VICENÇ FONT MOLL

# PROCEDIMENTS PER OBTENIR EXPRESSIONS SIMBÒLIQUES A PARTIR DE GRÀFIQUES. APLICACIONS A LES DERIVADES

***********************

Departament de Didàctica de les Ciències Experimentals i de la Matemàtica

Programa de Didàctica de les Ciències Experimentals i de la Matemàtica

Bienni 1994-1996

Per optar al títol de Doctor en Filosofia i Ciències de l'Educació
Secció Ciències de l'Educació

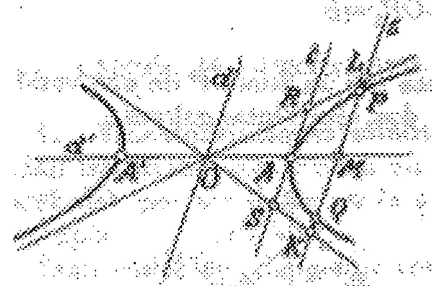
Director: Josep María Nuñez i Espallargas

Tutor: Josep María Nuñez i Espallargas

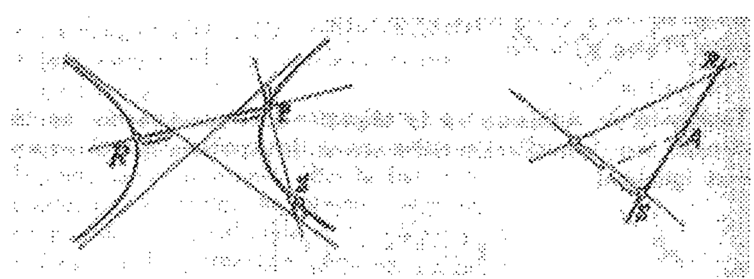
UNIVERSITAT DE BARCELONA

BARCELONA 1999

17
Donat que les asímptotes són raigs dobles de la involució de diàmetres conjugats, separen harmònicament cada parella d'elles. Traçada una secant qualsevol *s* i considerant el diàmetre *d* paral·lel a ella, la recta diametral *d'* conjugada passarà pel punt mitjà *M* del segment *LK* interceptat per *s* entre les asímptotes.. Donat que *M* també és el punt mitjà de la corda *PQ*, interceptada en la hipèrbola, (veure Puig Adam, 1981, 33,§ 5, pàgs. 253-254) resulta LP = KQ. Per tant: Els segments d'una secant qualsevol compresos entre les asímptotes i la corba són iguals



Si es dóna, doncs, les dues asímptotes i un punt P d'una hipèrbola, aquesta propietat permet construir tants punts d'ella, *R*, *S*, ....com es vulgui.



El mateix raonament aplicat a la tangent *t* en un punt *A* porta a la conseqüència següent: El punt de contacte d'una tangent qualsevol a una hipèrbola biseca el segment *RS* interceptat en ella per les asímptotes, la qual cosa permet una senzilla construcció de la tangent en un punt de la corba quan es coneixen les seves asímptotes.

Aquesta demostració està en Puig Adam, 1981, 34,§ 4, pàgs. 260. La demostració de "Donat que *M* també és el punt mitjà de la corda *PQ*, interceptada en la hipèrbola, resulta *LP* = *KQ*" es troba en Puig Adam, 1981, 33,§ 5, pàgs. 253-254.

18
Citat en Andersen 1984, pàg. 33.

19
Citat en González Urbaneja (1992, pàg. 202).

**Capítol 4**

1
Citat en Azcárate, Bosch, Casadevall i Caselles (1996, pàg. 24-26)

# BIBLIOGRAFIA

# BIBLIOGRAFIA

ANDERSON, J.R.: (1983). Argumentos acerca de las representaciones mediante la capacidad para formar imagenes mentales, en Sebastián M.V. (comp): *Lecturas de psicologia de la memoria* (pàgs. 385-425). Madrid: Alianza Universidad.

ANDERSEN, K.: (1984). Las técnicas del cálculo, 1630-1660, en Grattan-Guinness (comp.): *Del cálculo a la teoria de conjuntos, 1630-1910. Una introducción histórica* (pàgs. 22-68). Madrid: Alianza Universidad.

ARENZANA, V.: (1997). Evolución del concepto de función hasta comienzos del siglo XIX. Algunas sugerencias pedagógicas. *Epsilon*,13,1, pàgs. 67-77.

ARTIGUE, M.: (1990). Epistémologie et Didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 10, 2-3, pàgs. 243-285.

ARTIGUE, M.: (1991). Analysis, en D. Tall (ed.): *Advanced mathematical thinking.* (pàgs. 167-198). Dordrecht. Kluwer A. P.

ARTIGUE, M.: (1994). Didactical engineering as a framework for the conception of teaching products, en Bielher i d'altres: *Didactics of mathematics as a scientific discipline* (pàgs. 27-39). Dordrecht. Kluwer A. P.

ARTIGUE, M.: (1995a). Ingeniería didáctica, en P. Gómez (ed): *Ingeniería didáctica en educación matemática* (pàgs. 33-59). México: Grupo Editorial Iberoamericano/Una empresa docente.

ARTIGUE, M.: (1995b). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos, en P. Gómez (ed): *Ingeniería didáctica en educación matemática* (pàgs. 97-140). México: Grupo Editorial Iberoamericano/Una empresa docente.

ARTIGUE, M.: (1998). Teaching and Learning Elementary Analysis, en C. Alsina i d'altres (eds.): *ICME 8 (1996). Selected Lectures* (pàgs. 15-29). Sevilla: S.A.E.M. THALES.

ÁVILA, R.: (1996). Detección de algunos obstáculos que dificultan la asimilación y del manejo de los conceptos presentes en el análisis y comprensión de los problemas sobre variación. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 10,1, pàgs. 121-126. Puerto Rico: UPR.

AZCÁRATE, C.: (1990). *La velocidad: introducción al concepto de derivada.* Tesis doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona.

AZCÁRATE, C.: (1992). Estudio de los esquemas conceptuales y de los perfiles de alumnos de 2° de BUP, en relación con el concepto de pendiente de una recta. *Epsilón*, núm 24, pàgs. 9-22.

AZCÁRATE, C.: (1995). Sistemas de representación. *Uno*, núm 4, pàgs. 53-61.

AZCÁRATE, C..; CASADEVALL, M.; CASELLES, E.; BOSCH, D. (1996). *Cálculo Diferencial e Integral*. Madrid. Síntesis.

AZCÁRATE, C.: (1997). Si el eje de ordenadas es vertical, ¿qué podemos decir de las alturas de los triángulos?. *Suma*, núm. 25, pàgs. 23-30.

BACHELARD, G.:(1973). *La formación del espíritu científico*. Buenos Aires: Siglo XXI.

BALACHEFF N.: (1990), Towards a "problématique" for research on mathematics teaching. *Journal for Research in Mathematics Education*, 21, 4, pàgs. 259-272.

BARTOLINI, M.: (1998). Drawing instruments: historical and didactical issues, en C. Alsina i d'altres (eds.): *ICME 8 (1996). Selected Lectures* (pàgs. 43-55). Sevilla: S.A.E.M. THALES.

BERGER, P.; LUCKMANN, T.: (1993). *La construcción social de la realidad*. Buenos Aires: Amorrortu.

BERKELEY, G.: (1985). *Principios del conocimiento humano*. Madrid: Sarpe (Obra publicada originàriament en 1710).

BLOOR, D.: (1998) *Conocimiento e imaginario social*. Barcelona: Gedisa.

BISHOP, A. J. : (1996) Implicacions didàctiques de les recerques sobre visualització. *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques*, 11, 2 , pàgs. 7-18.

BORBA, M.C.; CONFREY, J.: (1996). A student's construction of transformations of functions in a multiple representational environment. *Educational Studies in Mathematics*, núm. 31, pàgs. 319-337.

BOSCH, M.: (1994). *La dimensión ostentiva en la actividad matemática. El caso de la proporcionalidad*, tesis doctoral, Universitat Autònoma de Barcelona.

BOSCH, M.; Chevallard, Y.: (1999). La sensibilité de l'activité mathématica aux ostensifs. Object d'etude et problématique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19, 1, pàgs. 77-124.

BOS, H.J.M.: (1981). On the Representation of curves in Descartes's Géométrie. *Archive for History of Exact Sciences*, núm. 24, pàgs. 295-338.

BOS, H.J.M.: (1984). Newton, Leibniz y la tradición leibniziana, en Grattan-Guinness (comp.): *Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630-1910. Una introducción histórica* (pàgs. 69-124). Madrid: Alianza Universidad.

BOYER, C.B.: (1959). *The history of the calculus and its conceptual development.* New York: Dover

BOYER, C.B.: (1986). *Historia de la matemática.* Madrid: Alianza Universidad Textos.

BOURBAKI, N.: (1976) *Elementos de historia de las matemáticas.* Madrid: Alianza Universidad.

BREIDENBACH, D.; DUBINSKY, E.; HAWKS, J.; NICHOLS, D.: (1992). Development of the process conception of function. *Educational Studies in Mathematics,* núm. 23, pàgs. 247-285.

BROUSSEAU, G.: (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en Mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 4, 2, pàgs. 165-198.

BROUSSEAU, G.: (1986). Fondements et méthodes de la didactiques des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 7, 2 , pàgs. 33-115. (Traducció al castellà de Centeno, J.; Melendo, B.; Murillo, J.: *Fundamentos de Didáctica de la Matemática* . Universidad de Zaragoza 1987).

BROUSSEAU, G.: (1997). *The theory of didactical situations.* Dordrecht: Kluwer A. P.

BROWN, T.: (1996). The phenomenology of the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics,* núm 31, pàgs. 115-150.

BUBNER, R.: (1984). *La filosofía alemana contemporànea.* Madrid: Cátedra

BUJOSA, J.M.; FONT, V.: (1995). *Lectura i representació de gràfics.* Barcelona: Castellnou.

BUNGE, M.: (1982). *Filosofía de la Física.* Barcelona: Ariel.

CANTORAL, R.: (1992). Acerca de la intuición del rigor: Notas para una reflexión didáctica. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa.* 6,1, pàgs. 24-29. México: UAEM.

CANTORAL, R.: ALVAREZ, T.: (1992). *Acerca de la noción de tangente,* publicació interna, ITAM.

CANTORAL, R.; FARFÁN, R.M.: (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Epsilon*, núm. 42, pàgs. 353-369.

CARNAP, R.: (1928). *Der Logische Aufbau der Welt*. Berlin: Welkreis-Verlag.

CARNAP, R.: (1981). Empirismo, semántica y ontologia, en Muguerza J. (sel.): *La concepción analítica de la filosofía* (pàgs. 400-419). Alianza Universidad: Madrid.

CARR, W. ; KEMMIS, S.: (1988). *Teoría crítica de la enseñanza*. Barcelona: Martínez Roca.

CASSIRER, E.: (1976). *Filosofía de las formas simbolicas*. Mèxico: Fondo de Cultura Econòmica.

CASTRO, E.; CASTRO, E.; (1997). Representaciones y modelización, en L. Rico (Coord): *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pàgs. 95-124). Barcelona: ICE UB/HORSORI.

