VICENÇ FONT MOLL

PROCEDIMENTS PER OBTENIR EXPRESSIONS SIMBÒLIQUES A PARTIR DE GRÀFIQUES. APLICACIONS A LES DERIVADES

****

Departament de Didàctica de les Ciències Experimentals i de la Matemàtica

Programa de Didàctica de les Ciències Experimentals i de la Matemàtica

Bienni 1994-1996

Per optar al títol de Doctor en Filosofia i Ciències de l'Educació
Secció Ciències de l'Educació

Director: Josep María Nuñez i Espallargas

Tutor: Josep María Nuñez i Espallargas

UNIVERSITAT DE BARCELONA

BARCELONA 1999

Continuo fent-los observar que aquesta expressió és un límit de velocitats mitjanes que no són més que taxes mitjanes de variació quan la funció considerada és la que ens dóna l'espai a partir del temps. Mentre faig aquestes observacions vaig posant a la pissarra la columna de l'esquerra i amb gestos vaig assenyalant l'expressió de la velocitat instantània, l'expressió de la velocitat mitjana i la funció $d(t)$ (de baix a dalt).

	Física	Matemàtiques	
funció	$d(t)$	$f(x)$	funció qualsevol
velocitat mitjana	$\dfrac{d(t)-d(t_0)}{t-t_0}$	$\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$	taxa m. de v.
velocitat instantània	$\lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{d(t)-d(t_0)}{t-t_0}$	$\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$	derivada

A continuació comento que, amb la notació de matemàtiques $d(t)$ es converteix en $f(x)$; la velocitat mitjana, en la taxa mitjana de variació; i la velocitat instantània, en la derivada en un punt. Per tant, si escrivim la velocitat instantània amb la notació habitual en matemàtiques, obtenim l'expressió $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$, amb la qual cosa tenim que la velocitat instantània no és més que un cas particular de la derivada..

Continuo recordant-los que, després de definir la derivada en un punt com una generalització de la velocitat instantània, vam treballar la interpretació geomètrica de la derivada i vam veure que la derivada en un punt, d'una banda és el límit de les taxes mitjanes i, d'altra banda, és el pendent de la recta tangent (mentre faig aquest comentari escric, i assenyalo a la pissarra, el seguent)

$$\textit{endent de la recta tangent} = tg\ \alpha = f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Continuo dient que un cop sabem allò que és la derivada en un punt, cal preguntar-se com es calcula la derivada en un punt. Bé, doncs aquesta igualtat ens en dóna diferents procediments. La primera consisteix a calcular aquest límit $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Aquest procediment era el que s'havia d'aplicar en la pregunta 3a de l'examen i l'anomenarem mètode simbòlic o analític. Simbòlic perquè usa símbols i analític perquè a vegades s'usa com a sinònim de simbòlic. Un altre procediment consisteix a fixar-se en la interpretació geomètrica de la derivada, (pendent de la recta tangent) i utilitzar-la en situacions on tinguem la gràfica de la funció i la recta tangent. En aquests problemes basta buscar gràficament el pendent de la recta tangent per obtenir la derivada en el punt (mentre faig aquests comentaris dibuixo el següent esquema a la pissarra)

	1) Utilitzant límits
Com es calcula	Calculant $f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.
$f'(a)$?	2) Geomètricament (gràficament)
	Calculant el pendent de la recta tangent

Continuo explicant que en les activitats anteriors hem utilitzat aquests dos mètodes i que el geomètric (gràfic) només es pot aplicar quan tenim dibuixades la gràfica de la funció i la recta tangent, perquè ens pot permetre trobar la derivada molt ràpidament,encara que per ser visual, en alguns casos pot ser poc precís. També comento que el càlcul del límit

$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ és un mètode que, en principi, es pot aplicar sempre que tinguem la fórmula de la funció.

Després comento que quan vam calcular $f'(a)$ buscant el límit, ho vam fer sempre amb funcions molt senzilles (paràboles) en les quals bastava desenvolupar el quadrat d'una suma, aplicar la distributiva i després simplificar per calcular el límit. Ara bé si intentem buscar el límit $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ quan les funcions són una mica més complicades (exponencials, logarítmiques o trigonomètriques), com per exemple en l'activitat 23 en què tenim la funció sinus, resulta que calcular-lo no és fàcil, per la qual cosa convé conèixer un mètode aproximat per a calcular derivades amb la calculadora (completo l'esquema de la pissarra posant el següent:)

	1) Utilitzant límits
Com es calcula	Calculant $f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.
$f'(a)$?	2) Geomètricament (gràficament)
	Calculant el pendent de la recta tangent
	3 Aproximadament
	Utilitzant la calculadora

Continuo fent-los observar que en l'activitat 23 ens donen la funció sinus i ens pregunten la derivada en $x = 0{,}5$ i, com que no tenim dibuixada la gràfica de la funció ni la recta tangent, no podem utilitzar el segon mètode. Per tant, només podem intentar calcular

$$f'(0{,}5) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(0{,}5+h)-\sin(0{,}5)}{h}$$

Ara bé, calcular aquest límit és molt complicat perquè s'han d'aplicar unes fórmules trigonomètriques que converteixen una diferència de sinus en un producte d'un sinus per un cosinus que encara no saben. Bé, doncs la pregunta és: què faig si no tinc dibuixada la recta tangent i resulta massa complicat buscar aquest límit? Doncs en aquests casos, en comptes de calcular aquest límit $\lim_{h\to 0} \frac{\sin(0{,}5+h)-\sin(0{,}5)}{h}$, que és el valor al qual s'aproximen aquestes fraccions $\frac{\sin(0{,}5+h)-\sin(0{,}5)}{h}$, quan h es va fent petit, és a dir quan h és una dècima, una centèsima, una mil·lèsima, etc, el que es fa és donar un valor molt petit a h, per exemple una mil·lèsima, i amb la calculadora es calcula $\frac{\sin(0{,}5+0{,}001)-\sin(0{,}5)}{0{,}001}$, que és una bona aproximació de $f'(0{,}5)$ (poso a la pissarra el següent)

$$f'(0{,}5) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(0{,}5+h)-\sin(0{,}5)}{h} \simeq \frac{\sin(0{,}5+0{,}001)-\sin(0{,}5)}{0{,}001}$$

$\frac{\sin(0{,}5+0{,}001)-\sin(0{,}5)}{0{,}001}$ no és la derivada, però serà un valor molt pròxim a la derivada

Dic que ara poden intentar fer l'activitat 23 i reparteixo calculadores als alumnes que no en porten. També dic que han de tenir la calculadora en mode RAD.

A: Estan una bona estona intentant fer l'activitat 23. Molts em pregunten dubtes sobre la utilització de la calculadora.

P: Al cap d'una estona poso a la pissarra la seqüència de tecles que han d'utilitzar quan $h = 0{,}1$

$$\boxed{0{,}5}\ \boxed{+}\ \boxed{0{,}1}\ \boxed{\sin}\ \boxed{\text{Min}}\ \boxed{0{,}5}\ \boxed{\sin}\ \boxed{+/-}\ \boxed{\text{Mr}}\ \boxed{\div}\ \boxed{0{,}1}\ = \boxed{0.852167}$$

i pregunto si han obtingut aquest resultat.

A: Molts alumnes diuen que sí.

P: Dic que repeteixin el mateix procés amb $h = 0{,}01$ i que el resultat ha de ser 0,875175.

A: La majoria dels alumnes obtenen aquest resultat o un de molt semblant.

A: Alguns em pregunten per què no obtenen exactament el resultat que he posat a la pissarra.

P: Els dic que depèn del tipus de calculadora, en concret del nombre de xifres decimals amb què treballa la calculadora. A continuació comento a tota la classe que segons el tipus de calculadora que utilitzin les últimes xifres poden ser diferents del resultat que he posat a la pissarra. Després dic que repeteixin el càlcul amb $h = 0{,}001$ i que comprovin que surt 0,877342703. Mentre els alumnes feien els càlculs amb la calculadora he anat completat la taula següent a la pissarra:

h	$\dfrac{\sin(0{,}5+h)-\sin x}{h}$
0,1	$\dfrac{\sin(0{,}5+0{,}1)-\sin 0{,}5}{0{,}1} = 0{,}852167$
0,01	$\dfrac{\sin(0{,}5+0{,}01)-\sin 0{,}5}{0{,}01} = 0{,}\ 875175$
0, 001	$\dfrac{\sin(0{,}5+0{,}001)-\sin 0{,}5}{0{,}001} = 0{,}877342703$

P: Comento que ara repetiré tot el procés que hem fet perquè tothom el tingui clar i dic que en l'activitat 23 ens donen la funció sinus i ens pregunten la derivada en $x = 0{,}5$ i, com que no tenim dibuixada la gràfica de la funció ni la recta tangent, no podem utilitzar el segon mètode. Per tant, només podem intentar calcular $f'(0{,}5) = \lim_{h\to 0} \dfrac{\sin(0{,}5+h)-\sin 0{,}5}{h}$ Ara bé, en comptes de calcular aquest límit $\lim_{h\to 0} \dfrac{\sin(0{,}5+h)-\sin 0{,}5}{h}$ es dóna un valor molt petit a h, per exemple una mil·lèsima i amb la calculadora es calcula $\frac{\sin(0{,}5+0{,}001)-\sin 0{,}5}{0{,}001}$,que és una bona aproximació de $f'(0{,}5)$ (poso a la pissarra el següent)

$$f'(0{,}5) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(0{,}5+h)-\sin 0{,}5}{h} \simeq \frac{\sin(0{,}5+0{,}001)-\sin 0{,}5}{0{,}001} = 0{,}877342703$$

$$f'(0{,}5) \simeq 0{,}877342703$$

Continuo dient que en l'apartat *b* de l'activitat 23 ens pregunten una aproximació de $f'(0{,}5)$ amb 3 xifres decimals i pregunto als alumnes quina és la resposta.

A: Alguns alumnes diuen que 0,877.

P: Dic que efectivament és així perquè la quarta xifra és un tres, i poso a la pissarra $f'(0{,}5) \simeq 0{,}877$. Continuo dient que 0,877 és una aproximació i que si, en comptes d'agafar $h = 0{,}001$, hagués agafat $h = 0{,}0001$ o $h = 0{,}0001$, hauria obtingut millors aproximacions i els dic que tornin a fer els càlculs amb $h = 0{,}000001$.

A: Es posen a fer els càlculs amb $h = 0{,}000001$ i alguns d'ells diuen que les tres primeres xifres són iguals.

P: Comento en general que, en el cas de treballar amb tres xifres decimals, no s'obté una millor aproximació pel fet d'agafar valors de *h* més petits.

A: Alicia M. reclama la meva atenció i observo que té dos tipus de problemes, d'una banda té dificultats en l'ús de la calculadora i d'altra banda no té clar el procés que s'ha de seguir per arrodonir.

P: Explico a Alicia M. com es fa l'arrodoniment i que ha de treballar amb l'opció RAD a la calculadora. A continuació em dirigeixo a tota la classe i comento que amb aquest mètode aproximat hem trobat que la derivada del sinus en $x = 0{,}5$ és 0,877 ,i dic que si haguéssim calculat el límt hauríem arribat al resultat següent: cos 0,5 (escric a la pissarra):

Mètode aproximat

$$f'(0{,}5) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(0{,}5+h)-\sin 0{,}5}{h} \simeq \frac{\sin(0{,}5+0{,}001)-\sin 0{,}5}{0{,}001} = 0{,}877342703 \approx 0{,}877$$

Mètode exacte

$$f'(0,5) = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(0,5+h) - \sin 0,5}{h} = \cos 0,5 = ?$$

Dic als alumnes que busquin amb la calculadora el valor de cos 0,5.

A: Els alumnes busquen cos 0,5 amb la calculadora i observen que les tres primeres xifres són les mateixes.

P: Substitueixo a la pissarra l'interrogant per 0,877 i els faig observar que, en el cas de treballar amb tres xifres decimals, el mètode exacte i l'aproximat donen el mateix resultat. També remarco que aquest mètode aproximat pot ser útil en l'examen de selectivitat perquè en les PAAU està permès portar calculadores científiques. Per tant, en el cas que s'hagi de buscar la derivada en un punt d'una funció que està en les tecles de la calculadora (logaritmes, arrels, trigonomètriques, etc) o bé d'una funció que és el resultat d'operacions senzilles amb aquestes funcions, es pot utilitzar aquest mètode. Per acabar, remarco en què consisteix aquest mètode (poso a la pissarra)

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \approx \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Per calcular $f'(a)$ s'ha de calcular el límit $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ que és el valor al qual s'aproximen els quocients $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ quan h es va aproximant a zero. Doncs si es calcula aquest quocient per un valor de h prou petit com una mil·lèsima, una deu mil·lèsima, etc resulta que el quocient $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$, que és la taxa mitjana de variació de la funció entre a i $a+h$, és un valor no gaire diferent del de la derivada $f'(a)$. Insisteixo que no cal fer una taula com a l'activitat 22 sinó que basta anar directament a l'última fila i donar un valor prou petit a h. A continuació dic que apliquem aquest procediment en les activitats 24 i 25.

A: Es posen a treballar l'activitat 24 i 25.

P: Al cop d'una estona (10 minuts aproximadament) pregunto si ja han fet l'activitat 24.

A: Jordi L. diu que sí.

P: El faig sortir a la pissarra.

A: Jordi L. posa a la pissarra el següent:

$$f'(2) = \simeq \frac{\ln(2+10^{-4})-\ln 2}{10^{-4}} = 0{,}4999875$$

P: Pregunto als altres alumnes si hi estan d'acord.

A: Molts alumnes responen que sí.

P: A continuació explico que l'apartat *a* de l'activitat 24 demana la derivada de la funció logarítmica de base el nombre e, en el punt d'abscissa $x = 2$ i que, per buscar aquesta derivada, hem de buscar el límit $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\ln(2+h)-\ln 2}{h}$. Ara bé, buscar aquest límit no és fàcil ja que s'han d'aplicar les propietats dels logaritmes, per la qual cosa aproximem aquest límit per la taxa mitjana de variació $\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$ amb h prou petit, com per exemple una deu mil·lèsima (poso a la pissarra)

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{\ln(2+h)-\ln 2}{h} \simeq \frac{\ln(2+0{,}0001)-\ln 2}{0{,}0001} = 0{,}4999875$$

Per fer aquest càlcul amb la calculadora escrivim 2,0001, després premem la tecla ln, a continuació restem al resultat ln 2, i finalment dividim per 0,0001 i obtenim 0,4999875.

A: Patricia F. diu que a ella les últimes xifres li surten diferents i d'altres alumnes diuen que a ells també.

P: Comento que això passa perquè les seves calculadores són diferents de la d'en Jordi L. i que segons el nombre de xifres amb què treballa la calculadora, les últimes poden ser diferents però que això no té cap incidència en la resposta de l'apartat *b* de l'activitat 24.

A: Pilar G. pregunta a Sandra D. per què $\dfrac{\ln(2+0{,}0001)-\ln 2}{0{,}0001}$ és la taxa mitjana de variació i després m'ho pregunten a mi.

P: Com que crec que d'altres alumnes poden tenir la mateixa dificultat, faig l'explicació per a tota la classe i poso a la pissarra

$$\frac{\ln(2+0{,}0001)-\ln 2}{0{,}0001} = \frac{f(2+0{,}0001)-f(2)}{2+0{,}0001-2}$$

Comento que en aquest cas la funció és la funció logarítmica de base el nombre *e*, i que els dos valors són 2+0,0001 i 2 i , per tant, la fracció de l'esquerra resulta ser la taxa mitjana de variació de la funció $\ln x$ entre 2+0,0001 i 2. A continuació pregunto quina és la resposta de l'apartat *b*

A: Alguns alumnes responen que 0,5.

P: Poso la mà en vertical entre el 9 i el 8 en el nombre 0,4999875 de la pissarra i pregunto quina és la xifra que segueix al 9 i jo mateix contesto que és el 8. Assenyalo l'últim 9 i dic que hem d'augmentar-lo en una unitat i que, per tant, passa a 10. Això fa que el segon 9 i el primer també passin a 10 i que el 4 passi a 5. Per tant, si arrodonim 0,4999875 en tres xifres decimals, obtenim el nombre 0,5 , de manera que la derivada de la funció $\ln x$ en $x = 2$ és 0,5 i poso a la pissarra

$$f'(2) = 0{,}5$$

Segueixo comentant que si hagués buscat $f(2)$ calculant el límit $\lim_{h\to 0} \frac{\ln(2+h)-\ln 2}{h}$ aplicant les propietats dels logaritmes, hauria obtingut també 0,5.

A continuació els faig observar que en aquest cas, si bé cap xifra coincideix, quan fem l'arrodoniment sí que obtenim el mateix resultat, i escric a la pissarra el següent:

Mètode aproximat

$$f'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(2+h)-\ln 2}{h} \approx \frac{\ln(2+0{,}0001)-\ln 2}{0{,}0001} = 0{,}4999875 \approx 0{,}5$$

Mètode exacte

$$f'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(2+h)-\ln 2}{h} = 0{,}5$$

A: Esther E. reclama la meva atenció perquè el resultat li surt negatiu.

P: Dic als alumnes que facin l'activitat 25.

A: Es posen a fer-la.

P: Vaig a la taula on està Ester E. i li indico els passos que ha de fer amb la calculadora.

A: Esther E. segueix les meves indicacions i obté el nombre 0,4999875 a la pantalla.

P: Al cap d'una estona i mentre els alumnes fan l'activitat 25, els recordo que han de pagar el dossier i els adverteixo que si no paguen, després de Nadal no repartiré més dossiers i dictaré apunts.

A: hi ha comentaris i bromes sobre el pagament dels dossiers.

A: Alberto C. i Javier F. Reclamen la meva atenció particular per preguntar-me uns dubtes sobre la utilització de la memòria de la calculadora.

