VICENÇ FONT MOLL

PROCEDIMENTS PER OBTENIR EXPRESSIONS SIMBÒLIQUES A PARTIR DE GRÀFIQUES. APLICACIONS A LES DERIVADES

****

Departament de Didàctica de les Ciències Experimentals i de la Matemàtica

Programa de Didàctica de les Ciències Experimentals i de la Matemàtica

Bienni 1994-1996

Per optar al títol de Doctor en Filosofia i Ciències de l'Educació
Secció Ciències de l'Educació

Director: Josep María Nuñez i Espallargas

Tutor: Josep María Nuñez i Espallargas

UNIVERSITAT DE BARCELONA

BARCELONA 1999

5.2.28. Subseqüència 13. Derivada de les funcions $f(x) = \sqrt[n]{x^m}$

Aquesta subseqüència està formada per les activitats 60-61 i pretén aconseguir com a resultat del procés d'instrucció els següents ítems del subobjectiu 3.3:

87 Determinar si l'alumnat entén que la regla que hem obtingut per derivar la funció $f(x) = x^n$, amb n un nombre natural, també és vàlida quan l'exponent és una fracció.

88 Determinar si l'alumnat té dificultats per transformar les funcions $f(x) = \sqrt[n]{x^m}$ en $f(x) = x^{\frac{m}{n}}$ i les funcions $f(x) = \dfrac{k}{x^n}$ en $f(x) = kx^{-n}$.

L'objectiu d'aquesta subseqüència és que l'alumne entengui que la regla que hem obtingut per derivar la funció $f(x) = x^n$, amb n un nombre natural, també és vàlida quan l'exponent és una fracció.

A partir de la fórmula del producte es calcula la derivada de la funció $f(x) = \sqrt{x}$, escrit en forma de radical i en forma de potència d'exponent fraccionari. En l'activitat 60 es tracta que l'alumne observi que la fórmula $(x^n)' = n\,x^{n-1}$ continua sent vàlida per $n = 1/2$.

L'alumnat ha d'entendre que la fórmula $(x^n)' = n\,x^{n-1}$ és certa per a qualsevol valor de l'exponent ; més endavant es demostrarà, però ara ja pot utilitzar-la per calcular la funció derivada de les funcions del tipus $y = \sqrt[n]{x^m}$ i de la funció $y = x^{-n}$ (activitat 61).

5.2.29. Subseqüència 14. Equació de la recta tangent

Aquesta subseqüència està formada per les activitats 62-64 i pretén aconseguir com a resultat del procés d'instrucció els següents ítems del subobjectiu 3.3:

89 Determinar si l'alumnat entén que per calcular la recta tangent s'ha de seguir el procediment següent:

1) Buscar $f'(a)$, que és el pendent m de la recta tangent, de la manera següent:

 1.1 Calcular la funció derivada $f'(x)$

 1.2 Substituir x per a en la fórmula de la funció derivada.

2) Buscar la segona coordenada del punt de tangència $(a, f(a))$ substituint x per a en la fórmula de la funció.

3) Trobar l'ordenada a l'origen n sabent que la recta tangent passa pel punt de tangència.

90 Determinar si l'alumnat pot aplicar aquest procediment en funcions elementals que no són paràboles.

Si bé el càlcul de l'equació de la recta tangent és un procediment que s'ha treballat al llarg de tota la unitat, en aquest subseqüència, d'una banda es recullen els diferents passos que s'han de seguir per trobar la recta tangent, i de l'altra, en les activitats 62, 63 i 64, s'aplica el procediment a funcions en les quals el càlcul del pendent implica utilitzar les funcions derivades de les funcions elementals.

Aquestes dues subseqüències es van desenvolupar en la sessió del 4-2-98.

Sessió del 4-2-98.

Planificació prèvia

Treballar les activitats 60 - 64.

Desenvolupament de la sessió

Faltes: Falta Toni G. i Laura A.

P: Començo recordant que ara el nostre objectiu és buscar la derivada de les funcions $f(x)=x^{n/m}$, és a dir, les funcions del tipus $f(x) = \sqrt[n]{x^m}$ .Seguidament explico com vam trobar el dia anterior la funció derivada de $f(x) = \sqrt{x}$. Recordo que vam partir de la igualtat següent:

$$\left(\sqrt{x}\right)^2 = x \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x}\cdot\sqrt{x} = x$$

i que vam derivar les funcions que hi ha en els dos costats de la igualtat i que per derivar el producte de l'esquerra vam aplicar la regla de la derivada d'un producte (comento i escric a la pissarra el següent)

$$\begin{gathered}
\left(\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}\right)' = (x)' \\
\left(\sqrt{x}\right)'\cdot\sqrt{x} + \sqrt{x}\cdot\left(\sqrt{x}\right)' = 1 \\
2\cdot\left(\sqrt{x}\right)'\cdot\sqrt{x} = 1 \\
\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}
\end{gathered}$$

Recordo que després vam escriure el resultat anterior en forma de potència d'exponent fraccionari

$$\left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}}$$

i, per últim, vam observar que aquesta derivada seguia el model $(x^n)' = n\,x^{n-1}$. És a dir, vam veure que aquesta regla continua sent vàlida quan l'exponent és 1/2. A continuació remarco que la regla $(x^n)' = n\,x^{n-1}$, que nosaltres havíem vist que era certa quan l'exponent era un nombre natural com 2, 4, 10, etc., resulta que també és vàlida quan l'exponent és la fracció 1/2. Per últim comento que, més endavant, veurem que aquesta fórmula és certa per a qualsevol valor de l'exponent, però que ara ens limitarem a utilitzar-la per calcular la funció derivada de les funcions $f(x) = \sqrt[n]{x^m}$. Seguidament explico i comento a la pissarra l'exemple de la pàgina 351

$$y = \sqrt[3]{x^4} \text{ --------->} \qquad y' = \left(\sqrt[3]{x^4}\right)' = \left(x^{\frac{4}{3}}\right)' = \frac{4}{3}\cdot x^{\frac{4}{3}-1} = \frac{4}{3}\cdot x^{\frac{1}{3}}$$

Insisteixo que basta transformar l'arrel en una potència d'exponent fraccionari i aplicar la regla $(x^n)' = n\,x^{n-1}$.

A: Jaime G. em pregunta si es pot deixar en forma d'arrel.

P: Li responc que sí i comento que la funció derivada es pot escriure també de la manera següent:

$$y' = \left(\sqrt[3]{x^4}\right)' = \left(x^{\frac{4}{3}}\right)' = \frac{4}{3}\cdot x^{\frac{4}{3}-1} = \frac{4}{3}\cdot x^{\frac{1}{3}} = \frac{4\sqrt[3]{x}}{3}$$

A continuació explico a la pissarra l'altre exemple de la pàgina 351

$$y = \frac{1}{x^3} = x^{-3} \text{ ————>} \qquad (y)' = (x^{-3})' = = -3\cdot x^{-3-1} = -3\cdot x^{-4} = \frac{-3}{x^4}$$

Els faig observar que aquesta funció també es pot derivar aplicant la regla de la derivada d'una divisió però que resulta més ràpid fer-ho de la manera anterior. A continuació dic que facin l'activitat 61.

A: Es posen a fer-la i alguns reclamen la meva atenció per comentar-me dubtes. Observo que en alguns casos, pocs, el seu problema és que no saben escriure els radicals en forma de potència d'exponent fraccionari. Silvia V. i Laura N. han aplicat la regla de la derivada de la divisió per derivar $y = \frac{1}{x^3}$, però no han simplificat, i em pregunten si és veritat que surt el mateix.

P: Els explico per què són equivalents les dues expressions

$$(y)' = \left(\frac{1}{x^3}\right)' = \frac{0\cdot x^3 - 3x^2\cdot 1}{(x^3)^2} = \frac{-3x^2}{x^6} \quad \frac{-3}{x^4}$$

i els faig observar que en molts casos la derivada d'una funció es pot trobar de moltes maneres diferents. Faig sortir Sandra D. a fer els apartats *a*, *b* i *c* de l'activitat 61 a la pissarra.

A: Sandra escriu el següent:

a) $$y' = \left(\sqrt[3]{x^5}\right)' = \left(x^{\frac{5}{3}}\right)' = \frac{5}{3}\cdot x^{\frac{5}{3}-1} = \frac{5}{3}\cdot x^{\frac{2}{3}}$$

b) $$y' = \left(3\sqrt[5]{x^9}\right)' = \left(3x^{\frac{9}{5}}\right)' = \frac{27}{5}\cdot x^{\frac{9}{5}-1} = \frac{27}{5}\cdot x^{\frac{4}{5}}$$

P: Comento que la resposta de Sandra és correcta i pregunto si tenen cap dubte.

A: Elisabeth G em demana que expliqui l'apartat *b* (interpreto que té problemes amb el 3 que multiplica.

P: Li explico que l'expressió $y = 3\cdot\sqrt[5]{x^9}$ s'ha d'interpretar com un nombre (el 3) que multiplica a una funció $y = \sqrt[5]{x^9}$, i llavors, aplicar la regla que diu que la derivada del producte d'un nombre per una funció és igual al producte del nombre per la derivada de la funció , i que el 27/5 surt de multiplicar 3 per 9/5.

A: Alguns alumnes diuen que si es pot fer com el producte de dues funcions.

P: Els responc que si i els faig observar que és el mateix (escric a la pissarra)

$$y' = \left(3\sqrt[5]{x^9}\right)' = (3)'\cdot\sqrt[5]{x^9} + 3\cdot\left(\sqrt[5]{x^9}\right)' = 0\cdot\sqrt[5]{x^9} + 3\cdot\left(\sqrt[5]{x^9}\right)' = 3\cdot\left(\sqrt[5]{x^9}\right)'$$

A: Sandra comet un error en derivar l'apartat *c*, ja que s'oblida de multiplicar per 7.

c) $$= \frac{7\cdot\sqrt[5]{x^1}}{\sin x} \qquad y' = \frac{12x^{\frac{7}{12}}\cdot\sin x - 7\cos x\cdot\sqrt[5]{x^{12}}}{\sin^2 x}$$

P: Comento que s'ha oblidat de multiplicar el 12 per 7 i poso 84 en comptes de 12. Faig sortir Luís J. G. a la pissarra a fer l'apartat *d.*

A: Aquest alumne no se n'adona que l'arrel quadrada de x elevat a 12 és x^{6} i, a més, comet l'error típic de considerar que la derivada d'una divisió és la divisió de derivades

i escriu el següent: $y' = \dfrac{\frac{1}{12}\cdot x^{-\frac{11}{12}}}{\frac{1}{x}}$

P: Comento que si ens adonem que l'arrel quadrada de x elevat a 12 és x^{6}, aquesta derivada és força més fàcil que si no ho fem. També comento que Luís J. G. ha comès l'error típic de considerar que la derivada d'una divisió és la divisió de derivades, i faig la derivada de la manera següent:

d) $y = \dfrac{\sqrt[5]{x^{12}}}{\ln x}$ --------> $y' = \dfrac{\frac{1}{12}\cdot x^{-\frac{11}{12}}\cdot \ln x - \frac{1}{x}\cdot\sqrt{x^{12}}}{\ln^2 x}$

A: Anna G. em pregunta com s'ha de fer la derivada de $y = \dfrac{4}{x^{3}}$

P: Li responc que ha de considerar aquesta funció com la funció $y = 4x^{-3}$. Faig sortir Jordi L. a fer els dos últims apartats de l'activitat 61.

A: Jordi L. Escriu el següent a la pissarra.

e) $y = \dfrac{1}{x^{2}} = x^{-2}$ ---------> $y' = -2x^{-3}$

f) $y = \dfrac{4}{x^{3}} = 4x^{-3}$ ---------> $y' = -12x^{-4}$

P: Pregunto si hi ha cap dubte.

A: Responen que no.

P: Anuncio que tot seguit farem problemes de trobar rectes tangents, com ja havíem fet altres vegades; però la novetat rau que ara, per fer la funció derivada, s'han d'utilitzar les regles de derivació i la taula de derivades que a poc a poc hem anat confeccionant. En aquests problemes es demana tant la recta tangent com la normal. Ara bé, com que els alumnes encara no saben trobar la recta normal, només cal que trobin la recta tangent.

A continuació dic que facin les activitats 62, 63 i 64.

A: Es posen a fer aquestes activitats.

P: Comento que si algú no se'n recorda del procediment que s'ha de seguir per calcular la recta tangent, ho té explicat a la pàgina 352, just abans dels enunciats d'aquestes activitats; però si tot i així hi ha qui no sap respondre, ha de passar a la següent.

A: Continuen fent aquestes activitats.

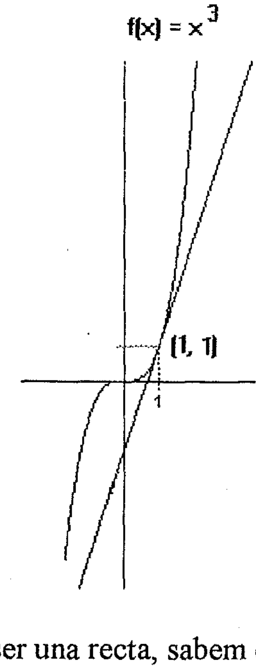
P: Pregunto si algú ha fet l'activitat 62.

A: No surt cap voluntari i faig sortir Alicia M. a la pissarra.

A: Alicia M. surt a la pissarra a fer l'activitat 62 i només respon l'apartat *a*; escriu el següent

a) $f'(x) = 3x^2$ -------> $f'(1) = 3$

P: Comento que Alicia M. només ha contestat l'apartat *a* i dic que faré una traducció gràfica del problema. Començo dibuixant la gràfica de la funció $f(x) = x^3$ i dic que tots haurien de saber-ne fer un esbós, perquè ja l'hem treballat i perquè surt en molts problemes. Després dibuixo la recta tangent a la gràfica que passa pel punt d'abscissa $x = 1$.



i comento que, pel fet de ser una recta, sabem que la seva fórmula és del tipus $y = ax+b$, i que el pendent és $f'(1) = 3$; és a dir, sabem que l'equació d'aquesta recta és $y = 3x+b$. Segueixo dient que, per determinar b, només cal utilitzar que la recta passa pel punt $(1, f(1)) = (1,1)$; i escric el següent a la pissarra

$$y = 3x + b \text{ passa pel punt } (1\ ,\ 1)$$
$$1 = 3(1) + b$$
$$1\text{-}3 = b$$
$$-2 = b$$
$$\text{La recta és } y = 3x - 2$$

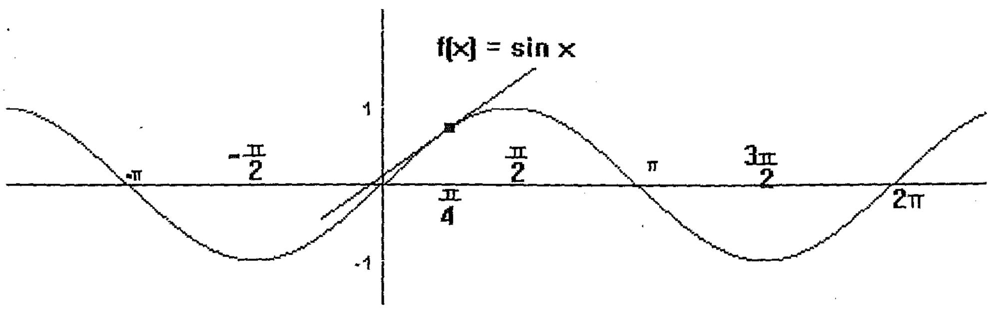
Remarco que aquests problemes són iguals als que fèiem al principi de la unitat, només que ara la funció serà més complicada que les d'abans, però que això no els ha de preocupar perquè ara ells tenen una tècnica que els permet derivar aquestes funcions més complicades. Seguidament dic que facin les activitats 63 i 64 (insisteixo que només cal la tangent, que la normal no cal).

A: Es posen a fer-les i observo que alguns alumnes tenen problemes per convertir $\pi/4$ a graus en l'activitat 63.

P: Comento que $\pi/4$ són 45° i recordo que les raons trigonomètriques d'aquest angle són d'aquelles que s'han de saber de memòria.

A: Continuen treballant.

P: mentre els alumnes fan aquesta activitat, faig la traducció gràfica del problema a la pissarra i dibuixo el següent:



A: Observo que els alumnes tenen dificultats perquè no saben treballar amb radians i els costa de trobar el punt de tangència i la derivada de la funció sinus en $x = \pi/4$.

P: Comento que el punt de tangència és el punt $(\pi/4\ ,\ \sin \pi/4) = (\pi/4\ ,\ \sin 45°) = (\pi/4\ ,\ \frac{1}{\sqrt{2}})$. Seguidament dic que la recta tangent té una fórmula del tipus $y = ax + b$ i que el pendent d'aquesta recta és $f'(\pi/4) = \cos \pi/4 = \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$, .És a dir, sabem que l'equació d'aquesta recta és $y = \frac{1}{\sqrt{2}} x + b$. Segueixo dient que, per determinar *b,* només cal utilitzar que la recta passa pel punt de tangència $(\pi/4, \frac{1}{\sqrt{2}})$,i escric el següent a la pissarra

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}} x + b \text{ passa pel punt } (\pi/4 , \frac{1}{\sqrt{2}})$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\Pi}{4} + b$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(1 - \pi/4) = b$$

$$0{,}15 \approx b$$

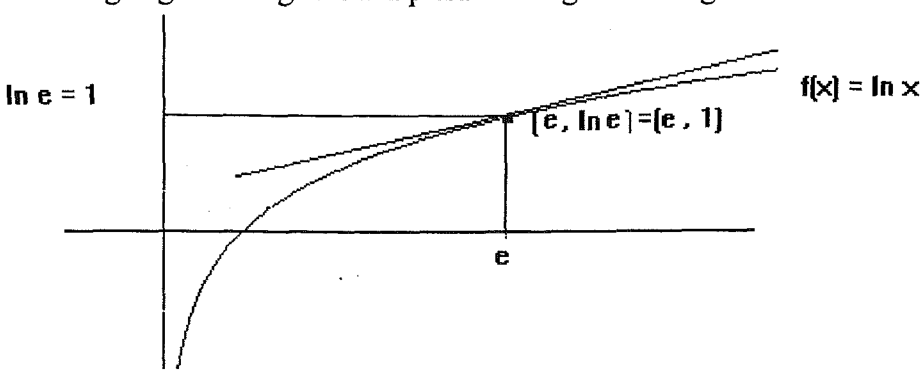
La recta és $y = \frac{1}{\sqrt{2}} x + \frac{1-\frac{\Pi}{4}}{\sqrt{2}}$ o bé $y = 0{,}71x + 0{,}15$

A: Alguns alumnes no pregunten per què cos 45° = $\frac{1}{\sqrt{2}}$

P: Interpreto que el seu problema és que estan acostumats a utilitzar l'expressió $\frac{\sqrt{2}}{2}$ i comento que és el mateix $\frac{1}{\sqrt{2}}$ que $\frac{1}{\sqrt{2}}$,i que, si volen, poden utilitzar decimals. Després escric a la pissarra

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}71$$

A continuació faig la gràfica següent a la pissarra i faig sortir Sergi G a fer l'activitat 64.



A: Sergi escriu el següent:

$f(x) = \ln x$ -------> $f'(x) = 1/x$ $\qquad f'(e) = 1/e,$

$(e\ ,\ f(e)\ ) = (e, \ln e) = (\ e\ ,\ 1)$

$$\begin{aligned} y &= x/e+b \\ 1 &= e/e+b \\ 1\text{-}1 &= b \\ 0 &= b \end{aligned}$$

La recta tangent és $y = x/e$

P: Els faig observar que això vol dir que aquesta tangent passa per l'origen de coordenades i rectifico el dibuix de la pissarra, de manera que la tangent passa per l'origen de coordenades. Toca el timbre i dic que ja poden fer totes les activitats dels apartats <<Per practicar més>> i <<Autoavaluació>> per preparar l'examen del divendres.

Valoracions

1) Els alumnes han entès que la regla que hem obtingut per derivar la funció $f(x) = x^n$, amb n un nombre natural, també és vàlida quan l'exponent és una fracció.

2) No he observat dificultats per transformar les funcions $f(x) = \sqrt[n]{x^m}$ en $f(x) = x^{\frac{m}{n}}$ i les funcions $f(x) = \dfrac{k}{x^n}$ en $f(x) = kx^{-n}$.

3) Els alumnes es recorden del procediment per a calcular la recta tangent en un punt.

4) He observat moltes dificultats en l'activitat 63 perquè els alumnes no dominen els coneixements previs de trigonometria que s'han d'utilitzar.

5.2.30 Subseqüència 15. Síntesi final

Aquesta subseqüència pretén aconseguir, com a resultat del procés d'instrucció, els següents ítems del subobjectiu 3.3:

91 Determinar si l'alumnat és conscient que la funció derivada es pot calcular directament, utilitzant límits o trobant una propietat que compleixen totes les tangents; aproximadament, utilitzant la funció taxa mitjana de variació $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ amb h prou petit; o bé indirectament, utilitzant les regles de derivació.

92 Determinar si l'alumnat entén el paral·lelisme entre els diferents mètodes de càlcul de la derivada en un punt i els mètodes per a calcular la funció derivada.

L'objectiu d'aquesta subseqüència és treballar l'esquema de la restricció 3, perquè seveixi per estructurar el treball realitzat al llarg de tota la unitat.

Aquesta subseqüència es va desenvolupar en la sessió del dia 5-2-98

Sessió del 5-2-98.

Planificació prèvia

1) Treballar l'esquema de la restricció 3.

Desenvolupament de la sessió

Faltes: No falta ningú.

P: Començo escrivint a la pissarra l'esquema de la restricció 2 sobre el càlcul de la derivada en un punt; els recordo que ja l'havia explicat anteriorment ; i anuncio que tot seguit l'ampliarem (escric el següent):

Com es calcula $f'(a)$?	Directament	1) Utilitzant límits Calculant $f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.
		2) Gràficament Calculant el pendent de la recta tangent
		3) Aproximadament 3.1) Calculant $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ per a un valor de h molt petit 3.2) Considerar que $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \simeq \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$
	Indirectament	4) Utilitzant la funció derivada 1) Calcular $f'(x)$ 2) substituir x per a

A continuació comento amb força detall aquest esquema, recordant les activitats en les quals vam utilitzar cada un d'aquests quatre procediments. Seguidament dic que el més ràpid d'aquests mètodes és l'últim, i que la seva utilització ens porta a la pregunta següent: com es calcula $f'(x)$? A continuació dic que la resposta a aquesta pregunta ens portarà a un esquema molt semblant al que acabem d'escriure a la pissarra. Escric a la pissarra:

Com es calcula $f'(x)$?	Directament	1) Utilitzant límits Calculant $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. 2) Gràficament 1) Trobar una condició que compleixen totes les rectes tangents 2) Trobar $f'(x)$ a partir de la condició anterior 3) Aproximadament 1) Dibuixar la gràfica de $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ per a un valor de h molt petit 2) Considerar que $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \simeq \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$ 3) Trobar l'expressió de $f'(x)$ a partir de la gràfica de $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ 4) Gràfica de $f(x)$ $\Rightarrow$ Taula de $f'(x)$ $\Rightarrow$ Gràfica de $f'(x)$ $\Rightarrow$ Expressió analítica de $f'(x)$
	Indirectament	5) Utilitzant les regles de derivació, la derivació logarítmica, etc.

Mentre escric aquest esquema a la pissarra, vaig comentant-lo amb força detall, recordant les activitats en les quals vam utilitzar cada un d'aquests quatre procediments. Començo dient que el mètode per a calcular la funció derivada consisteix a calcular

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

.Seguidament remarco que, per a algunes funcions, el càlcul d'aquest límit era força complicat, per la qual cosa vam utilitzar d'altres mètodes, el segon dels quals consistia a trobar una condició que complien totes les tangents per després, a partir d'aquesta condició, trobar l'expressió de la funció derivada. Recordo que aquest procediment el vam aplicar per calcular la funció derivada de les funcions que tenien per gràfica una recta i per a les funcions exponencials i logarítmiques. Recordo que, en el primer cas, la condició que vam trobar és que la recta tangent a una recta en qualsevol punt és ella mateixa i que en les funcions exponencials vam trobar que totes les subtangents mesuraven igual.. Després dic que el tercer mètode és el que vam utilitzar per trobar la gràfica de la funció sinus i la funció cosinus i recordo el que vam fer a la pantalla de l'ordinador amb el programa Calcula. Seguidament recordo que el procediment 4 és el que vam fer a les hores B per calcular la funció sinus (qüestionari 7). I per últim comento que el que interessa són mètodes de càlcul ràpid de la funció derivada mitjançant les regles de derivació.

Mentre he anat fent aquesta explicació els he fet observar el paral·lelisme que hi ha entre els mètodes dels dos esquemes.

A: Alguns alumnes em fan preguntes sobre parts d'aquests esquemes.

P: Repeteixo parts dels esquemes en funció de les preguntes dels alumnes, recordant les activitats en què vam aplicar la part de l'esquema per la qual pregunten (per exemple, recordo el qüestionari núm 5 que vam fer amb el programa Cabri com a exemple del càlcul de la funció derivada de la paràbola a partir de trobar una condició que complien totes les tangents).

A: Patricia F. Pregunta si no basta amb les regles de derivació per calcular qualsevol funció derivada.

P: Li responc que no, que segons el tipus de funció o el tipus d'expressió de la funció (fórmula, gràfica, etc.) s'ha d'aplicar un procediment o un altre i li faig observar que, si el que em donen és una fórmula d'una funció polinòmica o racional, el mètode més ràpid és aplicar les regles de derivació; però, si el que tinc és només la gràfica d'una funció i un procediment per a dibuixar les rectes tangents, només puc aplicar el quart mètode, i pot ser que no del tot ja que igual només arribo a dibuixar la gràfica de la funció derivada sense poder trobar la fórmula. També comento que, si tinc la fórmula de la funció i resulta que el càlcul del límit és molt complicat, però tinc accés a un ordinador, llavors puc aplicar el tercer mètode.

A continuació els dic que mirin el problema 13 de la pàgina 54 en què ens donen la fórmula de la funció $f(x) = \dfrac{x-1}{x}$ i ens pregunten la derivada en els punts d'abscissa 1 i 4, i els pregunto quina part del primer esquema s'ha d'utilitzar.

A: Responen que s'ha de buscar la funció derivada aplicant la regla de la derivada de la divisió i després substituir (el 4).

P: A continuació pregunto quina part del primer esquema s'ha d'utilitzar per respondre el problema 16 de la pàgina 355 en què només tenim la gràfica de la funció amb algunes tangents dibuixades i ens pregunten la derivada en diferents punts.

A: Responen que el càlcul gràfic de la derivada en un punt (el mètode 2 del primer esquema).

P: A continuació pregunto quina part del segon esquema s'ha d'utilitzar per a respondre els problemes 18 i 19 de la pàgina 356 en què ens pregunten la funció derivada i ens donen la fórmula de la funció.

A: Responen que s'han d'aplicar les regles de derivació (mètode 5 del segon esquema). Judit P. em pregunta si puc posar un exemple en el qual la funció vingui donada per una fórmula i no es pugui aplicar les regles de derivació.

P: Li poso l'exemple de la funció arctangent, la inversa de la tangent, que és una funció que, amb el que sabem fins ara, no podem descompondre en operacions de funcions més senzilles de derivada coneguda. És a dir, per poder aplicar les regles, has de poder interpretar la funció com el resultat de fer operacions amb funcions més senzilles de derivada coneguda, i pot passar que no hagis estudiat encara l'operació que ho permet o bé que no coneguis la derivada d'aquestes funcions més senzilles. A continuació li faig la metàfora següent: les regles de derivació permeten fer <<parets>> sempre que tinguis les eines (regles de derivació) i totxos (derivada de funcions més senzilles). Si no tens les <<eines>> o els <<totxos>> no pots fer la paret. Aquests primers totxos no es poden calcular amb les regles de derivació. A continuació dic que al problema 32 i 33 de la pàgina 359 ens donen dues gràfiques i ens pregunten si una és la derivada de l'altra i pregunto com es pot respondre.

A: Cap alumne respon.

P: Dic que l'única possibilitat per respondre el 33 és fer quelcom semblant a una part del procediment 4 del segon esquema:

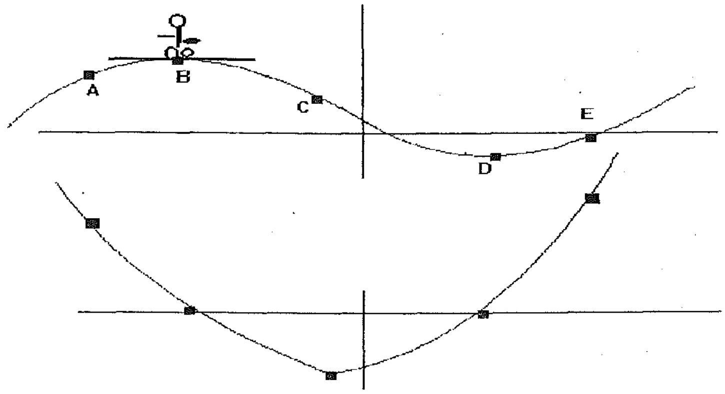
Gràfica de $f(x)$ $\Rightarrow$ Taula de $f'(x)$ $\Rightarrow$ Gràfica de $f'(x)$

i els recordo que vaig fer quelcom semblant quan vaig explicar la relació entre la gràfica de la funció sinus i la gràfica de la seva funció derivada.