CHEVALLARD, Y.: (1989). Le concept de rapport au savoir. Rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel. Seminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique. Université Joseph Fourier-Grenoble I.

CHEVALLARD, Y.: (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* , 12, 1, pàgs. 73-112.

CHEVALLARD, Y. (1996). La fonction professorale: esquisse d'un modèle didactique, en R. Noirfalise et M-J. Perrin-Glorian (coord.). *Actes de la VIII École d'éte de didactique des mathématiques.* Clermont-Ferrand: IREM de Clermont-Fd.

CHEVALLARD, Y.: (1997) *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado.* Buenos Aires. Aique. (Obra publicada originàriament l'any 1991).

COLL, C.: (1983). La construcción de esquemas de conocimiento en el proceso de enseñanza/aprendizaje, en C. Coll (Comp.): *Psicología genética y aprendizajes escolares* (pàgs. 183-205). Madrid: Siglo XXI.

COLL, C.: (1989). *Marc curricular per a l'ensenyament obligatori.* Barcelona: Departament d'Ensenyament de la Generalitat.

COLLETE, J.P.: (1985). *Historia de las matemáticas* (Vol I i II). Madrid: Siglo XXI.

CORNU, B.: (1991). Limits, en D. Tall (ed.): *Advanced mathematical thinking* (pàgs. 153-166). Dordrecht: Kluwer A. P.

CROZIER, M.; FRIEDBERG, E.: (1977). *L'acteur et le système*. Seuil: Paris.

CUNNINGHAM, S.; ZIMMERMANN, W. (eds.): (1991). *What is Mathematical Visualization.*. Washington: Mathematical Associaton of America.

CHURCHLAND, P.M.: (1992). *Materia y conciencia*. Gedisa: Barcelona.

DAVIS, R. B.: (1984). *Learning Mathematics: The Cognitive Science Approach to Mathematics*. Norwood N.J.: Ablex.

DAVIS, P. J.: (1993). Visual theorems, *Educational Studies in Mathematics*, núm. 23, pàgs. 333-344.

DELGADO, C.; AZCÁRATE, C.: (1996) Study of the evolution of graduated student's concept images while learning the notions of limit and continuity. *Proceedings of the 20th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*.Vol II, pàgs 289-296.

DELGADO, C.: (1998). *Estudio microgenético de esquemas conceptuales asociados a definiciones de límite y continuidad en universitarios de primer curso*. Tesis doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona.

DESCARTES, R.: (1981). *Discurso del método, Dióptrica, Meteoros y Geometría*. Madrid: Alfaguara (Obra publicada originàriamente en 1637).

DEULOFEU, J.: (1995). Concepciones de los alumnos de secundaria sobre distintas gráficas de funciones. *Uno*, núm. 4, pàgs. 6-16.

DOG : (1996). Diari oficial de la Generalitat núm. 2181.

DÖRFLER, W., (1991). Forms and Means of Generalization in Matehematics, en Bishop A.J. Mellin-Olsen S., Van Dormolen, J. (eds.): *Knowledge: Its Growth Through Teaching* (pàgs. 63-85). Dordrecht: Kluwer A.P.

DOU, A.: (1974). *Fundamentos de la matemática*. Barcelona: Labor.

DOUADY, R.: (1991). Tool, object, setting, window: elements for analysing and constructing didactical situations in mathematics, en A. J. Bishop & S. Melling Olsen (eds.): *Knowledge: Its Growth Through Teaching* (pàgs. 109-130). Dordrecht : Kluwer A. P.

DREYFUS, T. (1994). Imagery and Reasoning in Mathematics and Mathematics Education, en C. Gaulin i d'altres (eds.): *ICME 7 (1992) . Selected Lectures* (pàgs. 107-123). Québec: Les Presses de l'Université Laval.

DUBINSKY , E.: (1991). Reflective Abstracción in Advanced Mathematical Thinking, en D. Tall (ed.): *Advanced mathematical thinking* (pàgs. 95-123). Dordrecht. Kluwer A. P.

DUBINSKY , E.; HAREL, G. (eds.): (1992). *The Concept of Function: Aspects of epistemology and pedagogy*. Washington D.C: MAA Notes 25.

DUBINSKY, E.: (1996) Aplicación de la perspectiva piagetana a la educación matemática universitaria. *Educación Matemática,* 8, 3, pàgs. 25-41.

DUVAL, R.: (1995). *Sémiosis et penseé humaine*. Bern: Peter Lang S.A.

ECO, U.: (1995). *Tratado de semiótica general.* Barcelona: Lumen.

EISENBERG, T.: (1991). Functions and Associated Learning Difficulites, en D. Tall (ed.): *Advanced mathematical thinking* (pàgs. 140-152). Dordrecht: Kluwer A. P.

ELLIOTT, J.: (1993). Reconstructing Teacher Education. Londres: Falmer Press.

ENGLISH, L.D: (ed.) (1997). *Mathematical reasoning: Analogies, metaphors and images*. Hillsdale, N.J.: Erlbaum.

ERNEST P.: (1991). *The philosophy of mathematics education*. London: Falmer Press.

ERNEST P.: (1992). The Nature of Mathematics: Towards a Social Constructivist Account, *Science and Education,* 1 (1), pàgs. 89-100.

ERNEST, P.: (1994). The dialogical nature of mathematics, en Ernest, P. (ed): *Mathematics, Education and Philosophy: An International Perspective* (pàgs. 33-48). London: The Falmer Press.

ERNEST, P.: (1998) Social Constructivism as a Philosophy of Mathematics, en C. Alsina i d'altres (eds.): *ICME 8 (1996). Selected Lectures* (pàgs. 153-171). Sevilla: S.A.E.M. THALES.

FANO, G.: (1972). *Neopositivismo, análisis del lenguaje y cibernética.* Barcelona: A. Redondo

FILLOY, E.; LEMA, S.: (1996). El teorema de Tales; significado y sentido en un sistema matemático de signos, en F. Hitt (ed.): *Investigaciones en matemática educativa* (pàgs.

55-75). México: GEI

FISCHBEIN, E.: (1993). The Theory of Figural Concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 24, 2, pàgs. 139-162.

FONT, V.; NUÑEZ, J.M.: (1995). Aspectos ideológicos en la contextualización matemática. Una aproximación histórica. *Revista de educación*, núm. 306, pàgs. 293-314.

FUENTE de la, M.; ARANDA, D.: (1994) Sobre gráficas y funciones en la ESO. *Uno*, núm. 2, pàgs. 109-119.

FREGE, G.: (1973) Sobre el sentido y la denotación, en T.M. Simpson (Ed): *Semántica filosófica: problemas y discusiones* (pàgs. 3-27). Buenos Aires: Siglo XXI (Obra publicada originàriament en 1892).

FREUDENTHAL, H.: (1983) *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures.* Dordrecht: Reidel Publishing Company.

GARCÍA, F.J.: (1994). Funciones de la calculadora gráfica. *Uno*, núm. 2, pàgs 103-108.

GARCÍA, M. (1998). *Un estudio sobre la articulación del discurso matemático escolar y sus efectos en el aprendizaje del cálculo.* Tesis de Maestría. México: Cinvestav.

GARCÍA, M.; LLINARES, C.: (1994). Algunos referentes para analizar tareas matemáticas. *Suma*, núm. 18, pàgs. 13-23.

GARCÍA-BARÓ, M.: (1993). *Categorías, intencionalidad y números.* Madrid: Tecnos.

GASCÓN, J.: (1998). Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 18, 1, pàgs. 7-34.

GLASERSFELD, E. von (ed.): (1991). *Radical constructivism in mathematics education.* Dordrecht: Kluwer A. P.

GLASERSFELD, E. von: (1995). *Radical Constrctivism. A Way of Knowing and Learning.* London: The Falmer Press.

GODINO, J D.: (1991). Hacia una teoría de la Didáctica de la Matemática, en Godino, Gómez, Gutiérrez, Rico i Sierra (eds.): *Àrea de conocimiento. Didáctica de la Matemática* (pàgs. 105-148). Madrid: Síntesis.

GODINO, J D. (1993). La metáfora ecológica en el estudio de la noosfera matematica. *Quadrante.* 2, 2, pàgs. 69-79.

GODINO, J. D.: (1996). Mathematical concepts, their meanings and understanding. En, L. Puig i A. Gutiérrez (eds.): *Proceedings of the 20 th PME Conference* (Vol 2, pàgs. 417-424). Valencia.: Universidad de Valencia.

GODINO, J D.; BATANERO, C.: (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 14, 3, pàgs. 325-355.

GODINO, J. D.; BATANERO, C.: (1998). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in Mathematics Education. En J. Kilpatrick i A. Sierpinska (eds.): *Mathematics education as a Research Domain. A Search for Identity* (pàgs. 177- 195). Dordrecht: Kluwer, A. P.

GODINO, J. D. ; RECIO, A. M.: (1997). Meanings of proof in mathematics education. En, E.Pehkonen (ed.), *Proceedings of the 21th International Conference of PME* (Vol 2. pàgs. 313-321). Lahti, Finland.

GODINO, J. D. ; RECIO, A. M.: (1998). A semiotic model for analysing the relationship between thought, language and context in mathematics education. En: A. Olivier i K. Newstead (eds.): *Proceedings of the 22nd PME Conference,* (Vol 3, pàgs. 3-1 a 3-8). Stellenbosch: University of Stellenbosch, Faculty of Education.

GOLINSKY, J.: (1998). *Making natural Knowledge. Constructivim and the History of Science*. Cambridge: Cambridge University Press.

GÓNZALEZ URBANEJA, P.M.: (1992). *Las raices del càlculo infinitesimal en el siglo XVII*. Madrid: Alianza Universidad.

GORGORIÓ, N.; JONES, K.: (1997). Cabri i visualització. *Biaix*, núm. 10, pàgs. 21-23.

GRAY, E.M..; TALL, D.: (1994). Duality, Ambiguty and Flexibility: A Proceptual View of Simple Arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, núm. 26, pàgs 115-141.

GRATTAN-GUINNESS, I.(comp.): (1984). *Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630-1910. Una introducción histórica*. Madrid: Alianza Universidad.

GRUP ZERO : (1978). *Guia del Professor*. Barcelona: ICE-UAB.

GRUP ZERO : (1980). *Introducció a les derivades.* Barcelona: ICE-UAB.

GRUP ZERO: (1982a). *Introducció al càlcul diferencial.* Barcelona: ICE-UAB.

GRUP ZERO: (1982b). Metodologia: la resolución de problemas. *Cuadernos de Pedagogia*, núm. 88, pàgs. 9-11.

GRUP ZERO : (1984). *Càlcul diferencial*. Barcelona: ICE-UAB.

GUZMAN, M.: (1996) *El rincón de la pizarra. Ensayos de visualización en análisis matemático*. Madrid: Pirámide.

HABERMAS, J.: (1987) *Teoría de la acción comunicativa*. Madrid: Taurus

HABERMAS, J.: (1988) *La lógica de las ciencias sociales*. Madrid: Tecnos

HANSON, N. R.: (1967) *Patrones de descubrimiento*. Madrid: Alianza Editorial.