P: Després de resoldre els dubtes d'aquests dos alumnes comento per a tota la classe que en l'activitat 25 la funció és la funció arrel quadrada i que l'apartat a d'aquesta activitat demana la taxa mitjana de variació entre 3 i 3 més una deu mil·lèsima i poso a la pissarra el següent:

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{f(a+h)-f(a)}{a+h-a} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{\sqrt{3+0,0001}-\sqrt{3}}{0,0001}$$

remarcant que primer vam calcular la taxa mitjana de variació entre x_2 i x_1 amb la notació de la primera fracció. Ara bé, si $x_2 = a+h$ i $x_1 = a$, la primera fracció es converteix en la segona i com que $a+h-a = h$, resulta que la segona es converteix en la tercera. Si a més resulta que la funció és la funció arrel quadrada, $a = 3$ i $h = 0,0001$ tenim que la tercera fracció es converteix en l'última (mentre faig aquests comentaris vaig assenyalo les fraccions de la pissarra). Finalment pregunto quin és el valor d'aquesta última fracció.

A: Responen un nombre que no acabo d'entendre.

P: Faig repetir el nombre a Eva P.

A: Eva P. diu que és el nombre 0,2886728.

P: Poso a la pissarra el següent:

$$f'(3) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{3+h}-\sqrt{3}}{h} \approx \frac{\sqrt{3+0,0001}-\sqrt{3}}{0,0001} = 0,2886728$$

I comento que, si bé aquest límit és menys complicat de calcular que els de les dues activitats anteriors, també té la seva dificultat, per la qual cosa convé aproximar-lo per la taxa mitjana de variació de la funció arrel quadrada entre 3 i 3,0001 i que aquest nombre arrodonit a tres xifres decimals és 0,289 perquè la quarta xifra decimal és superior a cinc. A continuació poso a la pissarra el següent:

Mètode aproximat

$$f'(3) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{3+h}-\sqrt{3}}{h} \approx \frac{\sqrt{3+0,0001}-\sqrt{3}}{0,0001} = 0,2886728 \approx 0,289$$

Mètode exacte

$$f'(3) = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{3+h}-\sqrt{3}}{h} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

I dic als alumnes que trobin amb la calculadora el valor de $\frac{1}{2\sqrt{3}}$

A: Els alumnes comproven amb la calculadora que $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ arrodonit a tres xifres decimals és 0,289.

P: Toca el timbre i els desitjo un bon Nadal i dic que és convenient que facin durant les vacances les activitats 1-17 de <<Per practicar més>> que encara no estiguin fetes.

Valoracions

1) Després d'aquesta classe l'alumnat entén que hi ha diferents maneres de calcular la derivada en un punt.

2) Els alumnes tenen clar que les calculadores científiques permeten trobar aproximadament la derivada de les funcions que apareixen a les tecles de la calculadora i també que aquest mètode els pot ser útil quan no poden calcular la derivada a partir del càlcul del límit de les taxes mitjanes de variació, la qual cosa fa esperar que en produccions posteriors dels alumnes aparegui aquest procediment.

3) He observat força interès dels alumnes en l'ús de la calculadora.

4) També he observat que els alumnes tenen dificultats en l'ús de la calculadora i alguns no tenien clar el procés d'arrodoniment.

5) He notat que hi havia alumnes que tenien dificultats per entendre que el quocient $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ és un nombre que és la taxa mitjana de variació de la funció entre a i $a+h$. Crec que després de les meves explicacions ha quedat clar que aquest quocient és la taxa mitjana de variació, la qual cosa crec que facilitarà, més endavant, entendre $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ com la funció t.m.v. entre x i $x+h$.

5.2.14. Subseqüència 7. Funció derivada

Aquesta subseqüència està formada per les activitats 34-35 i pretén aconseguir com a resultat del procés d'instrucció els següents ítems del subobjectiu 3.3:

45 Entendre, a partir d'una taula amb els valors de les derivades de la funció $f(x) = x^2$ per a diferents punts, que per a la funció $f(x) = x^2$, la funció $y = 2x$ és una funció que associa cada abscissa x amb la derivada de la funció en aquest punt, i que pot utilitzar-la per calcular la derivada en diferents punts.

46 Entendre els avantatges que presenta la utilització de la funció derivada per calcular la derivada d'una funció en un punt.

47 Entendre que aquesta funció s'anomena funció derivada de $f(x)$ i es representa per $f'(x)$.

48 Distingir entre la derivada d'una funció en un punt i la funció derivada.

49 Utilitzar la funció derivada, fins i tot abans de conèixer-ne la definició formal, per trobar un punt de la funció $f(x)$ en què la derivada pren un valor determinat o bé per trobar el pendent de la recta tangent.

50 Entendre que $f'(a)$ es pot calcular directament per tres mètodes diferents: utilitzant límits, a partir de la recta tangent o aproximadament utilitzant el quocient $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ amb h prou petit. I indirectament a partir de substituir en la funció derivada x per a.

51 Entendre que la funció derivada és $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

52 Calcular la funció derivada d'una funció a partir de l'expressió $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

53 Entendre que el càlcul de la funció derivada a partir del límit $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ pot resultar molt dificultós per a determinades funcions i que, per tant, és convenient disposar d'altres mètodes alternatius que facilitin el càlcul de la funció derivada.

L'apartat <<Funció derivada>>comença amb una reflexió sobre el fet que a vegades cal calcular la derivada d'una funció en molts punts diferents. En l'activitat 34 l'alumne disposa d'una taula amb els valors de les derivades de la funció $f(x) = x^2$ per a diferents punts que s'han calculat a les activitats 15, 18 i 26. L'objectiu d'aquesta activitat és que l'alumnat observi, a partir de la taula, que per a la funció $f(x) = x^2$, que la funció $y = 2x$ associa cada abscissa x amb la derivada de la funció en aquest punt, i que ,a l'apartat *b*, la utilitzi per calcular $f'(-7), f'(21)$ i $f'(40)$. Aquesta funció s'anomena funció derivada de $f(x)$ i es representa per $f'(x)$.

En aquesta activitat l'alumne ha de fer la traducció: Taula de $f'(x) \Rightarrow$ Expressió simbòlica de $f'(x)$. Ha d'utilitzar la funció derivada $f'(x)$ i ser conscient dels seus avantatges abans de donar-ne la definició.

Segueix una explicació que té per objectiu que l'alumnat entengui que per calcular $f'(a)$ primer ha de calcular la funció derivada $f'(x)$ i després ha de substituir la x per a a la fórmula de la funció derivada. També ha d'entendre que la funció derivada també es pot utilitzar per trobar un punt de la funció $f(x)$ en què la derivada prengui un valor determinat. En l'apartat *a* de l'activitat 35 s'ha d'utilitzar la funció derivada per trobar un punt de la funció $f(x)$ en què la derivada pren el valor 16. En els apartats *b* i *c* la pregunta és la mateixa, però ara es formula en termes de pendent de la recta tangent perquè l'alumnat entengui que la funció derivada també es pot utilitzar per trobar el pendent de la recta tangent. Per últim, en l'apartat *d*, s'ha d'utilitzar la funció derivada per calcular l'equació de la recta tangent.

Després d'aquesta activitat es completa l'esquema del càlcul de $f'(a)$ amb un quart mètode, basat en la utilització de la funció derivada.

Després que l'alumnat hagi utilitzat la funció derivada de la funció $f(x) = x^2$ en l'activitat 35, i no abans, la definirem de la següent manera: s'anomena funció derivada d'una funció $f(x)$ (o també derivada) a la funció que fa correspondre a cada abscissa x la derivada de la funció $f(x)$ en el punt d'abscissa x. La funció derivada normalment es representa per la funció $f'(x)$.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

A continuació es remarca la idea que la derivada d'una funció en un punt és un nombre que ens dóna el pendent de la recta tangent a la funció en aquest punt, mentre que la funció derivada és la que ens dóna, per a cada valor de l'abscissa, el pendent de la recta. També cal remarcar que moltes vegades no es precisa prou si és la derivada de la funció en un punt o és la funció derivada (en aquests casos el context és el que ens indicarà quin és el significat que se li dóna).

Un cop definida la funció derivada, se li explica a l'alumne que per calcular- la s'ha de calcular $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$, i que, en substituir h per zero, s'obté la indeterminació $\frac{0}{0}$. A continuació se li explica, utilitzant com a exemple la funció $f(x) = x^2$, quin procediment s'ha de seguir per eliminar-la. En l'activitat 36 s'ha de repetir aquest procediment per a tres funcions diferents. Els tres apartats estan graduats de més a menys dificultat i serveixen perquè l'alumnat intueixi que el càlcul de la funció derivada a partir de l'expressió $f'(x)=\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, per a determinades funcions, pot ser molt complicat. És el moment de comentar que la funció derivada es pot calcular també per d'altres mètodes i explicar que les activitats que segueixen tenen per objectiu calcular, per diferents mètodes, la funció derivada de les famílies de funcions estudiades a les unitats anteriors i unes regles de derivació que permetran calcular la funció derivada d'una manera més ràpida.

Sessió del 1-8-98

Planificació

Aquesta és la primera classe després de les vacances de Nadal.

1) Fer les activitats 32 i 33 que no es van poder treballar abans de l'examen. Perquè els alumnes recordin el que havíem fet abans de vacances i puguin resoldre les activitats 32 i 33, també repetirem l'activitat 29.

2) Introduir i utilitzar la funció derivada $f'(x)$ abans de donar-ne la definició.

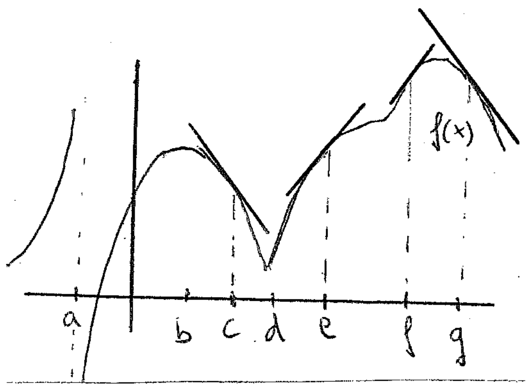
3) Repetir i completar l'esquema iniciat en la sessió del 17-12-97 per respondre la pregunta: com es calcula la derivada d'una funció en un punt?

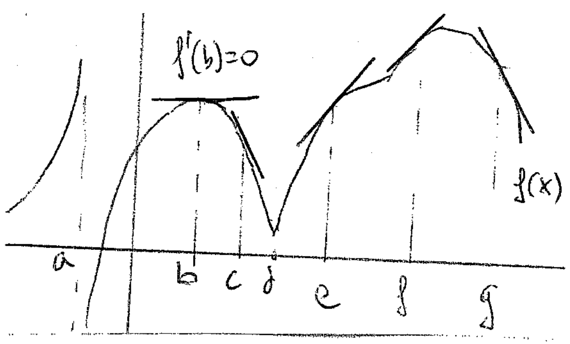
Transcripció de la sessió

La transcripció de la sessió gravada en àudio queda recollida a la 4a columna. La 2a columna recull el que es va escriure a la pissarra, mentre que la 3a són comentaris aclaridors o bé observacions que no queden recollides en la gravació.

La primera columna recull indicacions sobre la utilització de:

1) Les formes de representació de les funcions $f(x)$ i $f'(x)$ ostensives.
2) Les traduccions entre les formes de representació.
3) Els esquemes complets, o bé alguna part, que han servit per organitzar la unitat.

REP/TRAD/ ESQ	PISSARRA	COMENTARIS		TRANSCRIPCIÓ
		1 m 10 s de soroll de fons des que he entrat a la classe fins que començo a parlar.	P:	Bé, anem a començar. Sobre tot anem a situar-nos una mica a on estàvem, eh. Vaig a situar-me a la pàgina 334, activitats 29 i 30. Són activitats que ja estan fetes, però les recordaré una mica perquè vos aneu situant a on estàvem (...cops pissarra...).
Gràfica de $f(x)$		Mentre estic parlant hi ha bastant de soroll de fons dels alumnes (és la primera classe després de les vacances de Nadal). Assenyalo en la gràfica de la pissarra el punt d'abscissa $x= a$		En l'activitat 29 tenim una gràfica, llavors observant la gràfica es pot treure molta informació sobre la derivada, i a l'inrevés, sabent coses sobre les derivades tenim molta informació sobre la gràfica de la funció. Anem a recordar ràpidament el problema 29. El problema 29 és un problema molt ràpid de fer perquè només observant la gràfica ja es pot dir que en els punts d'abscissa $x= a$, què val la derivada en el punt d'abscissa $x= a$?
		Alguns comenten en veu baixa que no existeix	A:	....
			P:	Què val la derivada en el punt d'abscissa $x= a$? Què podeu dir de la derivada en el punt d'abscissa $x= a$?
Càlcul de $f'(a)$ gràficament			A:	(Jordi L) no existeix
			P:	En Jordi diu que la derivada no existeix, per què no existeix?
		Alguns comenten en veu baixa entre ells que és perquè no és contínua.	A:	....
			P:	Per què no existeix la derivada?
			A:	(Patricia F) perquè no és contínua.
		Assenyalo en la gràfica de la pissarra el punt d'abscissa $x= d$	P:	Perquè és discontínua. Efectivament. Sempre que vosaltres observeu un tall o una ruptura, una discontinuïtat, no hi ha recta tangent i no hi ha derivada. Llavors en el punt d'abscissa $x= d$, Jaume (G), què es pot dir de la derivada?.

REP/TRAD/ ESQ	PISSARRA	COMENTARIS		TRANSCRIPCIÓ
			A.	(Jaume G) Que no existeix.
Càlcul de $f'(d)$ gràficament			P:	Per què no existeix?
			A.	(Jaume G) Perquè té forma de punxa
		Assenyalo en la gràfica de la pissarra el punt d'abscissa $x= c$	P:	Perquè té forma de punxa. Efectivament perquè quan té forma de punxa no hi ha derivada. D'acord? Per tant, només observant la gràfica podem saber quan hi ha derivada i quan no n'hi ha. Però bé, en els casos en què n'hi ha, el que és molt fàcil és dir el signe de la derivada. Per exemple, en el punt d'abscissa $x= c$, Laura (A), en el punt d'abscissa $x= c$ quin signe té?
Càlcul del signe de $f'(c)$ i $f'(e)$ gràficament		Assenyalo en la gràfica de la pissarra el punt d'abscissa $x= e$	A:	(Laura A) És negativa.
			P:	És negativa. D'acord? I en el punt d'abscissa $x= e$? Tu mateixa.
		Poso la mà estesa amb els dits junts sobre les rectes tangents en $x= c$ i $x= e$ i la moc d'un punt a l'altre perquè observin com varia la inclinació de la mà. Després poso la mà en horitzontal sobre el punt d'abscissa $x= b$	A:	(Laura A) És positiva.
			P:	És positiva. Només mirant la inclinació de la recta tangent pots saber si és positiva o negativa. En $x= b$ què passa?
			A:	(a coro) és zero.
Càlcul de $f'(b)$ gràficament			P.	Que és zero, (..cops pissarra..) no és ni positiva ni negativa perquè la tangent és horitzontal. D'acord? Bé. Tot això fa que un pugui establir una relació entre el signe de la derivada i la gràfica de la funció, que és el que vam fer en les activitats 29 i 30. Anem a fer les activitats 32 i 33.

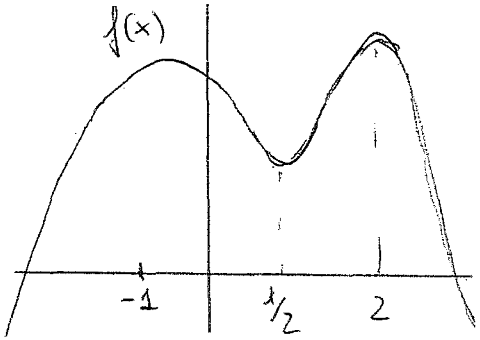
REP/TRAD/ESQ	PISSARRA	COMENTARIS	TRANSCRIPCIÓ

Els alumnes comencen a llegir les activitats 32 i 33 i comenten entre ells

A: ....(comentaris d'alumnes entre ells).......... 15 s

P. A partir de la gràfica d'una funció, nosaltres podem escriure una taula que ens informa sobre la variació i el comportament de la funció, i a l'inrevés, a partir d'una taula pots saber, més o menys, com és la gràfica d'una funció.

Gràfica de $f(x)$ → Taula de variació de $f(x)$



Amb el dit vaig assenyalant les diferents files de la taula

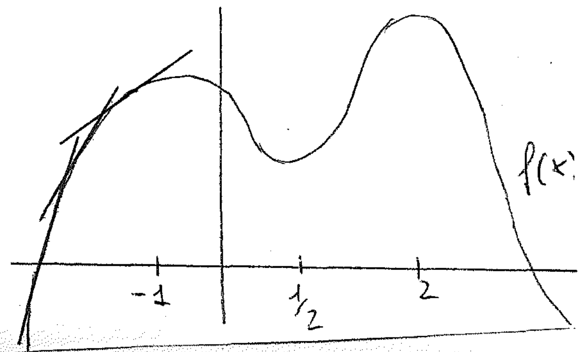
En el problema 32 teniu una gràfica i heu de completar la taula a partir de la gràfica. Transformar, traduir la informació de la gràfica a una taula.. Teniu aquesta gràfica, llavors situeu-vos a la taula. (..cops de pissarra..).

Aquesta taula es diu una taula de variació de la funció. T'explica com varia, com es comporta la funció. És una taula que en la primera fila té els valors de l'abscissa, els valors de les x, a la 2a fila teniu els valors de la imatge, de $f(x)$. Per tant, podeu saber quan la funció augmenta, disminueix, etc. Perdó, en la segona fila teniu la derivada, el signe de la derivada, i a la tercera fila, teniu la funció, la imatge $f(x)$. Per tant, podem saber el comportament de la funció a la tercera fila i a la segona fila teniu la derivada; aquesta taula relaciona el signe de la derivada i el comportament de la funció.

x	$(-\infty, -1)$	-1	(-1, 1/2)	1/2	(1/2,2)	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	+	0					
$f(x)$	↗	màxim					

Gràfica de $f(x)$ → Descripció verbal del seu comportament

Càlcul del signe de la derivada gràficament



Poso la mà estesa amb els dits junts sobre les rectes tangents que he dibuixat anant d'esquerra a dreta

Si jo estic a l'interval $(-\infty , -1)$ vol dir que jo estic a l'esquerra del -1, tot el que vulguis. Però si jo estic a l'esquerra del -1, si em situo molt a l'esquerra, i des de l'esquerra me'm vaig cap a la dreta, és a dir vaig en aquesta direcció, què fa la funció? La funció és creixent, si jo me'n vaig cap a la dreta les imatges se'n van cap a dalt. Llavors quan la funció és creixent es representa per la fletxa ↗ . I la derivada, com és? (...cops de pissarra...) Si jo poso diferents rectes tangents, com és el pendent d'aquestes rectes? la pendent sempre és...?