A: Elisabet G. diu que en el 32 es pot fer la derivada de la funció perquè tenim la fórmula, i que després, amb la quadrícula, podem saber a quina fórmula correspon cada funció.

P: Li responc que efectivament aquest mètode es pot aplicar en l'activitat 32, però que si no tinguéssim la fórmula de la funció ni la quadrícula, sinó només les dues gràfiques, el problema també es podria contestar fent quelcom semblant a: Gràfica de $f(x)$ $\Rightarrow$ Taula de $f'(x)$ $\Rightarrow$ Gràfica de $f'(x)$ on la taula de $f'(x)$ només podria ser aproximada o fins i tot només de signes.

A continuació dibuixo la gràfica superior i considero que la gràfica de la funció és el perfil d'una muntanya i que la recta tangent en un punt són els esquís d'un esquiador. Després els faig observar que, en el punt A, l'esquiador puja una costa amb molt de pendent (derivada positiva). A mesura que va pujant, el pendent va disminuint, fins que en el punt *B* el pendent és zero (derivada zero). Entre *B* i *C* l'esquiador baixa (derivada negativa) cada cop amb més inclinació de baixada. El punt *C* és el punt de baixada amb més inclinació. Entre *C* i *D* continua baixant (derivada negativa) però la inclinació dels esquís es va aproximant a la posició horitzontal que és la que té en el punt *D* (derivada zero). A partir de *D*, la inclinació dels esquís torna a augmentar (derivada positiva).



Remarco que els valors de la derivada ens donen informació sobre el pendent de les rectes tangents a la funció. Aquest fet permet captar qualitativament la connexió entre la gràfica d'una funció i la de la seva derivada, malgrat que les dues poden ser molt diferents. Fins i tot, fa possible traçar la gràfica de la funció derivada (potser no del tot exacta, però suficient per a copsar-ne els trets generals) a partir de la gràfica de la funció donada, tot observant els pendents de les rectes tangents.

Toca el timbre i acaba la classe.

Valoracions

1) Crec que dedicar la classe a relacionar l'esquema del càlcul de la derivada en un punt amb el del càlcul de la funció derivada ha ajudat molt als alumnes a organitzar els continguts treballats al llarg del tema així com a entendre que hi ha diferents mètodes per a calcular la funció derivada. També han relacionat els mètodes utilitzats en el càlcul de la funció derivada amb els mètodes utilitzats per a calcular la derivada en un punt.

2) En relació als esquemes inicialment previstos s'ha afegit el procediment:
Gràfica de $f(x)$ $\Rightarrow$ Taula de $f'(x)$ $\Rightarrow$ Gràfica de $f'(x)$ $\Rightarrow$ Expressió analítica de $f'(x)$

3) Considero que els alumnes ara estan preparats per estudiar més a fons la relació entre la gràfica d'una funció i la gràfica de la funció derivada.

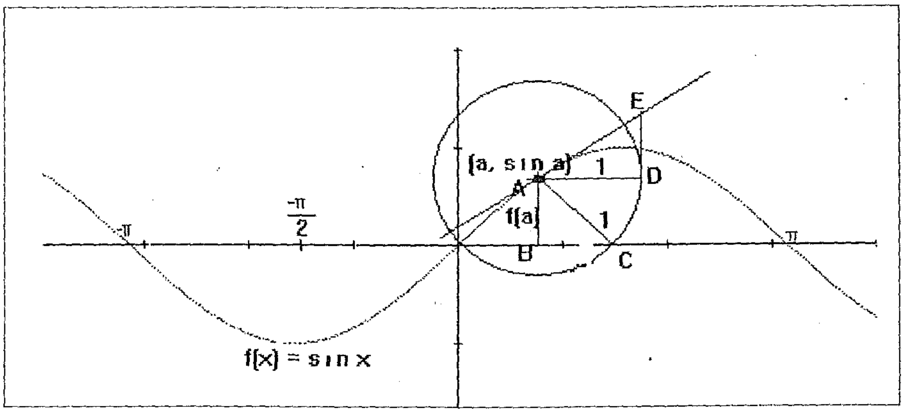
3) Tal com s'ha desenvolupat aquesta unitat, la relació entre la gràfica d'una funció i la seva funció derivada ha aparegut a partir del següent procediment per a calcular funcions derivades: Gràfica de $f(x)$ $\Rightarrow$ Taula de $f'(x)$ $\Rightarrow$ Gràfica de $f'(x)$ $\Rightarrow$ Expressió analítica de $f'(x)$. En aquest cas, l'últim pas ara no té sentit i el segon, pot ser una taula numèrica o bé una espècie de taula de signes, zeros i valors qualitatius (gran, petit, etc.).

5.2.31. Subseqüència 7 d'avaluació (qüestionari 8)

La funció sinus és una solució de l'equació diferencial: $(f(x))^2 + (f'(x))^2 = 1$. D'aquesta equació diferencial se segueix que el procediment següent permet dibuixar la recta tangent en un punt qualsevol de la gràfica de la funció sinus:

Procediment

1 Dibuixa una circumferència de radi 1 amb centre en $(a, \sin a)$ i determina el punt de tall amb l'eix d'abscisses que està a la dreta de a.
2 Dibuixa una recta paral·lela a l'eix d'abscisses que passi pel punt $(a, \sin a)$ i determina el punt de tall amb la circumferència anterior que està a la dreta de $(a, \sin a)$.
3 Mesura el segment de l'eix horitzontal que té per origen $x = a$ i per extrem el punt determinat en el primer pas.
4 Amb origen en el punt determinat en el pas 2, dibuixa un segment vertical d'igual longitud que el segment del pas 3 (cap amunt si la funció és creixent i cap avall si és decreixent) i marca el seu extrem.
5 Uneix el punt obtingut en el pas anterior amb el punt $(a, \sin a)$.



Aquest procediment ja fou utilitzat per l'alumne en el qüestionari 7. Es pot entendre com una condició que compleixen totes les rectes tangents. L'anàlisi d'aquesta condició, juntament amb la fórmula de la funció, permet establir una equació per trobar la funció derivada d'acord amb l'esquema següent:

Gràfica de $f(x)$/Expressió analítica de $f(x)$ $\Rightarrow$ Expressió simbòlica de $f'(x)$

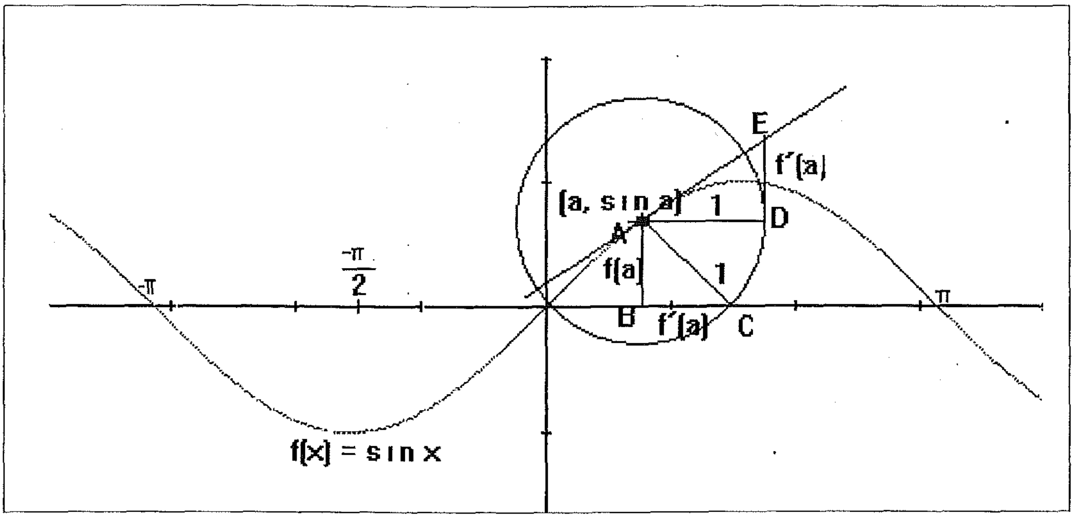
Amb aquest esquema volem simbolitzar que el punt de partida de les accions dels alumnes (aplicar el procediment) és la gràfica de la funció. L'expressió analítica de $f(x)$ és necessària per deduir l'expressió analítica de $f'(x)$ a partir de la simbolització de la condició que compleixen totes les pendents de les rectes tangents.

El qüestionari que vam dissenyar (núm 8) fou el següent:

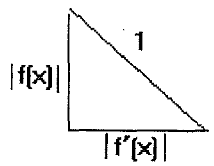
QÜESTIONARI 8

2 Podem arribar al mateix resultat del problema anterior analitzant el procediment que hem utilitzat per a dibuixar les rectes tangents.

a) Explica per què $DE = f'(a)$ i $BC = f'(a)$



b) Utilitzant el triangle



i que $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, demostra que

$$f'(x) = \pm\cos x$$

c) Compara el signe de - cos x amb el creixement i decreixement de la funció sinus i explica per què no és possible la solució $f'(x) = -\cos x$.

Aquest qüestionari es va passar a tota la classe el dia 10-2-98.

Sessió 10-2-98.

Planificació prèvia

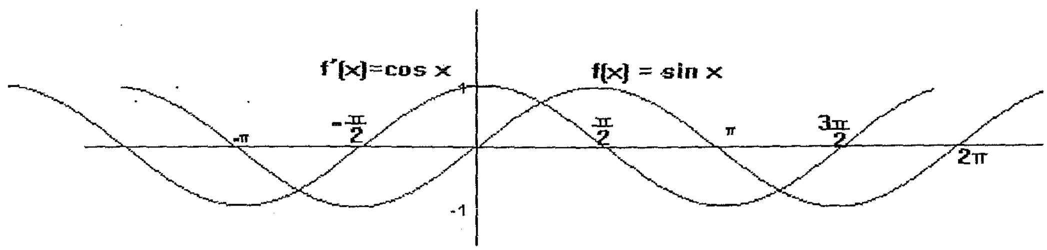
1) Passar el qüestionari n. 8.
2) Comentar-lo.

Desenvolupament de la sessió

Faltes: Falten Mike D i Luís J. G.

P: Començo recordant-los que a les hores B havien respost un qüestionari que va servir per comprovar que la derivada de la funció sinus és la funció cosinus. Recordo que en aquest qüestionari teníem la gràfica de la funció sinus, juntament amb un procediment per a dibuixar la recta tangent en qualsevol punt de la gràfica, l'aplicació del qual ens va permetre dibuixar la recta tangent en diferents punts. Continuo recordant-los que, un cop dibuixades les rectes tangents, vam calcular-ne els pendents, amb la qual cosa vam obtenir una taula de $f'(x)$ a partir de la qual vam dibuixar la gràfica de la funció $f'(x)$,que finalment vam reconèixer com la gràfica de la funció cosinus (mentrestant escric a la pissarra el següent)

Gràfica de $f(x)$ $\Rightarrow$ Taula de $f'(x)$ $\Rightarrow$ Gràfica de $f'(x)$ $\Rightarrow$ Expressió simbòlica de $f'(x)$

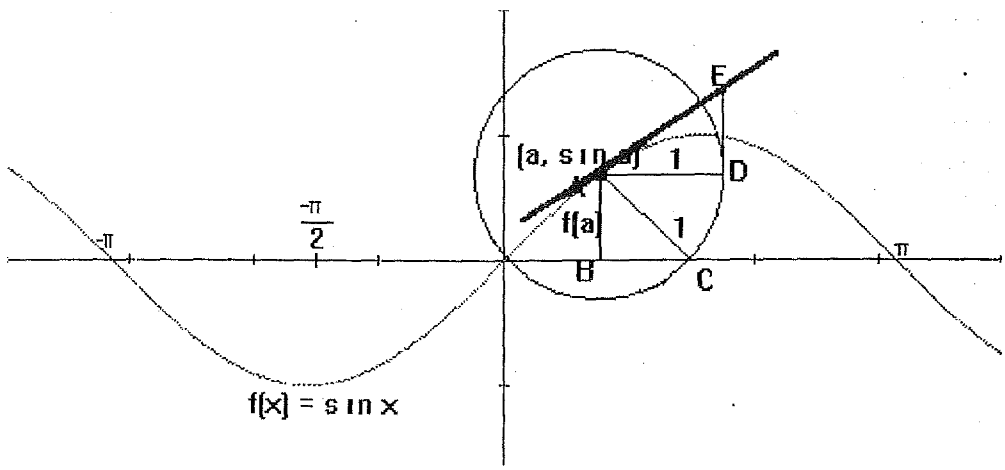


També recordo que la funció i la seva funció derivada estan estretament relacionades, tal com es pot comprovar si s'observa la gràfica de la funció sinus i la gràfica de la seva derivada, i els faig observar que, quan la funció sinus presenta un màxim o un mínim, la recta tangent és horitzontal i la derivada en aquests punts val zero, per la qual cosa la funció derivada en aquests punts val zero, és a dir talla a l'eix d'abscisses. Seguidament dibuixo la recta tangent a la funció sinus en l'origen de coordenades i els faig observar que en aquest punt la recta tangent té la màxima inclinació (màxim pendent), és a dir, la derivada és màxima; i els faig observar que en aquest punt la funció cosinus, la funció derivada, presenta un màxim.

A continuació dibuixo a la pissarra la figura següent i escric els passos del procediment.

Procediment

1 Dibuixa una circumferència de radi 1 amb centre en (a, sin a) i determina el punt de tall amb l'eix d'abscisses que està a la dreta de a.
2 Dibuixa una recta paral·lela a l'eix d'abscisses que passi pel punt (a, sin a) i determina el punt de tall amb la circumferència anterior que està a la dreta de (a, sin a).
3 Mesura el segment de l'eix horitzontal que té per origen $x = a$ i per extrem el punt determinat en el primer pas.
4 Amb origen al punt determinat en el pas 2, dibuixa un segment vertical d'igual longitud que el segment del pas 3 (cap amunt si la funció és creixent i cap avall si és decreixent) i marca'n l'extrem.
5 Uneix el punt obtingut en el pas anterior amb el punt (a, sin a).



Seguidament explico amb molt de detall, sobre la figura de la pissarra, el procediment que vam seguir per trobar les rectes tangents.

A continuació dic que el procediment que vam seguir per comprovar que la derivada del sinus és el cosinus en el qüestionari anterior es pot escurçar força, si fem una anàlisi del procediment que permet trobar la recta tangent en qualsevol punt de la gràfica de la funció sinus. A continuació remarco que el qüestionari núm 8 que repartiré ara és una activitat guiada, que permet demostrar que la derivada del sinus és la funció cosinus, a partir de l'anàlisi del procediment que permet dibuixar la recta tangent en qualsevol punt de la gràfica de la funció sinus.

Reparteixo el qüestionari 8 i dic que s'ha de contestar individualment i faig les observacions següents:

1) Sabem que $BC = ED$ per tal com s'ha dibuixat la recta tangent; per tant, allò que han

de demostrar en l'apartat a és que $f'(a) = ED$.

2) Dic que el triangle de l'apartat b és el que ve determinat pel punt de la gràfica $A(a$, sin$a)$ i pels punts B i C , i,assenyalant sobre la gràfica de la funció sinus els faig observar que, segons quin sigui el punt de la gràfica que considerem, els catets d'aquest triangle poden anar cap amunt o cap avall.

3) Seguidament dic que els costats del triangle són longituds i que per això tant $f(x)$ com $f'(x)$ s'han d'agafar en valor absolut, perquè poden agafar valors negatius. Ara bé, remarco que ells poden prescindir del valor absolut perquè hauran d'elevar al quadrat $f(x)$ i $f'(x)$, de manera que no cal considerar el valor absolut de $f(x)$ i $f'(x)$.

A: Comencen a fer el qüestionari. Al cap d'una estona observo que en l'apartat a els alumnes suposen allò que han de demostrar, és a dir que $ED = f'(a)$.

P: Comento que en l'apartat a el que s'ha de fer és demostrar que $ED = f'(a)$ i que $BC = f'(a)$ i el que no s'ha de fer és suposar d'entrada que $ED = f'(a)$ .Dic que ratllin la $f'(a)$ del segment ED de la figura.

A: Molts ratllen $f'(a)$ de la figura i alguns no ho fan, però observo que, a partir del meu comentari, la majoria respon correctament la pregunta.

P: Al cap d'una estona observo que, en l'apartat b, els alumnes utilitzen allò que s'ha de demostrar, que la derivada de la funció sinus és el cosinus, per la qual cosa els faig observar que en l'apartat b poden utilitzar que $f(x)$ és la funció sinus, però que no poden utilitzar que $f'(x)$ és la funció cosinus perquè això és el que volem demostrar.

A: Alguns rectifiquen a partir del meu comentari, però d'altres continuen utilitzant que $f'(x)$ és la funció cosinus.

P: Repeteixo diverses vegades que no poden utilitzar que $f'(x)$ és la funció cosinus, perquè això és el que volem demostrar.

A: Alguns alumnes reclamen la meva atenció particular per fer-me preguntes sobre l'apartat b.

P: Quan observo que un alumne està utilitzant que $f'(x)$ és la funció cosinus li faig observar que no poden utilitzar que $f'(x)$ és la funció cosinus, perquè això és el que volem demostrar.

A: Observo que alguns alumnes s'obliden del $\pm$ en fer l'arrel quadrada.

P: Faig un comentari general recordant-los que l'arrel quadrada té dues solucions, una de positiva i l'altra de negativa.

A: Continuen treballant i Laura A. em fa una pregunta i observo que ha substituït $f'(x)$ per x.

P: Li faig observar que no és convenient substituir $f'(x)$ per x, perquè llavors la x representa, d'una banda, la variable independent, i de l'altra, la funció derivada.

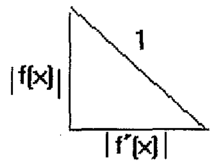
P: Un cop he observat que molts d'ells han arribat al resultat $f'(x) = \pm\cos x$,comento que en l'apartat c , han de descartar la solució $f'(x) = -\cos x$ per impossible.

A: Observo que els alumnes tenen molta dificultat per entendre el que han de fer en aquest apartat.

P: Cinc minuts abans d'acabar la classe, recullo els qüestionaris i explico que per contestar l'apartat a, només cal interpretar la derivada en un punt com el pendent de la recta tangent (escric a la pissarra)

$$f'(x) = \textit{pendent de la recta tangent} = \frac{ED}{1} = ED$$

i que $BD = f'(a)$ perquè per construcció $BD = ED$

Després dibuixo a la pissarra el triangle següent 

i explico que, si apliquem el teorema de Pitàgores, prescindim dels valors absoluts i utilitzem que $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ tenim:

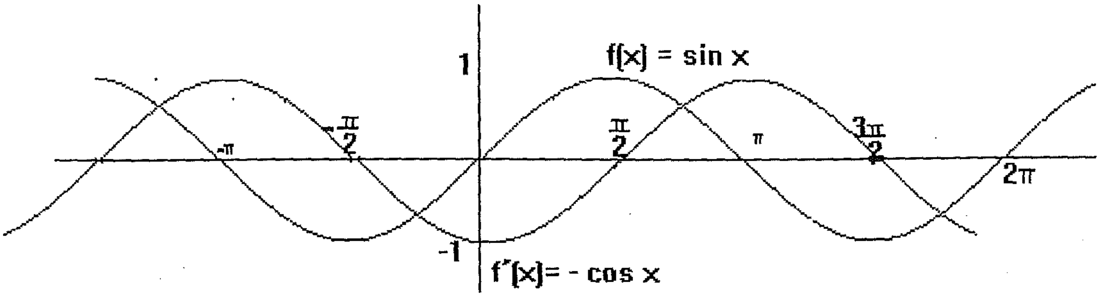
$$|f(x)|^2 + |f(x)'|^2 = 1 \Rightarrow f(x)^2 + f'(x)^2 = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x)^2 = \sqrt{1 - f(x)^2} \Rightarrow f'(x) = \sqrt{1 - \sin^2 x} \Rightarrow f'(x) = \sqrt{\cos^2 x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = \pm\cos x$$

Remarco que podem prescindir dels valors absoluts perquè elevem els nombres al quadrat; que no es pot utilitzar que $f'(x)$ és la funció cosinus, perquè això és el que volem demostrar, mentre que sí que es pot substituir $f(x)$ per $\sin x$; que $1 - \sin^2 x$ és $\cos^2 x$; i,finalment, que, en fer l'arrel quadrada, s'obté una solució positiva i una de negativa.

Per últim, dibuixo en el mateix sistema d'eixos la gràfica de la funció sinus i la de la funció menys cosinus



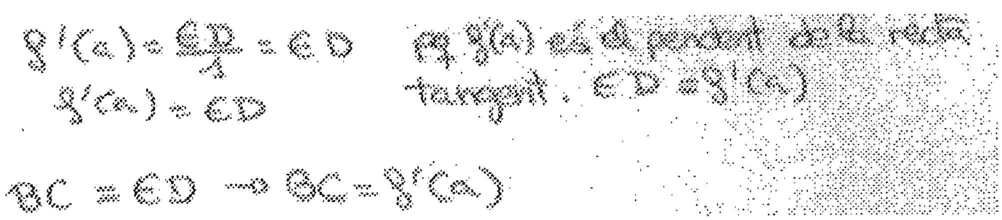
I comento que no s'havien de fixar pas en els punts on la funció sinus té un màxim o un mínim sinó en punts com(per exemple) l'origen de coordenades, en el qual s'observa que la recta tangent a la funció sinus té màxima inclinació.Per tant, la funció derivada hauria de tenir un màxim i en canvi la funció $f'(x) = -\cos x$ hi presenta un mínim. Toca el timbre i acaba la classe.

Respostes al qüestionari n. 8

Apartat *a*

Respostes	Vàlides	No vàlides	Blanc
Alumnes	34 (89%)	3(8%)	1(3%)

- Hem considerat com a vàlides, respostes del tipus següent (Esther E.)

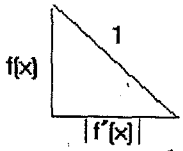


- Les 3 respostes que hem considerades com a no vàlides (Oscar T, Elia G. i Toni G) ho són perquè utilitzen allò que s'havia de demostrar; és a dir, utilitzen d'entrada que el segment ED o BC són iguals a $f'(a)$. Per exemple, Oscar T. respon de la manera següent: <<Perque $f'(a)$ és el pendent de la recta tangent i com que BC és igual a $f'(a)$, ED, que és la mateixa distància també igual a $f'(a)$ i et diu la inclinació de la recta.>>
- Només un alumne respon en blanc (Raúl C.).

Apartat *b*

Les respostes a l'apartat *b* es desglossen de la manera següent:

- 7 (18%) responen en blanc.
- 3 (8%) alumnes utilitzen allò que s'havia de demostrar, és a dir, utilitzen d'entrada que $f'(x) = \cos x$ (Oscar T, Toni G. i Albert C). En el cas de Toni G., el fet de suposar d'entrada que $f'(x) = \cos x$, el porta a demostrar que $f(x) = \sin x$.
- 1 (3%) alumne respon $f'(x) = \cos x$ (Eva P.) En comptes de respondre $f'(x) = \pm\cos x$.
- 7 (18%) alumnes cometen errors de tipus algèbric (Sergio G, Laura N, Luisa V., Jordi C Anna G, Alicia M i Rocio P) com no passar correctament un terme a l'altre costat de la igualtat, considerar que $\sqrt{1^2-\sin^2 x} = 1-\sin x$, etc.
- 1 (3%) alumna (Jessica C.) respon $f'(x) = \sqrt{1-\sin^2 x}$ perquè no és capaç d'adonar-se que $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ implica que $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$.
- 18 (47%) respostes correctes. Hem considerat com a respostes correctes respostes del tipus següent (Alfonso M)

b) Utilizando el triangulo 

i que $\text{sen}^2 x + \cos x = 1$, demostra que

$f'(x) = \pm\cos x$

hipotenusa: $c^2 + c^2$

$1 = f(x)^2 + f'(x)^2$

$1 = \sin^2 x + f'(x)^2$

$1 - \sin^2 x = f'(x)^2$

$\cos^2 x = f'(x)^2$

$\cos^2 x = 1 - \text{sen}^2 x$

$f'(x) = \sqrt{\cos^2 x}$

$f'(x) = \pm \cos^2 x$

Apartat *c*

Les respostes a l'apartat *c* es desglossen de la manera següent:

- 23 (61%) respostes en blanc.
- 2 (5%) que responen que $f'(x) = -\cos x$ no és possible perquè el resultat d'una arrel no pot ser negatiu (Oscar T i Raquel G). Per exemple, Raquel G. respon així: <<No puede salir el resultado negativo de una raiz cuadrada, es imposible>>.
- 1 (3%) respostes (Alberto C) en què es detecten errors sobre la funció menys cosinus. Aquest alumne dibuixa malament la funció $f'(x) = -\cos x$, i arriba a la conclusió que aquesta funció és igual a la funció $f(x) = \sin x$.
- 1 (3%) resposta en la qual hi ha ben dibuixades en el mateix sistema de coordenades les gràfiques de la funció sinus i $f'(x) = -\cos x$, però cap explicació (Alex A).
- 1(3%) Resposta que considera que la funció $f'(x) = -\cos x$ sempre serà negativa (Elisabeth G.).

- 2 (5%) Respostes poc clares del tipus (Patricia F. i Isabel G.). Per exemple, la resposta de Patricia F. fou: <<No és possible per que en aquest tros la funció és creixent>>.
- 3 (8%) respostes poc clares (Laura N., Albert C. i Jordi C.) que focalitzen la seva atenció en els màxims i mínims de la funció sinus, els quals no permeten descartar la solució $f'(x) = -\cos x$, ja que per a aquests valors, la funció cosinus i la funció menys cosinus coincideixen. Per exemple, Laura N. va respondre així: <<Perquè si la gràfica $-\cos x$ fos $f'(x)$ no hi hauria la relació que ha de guardar $f(x)$ amb la seva derivada ja que no coincidien els màxims amb el valor + alt de la funció, ni els mínims amb el valor 0>>.
- 2 (5%) respostes que, a més de focalitzar l'atenció sobre els màxims i mínims, ho fan sobre d'altres punts que permeten descartar la solució $f'(x) = -\cos x$ (Silvia V. i Jordi L.). Per exemple, la resposta de Silvia V. fou la següent: <<Perquè si la derivada sigues $-\cos x$ no guardaria relació amb la funció sen x, ja que els màxims i mínims i el pas pel punt d'abscisses no es relacionarien amb els valors de la derivada si aquesta sigues $-\cos x$>>.
- 2 (5%) respostes correctes (Angela L i Esther E.). A continuació s'adjunta fotocòpia del qüestionari d'Angela L.

Valoracions sobre el qüestionari 8

1) El fet que 34 alumnes responguin correctament l'aparta *a* és a causa que la majoria d'ells és capaç d'utilitzar que la derivada en un punt és el pendent de la recta tangent. És a dir, crec que com a resultat del procés d'instrucció quasi tot l'alumnat entén i sap utilitzar la interpretació geomètrica de la derivada en un punt.

2) L'alumnat no sap quin és el procediment per a resoldre activitats de demostració, ja que tenen tendència a utilitzar en la demostració el resultat que han de demostrar.

3) Els resultats de l'apartat *b* haurien estat força més baixos si no hagués remarcat diverses vegades que no poden utilitzar que $f'(x)$ és la funció cosinus, perquè això és el que volem demostrar. També haurien augmentat molt les respostes sense el $\pm$ si no hagués intervingut recordant que el resultat d'una arrel quadrada són dues solucions, una positiva i l'altra negativa.

3) Malgrat el meu comentari sobre el resultat de l'arrel, dos alumnes consideren que el resultat d'una arrel sempre és positiu, perquè confonen el radicand amb el resultat de calcular l'arrel quadrada.

