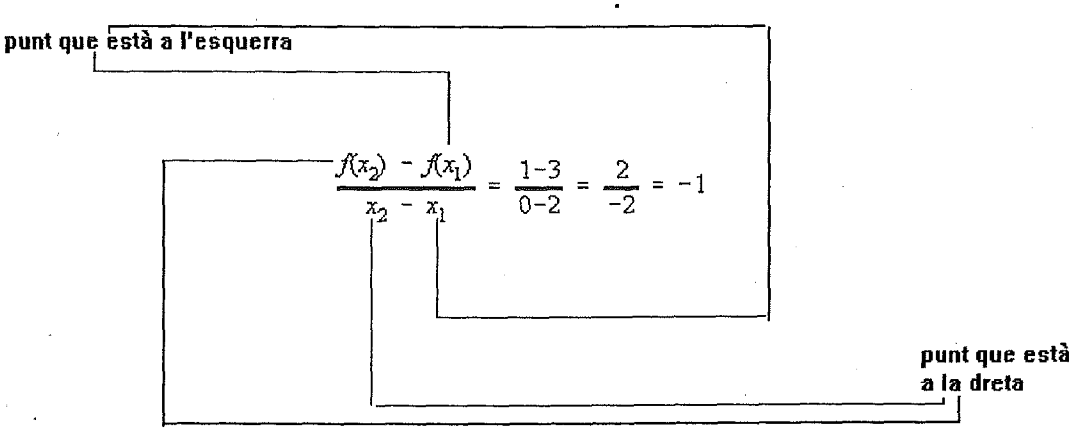
Pregunto a Alicia M., quina és la taxa mitjana de variació (apartat *b*).

A: Alicia M., respon que és -1.

P: Explico que si vaig dues unitats cap a la dreta i dos per avall és com si anés una unitat cap avall per cada unitat que vaig cap a la dreta. O bé simbòlicament així:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{1-3}{0-2} = \frac{2}{-2} = -1$$

Remarco a la pissarra quines són les coordenades del punt de l'esquerra i quines són les del punt de la dreta:



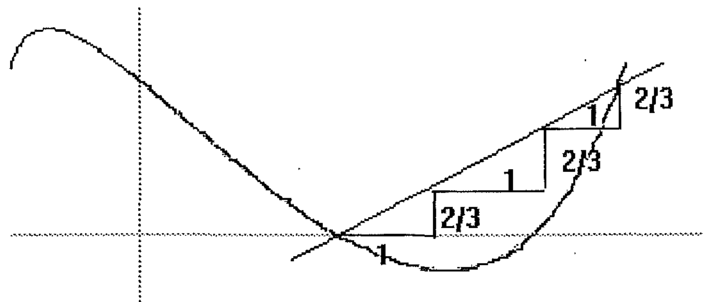
Li pregunto a Esther E. quina és la resposta de l'apartat *c*.

A: Esther E. contesta que és 2.

P: Li pregunto també quina és la taxa mitjana de variació.

A: Respon que és 2/3.

P: Per tal de preparar el significat geomètric de la taxa mitjana de variació explico a la pissarra el significat de l'apartat *d*. Els faig observar que la gràfica entre 1 i 4 primer baixa i després puja, però és <<com si>> per cada unitat cap a la dreta s'hagués pujat 3/4 d'unitat cap amunt. També comento que si haguéssim anat en línia recta seria una recta de pendent 3/4.



Dic que facin l'activitat 8 i comento que hauran d'aplicar el quocient $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ perquè no tenim la gràfica.

A: Alberto C. reclama la meva atenció i pregunta si cal fer el gràfic per respondre l'activitat 8.

P: Li dic que si vol ho pot fer i després observar la variació vertical i horitzontal sobre el gràfic, però que és millor utilitzar el quocient $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$, i com que el veig una mica perdut, li explico que el valor 5, que és el que està més a la dreta, és x_2, que $f(x_2)$ és $f(5)$ (que es pot trobar utilitzant la fórmula) i que x_1 és 1.

A: Pilar G. també reclama la meva atenció particular perquè no sap com ha de buscar el quocient $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

P: Li faig una explicació semblant a la que he fet a Alberto C.

A: Els altres alumnes van treballant.

A: Laura N. reclama la meva atenció i, tota sorpresa, em pregunta com és que per a la funció $g(x) = x^2$ no surt igual la t.m.v. entre 1 i 5 que entre 1 i 4, mentre que en el cas de $f(x) = 2x - 3$ sí.

P: Li dic que $f(x)$ és una reca i que $g(x)$ té per gràfica una corba.

A: Laura N. Pregunta com ho sé.

P: Li dic que ho sé pel tipus de fórmula.

A: Ah sí! (sembla que s'adona que $f(x)$ és una recta i $g(x)$ és una paràbola).

P: Faig sortir a la pissarra a Jordi C.

A: Jordi fa una taula de valors i aplica el quocient $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ per calcular correctament la taxa mitjana de variació per a la funció $f(x)$ entre 1 i 4 i 1 i 5.

P: Intervinc per fer-los observar que en els dos casos surt el mateix: el pendent de la recta.

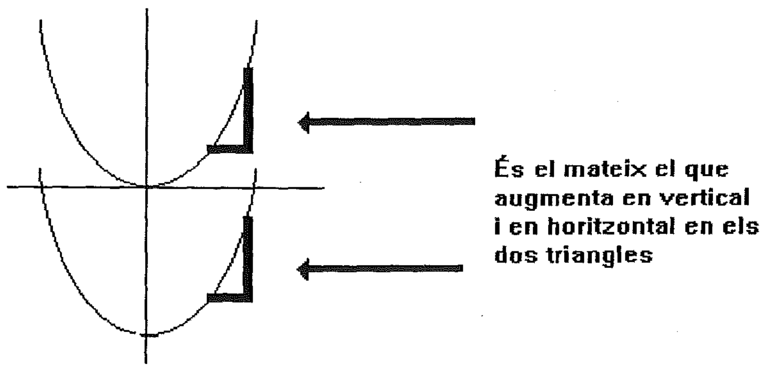
A: Jordi calcula la taxa mitjana de variació per a la funció $g(x)$ i $h(x)$ de la mateixa manera que ha calculat la de $f(x)$. Per exemple, per a la funció $g(x)$ escriu:

x	y	
1	1	$\longrightarrow$ (1 , 1)
5	25	$\longrightarrow$ (5 , 25)
4	16	$\longrightarrow$ (4 , 16)

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{25-1}{5-1} = \frac{24}{4} = 6$$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{16-1}{4-1} = \frac{15}{3} = 5$$

P: Faig observar que per a les funcions $g(x)$ i $h(x)$ la taxa mitjana de variació entre 1 i 4 surt diferent que entre 1 i 5, però que la taxa mitjana de variació entre 1 i 4 és la mateixa per a les funcions $g(x)$ i $h(x)$ i passa igual amb la taxa mitjana de variació entre 1 i 5. A continuació explico per què passa això últim posant la figura següent a la pissarra:



Comento que la funció $h(x)$ resulta de fer una translació en vertical de tres unitats cap avall a la funció $g(x)$, i que l'augment vertical i l'horitzontal són iguals en els dos triangles. Remarco que el que augmenta en vertical és el mateix en els dos casos encara que l'altura on comencem no sigui la mateixa. Després dic que facin l'activitat 9.

A: Es posen a treballar

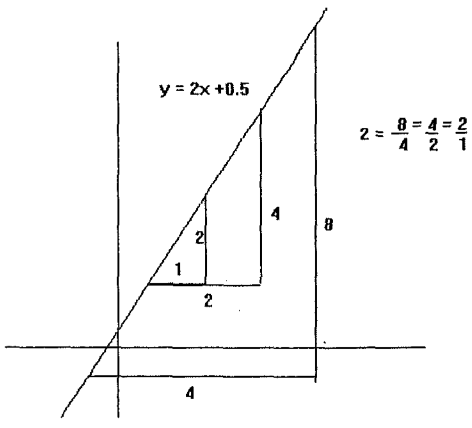
P: Pregunto a tota la classe si en general el resultat de calcular la taxa mitjana de variació depèn dels valors escollits.

A: Laura N. i Jordi C. responen de seguida que sí.

P: Pregunto si hi ha algun tipus de funció en la qual la taxa mitjana de variació no depengui dels valors escollits.

A: Laura N. respon de seguida que la recta.

P: Explico per què passa això amb les rectes amb l'exemple següent:



Després dic que, si d'una funció no sabem a quina família pertany, però sabem que la seva taxa mitjana sempre és constant, llavors podem assegurar que és una funció afí $f(x) = ax + b$ que té per gràfica una recta. A continuació llegeixo i comento el paràgraf que segueix a l'activitat 9 i dic que facin l'activitat 10 per al proper dia.

Valoracions

1) Noto una gran millora en l'actitud dels repetidors Alex A. i Alberto C. Crec que el fet de no saber quin dia puc passar un qüestionari i, fonamentalment, l'apercebiment del Consell Escolar per acumulació de faltes fa que s'hagin replantejat la seva assistència a classe. En canvi Angela L. continua amb la mateixa actitud.