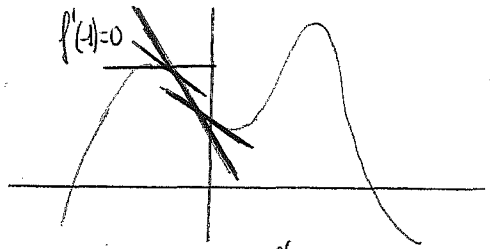
A: (a coro) positiva

REP/TRAD/ ESQ

COMENTARIS

TRANSCRIPCIÓ

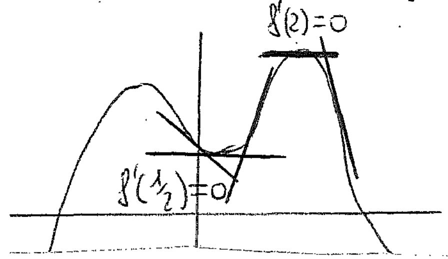
Càlcul del signe la derivada gràficament



P: És positiu, d'acord?. Llavors a la taula teniu positiu i creixent. Anem a completar el que ve a continuació. El punt -1, aquest punt d'aquí, és un punt que és un màxim i la recta tangent és horitzontal. Per tant, la derivada val zero. En un màxim, abans la funció és creixent, la derivada és positiva; i després del màxim, com és la derivada? Si jo faig rectes tangents (...cops de pissarra..) la derivada serà...?

Poso la mà estesa amb els dits junts sobre les rectes tangents que he dibuixat anant d'esquerra a dreta

Gràfica de $f(x)$ → Descripció verbal del comportament de la gràfica de $f(x)$



A: (a coro) negativa
(Albert C) positiva

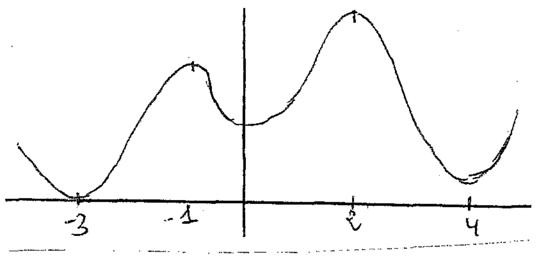
Poso la mà estesa amb els dits junts sobre les rectes tangents que he dibuixat anant d'esquerra a dreta

P. Serà negativa i la funció serà decreixent, per tant has de posar un menys i una fletxa per avall, d'acord? D'aquesta manera seria decreixent fins que arribem aquí. Aquí fixeu-vos que la tangent encara és negativa, i quan arriba a ½ la tangent és horitzontal, tenim un mínim. Abans la funció és decreixent i després la funció és creixent. Per tant, aquí hauria de posar, a l'un mig, la derivada val zero i tenim un mínim, i a l'interval (1/2 , 2) la funció és creixent i la derivada és positiva. D'acord? Llavors en $x = 2$ teníem un màxim, i del 2 cap a la dreta la funció és decreixent i la derivada és negativa. En el 33 el que es tracta és de fer una taula semblant a la del problema 32 que expliqui el comportament de la gràfica del problema 33

Càlcul de $f'(-1)$ $f'(1/2)$ i $f'(2)$ gràficament

x	(-∞, -1)	-1	(-1, 1/2)	1/2	(1/2,2)	2	(2,+ ∞)
$f'(x)$	+	0	-	0	+	0	-
$f(x)$	↗	màxim	↘	mínim	↗	màxim	↘

Acabo de Completar la taula de l'activitat 32.



Dibuixo la gràfica de l'activitat 33 i faig sortir Sandra Donoso a fer la taula a la pissarra Observo que la majoria ho fa bé i responc a les preguntes que fan.

A: (Soroll de fons amb comentaris d'alumnes parlant entre ells que no s'entenen; ....cops de pissarra (meus).... ; ....cops de pissarra (Sandra D.)..

7 minuts aproximadament

P: Bé la qüestió és veure si esteu d'acord amb la taula que fa la Sandra, o no. Sembla que sí?

Gràfica de $f(x)$ → Taula de variació de $f(x)$

x	(-∞, --3)	-3	(-3,-1)	-1	(-1,0)	0	(0,2)	2	(2,4)	4	(4,+∞)
$f'(x)$	-	0	+	0	+	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	↘	mínim	↗	màxim	↘	mínim	↗	màxim	↘	mínim	↗

A: (Patricia F.) En la primera columna por qué es menos infinito?

REP/TRAD/ ESQ	PISSARRA	COMENTARIS		TRANSCRIPCIÓ
Càlcul del signe la derivada gràficament Càlcul del valor de la derivada en els màxims i mínims		No entenc la pregunta de l'alumna i li responc una cosa que no ha demanat Acompanyo l'explicació amb moviments de mà sobre la gràfica.	P:	¿Por qué es menos infinito?.És una pregunta interessant, perquè hem posat (-∞ , -3). És un tema una mica discutible, perquè a mi en donen aquest tros de gràfica, per tant, no em donen tota la gràfica de la funció. Ara bé, en aquest tipus d'exercicis has de suposar que allò que no veus de la gràfica té un comportament semblant a la part que tens de la gràfica. D'acord? Per tant, puc deduir que d'aquí cap a l'esquerra la funció creix, perquè és lo que ja està indicat a la gràfica, i d'aquí cap a la dreta, lo mateix, la funció torna a créixer. He de suposar que d'aquí cap a -∞ tindrà el mateix comportament que el tros que hi ha a la gràfica. M'explico amb això, o no? Era això el que em preguntaves?
			A:	(Patricia F.) No.
			P:	Què és el que preguntes?
			A:	(Patricia F.) Bueno yo he puesto +∞, pero no sé.
			P:	Quan jo vaig cap a l'esquerra vaig cap a -∞
		Ara entenc la dificultat d'aquesta alumna, no entén que el -∞ fa referència a la x. Creu que fa referència a l'ordenada $f(x)$	A:	(Patricia F.) Però la gràfica va para arriba.
			P:	La gràfica sí que és allò que t'indica la fletxa de baix,..., <<la gràfica va para arriba>> si tu te'n vas de la dreta cap a l'esquerra, la gràfica se'n va cap a dalt, però si vens de l'esquerra cap a la dreta?, tu t'has de situar a l'esquerra del tot i anar cap a la dreta. Si véns de l'esquerra cap a la dreta, la funció lo que fa és ?...
			A:	(Eva P.) bajar
		Acompanyo l'explicació amb moviments de mà sobre la gràfica	P:	Baixar. Ho veus, això? per entendre aquestes taules, tu t'has de situar a l'esquerra del tot i anar cap a la dreta. Si vas de la dreta cap a l'esquerra to va al revés. D'acord?

REP/TRAD/ ESQ	PISSARRA	COMENTARIS		TRANSCRIPCIÓ
Gràfica de $f(x)$ → Descripció verbal del comportament de la gràfica de $f(x)$		Acompanyo l'explicació amb moviments de mà sobre la gràfica		D'entrada he contestat a una pregunta que no em feies, però és important el que he dit abans. Vosaltres teniu aquesta gràfica, llavors tot el tros de la gràfica d'aquí cap aquí puc suposar que el comportament que tindrà la gràfica és el mateix que té en el tros que veig. Per tant, com que en aquest tros fa així, jo he de suposar que aquest serà el seu comportament. Per tant, si d'aquí a aquí és decreixent puc suposar que en el tros de l'esquerra fa el mateix. I aquí igual. Això es pot continuar així tot el que vulguis. Si no fos així ja em donarien la gràfica més ampliada perquè si hi hagués alguna cosa que no fos aquesta quedés recollida. Queda clar el que estic diguent, o no? vosaltres heu de suposar que el comportament que té la gràfica en el tros que no està dibuixada és el mateix que el que té en el tros dibuixat. És una suposició que a vegades pot ser equivocada, però que d'entrada suposarem això. Bé doncs, alguna pregunta més respecte d'aquesta taula?
			A:	No
		Són exercicis dels apartats <<Per practicar més>> i <<Autoavaluació>>	P:	No. Doncs ara apunteu alguns exercicis per fer, que jo no faré a classe, però que estan relacionats amb aquest tema. Podeu fer el número 6 de la pàgina 363, i el 16 i 17 de la pàgina 355. 16 i 17 de la pàgina 355. Són exercicis que relacionen el signe de la derivada amb la gràfica o bé permeten calcular gràficament la derivada. Jo no els faré a classe aquests, però convindria que els féssiu per reforçar aquests conceptes, d'acord?. Amb això hem recordat l'últim que havíem fet abans de vacances.
Gràfica ⇔ Taula de variació	Gràfica ⇒ Taula de variació Taula de variació ⇒Gràfica Signe de la derivada ⇒Taula de variació ⇒Gràfica			Anem a continuar ja amb coses noves. Observeu el següent: aquesta taula surt de la gràfica. És a dir, que de la gràfica hem fet una taula ....(cops de pissarra)..... Més endavant, més endavant, el que farem nosaltres és fer una taula com aquesta, d'una taula com aquesta, nosaltres podrem fer l'esbós de la gràfica. Ara de moment hem fet un petit exercici en el que de la gràfica hem fet la taula. Després, el que realment es fa, és una taula com aquesta, i a partir d'una taula com aquesta, es fa l'esbós de la gràfica.

REP/TRAD/ ESQ	PISSARRA	COMENTARIS	TRANSCRIPCIÓ
		Faig moviments amb la mà d'esquerra a dreta seguint la corba. Poso la mà amb els dits estirats sobre les rectes tangents perquè els alumnes observin la inclinació de la recta.	Es representen funcions a partir de taules com aquestes. Llavors, per poder representar una funció a partir d'una taula com aquesta, el que necessitem saber és el signe de la derivada en tots els intervals. És a dir, hauríem de calcular moltes derivades, hauríem de calcular la derivada en infinits punts. I, a l'hora de calcular la derivada de molts de punts, infinits punts, hi ha un petit problema en la manera com calculàvem fins ara les derivades. Perquè, amb la manera com calculàvem fins ara les derivades, no tindríem temps de fer-ho. Anem a veure un sistema que permetrà calcular molt ràpidament la derivada, o com a mínim el signe de la derivada, en molts de punts diferents. Anem a veure una eina que permeti trobar la derivada en moltíssims de punts d'una manera molt ràpida. Això és el que farem ara. Quan tingui aquesta eina, que permetrà trobar la derivada en tots els punts que vulgui, podré fer taules com aquestes, i a partir de taules com aquestes podrem fer gràfiques. Però el que necessitem per continuar avançant és tenir un sistema ràpid, potent, per calcular derivades en molts de punts. Recordeu que per calcular la derivada en un punt havíem de calcular el límit, havíem de fer molta feina per calcular la derivada en un punt. Si a més, hem de calcular la derivada en moltíssims de punts, això seria una feina de moltes hores. Per tant, el que necessitem és un instrument, una eina, que ens permeti calcular ràpidament moltíssimes derivades en molts de punts diferents. D'acord? Per fer això passem ja a la pàgina següent i començarem amb el tema de la funció derivada. Això és pròpiament lo nou A: (Jordi C) Qué página? P: 337 A: ....(soroll de fons amb comentaris d'alumnes) 50 s
Expressió analítica de $f(x)$	$f(x) = x^2$		P. Bé anem a comentar el paràgraf que teniu en aquest apartat. En aquest apartat tinc la funció $f(x) = x^2$, i vull trobar la recta tangent en diferents punts, per exemple en $x = -7$, vull trobar l'equació de la recta tangent, en $x = 21$, vull trobar l'equació de la recta tangent, i en $x = 40$, vull trobar l'equació de la recta tangent, és a dir he de trobar l'equació de la recta tangent en tres punts.

REP/TRAD/ ESQ	PISSARRA	COMENTARIS	TRANSCRIPCIÓ

$f'(-7) = ?$
$f'(21) = ?$
$f'(40) = ?$

Càlcul de $f'(a)$ per límits, gràficament i amb calculadora

$$f'(-7) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-7+h)-f(-7)}{h}$$

$$f'(21) = \lim_{h \to 0} \frac{f(21+h)-f(21)}{h}$$

$$f'(40) = \lim_{h \to 0} \frac{f(40+h)-f(40)}{h}$$

Relació entre la velocitat instantània i la derivada en un punt

abscissa						
derivada						

Traducció: expressió simbòlica / expressió simbòlica: $d(t) = t^2 \Rightarrow f(x) = x^2$

Física	Matemàtiques
$d(t) = t^2$	$f(x) = x^2$
v_2	$f'(2)$
v_3	$f'(3)$
v_4	$f'(4)$

Si recordeu com es trobava l'equació de la recta tangent, el pendent de la recta tangent seria la derivada. Per tant, per trobar l'equació de tres rectes tangents hauria de trobar $f'(-7)$, $f'(21)$ i $f'(40)$ ..(cops de pissarra)..i a partir d'aquí acabar de trobar l'equació de la recta tangent.

Com es troba la derivada en aquests punts? Si recordeu el que vam fer, podíem calcular un límit, podíem fer-ho amb la calculadora, podíem fer-ho gràficament, tenia aquestes tres alternatives. Però ho he de fer aquí, ho he de fer aquí i fer aquí. Si, per exemple, he optat per límits hauria de calcular tres límits. Això fa que sigui bastant pesat i bastant lent contestar aquesta pregunta. Bé doncs, abans de calcular aquestes tres derivades, abans de calcular els tres límits, per exemple, ..(cops de pissarra)... Abans de calcular aquest límit, després calcular aquest i després calcular aquest, anem a fer una cosa molt senzilla que és el següent: agafar els valors de la derivada en diferents punts d'aquesta funció que han sortit en exercicis anteriors i col·locar-los en una taula, i llavors fem aquesta taula d'aquí ...(cops de pissarra)..

Per la funció $f(x) = x^2$ nosaltres podem fer aquesta taula i posar aquí l'abscissa, és a dir la x, i aquí la derivada en el punt en qüestió, en l'abscissa concreta, ..(cops de pissarra)... llavors en els problemes número 15, 18 i 26 vam calcular diferents derivades en diferents punts de la paràbola $f(x) = x^2$. En el problema número 15, concretament en el número 15, vàrem calcular, per aquesta funció ..(cops de pissarra)..vàrem treballar amb la funció $d(t) = t^2$ que era l'espai en funció del temps. Si això ho escrivim en la notació habitual és la paràbola $f(x) = x^2$. Aquí vàrem trobar la velocitat per diferents punts, vàrem trobar la velocitat en el punt 2, 3 i 4 ..(cops de pissarra)..vàrem trobar la velocitat en els punts 2, 3 i 4 ..(cops de pissarra). és a dir, quan $x = 2$ vam trobar que la velocitat, que era la derivada, valia 4. Per tant, a 2, la derivada val 4; a 3, vàrem trobar que la velocitat en aquest problema era 6, perquè la velocitat és la derivada,.això és 6, i aquí era 8. És a dir, aquest 4 era $f'(2)$, això és $f'(3)$ i això és $f'(4)$.

REP/TRAD/ESQ

PISSARRA

COMENTARIS

Taula de $f'(x)$

abscissa	-1	0	1	2	3	4
derivada	-2	0	2	4	6	8

Taula de $f'(x) \Rightarrow$ Expressió simbòlica de $f'(x)$

TRANSCRIPCIÓ

En el problema 18, no sé quin era el problema 18, en el problema 18 vàrem calcular, per a la paràbola $f(x) = x^2$, la derivada en el punt d'abscissa $x = 1$, i vàrem veure que era 2. I en el problema 26, vàrem calcular gràficament diferents derivades per a la paràbola $f(x) = x^2$ en els punts -1, 0 i 2. En 2 va sortir el mateix, en 0 va sortir 0 i aquí va sortir -2, Val? en aquesta taula jo el que he fet és posar per a la funció $f(x) = x^2$ diferents valors, el punt d'abscissa -1, el punt d'abscissa 0, etc. Pel punt d'abscissa -1, $f'(-1)$ la vàrem calcular en el problema 26 i vam veure que era -2, la vam calcular gràficament. Després, en aquest mateix problema, vàrem calcular $f'(0)$ gràficament i ser 0. En el problema 18 vam trobar $f'(1)$ i va ser 2. La vàrem fer per aproximacions numèriques calculant el límit. I en l'altre problema vam calcular $f'(2)$ que va ser 4, $f'(3)$ que va ser 6 i $f'(4)$ que va ser 8. D'aquesta és com hem completat aquesta taula, d'acord? Si recolliu totes les derivades en diferents valors que han anat sortint en una taula podreu fer el problema 34 ràpidament.

A: ....(soroll de fons amb comentaris d'alumnes) 1 m

P: Aquí teniu les abscisses i aquí teniu la derivada en cada una d'aquesta abscissa, la derivada en cada un d'aquests punts. Observeu això d'aquí, a veure si podeu trobar una fórmula que vos relacioni aquesta fila amb aquesta.

A: ....(soroll de fons amb comentaris d'alumnes) 10 s

P: Com es troba aquesta fila a partir de la de dalt ?

A: ....(soroll de fons amb comentaris d'alumnes) 20 s

P: Quina fórmula permet trobar la fila de sota a partir de la fila de dalt ?

A: ....(soroll de fons amb comentaris d'alumnes) 10 s

P: Trigueu moltíssim a trobar la fórmula, Silvia (V) quina és la fórmula?

A: (Silvia V) Dividiendo por dos la derivada da la abscisa.