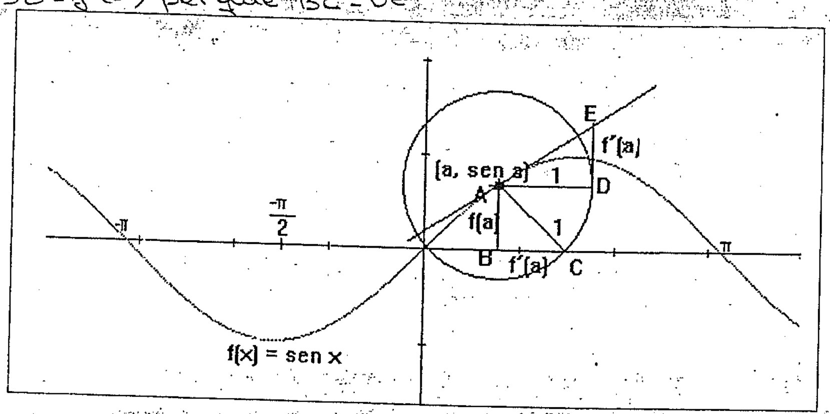
4) Cal destacar que només 4 (11%) alumnes responen l'apartat *c* (2 bé i 2 de manera acceptable) la qual cosa posa de manifest les dificultats que tenen per relacionar la gràfica d'una funció amb la gràfica de la seva funció derivada.

5) He observat que els alumnes han entès fàcilment el meu comentari final sobre les respostes correctes al qüestionari.

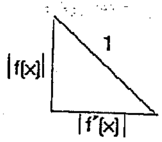
Angela

2 Podem arribar al mateix resultat del problema anterior analitzant el procediment que hem utilitzat per a dibuixar les rectes tangents.

a) Explica perquè $DE = f'(a)$ i $BC = f'(a)$ DE = f'(a) perquè f'(a) = pendent de la recta tangent en a, que és igual a $\frac{ED}{1} = ED$.
BC = f'(a) perquè BC = DE



b) Utilizando el triangulo



i que $\sen^2 x + \cos^2 x = 1$, demostra que

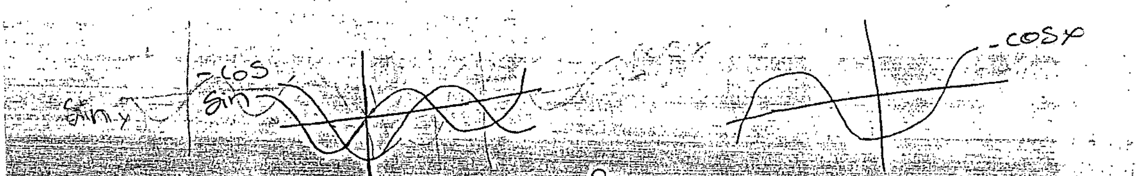
$f'(x) = \pm\cos x$

$h^2 = c_a^2 + c_b^2$ $\quad 1^2 = \sin x^2 + f'(x)^2$

$f'(x)^2 = \cos x^2$

$f'(x) = \sqrt{\cos x^2} = \pm\cos x$

c) Compara el signo de - cos x amb el creixement i decreixement de la funció sinus i explica perquè no és possible la solució $f'(x) = -\cos x$



-cos x no pot ser, perquè en x=0, la recta tg és creixent, per tant, la pendent de la recta tg serà positiva, i la derivada també

5.2.32. Subseqüència 9 d'avaluació. 2n Examen

Aquesta subseqüència està formada per l'examen del dia 12-2-98 i pel comentari i la revisió fets en la sessió posterior (13-2-97). És el segon dels tres que havia planificat per avaluar els alumnes en relació als continguts de la unitat. A diferència dels qüestionaris anteriors, els alumnes en sabien la data amb antelació i també que la nota comptava per a la nota de la 1'avaluació.

Sessió del 12-12-97

Planificació

A l'hora de confeccionar les preguntes de l'examen vam tenir en compte, entre d'altres, els aspectes següents:

1) Volíem esbrinar quin percentatge d'alumnes podia trobar l'expressió de la derivada d'una funció, a partir de saber la fórmula de la funció i una condició que complien totes les tangents, per la qual cosa vam formular la pregunta 1.

2) També volíem saber la capacitat que tenien els alumnes per aplicar les regles de derivació, juntament amb la taula de les derivades de les funcions elementals, per la qual cosa vam confeccionar la pregunta 2 .

3) També volíem assegurar-nos que podien fer un problema molt senzill en què s'hagués d'utilitzar la interpretació geomètrica de la derivada, per la qual cosa vam formular la pregunta 3.

4) Com a resultat del procés d'instrucció teníem la sensació que els alumnes tenien dificultats en aplicar el procediment per a calcular l'equació de la recta tangent, quan no estaven gaire familiaritzats amb la funció que se'ls donava. Per confirmar aquesta suposició vam confeccionar el problema n. 4, en què els alumnes havien de calcular l'equació de la recta tangent en un punt de la gràfica de la funció $f(x) = 1/x$, i en un punt de la gràfica de la funció sinus.

5) Preguntar l'esquema que relaciona els procediments per a calcular la derivada en un punt amb els procediments per a calcular la funció derivada gairebé es podia considerar una <<ruptura de contracte>> perquè els alumnes no esperaven aquest tipus de pregunta, que es podia considerar <<de teoria>> i aquestes no sortien en els exàmens. Per això pensàvem que els alumnes no haurien memoritzat aquest esquema, i, per tant, preguntar-lo podia servir com un indicador indirecte del grau d'integració dels objectes mentals dels alumnes. L'esquema va constituir la pregunta n. 5 de l'examen.

L'examen constava de les preguntes següents:

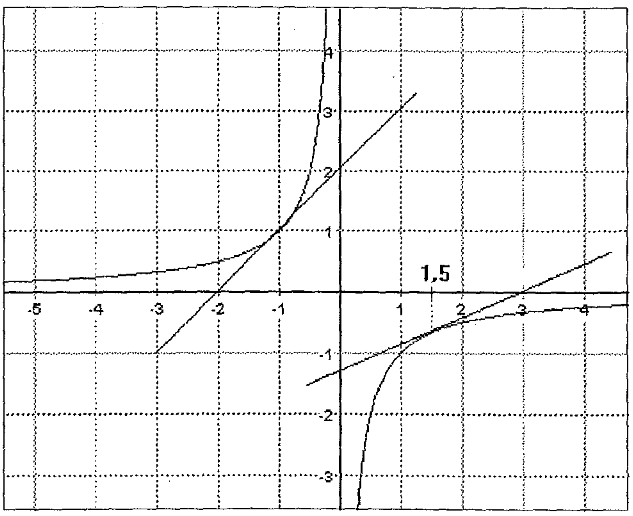
2n EXAMEN

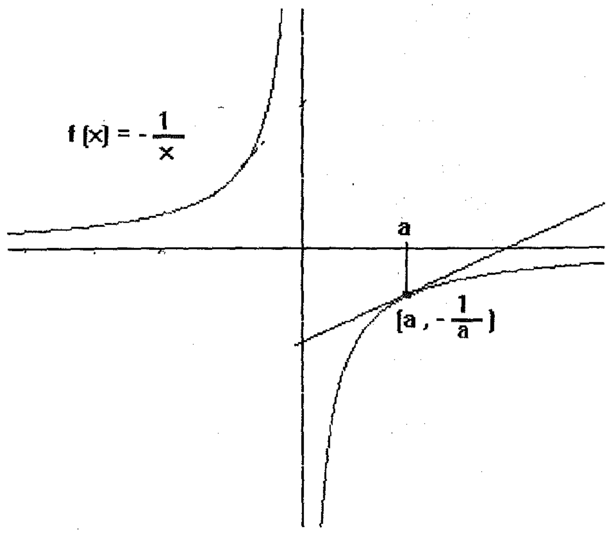
1 La funció $f(x) = -\frac{1}{x}$ compleix la següent propietat: la longitud de la subtangent en un punt coincideix amb el valor absolut de l'abscissa del punt. Aquesta propietat la pots comprovar en els punts d'abscissa $x = -1$ i $x = 1{,}5$

a) Calcula $f'(a)$ per a positiu

b)Calcula $f'(a)$ per a negatiu (suggeriment: considera que la longitud de la subtangent és $-a$). Has obtingut el mateix resultat?

c) Calcula $f'(x)$





2 Calcula la funció derivada de les funcions següents:

a) $f(x) = -3x^3 + 12x + \sqrt{x}$ b) $g(x) = \frac{3x^3 - 3}{x^2}$ c) $h(x) = 4^x - 3e^x + \operatorname{tg} x$

d) $i(x) = (x^2 - \log_4 x)\cdot \sqrt[5]{x^3}$ e) $j(x) = \frac{\sin x}{\ln x}$ f) $k(x) = (3x^3 + \operatorname{cotg} x)\cdot \frac{1}{x^3}$

3 Donada la funció $f(x) = 3x^2+x+3$

a) Per a quin valor de l'abscissa, la derivada val 25?

b) Per a quin valor de l'abscissa la recta tangent té pendent 7?

c) Per a quin valor de l'abscissa la recta tangent és paral.lela a la recta $y = 19x + 104$

4 a) Troba l'equació de la tangent a la corba de la funció $f(x) = 1/x$ en el punt d'abscissa x=1.

b) Troba l'equació de la tangent a la corba de la funció $f(x) = \sin x$ en el punt d'abscissa x=0.

5 Fes un esquema on es recullin les diferents formes de calcular la derivada en un punt i la funció derivada.

Desenvolupament de la sessió

Faltes: falta Luís J. G. i Toni G.

Controles: Reparteixo els exàmens i faig les observacions següents sobre la primera pregunta:

- Comento que les subtangents a la funció $f(x) = 1/x$ compleixen una determinada condició que és la de mesurar igual el valor absolut de l'abscissa del punt, i els faig observar com aquesta condició es compleix en $x = -1$ i $x = 1,5$.
- Comento que, en els apartats *a* i *b*, han d'anar amb cura amb el signe de l'abscissa i el de l'ordenada.
- En relació a l'apartat *c*, dic que $f'(x)$ s'ha de trobar sense aplicar la regla de la divisió. Remarco que poden utilitzar la regla de la divisió per saber el resultat que ha de sortir, però que han de justificar aquest resultat per un procediment que no sigui l'aplicació de les regles de derivació.

En relació a la segona pregunta faig les observacions següents:
- Comento que basta aplicar les regles de derivació i que no cal fer la simplificació.

En relació a la tercera pregunta faig les observacions següents:
- Comento que la dificultat d'aquest problema està en el fet que són funcions amb les quals estan poc familiaritzats.

En relació a la quarta pregunta, faig les observacions següents:
- Comento que és una pregunta molt fàcil i que espero que tothom la respondrà correctament.

En relació a la quinta pregunta faig les observacions següents:
- Comento que aquesta pregunta pot servir com un indicador indirecte del grau d'integració dels continguts que han aconseguit i que la resposta que ells han de donar és un esquema semblant al que jo vaig fer a classe.

Els alumnes mostren el seu desacord amb aquesta pregunta que consideren un <<cop baix>> per la meva part.

En relació a la puntuació de les preguntes, comento que la primera puntua 1,25 , la segona 3,5 la tercera 2 , la quarta 2 i la quinta 1,25 i els faig observar que les dues preguntes que es poden considerar més difícils, que són la primera i la quinta, són les que menys puntuen.

A: El fet que l'última pregunta només puntuï 1,25 fa que deixin de protestar.

Valoració de les respostes de l'examen

Primera pregunta

En aquesta pregunta l'alumne havia d'aplicar la interpretació geomètrica de la derivada, utilitzant que la variació horitzontal és el valor absolut de l'abscissa. En l'apartat *a*, havia d'adonar-se que l'ordenada és negativa i que cal considerar el seu valor absolut. És a dir, havia de fer el següent:

$$f'(a) = \text{pendent de la recta tangent} = \frac{\frac{1}{a}}{a} = \frac{1}{a^2}$$

En l'apartat *b*, havia de considerar que la variació horitzontal era el valor absolut de l'abscissa i, tal com se li suggeria en l'enunciat del problema, havia de considerar que la variació horitzontal era -*a*. És a dir, havia de fer el següent:

$$f'(a) = \text{pendent de la recta tangent} = \frac{-\frac{1}{a}}{-a} = \frac{1}{a^2}$$

I havia d'observar que obtenia el mateix resultat que en l'apartat anterior. Per últim, per contestar l'apartat *c*, l'alumnat s'havia d'adonar que els resultats dels dos apartats anteriors informaven que, per a qualsevol valor de a, $f'(a) = 1/a^2$, i que això és el mateix que dir que la funció derivada és $f'(x) = 1/x^2$.

- 3 alumnes (Jordi L., Maria L.V. i Jaime G.) responen en blanc.
- 4 alumnes (Anna G., Raúl B., Jordi A. i Eva P.) apliquen la regla de la divisió a la funció $f(x) = -1/x$.
- 3 alumnes (Oscar T., Pilar G. i Rocio P.) intenten calcular la funció derivada per límits i no ho aconsegueixen.
- Un alumne (Raúl C.) respon $f'(x) = -\ln x$ sense cap justificació.
- Una alumna (Jessica C.) intenta calcular aproximadament la derivada, considerant que és quasi igual a la taxa mitjana de variació de la funció $f(x) = \ln x$ entre $-a$ i $-a + 0{,}0001$.
- En 26 de les respostes dels alumnes s'observa que han aplicat la interpretació geomètrica de la derivada.
- Tres d'aquests alumnes s'equivoquen en el moment d'aplicar aquesta interpretació geomètrica (David R.., Alberto C. i Jordi C.). David R. divideix abscissa per ordenada. Jordi C. s'equivoca en aplicar la condició que compleixen les subtangents i considera que la subtangent sempre val 1, i Alberto C. confon l'ordenada amb les coordenades del punt i respon així a l'apartat *a*:

$$f'(a) = \frac{(a, -\frac{1}{a})}{-a}$$

- Dos d'aquests alumnes (Esther E. i David G.) apliquen la interpretació geomètrica només en casos particulars. David G. només ho fa en el punt d'abscissa $x = 1{,}5$ i respon correctament, mentre que Esther E. ho fa en $x = -1$ i $x = 1{,}5$ i només s'equivoca en el signe.

- Dues d'aquestes alumnes (Elia G. i Alicia M.) apliquen correctament la interpretació geomètrica i la condició de la subtangent però s'equivoquen simplificant i responen així a l'apartat *b*: $f'(a) = \dfrac{-\frac{1}{a}}{a} = -1$
- Una d'aquests alumnes (Elisabeth G.) aplica correctament la interpretació geomètrica i la condició de la subtangent, no s'equivoca simplificant però al final comet un error difícil de diagnosticar i respon així a l'apartat *a*:

$$f'(a) = \frac{-\frac{1}{a}}{a} = \left(-\frac{1}{a}\right)\left(\frac{a}{1}\right) = \frac{-1}{a^2} = a^{-2} = -2a$$

- 9 d'aquest alumnes apliquen en els apartats *a* i *b* correctament la interpretació geomètrica i la condició de la subtangent, no s'equivoquen simplificant però cometen un error de signe i això els porta a contestar malament l'apartat.*c* optant pel doble signe (Alfonso D. respon $f'(x) = \pm 1/x^2$)o bé pel signe negatiu (Victor B., David M., Isabel G., Alfonso M. i Laura N. responen $f'(x) = -1/x^2$)o bé per altres respostes incorrectes (Mike D. respon $f'(x) = -1$, Javier F. respon $f'(x) = -x^{-1}$ mentre que Raquel G. respon $f'(x) = -\ln x$.
- 2 d'aquests alumnes (Laura A. i Patricia F.) apliquen correctament, en els apartats *a* i *b*, la interpretació geomètrica i la condició de la subtangent; no s'equivoquen simplificant, però cometen un error de signe que no els porta a contestar malament l'apartat *c*. Laura A. no dóna una explicació clara de per què opta per la resposta correcta; Patricia F. sí que ho fa. La resposta de Patricia F fou la següent:

(1) $f(x) = \dfrac{-1}{x}$ Propietat: subtangent = $|x|$

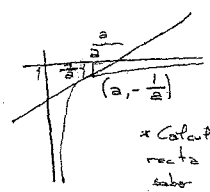
Ex: $x=-1 \rightarrow |-1| = -1$

(a) Calcula $f'(a)$ per a positiu.

SUBTANGENT = $|x|$

$a = |a|$

$f'(a) = \dfrac{\text{alçada}}{\text{base}} = \dfrac{-\frac{1}{a}}{a} = \dfrac{-1}{a^2}$

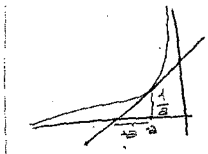


* Calculo el pendent de la recta tangent per poder saber la derivada.

(b) Calcula $f'(a)$ per a negatiu. Has obtingut el mateix resultat.

SUBTANGENT = $|x|$

$-a = |a|$



$f'(a) = \dfrac{\text{alçada}}{\text{base}} = \dfrac{\frac{1}{a}}{+a} = \dfrac{+1}{a^2}$

Em dona la mateix però positiu.

(c) Calcula $f'(x)$.

CONCLUSIÓ

$f'(x) = \dfrac{-1}{x}$

$\boxed{f'(x) = \dfrac{+1}{x^2}}$

• Ens quedem amb el resultat positiu ja que totes les tangents d'aquesta funció són positives i com que $f'(a)$ = pendent recta tangent, l'hem de deixar positiu.

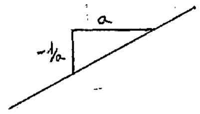
- 7 d'aquests alumnes (Angela L., Alex A., Silvia V., Sandra D., Sergio G., Judith P. i Albert C.) responen correctament els tres apartats de la primera pregunta. 6 d'aquests alumnes van donar una resposta semblant a la de Sandra D. ,que fou la següent:

1-

$f(x) = -\frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = (-x^{-1-1}) = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$ c

a) $f'(a) = \dfrac{\frac{1}{a}}{a}$ Cogemos $-\frac{1}{a}$ positivo ya que la recta tangente es creciente; valor absoluto

$f'(a) = \frac{1}{a^2}$

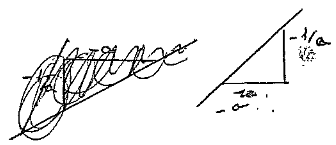


c) $f'(x) = \frac{1}{x^2}$

b) $f'(a) = \dfrac{-\frac{1}{a}}{-a}$

$f'(a) = -\frac{1}{-a^2}(-1)$

$f'(a) = \frac{1}{a^2}$



Sí he obtingut el mateix resultat

$f'(a)$ per a positiu $= \frac{1}{a^2}$

$f'(a)$ per a negatiu $= \frac{1}{a^2}$

Només Alex A. va respondre d'una manera una mica diferent

1) a) $f'(a) = \dfrac{f(a_2)-f(a_1)}{a_2-a_1} = \dfrac{0-\left(-\frac{1}{a}\right)}{2a-a} = \dfrac{\frac{1}{a}}{a} = \boxed{\frac{1}{a^2}}$

b) $\left(-a, \frac{1}{a}\right)$

$f'(a) = \dfrac{f(a_2)-f(a_1)}{a_1-a_1} = \dfrac{\frac{1}{a}-0}{-a-(-2a)} = \dfrac{\frac{1}{a}}{a} = \boxed{\frac{1}{a^2}}$

Sí, ja que el pendent és el mateix

c) $f'(a) = \frac{1}{a^2}$

$\Downarrow$

$f'(x) = \frac{1}{x^2}$

Valoracions de les respostes a la primera pregunta

1) Si considerem com a bona la resposta de Patricia F., 8 alumnes (21%) han contestat correctament; i, si considerem com a acceptables les respostes que només tenen un error de signe (Laura A., Alfonso D., Victor B., David M., Isabel G., Alfonso M. i Laura N.) 15 alumnes (39%) han donat una resposta acceptable. També cal destacar que 26 alumnes (68%) ha intentant resoldre aquest problema aplicant la interpretació geomètrica de la derivada.

2) Cal destacar que els tres alumnes (8%) que ho han intentat fer per límits no ho han aconseguit.

Segona pregunta

Només hem tingut en compte si han aplicat correctament les regles de derivació i s'han derivat correctament les funcions elementals. No hem tingut en compte els errors de simplificació.

Apartat *a*

35 alumnes (92%) calculen correctament aquesta funció derivada. Anna G. s'equivoca en fer la derivada de $-3\,x^3$, i Rocio P. i Raúl C. s'equivoquen en fer la derivada de l'arrel quadrada de x.

Apartat *b*

36 alumnes (95%) calculen correctament aquesta funció derivada. Albert C. s'equivoca en fer la derivada del denominador, i Jessica C. s'equivoca en aplicar la regla de la derivada d'una divisió, ja que, en comptes de restar la derivada del denominador pel numerador sense derivar, ho suma.

Apartat *c*

33 alumnes (87%) calculen correctament aquesta funció derivada. Eva P. s'equivoca en fer la derivada de $3e^x$ i Elia G., Elisabeth G., Angela L. i David M. s'equivoquen en fer la derivada de la tangent.

Apartat *d*

33 alumnes (87%) calculen correctament aquesta funció derivada. Angela L. s'equivoca en fer la derivada de $\log_4 x$; Patricia F. s'equivoca en aplicar la regla del producte, perquè fa derivada de la primera per la segona sense derivar més derivada de la segona, i s'oblida de multiplicar per la primera sense derivar; Mike D. és l'únic que comet l'error típic i considera que la derivada d'un producte és el producte de derivades; i, finalment,

Raúl C. i Anna G. s'equivoquen en fer la derivada de $\sqrt[5]{x^3}$

Apartat *e*

33 alumnes (87%) calculen correctament aquesta funció derivada. Jessica C. s'equivoca en aplicar la regla de la derivada de la divisió, perquè fa derivada del numerador pel denominador sense derivar, més derivada del denominador pel numerador sense derivar, dividit tot pel denominador al quadrat ; Jaime G i Eva P s'obliden de dividir pel denominador al quadrat; Mike D. només posa la derivada del numerador pel denominador sense derivar i no continua; i Sergi G. és l'únic que comet l'error típic, ja que considera que la derivada d'una divisió és la divisió de derivades.

Apartat *f*

- 18 alumnes (47%) calculen correctament aquesta funció derivada.
- 11 alumnes (29%) (Victor B., Jessica C., Alberto C., Raúl C., Alfonso D., Raquel G., Pilar G., Isabel G., Anna G., Jordi L. i David M.) s'equivoquen en fer la derivada de $\frac{1}{x^3}$.
- Dues alumnes (5%) (Elisabeth G. i Eva P.) s'equivoquen en fer la derivada de $\frac{1}{x^3}$ i la de la cotangent.
- Dues alumnes (5%) (Elia G. i Esther E.) s'equivoquen en fer la derivada de la cotangent.
- Dos alumnes (Judith P. i Jordi C.) s'equivoquen en aplicar la regla del producte, perquè fan la derivada de la primera per la segona sense derivar menys derivada de la segona per la primera sense derivar.
- Dos alumnes (5%) s'equivoquen perquè fan derivada de la primera (i no multipliquen per la segona sense derivar) més derivada de la segona per la primera sense derivar. A més s'equivoquen en fer la derivada de $\frac{1}{x^3}$.
- Un alumne (3%) (Albert C.) aplica la regla de la derivada d'una divisió en comptes de la regla de la derivada del producte.

Valoracions de les respostes a la segona pregunta

1) Destaca que pocs alumnes consideren que la derivada d'un producte és el producte de derivades o que la derivada d'una divisió és la divisió de derivades.

2) Destaca el percentatge d'errors en el càlcul de la derivada de $\frac{1}{x^3}$ (39%). Una possible explicació és que aquest tipus de funcions són les últimes que vam estudiar i possiblement no van ser prou treballades a classe.

3) En les cinc primeres derivades, el percentatge d'encert està al voltant del 90%. Ara bé, si a més dels errors en l'aplicació de les regles de derivació o en les derivades de les funcions elementals, haguéssim tingut en compte els errors de simplificació el percentatge seria força inferior.

4) 12 alumnes (32%) calculen correctament les sis derivades; 16 (42%) en calculen 5; són 7 (18%) els qui en calculen 4; i només són 3 (8%)els qui en calculen 3.

5) La meva valoració és que en general s'ha aconseguit un nivell acceptable de la tècnica de derivació.

Tercera pregunta

Apartat *a*

- 33 alumnes (87%) responen correctament.
  30 d'aquests alumnes fan el següent:

  $$f(x) = 3x^2+x+3 \text{ -------> } f'(x) = 6x+1$$
  $$25 = 6x+1\ ;\ 25-1 = 6x\ ;\ 24/6 = x\ ;\ 4 = x$$

  Una d'aquests alumnes (Raquel G.) fa el mateix i després calcula per límits $f'(4)$ i comprova que surt 25.
  Dos alumnes (Alfonso M. i Javier F.), en comptes d'aplicar les regles de derivació per a calcular la funció derivada $f'(x) = 6x+1$, la calculen correctament per límits.
- Dos alumnes apliquen el mateix procediment que els 30 anteriors, però, obé s'equivoquen en calcular $f'(x)$ (Albert C.) ,o bé en resoldre l'equació (Alicia M.).
- Una alumne (Isabel G.) comet dos errors. Primer s'equivoca en derivar la funció i després considera que la x és 25 .
- Un alumne (3%) (Mike D.) no deriva la funció i iguala la funció a 25.
- Un alumne (3%) (Oscar T.) calcula la taxa mitjana de la funció entre 1 i 25.

Valoracions de les respostes a l'apartat *a* de la tercera pregunta

1) 35 (92%) alumnes tenen clar que la funció derivada es pot utilitzar per trobar un punt de la funció $f(x)$ en què la derivada pren un valor determinat, malgrat que dos s'equivoquen en fer els càlculs.

2) L'error d'Isabel G. de confondre el valor de la derivada amb l'abscissa té fàcil explicació; en canvi, els errors de Mike D. i Oscar T. resulten de més difícil explicació.

Apartat *b*

- 31 alumnes (82%) responen correctament.
  29 d'aquests alumnes fan el següent:

$$f(x) = 3x^2+x+3 \text{ -------> } f'(x) = 6x+1$$
$$7 = 6x+1\ ;\ 7-1 = 6x\ ;\ 6/6 = x\ ;\ 1 = x$$

- Dos alumnes apliquen el mateix procediment que els 31 anteriors, però,o bé s'equivoquen en calcular $f'(x)$ (Albert C.), o bé en resoldre l'equació (Alicia M.)
- Dues alumnes (Isabel G. i Rocio P.) s'equivoquen en considerar que la x és 7. Isabel G., a més, s'equivoca derivant .
- Un alumne (3%) (Mike D.) no deriva la funció i iguala la funció a 7.
- Un alumne (3%) (Oscar T.) calcula la taxa mitjana de la funció entre 1 i 7.
- Una alumne (3%) (Eva P.) intenta trobar l'equació de la recta tangent i escriu $y = 7x + b$ i no sap continuar.
- Un alumne (3%) (Raúl C.) respon en blanc.

Valoracions de les respostes a l'apartat *b* de la tercera pregunta

1) 33 (87%) alumnes tenen clar que la funció derivada es pot utilitzar per trobar un punt de la funció $f(x)$ en què la recta tangent té un pendent determinat encara que dos s'equivoquen en fer els càlculs.

2) L'error d'Isabel G. i de Rocio P. de confondre el valor de la derivada amb l'abscissa té fàcil explicació; també s'entén l'error d'Eva P., mentre que els errors de Mike D. i Oscar T. resulten de més difícil explicació.

Apartat *c*

- 25 alumnes (66%) responen correctament.
  Aquests alumnes fan el següent:

$$f(x) = 3x^2+x+3 \text{ -------> } f'(x) = 6x+1$$
$$19 = 6x+1\ ;\ 19-1 = 6x\ ;\ 18/6 = x\ ;\ 3 = x$$

- Un alumne (Albert C.) aplica el mateix procediment que els 25 anteriors, però s'equivoca en calcular $f'(x)$.
- Una alumna (3%) (Isabel G.) comet dos errors. Primer s'equivoca en derivar la funció i després considera que la x és 19.

- Una alumna (3%) (Eva P.) intenta trobar l'equació de la recta tangent i escriu $y = 19x + b$, però no sap continuar.
- Dues Alumnes (5%) (Laura A. i Jessica C.) fan el següent: $7 = 19x + 104$, $-97 = 19x$, $x = -5,1$.
- Dues alumnes (5%) (Anna G. i Pilar G.) igualen la funció derivada a l'equació de la recta i fan el següent: $6x + 1 = 19x + 104$, $-13x = 103$, $x = 103/-13 = -7,9$.
- 6 alumnes (16%) (Raúl C., Ester E., Rocio P., Mike D., Alicia M. i Oscar T.) responen en blanc.

Valoracions de les respostes a l'apartat *b* de la tercera pregunta

1) 26 (68%) alumnes tenen clar que la funció derivada es pot utilitzar per trobar un punt de la funció $f(x)$ en què la recta tangent té un pendent igual al d'una recta paral·lela, tot i que un d'aquests alumnes s'equivoca en fer els càlculs.

2) L'error d'Isabel G. de confondre el valor de la derivada amb l'abscissa té fàcil explicació; també s'entén l'error d'Eva P. ; i fins i tot es pot explicar l'error d'Anna G. i Pilar G. d'igualar la funció derivada amb l'equació de la recta, però resulta de més difícil explicació l'error de Laura A. i Jessica C. d'igualar l'equació a 7.