2) Crec que han construït el concepte de taxa mitjana de variació a partir de generalitzar el concepte de pendent d'una recta.

3) Crec que entenen que la taxa mitjana de variació d'una funció entre dos punts sempre és constant si la gràfica és una recta, mentre que si la gràfica és una corba varia al llarg de la corba.

4) Tinc la sensació que en les activitats de la unitat es treballa poc el concepte de variació d'una funció.

5.2.5 Subseqüència 3. Velocitat mitjana i instantània

Aquesta subseqüència està formada per les activitats 12-15 i pretén determinar els següents ítems del subobjectiu 3.3:

26 Entendre la velocitat mitjana com un cas particular de taxa mitjana de variació.
27 Entendre el concepte de velocitat instantània com el límit de les velocitats mitjanes.

L'objectiu de l'activitat 12 és que l'alumnat observi que el quocient $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ (*amb* $x_1 < x_2$) aplicat a funcions que expressen la relació entre l'espai recorregut i el temps transcorregut és la velocitat mitjana que ja ha treballat en cursos anteriors i probablement a la matèria de Física del batxillerat. Després d'una reflexió respecte del significat d'anar a 150 km/h en un moment determinat, a l'activitat 13, l'alumnat ha de calcular la velocitat mitjana d'una pedra que cau durant un temps determinat per intervals cada cop més petits i dir a quin valor s'aproximen aquestes velocitats mitjanes. L'objectiu d'aquesta activitat és utilitzar l'experiència personal de l'alumnat amb el velocímetre del cotxe i el concepte de límit, treballat a la unitat anterior, per definir la velocitat instantània com el límit de les velocitats mitjanes quan $t \to t_0$

$$v(t_0) = \lim_{t \to t_0} v_m(t_0, t) = \lim_{t \to t_0} \frac{d(t) - d(t_0)}{t - t_0}$$

Les activitats 14 i 15 estan pensades perquè l'alumnat calculi velocitats instantànies utilitzant la tècnica de resoldre la indeterminació 0/0 fent la factorització del numerador i la del denominador que han treballat a la unitat anterior.

Aquesta subseqüència va ocupar mitja sessió del 26-11-97 i la sessió del 27-11-97.

Sessió 26-11-97

Planificació prèvia

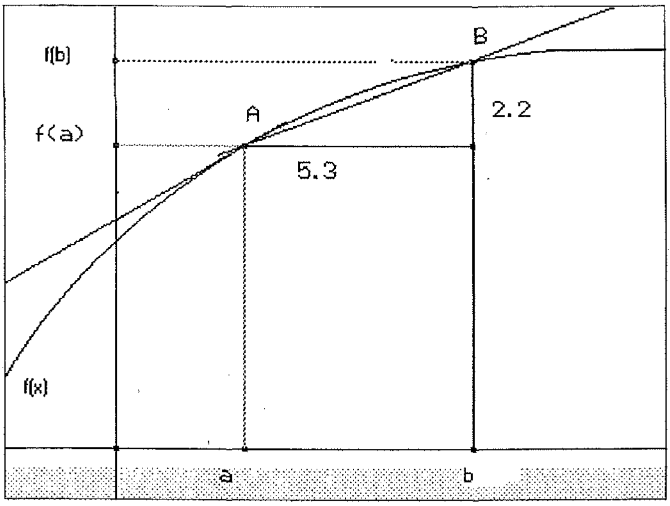
1) Acabar la subseqüència 2 fent les activitats 10 i 11.
2) Començar la subseqüència 3.

Desenvolupament de la sessió.

Falten:. Elia G., Patricia F., Esther E., Jordi Ll., i Mike D. Una d'aquestes alumnes (Elia

G.) ha tingut un accidente i faltarà força temps. P. F. i J. Ll. han anat a acompanyar-la.

P: Recordo que havien de portar feta l'activitat 10 i dibuixo la figura de l'activitat a la pissarra



Li dic a Silvia V. que respongui l'apartat *a* d'aquesta activitat.

A: Silvia V. respon que el pendent de la recta AB és 2,2/5,3 = 0,415.

P: Pregunto a Sandra D. quina és la taxa mitjana de variació entre *a* i *b* (apartat *b*).

A: Sandra respon que és 2,2/5,3 .

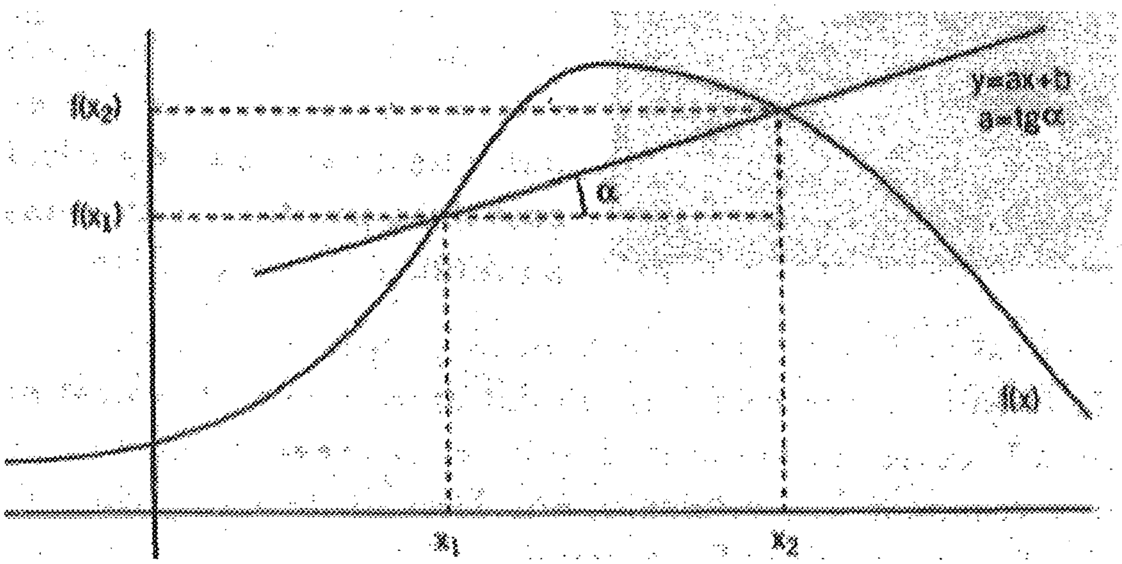
P: Pregunto a Jaime G. quina relació hi ha entre la taxa mitjana de variació de la funció $f(x)$ entre $x = a$ i $x = b$ i el pendent de la recta secant que passa pels punts A i B.

A: Jaime G repon que és el mateix.

P: Faig una explicació per a tota la classe remarcant les dues idees següents:

- En aquesta activitat no sabem les coordenades del punt $(x_1, f(x_1))$ ni les del punt $(x_2, f(x_2))$. Ara bé, podem aplicar el quocient $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ perquè sabem que $f(x_2) - f(x_1) = 2{,}2$ i que $x_2 - x_1 = 5{,}3$.
- El significat geomètric de la taxa mitjana de variació és el següent: el pendent de la recta secant a la gràfica que passa pels punts $(x_1, f(x_1))$ i $(x_2, f(x_2))$.

A continuació dic que això està recollit en el <<Recorda>> que segueix a l'activitat 10 i dibuixo a la pissarra la figura del <<Recorda>>, connectant els significats funcional, algèbric i trigonomètric:



$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = a = \text{tg}\ \alpha$$

Dic que facin l'activitat 11.

A: Es posen a fer- la i comenten el tema entre ells.

P: Recrimino a Lluís J. G. que tingui un peu sobre la cadira.

A: Retira el peu de la cadira.

A: A la classe del costat hi ha molt de soroll perquè falta el professor.

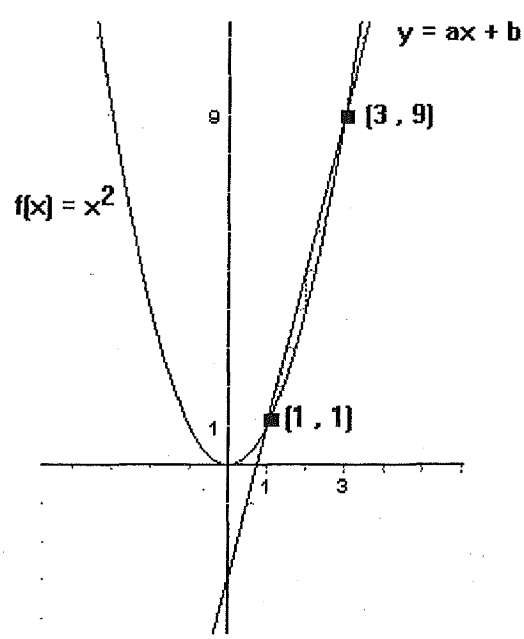
P: Vaig a la classe del costat i faig callar els alumnes.

P: Faig sortir a la pissarra a David G. perquè faci l'apartat *a* de l'activitat 11.