REP/TRAD/ ESQ	PISSARRA	COMENTARIS		TRANSCRIPCIÓ
			P:	D'acord? Fixeu-vos de quina manera més ràpida, de quina manera més ràpida hem trobat aquestes tres derivades i no hem hagut de calcular límits ni fer gràfics ni utilitzar calculadora ni res. D'acord?
	$f'(50) = 2\cdot 50 = 100$ <u>Funció</u> $f(x) = x^2$ <u>Funció derivada</u> $f'(x) = 2x$	Si bé cap alumne ha fet aquesta pregunta, si que ho van fer alumnes de cursos anteriors. Per això considero important fer aquest comentari		Anem a treure conclusions del que hem fet. Que és el que teniu a continuació. Vosaltres teniu la funció que és ..(cops de pissarra) $f(x) = x^2$. Hem posat diferents valors en una taula. A partir de la taula hem tret una fórmula i hem arribat a la següent conclusió: que la fórmula $y = 2x$ és la fórmula que per cada valor de l'abscissa em dóna la derivada en aquest valor de l'abscissa. És a dir, si jo vull trobar la derivada en el punt 50, el que he de fer és 50 per 2, serà 100. Aquesta fórmula ..(cops de pissarra) es sol posar així. Aquesta fórmula es sol posar d'aquesta manera: $f'(x) = 2x$, i es diu funció derivada ..(cops de pissarra). I per què es posa $f'(x)$? Aquí hi ha una pregunta que seria lògic fer, que seria la següent: si és una funció, nosaltres a les funcions, quina notació utilitzem habitualment per les funcions?
			A:	(Raúl B.) la y.
			P:	La y, però més que la y utilitzem sempre......què?
			A:	(Judit P.) $f(x)$
Expressió simbòlica de $f'(x) \Rightarrow$ Expressió simbòlica de $f'(x)$	$f'(x) = 2x$ també es pot escriur $f(x) = 2x$		P:	La $f(x)$. Per tant, la funció derivada és una funció, quan la represento no li poso el que seria lògic i habitual que és posar $f(x)$, sinó que li poso $f'(x)$. Bé, per què es fa això? Es fa això per distingir aquesta d'aquesta, i que quedi clar que una és la funció inicial i l'altra és la derivada, la funció derivada . Però, seria perfectament legítim utilitzar aquí $f(x) = 2x$, no posar la <<prima>>, el que passa que hi ha el costum de que quan tens una funció derivada, en comptes de posar allò habitual per una funció que és $f(x)$ es posa $f'(x)$ perquè és la derivada. D'acord?

REP/TRAD/ ESQ	PISSARRA	COMENTARIS	TRANSCRIPCIÓ
Càlcul de la derivada en un punt a partir de la funció derivada	$f'(24) = ?$ $f'(24) = 2 \cdot 24 = 48$ Com calcular $f'(a)$? $f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ O bé: 1 Calcular la funció derivada $f'(x)$ 2 Substituir la x per a a la fórmula de la funció derivada.		Fixeu-vos bé que teniu la funció $f(x) = x^2$ i tinc una altra funció que és aquesta que em dóna per cada valor de l'abscissa la derivada de la funció inicial en aquest valor de l'abscissa, i aquesta funció, aquesta fórmula es diu la funció derivada, d'acord? Però per s què serveix? Per a què serveix tenir la derivada? Doncs és molt important tenir una fórmula com aquesta perquè si tens una fórmula com aquesta t'estalvies moltíssima de feina. Per exemple, si jo ara vull trobar la derivada en el punt 24, si jo sé aquesta fórmula, l'únic que he de fer és substituir: ..(cops de pissarra).. 2 per 24 que és 48. Per tant, amb aquesta fórmula ens trauríem moltíssima feina de calcular límits. Per tant, fixeu-vos bé que, a partir d'ara, si jo vull trobar per una funció $f'(a)$, el que puc fer és el següent: ..(cops de pissarra).. O bé fer això ..(cops de pissarra).O bé fer això altre: primer calcular $f'(x)$ i segon ..(cops de pissarra)..substituir x per a que és el que he fet aquí. Si jo vull trobar la derivada en el punt 24 d'aquesta funció el que puc fer és agafar la funció derivada $f'(x) = 2x$ i substituir. És un sistema molt ràpid i si no el que hauria de fer és calcular el límit aquest . O bé calculo la derivada d'aquesta manera, o bé tinc la funció derivada i substitueixo. No sé si veieu els avantatges de tenir la funció derivada. En tot cas anem a fer un petit quadre que seria el següent: ..(cops de pissarra)..
		A:	................(soroll de fons amb comentaris d'alumnes) 2m 10 s
		P:	Vos faig aquest esquema, abans de continuar. En relació al que havíem fet abans de vacances, a la pregunta: com es calcula la derivada en el punt d'abscissa $x = a$? Ara hem afegit un nou procediment respecte dels anteriors, que ja havíem vist. Què havíem vist abans de vacances?

REP/TRAD/ ESQ	PISSARRA	COMENTARIS	TRANSCRIPCIÓ
	Com es calcula $f'(a)$?	El que faig és completar l'esquema de la classe del 17-12-97 amb un quart mètode	Per calcular una derivada, es podia fer calculant límits, per exemple a l'examen, és una manera de calcular la derivada. Vaig explicar també com es podia calcular la derivada amb la calculadora, que no calculàvem directament la derivada sinó que fèiem una aproximació a la derivada posant aquest quocient amb h prou petit, amb la calculadora sortia, si ho recordeu això era una altra manera de trobar la derivada. Hi havia una altra alternativa que era trobar la derivada gràficament; si teníem dibuixada la recta tangent, calculàvem el pendent de la recta tangent. Aquestes eren les tres maneres amb què havíem calculat la derivada. Però ara s'afegiria una quarta, que, amb el temps, serà la més important. Més endavant serà la que més utilitzarem. Aquesta quarta és ....
Esquema complert per calcular la derivada d'una funció en un punt	1) Calculant el límit: $$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$ (activitats 20, 21 i 22) 2) Trobant un valor aproximat amb la calculadora: $$f'(a) \approx \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \quad \text{(amb } h \text{ prou petit)}$$ (activitats 23, 24 i 25) 3) Gràficament calculant el pendent de la recta tangent (activitat 26) 4) Calculant primer la funció derivada $f'(x)$ i després substituint la x per a a la fórmula. Exemple: $f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$ $f'(5) = 2\cdot 5 = 10$	A més de comentar aquest esquema faig observar que els tres primers mètodes són mètodes directes perquè vaig a buscar la derivada $f'(a)$ que em pregunten, mentre que el mètode de la funció derivada és un mètode indirecte ja que en comptes de buscar directament $f'(a)$ primer busquem la funció derivada que serveix per qualsevol valor de a. També faig observar que la funció derivada variarà en variar $f(x)$	Gravació 45 m Final de la gravació. La classe continua 5 minuts més en els que continuo comentant l'esquema de la pissarra Total 50 m

5.2.15. Subseqüència 4 d'avaluació. Qüestionari 5.

En els cursos anteriors havíem observat que la definició de la funció derivada a partir de la derivada en un punt no era gens evident, ja que els alumnes tenien dificultats per entendre el significat de la funció derivada, és a dir tenien dificultats per entendre: 1) que la funció derivada és una funció i 2) que la funció derivada és una funció que a cada valor de l'abscissa x li fa correspondre la derivada de la funció en el punt d'abscissa x. Aquesta dificultat es manifestava en la confusió entre la derivada en un punt i la funció derivada, la confusió entre la funció i la funció derivada, etc.

La dificultat que representa la introducció de la funció derivada ens va portar a analitzar tres alternatives per introduir-la:

- La primera és la que habitualment es troba en els llibres de text i consisteix a definir-la com $f'(x)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$
- La segona consisteix en trobar una condició que compleixen totes les tangents i, a partir d'ella, calcular la funció derivada. Aquest segon mètode és el resultat de la transposició d'un procediment present en el període històric que va de Descartes a Barrow.
- La tercera consisteix en construir una funció derivada a partir d'una taula abans de donar-ne la definició per límits

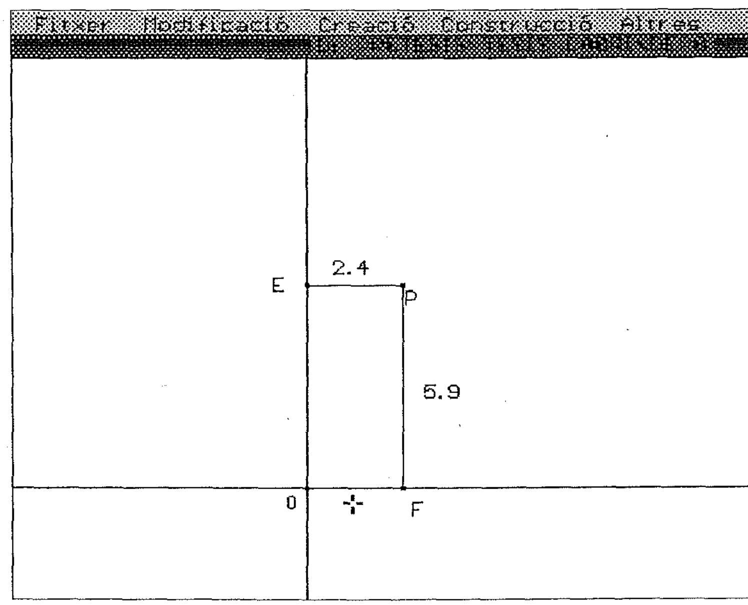
Les funcions semiòtiques implicades en aquestes tres maneres diferents d'introduir la funció derivada es poden considerar com una mesura indirecta del grau de dificultat de cada un d'aquests procediments i ja han estat analitzades en el subobjectiu 1.2

Vam decidir combinar les tres alternatives per tal d'aconseguir una bona comprensió del contingut "funció derivada".

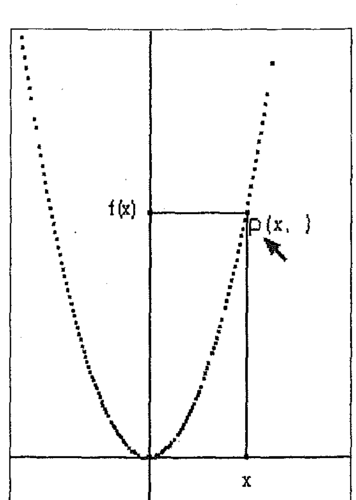
L'alumnat només havia treballat la funció derivada en l'última part de la sessió del 8-1-98. Concretament havia treballat que la derivada de la funció $f(x) = x^2$ és $f'(x) = 2x$ utilitzant aquest tercer procediment i no havia treballat encara la definició per límits. Per a la sessió del 9-1-98 vam dissenyar un qüestionari (el núm 5) per avaluar la capacitat que tenien els alumnes per a calcular la funció derivada de la funció $f(x) = x^2$ per dos mètodes diferents. El primer era una variació del tercer mètode i l'altre era el segon mètode.

QÜESTIONARI 5

1 A la figura següent tens un punt P que es pot moure. Ara bé sempre es mou subjecte a determinades condicions. Començarem per esbrinar quines són aquestes condicions.



a) Mou el punt F de manera que el punt P quedi en diferents posicions. Per a cada posició observa la mesura del segment EP i la de PF. Estàs d'acord amb l'afirmació següent: *el punt P es mou de manera que la seva distància a l'eix d'abscisses és el quadrat de la seva distància a l'eix d'ordenades?*
b) Escull l'opció traça d'un punt i marca amb el cursor del ratolí el punt P. Mou el punt F cap a l'esquerra i cap a la dreta i obtindràs una gràfica, quin tipus de gràfica és?
c) si $OF = x$, quines són les coordenades del punt P?
b) Quina és la fórmula de la funció que té per gràfica la que resulta de fer la traça del punt P.



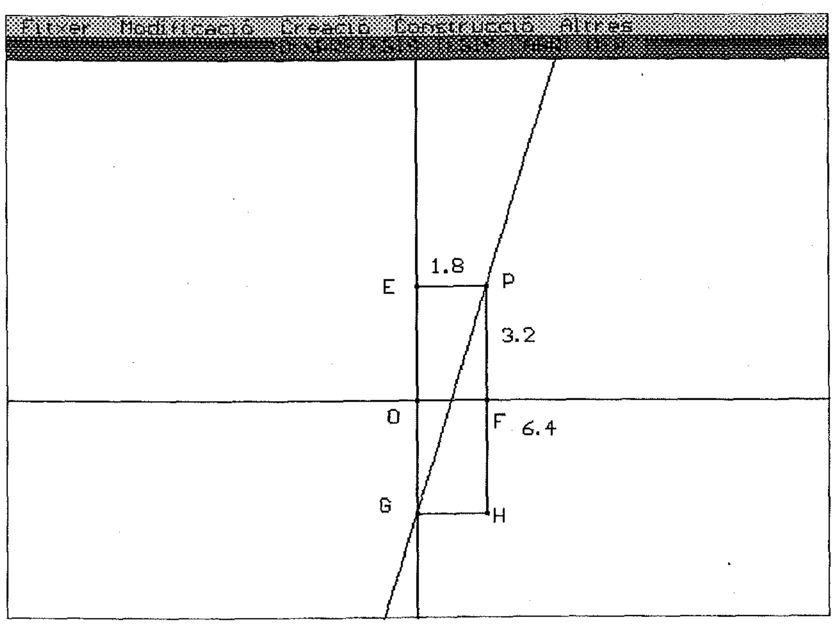
3 A la figura següent tornes a tenir el punt *P*. En aquesta figura, a més de la condició de que *P* sempre es mou de manera *que la seva distància a l'eix d'abscisses és el quadrat de la seva distància a l'eix d'ordenades,* hem afegit la condició que *P* sempre està sobre la recta *GP*, essent *G* el punt que fa que *EG= PH= 2PF*

a) Mou el punt F amb el cursor del ratolí i comprova que el punt G compleix la condició *EG= PH= 2PF.*

b) Escull l'opció traça d'un punt i marca amb el cursor del ratolí el punt *P*. Mou el punt *F* cap a l'esquerra i cap a la dreta i comprova que surt la gràfica de la funció $f(x) = x^2$.

c) Què pots dir de la recta *GP*?

d) Calcula el pendent de la recta tangent en el punt d'abscissa $x = 1{,}8$



e) Mou el punt *F* i completa la taula següent:

x	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5
pendent de la recta tangent							

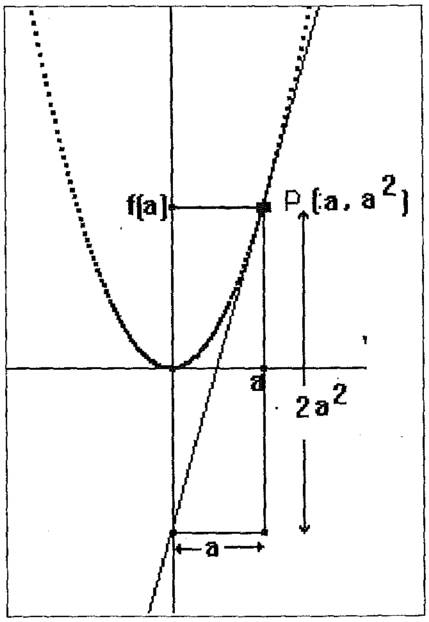
f) A partir de la taula anterior troba la fórmula de la funció derivada de la funció $f(x) = x^2$.

3 El fet que la recta tangent en qualsevol punt compleixi la condició $EG= PH= 2PF$ permet trobar la derivada de la funció $f(x) = x^2$ en qualsevol punt d'abscissa $x = a$. Per calcular-la contesta:

a) Si $OF = a$, justifica que $GH = a$, $PF = a^2$ i $PH = 2a^2$

b) Utilitzant que la derivada de la funció en un punt és el pendent de la recta tangent, calcula $f'(a)$.

c) Demostra que la derivada de la funció $f(x) = x^2$ és la funció $f'(x) = 2x$.



Aquest qüestionari es va passar els dies 9-1-98 a una meitat de la classe i el dia 16-1-98 a l'altra

Sessió del dia 9-1-98

Planificació prèvia

1) Passar el qüestionari núm 5.
2) Comentar les respostes al qüestionari núm 5.

Faltes: Jordi L

Incidències: Aquesta sessió es va poder fer a l'aula d'informàtica i cada alumne estava sol en un ordinador i tenia a la pantalla les figures de les activitats. La meva intervenció fou una breu explicació sobre el programa Cabri (cal dir que molts alumnes ja el coneixien de cursos anteriors). No vaig tenir temps de comentar-los les seves respostes.

El tutor ha decidit canviar de grup a Alberto C a l'hora B pel seu mal comportament a les classes a fi de separar-lo d'Alex A.

Anàlisis de les respostes dels alumnes

Respostes

Pregunta 1

Apartat *a*

Tots els alumnes responen que sí. Les respostes van des d'un simple "sí" fins a un "sí" acompanyat de mesures dels segments *EP* i *FP* . Per exemple David R. contesta: <<Verdadera. 1→1, 2→4,1 , 3→9,1 , 4→16,1 >>

Apartat *b*

Respostes	Paràbola	Abscissa	$ax+b$
Nombre d'alumnes	17 (89%)	1(5%)	1(5%)

- L'alumna que ha respost <<abscissa>> és Elia G .Va faltar la meitat del trimestre anterior per malaltia i s'ha incorporat després de vacances. Tinc la sensació que el seu problema és la manca de domini dels continguts treballats durant el temps que va estar malalta. Es posarà al dia ràpidament.
- L'alumne (David R.), que ha respost $ax+b$, confon una paràbola amb una recta.

Apartat *c*

Respostes	(x, x^2)	$(x,f(x))$	$FE = y$	$(x,f(x)) \to (x, x^2)$
Nombre d'alumnes	10(53%)	7(37%)	1(5%)	1(5%)

- 18 alumnes (95%) responen correctament.
- L'alumne que respon $FE = y$ és Toni G.
- És de destacar que el 42% respon $(x,f(x))$; en canvi, en una pregunta semblant del qüestionari 1, cap alumne va donar aquest tipus de resposta.