3) L'augment de respostes en blanc s'explica perquè aquests alumnes no han pogut aplicar que dues rectes paral·leles tenen el mateix pendent, amb la qual cosa l'apartat *c* es converteix en el *b*.

4) Resulta significatiu que, a mesura que la resposta correcta implica que l'alumne hagi d'establir més relacions entre els seus objectes mentals, més baix és el percentatge de respostes correctes.

Quarta pregunta

Apartat *a*

- 5 (13%) alumnes (Jessica C., Raúl C., Alfonso D., Oscar T. i Maria L.V.) no expliquen com han calculat $f'(1)$ i sembla que el que fan és substituir x per 1, en la fórmula de la funció.
- 5 (13%) alumnes (Albert C., Alex A., David R., Alberto C. i Javier F.) calculen la funció derivada i substitueixen el pendent de la recta tangent per $-1/x^2$, de manera que donen com a resposta equacions que no ho són de rectes.
- Dos alumnes (5%) (Mike D. i Raquel G.) responen en blanc.
- Els altres 26 (68%) alumnes apliquen procediments correctes, malgrat que alguns d'ells cometen errors que els porten a resultats incorrectes.
- 17 (45%) d'aquests 26 alumnes fan el següent:

$$f(x) = 1/x \text{ --------->} \quad f'(x) = -1/x^2 \text{ -------->} \quad f'(1) = -1/1^2 = -1$$

Punt de tangència $(1, f(1)) = (1,1)$
Recta tangent $y = mx + n$

$$y = (-1)x + n \text{ passa pel punt } (1,1)$$
$$1 = (-1)1 + n$$
$$2 = n$$

L'equació de la recta tangent és $y = -1x + 2$

Entre aquests 17 alumnes destaca la resposta de Sergi G. , que ha calculat la funció derivada aplicant primer les regles de derivació i després els límits. La seva resposta fou la següent:

a) $f(x) = \frac{1}{X}$

$$f'(x) = -1x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$
$$f'(1) = -\frac{1}{1^2} = -1$$
$$y = ax + b. \quad (x,y) = (1,1)$$
$$y = -x + b.$$
$$1 = -1 + b$$
$$b = 2$$
$$\boxed{y = -x + 2}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$
$$\lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h}$$
$$\lim_{h \to 0} \frac{\frac{\cancel{x} - \cancel{x} + h}{x(x+h)}}{h}.$$
$$\lim_{h \to 0} \frac{-1}{x^2 + xh} = \frac{-1}{x^2}$$

- Una alumne (3%) d'aquests 26 alumnes(Angela L.) aplica aquest procediment en el punt d'abscissa x=-1, en comptes de fer-ho en el punt d'abscissa x=1.
- Una (3%) d'aquests 26 alumnes (Anna G.) segueix el procediment anterior però s'equivoca en calcular les coordenades del punt de tangència.
- 3 (8%) d'aquests 26 alumnes (Elisabeth G., Isabel G. i Jaime G.) apliquen el procediment anterior, però s'equivoquen en calcular la funció derivada.
- 3 (8%) d'aquests 26 alumnes (Rocio P., Esther E. i Pilar G.) intenten un procediment que no passa pel càlcul de la funció derivada, ja que intenten calcular directament $f'(1)$ per límits encara que cap no ho aconsegueix.
- Un (3%) alumne d'aquests 26 (David M.) aplica un procediment força original, ja que calcula aproximadament $f'(1)$ utilitzant la calculadora. La seva resposta fou:

a) $f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad x = 1$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \simeq \frac{\frac{1}{1+0'0001} - 1}{0'0001} = -0'9999$$

b) $y = ax + b$

$1 = -0'99999 \cdot 1 + b$

$b = 1'9999$

$$\boxed{y = -0'9999x + 1'9999}$$

Valoracions de les respostes a l'apartat *a* de la quarta pregunta

1) Encara que sembla que 5 (13%) alumnes confonen la derivada amb la funció derivada, de fet no és ben bé així, si tenim en compte la seva resposta a l'apartat *b*. Només un alumne (3%) (Raúl C) confon en els dos apartats la funció amb la funció derivada.

2) 5 (13%) alumnes confonen la derivada en un punt amb la funció derivada.

3) 26 (68%) alumnes saben aplicar el procediment per a calcular l'equació de la recta tangent

4) 19 (50%) alumnes (si comptabilitzem com a resposta correcta la d'Angela L. i la de David M), apliquen el procediment sense cometre cap error, mentre que 7 d'ells (18%) comet errors del tipus següent: 1) càlcul erroni de la funció derivada, 2) errors en el càlcul del punt de tangència i 3) errors de simplificació en el càlcul de $f'(1)$ per límits.

5) Destaca per la seva originalitat la resposta de David M.

Apartat *b*

- Un (3%) alumne (Raúl C.) confon la derivada amb la funció.
- 9 (24%) alumnes (Alex A., David R., Alberto C. i Javier F., Elisabeth G., Maria L.V., Oscar T., Alfonso D. i Laura N.) calculen la funció derivada i substitueixen el pendent de la recta tangent per cos *x*, de manera que donen com a resposta equacions que no ho són de rectes. Destaca que Laura N. ha respost correctament l'apartat *a*, i sembla que el seu problema és que no sap treballar amb la funció cos *x* més que no pas una confusió entre funció derivada i derivada en un punt.
- Tres alumnes (8%) (Mike D., Albert C. i Rocio P.) responen en blanc.
- Els altres 25 (66%) alumnes apliquen procediments correctes, encara que alguns d'ells cometen errors que els porten a resultats incorrectes.

- 17 (45%) d'aquests 25 alumnes fan el següent:

  $f(x) = \sin x$ ---------> $f'(x) = \cos x$ --------> $f'(0) = \cos 0 = 1$
  Punt de tangència $(0, f(0)) = (0, \sin 0) = (0,0)$
  Recta tangent $y = mx + n$
  $y = (1)x + n$ passa pel punt $(0,0)$
  $0 = (1)0 + n$
  $0 = n$
  L'equació de la recta tangent és $y = x$

- 4 (11%) d'aquests 25 alumnes (Anna G., Raquel G., Raúl B., i Laura A.) segueixen el procediment anterior, però s'equivoquen en calcular les coordenades del punt de tangència.
- 3 (8%) d'aquests 25 alumnes (Elisabeth G., Isabel G. i Jaime G.) apliquen el procediment anterior, però s'equivoquen en calcular la funció derivada.
- Una d'aquests 25 alumnes (3%) (Jessica C.) segueix el procediment anterior, però s'equivoca en substituir la x per zero en la funció derivada i en calcular les coordenades del punt de tangència.
- Una altra (3%) (Judith P.) segueix el procediment anterior, però s'equivoca en resoldre l'equació $0 = (1)0 + n$.
- Un (3%) alumne d'aquests 25 (Pilar G.) aplica el mateix procediment que ha aplicat David M en l'apartat *a*, és a dir, calcula aproximadament $f'(0)$ utilitzant la calculadora., però s'equivoca en resoldre l'equació $0 = (1)0 + n$.

Valoracions de les respostes a l'apartat *b* de la quarta pregunta

1) Només un alumne (3%) (Raúl C.) confon en els dos apartats la funció amb la funció derivada.

2) 9 (24%) alumnes confonen la derivada en un punt amb la funció derivada.

3) 25 (66%) alumnes saben aplicar el procediment per a calcular l'equació de la recta tangent.

4) 17 (45%) alumnes apliquen el procediment sense cometre cap error, mentre que 8 d'ells (21%) comet errors del tipus següent: 1) errors en el càlcul del punt de tangència, errors en substituir la x per zero en la funció derivada i errors en resoldre l'equació $0 = (1)0 + n$. Destaca que cap alumne s'equivoca en el càlcul de la funció derivada.

5) Destaca per la seva originalitat la resposta de Pilar G.

6) Una de les conclusions que traiem és que l'èxit en el càlcul de la recta tangent depèn del tipus de funció. És a dir, si la pregunta es fa per a funcions de segon grau, l'èxit és força més gran que si la pregunta es fa per a funcions amb què l'alumnat està menys

familiaritzat, ja que el càlcul de la funció derivada, la substitució de la x en la funció derivada o el càlcul de les coordenades del punt de tangència poden ser causa d'error. Aquesta conclusió també es pot formular de la manera següent: si el càlcul de la recta tangent es fa per a la funció prototipus <<paràbola>> l'èxit es força superior que si es fa per a funcions no prototipus.

Quinta pregunta

Aquesta pregunta no era esperada pels alumnes i de fet fou considerada per ells com una ruptura de contracte. Les respostes són molt variades , per la qual cosa les hem classificat en molt poc estructurades, poc estructurades, estructurades, ben estructurades i molt ben estructurades

Respostes	Molt Poc Est	Poc Est	Estruct.	B. Estruct.	M. B Estruct	Blanc
Alumnes	11 (29%)	8 (21%)	6 (16%)	4(11%)	7(18%)	2 (5%)

Valoracions de les respostes a la quinta pregunta

Destaca que aproximadament la meitat de la classe va poder fer un esquema amb una certa estructura i coherència. A continuació segueixen les fotocòpies de 5 alumnes per il·lustrar la seqüència que va des d'un esquema molt mal estructurat fins a un de molt ben estructurat.

$f(a) \Rightarrow$ derivada en un punt

$tg\,\alpha \Rightarrow$ derivada en un punt

$tm = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \Rightarrow$ taxa mitjana de variació, serveix per encontrar la derivada en un punt

Cálcul de la derivada gràficament; apartir d'un gràfic.

Calcul de la derivada en un gràfic per tal de sapiguer la recta tangent = m = derivada.

exemple. recta tangent $= m = \dfrac{\text{desplaçament vertical}}{\text{desplaçament horitzontal}}$

Calcul de la derivada en un punt per la calculadora.

$\dfrac{0 \cdot x^3 + 3x^2 \cdot 1}{(x^3)^2} = \dfrac{3x^2}{(x^3)^2}$

Calcul de la funció derivada per límits

$\lim_{h \to 0} \dfrac{(a+h) - (a)}{h}$

calcul de ~~la~~ instantanea $d(t)$, o sigui de la funció derivada.

$\lim_{t \to t_0} \dfrac{d(t) - d(t_0)}{t - t_0}$

calcul de la funció derivada $f'(x)$.

Per tot tipus de funció.

soma, resta, multiplicació i divisió.

~~Derivada~~

calcul de la funció derivada

$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$

$f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x}$

$f(x) = \log_a x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{\log_a e}{x}$

$f(x) = \sin x \Rightarrow f'(x) = \cos x$

$f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\sin x$

$f(x) = tg\,x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

$f(x) = cotg\,x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{-1}{\sin^2 x}$

5) $f'(a)$

- Fent el $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$
- Fent el límit amb h prou petita.
- Calculant el pendent en un punt de la ~~gràfica~~ recta.

$f'(x)$

- Amb el límit $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$
- Amb els graficadors.
- Amb les ~~propietats~~ regles de derivació, aplicades a l'exercici nº 2.

5)

Formes de buscar la derivada

- Fent el límit $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$
- Gràficament, calculant el pendent de la recta tg
- Amb la calculadora, $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \simeq \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ (amb h prou petita)
- Trobant la funció derivada

com trobar la funció derivada

- Fent el límit $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ amb la $a = x$
- aplicant les regles de derivació
- Analitzant la funció.

Víctor G.

5.

COM ES CALCULA LA DERIVADA $f'(a)$

DIRECTES

1- Utilitzant límits.

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

2- Geomètricament. La derivada és pendent de la recta tangent

$$\text{Pendent} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(a)$$

3- Aproximadament amb la calculadora. Quan és molt difícil calcular-la

$$f'(a) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

· Amb h prou petita

INDIRECTES

4- Trobar la funció derivada

- Substituir x per a en la funció

COM ES CALCULA LA FUNCIÓ DERIVADA $f'(x)$

1- Utilitzant límits

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

trobar funció derivada en un punt $x=a$

2- Regles de derivació

3- Aprox. amb la calculadora. Quan és molt difícil calcular-la

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Amb $h \to$ prou petita.

4- Si tenim la fórmula d'una funció, dibuixem aquesta funció, y després per taules podem trobar y dibuixar la funció derivada

Com es calcula $f'(a)$?

1) Calculant la fórmula:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

2) Gràficament calculant el pendent de la recta tangent = derivada

3) Amb la calculadora:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \simeq \frac{f(a+h) - f(a)}{h \text{ (amb } h \text{ molt petit)}}$$

4) Buscant la funció derivada i substituir x per a

Com es calcula la funció derivada $f'(x)$?

1) Calculant la fórmula.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

2) Regles de derivació

3) Observant les característiques de les rectes tangents

4) Amb els graficadors:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h \text{ (amb } h \text{ molt petit)}}$$

Sessió del 13-2-98

Incidències: Aquesta sessió que en principi era una hora *B* amb mig grup s'ha convertit en una hora *A* amb tot el grup ja que recuperem l'hora *B* de la setmana anterior, que no vam fer classe.

Planificació de la sessió

L'objectiu d'aquesta sessió és corregir, repartir i comentar l'examen del 12-2-98.

Desenvolupament de la sessió

Faltes: Com que els alumnes sabien que avui repartiria els exàmens no en falta cap.

P: Reparteixo els exàmens i dic que a continuació comentaré les respostes a les preguntes de l'examen i que després facin les preguntes i reclamacions que considerin oportunes.

Primera pregunta

P: Començo comentant que a la primera pregunta de l'examen ens donen la informació següent: la funció $f(x) = -\frac{1}{x}$ compleix la següent propietat: la longitud de la subtangent en un punt coincideix amb el valor absolut de l'abscissa del punt. Continuo fent-los observar que s'havia d'aplicar la interpretació geomètrica de la derivada, utilitzant que la variació horitzontal és el valor absolut de l'abscissa. En l'apartat *a,* un havia d'adonar-se que l'ordenada és negativa i que cal considerar el seu valor absolut. És a dir, havia de fer el següent:

$$f'(a) = \text{pendent de la recta tangent} = \frac{\frac{1}{a}}{a} = \frac{1}{a^2}$$

A l'apartat *b* s'havia de considerar que la variació horitzontal era el valor absolut de l'abscissa i, tal com se suggeria a l'enunciat del problema, s'havia de considerar que la variació horitzontal era *-a*. És a dir, havia de fer el següent:

$$f'(a) = \text{pendent de la recta tangent} = \frac{-\frac{1}{a}}{-a} = \frac{1}{a^2}$$

I s'havia d'observar que obtenia el mateix resultat que a l'apartat anterior. Per últim, per contestar l'apartat *c*, un s'havia d'adonar que els resultats dels dos apartats anteriors informaven que per a qualsevol valor de a, $f'(a) = 1/a^2$, i que això és el mateix que dir que la funció derivada és $f'(x) = 1/x^2$.

Seguidament comento que probablement aquesta era la pregunta més difícil de l'examen, entre d'altres coses perquè s'havia de resoldre correctament el problema del signe i els faig observar que a la classe s'havien fet problemes d'aquest tipus. A continuació dic que un 20% aproximadament han contestat correctament i, si considerem com a acceptables les respostes que només tenen un error de signe, un 40% ha donat una resposta acceptable. Per últim, dic que la puntuació d'aquesta pregunta era 1,25 punts.

A: Hi ha diferents intervencions comentant que era una pregunta molt difícil.

Quinta pregunta

En relació a la cinquena pregunta, comento que el seu objectiu era esbrinar la capacitat que tenien per relacionar els procediments per a calcular la derivada en un punt i la funció derivada, que s'havien anat treballant a classe. Els recordo que jo havia anat fent esquemes al llarg de les classes i que, just abans de l'examen, n'havia fet un a la pissarra que relacionava els procediments per a calcular la derivada en un punt i la funció derivada. Dic que no l'escriuré a la pissarra perquè ja el tenen en el seu quadern. La puntuació era 1,25 punts, però jo, en funció de la riquesa de connexions, bona estructuració, etc. he puntuat 0, 0,25, 0,5, 0,75 , 1 i 1,25. Remarco que en aquesta pregunta la qüestió no és només si l'esquema està bé o malament, sinó també si és ric o pobre en connexions i estructuració. També comento que, en general, els alumnes que fan un bon esquema són els que tenen un millor domini del tema i, per tant, són els que tenen més capacitat per resoldre els problemes de l'examen. I, en general, un alumne que no pot fer un esquema mínimament coherent, segurament és perquè no té el tema ben estructurat i per tant, té més dificultat a l'hora de resoldre problemes.

A: Si bé no hi ha protestes, hi ha cares que posen de manifest que era una pregunta no esperada.

Segona pregunta

P: Poso a la pissarra les funcions derivades i comento les regles de derivació que s'han d'aplicar en cada apartat. Dic que la puntuació total és 3,5 punts i comento la puntuació de cada apartat, remarcant que la derivada està bé o malament, encara que l'error sigui molt <<petit>>. A continuació dic que encara hi ha alumnes que consideren que la derivada d'un producte és el producte de derivades o que la derivada d'una divisió és la divisió de derivades.

Preguntà 3

P: Comento i escric a la pissarra el següent:
$f(x) = 3x^2+x+3$ -------> $f'(x) = 6x+1$
$25 = 6x+1$; $25 - 1 = 6x$; $24/6 = x$; $4 = x$
També dic que la puntuació és de 0,5 punts.

Apartat *b* de la tercera pregunta

P: Comento i escric a la pissarra el següent:

$f(x) = 3x^2+x+3$ -------> $f'(x) = 6x+1$

$7 = 6x+1$; $7 - 1 = 6x$; $6/6 = x$; $1 = x$

Remarco que dir que el pendent de la recta tangent és 7 és el mateix que dir que la derivada en aquest punt és 7. La puntuació és de 0,5 punts.

Apartat *c* de la tercera pregunta

P: Comento i escric a la pissarra el següent:

$f(x) = 3x^2+x+3$ -------> $f'(x) = 6x+1$

$19 = 6x+1$; $19 - 1 = 6x$; $18/6 = x$; $3 = x$

Remarco que dues rectes paral·leles tenen el mateix pendent i que en aquest apartat ens estan informant que el pendent de la recta tangent és 19, i que això és el mateix que dir que la derivada en aquest punt és 19. També dic que un dels errors que he observat consisteix a considerar que la x és 19. La puntuació és d'1 punt.

Pregunta 4

Apartat a

P: Comento i escric a la pissarra el següent:

$f(x) = 1/x$ ---------> $f'(x) = -1/x^2$ --------> $f'(1) = -1/1^2 = -1$

Punt de tangència $(1, f(1)) = (1,1)$

Recta tangent $y = ax + b$

$y = (-1)x + b$ passa pel punt $(1,1)$

$1 = (-1)1 + b$

$2 = b$

Seguidament dic que la funció $f(x) = 1/x$ és la del primer problema, amb el signe canviat. Els faig observar que una reflexió sobre l'eix d'abscisses de la gràfica de la funció del primer problema permet trobar-ne la gràfica de la funció, i que la recta tangent la podien deduir de la recta tangent en el punt $x = -1$, que tenien dibuixada en la gràfica del primer problema.

Seguidament dic que aquest era el millor mètode per contestar la pregunta malgrat que n'hi ha d'altres. A continuació felicito a David M. per la manera en què ha resolt el problema, malgrat que dic que no és la millor, perquè només obté un valor aproximat. Remarco que amb la seva resposta demostra tenir recursos i explico a la resta de la classe el que ha fet David. Dic que crec que David M. no va saber derivar la funció $f(x) = 1/x$

A: David M. diu que efectivament no sabia derivar aquesta funció.

P: Comento que la qüestió és com puc trobar $f'(1)$ si no sé fer la derivada de $f(x) = 1/x$ i dic que la resposta està en l'esquema de la pregunta 5, ja que basta considerar que

$$\frac{\frac{1}{1+0{,}0001}-\frac{1}{1}}{0{,}0001} \approx \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{1+h}-\frac{1}{1}}{h} = f'(1)$$

i calcular la fracció de l'esquerra amb la calculadora.

També li faig observar a David M. que si hagués treballat amb una o dues xifres decimals i hagués arrodonit hauria obtingut el resultat exacte, o sigui -1.

A continuació dic que els errors que he observat són: 1) errors en calcular les coordenades del punt de tangència i 2) errors en calcular la funció derivada i que la puntuació era d'un punt.

Apartat b

P: Comento i escric a la pissarra el següent:

$f(x) = \sin x$ ---------> $f'(x) = \cos x$ --------> $f'(0) = \cos 0 = 1$
Punt de tangència $(0, f(0)) = (0, \sin 0) = (0,0)$
Recta tangent $y = ax + b$
$y = (1)x + b$ passa pel punt $(0,0)$
$0 = (1)0 + b$
$0 = b$
L'equació de la recta tangent és $y = x$

Seguidament dic que aquest era el millor mètode per contestar la pregunto i felicito a Pilar G. , de la qual dic que va aplicar el mateix procediment que David M. en l'apartat *a*; és a dir, va calcular aproximadament $f'(0)$ utilitzant la calculadora., però s'equivocà en resoldre l'equació $0 = (1)0 + b$.

Per últim comento que una de les conclusions que he tret d'aquest examen és que l'èxit en el càlcul de la recta tangent depèn del tipus de funció. És a dir, si la pregunta es fa per a funcions de segon grau, l'èxit és força més gran que si la pregunta es fa per a funcions amb les quals estan menys familiaritzats, ja que el càlcul de la funció derivada, la substitució de la x en la funció derivada o el càlcul de les coordenades del punt de tangència poden ser causa d'error.

Per últim comento que la puntuació era d'un punt.

A: Els alumnes reclamen la meva atenció particular per comentar-me determinats aspectes dels seus exàmens.

P: Toca el timbre i acaba la classe.

5.3 FASE III. Després de la implementació de la unitat

Després de la implementació de la unitat els alumnes van treballar dues unitats més relacionades amb les derivades: 1) Derivades i 2) Aplicacions de les derivades a la representació de funcions i als problemes d'optimització. L'última activitat que comentem en aquesta investigació es va fer quan estàvem començant la unitat d'aplicacions de les derivades, per la qual cosa aquí ens limitarem a comentar una mica la unitat <<derivades>> que vam implementar a continuació de la unitat <<Introducció a les derivades>>.

OBJECTIUS

1. Conèixer i aplicar la regla de la cadena al càlcul de la funció derivada de la funció composta.
2. Conèixer i aplicar la derivació logarítmica.
3. Calcular la funció derivada de les inverses de les funcions trigonomètriques.
4. Reconèixer la relació entre la gràfica d'una funció i la gràfica de la seva derivada.
5. Calcular les derivades successives d'una funció.

CONTINGUTS

Conceptes

1. Derivada de la composició de funcions
2. Derivació logarítmica.
3. Derivada de la funció $f(x) = x^k$.
4. Derivada de la funció inversa.
5. Derivades de les inverses de les funcions trigonomètriques.
6. Derivades successives d'una funció.

Procediments

1. Càlcul de la funció derivada d'una funció composta utilitzant la regla de la cadena.
2. Càlcul de la funció derivada utilitzant la derivació logarítmica.
3. Càlcul de la funció derivada de les funcions $f(x) = x^k$ amb k un nombre qualsevol.
4. Càlcul de la derivada de la funció inversa.
5. Càlcul de les derivades de les funcions inverses de les trigonomètriques.
6. Càlcul de les derivades successives d'una funció.
7. Aplicació de la relació entre la gràfica d'una funció i la gràfica de la seva derivada.

Valors, normes i actituds

1 Constatació que vivim en un món caracteritzat per canvis continus on el concepte de derivada és molt present.
2 Interès per les possibilitats que ofereixen l'ordinador i la calculadora per al càlcul de derivades en un punt i de funcions derivades.

Vam començar amb l'observació que si bé els resultats de la unitat <<Introducció a les derivades permetien trobar la funció derivada d'algunes funcions elementals i de les que resulten de fer operacions aritmètiques amb elles: suma, resta, producte i divisió, resulta que les funcions serveixen per descriure situacions força diverses, i que en molts casos la funció que descriu la situació és el resultat de fer la composició de dues funcions. I que per tant cal, saber trobar la funció derivada de la composició de dues funcions.

Seguidament l'alumnat va treballar la regla de la cadena i el mètode de la derivació logarítmica a partir d'exemples. Després vam utilitzar la derivació logarítmica per demostrar que la fórmula que permet trobar la funció derivada de les funcions $f(x) = x^n$ amb n un nombre natural continua sent vàlida quan l'exponent és un nombre real.

A continuació vam recordar el concepte de funció inversa ja treballat amb fer la derivada de les funcions exponencials i logarítmiques per passar després a treballar el procediment que s'ha de seguir per trobar la gràfica i la fórmula de la funció inversa de funcions molt senzilles com la funció $f(x) = x^3$. Aquest procediment s'explicà sense insistir en els conceptes de funció injectiva, exhaustiva i bijectiva.

Després l'alumnat va comprovar amb exemples senzills que la composició de dues funcions inverses és la funció identitat. A continuació va aplicar la regla de la cadena a la composició de dues funcions inverses. i va obtenir l'expressió

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

la qual permet calcular la derivada de la funció inversa a partir de conèixer la derivada de la funció. També es va treballar que el resultat anterior aplicat a la funció $f^{-1}(x)$, que té per inversa la funció $f(x)$, porta a l'expressió següent:

$$f'(x) = \frac{1}{(f^{-1})'(f(x))}$$

A aquest resultat també s'hi va arribar per raonaments geomètrics. A continuació es va utilitzar l'expressió de la derivada de la inversa per calcular, a partir de la funció $f(x) = \ln x$, la funció derivada de la seva funció inversa $f^{-1}(x) = e^x$ i comprovar que coincideix amb l'expressió de la derivada que ja havien treballat en la unitat <<Introducció a la derivada>>. El mateix es va fer a partir de la funció $f(x) = \log_a x$

Posteriorment es van introduir les inverses de les trigonomètriques i es van calcular les seves derivades. El primer que es va fer fou donar la definició de la funció inversa de la funció sinus: l'arc sinus. Després l'alumnat va buscar les imatges d'alguns valors per la funció arc sinus.

A continuació va seguir una explicació de com trobar la gràfica d'aquesta funció fent la simetria de la gràfica de la funció sinus respecte de la bisectriu del primer quadrant, la recta $y = x$ i fent les restriccions necessàries perquè a cada valor de l'abscissa li correspongui una sola imatge. A continuació vam explicar que per trobar la derivada de la funció arc sinus només cal considerar que $f(x) = \text{arc sin } x$ i que $f^{-1}(x) = \sin x$ i aplicar que $f'(x) = \dfrac{1}{(f^{-1})'(f(x))}$. D'aquesta manera vam obtenir que la derivada del arc sinus és $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

Seguidament vam fer un procés anàleg per arribar a calcular la derivada de la funció inversa de la funció cosinus així com per a trobar la derivada de la inversa de la funció tangent i la derivada de la inversa de la funció cotangent.

En les activitats dissenyades per a definir les inverses de les trigonomètriques i per a calcular les seves derivades vam treballar amb una mica de detall les gràfiques de les funcions tangent i cotangent i vam passar més ràpid per sobre de les gràfiques sinus i cosinus perquè aquestes últimes eren força conegudes pels alumnes. El fet de treballar amb detall les gràfiques de la tangent i la cotangent va venir determinat pels baixos resultats obtinguts en el seu reconeixement en el qüestionari 2.

Amb les inverses de les funcions trigonomètriques vam completar la taula de derivades de les funcions elementals. Seguidament vam reprendre la relació que hi ha entre la gràfica d'una funció i la de la seva funció derivada remarcant que els valors de la derivada ens donen informació sobre el pendent de les rectes tangents a la funció. També vam remarcar que aquest fet permet captar qualitativament la connexió entre la gràfica d'una funció i la de la seva derivada, malgrat que les dues gràfiques poden ser molt diferents, i, fins i tot, fa possible traçar la gràfica de la funció derivada (potser no del tot exacta, però suficient per a copsar-ne els trets generals) a partir de la gràfica de la funció donada, tot observant els pendents de les rectes tangents.

Posteriorment vam fer activitats en les que es tractava de relacionar la gràfica d'una funció amb la gràfica de la seva derivada i activitats en les que l'alumnat havia de fer un esbós de la gràfica de la derivada a partir de la gràfica de la funció. Per últim vam definir el concepte de derivada segona, tercera, quarta, etc.

Mentre estàvem fent la implementació d'aquesta unitat vam passar el qüestionari 9 i vam fer l'examen de recuperació de la unitat <<Introducció a les derivades>> . Per últim quan ja havíem començat la unitat següent vam passar el qüestionari 10 amb el que vam decidir acabar la nostra investigació.