A: David escriu a la pissarra el següent:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{9-1}{3-1} = \frac{8}{2} = 4$$

P: Completo el que ha fet David dibuixant a la pissarra la gràfica de $f(x) = x^2$ amb la recta secant que passa pels punts (1 , 1) i (3 , 9).



I comento una mica com s'ha de resoldre l'apartat b. Dic que la recta secant té una fórmula tipus $y = ax + b$ i, com que ja sabem que $a = 4 \Rightarrow y = 4x + b$, pregunto a tota la classe com es pot trobar el paràmetre b, quina informació puc utilitzar per calcular b.

A: Alguns alumnes responen que s'ha d'utilitzar que la recta passa pels punts (1 , 1) i (3 , 9).

P: Dic que n'hi ha prou amb un dels dos punts per trobar la b.

A: Es posen a calcular la b.

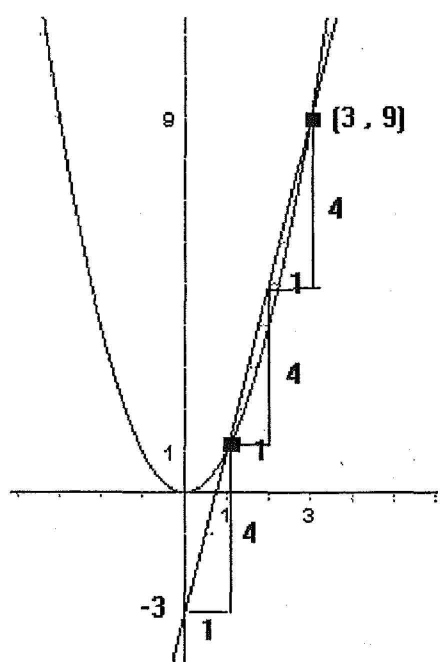
P: Al cap d'uns minuts faig sortir Raúl C. a la pissarra.

A: Raúl utilitza el punt (3,9) i troba correctament la b.

$$9 = 4 \cdot 3 + b \Rightarrow 9 - 12 = b \Rightarrow -3 = b$$

A: Jordi C. diu que no entén que si la recta passa pel punt (3 , 9) i pel punt (1 , 1) pugui tallar a l'eix d'ordenades en el -3.

P: Faig la següent explicació gràfica a la pissarra perquè ho entengui:



A: Jordi posa cara d'entendre l'explicació.

A: Laura N. demana atenció particular i em pregunta si és igual agafar el punt (3 , 9) que el punt (1 , 1).

P: Li dic que sí i que ho comprovi repetint el procés amb el punt (1 , 1).

A: Jordi A., demana atenció particular i em fa la mateixa pregunta que Laura N.

P: Li dic que sí i que ho comprovi repetint el procés amb el punt (1 , 1).

P: Faig observar a tota la classe que és igual utilitzar el punt (3 , 9) que el punt (1 , 1) i repeteixo el càlcul de l'ordenada a l'origen, utilitzant el punt (1 , 1) de la manera següent:

La recta $y = 4x + b$ passa pel punt (1 , 1)

Això vol dir que les coordenades d'aquest punt compleixen aquesta igualtat, és a dir, que substituint la y per 1 i la x també per 1, es compleix la igualtat:

$$1 = 4 \cdot 1 + b \Rightarrow 1 - 4 = b \Rightarrow -3 = b$$

Dic que facin l'apartat *c* de l'activitat 11.

A: Es posen a treballar.

P: Al cap d'una estona faig sortir a la pissarra Elisabeth G.

A: Elisabeth G. ho fa correctament i posa el següent a la pissarra:

1	2
3	14

$$a = \frac{14 - 2}{3 - 1} = \frac{12}{2} = 6$$

$$y = 6x + b$$
$$14 = 6 \cdot 3 + b \Rightarrow -4 = b$$
$$y = 6x - 4$$

P: Torno a comentar que en comptes del punt (3 , 14) es pot agafar el punt (1 , 2) i que surt el mateix resultat.

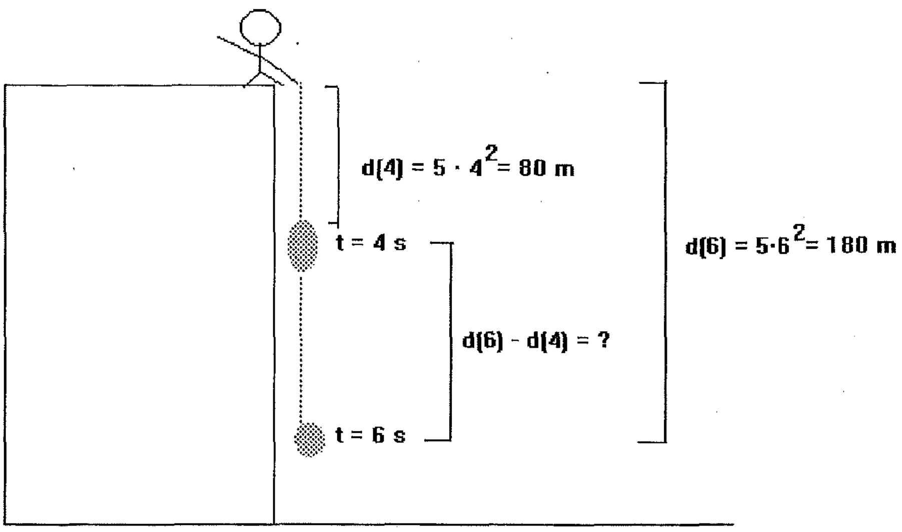
P: A continuació faig un comentari sobre la importància de la taxa mitjana de variació i de com s'utilitza en moltes situacions de la vida quotidiana. Després els faig llegir el text de l'apartat <<Aplicacions de la taxa mitjana de variació>>.

A: Es posen a llegir-lo, però bastants, més que llegir, parlen entre ells.

P: Al cap d'una estona faig un resum del text i insisteixo en la idea que hi ha algunes taxes mitjanes de variació molt importants i que per això tenen nom propi, i que la més important de totes elles és la velocitat mitjana. A continuació comento que el quocient $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ que hem utilitzat fins ara, també es pot aplicar a funcions que expressen la relació entre l'espai recorregut i el temps transcorregut com és el cas de l'activitat 12 i els dic que la facin.

A: Es posen a fer-la.

P: Al cap d'una estona observo un cert desconcert entre l'alumnat, per la qual cosa decideixo comentar una mica l'activitat 12. Faig i comento el dibuix següent a la pissarra, per resoldre l'apartat *a*:



Al cap d'una estona faig sortir Laura A., a la pissarra per fer l'apartat *b*.

A: Laura A respon correctament i posa a la pissarra: $d(6) - d(4) = 18 - 80 = 100$ m i $t = 2$ s.

P: Pregunto a Raquel G. quina és la resposta de l'apartat *c*.

A: Raquel dubta bastant i al final respon que és 50 m/s.

P: Li pregunto per què.

A: Raquel diu que ha dividit els metres, que són 100, entre el temps, que són 2 segons.

P: Dic que la resposta de la Raquel és correcta i pregunto a tota la classe quin és l'espai recorregut per la pedra des que l'hem tirada fins que ha arribat a terra.

A: Molts contesten 272 m.

P: Poso al dibuix de la pissarra que l'altura de l'edifici és 272 m.

P: Pregunto a tota la classe quant temps ha trigat a caure.

A: No hi ha cap resposta.

P: Pregunto com puc utilitzar la fórmula $d(t) = 5t^2$ per trobar el temps que ha trigat la pedra a caure.

A: Alguns alumnes responen que buscant el temps que tarda la pedra a recórrer els 272 m.

P: Poso a la pissarra $272 = 5t^2$ i els dic que han de calcular el temps.

P: Al cap d'uns minuts faig sortir David R. a la pissarra per fer els apartats *d* i *e* .

A: David escriu el següent a la pissarra:

apartat *d*

$$d(5) - d(3) = 125 - 45 = 80 \,, \quad \text{velocitat} = 80/2 = 40 \text{ m/s}$$

$$d(7) - d(2) = 245 - 20 = 225 \,, \quad \text{velocitat} = 225/5 = 45 \text{ m/s}$$

apartat *e*

$$272 = 5t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{272}{5}} \Rightarrow t = 7{,}4 \text{ s} \,, \quad \text{velocitat} = 272/7{,}4 = 36{,}8 \text{ m/s}$$

P: A continuació explico el <<Recorda>> que segueix a l'activitat 12, remarcant que, si $d(t)$ és la fórmula que ens dóna l'espai recorregut per un mòbil en funció del temps, anomenarem velocitat mitjana entre dos instants el quocient entre l'espai recorregut i el temps transcorregut, i que aquest quocient no és més que la taxa mitjana de variació que ja han treballat

$$v_m(t_1, t_2) = \frac{\textit{espai recorregut}}{\textit{tempstranscorregut}} = \frac{d(t_2) - d(t_1)}{d_2 - d_1}$$

perquè $d(t)$ és com si fos $f(x)$ i t_1 i t_2 com si fossin x_1 i x_2

També dic que el proper dia treballarem un concepte molt important: la velocitat instantània, concepte que tothom hauria de tenir clar per poder entendre el que explicarem després. Acaba la classe i dic que intentin fer l'activitat 13 per al proper dia.