Apartat *d*

Respostes	$y = x^2$	$f(x)=x^2$	$y = x^2$ $f(x)=x^2$	x^2	$x^2 = x$
Nombre d'alumnes	2(11%)	14(74%)	1(5%)	1(5%)	1(5%)

- 17 alumnes (90%) responen correctament.
- 14 alumnes (79%) utilitzen la notació $f(x)=x^2$ i només 3 (16%) utilitzen la notació $y = x^2$.

Segona pregunta

Apartat *a*

Respostes	Si	Blanc
Nombre d'alumnes	17(90%)	2(10%)

- Els dos alumnes que responen en blanc sembla que ho fan perquè interpreten que la longitud 6,4 correspon a la longitud *FH* (s'ha de tenir en compte que a la pantalla de l'ordinador no hi ha les fletxes que hi ha a la figura del qüestionari). Això es dedueix de la seva resposta a l'apartat *d*.

Apartat *b*

Respostes	Si	Blanc
Nombre d'alumnes	16(84%)	3(16%)

- Els dos alumnes (David M. i Alicia M.) que responen en blanc l'apartat *a* també responen en blanc l'apartat *b*. L'altra és Maria L. V. (És probable que no hagin respost per dificultats en l'opció traça del Cabri).

Apartat *c*

Respostes	La recta tangent	la derivada
Nombre d'alumnes	16(84%)	3(16%)

- 3 (Sergi G., David R i Lluís J. G.) alumnes confonen la recta tangent amb la derivada. El seu error és confondre la tangent de la recta tangent (derivada) amb la recta tangent.

Apartat *d*

Resp	6,4/1,8 = 3,56	9,6/1,8 = 5,3	3,2-1,8 = 1,4	3,2/1,8=1,78	-6,4/1,8 = -3,56
Alum	11(63%)	4(21%)	1(5%)	2(11%)	1(5%)

- 11 alumnes (63%) saben calcular el pendent de la recta tangent a partir de la figura.
- 7 (32%) alumnes saben que el pendent és la variació vertical dividida per la variació horitzontal, però s'equivoquen en la lectura d'aquestes variacions.
- Només un alumne (David R) sembla que no sap com calcular el pendent de la recta tangent.

En aquest moment vaig decidir intervenir per comentar-los a cada un el seu error. Als 4 alumnes que havien respost 5,3 els vaig fer observar que el 6,4 inclou al 3,2. Als que havien respost 1,78 els vaig fer observar que l'1,8 era *DF* i no la base del triangle d'altura 3,2. A la que s'havia equivocat en el signe només li vaig preguntar per què agafava la longitud *PH* negativa. I a l'alumne que havia comès l'error greu li vaig dir que li preguntaven el pendent i que s'havia de respondre buscant la relació entre la variació vertical i horitzontal tal com havien fet abans de vacances. Aquesta intervenció fou suficient perquè tots s'adonessin del seu error i intentessin corregir la seva resposta. Els vaig dir que no ho fessin.

Apartat *e*

Respostes	Completen la taula correctament
Nombre d'alumnes	19 (100%)

- Un cop advertits dels seus errors, tots els alumnes van poder completar la taula correctament. Sense la meva intervenció el resultat hauria estat del 63% en comptes del 100%

Apartat *f*

Resp	$f'(x)=2x$	$f(x)=2x$	$y=2x$	$y=x^2$	$f'(x)=2x^2$
Alum	3(16%)	9(47%)	5(26%)	1(5%)	1(5%)

- 17 (90%) alumnes troben la fórmula i només dos (10%) no se'n surten.
- Només 4 (21%) alumnes utilitzen la notació $f'(x)$.

Els dos alumnes que no han trobat la fórmula són dels 8 que s'havien equivocat en l'apartat *d* Per tant, un 63% dels alumnes han pogut trobar l'expressió de la funció derivada seguint aquest procediment. El poc ús de la notació $f'(x)$ s'explica pel fet que va ser introduïda a la classe per primera vegada en la sessió anterior.

Tercera pregunta

Apartat a

Justificació que $OF = a$

Respostes	Ben Justificat	Mal justificat	Sense justificació
Nombre d'alumnes	10 (53%)	2 (11%)	7(37%)

Justificació que $PF = a^2$

Respostes	Ben Justificat	Mal justificat	Sense justificació
Nombre d'alumnes	6 (32%)	5 (26%)	8 (42%)

Justificació que $PH = 2a^2$

Respostes	Ben Justificat	Mal justificat	Sense justificació
Nombre d'alumnes	7 (37%)	5 (26%)	7 (37%)

El poc èxit en respondre correctament l'apartat *a* de la tercera pregunta s'explica, d'una banda perquè l'alumne ha d'escriure les lletres de la gràfica de la 2a figura a la gràfica de la 3a pregunta, i d'altra banda, perquè no estan acostumats a donar justificacions.

Apartat *b*

Respostes	Justificació correcta	Justificació incorrecta
Nombre d'alumnes	12 (63%)	7 (37%)

- Les 12 justificacions correctes són respostes del tipus $f'(a) = 2a^2/a = 2a$
- Cal destacar que dues de les respostes incorrectes han intentat calcular $f'(a)$ per límits

Apartat *c*

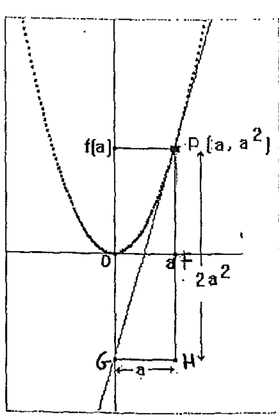
Respostes	Justificació correcte	Justificació incorrecta	Blanc
Nombre d'alumnes	4 (21%)	10 (53%)	5 (26)

Les 10 justificacions incorrectes es poden classificar de la manera següent:

- Un intent de fer la justificació per límits (Elia G.)
- Una justificació a partir de la regla de derivació $f'(x) = nx^{n-1}$ (Anna G. alumna repetidora)
- Una descripció: <<La derivada de la funció $f(x) = x^2$ és la funció $f(x) = 2x$ perquè la derivada de $f(x) = x^2$ és igual a $2x$ (Oscar T.)>>.
- Una justificació en base a la taula de l'apartat *e* de la pregunta 2 (Laura N.) (Aquesta resposta es podria considerar correcta, però no ho fem, perquè la majoria dels alumnes van interpretar la pregunta en el sentit que havien de fer una demostració i que no n'hi havia prou de dir que aquesta fórmula sortia de la taula)
- 6 justificacions incorrectes que, implícitament, consideren que la condició que compleix la recta tangent en el punt d'abscissa a, es compleix en qualsevol punt d'abscissa x. La millor d'aquestes justificacions és la de Angela L.<<$PH = 2GH$ siempre, por lo tanto, la pendiente de la recta tangente siempre será 2 y la derivada $2a^2/a = 2a$>>.

Les 4 respostes correctes han suposat que a és un valor qualsevol de la variable x o bé han repetit el càlcul de l'apartat anterior amb x. La resposta més completa és la de Silvia V.

c) Demostra que la derivada de la funció $f(x) = x^2$ és la funció $f'(x) = 2x$.



a) $GH = a$ perquè hi ha la mateixa distància

$PF = a^2$ perquè la imatge de a en la funció $f(x) = x^2$ és a^2.

$PH = 2a^2$ perquè és el doble de FP.

b) $p = \frac{2a^{\cancel{2}}}{\cancel{a}} = 2a$

$f'(a) = 2a$

c) $a = x$

$p = \frac{2x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}} = 2x$

$f'(x) = 2x$

Valoracions

1. El primer procediment per trobar la funció derivada l'ha acabat el 63% de l'alumnat i amb la meva intervenció el 100%.
2. El segon procediment l'ha pogut finalitzar el 21%. Aquest resultat podia haver augmentat si no fos perquè era l'última pregunta de l'última hora de l'últim dia de la setmana. Crec que aquest qüestionari, passat en un altre moment en què els alumnes no haguessin estat tant cansats, hauria donat millors resultats. De tota manera, cal destacar que 4 alumnes han pogut trobar la funció derivada ells sols.
3. Sembla que el primer mètode resulta més fàcil d'entendre per als alumnes que no pas el segon. El fet d'haver de calcular el pendent amb lletres, en comptes de calcular-lo numèricament no sembla que sigui la causa d'aquesta dificultat sinó que més aviat sembla que la causa està en el fet d'entendre el punt d'abscissa a primer com un punt fix i després suposar que és un punt qualsevol.
4. Com ha resultat del procés d'instrucció es pot esperar que, quan passi aquest qüestionari al segon grup de la classe, augmenti la utilització de la notació $f'(x)$, així com el nombre d'alumnes que utilitzen els límits i el percentatge d'èxit, perquè aquest procediment per trobar la funció derivada a partir de trobar una condició que compleixin totes les tangents també l'aplicarem per trobar la funció derivada de les funcions de proporcionalitat directa i les afins

5.2.16. Subseqüència 7. Funció derivada (continuació)

Sessió del 13-1-98

Falten: Angela L, Mike D. i Toni G.

Planificació

1) Acabar de treballar la definició de funció derivada

2) Completar l'esquema per al càlcul de $f'(a)$ amb un quart mètode basat en la utilització de la funció derivada.

3) Començar el càlcul de la funció derivada.

Desenvolupament de la sessió

P: Començo recordant la introducció de la funció derivada de la sessió del 8-1-98. Dic que teníem la funció $f(x) = x^2$ i que en activitats anteriors havíem calculat derivades en diferents punts d'aquesta paràbola. En el problema número 15, vam calcular la derivada en els punts d'abscissa 2, 3 i 4, i vam obtenir els resultats 4,6 i 8. En el problema 18 vam calcular, per a la paràbola $f(x) = x^2$, la derivada en el punt d'abscissa $x = 1$, i vam veure que era 2. I en el problema 26, vam calcular gràficament les derivades per a la paràbola $f(x) = x^2$ en els punts -1, 0 i 2. En 2 va tornar a sortir 4, en 0 va sortir 0 i en -1 va sortir -2. Tots aquests resultats els vam recollir en una taula (mentrestant he posat a la pissarra la taula següent)

abscissa	-1	0	1	2	3	4
derivada	-2	0	2	4	6	8

A partir d'aquesta taula vam fer la hipòtesi que la segona fila, la derivada, es pot trobar multiplicant la primera fila, l'abscissa, per 2. El fet de suposar que aquesta fórmula , $y = 2x$, és vàlida sempre ens va permetre contestar ràpidament el problema 34, ja que aquesta fórmula dóna, per a cada valor de l'abscissa x, la derivada de la funció $f(x) = x^2$ per aquest valor de l'abscissa. Basta calcular el doble de l'abscissa. Per exemple, si vull calcular la derivada en $x = 250$, basta fer (escric a la pissarra)

$$f'(250) = 2 \cdot 250 = 500 \quad \text{en comptes de calcular} \quad f'(250) = \lim_{h \to 0} \frac{f(250+h)-f(250)}{h} .$$

Insisteixo molt en l'economia que representa disposar d'aquesta fórmula. A continuació remarco que la fórmula $y = 2x$ és una funció, perquè a un valor de l'abscissa, li fa correspondre el nombre que és la derivada de la funció $f(x) = x^2$ per a aquest valor de l'abscissa, i també que aquesta funció s'anomena funció derivada. A continuació escric a la pissarra:

Funció	Funció derivada
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$

Després comento que, donat que la funció derivada és una funció, allò que seria normal és representar-la per $f(x) = 2x$ tal com hem fet fins ara. Ara bé, en aquest cas es fa una excepció i es representa per $f'(x) = 2x$. Seguidament em pregunto per a què serveix tenir la funció derivada i jo mateix contesto dient que és per calcular derivades en diferents punts molt ràpidament, perquè basta substituir l'abscissa del punt en la fórmula de la funció derivada (escric a la pissarra el següent:)

Per calcular $f'(a)$ basta seguir el procés següent:
1 Calcular la funció derivada $f'(x)$
2 Substituir la x per a a la fórmula de la funció derivada.

També comento que la funció derivada permet fer el procés contrari, és a dir, saber per a quin valor de l'abscissa la derivada agafa un valor determinat i passo a comentar l'exemple de la pàg 337 de la unitat. Dic que en aquest exemple tenim la paràbola $f(x) = x^2$ i volem saber en quin punt aquesta funció té una recta tangent que formi un angle de 45° amb l'eix d'abscisses, basta buscar el valor de l'abscissa tal que la derivada en aquest punt valgui 1. A continuació pregunto a Jordi C. quina relació hi ha entre l'angle que forma la recta tangent amb l'eix d'abscisses i el pendent de la recta tangent.

A: Jordi respon que la tangent de 45° és el pendent de la recta tangent.

P: Dic que efectivament és així i pregunto a tota la classe quin nombre és la tangent de 45°.

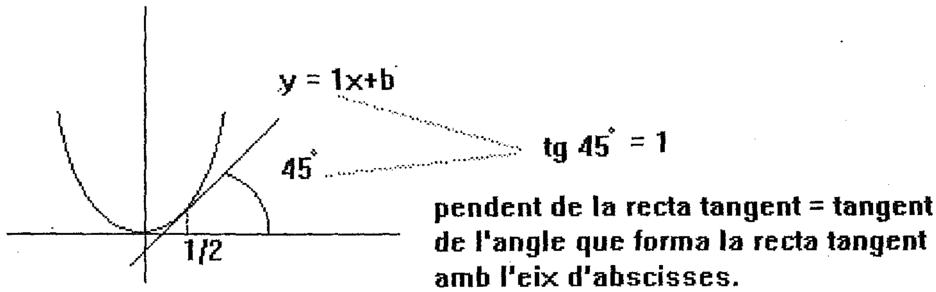
A: la majoria sembla que no se'n recorda que la tangent de 45° és 1 i alguns, pocs, responen que és 1.

P: Els recordo que tots haurien de saber que la tangent de 45° és 1. Seguidament comento que és el mateix preguntar: <<en quin punt la recta tangent forma un angle de 45°>> , << en quin punt la recta tangent té un pendent igual a 1>>, << en quin punt la derivada val 1>> o per a quin valor $2x$ val 1. Escric i dibuixo a la pissarra el següent:

$f'(x) = 2x$

$2x = 1 \Rightarrow x = 1/2$

$f'(1/2) = 2 \cdot 1/2 = 1$



també remarco que no confonguin la tangent de l'angle que forma la recta tangent amb la part positiva de l'eix d'abscisses, que és un nombre, amb la recta tangent que és una recta. A continuació dic que facin l'activitat 35 i que utilitzin que $f'(x) = 2x$ és la derivada de la funció $f(x) = x^2$.

A: Es posen a fer l'activitat 35 i molts alumnes reclamen la meva atenció particular per fer-me preguntes sobre l'activitat.

P: Al cap de 10 minuts faig un comentari per fer-los observar que l'apartat *c* és quasi igual a l'apartat *b*.

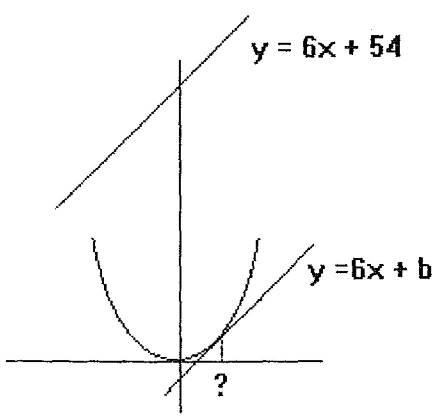
P:Al cap de 5 minuts aproximadament, quan crec que la majoria ja ha fet l'activitat 25, l'explico a la pissarra per a tots. Començo explicant que en aquesta activitat les preguntes *a, b* i *c* són tres maneres diferents de preguntar el mateix. A continuació comento que en l'apartat *a* la pregunta és per a quin valor de l'abscissa la derivada val 16, i que només cal trobar un valor de l'abscissa tal que el seu doble sigui 16 (escric i comento a la pissarra el següent:)

$$f'(x) = 2x \Rightarrow 2x = 16 \Rightarrow x = 8 \Rightarrow f'(8) = 2 \cdot 8 = 16$$

L'apartat *b* pregunta el mateix d'una manera diferent, ja que en comptes de preguntar-nos per a quin valor de l'abscissa la derivada val 3, pregunta per a quin valor de l'abscissa la recta tangent té pendent 3. Ara bé, com que sabem que la derivada en $x = 3$ és el mateix que el pendent de la recta tangent en el punt d'abscissa 3, hem de fer el mateix que en l'apartat anterior (escric i comento a la pissarra el següent)

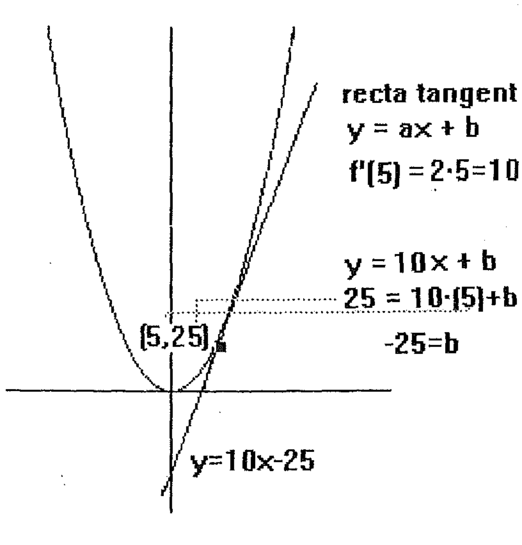
$$f'(x) = 2x \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = 3/2 \Rightarrow f'(3/2) = 2 \cdot 3/2 = 3$$

Continuo comentant que en l'apartat *c* també ens fan la mateixa pregunta ja que si ens pregunten per a quin valor de l'abscissa la recta tangent és paral·lela a la recta $y = 6x + 54$, ens estan preguntant per a quin valor de l'abscissa el pendent de la recta tangent val 6, ja que les rectes paral·leles tenen el mateix pendent (dibuixo i comento la gràfica i els càlculs següents a la pissarra)



$$f'(x) = 2x \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow f'(3) = 2 \cdot 3 = 6$$

En relació a l'apartat *d* comento que el càlcul de l'equació de la recta tangent és una pregunta que ha anat sortint al llarg de la unitat i ara la novetat és que el càlcul es fa més ràpid perquè podem utilitzar la funció derivada. Escric a la pissarra mentre ho comento el següent:



La recta tangent, pel fet de ser una recta, té una equació del tipus $y = ax + b$. El pendent d'aquesta recta és la derivada de la funció en $x = 1$. Com que sabem que $f'(5) = 2 \cdot 5 = 10$, tenim que l'equació de la recta tangent és $y = 10x + b$. Aquesta recta passa pel punt de tangència (5 , 25), la qual cosa vol dir que les coordenades d'aquest punt compleixen aquesta equació, és a dir, que si substituïm la <<*x*>> per la primera coordenada i la <<*y*>> per la segona, la <<*b*>> ha de ser un nombre que compleixi $25 = 10(5) + b$, d'on s'obté $b = -25$.