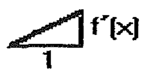
5.3.1. Subseqüència 10 d'avaluació (qüestionari 9)

Una de les idees que ens va aportar la història del càlcul diferencial fou la recuperació de la construcció geomètrica de la tangent. La transposició didàctica l'hem concretada en seqüències d'activitats en què a l'alumne se li presenta la gràfica de la funció, la fórmula de la funció i un procediment per dibuixar la recta tangent. La simbolització dels passos del procediment porta a establir una equació que relaciona la derivada, l'ordenada i l'abscissa (una espècie d'equació diferencial en la que només $f'(x)$ és desconeguda) que permet calcular $f'(x)$ sense necessitat d'utilitzar el càlcul integral.

La utilització de procediments per a construir rectes tangents ja fou utilitzat per l'alumne en els qüestionaris 7 i 8. El procediment de construcció geomètrica es pot entendre com una condició que compleixen totes les rectes tangents. L'anàlisi d'aquesta condició juntament amb la fórmula de la funció permet trobar la funció derivada d'acord amb l'esquema següent:

Gràfica de $f(x)$/Expressió analítica de $f(x)$ $\Rightarrow$ Expressió simbòlica de $f'(x)$

Amb aquest esquema volem simbolitzar que el punt de partida de les accions dels alumnes (aplicar el procediment) és la gràfica de la funció. L'expressió analítica de $f(x)$ és necessària en la majoria dels casos per deduir l'expressió analítica de $f'(x)$ a partir de la simbolització de la condició que compleixen tots els pendents de les rectes tangents.

Per trobar la funció derivada de la funció arc tangent vam dissenyar el següent qüestionari inspirat en la idea següent: la derivada de la funció arctangent és $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ d'on es dedueix que aquesta funció és solució de la següent equació diferencial: $f'(x)+f'(x)x^2=1$ o $\dfrac{f'(x)}{1}=\dfrac{1}{1+x^2}$. Aquesta equació ens assegura que el triangle 

és semblant a un triangle de base $1 + x^2$ i altura 1. Per tant, per trobar un procediment per a dibuixar la recta tangent basta poder dibuixar un segment de longitud $1 + x^2$, la qual cosa es pot fer a partir de l'abscissa utilitzant el teorema de l'altura.

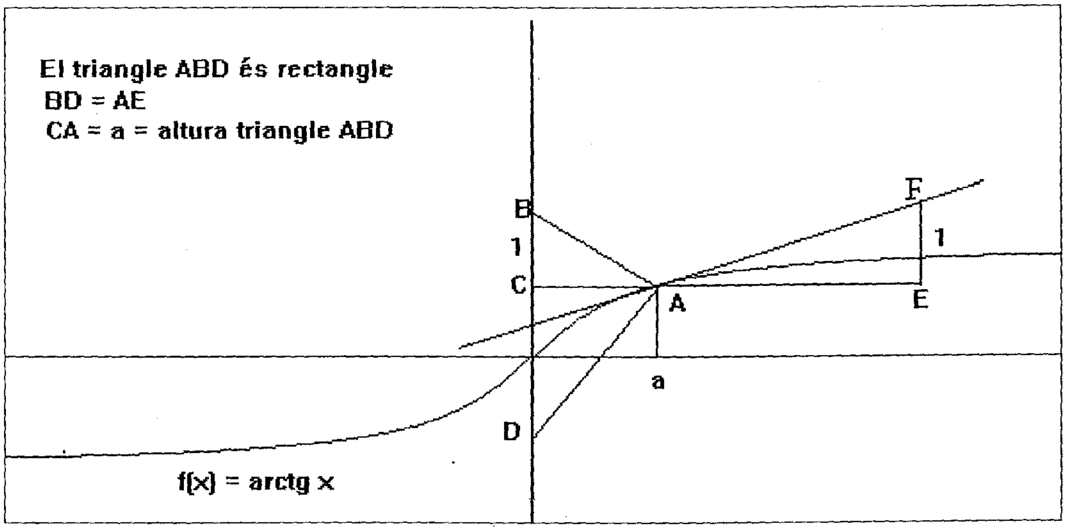
QÜESTIONARI 9

A continuació tens un procediment que permet dibuixar la recta tangent a la funció $f(x) = \text{arctg}\ x$ en qualsevol punt.

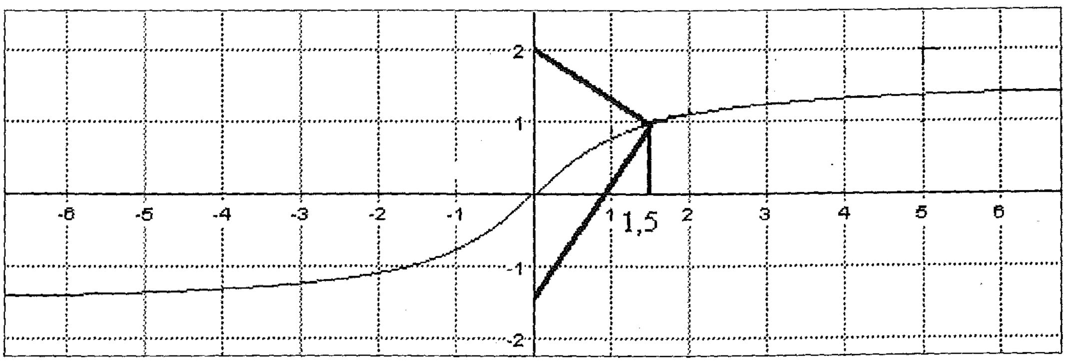
Procediment

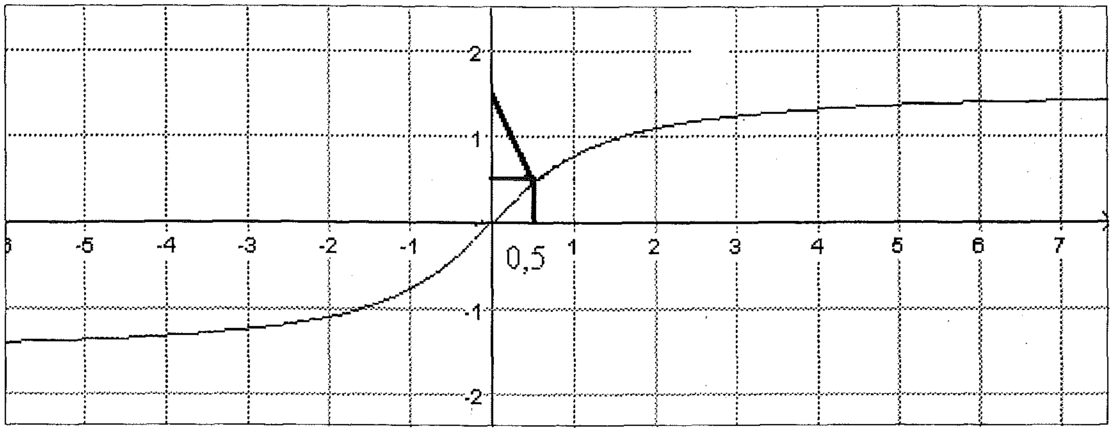
Per dibuixar la recta tangent a la funció $f(x) = \text{arctg}\ x$ en el punt A d'abscissa $x = a$ s'han de seguir els passos següents:

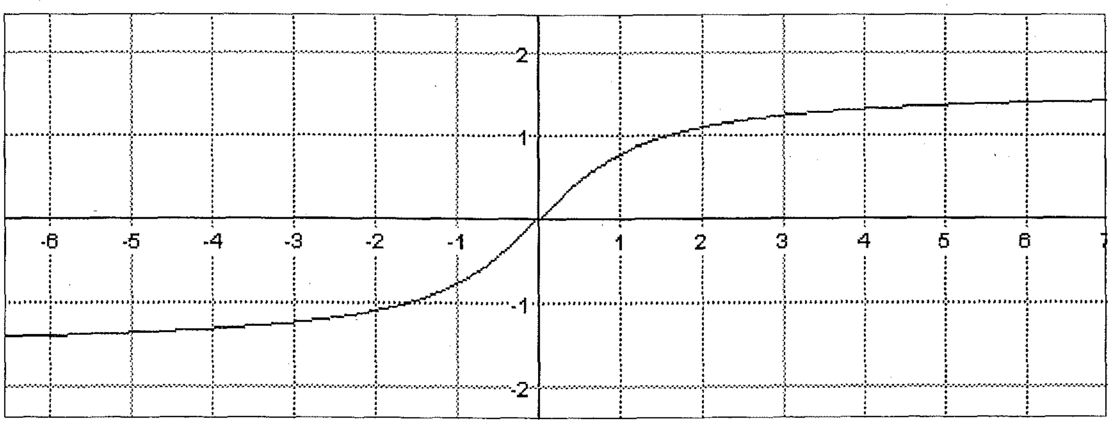
1 Sobre l'eix d'ordenades dibuixar el segment CB de longitud 1
2 Dibuixar el segment BA
3 Dibuixar la recta perpendicular al segment BA que passa pel punt A
4 Determinar el punt D on la recta anterior talla a l'eix d'ordenades
5 Dibuixar un segment AE de longitud igual al segment BD
6 Dibuixar el segment EF de longitud 1
7 Dibuixar la recta que passa per A i F



1 Completa el procediment i dibuixa la recta tangent en $x = 1,5$, $x = 0,5$ i $x = 1$







2 a) Utilitzant que el triangle BDA és rectangle en A i el teorema de l'altura demostra que $CD = a^2$

b) Demostra que $AE = 1 + a^2$

c) Demostra que $$f'(a)=\frac{1}{1+a^2}$$

d) Demostra que la derivada de la funció $f(x) = \text{arctg}\, x$ és $$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

Aquest qüestionari es va passar a mig grup el divendres 27-2-98 i a l'altra mig grup el divendres 6-3-98.

Sessió 27-2-98

Planificació prèvia.

1) Passar el qüestionari 9 sobre el càlcul de la funció derivada de la funció $f(x)$ = arctg x

2) utilitzar la 2a part de la classe per comentar els resultats del qüestionari.

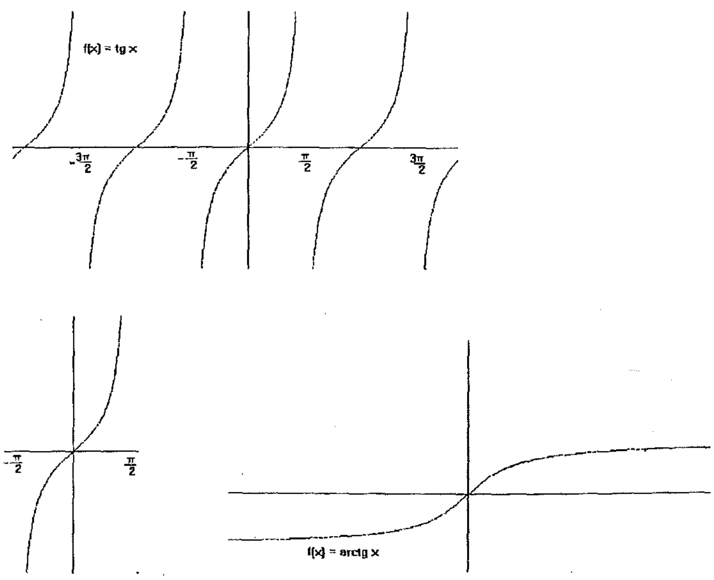
Desenvolupament de la sessió.

Faltes: Toni G, Jordi L, Elisabeth G i Judith P.

P: Distribueixo els 15 alumnes perquè facin el qüestionari 9 en grups de dos (Angela L es posa a treballar sola) i comento que poden consultar amb els grups del voltant. Abans que els alumnes comencin a respondre el qüestionari faig les observacions següents:

1) Recordo que en les hores A ja hem trobat que la funció derivada de la funció arctangent és $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ i que amb aquest qüestionari es tracta d'arribar a aquest resultat per un altre camí.

2) Recordo que la gràfica de la funció arctangent s'obté a partir de la funció tangent de la manera següent:



Fent-los observar que el tros de gràfica de la tangent que agafem té per domini l'interval $(-\pi/2, \pi/2)$ i per recorregut $\mathbb{R}$. També els faig observar que si girem aquest tros de gràfica 90° cap girem el foli i mirem al transparent obtenim la gràfica de la funció arctangent que té per domini $\mathbb{R}$ i per recorregut l'interval $(-\pi/2, \pi/2)$.

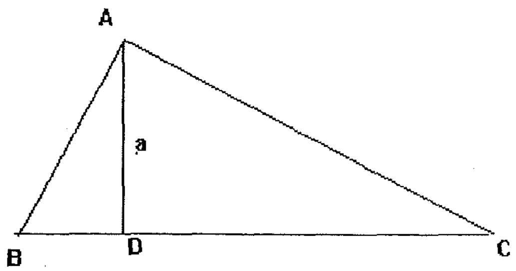
3) A continuació dic que el que farem avui és buscar la derivada de la funció arc tangent a partir d'un procediment que permet calcular la recta tangent a la gràfica de la funció en un punt qualsevol. Seguidament explico dues vegades a la pissarra amb molta cura els passos del procediment del qüestionari A continuació comento que en les tres figures de l'apartat 1 del qüestionari tenen dibuixats diferents passos del procediment i els hi dic que han de completar els que falten.

A: Es posen a completar els passos que falten i ho fan sense gaire dificultat, encara que alguns em fan repetir-los l'explicació sobre els passos del procediment i d'altres ho pregunten als grups del voltant.

P: Pregunto quina recta han obtingut.

A: Responen que la recta tangent.

P: A continuació dic que si es fa una anàlisi d'aquest procediment en profunditat és possible trobar la derivada de la funció arc tangent. També dic que per a contestar la pregunta 2 han d'utilitzar el teorema de l'altura i els hi recordo aquest teorema: el quadrat de l'altura sobre la hipotenusa és igual al producte de les projeccions dels catets sobre la hipotenusa



$AD^2 = BD \cdot DC$

Seguidament dic que intentin contestar la pregunta 2.

A: Es posen a treballar per a contestar la pregunta 2. Alguns d'ells em fan repetir el comentari que he fet sobre el teorema de l'altura i em pregunten que els confirmi que l'apliquen correctament.

P: Observo que quasi tots els grups van contestant per si sols el qüestionari, encara que n'hi ha alguns que han de preguntar als grups del voltant.

A: Toca el timbre i no tinc temps de comentar el qüestionari. Alguns alumnes triguin encara uns minuts en lliurar-me el qüestionari.

Sessió 6-3-98

Planificació prèvia

1) Passar el qüestionari 9 sobre el càlcul de la funció derivada de la funció $f(x)$ = arctg x

2) Utilitzar la 2a part de la classe per comentar els resultats del qüestionari.

Desenvolupament de la sessió del dia 6-3-98

Faltes: Avui falten molts alumnes perquè una part dels alumnes han fet una sortida amb una assignatura d'EATP. Els alumnes que falten són: Jordi A., Alex A., Victor B., Alberto C., Raúl C., Mike D., Alfonso D., Esther E., Patricia F., Raquel G.

Distribueixo els 11 alumnes perquè facin el qüestionari en grups de dos i un de tres i la sessió transcorre en termes molt semblants als de la sessió del dia 27-2-98 . Tampoc tinc temps de comentar-los el qüestionari.

Valoracions

1) Tots els grups han arribat a poder contestar el qüestionari per si sols o bé amb l'ajut dels altres grups.

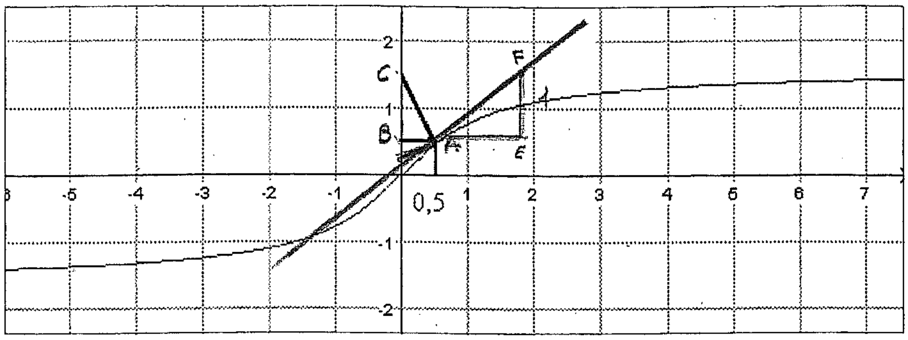
2) Les respostes al qüestionari posen de manifest que la majoria dels alumnes és capaç d'utilitzar que la derivada en un punt és el pendent de la recta tangent. És a dir, crec que com a resultat del procés d'instrucció quasi tot l'alumnat enten i sap utilitzar la interpretació geomètrica de la derivada en un punt.

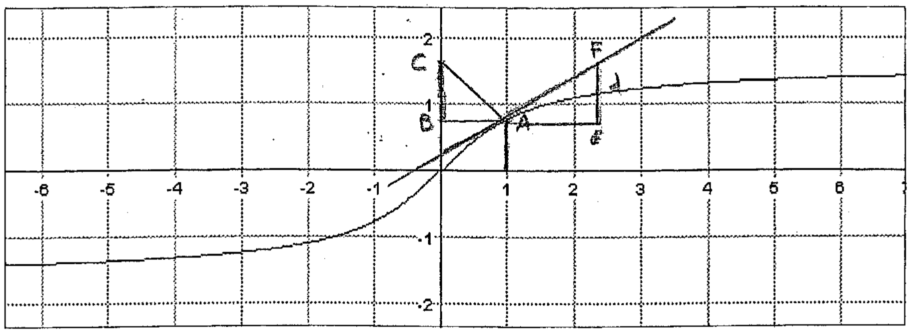
3) El càlcul de la funció derivada de la funció arc tangent a partir de considerar que $f(x)$ = arc tg x i que $f^{-1}(x) = \text{tg}\, x$ i aplicar que $f'(x) = \dfrac{1}{(f^{-1})'(f(x))}$. va ser comprés per pocs alumnes quan ho vam treballar a les hores A. En canvi, amb el qüestionari 9 , ha estat compres per quasi tots els alumnes.

4) Crec que el treball amb aquest qüestionari ha millorat el coneixement de la funció tangent i indirectament el de la funció cotangent.

5) L'èxit en la resposta dels qüestionaris augmenta molt quan aquests es poden treballar en grup, la motivació que tenen els alumnes per contestar els qüestionaris juntament amb la possibilitat de consultar els dubtes amb els companys facilita molt la comprensió i resposta de les preguntes dels qüestionaris.

A continuació segueix un exemple de les respostes al qüestionari 9 (Laura N.):





2 a) Utilitzant que el triangle *BDA* és rectangle en *A* i el teorema de l'altura demostra que $CD = a^2$

$h^2 = BC \cdot CD$ $\boxed{a^2 = CD}$

$a^2 = 1 \cdot CD$

b) Demostra que $AE = 1 + a^2$

Perque AE mide igual que BD y BC es igual a la suma de 1 (CB) + a^2 (CD).

c) Demostra que $f'(a) = \frac{1}{1+a^2}$

Perquè $f'(a)$ ho aconseguim calculant el pendent de la recta tangent ⇒ aument vertical (FE=1) partit per augment horitzontal ($AE = 1+a^2$)

d) Demostra que la derivada de la funció $f(x) = \text{arctg}\, x$ és $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

Perquè el que hem fet a l'apartat anterior serveix per a qualsevol valor y só'l hem de cambia la "a" per "x".

5.3.2. Subseqüència 11 d'avaluació Examen de recuperació

A continuació segueix el llistat de les notes obtingudes en els dos exàmens corresponents a la unitat <<Introducció a les derivades>>. La nota del primer examen va fer mitjana amb les notes de la primera avaluació, mentre que el segon examen, juntament amb el treball voluntari sobre la demostració de les regles de derivació del producte i de la divisió, eren notes de la segona avaluació

Notes dels exàmens

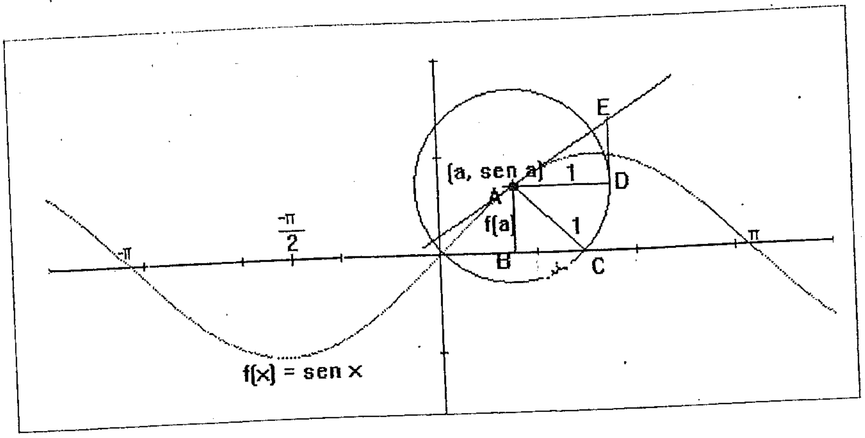
N.	Nom	Nota 1r examen	Nota 2n examen	Treball voluntari	Recuperació
1	Jordi A	8	8,25		
2	Laura A	8,5	6		
3	Alex A	7,75	7		
4	Victor B	8,5	8		
5	Raúl B	5,75	6,25		
6	Albert C	8,25	3,5		Si
7	Jessica C	7	3,5	Si	Si
8	Alberto C	9,5	5,25		
9	Raúl C	8,5	2,25		Si
10	Jordi C	9,75	7,75		
11	Mike D	6	3		Si
12	Alfonso D	8,25	6,5		
13	Sandra D	8,75	10		
14	Esther E	3,75	5,5		
15	Patricia F	9	9		
16	Javier F	7,5	5,75		
17	Raquel G	7	6,75		
18	Jaime G	8,25	7,25		
19	David G	9,25	8,5		

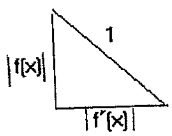
20	Pilar G	5,5	5,25		
21	Isabel G	6,5	5		
22	Sergio G	10	9,5		
23	Toni G	2,75	3		Si
24	Anna G	7,75	3,25	Si	Si
25	Elia G	-	6,75		
26	Elisabeth G	8	5		
27	Luis J G	3	-		Si
28	Ester G	- (baixa)	- (baixa)		
29	Jordi L	8,25	6,5		
30	Angela L	6,5	8,5		
31	David M	6,5	7,25		
32	Alicia M	6,25	5,75		
33	Alfonso M	8,25	8,75		
34	Laura N	8,75	8,25	Si	
35	Judith P	8,5	8,75		
36	Rocio P	6,5	3,25		Si
37	Eva P	8,75	5	Si	
38	David R	7,25	6		
39	Oscar T (Humberto R)	4,5	2,25		Si
40	Maria L V	7,25	4,75	Si	
41	Silvia V	8,75	10		

Abans de posar les notes de la segona avaluació vaig fer un examen de recuperació pels alumnes que no havien aprovat el segon examen. Només vaig alliberar de fer l'examen de recuperació a Maria L.V. que havia tret un 4,75 en el segon examen i havia presentat el treball voluntari. L'examen de recuperació fou el següent:

1 Analitzant el procediment que hem utilitzat per a dibuixar les rectes tangents a la funció sinus.

a) Explica perquè $DE = f'(a)$ i $BC = f'(a)$



b) Utilizando el triangulo 

i que $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, demostra que

$f'(x) = \pm\cos x$

c) Compara el signo de - cos x amb el creixement i decreixement de la funció sinus i explica perquè no és possible la solució $f'(x) = -\cos x$

2 Calcula la funció derivada de les funcions següents:

a) $f(x) = -3x^3 + 12x^2 + \sqrt{x}$ b) $g(x) = \dfrac{3x^3 - 3}{x}$ c) $h(x) = 5^x - 3e^x + \cos x$

d) $i(x) = \log_4 x \cdot \sqrt[5]{x^3}$ e) $j(x) = \dfrac{tg\ x}{\ln x}$ f) $k(x) = (3x^3 + \sin x) \cdot \dfrac{1}{x^3}$

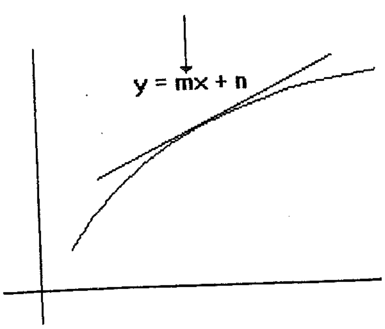
3 Donada la funció $f(x) = 3x^2 - 5$ i la recta $y = 6x + b$, troba el valor de b perquè la recta sigui tangent a la corba. Determina també el punt de tangència.

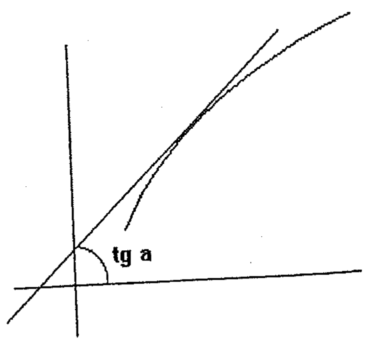
4 Troba l'equació de la tangent a la corba de la funció $f(x) = \cos x$ en el punt d'abscissa $x=\pi/2$.

5 Què pots dir de les següents expressions:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

$$\lim_{t \to t_0} \frac{d(t)-d(t_0)}{t - t_0}$$





La primera pregunta pretenia determinar si sabien aplicar el sentit geomètric de la derivada i d'altra banda també volíem saber si podien reproduir activitats treballades a classe. La segona era una pregunta en la que havien d'aplicar les regles de derivació, mentre que la tercera i la quarta pretenien esbrinar els seus coneixements sobre rectes tangents. La quinta tenia per objectiu esbrinar la seva capacitat de relacionar diferents formes de representació associades a la derivada en un punt

Sessió del 13-3-98

L'examen de recuperació es fa en l'hora B del divendres. Només falta l'alumne Luís J. G. que no assisteix a classe des d'abans del segon examen i que està a punt de donar-se de baixa

Abans de començar l'examen vaig recordar-los que la primera pregunta era un dels qüestionaris que havien treballat a classe i que feia referència a un procediment per a dibuixar la recta tangent a la funció sinus que també vaig recordar-los. En relació a la cinquena pregunta vaig dir-los que havien de fer un comentari respecte de cada una de les expressions que hi havia i també un comentari general sobre totes elles. Per últim vaig comentar que la puntuació de la primera pregunta era de 1,5 punts, la de la segona de 3 punts, la tercera i la quarta dos punts cadascuna i la cinquena 1,5 punts.

Comentaris a les respostes dels alumnes

Primera pregunta

Apartat *a*

En relació a l'apartat *a* només dues alumnes (Rocio P. i Anna G.) donen respostes correctes en les que es posa de manifest que el seu objecte personal <<derivada en un punt>> incorpora pràctiques en les que poden usar el sentit geomètric. Per exemple, la resposta de Rocio P. fou la següent:

① a) $DE = f'(a)$ i $BC = f'(a)$.

- $DE = f'(a)$.

$f'(a)$ = pendent recta tangent.

$$f'(a) = \frac{DE}{1} = DE.$$

- $BC = f'(a)$.

$BC = DE$.

$DE = f'(a)$

$BC = f'(a)$.

Apartat *b* i *c*

Només un alumne (Albert C.) sembla que recorda el que vam fer en el qüestionari 8, i, malgrat que s'equivoca en contestar l'apartat a, en els apartats *b* i *c* dóna unes respostes que es poden considerar acceptables.

És de destacar que l'alumne Oscar T. continua considerant que no és possible el resultat -cos *x* perquè el resultat d'una arrel mai pot ser negatiu.

Segona pregunta

En relació al càlcul de funcions derivades Toni G. en fa correctament 2 de 6, Rocio P. 6 de 6, Raúl C. 4 de 6, Jessica C. 5 de 6, Anna G. 6 de 6, Oscar T. 5 de 6, Mike D. 2 de 6 i Albert C. 6 de 6. Mike D. encara considera que la derivada d'una divisió és la divisió de derivades i Toni G i Mike D. que la derivada d'un producte és el producte de derivades. Els altres alumnes no s'equivoquen en les regles de derivació sinó en la derivació de les funcions elementals.

Tercera pregunta

4 alumnes contesten correctament i 3 s'equivoquen. Toni G. s'equivoca perquè confon l'abscissa amb el valor de la derivada per aquesta abscissa, Mike D. iguala la funció derivada amb l'equació de la recta tangent i Albert C. confon la fórmula de la funció amb l'equació d'una recta.

Quarta pregunta

Tots els alumnes responen malament. Tres sembla que no tenen clar el procediment per a calcular la recta tangent (Mike D., Raúl C. i Albert C.). Els altres 5 tenen clar el procediment però cometen diferents errors. Toni G. i Oscar T. s'equivoquen en calcular el punt de tangència, Anna G., Rocio P. i Jessica C. s'equivoquen quan calculen -sin $\pi/2$. L'error de Rocio P i Jessica C és causat pel fet d'útilitzar la calculadora en mode DEG.