HOYLES, C.; NOSS, R.: (1997). *Windows on mathematical meaning. Learning cultures and computers*. Dordrecht:. Kluwer A. P.

HOYOS, V.: (1996). *La transición del pensamiento algebraico procedimental básico al pensamiento algebraico analítico*. Tesis doctoral. México. Cinvestav.

HUME, D.: (1981). *Tratado de la naturaleza humana*. Madrid. Editora Nacional (Obra publicada originàriament en 1739-1740).

HUSSERL, E.: (1993). *Ideas relativas a una fenomenología pura y a una filosofía fenomenológica.* Madrid: F.C.E. (Obra publicada originàriament en 1913).

HUSSERL, E.: (1991). *La crisis de las ciencias europeas y la fenomenología trascendental*. Barcelona: Crítica.(Obra publicada originàriament en 1954).

HUSSERL, E.: (1986). *Meditaciones cartesianas*. Madrid: Tecnos. (Obra publicada originàriament en 1929).

INHELDER, B.; PIAGET, J.: (1972). *De la lógica del niño a la lógica del adolescente*. Buenos Aires: Paidos.

JAMES, W.: (1975). *Pragmatismo: un nuevo nombre para algunos antiguos modos de pensar*. Buenos Aires: Aguilar. (Obra publicada originàriament l'any 1907).

JANVIER, C.: (1987). Translation processes in mathematics education, en Janvier, C. (ed.): *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pàgs. 27-32). Hillsdale, New Jersey : Lawrence Erlbaum A.P.

JOHNSON-LAIRD, P.N.: (1987). Modelos mentales en ciencia cognitiva, en D. A. Norman (compl): *Perspectivas de la ciencia cognitiva* (pàgs. 179-231).Barcelona: Paidós.

KANT, E.: (1984). *Crítica de la razón pura.* Madrid: Alfaguara (Obra publicada originàriament en 1764).

KAPUT, J.: ( 1987). Toward A Theory of Symbol Use in Mathematics, en Janvier C. (ed.): *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pàgs. 159-195). Hillsdale N.J.: Erlbaum A.P.

KAPUT, J.: ( 1991). Notations and Representations as Mediators of Constructive Processes, en E. Von Glasersfeld (ed.): *Radical constructivism in mathematics education* (pàgs 53-74). Dordrecht: Kluwer A. P.

KAPUT, J.: (1992). Technology and mathematics education, en Grouws, D.A. (ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pàgs. 515-556). New York: MacMillan P.C.

KEITEL, C.: (1989). Mathematics and Technology. *For the Learning of Mathematics,* 9,1, pàgs. 7-13.

KEITEL, C.: (1993). Implicit Mathematical Models in Social Practice and Explicit Mathematics Teaching by Applications, en Lange, J. i d'altres: *Innovations in Maths Education by Modelling and Applications* (pàgs. 19-30). Chichester: Ellis Horwood.

KEITEL, C.; KOTZMANN, E.; SKOVSMOSE, O.: (1993). Beyond the Tunnel-Vision: Analysing the Relationship between Mathematics, Society and Technology, en Keitel, C. i Ruthven, K (eds.): *Learning from Computers: Mathematics Education and Technology* (pàgs. 243-279). Berlin: Springer Verlag.

KENNY, A.: (1982). *Wittgenstein.* Madrid: Alianza Universidad

KLINE, M.:. (1992). *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros dias* (Vol, I,II i III). Madrid: Alianza Universidad.

KNORR CETINA, K. D.: (1996). *Epistemic Cultures: How Scientists Make Sense,* Cambridge, MA: Harvard University Press.

KUHN, T. S.: (1971). *La estructura de las Revoluciones Científicas.* Madrid: Fondo de Cultura Económica.

KUHN, T. S.: (1982) *La tensión esencial. Estudios selectos sobre la tradición y el cambio en el ámbito de la ciencia.* Madrid: Fondo de Cultura Económica.

LACASTA, E.; PASCUAL, J.R.: (1998) *Las funciones en los gráficos cartesianos.* Madrid: Síntesis.

LAKATOS, I.: (1986) *Pruebas y refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático.* Madrid: Alianza Universidad.

LAKATOS, I.: (1981) *Matemáticas ciencia y epistemología.* Madrid: Alianza Universidad.

LAKATOS, I.: (1983) *La metodologia de los programas de investigación científica.* Madrid: Alianza Universidad.

LAKOFF, G,; JOHNSON, M.: (1991). *Metáforas de la vida cotidiana.* Madrid: Cátedra.

LATORRE, A.; del RINCÓN, D.; ARNAL, J.: (1996). *Bases metodológicas de la investigación educativa.* Barcelona: GR92.

LENIN, V. I.: (1975) *Materialismo y empiriocriticismo.* Barcelona. Ed. Grijalbo (Obra publicada originariament en 1909).

LLORENS, J.L.: (1996). Aplicación del modelo de Van Hiele al concepto de aproximación local. *Suma.* núm. 22, pàgs 13-24.

LOCKE, J.: (1956). *Ensayo sobre el entendimiento humano.* México. FCE ( Obra publicada originàriament en 1690).

LOVELL, K.: (1986). *Desarrollo de los conceptos básicos matemáticos y científicos en los niños.* Madrid: Morata.

LUHMANN, N.: (1998). *Sistemas sociales. Lineamientos para una teoría general.* Barcelona: Anthropos.

MACNAB, D.S.; CUMMINE, J.A.: (1992). *La enseñanza de las matemáticas de 11 a 16.* Madrid: Visor.

MERTON, R.: (1977) *La sociología de la ciencia.* Madrid: Alianza Universidad.

MIRAS, M: (1993). Un punto de partida para el aprendizaje de nuevos contenidos: los conocimientos previos. En: C. Coll, E. Marin, T. Mauri, M. Miras, J. Onrubia, I. Solé, A. Zabala (eds.). *El constructivismo en el aula* (pàgs. 47-63). Barcelona: Graó.

MORENO, M.; AZCARÁTE, C .:(1997). Concepciones de los profesores sobre la enseñanza de las ecuaciones diferenciales a estudiantes de química i biología. Estudio de casos. *Enseñanza de las ciencias,* 15, 1, pàgs. 21-34.

NEWTON, I.: 1740. *La methode des fluxions, et des suites infinies.* Paris, Chez DE BURE l'aîné, Libraire, Quay des Auguftins, à Saint Paul.

NEWTON, I.:(1982). *Principios matemáticos de la filosofía natural y su sistema del mundo*. Madrid: Editora Nacional. (Obra publicada originariamente en 1687).

NORMAN, D.A.: (1987). Doce problemas para la ciencia cognitiva, en D. A. Norman (compl): *Perspectivas de la ciencia cognitiva* (pàgs. 315-350). Barcelona: Paidós.

OGDEN , C. K. ; RICHARDS, I. A. (1964). *El significado del significado*. Buenos Aires: Paidós. (Obra publicada originàriament en 1923).

PIAGET, J., (1978a). *Introducción a la epistemologia genética. I. El pensamiento matemàtico*. Buenos Aires: Paidós.

PIAGET, J.: (1978b). *La equilibración de las estructuras cognitivas*. Madrid: Siglo XXI.

PIMM, D.: (1990). *El lenguaje matemático en el aula*. Madrid: MEC/Morata.

POPPER, K.R.: (1980). *La lógica de la investigación científica*. Madrid: Tecnos.

POPPER, K.R.: (1983). *Conjeturas y refutaciones*. Barcelona: Paidós.

POPPER, K.R.: (1992). *Conocimiento objetivo*. Madrid: Tecnos.

POTTER, J.: (1998) *La representación de la realidad. Discurso, retórica y construcción social*. Barcelona: Paidós.

POZO, J.I.: (1993). *Teorías cognitivas del aprendizaje*. Madrid: Morata.

PRESMEG, N.C.: (1986) Visualization in high-school mathematics. *For the Learning of Mathematics*, núm. 6, pàgs. 42-46.

PRESMEG, N.C.: (1997). Generalization using imagery in mathematics, en L.D. English (ed.): *Mathematical reasoning: Analogies, metaphors and images* (pàgs. 299-320). Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum A.

PRESMEG, N.C.: (1999). Possibilitats i paranys del pensament en imatges en la resolució de problemes matemàtics. *Biaix*, núm 14, pàgs. 21-27.

PUIG. L.: (1997). Análisis fenomenológico, en L. Rico (Coord) *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pàgs. 61-94). Barcelona: ICE UB/HORSORI.

PUIG ADAM, P.: (1981). Curso de geometria métrica. Madrid: Gómez Puig.

PYLYSHYN, Z. W.: (1983). La naturaleza simbòlica de las representaciones mentales, en Sebastián M.V. (comp): *Lecturas de psicologia de la memoria* (pàgs. 367-384).

Madrid: Alianza Universidad.

RAJOSON, L.: (1988). *L'analyse ecologique des conditions y des contraintes dans l'etude des phenomenes de transposition didactique: trois etudes de cas.* Thèse 3eme Cicle. Faculté des Sciences de Lumimy. Université d'Aix Marseille II.

REICHENBACH, H.: (1938). *Experience and Prediction.* Chicago: University of Chicago Press.

RESNICK, L.B.; FORD, W.W.: (1990). *La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos.* Barcelona: Paidós/MEC.

ROMBERG, T.; CARPENTER, T.; FENNEMA, E.; (1994). *Integrating research on the graphical representation of functions.* Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum.

ROMERO, C.: (1996). Una investigación sobre los esquemas conceptuales del continuo. Ensayo de un cuestionario. *Enseñanza de las ciencias,* 14,1, pàgs. 3-14.

ROMERO, I..: (1997). *La introducción del número real en enseñanza secundaria: una experiencia de investigación-acción.* Granada. Mathema

ROMERO, I.; RICO, L.: (1999). Representación y comprensión del concepto de número real. Una experiencia didáctica en secundaria. *EMA,* 4, 2, pàgs. 117-151.

ROSCH, E.; LLOYD, B.B.: (Eds) (1978). *Cognition and categorization.* Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum A.

RUTHVEN, K.: (1990). The influence of Graphic Calculator use on translation from graphic to symbolic forms. *Educational Studies in Mathematics,* núm. 21, pàgs. 431-450.

SCHMIDT, S.: (1998). Semantic structures of word problems - Mediators Between Mathematical Structures and Cognitive Structures?, en C.Alsina i d'altres (eds.): *ICME 8 (1996) . Selected Lectures* (pàgs. 381-395). Sevilla: S.A.E.M. THALES.

SCHUTZ, A.: (1962). *The Problem of Social Reality.* The Hague: Martinus Nijhof

SCHUTZ, A.: (1967) *The Phenomenology of the Social Word.* Evanston: North-western University Press.

SFARD, A.: (1991). On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin. *Educational Studies in Mathematics,* núm 22, pàgs. 1-36.

SFARD, A.: (1994). *Reification as a birth of a metaphor. For the Learning of* *mathematics*. 14, 1, pàgs. 44-55.

SFARD, A.: (1998). On acquisition metaphor and participation metaphor for mathematics learning, en C.Alsina i d'altres (eds.): *ICME 8 (1996) . Selected Lectures* (pàgs. 397-411). Sevilla: S.A.E.M. THALES.