A: Sandra D. em diu que té un problema familiar i que demà no podrà venir a classe.

P: Li dic que no es preocupi, però que demà tractarem un concepte important: la velocitat instantània i que intenti d'entendre aquest concepte a les properes classes.

Valoracions

1) Segueix el bon ambient de classe, però avui han faltat molts alumnes, encara que tres ho han fet per l'accident d' Elia G. L'absentisme de Mike D. comença a ser molt greu.

2) Crec que ha quedat clara la interpretació geomètrica de la taxa mitjana de variació com el pendent de la recta secant.

3) Crec que també ha quedat clara la relació entre la taxa mitjana de variació i la velocitat mitjana, ja que l'alumnat entén que la velocitat mitjana no és més que la taxa de variació quan la funció és la que ens dóna l'espai a partir del temps.

4) He notat certes dificultats en relació a la velocitat mitjana en l'activitat 12. Crec que els alumnes tenen molt clar que la velocitat és espai dividit per temps, però mostren dificultat per aplicar aquesta fórmula quan es tracta de trobar la velocitat mitjana entre dos instants. Decideixo parlar amb el seminari de Física i Química per esbrinar com han treballat la velocitat aquests alumnes.

5) L'alumnat ha entès que la taxa mitjana de variació d'una funció entre dos valors de la variable independent està molt present en la vida diària de les persones.

Sessió 27-11-97

Planificació prèvia

1) Acabar la subseqüència 3 fent les activitats 13-15.

2) He parlat amb el seminari de Física i he sabut que aquests alumnes no han treballat el concepte de velocitat. De fet, aquests alumnes només saben sobre la velocitat allò que han treballat a l'EGB. Això explica les dificultats que vaig observar per calcular la velocitat mitjana entre t_1 i t_2. Per la qual cosa treballarem amb molta calma l'activitat de la velocitat instantània (13).

3) Assegurar-me que els alumnes que van faltar ahir entenguin els conceptes de velocitat mitjana i de velocitat instantània.

Desenvolupament de la sessió.

Faltes. Elia G.(baixa) , Alex A., Toni G., Angela L., Raquel G. i Mike D. Elia G. faltarà un mes i mig. Mike D. ja no ve quasi mai i Toni G. està en tractament i falta molt.. Els altres crec que no han vingut perquè la classe és a les 8 del matí. Sandra D., que em va dir que no podria venir, al final ha vingut

P: Li pregunto a Sandra D. com té el seu problema familiar.

A: Diu que s'ha pogut organitzar per venir a classe.

P: Pregunto quants alumnes han fet l'activitat 13.

A: 8 alumnes aixequen el braç.

P: Insisteixo en la importància del tema que ara tractarem i començo fent un resum del que hem treballat fins ara:

- Vam estudiar el pendent d'una recta i vam veure que es calculava mitjançant el quocient $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$
- Després vam veure que aquest quocient es podia aplicar a funcions que tenien una gràfica formada per segments de rectes.
- També vam veure com aquest quocient s'aplicava a funcions que tenien gràfiques que eren corbes; i com ens donava l'augment de la variable dependent, per unitat de la variable independent
- Després vam donar nom a aquest quocient: taxa mitjana de variació entre x_1 i x_2
- A continuació vam veure que aquest quocient és el pendent de la recta secant que passa pels punts $(x_1, f(x_1))$ i $(x_2, f(x_2))$.
- També vam comprovar que aquest quocient s'aplica en moltes situacions diferents, algunes de les quals són tan importants que tenen nom propi, com és el cas de la velocitat mitjana.
- Després de veure que la velocitat mitjana era una taxa mitjana de variació. vam fer un repàs d'aquest concepte.

Comento les dificultats que he observat respecte de la velocitat mitjana i els dic que, si bé tothom sap que la velocitat mitjana és espai partit per temps, resulta que hi ha alumnes que tenen dificultats a l'hora de calcular la velocitat mitjana entre dos instants. Després explico com es troben l'espai i el temps entre dos instants, utilitzant com a exemples els apartats de l'activitat 12. A continuació comento que, si traduïm la notació de física ($d(t)$) a la notació que habitualment utilitzem en matemàtiques per a les funcions ($f(x)$), s'observa que la velocitat mitjana és una taxa mitjana de variació. Escric a la pissarra el següent:

Física	Matemàtiques
$d(t)$	$f(x)$
$\textit{velocitat mitjana} = \dfrac{d(t_2) - d(t_1)}{d_2 - d_1}$	$t.m.v. = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

Segueixo comentant que la dificultat per trobar la velocitat mitjana entre dos instants augmenta quan estan molt pròxims (per exemple 2 i 2,00001) i encara més quan s'ha d'entendre la diferència entre la velocitat mitjana i la velocitat instantània.

P: Pregunto si la velocitat que marca el velocímetre és mitjana o instantània. I quan un conductor va a 150 km/h, el multen per anar a una velocitat mitjana de 150 km/h o bé perquè en aquell moment anava a una velocitat de 150 km/h?

A: Responen que el velocímetre marca la velocitat instantània i no la mitjana.

P: A continuació plantejo com la policia determina, sense radar, que un conductor va a una velocitat de 150 km/h per poder-lo multar. Explico que dos policies es posen molt a prop l'un de l'altre, per exemple a 100 m de distància, i que amb un cronòmetre saben l'instant en què el cotxe passa per on són ells. És a dir, que la policia el que fa és mesurar la velocitat mitjana entre dos instants molt pròxims (observo molt d'interès en els alumnes per aquesta explicació). A continuació poso la taula de l'activitat 13 a la pissarra i comento que s'hi ha de buscar la velocitat mitjana entre dos instants molt pròxims. Pregunto qui ha fet l'activitat 13 i faig sortir a la pissarra Laura N., que ha aixecat la mà.

A: Laura completa la taula a la pissarra:

a)

temps	t	3	2,5	2,1	2,01	2,001	2,0001	.....	→2
$v_m(2, t)$	$\dfrac{d(t) - d(2)}{t - 2}$	25	22,5	20,5	20,05	20,005	20,0005	......	→20

i diu que les velocitats mitjanes s'aproximen a 20 m/s

P: Li faig escriure com ha fet els càlculs de la primera i de l'última columnes.

A: Escriu

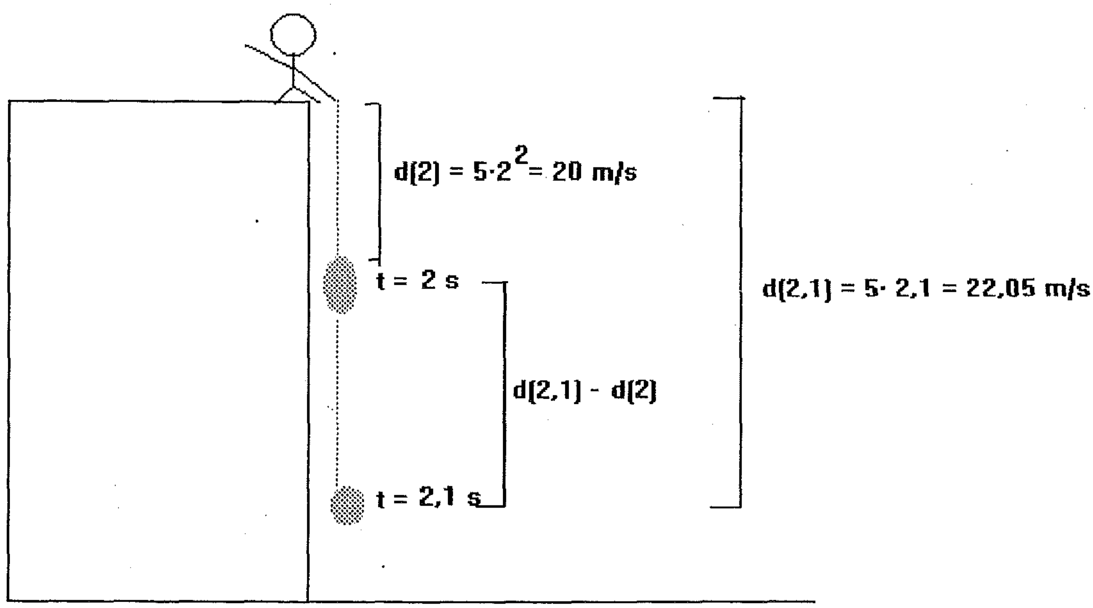
$$\frac{d(3) - d(2)}{3 - 2} = \frac{45 - 20}{3 - 2} = 25\ m/s$$

$$\frac{d(2{,}0001) - d(2)}{2{,}0001 - 2} = \frac{20{,}00200005 - 20}{0{,}0001} = 20{,}0005\ m/s$$

P: Pregunto a Esther E. i a Patricia F. (les dues havien faltat el dia anterior) si ho entenen.

A: Responen que no.