Quinta pregunta

Les respostes a la quinta pregunta posen de manifest nivells d'integració d'objectes mentals molt diferents. En un extrem tenim la resposta de Mike D.

5

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$ ⟹ aquest es la fòrmula de la ~~funció deriva da~~ ~~funció~~ equació de la recta tangent.

$$\lim_{t \to t_0} \frac{d(t) - d(t_0)}{t - t_0}$$ ⟹ aquesta es la fòrmula per trobar un punt de la recta tangent.

la tercera expressió

$y = mx + n$

la n es la pendiente (és positiva)

i la m es el punto ~~de~~ respecto x.

la quarta expresión

és la grafica de la tangent i la recta està ~~un maxi~~ en un punt de màxima inclinació.

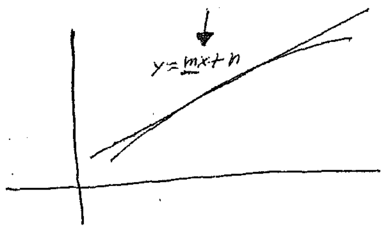
I en l'altre la d'Oscar T. que dóna la resposta següent la qual posa de manifest un alt grau d'integració d'objectes mentals.

5-
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

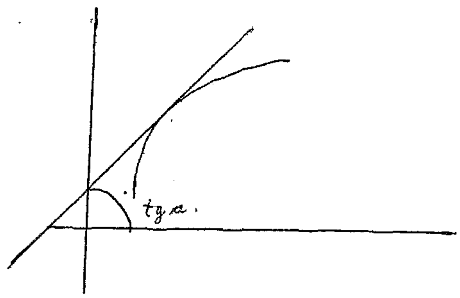
- S'utilitza per fer el càlcul de la derivada. $f'(a)$.

$$\lim_{t \to t_0} \frac{d(t)-d(t_0)}{t-t_0}$$

- S'utilitza per calcular la velocitat instantània.



m és el pendent de la recta tangent. Determina la seva inclinació. És un número que multiplica la x de la ~~(funció)~~ recta a que pertany. Dona el nº d'unitats verticals per cada una horitzontal. El pendent és = tangent de l'angle. $tg\,\alpha$.



- La tangent de l'angle (de la pendent) és igual a la pendent de aquesta recta tangent que passa per la corba de la funció i la toca en un punt.

- Tots són mètodes per saber el pendent d'una recta tangent. 1 - La derivada és igual al pendent de la recta tangent, m és = al pendent etc.

Valoració

Només hi ha tres alumnes dels 40 que han participat en aquesta investigació que són irrecuperables i ho són bàsicament per les seves absències a classe, les quals fan que tinguin dificultats causades bàsicament per la manca dels coneixements que han deixat d'assolir. Dos d'aquests alumnes, Toni G. i Mike D. amb una assistència a classe normal podrien assolir els continguts mínims de la unitat L'altra, Luís J. G., que darrerament quasi mai assisteix a classe, crec que no els pot assolir.

Hi ha un grup d'alumnes format per Jessica C., Raúl C., Esther E., Javier F., Pilar G., Isabel G., Anna G., Oscar T. i Maria L.V. que tenen dificultats en determinats continguts però que de les seves produccions es pot inferir que han assolit els més bàsics, almenys parcialment.

D'altra banda hi ha un grup d'alumnes format sobretot pels repetidors Alex A., Jordi L., Angela L. i Alberto C. que si haguessin estat més motivats haurien obtinguts resultats més brillants, però han fet el mínim esforç possible.

Per últim cal destacar que hi ha hagut un grup d'alumnes que ha tret molt de rendiment del seu treball i algunes de les seves respostes han estat força brillants. Aquests alumnes són: Victor B., Sandra D., Patricia F., David G., Jaime G., Sergio G., Elia G., Alfonso M., Laura N., Judit P. i Silvia V.

La resta dels alumnes ha obtingut un rendiment regular.

5.2.35. Subseqüència 12 d'avaluació. Qüestionari 10

Les hipòtesis H1, H1.1 i H1.1.1 d'aquesta investigació donen molta importància a les traduccions entre les diferents representacions associades a una funció i a la seva funció derivada. És evident que un bon coneixement de les diferents formes ostensives de representar les funcions elementals i la capacitat de passar d'una a l'altra és un substrat que facilita la comprensió de la unitat <<Introducció a les derivades>>.

Els resultats del qüestionari 2 posaven de manifest que els alumnes del 3A abans de la implementació de la unitat tenien uns objectes mentals <<funcions elementals>> el significat dels quals es manifestava en pràctiques molt limitades a l'hora de passar de gràfiques a expressions simbòliques, per la qual cosa havien de tenir <<a priori>> més dificultats per seguir la unitat que d'altres alumnes amb un major domini de les funcions elementals. D'altra banda, com que en la unitat es contemplava l'ús de diferents representacions ostensives de les funcions elementals i de les seves derivades, era d'esperar que els significats dels objectes mentals <<funcions elementals>> d'aquests alumnes després de la implementació de la unitat havien d'incorporar pràctiques més riques a l'hora de passar de gràfiques a expressions simbòliques.

Per a comprovar la hipòtesi anterior vam decidir tornar a passar el qüestionari 2 com a posttest el 27-3-98. Seguidament comentarem les respostes a aquest qüestionari al que farem referència com el núm 10 i compararem les respostes amb les del qüestionari 2.

Respostes al qüestionari 10

Comentari general

A partir de les respostes al qüestionari 2 vam classificar els alumnes en tres grups: A) Els que utilitzaven bàsicament taules en les justificacions (19 alumnes), B) els que utilitzaven que les gràfiques pertanyen a una família de funcions de fórmula tipus coneguda (17 alumnes) i C) els que no es podien classificar en cap d'aquests dos grups perquè les seves explicacions no eren prou clares per poder-los assignar a un dels dos grups anteriors o bé perquè majoritàriament havien contestat en blanc (5 alumnes). L'assignació d'un alumne a un grup, per exemple el grup A, no volia dir que justifiques totes les respostes a partir de taules, sinó que majoritàriament utilitzava les taules en les seves justificacions

Dels alumnes que van contestar el qüestionari 2, Esther G. es va donar de baixa i Humberto R. es va canviar per Oscar T. Per tant, només 39 alumnes van respondre els dos qüestionaris. En tot el que direm a continuació exclourem els tres alumnes que només van contestar un qüestionari (Esther G., Humberto R. i Oscar T.). Esther G. fou classificada en el grup B i Humberto R. en el grup A, per tant els 39 alumnes que van contestar els dos qüestionaris pel que fa a la classificació del qüestionari 2 queden així:

grup A 18 alumnes
grup B 16 "
gruo C 5 "

A partir de les respostes al qüestionari 10 la classificació queda així:

grup A 2 alumnes
grup B 36 "
grup C 1 "

L'evolució cap el grup B, o sigui el grup que utilitza que les gràfiques pertanyen a una família de funcions de fórmula tipus coneguda, és quasi total. De fet, dels 18 alumnes del grup A en el qüestionari 2, 17 s'han passat al grup B en el qüestionari 10 i un (Javier F.) s'ha passat al grup C. Dels dos alumnes que encara ho justifiquen tot per taules, un (David M.) fou classificat en el grup B en el qüestionari 2 i l'altre (Jordi A.) ho fou en el grup C.

Respostes

Pregunta 1

Resp.	$f(x)=2x-1$	$f(x)=x+2$	$f(x)=x-1$
Alum.	37 (95%)	1 (3%)	1(3%)

Conclusions

1) Hem passat del 59% de respostes correctes en el qüestionari 2 al 95% en el qüestionari 10. L'alumne que ha respost $f(x)=x+2$ ha estat Mike D. (grup B) i el que ha respost $f(x)=x-1$ ha estat Javier F. (grup C).

2) Cap alumne dóna com a resposta un model de fórmula que no correspon a una recta.

3) En relació a la justificació de la resposta s'observen els procediments següents:

1 El mètode que han seguit els dos alumnes del grup A (David M. i Jordi A.): trobar la fórmula sense explicar com i després justificar que la fórmula és correcte perquè si fem una taula de valors a partir d'ella surten els punts de la gràfica.

2 identificar la gràfica com la gràfica d'una funció d'una família coneguda (les funcions afins) de la qual sabem el model de fórmula, per després trobar els paràmetres del model (o al menys un d'ells). Aquest procediment l'han seguit els 36 alumnes del grup B.

L'alumne del grup C (Javier F.) no ha donat cap justificació

Pregunta 2

Respostes	$f(x)=x^2$
Alumnes	41

Conclusions:

1) Tots els alumnes responen correctament. 8 (21%) alumnes fan una taula de valors i responen $f(x)=x^2$ sense fer cap referència què la gràfica és una paràbola. 31 alumnes (79%) fan referència explícita què la gràfica és una paràbola. En relació al qüestionari 2 destaca que el 34% que feia referència explícita que la gràfica era una paràbola ara passa a ser el 79%.

2) Sembla que en aquesta pregunta també es manifesten els dos procediments que hem comentat a la pregunta anterior. Un grup d'alumnes primer fa una taula de valors a partir de la gràfica i després troba una fórmula que compleixen aquests valors. Per aquests alumnes el reconeixement de la gràfica com la gràfica d'una funció d'una determinada família de funcions no sembla important. L'altre grup reconeix la gràfica com la de la paràbola $f(x)=x^2$ i després alguns confirmen amb una taula de valors que efectivament els punts de la gràfica són els punts (x , x^2).

Pregunta 3

Respostes	$f(x)= -3x+2$	$f(x)=-2x+2$	$f(x)=x-3$	blanc
Alumnes	36 (95%)	1	1	1

Conclusions

1) Hem passat del 54% de respostes correctes en el qüestionari 2 al 95% en el qüestionari 10. L'alumne que ha respost $f(x)=-2x+2$ ha estat Angela L. (grup B) i el que ha respost $f(x)=x-3$ ha estat Mike D. (grup B) i l'alumne que ha respost en blanc ha estat Maria L.V. (grup B).

2) Cap alumne dóna com a resposta un model de fórmula que no correspon a una recta

3) En relació a la justificació de la resposta s'observen els procediments següents:

1 El mètode que han seguit els dos alumnes del grup A (David M. i Jordi A.): trobar la fórmula sense explicar com i després justificar que la fórmula és correcte perquè si fem una taula de valors a partir d'ella surten els punts de la gràfica.

2 Identificar la gràfica com la gràfica d'una funció d'una família coneguda (les funcions afins) de la qual sabem el model de fórmula, per després trobar els paràmetres del model (o al menys un d'ells). Aquest procediment l'han seguit els 36 alumnes del grup B.

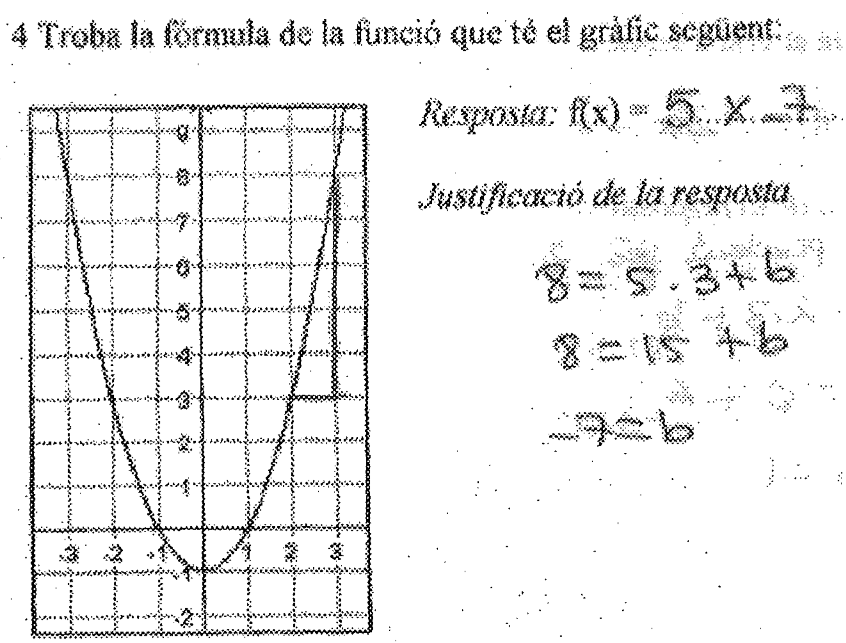
L'alumne del grup C (Javier F.) ha donat la resposta correcte sense cap justificació

Pregunta 4

Respostes	$f(x) = x^2 - 1$	$f(x) = x^2 + x - 1$	$f(x) = 5x - 7$
Alumnes	37 (95%)	1 (3%)	1 (3%)

Conclusions:

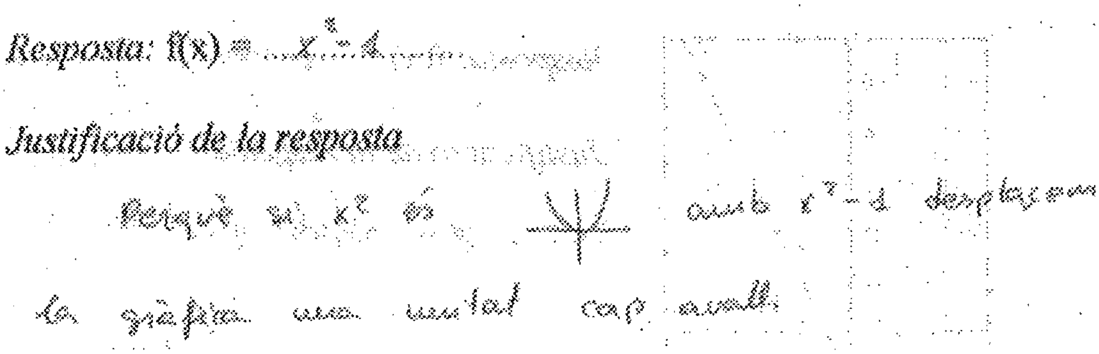
1) El 95% responen correctament. L'alumne que va respondre $f(x) = x^2 + x - 1$ fou Mike D. i no dona cap justificació de la seva resposta. Només una alumna, Laura A., (3%) dóna com a resposta un model de fórmula que no correspon a una paràbola ($f(x)$=5x-7) perquè intenta aplicar el model $y = mx + n$ a la paràbola. La seva resposta fou la següent:



2) Cal remarcar que l'alumne Alberto C. que en el qüestionari 2 va intentar el mateix que Laura A. i que, a diferència d'ella, se'n va en sortir perquè va trobar la fórmula de la paràbola utilitzant que el coeficient de x^2 és el pendent de la recta que passa pel vèrtex (p , q) i pel punt (p + 1, $f(p + 1)$) de la paràbola ara respon així: <<$f(x) = x^2 - 1$. És al quadrat perquè és una paràbola . x al quadrat menys 1>>. És a dir, abandona la seva

explicació per una altra de tipus estàndard que ha sentit a la classe.

3) Dels 37 alumnes que responen correctament, 5 alumnes (13%) fan una taula de valors i responen $f(x)=x^2$ -1 sense fer cap referència que la gràfica és una paràbola (2 són del grup A i 3 del grup B). Dos responen correctament però no donen cap tipus d'explicació (un és del grup B i l'altre és del grup C). 29 alumnes (74%) del grup B responen fent referència explícita que la gràfica és una paràbola molts d'ells fan referència explícita a les transformacions. Per exemple Alicia M. respon de la manera següent:


Resposta: f(x) = x² - 1

Justificació de la resposta

Perquè si x² és ... amb x² - 1 desplacem la gràfica una unitat cap avall.

4) En aquesta pregunta també es manifesten els dos procediments que hem comentat a les preguntes anteriors. Un grup d'alumnes primer fa una taula de valors a partir de la gràfica i després troba una fórmula que compleixen aquests valors. Per aquests alumnes el reconeixement de la gràfica com la gràfica d'una funció d'una determinada família de funcions no sembla important. L'altre grup reconeix la gràfica com la d'una paràbola la qual cosa li suggereix una fórmula amb x^2 que acaba de trobar amb una taula de valors o bé utilitzant les transformacions de funcions.

5) En relació als resultats del qüestionari 2 s'observa un percentatge similar d'èxit i un desplaçament dels alumnes des de justificacions tipus <<taula>> a justificacions en les que s'utilitza que la gràfica és una transformació de la paràbola $f(x)=x^2$.

Pregunta 5

Respostes	$f(x) = -x^2+1$	$f(x) = -x^2+x+1$	$f(x) = -5x+7$
Alumnes	37 (95%)	1 (3%)	1 (3%)

Conclusions:

1) El 95% responen correctament. L'alumne que va respondre $f(x) = -x^2+x+1$ fou Mike D. i no dona cap justificació de la seva resposta Només una alumna, Laura A., (3%) dóna com a resposta un model de fórmula que no correspon a una paràbola ($f(x)=-5x+7$) perquè intenta aplicar el model $y = mx + n$ a la paràbola.

2) Dels 37 alumnes que responen correctament, 6 alumnes (15%) fan una taula de valors i responen $f(x)= -x^2 +1$ sense fer cap referència que la gràfica és una paràbola (2 són del grup A i 4 del grup B). 4 (10%) responen correctament però no donen cap tipus d'explicació (3 són del grup B i l'altre és del grup C). 27 alumnes (69%) del grup B responen fent referència explícita que la gràfica és una paràbola i molts d'ells fan referència explícita a les transformacions.

3) En aquesta pregunta també es manifesten els dos procediments que hem comentat a les preguntes anteriors. Un grup d'alumnes primer fa una taula de valors a partir de la gràfica i després troba una fórmula que compleixen aquests valors. Per aquests alumnes el reconeixement de la gràfica com la gràfica d'una funció d'una determinada família de funcions no sembla important. L'altre grup reconeix la gràfica com la d'una paràbola la qual cosa li suggereix una fórmula amb x^2 que acaba de trobar amb una taula de valors o bé utilitzant les transformacions de funcions.

4) En relació als resultats del qüestionari 2 s'observa que les respostes correctes passen del 68% al 95% i un desplaçament dels alumnes des de justificacions tipus <<taula>> a justificacions en les que s'utilitza que la gràfica és una transformació de la paràbola $f(x)=x^2$.

Pregunta 6

Respostes	Alumnes
+ 1	2
$f(x) = 1/x$	1
$f(x) = 4x - 4$	1
$f(x) = 4/x + 1$	1
$f(x) = 2^x$	9
$f(x) = e^x$	12
$f(x) = a^x$	1
blanc	12

Conclusions:

1) Considerem molt significatiu que en relació a les respostes al qüestionari 2 el nombre d'alumnes que reconeix aquesta gràfica com la gràfica d'una funció exponencial passa del 20% al 56%.

2) 9 alumnes (23%) responen correctament. En algunes de les respostes queda molt clara la seqüència:

gràfica ------> funció del tipus $f(x) = a^x$ -------> determinació de la base

Per exemple Albert C. respon així: <<Les funcions amb aquest dibuix són del tipus a^x, en aquest cas $a = 2$>> i Jordi L. així: <<Perque qualsevol número elevat a zero és 1 *i* després fem una taula de valors i trobem que es 2 elevat a un número>>.

Mentre que en d'altres queda molt clara la seqüència:

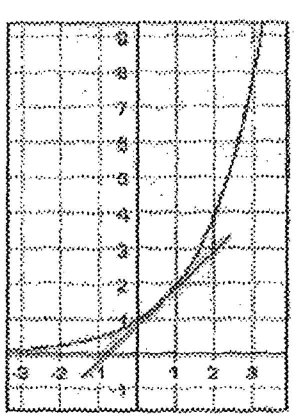
gràfica ------> taula -------------> fórmula

Per exemple Isabel G. respon així: <<He buscat les imatges i l'única fórmula que s'hem corresponia amb les imatges i la gràfica és 2^x >>.

Cal tenir en compte que si bé al llarg del procés d'ensenyament-aprenentage de la unitat han aparegut les funcions exponencials, els alumnes quasi sempre han treballat amb la funció $f(x) = e^x$ i en cap moment es va explicar un procediment per trobar la fórmula d'una funció exponencial a partir de la seva gràfica.

3) 12 (31%) reconeixen la gràfica com la de la funció $f(x) = e^x$ i un (3%) la reconeix com la gràfica d'una funció exponencial. El fet que el 31% reconegui la gràfica com la gràfica de la funció $f(x) = e^x$ es pot considerar una manifestació del funcionament per prototipus. Entre les justificacions cal destacar la de Victor B. que dibuixa la recta tangent i comprova (equivocadament) que la subtangent és 1. La seva resposta fou la següent:

6 Troba la fórmula de la funció que té el gràfic següent:



Resposta: f(x) = e^x

Justificació de la resposta:

Perque la base de la recta tangent a qualsevol punt sempre val 1.

4) L'alumna Laura A. (3%) dóna com a resposta una funció afí: $f(x) = 4x - 4$ perquè intenta aplicar el model $y = mx + n$ tal com ja va fer amb les paràboles.

5) Els dos alumnes (Raquel G. i Raúl C.) que responen +1, fan una taula i arriben a la

conclusió que el terme independent és +1 perquè la gràfica passa pel punt (0,1), és a dir són alumnes que consideren que el punt de tall amb l'eix d'ordenades determina el terme independent (sembla que estan pensant en rectes o paràboles).

6) L'alumne (Eva P) que respon $f(x) = 4/x + 1$ no dona cap tipus d'explicació mentre que el que respon $f(x) = 1/x$ (Toni G.) respon així: <<Perquè és una asímptota que és prolonga cap a l'infinit i el seu punt de tall amb l'eix de les y és 1>>.

Preguntes 7-10

Els alumnes podien utilitzar la calculadora i només tenien que reconèixer que les quatre gràfiques corresponen a les funcions trigonomètriques (sinus, cosinus, tangent i cotangent) i relacionar cada gràfica amb la fórmula corresponent.

Les respostes foren:

Funció sinus

Respostes	$f(x) = \sin x$	$f(x) = \cos x$	Blanc
Alumnes	33 (85%)	4 (10%)	2 (5%)

Función cosinus

Respostes	$f(x) = \cos x$	$f(x) = \sin x$	Blanc
Alumnes	34 (87%)	3 (8%)	2 (5%)

Funció tangent

Respostes	$f(x) = \mathrm{tg}\, x$	$f(x) = \mathrm{cotg}\, x$	Blanc
Alumnes	20 (51%)	11 (28%)	8 (21%)

Funció cotangent

Respostes	$f(x) = \mathrm{cotg}\, x$	$f(x) = \mathrm{tg}\, x$	Blanc
Alumnes	19 (49%)	10 (26%)	10 (26%

Conclusions:

1) En relació a la gràfica de la funció sinus els alumnes que han respost correctament han

utilitzat les estratègies següents:

- Escriuen la fórmula sense cap tipus d'explicació (4 alumnes (10%)).
- Diuen que és la gràfica d'una funció que coneixen, que saben de memòria, etc. (1 alumne (3%)).
- Utilitzen el signe de la funció en els diferents quadrants (1 alumne (3%)). La resposta d'aquest alumne (Javier F.) fou la següent: <<El sinus en el primer quadrant és positiu, en el segon és negatiu, en el tercer torna a ser positiu i en el quart negatiu>>.
- Fan la hipòtesi que la gràfica és la de la funció sinus o cosinus i utilitzen determinats punts de la gràfica, en especial el punt (0,0), o bé utilitzen la calculadora, per determinar a quina de les dues funcions correspon la gràfica (26 alumnes (67%)). Per exemple Raquel G. respon de la manera següent:

Resposta: f(x) = ...sin x...

Justificació de la resposta:

Aquesta gràfica és ~~dif~~ "fàcil" de confondre-la amb la del cos x. Només sabem que sin 0 = 0 i cos 0 = 1. no podem determinar fàcilment. f(x) = sin x

x	y
0	0

→ pasa pel l'eix de coordenades.

2) En relació a la gràfica de la funció cosinus els alumnes que han respost correctament han utilitzat les estratègies següents:

- Escriuen la fórmula sense cap tipus d'explicació (7 alumnes (18%)).
- Diuen que és la gràfica d'una funció que coneixen, que saben de memòria, etc. (1 alumne (3%)).
- Fan la hipòtesi que la gràfica és la de la funció sinus o cosinus i utilitzen determinats punts de la gràfica, en especial es fixen en el punt (0,1) en el cas del cosinus, o bé utilitzen la calculadora, per determinar a quina de les dues funcions correspon la gràfica. (26 alumnes (67%)).

3) Si comparem les respostes correctes en el reconeixement de les gràfiques de la funció sinus i cosinus s'observa que en relació a les respostes del qüestionari 2 es passa del 32% al 85% en el cas del sinus i del 29% al 87% en el cas del cosinus.

4) En relació a la gràfica de la funció cotangent els alumnes que han respost correctament han utilitzat les estratègies següents:

- Escriuen la fórmula sense cap tipus d'explicació (6 alumnes (16%))
- Diuen que és la gràfica d'una funció que coneixen, que saben de memòria, etc. (5 alumnes (13%)).
- Fan la hipòtesi que la gràfica és la de la funció tangent o cotangent i utilitzen la calculadora per determinar els punts de discontinuïtat asimptòtica i a partir

d'aquests determinen a quina de les dues funcions correspon la gràfica, encara que en algun cas també es fixen en si passa o no per l'origen de coordenades (8 alumnes (21%)). Per exemple, Patricia F respon de la manera següent:

Resposta: f(x) = ...cotg....

Justificació de la resposta:

Perqué no passa pel punt (0,0), si a més no existeix la cotg de 0. per això té discontinuitat asimptòtica. A més es pot calcular com:

$$\text{cotg}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \Longrightarrow \frac{\cos 0}{\sin 0} = \frac{1}{0}$$ INDETERMINACIÓ es pot dir que això val ∞.

5) En relació a la gràfica de la funció tangent els alumnes que han respost correctament han utilitzat les estratègies següents:

- Escriuen la fórmula sense cap tipus d'explicació (5 alumnes (13%)).
- Diuen que és la gràfica d'una funció que coneixen, que saben de memòria, etc. (4 alumnes (10%)).
- Fan la hipòtesi que la gràfica és la de la funció tangent o cotangent i utilitzen la calculadora per determinar els punts de discontinuïtat asimptòtica i a partir d'aquests determinen a quina de les dues funcions correspon la gràfica, encara que en algun cas també es fixen en si passa o no per l'origen de coordenades (11 alumnes (28%)).

6) Si comparem les respostes correctes en el reconeixement de les gràfiques de la funció tangent i cotangent s'observa que en relació a les respostes del qüestionari 2 es passa del 15% al 51% en el cas de la tangent i del 15% al 49% en la cotangent

Pregunta 11

Resp	$g(x)$	$i(x)$	$k(x)$	$j(x)$	$f(x)$	$t(x)$	$h(x)$
Alum	38 (97%)	39 (100%)	36 (92%)	39 (100%)	39 (100%)	35 (90%)	39 (100%)

Conclusions.

1) En aquesta pregunta el percentatge de respostes correctes és quasi del 100%. El procediment que han seguit els alumnes és una combinació de: 1) fixar-se en el model de la fórmula i pensar el tipus de gràfica que li correspon i 2) fer una taula de valors a partir de la fórmula i després veure a quina gràfica corresponien els punts obtinguts. La resposta de Sergi G. (mirar qüestionari adjunt pàgs. 742-752) és una bona mostra de la combinació d'aquests dos tipus d'argumentació.

2) Si bé hi hagut alumnes que han tingut en compte el model <<recta>> i el model <<paràbola>> en les seves explicacions no hi ha hagut cap referència al model <<funció de proporcionalitat inversa>>.

3) Si comparem les respostes correctes en relació a les respostes del qüestionari 2 s'observa una lleugera millora en els resultats i un major pes del <<model de funció>> en les justificacions dels alumnes.

Conclusions sobre tot el qüestionari

1) Els alumnes es poden classificar en tres grups: A) Els que utilitzen bàsicament taules (2 alumnes), B) els que utilitzen que les gràfiques pertanyen a una família de funcions de fórmula tipus coneguda (36 alumnes) i C) els que no es poden classificar en cap d'aquests dos grups perquè les seves explicacions no són prou clares per poder-los assignar a un dels dos grups anteriors o bé perquè majoritàriament han contestat en blanc (1 alumne). L'assignació d'un alumne a un grup, no vol dir que justifiqui totes les respostes a partir de taules, sinó que majoritàriament ha utilitzat les taules en les seves justificacions.

En relació al qüestionari 2 hi ha hagut un desplaçament del model <<taula>> al model <<família de funcions>> de manera que ara quasi tots els alumnes són del grup B. A continuació de les conclusions (pàgs. 742-752) segueixen les respostes als dos qüestionaris de Sergio G. que il·lustren clarament el pas del grup A (taula) al grup B (model de funció).