SHELL CENTER FOR MATHEMATICS EDUCATION (1990). *El lenguaje de funciones y las gráficas*. Madrid: MEC.

SIERPINSKA A.: (1985). Obstacles epistémologiques relatifs à la notion de limite. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 6, 1, pàgs. 5-67.

SIERPINSKA A.: (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics,* núm 18, pàgs 371-387.

SIERPINSKA A. (1988). Sur un programme de recherche lié à la notion d'obstacle épistémologique. Actes du Colloque: *Construction des savoirs: obstacles et conflits*. Montreal: CIRADE.

SIERPINSKA A.: (1990), Some remarks on understanding in mathematics. *For the Learning of Mathematics,* 10, 3, pàgs. 24-36.

SIERPINSKA, A.: (1994). *Understanding in mathematics*. London: The Falmer Press.

SKEMP, R.: (1980). *Psicología del aprendizaje de las matemáticas*. Madrid: Morata

SKOVSMOSE, O.; NIELSEN, L.: (1996). Critical Mathematics Education, en Bishop, A. (ed.): *International Handbook of Mathematics Education* (pàgs. 1257-1288). Dordrecht: Kluwer A.P.

SKOVSMOSE, O.: (1998). Critical mathematics education - some philosophical remarks, en en C. Alsina i d'altres (eds): *ICME 8 (1996) . Selected Lectures* (pàgs. 413-425). Sevilla: S.A.E.M. THALES.

SUPPE, F.: (1979). *La estructura de las teorias cientificas*. Madrid: Editora Nacional.

TALL, D.; VINNER, S.: (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics,* 12, 2, pàgs.151-169.

TALL, D.: (1985). The gradient of a graph. *Mathematical Teaching,* núm 11, pàgs. 48-52.

TALL, D.: (1986). *Building and Testing a Cognitive Approach to the Calculus using*

*Computer Graphics*. Tesis doctoral. University of Warwick

TALL, D.: (ed.) (1991), *Advanced mathematical thinking*. Dordrecht: Kluwer A. P.

TALL, D. (1992): L'enseignement de l'analyse a l'age de l'informatique. en B. Cornu (ed.) *L'ordinateur pour enseigner les mathématiques* (pàgs. 161-182). Paris: Presses Universitaires de France.

TALL, D.: (1996). Functions and Calculus, en A.J. Bishop i d'altres (eds.): *International Handbook of Mathematics Education* (pàgs. 289-325). Dordrecht: Kluwer A.P.

TALL, D.: (1998). Information technology and mathematics education: enthusiasms, possibilites and realities, en C.Alsina i d'altres (eds.): *ICME 8 (1996). Proceedings* (pàgs. 65-82). Sevilla: S.A.E.M. THALES.

TOULMIN, S.: (1953). *The Philosophy of Science*. Londres. Hutchinson

TOULMIN, S.: (1961). *Foresight and Understanding*. Londres. Hutchinson

TOULMIN, S.: (1977). *El conocimiento Humano*. Madrid. Alianza Editorial

TRIGUEROS, M.; ALVAREZ, M.: (1995). Estudio longitudinal de los conceptos de tangente y derivada en estudiantes de administración. *Memorias del V Simposio Internacional en Educación Matemática "Elfriede Wenzelburger"*. (pàgs. 109-115). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

VAN DORMOLEN, J.: (1991). Metaphors Mediating the Teaching and Understanding of Mathematics, en A. J. Bishop & S. Melling Olsen (eds.): *Knowledge: Its Growth Through Teaching* (pàgs. 89-106). Dordrecht : Kluwer A. P.

VARELA, F.J.: (1990). *Conocer*. Barcelona: Gedisa

VERGNAUD, G.: (1990a) . Epistemology and psychology of mathematics education, en Nesher, en P. i Kilpatrick, J. (ed.). *Mathematics and cognition: A research synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pàgs. 14-30). Cambridge: Cambridge University Press.

VERGNAUD, G.: (1990b). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathèmatiques*. 10, 2-3, pàgs. 133-170.

VIGGIANI-BICUDO, M. A.: (1998). Philosophy of Mathematical Education: a phenomenological approach, en C.Alsina i d'altres (eds.): *ICME 8 (1996). Selected Lectures* (pàgs. 463-485). Sevilla, S.A.E.M. THALES.

VYGOTSKI, L.S.: (1987). *Pensamiento y lenguaje*. Buenos Aires: La Pléyade.

VINNER, S.: (1991) The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics, en D. Tall (ed.): *Advanced mathematical thinking* (pàgs. 65-81). Dordrecht: Kluwer A. P.

ZUBIETA, G.: (1996). *Sobre número y variación: antecedentes del cálculo.* Tesis Doctoral. México. Cinvestav.

WATZLAWICK, P.; BEAVIN, J.H.; JACKSON, D.: (1983). *Teoría de la comunicación humana.* Barcelona: Herder.

WATZLAWICK, P.: (comp.) (1993). *La realidad inventada.* Barcelona: Gedisa.

WENZELBURGER, E.: (1993a). *Cálculo diferencial.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

WENZELBURGER, E.: (1993b). Introducción de los Conceptos Fundamentales del Cálculo Diferencial e Integral - Una Propuesta Didáctica. *Educación matemática.* 5,3, pàgs. 93-123.

WINCH, P.: (1968). *The idea of a Social Science.* Londres: Routledge and Kegan P.

WITTGENSTEIN, L.: (1978). *Observaciones sobre los fundamentos de matemáticas.* Madrid: Alianza Editorial. (Obra publicada originàriament en 1956).

WITTGENSTEIN, L.: (1981). *Tractatus Logico-Philosophicus.* Barcelona: Laia (Obra publicada originàriament en 1921).

WITTGENSTEIN, L.: (1983). *Investigacions Filosòfiques.* Barcelona.: Laia. (Obra publicada originariament en 1953).

YOUSCHKEVITCH, A. P.: (1976). The Concept of Function up to the Middle of the 19 th Century. *Archive for History of Exact Sciences*, núm. 16, pàgs 37-85.

# ANNEX

## ACTIVITATS DE LA UNITAT

# INTRODUCCIÓ A LES DERIVADES

# Unitat 8

## Introducció a les derivades

### Introducció

El món que ens envolta es caracteritza perquè està canviant contínuament. Un cop d'ull als problemes que estudien les ciències de la naturalesa o les ciències econòmiques posa de manifest que una de les qüestions preferents és l'estudi de la manera com varia una magnitud en canviar una altra magnitud. El tema que ara estudiaràs, les derivades, et donarà els instruments matemàtics per descriure i predir aquests canvis en determinats fenòmens.

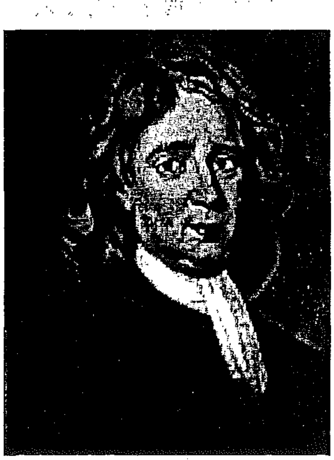
#### Una mica d'història

L'anàlisi infinitesimal moderna nasqué al principi del segle XVII amb el descobriment de la relació entre el càlcul de funcions derivades i el càlcul d'integrals. Aquesta relació la descobriren simultàniament Newton i Leibniz.

Aquesta nova branca de les matemàtiques va permetre resoldre tres dels grans problemes que més interessaven els matemàtics d'aquella època. El primer estava relacionat amb el progrés de la cinemàtica, a la qual havia contribuït Galileu. Els conceptes més característics de la cinemàtica, com els de velocitat i acceleració, necessitaven ser considerats com una relació entre la variació d'una magnitud i la variació d'una altra.

El segon d'aquests problemes era de natura geomètrica i consistia en la determinació de la tangent a una corba en un punt. El tercer problema estava relacionat amb el càlcul de longituds, àrees i volums.

La solució dels dos primers problemes porta al càlcul de derivades, mentre que el tercer porta al càlcul d'integrals.



Newton

Leibniz

## Taxa mitjana de variació d'una funció

Començarem aquesta unitat recordant el concepte de pendent d'una recta.

### ① Pendent d'una recta

En cursos anteriors has treballat situacions en què la gràfica de la funció que representa la relació entre dues variables és una recta que no necessàriament passa per l'origen de coordenades.

#### Activitat

**1** **a** En un mateix sistema d'eixos cartesians dibuixa la gràfica de les funcions següents:

$$y = 2x + 2 \qquad y = 2x \qquad y = 2x - 3$$

**b** Què tenen en comú aquestes gràfiques i quines coses les diferencien?

**c** Quina relació hi ha entre el nombre que multiplica la $x$ i l'angle que forma la recta amb l'eix d'abscisses?

**d** Representa en un mateix sistema d'eixos cartesians les funcions següents:

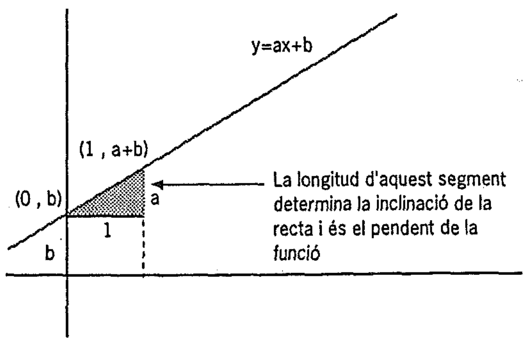
$$y = -2x + 3 \qquad y = -x + 3 \qquad y = x + 3 \qquad y = 3x + 3$$

Què hi observes? De què depèn que la funció sigui creixent o decreixent?

#### Recorda

A l'activitat anterior han aparegut funcions que tenen una fórmula del tipus $y = ax + b$, i que tenen com a gràfica una recta. Són les funcions afins. En aquestes funcions el nombre $a$ de la fórmula rep el nom de **pendent** perquè determina la inclinació de la recta. Si el pendent és positiu la recta és creixent, i si és negatiu la recta és decreixent.

| x | y |
|---|---|
| 0 | f(0)=a·0+b=b |
| 1 | f(1)=a·1+b=a+b |



## Activitat

**2** Dibuixa la gràfica de la funció $y = 5x + 1$ i digues si són correctes o no els següents comentaris d'uns alumnes:

DANIEL: Si ens situem en un punt qualsevol de la recta i ens desplacem 1 unitat cap a la dreta, després ens hem de desplaçar 5 unitats cap amunt en vertical per poder tornar a tocar la recta.

MÍRIAM: Si ens situem en un punt qualsevol de la recta i ens desplacem 1 unitat cap a la dreta, ens hem de desplaçar 5 unitats cap avall en vertical per tocar la recta.