P: Faig un resum del problema 12 (amb dibuix inclòs) i acabo calculant la velocitat mitjana entre 2 i 2,1 .



$$velocitat\ mitjana\ entre\ 2\ i\ 2{,}1 = \frac{d(2{,}1) - d(2)}{2{,}1 - 2} = \frac{5{\cdot}2{,}1^2 - 5{\cdot}2^2}{2{,}1 - 2} = \frac{22{,}05 - 20}{0{,}1} = 20{,}5\ m/s$$

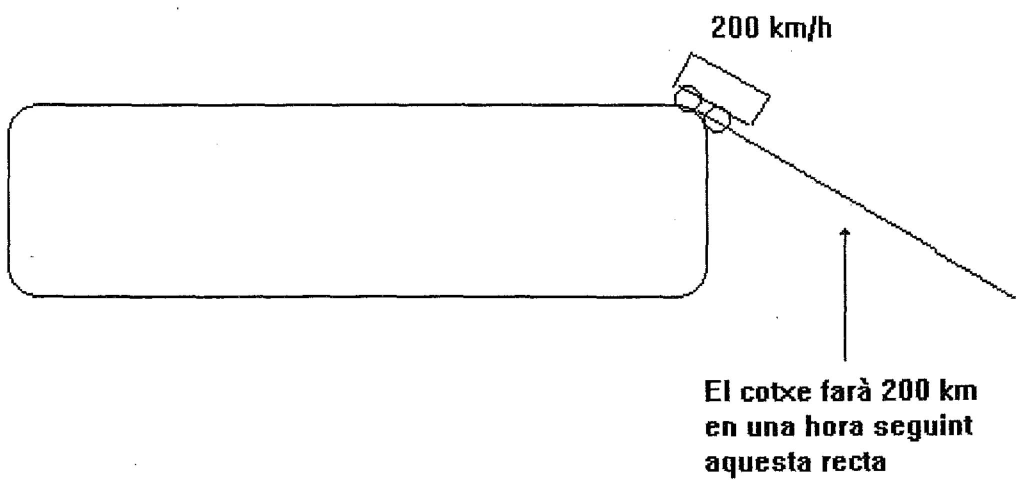
P: Pregunto a Esther E. i a Patricia F. si ara ho entenen.

A: Les dues responen que sí.

P: Els faig observar a tots que en el tema de límits havíem fet taules d'aquest tipus i que d'aquesta es dedueix que quan el temps s'aproxima a dos, els intervals es fan cada cop més petits i que les velocitats mitjanes s'aproximen a 20 m/s. A continuació dic que el nombre 20 m/s s'anomena velocitat instantània per a $t_0 = 2$ s (resposta de l'apartat *b*). Després dic que acabin de respondre l'activitat 13.

A: Els alumnes responen l'apartat *c* de l'activitat 13 dient que la velocitat que marca el velocímetre del cotxe no és la mitjana sinó la instantània.

P: Per clarificar més el concepte de velocitat instantània explico què vol dir anar a 200 km/h i sortir d'un circuit de carreres.



A continuació explico el <<Recorda>> que segueix a l'activitat 13, remarcant que, si $d(t)$ és la fórmula que ens dóna l'espai recorregut per un mòbil en funció del temps, al nombre $v(t_0)$ al qual s'aproximen les velocitats mitjanes $v_m(t_0, t)$ quan $t \to t_0$, l'anomenarem velocitat instantània a l'instant t_0, i escric a la pissarra el següent:

$$v(t_0) = \lim_{t \to t_0} v_m(t_0, t) = \lim_{t \to t_0} \frac{d(t) - d(t_0)}{t - t_0}$$

i tradueixo aquestes expressions amb les paraules següents: la velocitat instantània és el límit de les velocitats mitjanes, és a dir, el límit de les taxes mitjanes de variació, quan la funció és la que ens dóna l'espai sabent el temps i quan els intervals de temps són cada cop més petits

P: Pregunto als alumnes si ha quedat clar el concepte de velocitat instantània perquè és molt important que l'entenguin.

A: Responen que sí.

P: Vaig preguntant directament a alguns alumnes si ho han entès.

A: Els alumnes contesten que sí.

P: A continuació dic que facin l'activitat 14, en la qual han de calcular la velocitat instantània en $t_0 = 3$, i comento que ara no cal fer una taula com la de l'activitat 13, perquè poden utilitzar el que ja saben de límits, ja que de fet tenim una indeterminació del tipus 0/0 . Escric a la pissarra:

$$v(3) = \lim_{t \to 3} = \lim_{t \to 3} \frac{5t^2-45}{t-3} = \frac{0}{0} \approx \lim_{x \to 3} \frac{5x^2-45}{x-3}$$

A: Es posen a fer l'activitat 14.

P: Al cap d'uns minuts faig sortir Patricia F. a la pissarra.

A: Patricia calcula el límit utilitzant les identitats notables i escriu :

$$\lim_{t \to 3} \frac{5t^2-45}{t-3} = \lim_{t \to 3} \frac{5(t-3)(t+3)}{t-3} = \lim_{t \to 3} 5(t+3) = 30 \ m/s$$

P: Dic que facin l'activitat 15, en la que tot és igual, però s'ha canviat la funció que ens dóna l'espai sabent el temps.

A: Es posen a fer l'activitat 15.

P: Observo que quasi tots ho fan bé, n'hi ha que utilitzen les identitats notables i d'altres, Ruffini. També observo que alguns empren la lletra t, mentre que d'altres usen la lletra x. Observo que Alberto C. s'ha equivocat aplicant Ruffini i li ho faig veure.

A: Alberto rectifica el seu error i calcula correctament les tres velocitats de l'activitat 15.

P: El faig sortir a la pissarra.

A: Alberto respon correctament i escriu el següent, per a $t_0 = 2$ s:

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & 0 & -4 \\ 2 & & 2 & 4 \\ \hline & 1 & 2 & 0 \end{array}$$

$$\lim_{t \to 2} \frac{t^2-4}{t-2} = \lim_{t \to 2} \frac{(t-2)(t+2)}{t-2} = \lim_{t \to 2} (t+2) = 4 \; m/s$$

i calcula de manera semblant les velocitats instantànies per a $t_0 = 3$ s i per a $t_0 = 4$ s

P: Faig observar que Patricia F. ha resolt la indeterminació 0/0 utilitzant les identitats notables, mentre que Alberto C. ho ha fet utilitzant la divisió per Ruffini.

Valoracions

1) En aquests moments hi ha molt bon ambient a classe. El que em preocupa més és el nombre de faltes d'assistència (3 o 4 alumnes cada dia).

2) Ha estat una classe en què he intervingut molt per explicar la velocitat instantània. Malgrat que sembla que ho han entès, crec que he de passar el qüestionari 4 per avaluar el significat que té per a ells aquest objecte. Tinc dubtes que amb l'explicació d'avui n'hi hagi prou, sobretot si tinc en compte que no havien treballat la velocitat a la classe de Física.

3) El fet d'haver treballat el càlcul de límits a partir de taules crec que ha facilitat molt la comprensió que les velocitats mitjanes s'aproximen a un nombre (activitat 13).

4) El domini de la tècnica de la resolució de la indeterminació 0/0 ha permès resoldre molt ràpidament les activitats 14 i 15.

5) En relació als ítems 26 i 27 del subobjectiu 3.3

Ítem 26	Crec que els alumnes han entès que la velocitat mitjana és un cas particular de taxa mitjana de variació.
" 27	Crec que els alumnes han entès que la velocitat instantània és el límit de les velocitats mitjanes d'una manera molt superficial

5.2.6. Subseqüència 1 d'avaluació. Qüestionari 3 (continuació)

Sessió 28-11-97

Planificació prèvia

1) Passar el qüestionari 3 sobre el pendent a la segona meitat de la classe.
2) Utilitzar la 2a part de la classe per comentar els resultats del qüestionari.

Desenvolupament de la sessió

Faltes:. Ester G. s'ha donat de baixa i el grup ha passat a ser de 40 alumnes, 19 dels quals formen aquest subgrup. Falten Angela L. i. Elia G., per la qual cosa contesten el qüestionari només 17 alumnes.

P: Distribueixo els 17 alumnes perquè facin el qüestionari 3. El reparteixo i els faig observar que l'han de contestar individualment perquè l'objectiu és saber si han progressat en la comprensió del concepte de pendent en relació al qüestionari 2.

A: Es posen a treballar individualment. Tarden entre 23 minuts (el primer en lliurar-lo) i 32 minuts (l'últim).

P: A mesura que lliuraven el qüestionari he anat mirant les seves respostes. Després de recollir-los tots passo a comentar-los. Respecte de la primera i segona preguntes (trobar el pendent a partir de la gràfica) comento que són les mateixes rectes que les de la primera i la tercera preguntes del qüestionari 2. A continuació, dic quins alumnes havien respost bé, regular o malament en el qüestionari 2:

No ho tenien clar: Alicia M., Judit P., Eva P. i Maria L. V.

Regular (van contestar bé la pregunta 1 o 3): Toni G., L. Javier G. i Alfonso M.