2) El procediment dels alumnes del grup A abans consistia en fer una taula de valors a partir de la gràfica per després fer una interpolació. Ara creiem que el que fan realment és una hipòtesi de fórmula en funció del tipus de gràfic i utilitzen la taula de valors per confirmar-la. Malgrat que creiem que utilitzen aquest procediment els continuem considerant del model A perquè no fan cap referència a que la gràfica pertany a una determinada família de funcions.

3) El procediment del grup B consisteix en reconèixer la gràfica com la d'una funció d'una determinada classe de la qual es coneix la fórmula tipus per determinar a continuació els paràmetres de la fórmula.

4) La família de les funcions trigonomètriques ha passat de ser poc coneguda a ser força coneguda. El reconeixement de les funcions sinus i cosinus és quasi del 85 % mentre que el reconeixement de les funcions tangent i cotangent és quasi del 50%. A més, els errors són de confusió entre el sinus i el cosinus o entre la tangent i la cotangent.

5) També ha augmentat molt el reconeixement de les funcions de tipus exponencial, encara que s'observa que la funció $f(x) = e^x$ és considerada pels alumnes com el prototipus de funció exponencial.

6) El model <<funció de proporcionalitat inversa>> continua sent molt poc conegut.

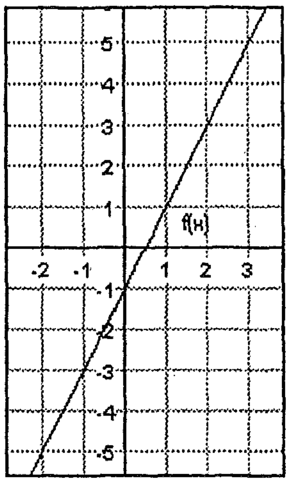
7) En relació als subobjectius 9-16 les conclusions són les següents:

- Quasi tots reconeixen una funció afí a partir de la seva gràfica.
- Quasi tots saben trobar la fórmula d'una funció afí a partir de la seva gràfica.
- Quasi tots reconeixen les funcions quadràtiques a partir de la seva gràfica
- Quasi tots saben trobar la fórmula d'una funció quadràtica molt senzilla a partir de la seva gràfica.
- Aproximadament més de la meitat de la classe reconeix una funció exponencial a partir de la seva gràfica.
- Quasi tots reconeix les funcions sinus i cosinus i el 50% les funcions tangents i cotangents i quan s'equivoquen és perquè confonen el sinus amb el cosinus o bé la tangent amb la cotangent.
- Quasi tots saben associar gràfiques amb fórmules.

8) Una conclusió important de cara a la nostra investigació és que la implementació de la unitat <<Introducció a la derivada>>, la qual contempla activitats que permeten calcular l'expressió simbòlica de funcions derivades a partir de gràfiques (de $f(x)$ o de $f'(x)$), modifica els objectes mentals <<funcions elementals>> dels alumnes, el significats dels quals ara incorpora pràctiques que permeten obtenir expressions simbòliques de funcions elementals a partir de les seves gràfiques. Aquestes pràctiques no formaven part del significat dels objectes mentals <<funcions elementals>> de molts alumnes abans del procés d'instrucció.

Sergio G

1 Troba la fórmula de la funció que té el gràfic següent:

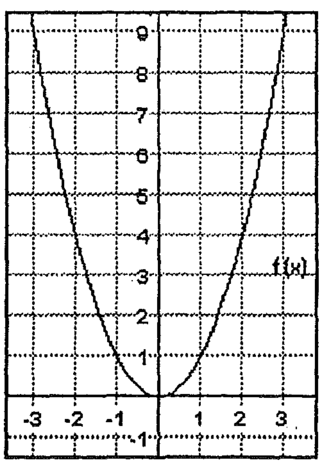


Resposta: f(x) = $2x-1$..........

Justificació de la resposta:

X	$y = 2x-1$
1	1
2	3
3	5
-1	-3

2 Troba la fórmula de la funció que té el gràfic següent:

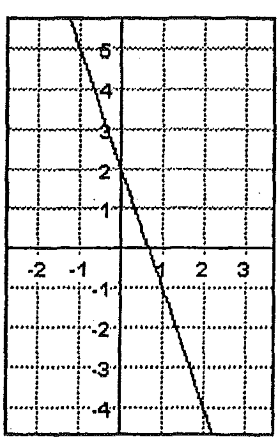


Resposta: f(x) = ..X^2...............

Justificació de la resposta:
Perquè la imatge de la x és el seu quadrat

X	$y = x^2$
1	1
2	2
3	4
-1	1
-2	4

3 Troba la fórmula de la funció que té el gràfic següent:



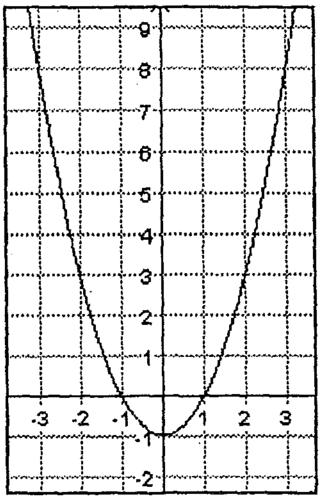
Resposta: f(x) = ...$-3X+2$......

Justificació de la resposta:

X	$y = -3x+2$
1	-1
2	-4
-1	5

A

4 Troba la fórmula de la funció que té el gràfic següent:

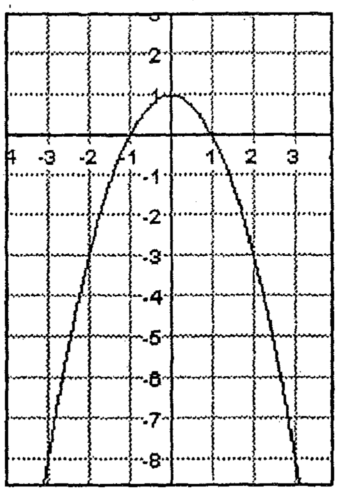


Resposta: f(x) = x^2-1

Justificació de la resposta

x	$y = x^2-1$
1	0
2	3
3	8
0	-1
-1	0
-2	3

5 Troba la fórmula de la funció que té el gràfic següent:

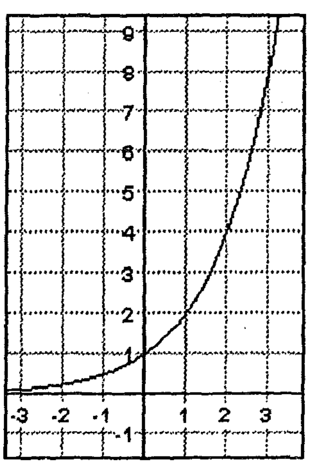


Resposta: f(x) = $-x^2+1$

Justificació de la resposta:

x	$y = -x^2+1$
3	-8
2	-3
1	0
0	1
-1	0
-2	-3

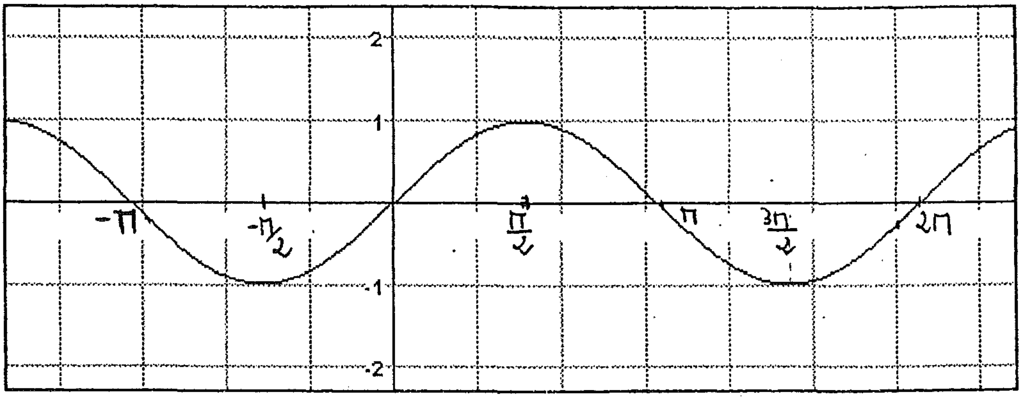
6 Troba la fórmula de la funció que té el gràfic següent:



Resposta: f(x) = ...

Justificació de la resposta:

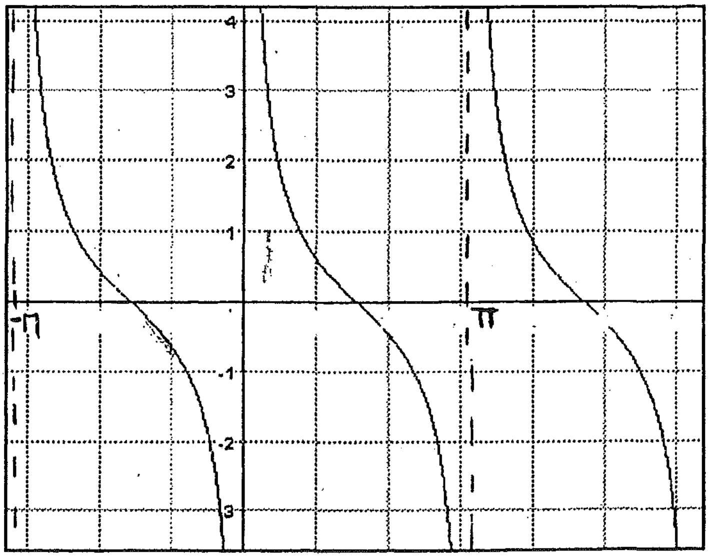
7 Troba la fórmula de la funció que té el gràfic següent:



Resposta: f(x) = ..Sin..X.....

Justificació de la resposta:

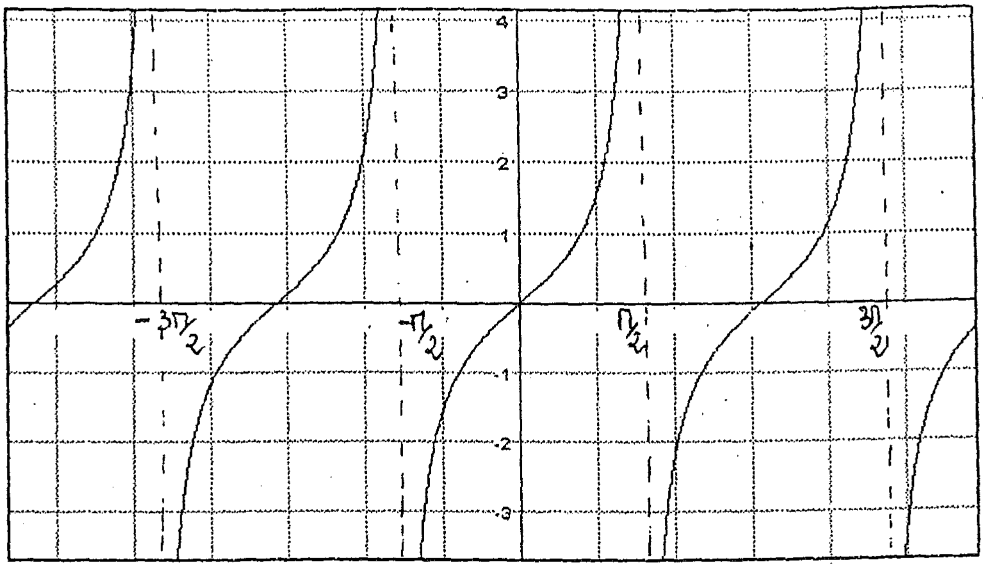
8 Troba la fórmula de la funció que té el gràfic següent:



Resposta: f(x) = .cotg..X...

Justificació de la resposta:

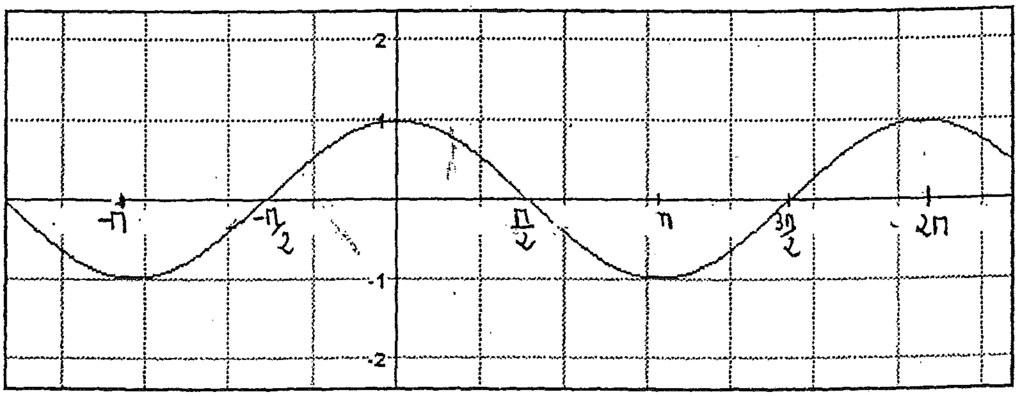
9 Troba la fórmula de la funció que té el gràfic següent:



Resposta: f(x) = ...

Justificació de la resposta:

10 Troba la fórmula de la funció que té el gràfic següent

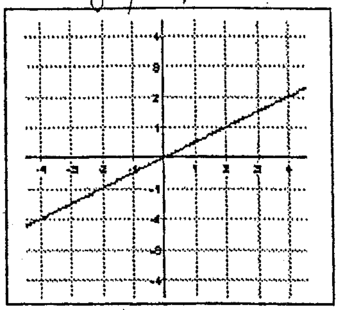


Resposta: f(x) = ...

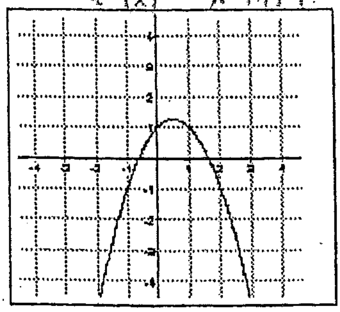
Justificació de la resposta:

11 Donades les funcions $f(x) = -3x$, $g(x) = x/2$, $h(x) = 3x + 2$, $i(x) = -x^2 + x + 1$, $j(x) = x^2 + 2$, $k(x) = 2/x$, $t(x) = -1/x$. Identifica-les amb els gràfics següents i raona la teva elecció

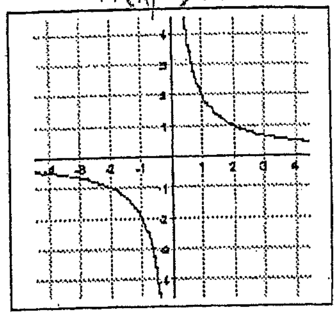
$g(x) = x/2$



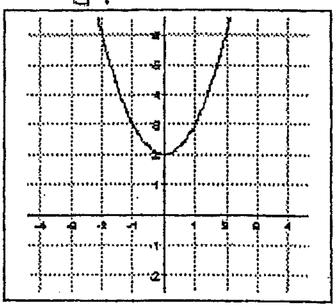
$i(x) = -x^2+x+1$



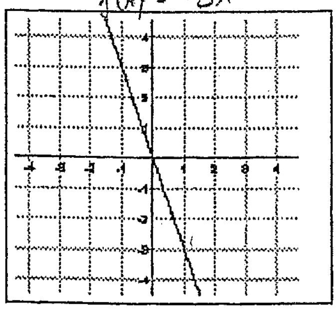
$K(x) = 2/x$



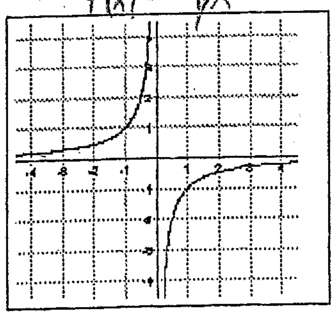
$j(x) = x^2+2$

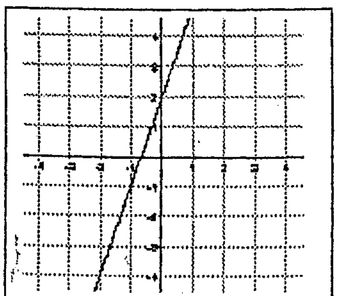


$f(x) = -3x$



$t(x) = -1/x$





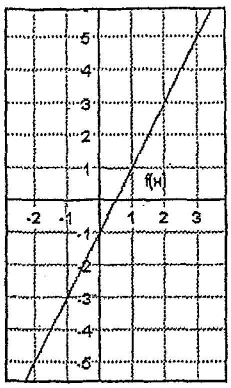
$h(x) = 3x+2$

Donant valors a la x les imatges coincideixen amb les correspon (*)

(*) corresponents gràfiques

$A \to B$ Sergio 6è

1 Troba la fórmula de la funció que té el gràfic següent:



Resposta: f(x) = ..2X-1........

Justificació de la resposta:

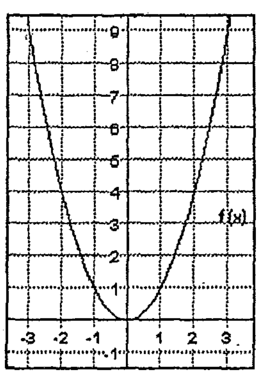
x	y
0	-1

Amb aquest ~~resultat~~ he trobat el terme independent

Com que era una recta, es clar, que havia de ser una funció de primer grau $y=ax+b$

He trobat el pendent i amb el terme independent ja tenia la funció

2 Troba la fórmula de la funció que té el gràfic següent:



Resposta: f(x) = ...X^2............

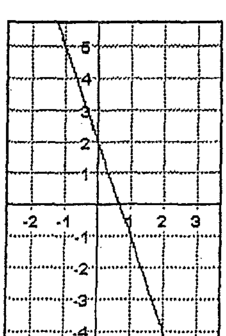
Justificació de la resposta:

La forma de paràbola indica que era una funció de X elevat a un nº donant valors amb una taula he trobat la funció

x	y
0	0
1	1
2	4
3	9

Era evident que les imatges eren el quadrat de les X

3 Troba la fórmula de la funció que té el gràfic següent:



Resposta: f(x) = ...-3X+2.......

Justificació de la resposta:

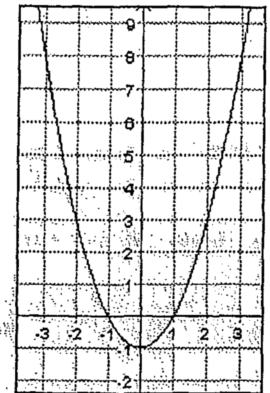
x	y
0	2

es troba el terme independent

És una recta i per tant, era una funció de primer grau. $y=ax+b$

He calculat el pendent i amb el terme independent ja tenia la funció

4 Troba la fórmula de la funció que té el gràfic següent:

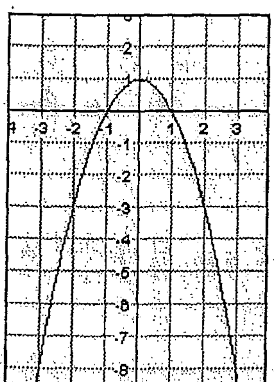


Resposta: f(x) = $x^2 - 1$

Justificació de la resposta

Es una paràbola i per tant, ha de ser una funció de x elevat a un nº, amb el valor de $x=0$ he trobat el terme independent he fet una taula desplaçant-la un valor cap avall i era la funció x^2 desplaçada una unitat cap avall

5 Troba la fórmula de la funció que té el gràfic següent:

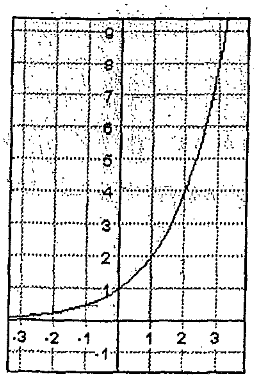


Resposta: f(x) = $-x^2 + 1$

Justificació de la resposta:

Era una paràbola i per tant, una funció de x elevat a un nº, amb el valor $x=0$ he trobat el terme independent. i m'he adonat que era la funció x^2 cap avall i desplaçada una unitat cap amunt

6 Troba la fórmula de la funció que té el gràfic següent:

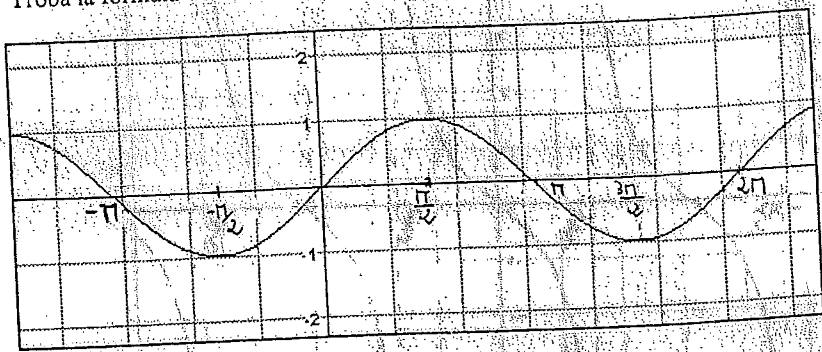


Resposta: f(x) = 2^x

Justificació de la resposta:

La forma de la funció era semblant a la gràfica de la funció e^x. Llavors havia que ser un nº elevat a x, he anat provant i l'he trobada

7 Troba la fórmula de la funció que té el gràfic següent:

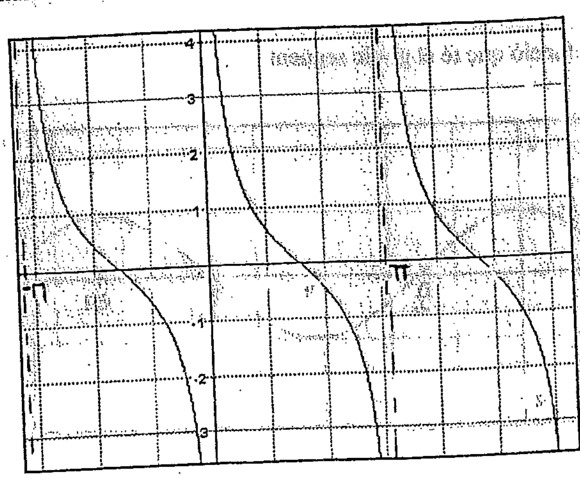


Resposta: f(x) = ...sin x.....

Justificació de la resposta:

La funció sin x passa pel punt $(x,y) = (0,0)$ i per a $x = \frac{\pi}{2}$ valia 1 i per a $x = -\frac{\pi}{2}$ la y valia -1

8 Troba la fórmula de la funció que té el gràfic següent:

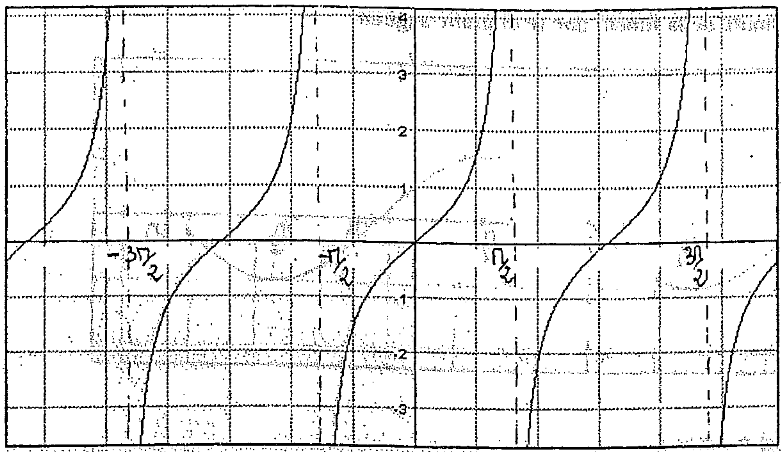


Resposta: f(x) = ...tag x.....

Justificació de la resposta:

Era igual, amb una forma semblant a la cotag però aquesta no passa pel punt (0,0).

9 Troba la fórmula de la funció que té el gràfic següent:

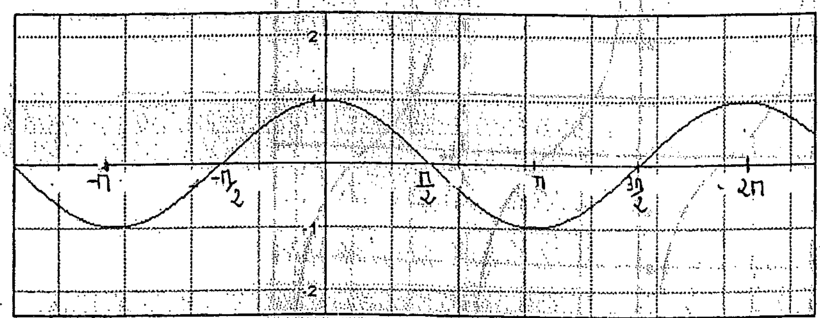


Resposta: f(x) = ..cotog x....

Justificació de la resposta:

la funció ~~x~~ cotog de x passa pel punt (0,0) i m'he recordat de la forma que tenia que era igual que el dibuix

10 Troba la fórmula de la funció que té el gràfic següent



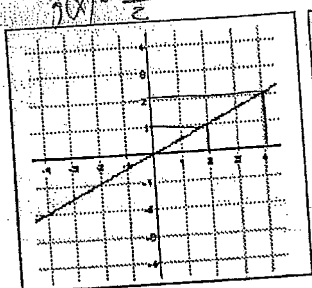
Resposta: f(x) = ...cos x.....

Justificació de la resposta:

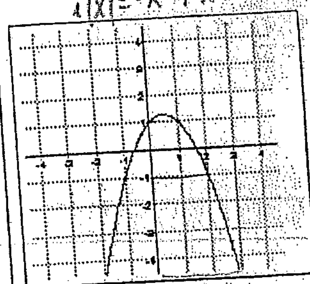
La funció cos x per a x=0 hy val 1, i en els $x=(\frac{\pi}{2})$ talla amb l'eix x

11 Donades les funcions $f(x) = -3x$, $g(x) = x/2$, $h(x) = 3x + 2$, $i(x) = -x^2 + x + 1$, $j(x) = x^2 + 2$, $k(x) = 2/x$, $t(x) = -1/x$. Identifica-les amb els gràfics següents i raona la teva elecció

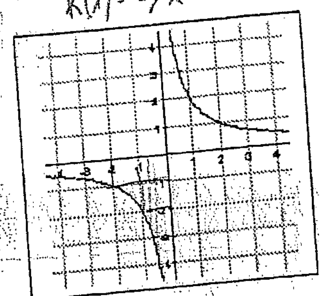
$g(x) = \frac{x}{2}$



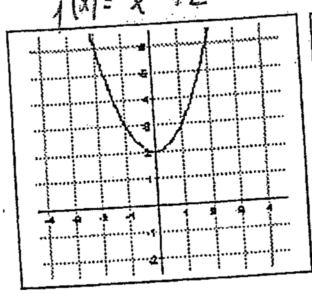
$i(x) = -x^2 + x + 1$



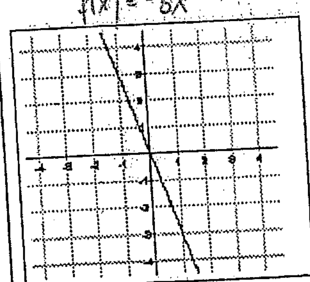
$k(x) = 2/x$



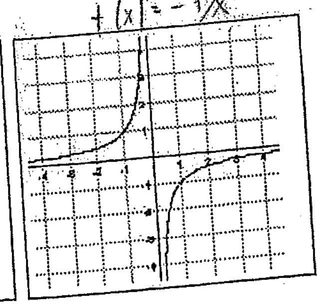
$j(x) = x^2 + 2$

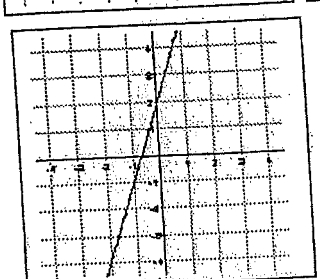


$f(x) = -3x$



$t(x) = -1/x$





$h(x) = 3x+2$

He anat donant valor a les funcions de dalt, començant per $x=0$ per a saber que passaba en aquest punt, i he dividit ~~abans d'això~~ les funcions de dalt entre les que podien tenir una gràfica que era una parabola, una recta, i l'altre grup

CAPÍTOL VI

APORTACIONS I CONCLUSIONS FINALS

CAPÍTOL VI. APORTACIONS I CONCLUSIONS FINALS

En aquest últim capítol presentem una síntesi de les aportacions i conclusions obtingudes en relació als objectius plantejats en el capítol 2, així com les possibles línies d'investigació que obre aquest treball.

Primer objectiu

1) Les hipòtesis H1 i H2 ens han portat a situar aquesta investigació en el marc de la teoria del significat institucional i personal dels objectes matemàtics desenvolupada per Godino i Batanero (1994 i 1998). En relació al

Subobjectiu 1.1: Justificació de la necessitat de considerar tres nivells de significat: 1) el significat en la institució matemàtica, 2) el significat en la institució escolar i 3) el significat personal i del nostre posicionament en la hipòtesi H2.