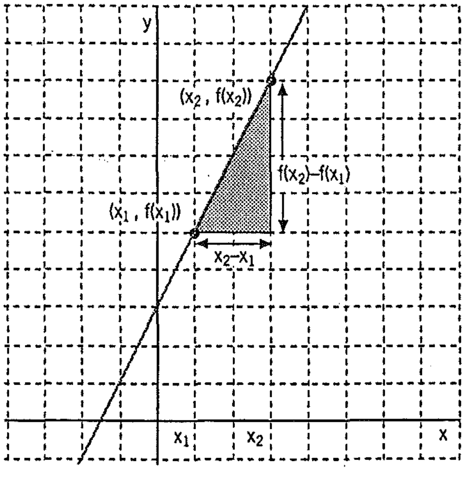
JOSEP: Si ens situem a l'origen de coordenades i ens desplacem 5 unitat cap a la dreta, ens hem de desplaçar 1 unitat cap amunt en vertical per tocar la recta.

ANNA: Si ens situem en un punt qualsevol de la recta i ens desplacem 2 unitats cap a la dreta, després ens hem de desplaçar 10 unitats cap amunt en vertical per tocar la recta.

ADRIÀ: Si ens situem en el punt de tall de la recta amb l'eix d'ordenades i ens desplacem 3 unitats cap a la dreta, després ens hem de desplaçar 15 unitats cap amunt en vertical fins a tocar la recta.

CRISTINA: Si ens situem en un punt qualsevol de la recta i ens desplacem un nombre d'unitats en horitzontal cap a la dreta, per tornar a tocar la recta ens hem de desplaçar 5 unitats cap amunt per cada unitat de desplaçament horitzontal.

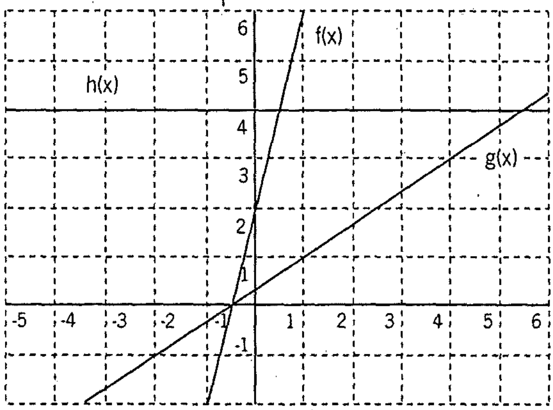
Per obtenir el pendent n'hi ha prou de situar-se en un punt de la recta, traslladar-se un nombre d'unitats en horitzontal, a continuació traslladar-se un nombre d'unitats en vertical fins a tornar a trobar la recta i, per últim, dividir el desplaçament vertical pel desplaçament horitzontal. El pendent ens dóna, per cada unitat horitzontal desplaçada cap a la dreta, el nombre d'unitats que cal desplaçar-se en vertical per poder tornar a la recta, amb signe + si va cap amunt, i amb signe – si va cap avall.

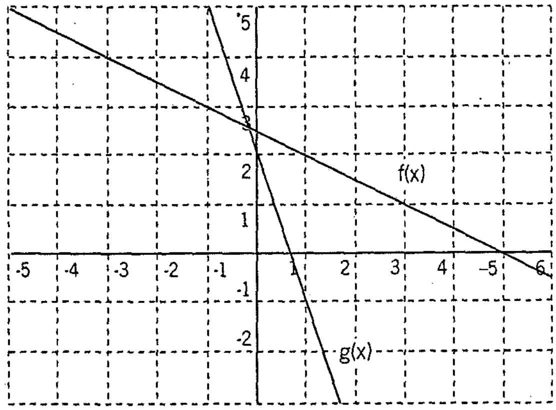



$$\text{pendent} = a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\text{variació vertical}}{\text{variació horitzontal}}$$

**Activitat**

**3** Busca el pendent de les funcions afins que tenen les gràfiques següents:



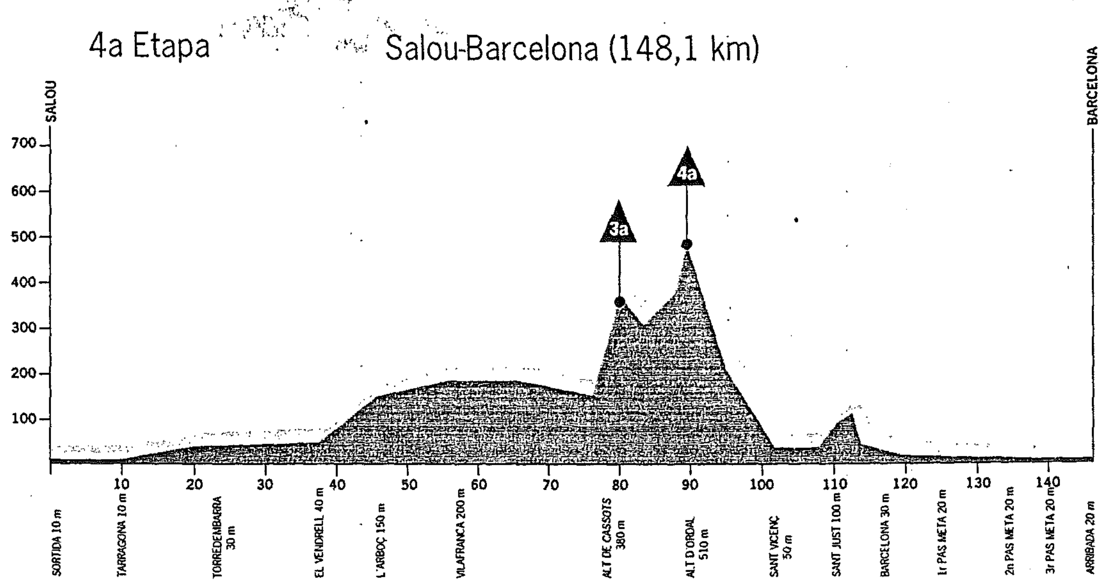




## ② Taxa mitjana de variació d'una funció

Saber calcular el pendent d'una recta a partir de la seva gràfica és un procediment que et permetrà resoldre activitats com les següents:

**Activitat**

**4** La gràfica següent representa el perfil d'una etapa de la volta ciclista a Catalunya. El recorregut és de 148,1 km i els ciclistes han de pujar i baixar dos ports de muntanya.

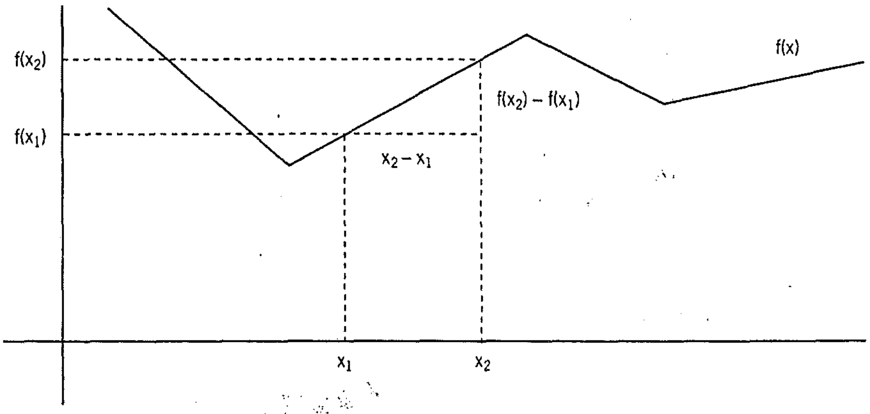



**a** En quins quilòmetres es troben els dos ports de l'etapa?

**b** Entre els punts (77 , 140) i (80 , 380) la gràfica es pot considerar un segment de recta? Quin n'és el pendent?

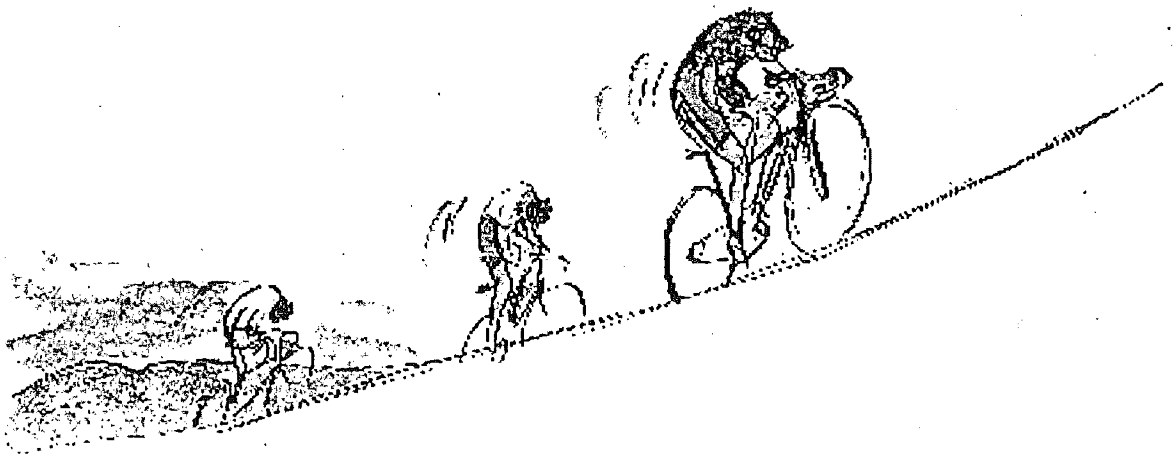
**c** Entre els punts (87 , 380) i (90 , 510) la gràfica es pot considerar un segment de recta? Quin n'és el pendent?
**d** Per què creus que el primer port és de tercera categoria i en canvi el segon és de quarta?

En el problema anterior hem considerat el pendent de la gràfica entre dos valors de la variable independent $x_1$ i $x_2$ tals que la gràfica entre aquests dos valors era un segment de la recta. En general, sempre que tinguem una gràfica formada per segments de rectes podem considerar el pendent entre dos valors de la variable independent $x_1$ i $x_2$ tals que la gràfica entre aquests dos valors sigui un segment de recta.



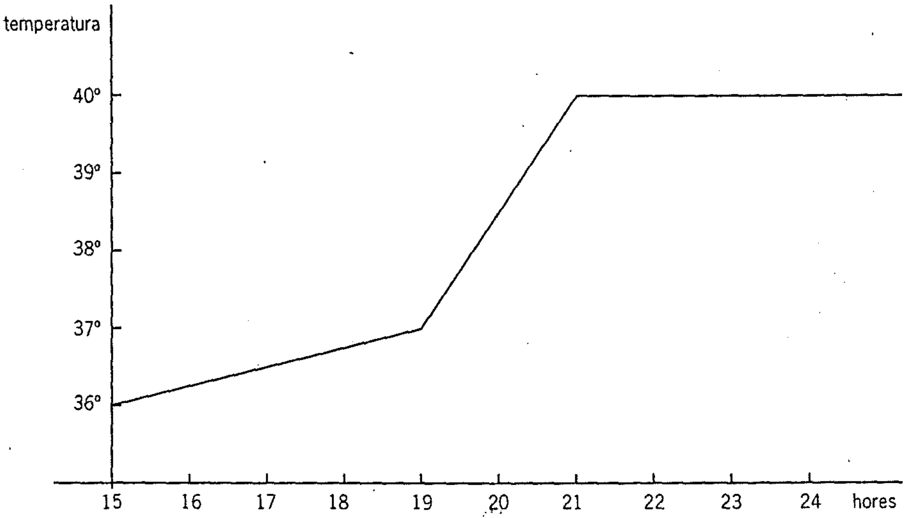

$$\text{pendent entre } x_1 \text{ i } x_2 = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

El quocient $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ amb $x_1 < x_2$, ens dóna la variació de la variable dependent per unitat de la variable independent i coincideix amb el pendent de la recta que resulta de perllongar el segment.