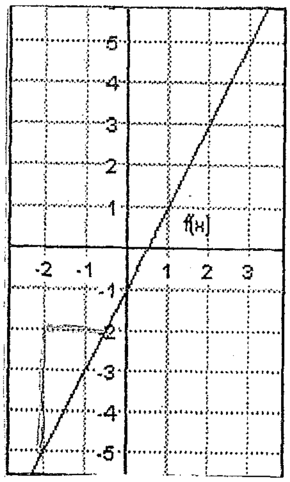
Ho tenien clar (van contestar bé les preguntes 1 i 3): Sergio G., Ana G., Elia G., Elisabeth G., Jordi L., Angela L., David M., Laura N., Rocio P., David R i Silvia V.

Li comento a Oscar T. que ell es va incorporar al grup quan ja havíem passat el qüestionari 2.

A: Observo, tal com va passar amb l'altre grup, que queden molt sorpresos davant el fet que jo sàpiga qui ho tenia clar, regular o malament, encara que tots semblen estar d'acord amb la meva apreciació.

P: Tots responen bé la primera pregunta excepte Maria L. V, que ha respost -3 i Laura N, que ha respost $2x$. Faig sortir a la pissarra a Maria. L. V perquè escrigui la seva resposta.

A: Maria. L. V. reprodueix la seva resposta a la pissarra:



1 Troba el pendent de la funció que té el gràfic següent:

Resposta: pendent = ...-3............

Justificació de la resposta:

la pendent és llargada en vertical per llargada en horitzontal: en desplaço 4 a horitzontal i 3 en vertical. $-\frac{3}{1} = -3$

P: Li faig observar que ha comès dos errors: 1) ha comptat malament les unitats i 2) no ha tingut en compte que, a més d'anar cap avall, també ha anat cap a l'esquerra. Poso a la pissarra -2/-1=2.

A: Sembla que Maria L.V. entén els seus dos errors i així ho manifesta.

P: Faig observar a Laura N. que ha respost $2x$ en comptes de 2.

A: Laura sembla que s'adona de seguida del seu error.

P: Dic que tots els altres alumnes han respost correctament la primera pregunta i passo a comentar la segona. Li dic a Laura N. que ha tornat a posar $-3x$ en comptes de -3.

A Oscar T. i Maria. L. V. els dic que la seva resposta és 3 i que no és correcta perquè, malgrat que per una unitat que ens desplacem en horitzontal ens desplacem 3 cap amunt en horitzontal, ens desplacem cap a l'esquerra, i poso a la pissarra 3/-1 = -3.

A Rocio P. Li dic que la seva resposta també és 3, però el seu error ha estat oblidar-se que l'abscissa del punt (-1, 5) és negativa quan ha aplicat el quocient $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ als punts (-1, 5) i (0 , 2).

A Toni G. li dic que el seu error és més estrany, ja que ha calculat correctament l'equació de la recta $y = -3x + 2$ i ha respost que el pendent és -1,5 i li faig veure que sembla no tenir clar que el pendent és el nombre que multiplica a la x. També l'adverteixo que si continua faltant tant a classe tindrà greus problemes de seguiment.

A: Toni respon que no ho tenia clar.

P: Passem a corregir la pregunta 3. Dic que Laura N. ha posat la x a tot arreu, que Elisabeth G. ha confós el terme independent amb el pendent i a tot arreu ha respost 3. Les altres respostes són correctes, excepte en el cas de la recta $y = 3 - x$, que, pel fet de no estar escrita de la manera habitual ha provocat l'error dels alumnes següents: 1) Alfonso M. ha respost en blanc, 2) Toni G. Ha respost 1, 3) Anna G. i Oscar T. han respost 3.

A: Elisabeth G. i els altres alumnes diuen que entenen per què s'han equivocat.

P: Passo a comentar la pregunta 4 i dic que aquesta activitat és un tipus de problema que no havíem treballat a classe, que té per objectiu veure si saben calcular el pendent en situacions noves. A continuació li dic a Toni G. que ha fet el mateix que amb la segona pregunta, és a dir, que ha trobat la fórmula de la recta correctament $y = 2x + 3$, però no relaciona el nombre que multiplica la x amb el pendent (sembla que el que fa, després de trobar la fórmula $y = ax + b$, és a/b, ja que el que ha fet en la segona pregunta és -3/2 = -1,5 i en aquesta és 2/3 =0,6). Li torno a dir que si continua faltant tant a les classes no podrà seguir el que fem. Després explico que per respondre aquesta pregunta basta agafar dos punts de la taula i aplicar el quocient $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ o bé fixar-se que, quan passem de la 3a columna a la quarta, fem una unitat a la dreta (1-0) i dues en vertical cap amunt (5-3). Li dic a Maria L. V si sap quin és el seu error.

A: Maria. L. V diu que sí.

P: Comento que Laura N. i David M. han deixat la resposta en blanc i els pregunto per què.

A: Responen que no sabien què fer.

P: Comento que Elisabeth G. s'ha equivocat perquè ha contestat que el pendent és -2 i que el seu error ha consistit a aplicar malament el quocient $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

A: Elisabeth G.diu que ja s'adonat del seu error.

P: Li dic a Anna G. que no basta posar $y = ax + b$ sinó que s'ha de dir quin és el valor del pendent.

A: Anna G. diu que no sabia què respondre.

P: Li dic a Alicia M. que no entenc per què ha respost 0.

A: Alicia M. respon que ella tampoc.

P: Comento les respostes a la pregunta 5 i dic que totes són correctes menys la d'Oscar T.

A: Oscar diu que la seva resposta és correcta, però que s'ha despistat i ha posat els nombres a l'inrevés.

P: A continuació comento les respostes a la pregunta 6 fent-los observar que, si bé totes les respostes són correctes, n'hi ha hagut de més completes que d'altres. No puc estendre'm en comentar les respostes a la pregunta 6 perquè toca el timbre.

Conclusions

1) He observat que els alumnes accepten de bon grat fer els qüestionaris i que no hi ha bromes ni ridiculització de les respostes incorrectes.

2) Observo que el significat personal dels alumnes s'ha desenvolupat en relació al que tenien abans de començar la unitat, però sembla que encara hi ha tres alumnes que tenen un significat personal molt limitat (Oscar T., Maria L. V. i Toni G.).

Valoració de les respostes del dia 28-11-97 al qüestionari 3

Primera pregunta

15 (88%) de les 17 respostes són correctes. Laura N. respon *2x* en comptes de 2 i Maria L. V. respon -3. L'anàlisi de les respostes permet detectar els tres grups observats en l'anàlisi de les respostes del dia 21-11-97:

1) Els que utilitzen explícitament el quocient $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ sense cap referència al fet que el pendent ens dóna l'augment vertical per unitat horitzontal (2 (12% alumnes)).

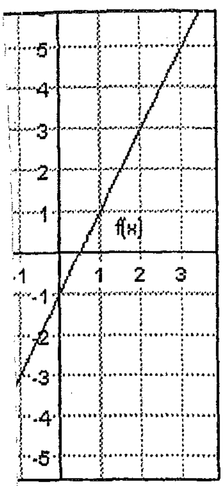
2) Els que utilitzen explícitament el quocient $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ fent algun tipus de referència al fet que el pendent ens dóna l'augment vertical per unitat horitzontal (3 (18%) alumnes)

3) Els que calculen el quocient variació vertical / variació horitzontal sense cap

referència al quocient $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ o bé fent referències incorrectes (11 (65%) alumnes).

4) Un quart grup format per un sol alumne (6%) (Sergio G.), que utilitza el procediment següent:

- Suposa que la gràfica té una fórmula del tipus $y = ax+b$
- Determina b utilitzant la gràfica per trobar el punt de tall amb l'eix d'ordenades.
- Un cop ha trobat b, per determinar a, agafa un punt de la gràfica i suposa que aquest punt compleix l'equació $y = ax+b$.



1 Troba el pendent de la funció que té el gràfic següent:

Resposta: pendent = ...2...............

Justificació de la resposta:

$f(x) = ax + b$

GRAFIC

X	Y
0	-1
1	1

Si la x la substituim per 0 ens donarà la lletra b, raonant el resultat de a si $b = -1$:

$\underline{f(x) = ax - 1}$ Si $x=1$ el resultat és $1 = f(x)$ per tant per a que doni aquest resultat el valor de a ha de ser 2.

$(x = 1)$ $1 = ax - 1 \Rightarrow 1 = a(1) - 1 \Rightarrow 2 = a(1) = \boxed{a = 2}$

Creiem que totes les conclusions sobre els tres primers grups, extretes de les respostes del dia 21-11-97 continuen sent aplicables a les respostes del dia 28-11-97.

Segona pregunta.

Les respostes correctes són 13 (76%). Tres alumnes responen 3 i un respon -1,5. Els quatre grups descrits en la primera pregunta es comporten igual. Només un alumne del tercer grup (Toni G.) comet un error que permet detectar que no relaciona el sentit algèbric amb el sentit funcional. Aquest alumne utilitza correctament el sentit funcional del pendent i troba que la fórmula de la recta és $y = -3x + 2$, però després, en comptes de dir que el pendent és -3, divideix els dos paràmetres de la fórmula i diu que el pendent és -3/2 = -1,5. Aquest error no es detecta en la primera pregunta perquè en aquest cas fa 2/1 = 2. Aquest alumne és un dels que més falten a classe. Els tres alumnes que han respost 3 (Oscar T., Rocío P. i Maria L V) no han tingut en compte que han fet un desplaçament cap a l'esquerra. Cal remarcar que hem considerat com a resposta correcta les de Laura N. que ha contestat $-3x$.