Insisteixo en el fet que aquest problema sense la fórmula de la funció derivada $f'(x) = 2x$ hagués resultat un problema força més complicat de resoldre.

A: Javier F. pregunta si puc tornar a explicar l'apartat *c*.

P: Repeteixo l'explicació de l'apartat *c* i torno a insistir en el gran avantatge que representa poder utilitzar la funció derivada, perquè d'aquesta manera tenim un mètode còmode i ràpid per a calcular la derivada en un punt. A continuació escric a la pissarra i comento l'esquema del càlcul de la derivada en un punt amb un quart mètode:

Com es calcula $f'(a)$?	Directament	1) Utilitzant límits Calculant $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$
		2) Gràficament Calculant el pendent de la recta tangent
		3) Aproximadament 3.1) Calculant $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ per a un valor de h molt petit 3.2) Considerar que $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} \approx \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$
	Indirectament	4) Utilitzant la funció derivada 1) Calcular $f'(x)$ 2) substituir x per a

Remarco que els tres primers mètodes són directes, en el sentit que anem directament a calcular la derivada en el punt d'abscissa a, mentre que en el quart mètode, primer busquem quelcom que no ens pregunten,(la funció derivada), i després busquem $f'(a)$ substituint x per a. Els faig observar que aquest últim mètode és el més ràpid, per la qual cosa dic que a partir d'ara trobarem la funció derivada de les diferents famílies de funcions que hem treballat en els diferents cursos: les funcions de proporcionalitat directa, les afins, els polinomis, les funcions racionals, les exponencials i logarítmiques, etc. També comento que abans definirem la funció derivada de la manera següent: s'anomena funció derivada d'una funció $f(x)$ (o també derivada) a la funció que fa correspondre a cada abscissa x la derivada de la funció $f(x)$ en el punt d'abscissa x. La funció derivada normalment es representa per la funció $f'(x)$.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

La funció derivada s'anomena així perquè es troba a partir de la funció $f(x)$. És a dir, deriva de $f(x)$.

A: Laura N. pregunta quina diferència hi ha entre la definició de funció derivada i la definició de derivada en un punt.

P: Li responc que la derivada en un punt és $f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ i que en aquesta expressió la a és fixa, no varia, allò que varia és la h. En canvi, en el cas de la funció derivada, primer has de suposar que la x no varia sinó que només varia la h per obtenir $f'(x)$, i després has de suposar que la x varia. Per tant, quan calcules la derivada en un punt el resultat és un nombre, mentre que quan calcules la funció derivada, el resultat és una fórmula d'una funció.

Insisteixo en el fet que la derivada d'una funció en un punt és un nombre que ens dóna el pendent de la recta tangent a la funció en aquest punt, mentre que la funció derivada és una funció que ens dóna, per a cada valor de l'abscissa, el pendent de la recta tangent. També remarco que moltes vegades es parla de la derivada sense precisar si és la derivada de la funció en un punt o és la funció derivada; en aquests casos el context ens indicarà quin és el significat que se li dóna. A continuació dic que per calcular la funció derivada $f'(x)$ s'ha de calcular $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Si substituïm h per zero, s'obté la indeterminació $\frac{0}{0}$. Per eliminar-la convé seguir el procediment que s'explica en l'exemple següent i dic que mirin d'entendre aquest exemple

A: Els alumnes el llegeixen.

P: Al cap d'uns minuts l'explico a la pissarra i dic que, per calcular la funció derivada de la funció $f(x) = x^2$, s'ha de calcular el límit següent (escric a la pissarra, mentre explico com es fa aquest càlcul)

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^2+2hx+h^2-x^2}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2hx + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} 2x + h = 2x$$

Per explicar els passos d'aquest exemple utilitzo la taula

x	$f(x)$
x	$f(x) = x^2$
$x + h$	$f(x + h) = (x + h)^2 = x^2 + 2hx + h^2$.

Primer remarco que surt una fórmula i després que és la que ja sabíem. A continuació dic que intentin fer el problema 36 de manera anàloga a l'exemple.

A: Es posen a fer l'activitat 36 i molts alumnes reclamen la meva atenció particular.

P: Al cap de 5 minuts toca el timbre, dono els resultats que han de sortir en els tres apartats de l'activitat 36 i dic que acabin aquest problema a casa seva.

Valoracions

1) Crec que haver introduït primer la funció derivada de la funció $f(x) = x^2$ abans que la definició de la funció derivada ha facilitat força la comprensió de la funció derivada.

2) La funció derivada és un dels continguts difícils per als alumnes i necessita una introducció molt més pautada del que normalment es troba en els llibres de text.

3) Els alumnes tenen dificultat per distingir la derivada en un punt de la funció derivada.

5.2.17. Subseqüència 8. Funció derivada de les funcions de proporcionalitat directa i afins

Aquesta subseqüència està formada per les activitats 34-35 i pretén aconseguir com a resultat del procés d'instrucció els següents ítems del subobjectiu 3.3

54 Entendre que les funcions afins compleixen la propietat següent: que la recta tangent en qualsevol punt és la mateixa funció, i que, per tant, el pendent de totes les rectes tangents sempre és a, la qual cosa implica que $f'(x) = a$

55 Arribar a aquest mateix resultat calculant el límit.

A l'apartat a de l'activitat 37, l'alumnat ha d'observar que les funcions constants compleixen que la recta tangent en qualsevol punt és la mateixa funció constant, i que, per tant, el pendent sempre és zero. A l'apartat b, s'ha d'utilitzar que el pendent de la recta tangent en qualsevol punt sempre val zero, per concloure que la funció derivada de la funció constant és $f'(x) = 0$. L'activitat 38 és anàloga a la 37 i té per objectiu concloure que la funció derivada de la funció de proporcionalitat directa és $f'(x) = a$.

En l'activitat 39 l'alumnat ha de demostrar gràficament, seguint un raonament semblant al de l'activitat anterior, que la funció derivada de la funció afí $f(x) = ax + b$ és $f'(x) = a$. A continuació ha d'arribar al mateix resultat analíticament (calculant el límit).

El motiu de dedicar tres activitats per obtenir un resultat que, calculant el límit es pot fer ràpidament, és que les investigacions en didàctica de les derivades han posat de manifest: 1) que molts alumnes, malgrat que saben calcular funcions derivades d'una manera mecànica, no entenen que el fet que derivada de la funció afí $f(x) = ax + b$ és $f'(x) = a$ implica que la recta tangent en qualsevol punt és la mateixa funció afí. 2) És important que l'alumnat sàpiga traduir els resultats analítics a resultats de tipus gràfic i a l'inrevés i 3) creiem que aquesta manera gràfica de trobar les funcions derivades de les funcions afins és una manera de combatre l'entrebanc <<la tangent toca a la corba només en un punt>>.

L'activitat 40 té per objectiu aplicar els resultats obtinguts a les tres activitats anteriors.

Després de l'activitat 40 convé fer una reflexió de tipus general perquè l'alumnat entengui que una de les maneres de trobar la funció derivada consisteix a trobar primer una condició que compleixen totes les tangents i després calcular-ne la funció derivada a partir d'aquesta condició.

Sessió del 14-1-98

Planificació

1) Acabar de treballar el càlcul de la funció derivada per límits (activitat 36).

2) Treballar el càlcul de les funcions derivades de les funcions afins (activitats 37-40).

3) Començar a treballar les regles de derivació.

Desenvolupament de la sessió

Falten: Mike D.

P: Començo recordant que havien de portar feta l'activitat 36 i, com que observo els alumnes molt alterats (discuteixen entre ells de com han d'organitzar les festes per aconseguir diners per al viatge de final de curs), decideixo explicar jo l'apartat a en comptes de fer sortir un alumne a la pissarra. Comento que havien de trobar la funció derivada de la funció $f(x) = 3x^2 + 3$ a partir de la definició de funció derivada (escric a la pissarra)

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3(x+h)^2+3-(3x^2+3)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3(x^2+2hx+h^2)-3x^2}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{6hx + 3h^2}{h} = \lim_{h\to 0} 6x + 3h = 6x$$

Comento que el procés consisteix a fer el mateix que per calcular la derivada en un punt, però en comptes de fer-ho per a un valor numèric concret, es fa per a un valor x, que primer es considera fix i després variable. Per explicar els diferents passos escric a la pissarra la taula següent

x	$f(x)$
x	$f(x) = 3x^2 + 3$
$x + h$	$f(x + h) = 3(x + h)^2 + 3 = 3(x^2 + 2hx + h^2) + 3$

A continuació demano que aixequin el braç els que ho tinguin bé.

A: 14 alumnes aixequen el braç.

P: Pregunto als altres si no ho han fet perquè no n'han sabut o bé perquè no ho han intentat.

A: Alguns diuen que ho han intentat i que no els han pogut fer.

P: A continuació faig el càlcul de $f'(1)$ per a la funció $f(x) = 3x^2 + 3$ perquè l'alumnat vegi la diferència entre calcular la derivada en un punt concret i calcular la funció derivada i els faig observar les diferències entre els dos càlculs.

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3(1+h)^2+3-(3\cdot 1^2+3)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3(1^2+2h\cdot 1+h^2)-3\cdot 1^2}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{6h + 3h^2}{h} = \lim_{h\to 0} 6 + 3h = 6$$

Insisteixo que per calcular la funció derivada, primer considerem x com l'abscissa d'un punt fix i després considerem que x pot ser l'abscissa de qualsevol punt. A continuació faig sortir Sergi G. a la pissarra per fer l'apartat *b*.

A: Sergi G. escriu la resposta a la pissarra correctament, però deixa de fer alguns passos. Li dic que posi els passos intermedis i al final queda de la següent manera.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2+3(x+h)-1-(x^2+3x-1)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(x^2+2hx+h^2)+3(x+h)-1-(x^2+3x-1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2hx + h^2+3h}{h} = \lim_{h\to 0} 2x + h + 3 = 2x+3$$

P: Dic que és correcte i pregunto si ho han entès.

A: Cap alumne pregunta res i molts d'ells diuen que ho han entès.

P: Pregunto qui ha fet l'apartat *c*.

A: Alex A.. surt a fer l'apartat *c* i escriu a la pissarra la resposta correctament, però deixa de fer alguns passos. Li dic que posi els passos intermedis i al final queda el següent a la pissarra.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x-(x+h)}{x^2h+h^2x} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-h}{x^2h+h^2x} = = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{x^2+hx} = \frac{-1}{x^2}$$

A: Laura N pregunta d'on surt el primer pas.

P: Li dic que en aquests tipus de problemes convé fer una taula i escric a la pissarra

x	$f(x)$
x	$f(x) = 1/x$
$x + h$	$f(x + h) = 1/(x+h)$

Insisteixo que si poden llegir la fórmula en paraules, resulta més fàcil trobar les imatges de lletres i dic que amb paraules aquesta funció fa correspondre a cada nombre el seu invers, i que per tant al nombre $x+h$ li correspon com a imatge el nombre $1/(x+h)$ i continuo comentant els altres passos.

A: D'altres alumnes (Anna G i Pilar G., etc) em reclamen atenció particular per preguntar-me dubtes sobre alguns passos d'aquest càlcul.

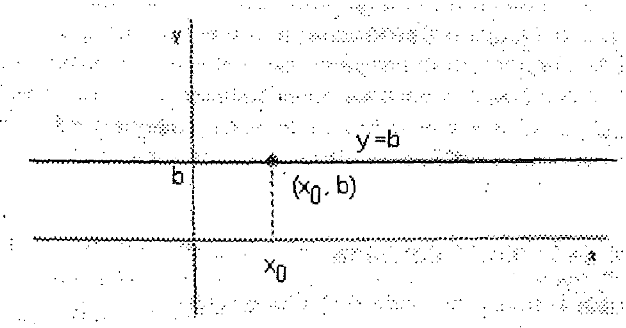
P: Comento que en els apartats *a* i *b* la funció derivada és més senzilla que la funció inicial, ja que passem de funcions que són paràboles a funcions derivades que són rectes, però en l'apartat *c* passa el contrari, perquè la funció és més senzilla que la seva funció derivada. Per tant, de vegades obtindrem, en derivar, funcions més senzilles que les que derivem i en d'altres casos, més complexes Seguidament dic que en els tres apartats de l'activitat 36 hem calculat la funció derivada calculant el límit $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, però que el càlcul d'aquest límit per a determinades funcions pot ser molt complicat, per la qual cosa es busca la funció derivada per d'altres mètodes, tal com vam fer amb la derivada en un punt. Acabo dient que ara buscarem la funció derivada de les diferents famílies de funcions que han estudiat en els cursos anteriors, començant per les més senzilles de totes i pregunto als alumnes quines creuen que són.

A: Alguns alumnes responen que les rectes.

P: Dic que ara buscarem la funció derivada de les funcions més senzilles de totes: les rectes. Ho farem per raonaments gràfics i dic que estan relacionats amb una pregunta de l'examen que preguntava quina era la tangent a un punt que pertanyia a un segment de recta. Acabo dient que facin les activitats 37-40.

A: Es posen a fer-les.

P: Mentre els alumnes fan l'activitat 37, dibuixo la recta a la pissarra.



A: Continuen treballant.

P: Al cap d'una estona faig el problema 37 a la pissarra. De primer comento que en aquest problema tenim una funció constant, com per exemple, $y = 3$, $y = 4$, $y = 7$, etc i un punt d'abscissa x_0 com, per exemple, $x_0 =2$, $x_0 = 3$, etc. Pregunto quina és la recta tangent en el punt (x_0 , b) remarcant que a l'examen hi havia una pregunta semblant en què s'havia d'escollir entre respondre que no tenia sentit parlar de recta tangent perquè coincidirà en la funció en infinits punts o bé respondre que la recta tangent era la mateixa recta. Per contestar heu de pensar que la recta tangent és la recta que en les proximitats del punt més s'aproxima a la recta. Acabo preguntant quina és la recta tangent.

A: Els alumnes responen majoritàriament que és la mateixa recta.

P: Dic que efectivament és així i els recordo que, a la pregunta de l'examen, una mica més de la meitat va respondre que no tenia sentit parlar de recta tangent perquè coincidirà en la funció en infinits punts. A continuació insisteixo que el fet que la recta tangent toqui en més d'un punt (en infinits punts en aquest cas) no té cap importància, perquè allò que és essencial és que ha de ser la recta que en les proximitats del punt més s'aproxima a la funció. Per tant, la resposta a la primera pregunta de l'apartat a és que la recta tangent és la mateixa recta $y = b$. Tot seguit pregunto quin és el pendent d'aquesta recta.

A: Els alumnes responen que és zero perquè és horitzontal.

P: Pregunto com podem justificar que la funció derivada de la funció $f(x) = b$ és $f'(x) = 0$ i demano si algú pot justificar aquest resultat. Com que cap alumne es decideix a parlar li dic a Jordi C. que respongui ell, que és un home amb facilitat de paraula.

A: Els alumnes riuen i fan comentaris sobre la facilitat de paraula de Jordi .

P: Li dic a Jordi que s'imagini que jo no ho sé i que m'ho ha d'explicar.

A: Jordi diu que ell ho veu molt clar i fa la següent explicació <<como la pendiente és cero, es esto>>.

P: Pregunto si algú pot millorar l'explicació <<pues es esto>> i li dic a Sergi G. que ho expliqui ell, que és una persona encara amb més facilitat de paraula que Jordi C.

A: els alumnes continuen rient i Sergi respon que la derivada en tots els punts serà zero i la funció derivada serà $f'(x) = 0$, perquè el pendent sempre és zero.

P: Poso diferents abscisses sobre la gràfica i faig observar que per a cada una d'elles la tangent és la mateixa recta horitzontal de pendent zero i escric i comento la taula següent:

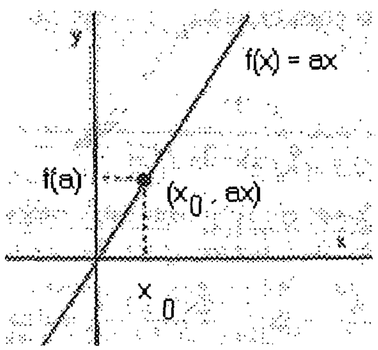
x	$f'(x)$
1	$f'(1)$ = pendent de la recta tangent en el punt d'abscissa $1 = 0$
2	$f'(2)$ = pendent de la recta tangent en el punt d'abscissa $2 = 0$
3	$f'(3)$ = pendent de la recta tangent en el punt d'abscissa $3 = 0$
4	$f'(4)$ = pendent de la recta tangent en el punt d'abscissa $4 = 0$
a	$f'(a)$ = pendent de la recta tangent en el punt d'abscissa $a = 0$

D'aquesta taula es dedueix que, per a qualsevol valor de l'abscissa la derivada val zero, és a dir, que la fórmula de la derivada és $f'(x) = 0$.

A: Jordi C. diu <<pues es esto>>.

P: Li dic que no basta dir <<pues es esto>> i que s'ha d'intentar explicar amb més detall. Que s'ha de poder explicar que el punt d'abscissa x_0 s'ha de considerar com un punt qualsevol, la qual cosa ens porta a observar que totes les tangents compleixen una determinada condició: la de ser horitzontals i l'anàlisi d'aquesta condició ens porta a concloure que tots els pendents compleixen la condició de valer zero i, per tant, a la fórmula $f'(x) = 0$. Acabo dient que de manera molt semblant es fan les activitats 38 i 39.