## Activitat

**5** La gràfica següent relaciona la temperatura d'un malalt amb l'hora del dia.




**a** Entre les 19 i les 21 hores, quant va augmentar la temperatura? I quin és l'augment per hora?

**b** Quant va augmentar la temperatura entre les 15 i les 19 hores? I quant va augmentar per hora?

**c** Entre les 16 i les 18 hores, quina va ser la variació de la temperatura per hora?

**d** Quin va ser l'augment de la temperatura entre les 19 i les 23 hores?

En els apartats *b* i *c* de l'activitat anterior, has vist que el quocient $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$, amb $x_1 < x_2$, no varia quan els punts $(x_1, y_1)$ i $(x_2, y_2)$ estan sobre el mateix segment de recta i que el valor d'aquest quocient ens dóna el pendent de la recta que s'obté en perllongar el segment. D'altra banda, a l'apartat *d* has vist que de vegades cal calcular el quocient $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ entre dos punts que no són sobre el mateix segment de recta. A l'activitat següent veuràs que aquest quocient també s'ha de calcular per funcions que tenen per gràfica una corba.

## Activitat

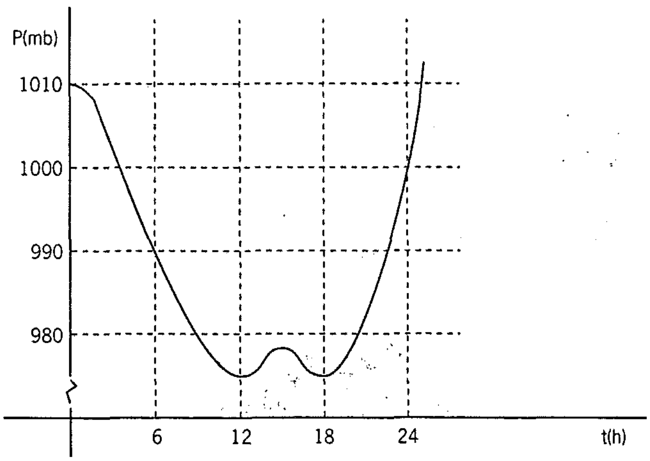
**6** Quan es fan prediccions del temps, el que interessa és conèixer les variacions brusques de la pressió atmosfèrica. És a dir, que no només importa la variació de la pressió atmosfèrica sinó també el temps que ha trigat a fer-la. Així doncs, tenim que:

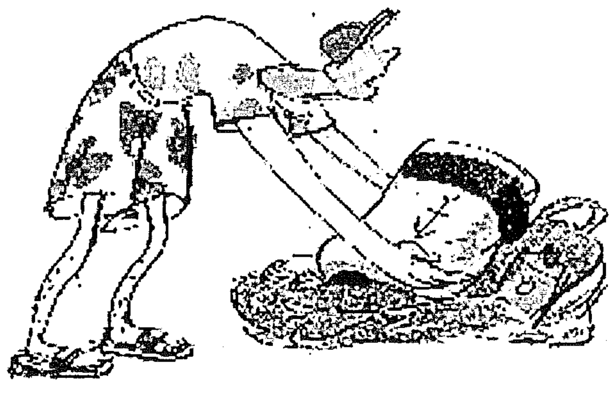
–Una caiguda de pressió atmosfèrica que duri més de tres hores i que sigui, de mitjana, superior a 1,7 mil·libars per hora anuncia mal temps. Si ja en fa, el mal temps continuarà.

–Un augment de pressió atmosfèrica que duri més de tres hores i que sigui de mitjana superior a 1,7 mil·libars per hora anuncia bon temps. Si ja en fa, continuarà el bon temps.

–Una pressió atmosfèrica estable no comporta cap canvi de temps.

Donada la gràfica següent, obtinguda en un observatori meteorològic, podem observar que la variació de la pressió atmosfèrica entre les 0 h i les 6 h ha estat de –20 mbar. Durant aquest interval de temps (de 6 hores) la variació per hora ha estat de –20/6 = –3,3 mbar/h. Això vol dir que a les 6 h de la matinada, l'observatori podia predir el mal temps.

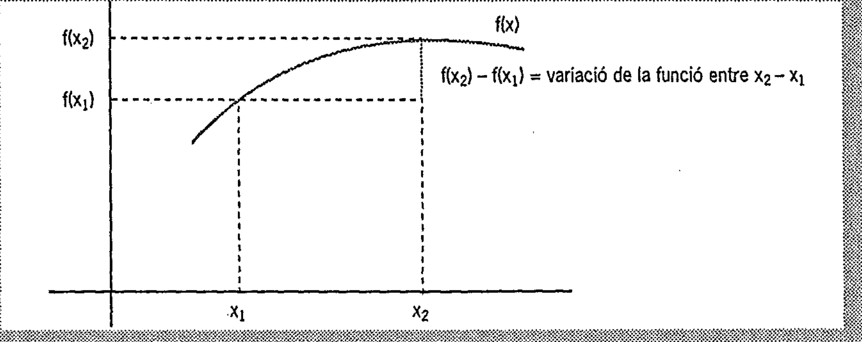


**a** Troba la variació per hora de la pressió atmosfèrica entre les 6 h i les 12 h, entre les 12 h i les 18 h, i entre les 18 h i les 24 h.
**b** Partint de la variació per hora de la pressió atmosfèrica entre les 6 h i les 12 h, les 12 h i les 18 h, i entre les 18 h i les 24 h, quin pronòstic podrà fer l'observatori a les 12 h, a les 18 h i a les 24 h?

## Recorda

Anomenem **variació d'una funció** $f(x)$ entre $x_1$ i $x_2$, amb $x_1 < x_2$, el nombre $f(x_2) - f(x_1)$.



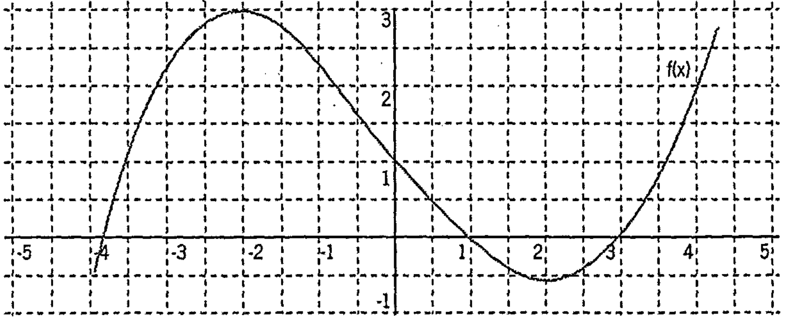

Anomenem **taxa mitjana de variació d'una funció** $f(x)$ entre $x_1$ i $x_2$, amb $x_1 < x_2$, el quocient

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Aquest quocient ens dóna la variació de la variable dependent per unitat de la variable independent.

## Activitats

**7** Donada la funció $f(x)$:




**a** Troba la variació de la funció entre –2 i 0.

**b** Troba la taxa mitjana de variació entre –2 i 0.

**c** Troba la variació de la funció entre 1 i 4.

**d** Troba la taxa mitjana de variació entre 1 i 4.

**8** Troba la taxa mitjana de variació entre 1 i 5 i entre 1 i 4 per a cada funció:

$$f(x) = 2x - 3 \qquad g(x) = x^2 \qquad h(x) = x^2 - 3$$

**9** Creus que la taxa mitjana de variació d'una funció entre dos valors de la variable independent depèn dels valors escollits ? Hi ha algun tipus de funció en la qual la taxa mitjana de variació no depengui dels valors escollits?

Una característica molt important que distingeix les funcions que tenen una recta per gràfica de les que tenen una corba per gràfica és que, per a les primeres, la taxa mitjana de variació entre dos valors de la variable independent sempre és constant, mentre que, per a les segones, canvia al llarg de la corba.

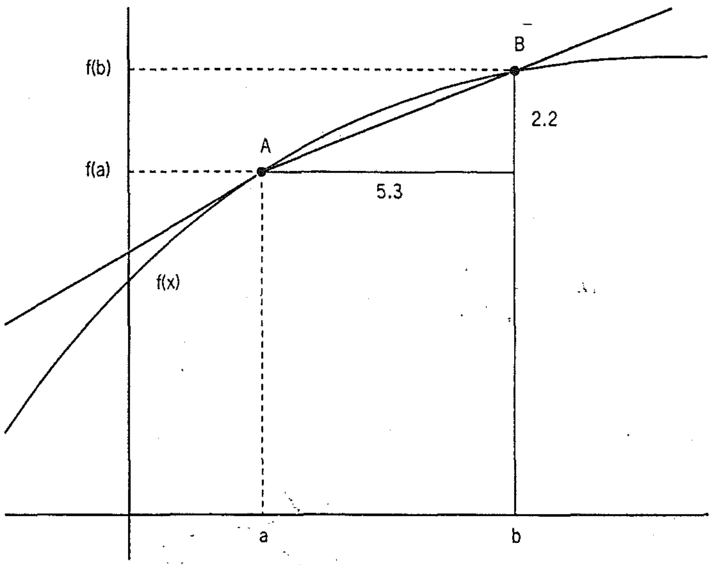
## ③ Interpretació geomètrica de la taxa mitjana de variació d'una funció

### Activitat

**10 a** La recta secant que passa pel punt $A\ (a\ ,f(a))$ i $B\ (b\ ,f(b))$, quin pendent té?

**b** Quina és la taxa mitjana de variació de la funció $f(x)$ entre $x = a$ i $x = b$?

**c** Quina relació hi ha entre la taxa mitjana de variació de la funció $f(x)$ entre $x = a$ i $x = b$ i el pendent de la recta que passa pels punts $A$ i $B$?

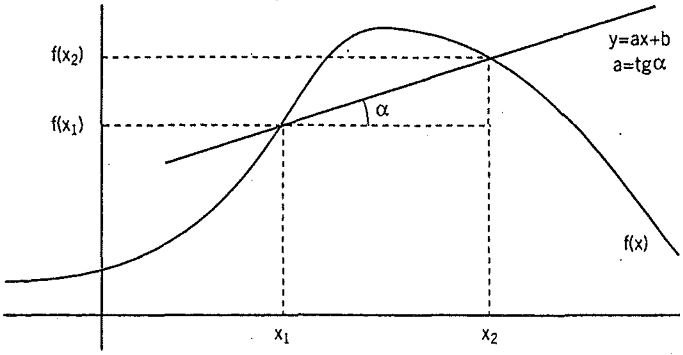



### Recorda

La taxa mitjana de variació d'una funció $f(x)$ entre $x_1$ i $x_2$, amb $x_1 < x_2$,

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

és el pendent de la recta secant a la gràfica de la funció $f(x)$ que passa pels punts $(x_1\ ,\ f(x_1))$ i $(x_2\ ,\ f(x_2))$.