Tercera pregunta

14 (82%) dels 17 alumnes justifiquen la seva resposta dient que el pendent és el nombre que multiplica la x. Només tres no ho fan (Toni G., Elisabeth G. i Maria L V). Maria L. V. respon la pregunta correctament però no dóna cap justificació, encara que en la pregunta sis diu que el pendent és el nombre que acompanya la x. Elisabeth G. diu que "el pendent ve indicat pel terme independent" i respon en les quatre rectes que el pendent és 3. Aquesta alumna és del primer grup i en cap de les sis preguntes del qüestionari manifesta reconèixer el significat algèbric del pendent. L'altre alumne és Toni G,., que pertany al tercer grup, i dóna la justificació següent: "es la diferencia del sino i el cosino del triangle que forma a la gràfica" i tampoc manifesta en cap de les sis preguntes reconèixer el significat algèbric del pendent, encara que en la resposta de la pregunta 2 només comet un error en la segona recta (respon 1) .

Quarta pregunta

La contesten correctament 10 (60%) dels 17 alumnes. Els set alumnes que responen incorrectament són:

1) Elisabeth G. ha respost -2. Aquesta alumna diu que ha aplicat el quocient $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$, però no especifica quina parella de punts ha utilitzat.

2) Maria L. V ha respost 3 i no ha donat cap justificació.

3) Anna G. ha respost a. Sembla que té problemes per distingir entre el paràmetre a del model $y = ax + b$ i el pendent concret d'aquesta recta.

4) David M. i Laura N. responen en blanc

5) Toni G. calcula correctament la fórmula de la recta ($y = 2x + 3$) però després diu que el pendent és 2/3 = 0,6

6) Alicia M. respon que el pendent és zero i dóna una justificació de la qual es dedueix que per a ella la fórmula $y = ax + b$ no és la mateixa per a tots als punts, sinó que depèn de cada punt. La resposta d'aquesta alumna és:

4 Una funció afí ve donada per la taula següent:

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	1	3	5	7	9

El seu pendent és = ~~1~~ 0 *Justificació de la resposta:* el pendent és 0

x	y
-1	1
0	3
1	5

$y = 0x + 1$
$y = 0x + 3$
$y = 0x + 5$

x	y
2	7
3	9

$y = 0x + 7$
$y = 0x + 9$

En les respostes es detecten els procediments següents (els dos primers ja foren observats en les respostes del qüestionari del dia 21-11-97):

1) Agafar dos punts de la taula i aplicar el quocient $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$. Aquest procediment l'apliquen 4 alumnes (24%). Dos són del primer grup; un, del segon; i l'altre, del tercer. Això vol dir que hi ha alumnes que, segons la forma de presentació de la funció, utilitzen un procediment o un altre. Si la funció es presenta en forma de taula, parteixen de la base que el pendent és $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ i ho apliquen a dos punts de la taula, mentre que si la forma de presentació de la funció és la gràfica, divideixen la variació vertical per l'horitzontal.

2) 4 (24%) alumnes utilitzen el següent procediment: 1) busquen la fórmula a partir de la taula i 2) utilitzen que el pendent és el nombre que multiplica la x en la fórmula. Els quatre alumnes expliquen el procediment utilitzat. En l'explicació d'aquests alumnes es veu clarament com el model $y = ax + b$ i el sentit algèbric del pendent juga un paper fonamental.

3) 2 (12%) alumnes es limiten a observar columnes contigües i a deduir-ne que, per cada unitat que fas cap a la dreta, en puges dues cap amunt. Per exemple, Jordi L. dóna la resposta següent:

4 Una funció afí ve donada per la taula següent:

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	1	3	5	7	9

El seu pendent és =..2... *Justificació de la resposta*:

Per cada unitat que augmentem a la x la seva imatge augmenta en 2 unitats

Quinta pregunta

16 (94%) alumnes donen la resposta correcta. Oscar T. respon 2 i 5 en comptes de 5 i 2. Pel que va manifestar aquest alumne a la classe, sembla que la seva resposta és un descuit.

Sexta pregunta

1) 7 (41%) alumnes fan referència al sentit geomètric: *"el pendent determina la inclinació de la recta"*
2) 10 (60%) alumnes fan referència al sentit algèbric: *"és el nombre que multiplica la x"*

3) 13 (76%) alumnes fan referència al sentit funcional: "és el nombre d'augments verticals per augments horitzontal"
4) 5 (29%) alumnes fan referència al sentit trigonomètric.
5) 7 (41%) alumnes només fan referència a un sol sentit.
6) 3 (18%) alumnes fan referència a dos sentits.
7) 6 (35%) alumnes fan referència a tres sentits.
8) 1 (6%) alumne fa referència a quatre sentits.

La resposta més elaborada és la d'Alicia M. que respon el següent:

6) $f(x) = ax+b$

el pendent a
1) Ens dona la informació de la inclinació de la recta.
2) És el número que multiplica la x
3) així és per ex: $y = 5x+1$, si ens situem en un punt qualsevol de la recta i ens desplacem alguna unitat, després aquesta unitat la haurem de multiplicar per 5 (pendent) i lo que dona ~~seran~~ les unitats en vertical ~~que~~ necessàries per tocar la recta
4) pendent = $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$
5) pendent = $tg\,\alpha$

Conclusions generals

Malgrat que hi ha alguns alumnes (Oscar T., Toni G., Mike D., Maria L.V., etc) que en aquest moment del procés d'instrucció tenen un significat personal de <<pendent>> molt restringit, les respostes d'aquest qüestionari reforcen les següents conclusions generals, ja deduïdes de les respostes del dia 21-11-97:

1) La majoria de la classe sap utilitzar els sentits geomètric, algèbric i funcional del pendent i cal treballar el sentit trigonomètric.

2) Comparant les respostes de les preguntes 1 i 3 del qüestionari 2 amb les d'aquest qüestionari, es nota un gran progrés en molts alumnes, especialment en el grup que utilitzava les taules per trobar les fórmules. Si bé en el qüestionari 2 es preguntava la fórmula i en aquest només el pendent, el tipus de resposta majoritària fa suposar que hi ha un desplaçament del model <<taula>> al model <<tipus de funció>> i és d'esperar que quan es torni a passar el qüestionari 2, molts alumnes hagin abandonat el model taula.

3) Com a resultat del procés d'instrucció, en les respostes del dia 28-11-97 hi ha més alumnes que fan referència a diferents sentits del terme pendent que en les respostes del dia 21-11-97.

5.2.7 Subseqüència 4. Taxa instantània o derivada en un punt

Aquesta subseqüència consisteix en una explicació del professor que pretén aconseguir que els alumnes siguin capaços d'assolir el següent ítem del subobjectiu 3.3:

28 Entendre la definició de derivada en un punt com la generalització de la definició de velocitat instantània a una funció qualsevol, és a dir, entendre la definició de la derivada d'una funció en un punt com el límit de les taxes mitjanes de variació.

L'objectiu és que l'alumnat entengui que la necessitat de calcular la velocitat instantània porta a l'expressió:

$$v(t_0) = \lim_{t \to t_0} v_m(t_0, t) = \lim_{t \to t_0} \frac{d(t) - d(t_0)}{t - t_0}$$

però que aquesta expressió també es pot aplicar a d'altres funcions $f(x)$ que no són la que ens dóna l'espai recorregut en funció del temps, la qual cosa justifica la següent definició de derivada d'una funció en un punt:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Aquesta manera d'introduir la derivada en un punt és un bon exemple de generalització extensiva. A partir de l'objecte matemàtic: $\lim_{t \to t_0} \frac{d(t) - d(t_0)}{t - t_0}$ (que a la vegada és una classe) obtenim la classe d'objectes $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ (que a la vegada també podem considerar com un objecte).

Aquesta subseqüència es va desenvolupar en la primera part de la sessió del 2-12-97.

5.2.8. Subseqüència 5. Interpretació geomètrica de la derivada en un punt

Aquesta subseqüència està formada per les activitats 16-19 i pretén aconseguir que els alumnes siguin capaços d'assolir els següents ítems del subobjectiu 3.3:

(Recta tangent)

29 Entendre la recta tangent com la que més s'aproxima a la corba en les proximitats del punt, i reconèixer una recta tangent encara que toqui a la corba en més d'un punt.

30 Entendre que si amb un ordinador fem un zoom adequat, una corba i la seva recta tangent coincidiran en les proximitats del punt.