A: Els alumnes es posen a fer aquestes activitats i dibuixo la recta de l'activitat 38 a la pissarra.



P: Al cap d'una estona li demano a Judit P. que respongui l'apartat *a*.

A: Judit P. respon que la recta tangent és la mateixa recta i que el pendent és a.

P: Pregunto com podem justificar que la funció derivada de la funció $f(x) = ax$ és $f'(x) = a$.

A: Continuen treballant i alguns reclamen la meva atenció particular.

P: Torno a preguntar com podem justificar que la funció derivada de la funció $f(x) = ax$ és $f'(x) = a$, és a dir: si la funció és $f(x) = 5x$, la funció derivada és $f'(x) = 5$; si la funció és $f(x) = 10x$, la funció derivada és $f'(x) = 10$, etc. Li dic a Jordi C. si vol una nova oportunitat per millorar la seva explicació anterior.

A: Jordi es limita a fer una explicació que no passa de descriure que la funció derivada de la funció $f(x) = ax$ és $f'(x) = a$. A continuació intenten justificar aquest resultat Laura N. i Sandra D. amb força més èxit que Jordi C.

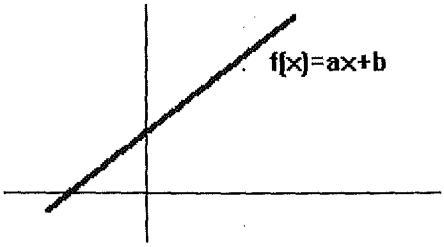
P: Faig observar que tots ho tenen clar, però no tots ho poden explicar. Comento que una manera d'explicar aquest resultat és adonar-se que el punt és un punt qualsevol i que, per tant, totes les rectes tangents són la mateixa recta de pendent a. Poso diferents abscisses sobre la gràfica i faig observar que per a cada una d'elles la tangent és la mateixa recta de pendent a . Escric i comento la taula següent:

x	$f'(x)$
1	$f'(1)$ = pendent de la recta tangent en el punt d'abscissa 1 = a
2	$f'(2)$ = pendent de la recta tangent en el punt d'abscissa 2 = a
3	$f'(3)$ = pendent de la recta tangent en el punt d'abscissa 3 = a
......	....

D'aquesta taula es dedueix que per a qualsevol valor de l'abscissa la derivada val a, és a dir, que la fórmula de la derivada és $f'(x) = a$. Continuo comentant que el punt d'abscissa x_0 s'ha de considerar com un punt qualsevol, la qual cosa ens porta a observar que totes les tangents compleixen una determinada condició: la de coincidir amb la recta $f(x) = ax$ i l'anàlisi d'aquesta condició porta a entendre que tots els pendents compleixen la condició de valer a i, per tant, a la fórmula $f'(x) = a$. Acabo dient que responguin l'activitat 39 de manera semblant.

A: Es posen a fer l'activitat 39 i molts veuen clarament que $f'(x) = a$. Molts alumnes reclamen la meva atenció particular per preguntar-me què vol dir això de trobar la funció analíticament.

P: Dibuixo a la pissarra una recta que no passa per l'origen de coordenades i comento per a tota la classe que la recta tangent a aquesta funció en qualsevol punt és ella mateixa i que, per tant, en qualsevol punt el pendent de la recta tangent és a i en conseqüència $f'(x) = a$.



A continuació dic que ara es tracta d'arribar al mateix resultat utilitzant que $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$,i que la funció $f(x)$ en aquest cas és $f(x) = ax + b$.

Després escric a la pissarra i comento la taula següent:

x	$f(x)$
x	$f(x) = ax+b$
$x+h$	$f(x+h) = a(x+h)+b = ax+ah+b$

A: Es posen a calcular aquest límit.

P: Faig sortir a la pissarra Sandra D.

A: Sandra D. escriu a la pissarra

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{ax+ah+b-ax-b}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{ah}{h} = a$$

P: Els faig observar que hem arribat al mateix resultat utilitzant dos procediments diferents. Primer hem buscat una condició que compleixen totes les rectes tangents i després hem calculat el límit. A continuació dic que els resultats dels problemes 37,38 i 39 estan recollits a la taula del <<Recorda>> de la pàgina 340 i que ara es tracta d'aplicar aquests resultats en l'activitat 40 a fi d'estalviar-nos el càlcul de la funció derivada per límits. També comento que la funció $y=3$ és una funció horitzontal (activitat 37), $y=2x$ una recta que passa per l'origen de coordenades (activitat 38 i les altres dues són rectes que no passen per l'origen de coordenades (activitat 40)

A: Observo que la majoria ho fa bé

P: Toca el timbre i escric els resultats a la pissarra

Funció	Funció derivada
$f(x) = 3$	$f'(x) = 0$
$f(x) = 2x$	$f'(x) = 2$
$f(x) = 5x + 3$	$f'(x) = 5$
$f(x) = -0{,}4x - 7$	$f'(x) = -0{,}4$

Valoracions

1) En relació al càlcul de la funció derivada per límits, els alumnes tenen les mateixes dificultats que tenien en el càlcul de la derivada en un punt (desenvolupament de quadrats, simplificacions, etc)

2) Encara que tenen bastants dificultats per distingir la derivada de la funció derivada, crec que va augmentant la comprensió d'allò que és la funció derivada.

3) En relació als ítems 54 i 55 del subobjectiu 3.3 crec que:

Ítem 54 Els alumnes tenen més dificultats de les previstes per entendre que les funcions afins compleixen la propietat següent: que la recta tangent en qualsevol punt és la mateixa funció, i que, per tant, el pendent de totes les rectes tangents sempre és a, la qual cosa implica que $f'(x) = a$.

Ítem 55 Si bé l'alumnat pot arribar al resultat anterior calculant el límit, no tots són conscients de la relació entre els dos resultats. És a dir, hi ha alumnes que, si bé troben per límits que $f'(x) = a$, no són conscients que aquest resultat implica que la recta tangent en qualsevol punt és la mateixa recta.

4) Crec que considerar <<la recta tangent a una gràfica en un punt com aquella que toca a la gràfica solament en aquest punt>> és un entrebanc per entendre que <<la recta tangent és la que en les proximitats del punt s'aproxima més a la gràfica>>, i que aquest entrebanc es manifesta amb més força quan la recta tangent toca a la gràfica en un nombre infinit de punts.

5) Crec que l'existència d'aquest entrebanc justifica l'opció de calcular la funció derivada de les funcions de proporcionalitat directa i afins gràficament buscant una condició que compleixen totes les tangents (tal com es fa en les activitats 37-40) ja que d'aquesta manera s'ataca aquest entrebanc directament.

6) Els alumnes tenen molta dificultat per entendre que vol dir justificar una afirmació i fins i tot alguns no en veuen la necessitat.

5.2.18. Subseqüència 9. Regles de derivació

Aquesta subseqüència està formada per les activitats 41-43 i pretén aconseguir com a resultat del procés d'instrucció els següents ítems del subobjectiu 3.3:

56 Entendre que hi ha unes regles de derivació que faciliten el càlcul de la funció derivada.

57 Seguir un raonament que demostra, utilitzant la definició de funció derivada, que $(cf)'(x) = cf'(x)$.

58 Seguir un raonament que demostra, utilitzant la definició de funció derivada, que la funció derivada de la funció suma és la suma de les funcions derivades: $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$. I que el mateix raonament permet demostrar, canviant el signe + pel signe -, que la derivada d'una diferència de funcions és la diferència de les funcions derivades.

59 Acceptar, sense cap demostració, que la funció derivada del producte de dues funcions és: $(f{\cdot}g)'(x)=f'(x){\cdot}g(x) + g'(x){\cdot}f(x)$. I que la fórmula de la derivada d'un quocient és

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x){\cdot}g(x) - g'(x){\cdot}f(x)}{(g(x))^2}$$

60 Superar l'error típic de calcular la derivada d'un producte fent el producte de derivades, i la derivada d'un quocient fent el quocient de derivades.

L'objectiu d'aquest apartat és que l'alumnat entengui que hi ha unes regles de derivació que faciliten el càlcul de la funció derivada. Primer es demostra, utilitzant la definició de funció derivada, que $(cf)'(x) = cf'(x)$. Després, utilitzant la definició de funció derivada, es demostra que la funció derivada de la funció suma és la suma de les funcions derivades: $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$. I es fa l'observació que, per demostrar que la derivada d'una diferència de funcions és la diferència de les funcions derivades, s'ha de seguir el procés anterior, substituint el signe de la suma pel signe de la resta.

Seguidament s'enuncia, sense fer la demostració, que la funció derivada del producte de dues funcions és la que resulta en multiplicar la derivada de la primera funció per la segona i sumar-li el producte de la derivada de la segona per la primera $(f{\cdot}g)'(x)= f'(x){\cdot}g(x) + g'(x){\cdot}f(x)$ .De la mateixa manera, la funció derivada del quocient de dues funcions és igual a la derivada del numerador pel denominador sense derivar, menys la derivada del denominador pel numerador sense derivar, dividit tot pel quadrat del denominador.

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x){\cdot}g(x) - g'(x){\cdot}f(x)}{(f(x))^2}$$

El motiu que no es facin les demostracions de les dues regles anteriors és que aquest tipus de demostració resulta massa formal per a molts alumnes. Aquesta seqüència està pensada per ser ampliada amb les activitats 35, 36 i 37 de l'apartat <<Per saber-ne més>>, la resolució de les quals permet arribar a demostrar les fórmules de la derivada de la funció producte i de la funció quocient.

Les regles de la derivació del producte i del quocient entren en contradicció amb una de les idees intuïtives que normalment tenen els alumnes sobre la derivació, ja que en general esperen que la derivada del producte sigui el producte de derivades, i que la derivada del quocient sigui el quocient de derivades. Cal insistir molt que aquesta suposició no és vàlida.

En les activitats 41, 42 i 43 l'alumnat ha d'aplicar les regles de derivació en operacions amb funcions polinòmiques de primer i segon grau.

Aquesta subseqüència es va desenvolupar en la sessió del 15-1-98 i del 20-1-98.

Sessió del 15-1-98

Planificació

1) Començar a treballar les regles de derivació en les activitats 41-43.

Desenvolupament de la sessió

Falten: Toni G. i Angela L.

P: Començo recordant que, per trobar la derivada d'una funció en diferents punts, era molt útil tenir la funció derivada i que allò que farem a partir d'ara és trobar la funció derivada de les diferents famílies de funcions que s'han treballat durant els cursos anteriors. A continuació recordo que l'altre dia vam trobar la funció derivada de les funcions afins i escric a la pissarra les fórmules del <<Recorda>> de la pàgina 340.

Funció	Funció derivada
$f(x) = b$	$f'(x) = 0$
$f(x) = ax$	$f'(x) = a$
$f(x) = ax + b$	$f'(x) = a$

També recordo que la derivada d'una funció en un punt és un nombre, mentre que la funció derivada és una funció que ens dóna, per a cada valor de l'abscissa, el valor de la derivada en aquest valor de l'abscissa. Insisteixo que moltes vegades es parla de la derivada sense precisar si és la derivada de la funció en un punt o és la funció derivada;

en aquests casos el context ens indicarà quin és el significat que se li dóna. Anuncio que a partir d'ara utilitzaré el terme derivada per referir-me tant a la derivada en un punt com a la funció derivada.

A continuació dic que ells, en els cursos anteriors, han estudiat no sols famílies de funcions sinó també les operacions amb funcions (suma, producte, divisió, composició, etc) i que ara veurem com s'ha de calcular la funció derivada de funcions que són el resultat de fer operacions amb d'altres funcions més senzilles de funció derivada coneguda. Il·lustro aquesta idea amb l'exemple següent a la pissarra:

$$f(x) = x^2 \qquad \text{i } g(x) = \sin x$$

són dues funcions a partir de les quals es pot construir la funció suma

$$h(x) = x^2 + \sin x$$

Bé, doncs ara cal veure com es fa la derivada d'aquesta funció a partir de les derivades de les funcions $f(x) = x^2$ i $g(x) = \sin x$. Aquestes tècniques que permeten trobar la derivada d'una funció que és el resultat de fer operacions amb d'altres funcions més senzilles a partir de les derivades d'aquestes últimes, s'anomenen regles de derivació. A continuació dic que començarem demostrant que la derivada de la funció producte d'un nombre per una funció és igual al nombre per la derivada de la funció. $(cf)'(x) = cf'(x)$. Seguidament poso a la pissarra dues columnes: una amb el cas general i l'altra amb un cas concret.

Cas general	Cas particular
funció $f(x)$	$f(x) = \cos x$
Nombre c	$c = 7$
Funció producte d'un nombre per una funció $c \cdot f(x)$	$c \cdot f(x) = 7\cos x$

I comento que, quan tenim una funció com $y = 7\cos x$, la podem interpretar com la funció que resulta de multiplicar 7 per la funció cosinus, és a dir, com una funció producte d'un nombre per una funció. Bé, doncs, si sabem derivar la funció cosinus resulta que, per trobar la funció derivada de la funció $y = 7\cos x$, basta multiplicar 7 per la derivada de la funció cosinus.

Explico que per calcular la funció derivada $(cf)'(x)$ s'ha de calcular $\lim_{h \to 0} \frac{(cf)(x+h)-(cf)(x)}{h}$. D'entrada s'intenta calcular aquest límit i si no es pot, s'ha de recórrer a d'altres tècniques. Els recordo l'activitat 39, on van trobar la funció derivada calculant aquest límit i també a partir d'una condició que complien totes les tangents. A continuació escric a la pissarra i comento el càlcul següent:.

$$(cf)'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(cf)(x+h)-(cf)(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c \cdot (f(x+h)-f(x))}{h} = c \cdot \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = c \cdot f'(x)$$

El primer que faig és desencapsular la funció suma, explicant que per trobar la imatge d'un nombre per la funció producte d'un nombre per una funció, el que cal fer primer és buscar la imatge del nombre per la funció i després multiplicar-la pel nombre. També poso un exemple concret i el relaciono amb el cas general i remarco les propietats de les operacions amb límits que s'utilitzen en aquests càlculs.

funció $f(x) = x^2$
Nombre $c = 32$

$$(cf)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(cf)(x+h)-(cf)(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{32\cdot(x+h)^2-32x^2}{h} =$$

$$= c\cdot\lim_{h\to 0} \frac{32x^2+64xh+32h^2-32x^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{64xh+32h^2}{h} = 64x$$

A continuació escric a la pissarra i comento com s'aplica la regla de derivació en aquest exemple, fent-los observar l'economia d'esforç que implica

funció $f(x) = x^2$
Nombre $c = 32$

Funció producte d'un nombre per una funció $c \cdot f(x) = 32\, x^2$
Funció derivada $(cf)'(x) = cf'(x) = 32\cdot(2x) = 64x$

A continuació dic que calculin la funció derivada de la funció $f(x) = \frac{3}{2}x^2$

A: Responen que és 3/2 per $2x$

P: Poso a la pissarra
$f(x) = x^2 \rightarrow f'(x) = ?$
$g(x) = 3x+2 \rightarrow g'(x) = ?$
I pregunto als alumnes quines són les funcions derivades.

A: Responen $2x$ i 3.

P: Comento que seguidament veurem que la derivada d'una suma és la suma de funcions i poso a la pissarra l'exemple següent:

$f(x) = x^2 \rightarrow f'(x) = 2x$
$g(x) = 3x+2 \rightarrow g'(x) = 3$
$(f+g)(x) = x^2 + 3x+2$
$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x) = 2x + 3$

A continuació faig i comento a la pissarra la demostració que la funció derivada de la funció suma és la suma de les funcions derivades:

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

$$(f+g)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(f+g)(x+h) - (f+g)(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) + g(x+h) - f(x) - g(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(x) + g'(x)$$

El primer que faig observar és que quan la funció és la funció suma, el límit

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad \text{es converteix en} \quad \lim_{h\to 0} \frac{(f+g)(x+h)-(f+g)(x)}{h}$$

Després cal desencapsular la funció suma explicant que, per trobar la imatge d'un nombre per la funció suma, primer s'ha de buscar la imatge del nombre per a cada una de les dues funcions i després fer la suma de les dues imatges. La tercera observació té per objectiu que la fracció de l'esquerra és igual a la suma de les fraccions de la dreta, perquè per sumar fraccions amb el mateix denominador s'ha de posar el denominador i sumar els numeradors

$$\frac{f(x+h) + g(x+h) - f(x) - g(x)}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

La quarta observació pretén recordar-los que el límit d'una suma és la suma de límits i que els dos límits són les funcions derivades de $f(x)$ i $g(x)$. Finalment els faig observar que, si prescindim de passos intermedis, tenim: $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$

A continuació comento que, per demostrar que la derivada d'una diferència de funcions és la diferència de les funcions derivades, s'ha de seguir el procés anterior, substituint el signe de la suma pel signe de la resta $(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x)$. Després explico que la derivada de la funció producte d'un nombre per una funció és igual al nombre per la derivada de la funció, i que la derivada d'una suma és la suma de funcions . Pregunto quina creuen que serà la derivada del producte.

A: Silenci (és la classe de les 8 del matí i els alumnes estan molt poc actius) i al final alguns responen que és <<la multiplicació>>.