Activitat

**11** Donada la funció $f(x) = x^2$ calcula:

**a** El pendent de la recta secant que passa pels punts $(1, f(1))$ i $(3, f(3))$.

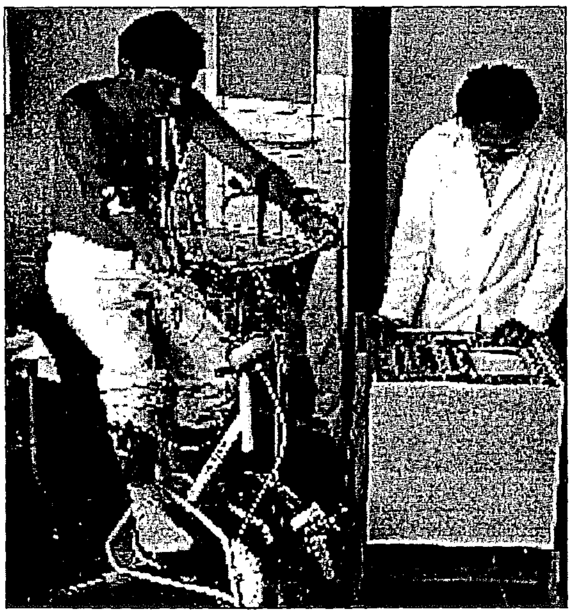
**b** L'equació de la recta secant que passa pels punts $(1, f(1))$ i $(3, f(3))$.

**c** Repeteix els apartats $a$ i $b$ per a la funció $f(x) = x^2 + 2x - 1$.

## ④ Aplicacions de la taxa mitjana de variació

Vivim en un món caracteritzat per canvis continus. Aquest fet fa que el concepte de taxa mitjana de variació d'una funció entre dos valors de la variable independent sigui molt present en la vida diària i que molta gent l'utilitzi, sense adonar-se'n, per treure conclusions sobre la variació d'una variable respecte d'una altra variable. Per exemple, els excursionistes i els ciclistes han de fer més esforç per pujar una muntanya amb molt de pendent, i no compta tant l'altura com la inclinació. Els metges també determinen moltes vegades taxes mitjanes de variació. Per exemple, un electrocardiograma representa, mitjançant una gràfica, el comportament del cor. Si el pacient fa exercicis gimnàstics, el cor batega més de pressa i canvia la forma de la gràfica. A partir d'aquest canvi de la gràfica es fa el diagnòstic.

Les companyies elèctriques també utilitzen les taxes mitjanes de variació, ja que el consum d'energia elèctrica es registra en forma de gràfica d'acord amb el temps; un augment sobtat del consum indica la necessitat d'augmentar la potència. Un cas interessant d'interpretació d'una taxa mitjana de variació és el detector de mentides: un canvi sobtat de pols o de respiració indica un canvi en l'estat emocional de la persona, i d'aquest canvi s'extreuen conclusions sobre la veracitat de les respostes donades.



En l'economia també s'utilitza molt la taxa mitjana de variació. Per exemple, la taxa mitjana de variació de l'índex de preus al consum s'obté dividint l'increment de l'IPC en tant per cent per l'interval de temps considerat. Un altre exemple és el cost marginal, que és la taxa de variació de la funció cost d'un producte entre una producció de $x$ unitats i de $x+1$ unitats.

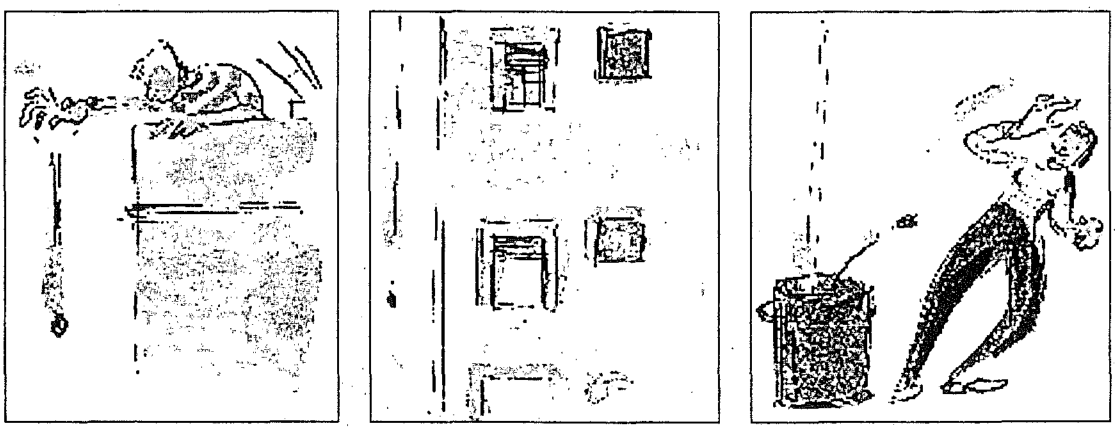
Algunes taxes de variació tenen noms propis. Per exemple, la taxa de variació de la funció que relaciona l'edat amb el creixement d'una persona s'anomena taxa de creixement. També es parla de la taxa de natalitat, la taxa de creixement d'una població, etc. Una de les taxes de variació amb nom propi més important és la velocitat.

## ⑤ Relació entre la taxa mitjana de variació i la velocitat mitjana

El quocient $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$, amb $x_1 < x_2$, que ha aparegut en les activitats anteriors, també apareix quan considerem funcions que expressen la relació entre l'espai recorregut i el temps transcorregut. Aquest és el cas, per exemple, de la caiguda d'un cos que s'ha deixat anar des d'una certa altura.

### Activitat

**12** L'espai recorregut, en metres, per una pedra que deixem anar des del capdamunt d'un edifici de 272 m en funció del temps, en segons, és donat per la fórmula $d(t) = 4{,}9\ t^2$ (per comoditat utilitza 5 en comptes de 4,9).



**a** Quin espai ha recorregut la pedra quan el cronòmetre marca 4 s? I quan marca 6 s?

**b** Quin és l'espai recorregut per la pedra entre $t = 4$ s i $t = 6$ s? I el temps transcorregut?

**c** Calcula la velocitat mitjana de la pedra entre els instants $t = 4$ s i $t = 6$ s.

**d** Calcula també la velocitat mitjana entre els instants $t = 3$ s i $t = 5$ s, i entre els instants $t = 2$ s i $t = 7$ s.

**e** Quina és la velocitat mitjana de la pedra al llarg de la caiguda?

### Recorda

Si $d(t)$ és la fórmula que ens dóna l'espai recorregut per un mòbil en funció del temps, anomenarem **velocitat mitjana** d'un mòbil entre els instants $t_1$ i $t_2$ el quocient entre l'espai recorregut i el temps transcorregut entre aquests dos instants.

$$v_m(t_1, t_2) = \frac{\text{espai recorregut}}{\text{temps transcorregut}} = \frac{d(t_2) - d(t_1)}{t_2 - t_1}$$

# Taxa instantània de variació o derivada d'una funció en $x = a$

En una autopista multen un conductor perquè va a 150 km/h en un moment determinat. Això vol dir que ha anat a una velocitat mitjana de 150 km/h? A continuació treballarem el concepte de velocitat instantània, que et permetrà contestar aquesta pregunta.

## ① Velocitat instantània

En l'activitat 12 hem calculat la velocitat mitjana d'una pedra que cau durant un determinat espai de temps. També podem calcular la velocitat mitjana per espais de temps cada cop més petits.

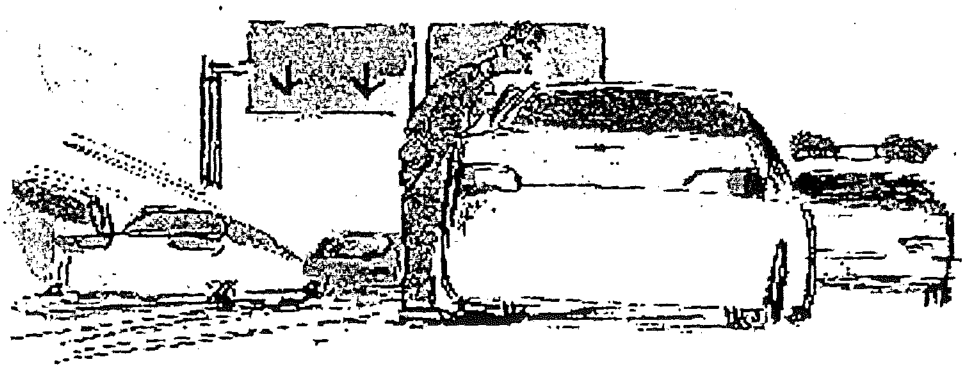
### Activitat

**13 a** Per a l'instant $t_0 = 2$, completa la taula següent:

| *temps* | $t$ | 3 | 2,5 | 2,1 | 2,01 | 2,001 | 2,0001 | ... | $\to 2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $v_m(2, t)$ | $\frac{d(t) - d(2)}{t - 2}$ | | | | | | | | $\to ?$ |

**c** Quina és la velocitat instantània de la pedra a l'instant $t_0 = 2$?

**b** La velocitat que marca el velocímetre d'un cotxe en un instant determinat, és una velocitat mitjana? Com s'anomena aquesta velocitat?



En l'activitat anterior has observat per a la funció $d(t) = 5t^2$ i l'instant $t_0 = 2$, que quan $t \to 2$, les velocitats mitjanes entre 2 i $t$ s'aproximen a 20 m/s. Aquest comportament es representa de la manera següent:

$$v(2) = \lim_{t \to 2} v_m(2, t) = \lim_{t \to 2} \frac{d(t) - d(2)}{t - 2} = 20 \text{ m/s}$$

El nombre 20 m/s ens dóna la *velocitat instantània* de la pedra per a l'instant $t_0 = 2$ i es representa normalment amb $v(2)$.

**Recorda**

Si $d(t)$ és la fórmula que ens dóna l'espai recorregut per un mòbil d'acord amb el temps, anomenarem **velocitat instantània** a l'instant $t_0$ el nombre $v(t_0)$ al qual s'aproximen les velocitats mitjanes $v_m(t_0, t)$ quan $t \to t_0$.

$$v(t_0) = \lim_{t \to t_0} v_m(t_0, t) = \lim_{t \to t_0} \frac{d(t) - d(t_0)}{t - t_0}$$

**Activitats**

**14** Sabent que $d(t) = 5t^2$, troba la velocitat instantània en $t_0 = 3$.

**15** Sabent que $d(t) = t^2$, troba la velocitat instantània en $t_0 = 2$ s, $t_0 = 3$ s i $t_0 = 4$ s.

## ② Taxa instantània de variació o derivada de la funció $f(x)$ en el punt d'abscissa $x = a$

La necessitat de calcular la velocitat instantània d'un cos ens ha portat a l'expressió del «Recorda» anterior. Si apliquem aquesta expressió a altres funcions, com ara la pressió atmosfèrica, el creixement d'una població, etc., obtenim:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Aquest fet justifica la definició següent:

**Recorda**

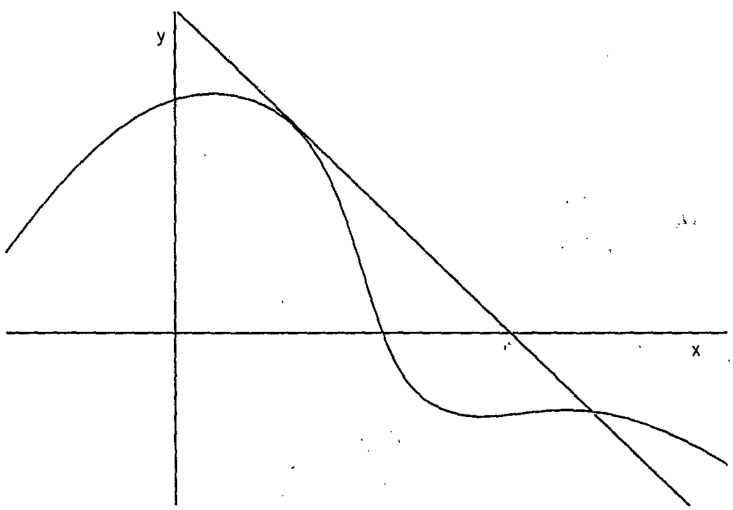
Donada la funció $f(x)$ i un punt d'abscissa $x = a$, el valor del $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ s'anomena **taxa instantània de variació** de f(x) en el punt d'abscissa $x = a$, o també **derivada de la funció f(x) en el punt d'abscissa x = a** i es representa amb $f'(a)$.