Considerem que una de les aportacions d'aquesta investigació és el fet de no acceptar les hipòtesis H1 i H2 sense qüestionar-les. En la breu exposició que hem fet de les controvèrsies: 1) Anàlisi referencial del significat versus anàlisis pragmàtiques, 2) Constructivisme versus platonisme, 3) Representacionalisme versus no-representacionalisme, 4) Teories realistes versus teories instrumentalistes en la ciència, 5) Història interna del coneixement científic versus sociologia del coneixement científic i 6) Anàlisis sistèmiques versus anàlisis centrades en l'individu, considerem que hem donat prou arguments per justificar la necessitat de considerar tres nivells de significat (en la institució matemàtica, en la institució escolar i en el nivell personal) i, si no per justificar, sí, com a mínim, per considerar plausible la hipòtesi H2.

Considerem que una altra de les aportacions d'aquesta investigació és l'exposició d'un marc general que explica per què en la didàctica de les matemàtiques les noves tendències tendeixen a fer anàlisis de tipus històrico-social i a donar més importància a l'antropologia cognitiva que a la psicologia cognitiva.

2) En relació al

Subobjectiu 1.2: En relació al significat personal, justificar la hipòtesi H1.1 utilitzant les funcions semiòtiques com a instrument que permet l'anàlisi conjunta de la manipulació d'ostensius en un context social i del pensament que l'acompanya

En aquesta investigació hem considerat que l'objecte personal que construeix l'alumne és el resultat de les seves accions al llarg del procés d'instrucció. És a dir, l'objecte personal de l'alumne es pot considerar com la xarxa de relacions que emergeix com a resultat de les pràctiques que ha realitzat l'alumne per resoldre les activitats proposades a l'aula. Aquesta xarxa de relacions es pot recórrer en moltes direccions, la qual cosa permet a l'alumne desenvolupar determinades pràctiques i també li impedeix realitzar-ne d'altres. El conjunt de pràctiques que pot realitzar en un moment determinat és el que entenem per significat de l'objecte personal de l'alumne en aquell moment. Des d'aquest punt de vista, una part del significat personal, les pràctiques públiques, és observable, mentre que una altra part, les pràctiques constituïdes per accions privades, (processos d'abstracció, generalització, metafòrics, etc) no ho és. El significat entès d'aquesta manera es pot parcel·lar en diferents classes de pràctiques més específiques que són utilitzades en un determinat context i amb un determinat tipus de notació produint un determinat sentit. Un canvi de notació pot activar un sentit diferent, és a dir un subconjunt de pràctiques públiques i privades, que pot permetre o dificultar la resolució de l'activitat. Per aquest motiu, les diferents representacions ostensives dels continguts matemàtics i les traduccions entre elles són un element fonamental per a la seva comprensió i, per tant, per al seu ensenyament i aprenentatge.

Considerem que la distinció entre el domini d'allò personal i d'allò institucional i de les seves mútues interdependències obliga a tenir en compte tant l'aspecte institucional com l'esfera d'allò mental. Si bé estem d'acord amb la nova direcció de la didàctica de les matemàtiques de tipus antropològic i històrico-social, considerem convenient integrar la psicologia cognitiva en aquesta nova concepció, encara que d'una manera secundària. Una manera de fer aquesta integració és mostrar com les funcions semiòtiques poden ser una eina útil per fer l'anàlisi conjunta de la manipulació d'ostensius en un context social i del pensament que l'acompanya, si les considerem de la manera que hem exposat en el subobjectiu 1.2.

La manera d'entendre les funcions semiòtiques que hem exposat i la seva relació amb els processos d'abstracció, metafòrics, d'analogia, d'encapsulació i desencapsulació, etc., la considerem una aportació interessant perquè permet descriure amb un llenguatge unificat molts processos que s'han estudiat en el camp del pensament matemàtic avançat i que, en els diferents treballs d'investigació, estan descrits en terminologies diferents.

La utilització de les funcions semiòtiques que hem fet per descriure la complexitat de la comprensió del contingut "funció derivada" (analitzant tres alternatives diferents per introduir-la a l'aula) posa de manifest la complexitat semiòtica i ontològica dels continguts matemàtics, la qual, juntament amb la complexitat del procés d'instrucció en una institució escolar porta a reconèixer un paper rellevant als "estudis de casos" en els quals l'investigador hi està implicat directament.

3) En relació al

Subobjectiu 1.3: Il·lustrar mitjançant l'anàlisi amb profunditat d'un exemple la hipòtesi H1.1.1

Considerem que l'exemple de la funció sinus il·lustra clarament la potència de la hipòtesi H.1.1 per tal d'analitzar seqüències d'activitats que tenen com a objectiu el càlcul de la funció derivada.

Si analitzem les tècniques que s'utilitzen per a calcular funcions derivades utilitzant la hipòtesi H1.1.1, el nombre de representacions implicades en una activitat ha de ser un element, tant o més important que el rigor, en el moment de decidir-nos per una activitat o una altra, ja que a major nombre de representacions implicades, major nombre de funcions semiòtiques.

La taula de la pàgina 147 obre la possibilitat de fer una anàlisi del càlcul de primitives des del punt de vista de les representacions ostensives implicades. Aquesta és una de les línies d'investigació possible que obre el treball que presentem

4) En relació al

Subobjectiu 1.4: En relació al significat institucional, donar arguments històrics que fonamentin les opcions preses en l'elaboració de la unitat "Introducció a les derivades" per a calcular funcions derivades a partir de gràfiques (de f(x) o de f '(x)).

Considerem que hem donat prou elements històrics per justificar les opcions preses en l'elaboració de la unitat. D'entre les diferents opcions que hem pres volem destacar les següents:

- Les reflexions sobre la història de les matemàtiques ens van portar a considerar que, en el disseny de les activitats pensades per fer el pas de la gràfica d'una funció a la seva expressió simbòlica, havíem de considerar les diferents metàfores que històricament han estructurat el concepte de gràfica d'una funció. En les activitats que hem proposat als alumnes en aquesta investigació, cal que puguin entendre la gràfica d'una funció com la traça que deixa un punt subjecte a determinades condicions, com la traça que deixa un punt que es mou sobre la gràfica o bé com el conjunt format pels punts de coordenades $(x, f(x))$. Entendre la gràfica com a trajectòries implica estructurar el concepte de gràfica en termes cinètics, la qual cosa es reflecteix en el llenguatge utilitzat (punt que es mou). Com totes les metàfores, aquesta té els seus avantatges i les seves dificultats. Un dels fenòmens que hem observat en aquesta investigació són algunes dificultats inherents a aquesta metàfora.

- Un dels aspectes originals d'aquesta investigació és la proposta d'activitats guiades per calcular funcions derivades a partir de l'observació d'una condició que compleixen les tangents, o bé a partir d'un procediment que permet construir-la. Per aquesta raó, hem centrat les consideracions històriques fonamentalment en l'anomenat problema de les tangents: trobar un mètode que permetés construir la normal i la tangent en un punt d'una corba donada; i el seu problema invers: determinar una corba a partir d'una propietat que compleixen totes les tangents. Una de les conclusions de l'estudi del càlcul infinitesimal del segle XVII és que és possible dissenyar activitats d'ensenyament-aprenentage inspirades en la manera que tenien els matemàtics del segle XVII d'entendre el problema de la tangent i del seu invers, gràcies a alguns programes informàtics actuals. Els programes Cabri-géomètre (versió 1) i el Calcula (versió 3), entre d'altres, són programes que permeten dibuixar simultàniament la corba i la tangent a la corba en un punt, de manera que els alumnes poden fer accions sobre aquest punt i observar invariants de les seves accions.

Segon objectiu

El segon objectiu d'aquesta investigació és justificar la hipòtesi H3.1.Per justificar-la hem elaborat una unitat didàctica per introduir la derivada, que incorpora activitats que permeten calcular l'expressió simbòlica de funcions derivades a partir de gràfiques de $f(x)$ o $f'(x)$.

5) En relació als subobjectius

2.1 Anàlisi d'investigacions prèvies sobre els continguts de la unitat.

2.2 Anàlisi de les dificultats, obstacles i errors dels alumnes.

2.3 Anàlisi de l'ensenyament tradicional anterior a la LOGSE.

2.4 Anàlisi del currículum del batxillerat LOGSE.

Considerem que l'aportació més interessant és l'elaboració d'un marc general per tractar les dificultats dels alumnes que, d'una banda, recull moltes de les aportacions que ha fet la psicologia i d'altra banda és compatible amb les hipòtesis H1 i H2.

6) En relació al

Subobjectiu 2.5: Anàlisi de les restriccions que afectarien l'elaboració de la unitat.

Hem explicat clarament les restriccions causades per la hipòtesi H3.1, la qual ens va portar a dissenyar les activitats, tenint en compte les hipòtesis H1.1 i H1.1.1. La hipòtesi H1.1.1 és un procés que es pot concretar en diferents tècniques de càlcul de la funció derivada. En el subobjectiu 1.3 hem mostrat com el procés descrit en H1.1.1 es concreta en quatre tècniques diferents, tres de les quals utilitzen representacions gràfiques de $f(x)$ i de $f'(x)$. Aplicar la tècnica tradicional (tècnica 1) a la funció sinus implicava ampliar considerablement el currículum de trigonometria del batxillerat, mentre que aplicar-la a la funció $f(x) = \ln x$ implicava treballar prèviament la indeterminació 1^{∞}. Aquest fet ens va portar a renunciar a la tècnica tradicional en aquests dos casos i a optar per la introducció de tècniques que permetessin calcular funcions derivades sense calcular límits (tècniques 2, 3 i 4 comentades en el subobjectiu 1.3).

Considerem que el conjunt de tècniques descrites en els esquemes de les restriccions 1, 2 i 3 juntament amb els seus ostensius i no-ostensius associats són una aportació important a l'hora d'estructurar una unitat de derivades que tingui per objectiu un aprenentatge significatiu del tema, menys formalista i més inductiu que el que tradicionalment s'ha impartit en el BUP. Un ensenyament del càlcul diferencial en què la traducció entre diferents formes de representació, els aspectes històrics i l'ús de recursos informàtics, entre d'altres aspectes, hi juguen un paper important.

7) En relació als subobjectius

2.6 Aplicació del constructe "significat a priori d'un objecte institucional X per a un alumne, des del punt de vista de la institució classe de matemàtiques de 1r de batxillerat modalitat ciències de la naturalesa i tecnologia / 3è de BUP" al contingut derivada.

2.7 Explicitació dels objectius i continguts de la unitat.

2.8 Explicitació dels objectius de les activitats d'ensenyament-aprenentatge.

Des del nostre punt de vista la noció de significat d'un objecte institucional per a un subjecte des del punt de vista de la institució de Godino i Batanero (1994), i la d'objecte mental de Puig (1997) resulten molt operatives per dissenyar unitats didàctiques i per avaluar-ne la implementació, ja que ens permeten fer una anàlisi de dalt-baix que, a partir del significat en la institució escolar, permet una catalogació a priori dels possibles significats personals que podem esperar dels alumnes. La noció d'esquema de la psicologia cognitiva resulta menys operativa, encara que no neguem que també pugui ser eficaç, ja que, en ser estudis de baix-dalt, aquests són més personalitzats i és només a posteriori, després de comparar els significats personals dels alumnes, que es fa una catalogació dels possibles significats personals que podem esperar-ne.

Al nostre parer, els constructes "significat personal", "significat institucional " i "significat d'un objecte institucional per a un subjecte des del punt de vista de la institució" resulten molt útils per elaborar una unitat didàctica, ja que aquesta implica un procés d'elecció de contextos amb finalitat didàctica. El caràcter observable de les pràctiques socials permet, mitjançant un estudi fenomenològic i epistemològic realitzat adequadament, determinar, per a un objecte donat, el camp de problemes associat, així com el seu significat institucional. L'anàlisi de les variables didàctiques permet fer una reducció del significat institucional per un procés d'elecció de contextos, i dissenyar les possibles tasques pertinents per a l'avaluació dels coneixements subjectius.

El nostre punt de vista consisteix a postular unes entitats mentals que no ens allunyin de les pràctiques que s'observen en la interacció que es produeix a l'aula. És a dir, en unes entitats mentals que permetin centrar l'interès en les descripcions i les representacions a mesura que es construeixen en el curs d'una interacció. Aquest posicionament ens ha portat a adoptar la noció de significat d'un objecte personal proposat per Godino i

Batanero (1994). L' instrument bàsic que hem utilitzat per dissenyar la unitat i per avaluar l'evolució del significat personal dels alumnes com a resultat de la seva implementació, ha estat el constructe <<Significat a priori d'un objecte institucional *X* per a un alumne des del punt de vista de la institució escolar "classe de matemàtiques de 3r de BUP/1r de batxillerat ">>. Considerem que una de les aportacions d'aquest treball consisteix en mostrar l'aplicabilitat de la teoria del significat institucional i personal dels objectes matemàtics per tal d'elaborar unitats didàctiques.

Tercer Objectiu

El tercer objectiu d'aquesta investigació és estudiar, des del punt de vista de la institució "classe de matemàtiques de 1r de Batxillerat/ 3° de BUP", el procés de significació constructiu que desenvolupen a l'aula uns alumnes determinats, quan treballen la unitat "introducció a les derivades", elaborada seguint la hipòtesi H3.1, amb la finalitat de justificar la viabilitat de la nova organització de continguts recollida en aquesta unitat.

8) En relació al

Subobjectiu: 3.1 Clarificació del constructe "viabilitat de la implementació".

Hem utilitzat la metàfora "zona de desenvolupament pròxim" per estructurar la problemàtica de la viabilitat d'una nova proposta en els termes de la teoria psicològica de Vigotski. L'aplicació d'aquesta metàfora ens ha portat a les conclusions recollides en aquest subobjectiu, les quals posen de manifest que una unitat que pretén treballar objectius generals del tipus: traducció entre diferents formes de representació, i que, a més s'ha d'impartir l'any anterior a l'examen de selectivitat s'ha de situar a una distància pròxima a l'organització matemàtico-didactica habitual en la institució escolar per a ser viable.

Si bé vam elaborar la unitat amb l'objectiu que fos viable en una institució "normal" de secundària, després de la implementació hem arribat a la conclusió que aquesta unitat es troba molt pròxima de la frontera de la ZDP, perquè treballar la traducció entre diferents formes de representació és un objectiu general que consum un temps que la institució prefereix dedicar a objectius terminals més concrets.

9) En relació al

Subobjectiu: 3.2 Anàlisi de les restriccions que afectarien la implementació de la unitat.

Aquesta investigació fou concebuda des del principi amb l'objectiu d'analitzar el pas de la gràfica a la seva expressió simbòlica i la seva aplicació a les funcions derivades, des d'un punt de vista teòric i a la vegada pràctic. La investigació que hem portat a terme pretén superar la divisió teoria- pràctica perquè considerem que una investigació teòrica en didàctica de la matemàtica guanya sentit si es basa en la reflexió crítica sobre l'actuació real en la institució escolar. En aquesta investigació el doctorand ha assumit el paper del professor del curs i el paper d'investigador. En aquest subobjectiu hem explicat les restriccions, el contracte didàctic, les característiques dels grups, etc. per tal que la investigació no interferís ni deformés, dintre d'allò possible, la normalitat de l'aula.

10) En relació als subobjetius:

3.3: *Concreció, amb el màxim de detall, dels ítems que s'analitzarien al llarg de la implementació.*

3.4 *Planificació de les subseqüències d'ensenyament-aprenentatge i de les subseqüències d'avaluació.*

Hem concretat els ítems que vam analitzar al llarg de la implementació. L'anàlisi es va realitzar de la manera que es fa en una classe normal, és a dir, mitjançant qüestionaris, preguntes, exàmens, observació de les expressions facials dels alumnes, impressions subjectives del professor, etc.

Vam planificar la implementació de la investigació en tres fases: 1) Abans de la implementació de la unitat, 2) Implementació de la unitat i 3) Després de la implementació de la unitat. A la fase I vam analitzar el procés constructiu dels conceptes de límits i de continuïtat de funcions, i també passar els qüestionaris 1 i 2 per esbrinar els coneixements previs dels alumnes sobre les funcions. A la fase II vam posar en pràctica l'experimentació de la unitat, dividida en subseqüències de classe normal i subseqüències d'avaluació. A la fase III vam passar el qüestionari 9 i tornar a passar el qüestionari 2 com a posttest, així com un examen de recuperació.

11) En relació al

Subobjectiu: 3.5 Descripció de la gestió de les classes des del punt de vista del professor com a mediador en la construcció social i personal realitzada en el procés d'instrucció.

Fem una descripció de les sessions de classe, reconstruïdes a partir de la gravació que se'n va fer, així com de les notes preses in situ sobre les intervencions dels alumnes i allò que s'escrivia a la pissarra. Totes les sessions, tret d'una, es presenten en forma de crònica que recull sobretot el paper de mediació desenvolupat pel doctorand. Malgrat l'esforç que ha representat, hem procurat reproduir els ostensius utilitzats i les traduccions entre ells.

Considerem que la descripció que presentem pot ser utilitzades per a futures recerques que vulguin estudiar el discurs del professorat a l'aula: com aquest entén l'explicació, com la duu a terme i com condiciona el procés d'ensenyament-aprenentatge.

12) En relació als ítems del subobjectiu 3.3 la implementació permet treure moltes conclusions que apunten més enllà del cas particular que hem estudiat, les quals estan descrites amb molt de detall en el subobjectiu 3.5. Aquí ens limitarem a apuntar-ne tres de les que considerem més significatives:

- La implementació, d'una banda, posa de manifest la dificultat que tenen els alumnes en els coneixements previs (funció, traduccions entre diferents representacions d'una funció, variació d'una funció, pendent, taxa mitjana de variació, velocitat, etc.), i d'altra banda, permet concloure que la millor manera per assegurar una bona construcció del càlcul diferencial és treballar amb profunditat aquests continguts.

- La implementació també posa de manifest la dificultat del contingut "funció derivada". La definició de la funció derivada com $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ presenta una complexitat semiòtica considerable, ja que implica funcions, com la funció semiòtica intensional/extensional de tipus procés / resultat del procés, que són força difícils per a l'alumne. Introduir la funció derivada a partir de trobar una condició que compleixen totes les tangents i, a partir d'ella, calcular la funció derivada, si bé és més fàcil d'entendre que la definició per límits, també presentat dificultats, ja que el càlcul del pendent de la recta tangent l'ha de fer l'alumne utilitzant lletres i després considerar que el punt que primer era fix es converteix en variable. En canvi, la introducció de la funció derivada a partir d'una taula resulta la més fàcil d'entendre. Cada un d'aquests tres procediments utilitza ostensius diferents; en el primer sempre ens movem amb expressions simbòliques, en el segon amb gràfics i en tercer amb taules. La nostra conclusió és que una seqüència d'activitats que combini els tres procediments anteriors té més possibilitats d'aconseguir la comprensió de l'alumnat que les que es basen només en una de les tres.

- Una conclusió important de cara a la nostra investigació és que la implementació de la unitat "Introducció a les derivades", la qual contempla activitats que permeten calcular l'expressió simbòlica de funcions derivades a partir de gràfiques (de $f(x)$ o de $f'(x)$), modifica els objectes personals " funcions elementals" dels alumnes, el significats dels quals ara incorpora pràctiques que permeten obtenir expressions simbòliques de funcions elementals a partir de les seves gràfiques. Aquestes pràctiques no formaven part del significat dels objectes mentals "funcions elementals" de molts alumnes abans del procés d'instrucció.

NOTES FINALS

NOTES FINALS

Capítol 1

1
Una bona explicació de l'estructura i forma d'utilització del material d'aquest grup la podem trobar a l'article "Metodología: la resolución de problemas" (Grup Zero, 1982b).

2
Utilitzem el terme metàfora tal com l'utilitzen Lakoff i Johnson (1991) i Pimm (1990). Aquests autors consideren que *"l'essència de la metàfora és entendre i experimentar* un tipus de cosa en termes d'una altra." (Lakoff, G.; Johnson, M. 1991, pàg 41).

3
Programa desenvolupat en el Laboratori d'estructures discretes i de didàctica de l'IMAG de la Universitat Joseph Fourier de Grenoble.

4
Oliveró, M; Abrev, J.:1988. Grupo Editorial Iberoamérica.

Capítol 2

1
Ens referim indistintament a un contingut o a un sistema organitzat de continguts.

Capítol 3

1
El Tractatus i les Investigacions són les primeres obres de Wittgenstein que foren publicades. Donat les marcades diferències d'estil i contingut que hi ha entre elles, es va anar estenent la idea que Wittgenstein havia desenvolupat dues filosofies diferents: la del primer Wittgenstein i la del segon. La publicació pòstuma de les obres escrites en els anys 30 mostra, segons Kenny (1982), que aquesta visió és massa simple, ja que hi ha moltes connexions entre aquestes dues obres, així com molts supòsits comuns. Malgrat ser conscients de la simplicitat de la idea del primer i segon Wittgenstein, nosaltres la continuarem utilitzant.

2
Amb la referència Wittgenstein (1983/1953) volem indicar que el llibre "Investigacions filosòfiques" fou publicat l'any 1953 i que el llibre que nosaltres hem consultat és una traducció al català de l'any 1983. Normalment ens limitarem a posar la data de l'edició de l'obra que hem consultat. Només posarem la data de la primera edició, quan

considerem que és important tenir-la en compte.

3
Per "transcendent" entendrem que roman fora de tota experiència possible, entesa aquesta en sentit kantià, com aquella que resta més enllà de l'espai i del temps. És a dir, la "cosa en si" que ultrapassa els límits del coneixement humà. Per "immanent" entendrem allò que cau dins els límits de l'experiència possible.

4
En Lenin (1975/1909) podem trobar clarament exposada la controvèrsia entre aquests dos punts de vista.

5
De fet es pot considerar l'existència de dues tradicions cognitives diferents. Una, la dominant, de naturalesa mecanicista i associacionista, representada actualment pel "processament de la informació", que considera que les representacions son homeomòrfiques a la realitat. I una altra de més constructivista que té els seus orígens en la psicologia europea (Piaget, Vygostki, la Gestalt,...) que posa en qüestió la representació com a correspondència homeomòrfica perquè considera que la ment humana juga un paper molt actiu en la construcció d'aquestes representacions i, fins i tot en alguns casos, pot arribar a qüestionar la versió forta de la representació (Varela 1990).

6
"(...) Según esta idea, el hombre y el computador son sistemas de procesamiento de propósitos generales, funcionalmente equivalentes, que intercambian información con su entorno mediante la manipulación de símbolos. Según esta concepción, tanto el ser humano como el computador son verdaderos "informívoros"(...), son sistemas cognitivos cuyo alimento es la información; y aquí la información tiene un significado matemático muy preciso de reducción de la incertidumbre" (Pozo 1993, pàg. 43).

7
Utilitzem el terme corporeïtat perquè, al no poder-se mostrar a altres, no són ostensius. Ara bé, amb el terme corporeïtat volem indicar que aquests símbols mentals són continguts propis de la consciència que són quasi-ostensius (paraules pensades, evocació d'experiències viscudes, imatges mentals, etc.).

8
La interpretació de Duval com a realista representacionalista i la de Kaput i Brown com a no representacionalistes és personal i pot ser controvertida.

9
Vygotski va identificar tres fases en la formació de conceptes: *cúmuls no organitzats, complexos i conceptes*. La classificació dels objectes mitjançant *cúmuls no organitzats* consisteix a agrupar objectes sense cap característica en comú; aquesta fase es presenta

en els pàrvuls. Un *complex* és una associació d'objectes basada en característiques perceptives immediates; però la connexió o nexe entre els objectes no és estable i pot anar variant contínuament. Vygotski identifica cinc tipus de complexos diferents. Els anomenats complexos-cadena són la forma més pura d'aquest tipus de pensament i el següent exemple il·lustra clarament la seva natura: *"Si la muestra experimental es un triángulo amarillo, el niño podría escoger unas pocas figuras triangulares hasta que su atención fuera captada por, digamos, el color azul de una figura que ha agregado recién; se desvía entonces a seleccionar figuras azules de cualquier forma (triangulares, circulares, semicirculares). Esto, a su vez, es suficiente para cambiar otra vez de criterio; haciendo abstracción del color comienza a elegir de nuevo figuras redondeadas. El atributo decisivo cambia durante todo el proceso. No existe consistencia en el tipo de enlaces o en la manera en que un eslabón de la cadena se une con el que le precede y el que le sigue, y la muestra original no tiene una significación central. Cada ealabón, una vez incluido en una cadena compleja es tan importante como el primero y puede convertirse en un imán que atraiga a nuevos objetos"* (Vygotski 1987, pàg. 97). L'últim tipus de complex que serveix com a pont amb els conceptes són els *pseudoconceptes*; els pseudoconceptes com "forma triangular" s'apliquen a la majoria d'exemples positius del concepte triangle, però el significat que li dóna la persona no és el mateix que té el concepte "triangle". El fet que els pseudoconceptes i els conceptes comparteixin la mateixa paraula i la majoria dels exemples positius del concepte fa que sigui difícil adonar-nos que no en comparteixen el mateix significat.

10
Per exemple, el llibre "El lenguaje de las funciones y las gráficas" del Shell Centre for Mathematical Education" (1990). O el crèdit variable d'ESO "Lectura i representació de gràfics" (Bujosa i Font 1995).

11
La taula es troba en Fuente i Aranda (1994) i els esquemes que se'n deriven es troben en García, F. J. (1994)

12
Els textos escolars analitzats han estat els següents:

Alvarez, F.; García, C.; Garrido, L.M.; Vila, A. (1987) *Factor-3: Matemáticas de 3º de BUP*. Vicens-Vives: Barcelona.

Anzola, M.; Vizmanos, J.R. (1997) *Matemáticas de 3º de BUP*. SM : Madrid.

Bujosa, J.M.; Cañadilla, J.L.; Fargas, M.; Font, V. (1997). *Matemàtiques de 1r de Batxillerat* (Modalitat Ciències/Tecnologia). Castellnou: Barcelona.

Bujosa, J.M.; Cañadilla, J.L.; Fargas, M.; Font, V. (1998). *Matemàtiques de 2n de Batxillerat* (Modalitat Ciències/Tecnologia). Castellnou: Barcelona.

Colera, J.; de Guzman, M.; Salvador, J. (1995) *Matemáticas de 3º de BUP*. Anaya. Madrid.

Besora, J.; Jané, A.; Guiteras, J.M.: (1998). *Matemàtiques de 1r de Batxillerat* (Modalitat Ciències/Tecnologia). McGraw-Hill: Espanya.

Segueixen el procediment habitual: Anaya, Vicens-Vives, McGraw-Hill (Catalunya)
Segueix una variació del procediment habitual: SM.
Desenvolupa l'alternativa 2 i el procediment habitual: Castellnou (la demostració tradicional hi és com un tema d'ampliació al llibre de 2n).

13
CACULA (Oliveró, M; Abrev, J.: 1988. Grupo Editorial Iberoamérica) és un graficador que permet efectuar els passos següents:

- Dibuixar la gràfica de la funció $f(x) = \sin x$
- Per a un punto qualsevol $x = a$ dibuixar la recta tangent a la gràfica de la funció $f(x) = \sin x$ amb un triangle de base 1 i d'altura el pendent de la recta tangent ($f'(a)$).
- Moure el punt anterior sobre la gràfica de la funció $f(x) = \sin x$ utilitzant el teclat (o el ratolí) de l'ordinador per obtenir diferents valors de $f'(a)$.

14
Aquesta alternativa està inspirada en Tall (1992).

15
Per elaborar l'estudi històric recollit en el subobjectiu 1.4 hem utilitzat, pel que fa a la història del concepte de funció, els treballs de Youschkevitch (1976), de Lacasta i Pascual (1998) i d'Arenzana (1997). L'apartat que explica el pas de la corba a l'expressió simbòlica en Descartes l'hem elaborat a partir de la lectura directa de la Geometria de Descartes (1981). Per elaborar l'evolució del càlcul diferencial al llarg del segle XVII hem utilitzat el llibre de Boyer (1959), el llibre de González Urbaneja (1992) , la recopilació de Grattan-Guinness (1984), la lectura directa de la Geometria de Descartes (1981), el mètode de les fluxions de Newton (1740) i els Principia de Newton (1982). Per completar el tema també hem utilitzat llibres generals sobre la història de les matemàtiques: Boyer (1986), Colette (1985) i Kline (1992).

16
Si bé Descartes considera que les corbes que es poden dibuixar de manera escalonada són algèbriques, no en dóna cap demostració. La demostració que es poden identificar el conjunt de corbes algèbriques planes amb el conjunt de corbes que poden ser dibuixades de manera escalonada (almenys localment) va ser resolta dos segles després per Kempe (Bos 1981 i Bartolini 1998).