P: Dic que els alumnes solen suposar que la derivada d'un producte és el producte de derivades i que la derivada d'una divisió és la divisió de derivades, però ,malauradament, el càlcul de la derivada del producte i de la divisió no és tan simple. A continuació faig una analogia amb els radicals i els recordo que, com que el producte de radicals és el radical del producte i la divisió de radicals és el radical de la divisió, molts alumnes consideren erròniament que el radical d'una suma és la suma de radicals, la qual cosa no és veritat. Continuo dient que la funció derivada del producte de dues funcions no és el producte de derivades, sinó la funció que resulta en multiplicar la derivada de la primera funció per la segona funció i sumar-li el producte de la derivada de la segona funció per la primera funció. Mentrestant escric a la pissarra el següent:

$$(f\cdot g)'(x)=f'(x)\cdot g(x)+g'(x)\cdot f(x)$$

I que en el cas de la divisió, la funció derivada del quocient de dues funcions és igual a la derivada del numerador pel denominador sense derivar, menys la derivada del denominador pel numerador sense derivar, dividit tot pel quadrat del denominador. Escric a la pissarra el següent:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\frac{f'(x)\cdot g(x)-g'(x)\cdot f(x)}{(g(x))^2}$$

Insisteixo en el fet que les regles de la derivació del producte i del quocient entren en contradicció amb una de les idees intuïtives que normalment es tenen sobre la derivació, ja que normalment s'espera que la derivada del producte sigui el producte de derivades i que la derivada del quocient sigui el quocient de derivades, i escric les regles de derivació en una taula a la pissarra

Funció	Funció derivada
$cf(x)$	$(cf)'(x)=cf'(x)$
$(f+g)(x)$	$(f+g)'(x)=f'(x)+g'(x)$
$(f-g)(x)$	$(f-g)'(x)=f'(x)-g'(x)$
$(f\cdot g)(x)$	$(f\cdot g)'(x)=f'(x)\cdot g(x)+g'(x)\cdot f(x)$
$\frac{f}{g}(x)$	$\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\frac{f'(x)\cdot g(x)-g'(x)\cdot f(x)}{(g(x))^2}$

A continuació dic que aquestes regles de derivació permeten calcular ràpidament funcions derivades que seria força complicat calcular aplicant la definició de funció derivada, tal com poden observar en l'exemple que tenen a la pàgina 342. Continuo fent-los veure que en aquest exemple tenim la funció $f(x) = \dfrac{2x + 1}{3x + 4}$ i volem trobar la funció derivada.

Continuo dient que una manera de trobar aquesta funció derivada consisteix a calcular

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ on $f(x)$ seria la funció $f(x) = \dfrac{2x + 1}{3x + 4}$ i els faig observar

que el càlcul d'aquest límit seria força complicat, tot i que es pot fer. Seguidament dic que tenim una altra alternativa que consisteix a aplicar la regla de la divisió d'un quocient, ja que basta interpretar la funció $f(x)$ com el resultat de fer la divisió de dues funcions de les quals coneixem la derivada, ja que el numerador $y = 2x + 1$ i el denominador $y = 3x + 4$ són rectes Si interpretem la funció $f(x)$ com un quocient de funcions, basta aplicar la regla de derivació de la derivada d'un quocient que diu que la funció derivada del quocient de dues funcions és igual a la derivada del numerador pel denominador sense derivar, menys la derivada del denominador pel numerador sense derivar, dividit tot pel quadrat del denominador (mentre escric i assenyalo a la pissarra el següent):

$$f'(x) = \frac{(2x + 1)' \cdot (3x+4) - (3x+4)' \cdot (2x + 1)}{(3x+4)^2}$$

A continuació calculo les derivades i simplifico:

$$f'(x) = \frac{2x \cdot (3x+4) - 3x \cdot (2x + 1)}{(3x+4)^2}$$

$$f'(x) = \frac{6x + 8 - 6x - 3}{3x+4} = \frac{5}{(3x+4)^2}$$

A continuació comento que he donat la regla del producte i de la divisió sense cap demostració i els faig observar que la funció derivada del producte de funcions i la derivada del quocient també es poden trobar calculant $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$, però la seva demostració és força complicada per la qual cosa la demostració d'aquestes dues regles de derivació estan proposades com a problemes d'ampliació. Tot seguit dic que, com a treball voluntari que tindre en compte de cara a la nota final de l'avaluació, facin les activitats 35, 36 i 37 de l'apartat <<Per saber-ne més>>.

A: Els alumnes busquen aquestes activitats i em pregunten fins a quin dia les poden lliurar i com les puntuaré.

P: Responc que tenen un termini de quinze dies i que aquest treball pot augmentar la nota entre un i mig punt.

Per últim dic que calculin les funcions derivades de les activitats 41, 42 i 43 aplicant les regles de derivació.

A: Es posen a fer aquestes activitats i alguns alumnes reclamen la meva atenció particular.

P: Al cap d'una estona dic que han d'interpretar la funció com el resultat d'operacions amb funcions més simples, de les quals coneixem la derivada, i explico que, per calcular la derivada de la funció $f(x) = -5x^2 + x + 3$ de l'apartat *a* de l'activitat 41, han d'interpretar aquesta funció com la suma de funcions més simples de derivada coneguda .Escric a la pissarra $f(x) = (-5x^2) + (x + 3)$ i pregunto quina classe de funció és la segona part.

A: Laura N. respon que és una recta.

P: Dic que efectivament és una recta i que ells ja saben trobar la derivada de les funcions afins i pregunto quina classe de funció és el primer sumand i si el sabem derivar.

A: Sandra D. diu que és una paràbola.

P: Dic que efectivament és una paràbola i que, si la considerem com el producte del nombre -5 per la funció ics elevat al quadrat, sí que la saben derivar perquè la derivada és -5 per la derivada de la funció ics elevat al quadrat (escric a la pissarra)

$$f(x) = -5x^2 + x + 3$$
$$f(x) = (-5x^2) + (x + 3)$$
$$f'(x) = (-5x^2)' + (x + 3)' = -5(x^2)' + (x + 3)' = -5(2x) + 1 = -10x + 1$$

Remarco que han de segmentar la funció en trossos de derivada coneguda i després aplicar les regles de derivació, i comento que en l'exemple anterior primer hem aplicat les regles de derivació següents: $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$ i $(cf)'(x) = cf'(x)$.

A: Alex A., que és repetidor, pregunta si cal fer tot això.

P: Li responc que jo he fet tots els passos intermedis perquè quedi més clar, però que ells ho poden fer directament.

A: Els alumnes es posen a fer els altres apartats. Alguns reclamen la meva atenció particular i observo que molts cometen l'error en l'apartat *c* de considerar que la derivada d'un producte és el producte de derivades.

P: Faig sortir Isabel G.a la pissarra a fer l'apartat *b*.

A: Isabel G. escriu el següent: $g'(x) = 8{\cdot}2x - 7 = 16x - 7$

P: Pregunto si algú té dubtes i, com que cap alumne pregunta res, faig sortir Jordi L. a la pissarra a fer l'apartat *c* de l'activitat 41.

A: Jordi L escriu a la pissarra el resultat final : $h'(x) = -96x^3 + 63x^2 + 72x$

A: Alguns alumnes diuen que han obtingut un resultat diferent.

P: Observo que alguns s'han equivocat perquè han aplicat que la derivada d'un producte és el producte de derivades i d'altres s'han equivocat en fer les operacions. A continuació explico a la pissarra amb molt de detall que per fer aquesta derivada, primer s'ha d'aplicar la regla de la derivada del producte

$$h(x) = (8x^2 - 7x - 12)\cdot(-3x^2)$$
$$h'(x) = (8x^2 - 7x - 12)'\cdot(-3x^2) + (-3x^2)'(8x^2 - 7x - 12)$$

i que per calcular la derivada del primer factor, s'ha d'aplicar la regla de la derivada de la suma, i que per trobar la derivada del primer sumand del primer factor, s'ha de considerar la funció $y = 8x^2$ com el producte de la constant 8 per la funció $y = x^2$ i aplicar la regla de derivació, que diu que la derivada del producte d'una funció per una constant és el producte de la constant, 8, per la derivada de la funció, $2x$ en aquest cas, i que per trobar la derivada de $y = -3x^2$ s'ha de considerar la funció $y = -3x^2$ com el producte de la constant -3 i la funció $y = x^2$ i tornar a aplicar aquesta regla . Mentrestant escric i comento a la pissarra el següent:

$$h'(x) = (8\cdot 2x - 7 - 0)\cdot(-3x^2) + (-3\cdot 2x)(8x^2 - 7x - 12)$$
$$h'(x) = (16x - 7)\cdot(-3x^2) + (-6x)(8x^2 - 7x - 12)$$
$$h'(x) = -48x^3 + 21x^2 \; -48x^3 + 42x^2 + 72x$$
$$h'(x) = -96x^3 + 63x^2 + 72x$$

A continuació dic que facin l'activitat 42.

A: Alguns alumnes reclamen la meva atenció particular per aclarir alguns dels passos del càlcul anterior. Els altres es posen a fer l'activitat 42.

P: Comento que normalment no es deriva per derivar sinó que el càlcul de la funció derivada és un pas necessari per solucionar un problema, per la qual cosa s'ha de calcular la funció derivada i s'ha de simplificar la seva expressió. Ara bé, en aquestes activitats, l'objectiu és aplicar les regles de derivació i n'hi ha prou d'aplicar les regles de derivació i no cal que facin la simplificació. Al cap d'una estona faig sortir a Victor B. a la pissarra perquè faci l'apartat *a* de l'activitat 42.

A: Victor B. Escriu el següent:

$$h(x) = (-15x^2)\cdot(x+1)$$
$$h'(x) = (-30x)\cdot(x+1) + (1)(-15x^2)$$
$$h'(x) = -30x^2 - 30x - 15x^2 = \quad -45x^2 - 30x$$

P: Explico que Victor ha aplicat la regla del producte i que, per calcular $(-15x^2)'$, s'ha de considerar la funció $y = -15x^2$ com el producte de la constant -15 per la funció $y = x^2$ i aplicar la regla de derivació que diu que la derivada del producte d'una funció per una constant és el producte de la constant, -15, per la derivada de la funció, $2x$ en aquest cas. I que per trobar $(x+1)'$ s'ha d'aplicar que la derivada d'una suma és la suma de derivades.

També explico que es pot considerar la funció $y = -15x^2$ com el producte de les funcions $y = -15$ i $y = x^2$ i aplicar la regla de derivació del producte de funcions

$$f(x) = (-15)\,(x^2)$$
$$f'(x) = (-15)'\cdot(x^2) + (x^2)'(-15)$$
$$f'(x) = 0\cdot(x^2) + 2x\cdot(-15) = -30x$$

i els faig observar que la regla $(cf)'(x) = cf'(x)$ és un cas particular de la regla $(f\cdot g)'(x) = f'(x)\cdot g(x) + g'(x)\cdot f(x)$ si considerem que la funció $cf(x)$ és el producte de la funció $y=c$ per la funció $f(x)$. A continuació faig sortir David M. a la pissarra per fer l'apartat b i dic que no cal que simplifiquin el resultat, que basta que apliquin les regles de derivació

A: David M posa el següent a la pissarra

$$g(x) = (8x^2 + 3x)\cdot(-3x)$$
$$g'(x) = (-16x)\cdot(-3x) + (16x + 3)(-3x)$$

P: Toca el timbre i comento molt ràpidament la resposta de David M. i dic que facin l'apartat c de l'activitat 42 i l'activitat 43 a casa seva.

Valoracions

1) En relació als ítems 56-60 crec que:

Ítem 56	Van entenent que les regles de derivació són útils perquè faciliten el càlcul de la funció derivada.
Ítem 57	Són capaços de seguir un raonament que demostra, utilitzant la definició de funció derivada, que $(cf)'(x) = cf'(x)$.
Ítem58	Són capaços de seguir un raonament que demostra, utilitzant la definició de funció derivada, que la funció derivada de la funció suma és la suma de les funcions derivades: $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$. I que el mateix raonament permet demostrar, canviant el signe + pel signe -, que la derivada d'una diferència de funcions és la diferència de les funcions derivades.
Ítem 59	Accepten, sense cap demostració, la regla de la derivada del producte i la del quocient.
Ítem 60	Molts alumnes cometen els errors típics de considerar que la derivada d'un producte és el producte de derivades i que la derivada d'una divisió és la divisió de derivades.

3) Encara que no m'agrada gaire he pres la decisió que els alumnes no simplifiquin les derivades a fi d'anar més ràpid.

5.2.19 Subseqüència 4 d'avaluació. Qüestionari 5 (Continuació)

Sessió del dia 16-1-98

Faltes: Mike D. i David G.

Planificació

Treballar amb el segon grup el qüestionari 5 a l'aula d'informàtica.

Desenvolupament de la sessió

Aquesta sessió es va poder fer a l'aula d'informàtica, de manera que cada alumne estava sol en un ordinador i tenia a la pantalla les figures de les activitats. La meva intervenció fou una breu explicació sobre el programa Cabri (cal dir que molts alumnes ja el coneixien de cursos anteriors).

Anàlisi de les respostes dels alumnes

Pregunta 1

Apartat *a*

Tots els alumnes responen que sí. Cap de les respostes va acompanyada de mesures dels segments *EP* i *FP*.

Apartat *b*

Respostes	Paràbola
Nombre d'alumnes	18 (100%)

- Tots els alumnes reconeixen la traça com la gràfica d'una paràbola

Apartat *c*

Resp.	(x, x^2)	$(x, f(x))$	$FE = y$	$(x, f(x)) \to (x, x^2)$	(x,y)	$(OF, f(OF)$
Alum.	9(50%)	3(17%)	1(6%)	3(17%)	1(6%)	1(6%)

- 17 alumnes (94%) responen correctament (considerant com a correcta la resposta (x,y)
- L'alumne que respon $FE = y$ és Javier F.
- És de destacar que el 44% respon $(x, f(x))$ o bé (x,y) o bé $(OF, f(OF)$ mentre que

en una pregunta semblant del qüestionari 1 cap alumne va donar aquest tipus de resposta.

Apartat *d*

Respostes	$y= x^2$	$f(x)=x^2$	$y= x^2$ $f(x)=x^2$	x^2
Nombre d'alumnes	4(22%)	12(67%)	1(6%)	1(6%)

- 17 alumnes (94%) responen correctament.
- 13 alumnes (72%) utilitzen la notació $f(x)=x^2$ i només 5 (28%) utilitzen la notació $y= x^2$.

Segona pregunta

Apartat *a* i Apartat *b*

Com que en el qüestionari del dia 9-1-98 vaig observar que alguns alumnes no havien contestat l'apartat *c* de la tercera pregunta per falta de temps vaig dir-los que no responguessin aquests dos apartats.

Apartat *c*

Respostes	La recta tangent	blanc
Nombre d'alumnes	17(96%)	1(6%)

- Només Raúl B. respon en blanc i cap alumne confon la recta tangent amb la tangent de la recta tangent (derivada).

Apartat *d*

Respostes	6,4/1,8 = 3,56	3,2	3,2/1,8=1,78
Nombre d'alumnes	9(50%)	1(6%)	8(44%)

- Cap alumne dóna la resposta 9,6/1,8 = 5,3 perquè vaig insistir que en el segment 6,4 de la figura ja estava inclòs el segment 3,2.
- 9 alumnes (50%) saben calcular el pendent de la recta tangent a partir de la figura.
- 8 (44%) alumnes saben que el pendent és la variació vertical dividida per la variació horitzontal, però s'equivoquen en la lectura d'aquestes variacions.
- Només un alumne (Alfonso D.) sembla que no sap com calcular el pendent de la recta tangent.

En aquest moment vaig decidir intervenir per comentar-los a cada un el seu error. Als que havien respost 1,78 els vaig fer observar que l'1,8 era DF i no la base del triangle d'altura 3,2. I a l'alumne que havia comès l'error greu li vaig dir que li preguntaven el pendent i que s'havia de respondre buscant la relació entre la variació vertical i horitzontal, tal com havien fet abans de vacances. Aquesta intervenció fou suficient perquè tots s'adonessin del seu error i intentessin corregir la seva resposta. Els vaig dir que no corregissin la seva resposta.

Apartat *e*

Respostes	Completen la taula correctament
Nombre d'alumnes	18 (100%)

- Un cop advertits dels seus errors, tots els alumnes van poder completar la taula correctament. Sense la meva intervenció el resultat hauria estat del 50% en comptes del 100%.

Apartat *f*

Respostes	$f'(x)=2x$	$y'=2x$
Nombre d'alumnes	17(94%)	1(6%)

- 18 (100%) alumnes troben la fórmula.
- Només 1 (6%) alumne que repeteix curs utilitza la notació $y'=2x$. Tots els altres utilitzen la notació $f'(x)=2x$.

Per tant, un 50% dels alumnes han pogut trobar l'expressió de la funció derivada seguint aquest procediment sense la meva intervenció i un 100% amb la meva intervenció.

Tercera pregunta

Apartat a

Justificació que $OF = a$

Respostes	Ben Justificat	Sense justificació
Nombre d'alumnes	9 (50%)	9(50%)

Justificació que $PF = a^2$

Respostes	Ben Justificat	Mal justificat	Sense justificació
Nombre d'alumnes	4 (22%)	1(6%)	13 (72%)

Justificació que $PH = 2a^2$

Respostes	Ben Justificat	Mal justificat	Sense justificació
Nombre d'alumnes	10 (56%)	1 (6%)	7 (39%)

El poc èxit a respondre correctament l'apartat *a* de la tercera pregunta s'explica d'una banda perquè l'alumne ha d'escriure les lletres de la gràfica de la 2a figura a la gràfica de la 3a pregunta, i d'altra banda perquè no estan acostumats a donar justificacions de resultats que consideren evidents.

Apartat *b*

Respostes	Justificació correcta	Resposta correcta sense justificació	Justificació incorrecta
Nombre d'alumnes	13 (72%)	2(12%)	3 (22%)

- Les 13 justificacions correctes són respostes del tipus $f'(a) = 2a^2/a = 2a$
- Cal destacar que cap de les respostes incorrectes han intentat calcular $f'(a)$ per límits. 2 alumnes (Raúl C. i Javier F.) han substituït a per un nombre, i l'altre, Raúl B., confon la funció amb la seva funció derivada.

Apartat *c*

Respostes	Justificació correcta	Justificació incorrecta	Blanc
Nombre d'alumnes	10 (56%)	4 (22%)	4 (22%)

Les 4 justificacions incorrectes es poden classificar de la manera següent:

- Una justificació en base a la taula de l'apartat *e* de la pregunta 2 (Jaime G.) (Tot i que aquesta resposta es podria considerar correcta, no ho fem perquè la majoria dels alumnes van interpretar la pregunta en el sentit que havien de fer una demostració de per què a la taula sortia la fórmula $f'(x) = 2x$ i que no bastava dir que aquesta fórmula sortia de la taula).
- 2 justificacions incorrectes que utilitzen que la derivada en un punt és el pendent de la recta tangent en el punt d'abscissa a (Albert C. i Jessica C.).