31 Entendre la recta tangent com la recta a la qual s'aproximen les secants.

(Significat geomètric de la derivada d'una funció en un punt)

32 Entendre que el pendent de la recta tangent és el nombre al qual s'aproximen els pendents de les rectes secants.

33 Relacionar el pendent de la recta tangent i el concepte de derivada de la funció en un punt.

34 Entendre la nova notació de la derivada.

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

35 Relacionar les següents interpretacions de la derivada d'una funció $f(x)$ en el punt d'abscissa $x = a$: velocitat instantània, derivada de la funció en un punt i pendent de la recta tangent.

Aquesta subseqüència es va desenvolupar en les sessions del 2 , 4 i 9 del 12 del 97.

El primer objectiu és que l'alumnat s'adoni que així com hi ha una relació entre la taxa mitjana de variació d'una funció entre $x = a$ i $x = b$ i el pendent de la recta secant al gràfic de la funció que passa pels punts d'abscissa a i b, també hi ha relació entre la derivada d'una funció en $x = a$ i el pendent de la recta tangent a la funció en el punt d'abscissa $x = a$. Ara bé, per estudiar aquesta relació, primer cal que l'alumnat substitueixi la idea intuïtiva que té de recta tangent: recta que té només un punt en comú amb la corba per la següent: de totes les rectes que passen per un punt de la corba, la recta tangent és la que més s'hi aproxima (almenys en un veïnatge del punt).

En geometria elemental, l'única corba que s'estudia és la circumferència, i per a ella es defineix la recta tangent com una recta que té només un punt en comú amb la corba. Aquest fet porta els alumnes a creure que la condició perquè una recta sigui tangent a un gràfic en un punt és que només tingui aquest punt en comú amb el gràfic.

Per introduir el nou significat de recta tangent, el material de l'alumne presenta bolcats de pantalla d'un graficador informàtic que permet fer zooms. En la figura hi ha representades la paràbola $y = x^2$, la recta $y = 2x - 1$ (la recta tangent a la funció en el punt d'abscissa $x = 1$) i la recta $x = 1$, que és una recta que talla la paràbola només en el punt (1,1) . Si es fa un zoom d'aquesta figura, s'obté el gràfic d'aquestes tres funcions en les proximitats del punt (1 , 1) i es veu clarament que, en les proximitats d'aquest punt, la recta $y = 2x - 1$ i la paràbola $y = x^2$ pràcticament coincideixen, cosa que no passa amb la paràbola i la recta $x = 1$. A l'activitat 16, per determinar quina és la recta tangent, cal que l'alumnat apliqui el nou significat de recta tangent, especialment en la primera funció, perquè en aquest cas la recta tangent talla la gràfica de la funció en dos punts.

En l'apartat *a* de l'activitat 17 es presenta una funció i la recta tangent a la funció en el punt A. L'alumnat ha d'adonar-se que la recta és la tangent perquè en les proximitats de $x = a$ és la recta que més s'aproxima a la gràfica de la funció, i ha de calcular-ne el pendent dividint la variació vertical per l'horitzontal. En els apartats *b* i *c* es presenten bolcats de pantalla del programa Cabri-géomètre que permeten veure com les rectes secants s'aproximen cap a la recta tangent. En l'apartat *d* l'alumnat ha de calcular els pendents de les rectes secants $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ i observar que s'aproximen cap al pendent de la recta tangent:

0,182 , 0,349, 0,453, 0,548, 0,636, 0,667,........→ Pendent de la recta tangent = 0,695

A l'apartat *e* es pretén que l'alumnat s'adoni que:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \text{pendent de la recta tangent en } A = 0{,}695$$

A més de veure la relació entre la derivada de la funció en un punt i el pendent de la recta tangent, interessa que l'alumnat entengui que, per determinar gràficament la recta tangent al gràfic d'una funció $f(x)$ en el punt d'abscissa $x=a$, es pot procedir de la manera següent: dibuixar un altre punt B' d'abscissa $x=b$. Els punts A i B' determinen una recta secant. Si mantenim A fix, en moure B' sobre el gràfic de $f(x)$ de manera que es vagi apropant a A, obtenim diverses rectes secants que s'aproximen a una recta determinada: és aquesta la recta tangent a la funció $f(x)$ en el punt d'abscissa $x = a$. Aquest procediment per trobar- la en un punt permet també precisar la idea de recta tangent que s'ha utilitzat fins ara i donar-ne la següent definició : "la recta tangent al gràfic de la funció $f(x)$ en el punt A és la recta a la qual s'aproximen les rectes secants que passen per A i per un altre punt B del gràfic quan B s'aproxima a A".

L'activitat 17 és fonamentalment una activitat visual de tipus geomètric amb la qual es pot aconseguir fer entendre com les rectes secants s'aproximen cap a la recta tangent. En canvi, costa més entendre que els pendents de les rectes secants s'aproximen al pendent de la recta tangent, perquè l'aproximació numèrica pot no quedar clara per a alguns alumnes. Per aquest motiu es proposa de fer els apartats *a- g* de l'activitat 18, en els quals l'aspecte numèric de l'aproximació dels pendents de les rectes secants cap al pendent de la recta tangent queda més clar, tant per l'esquerra com per la dreta. Els apartats *h-k*, d'una banda tornen a posar de manifest la relació entre el pendent de la recta tangent i la derivada de la funció en un punt, i, de l'altra, permeten trobar, d'una manera pautada, l'equació de la recta tangent.

Fins a l'activitat 18 s'ha utilitzat l'expressió $f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, la qual ha sortit de l'expressió de la velocitat instantània i s'ha relacionat amb el pendent de la recta tangent. Ara bé, la derivada d'una funció en un punt es pot simbolitzar també amb les notacions $f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ o $f'(a) = dy/dx$.

Si bé la notació introduïda per Leibniz presenta, en alguns casos, avantatges respecte de la notació funcional (per exemple, en la regla de la cadena: $dz/dx = dz/dy \cdot dy/dx$) hem optat per no utilitzar-la en aquesta unitat per manca de temps. La notació $f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ s'explica en el <Recorda> que segueix a l'activitat 18.

Aquest canvi de notació es fa perquè facilita el càlcul de funcions derivades, però té el problema que aquesta justificació no s'explica a l'alumnat, que es veu obligat a abandonar la notació que havia utilitzat fins ara i a la qual ja s'havia acostumat. En aquest context, l'activitat 19 és molt important perquè serveix per relacionar els diferents sentits de la derivada en un punt, expressats en la nova notació.

Sessió del 2-12-97

Planificació prèvia

1) Introduir el concepte de derivada d'una funció en un punt com a generalització de la velocitat instantània.
2) Treballar les activitats 16 i 17 com a mínim.
3) Utilitzar l'aula d'informàtica per treballar la recta tangent i el procés d'aproximació de les secants a la tangent.

Desenvolupament de la sessió

Faltes: Elia G., Toni G. i Mike D.

Incidències: No he pogut fer la classe a l'aula d'informàtica perquè estava ocupada. Només puc accedir a l'ordinador del Departament de Matemàtiques, per la qual cosa prenc la decisió de portar els alumnes en grups petits a l'ordinador del Departament de Matemàtiques.

P: Començo recordant com la necessitat de calcular la velocitat instantània ens va portar a l'expressió $v(t_0) = \lim_{t\to t_0} v_m(t_0,t) = \lim_{t\to t_0} \frac{d(t)-d(t_0)}{t-t_0}$. Continuo fent-los observar que aquesta expressió és un límit de velocitats mitjanes que no són més que taxes mitjanes de variació, quan la funció considerada és la que ens dóna l'espai a partir del temps. Mentre faig aquestes observacions vaig posant a la pissarra la columna de l'esquerra i amb gestos vaig assenyalant l'expressió de la velocitat instantània, l'expressió de la velocitat mitjana i la funció $d(t)$ (de baix a dalt).

	Física	Matemàtiques	
funció	$d(t)$	$f(x)$	funció qualsevol
velocitat mitjana	$\frac{d(t)-d(t_0)}{t-t_0}$	$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$	taxa mitjana de va.
velocitat instantània	$\lim\limits_{t\to t_0} \frac{d(t)-d(t_0)}{t-t_0}$	$\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$	derivada

A continuació comento que els físics solen utilitzar la lletra t per representar el temps i la lletra d o e per representar l'espai recorregut, mentre que en matemàtiques normalment utilitzem la lletra x i la lletra f. Amb la notació de matemàtiques $d(t)$ es converteix en $f(x)$, la velocitat mitjana $\frac{d(t)-d(t_0)}{t-t_0}$ en la taxa mitjana de variació $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ i la velocitat instantània en l'expressió $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. Per tant, si escrivim la velocitat instantània amb la notació habitual en matemàtiques obtenim l'expressió $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ Si a més considerem que la funció $f(x)$ no és necessàriament la funció que ens dóna l'espai sabent el temps, sinó que considerem que és una funció qualsevol com, per exemple, la que ens permet calcular la pressió atmosfèrica, o el creixement d'una població, etc. té sentit la definició següent: donada la funció $f(x)$ i un punt d'abscissa $x = a$, el valor del $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ s'anomena taxa instantània de variació de $f(x)$ en el punt d'abscissa $x = a$, o també derivada de la funció $f(x)$ en el punt d'abscissa $x = a$ i es representa per $f'(a)$

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$