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

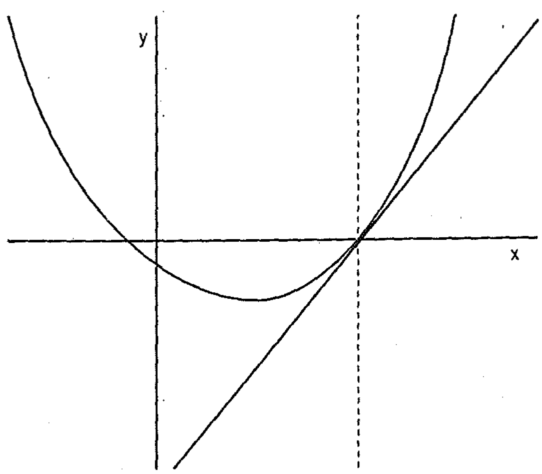
# Interpretació geomètrica de la derivada

## ① Recta tangent

Així com hi ha una relació entre la taxa mitjana de variació d'una funció entre $x = a$ i $x = b$ i el pendent de la recta secant a la gràfica de la funció que passa pels punts d'abscisses $a$ i $b$, també hi ha relació entre la derivada d'una funció en $x = a$ i el pendent de la recta tangent a la funció en el punt d'abscissa $x = a$. Ara bé, per estudiar aquesta relació, primer convé aclarir què entenem per *recta tangent a una funció en el punt d'abscissa $x = a$.*

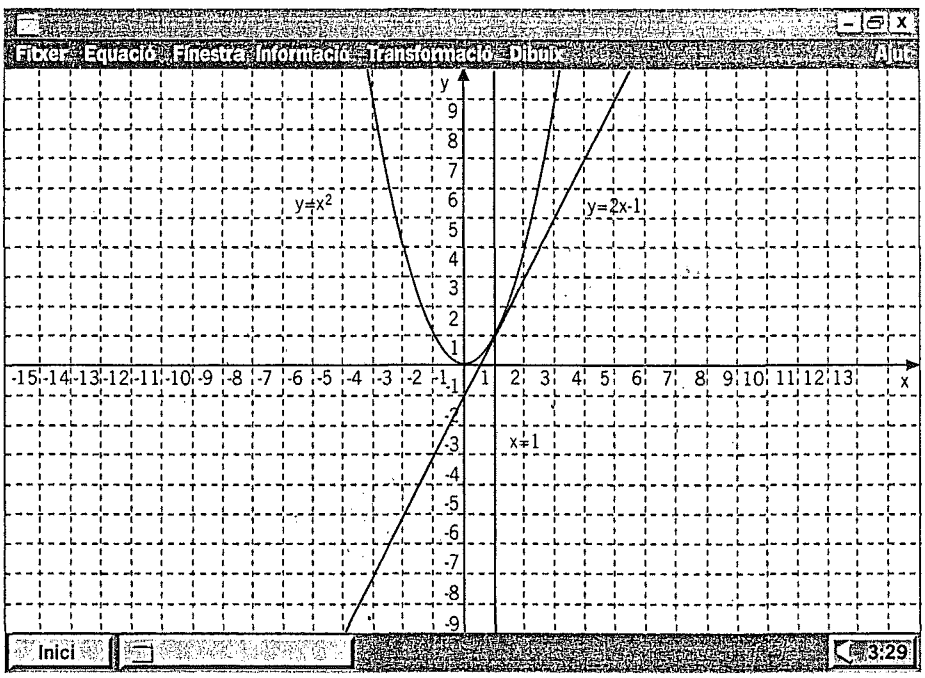



En geometria elemental, la corba que més s'estudia és la circumferència, i per a ella es defineix la recta tangent com una recta que té només un punt en comú amb la corba. A la unitat 2, quan hem estudiat la concavitat i la convexitat d'una funció, i a la unitat 5, quan hem vist les propietats gràfiques de les funcions exponencials i logarítmiques, hem utilitzat el concepte de tangent d'una manera intuïtiva, i en aquests casos la recta tangent també tocava la gràfica només en un punt. Aquest fet pot portar a creure que la condició necessària perquè una recta sigui tangent a una gràfica en un punt és que només tingui aquest punt en comú amb la gràfica. D'aquesta manera arribaríem a la conclusió que la recta de la figura de l'esquerra no seria tangent a la gràfica, mentre que una paràbola tindria dues rectes tangents en qualsevol dels seus punts.

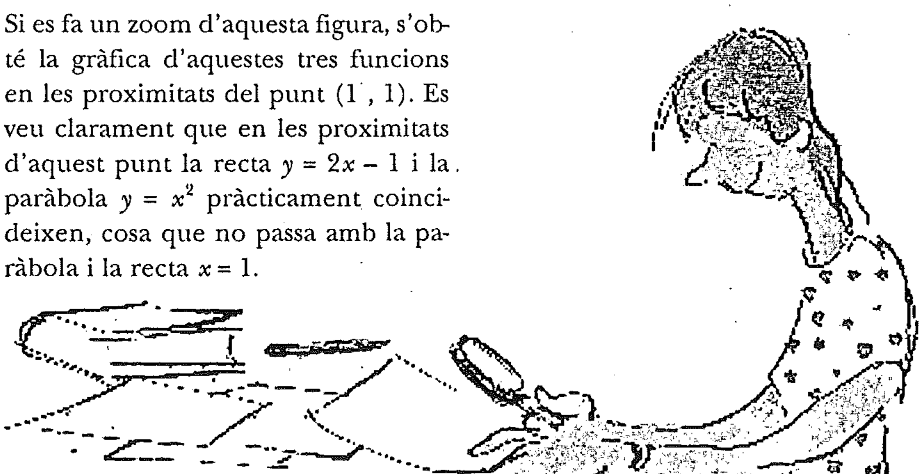


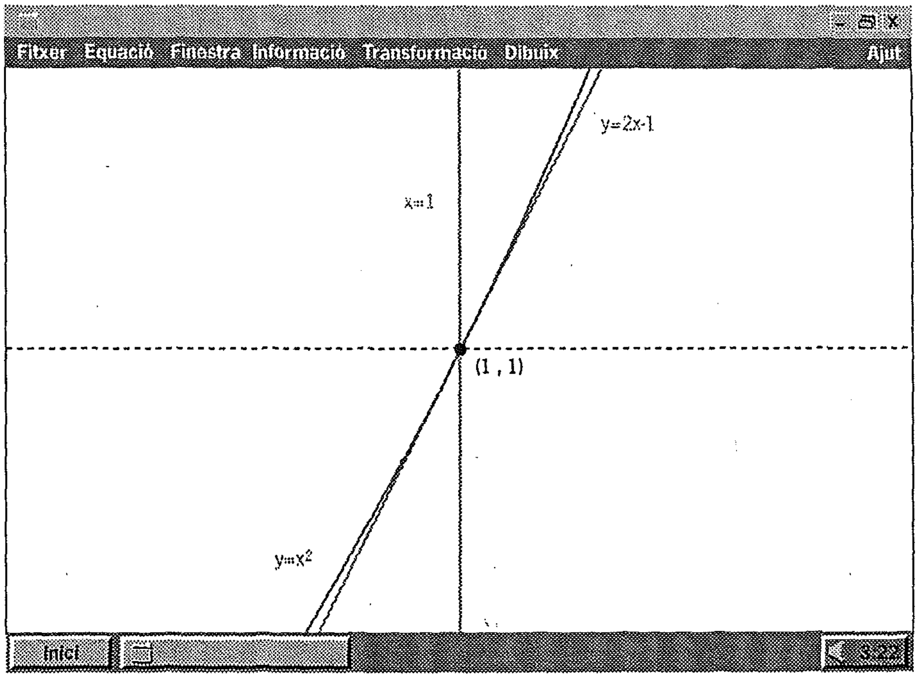

Per tant, la definició que implícitament hem utilitzat fins ara de recta tangent a una corba en un punt com aquella que només talla la corba en el punt, s'ha de revisar. El concepte vàlid de recta tangent té relació amb la idea d'aproximació: de totes les rectes que passen per un punt de la corba, la recta tangent és la que més s'hi aproxima (almenys en un veïnatge del punt). Vegem ara quin és el significat d'aquesta definició.

Els graficadors informàtics permeten fer zooms per representar la gràfica en les proximitats d'un punt. Aquests graficadors poden ajudar a entendre què vol dir que la recta tangent és la recta que més s'aproxima a la gràfica de la funció en un veïnatge del punt. En efecte, en la figura següent hi ha representades la paràbola $y = x^2$, la recta $y = 2x - 1$ (la recta tangent a la funció en el punt d'abscissa $x = 1$) i la recta $x = 1$, que és una recta que talla la paràbola només en el punt (1 , 1).



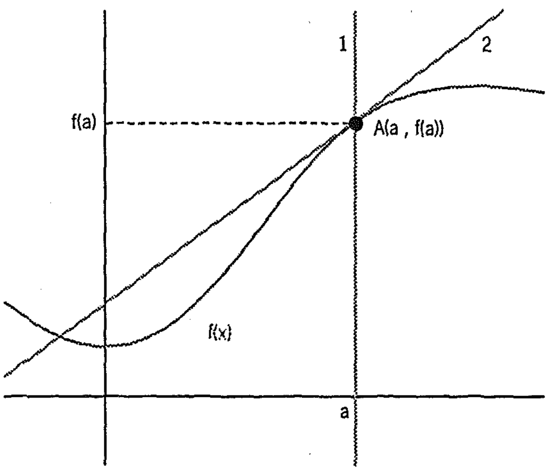

Si es fa un zoom d'aquesta figura, s'obté la gràfica d'aquestes tres funcions en les proximitats del punt (1 , 1). Es veu clarament que en les proximitats d'aquest punt la recta $y = 2x - 1$ i la paràbola $y = x^2$ pràcticament coincideixen, cosa que no passa amb la paràbola i la recta $x = 1$.

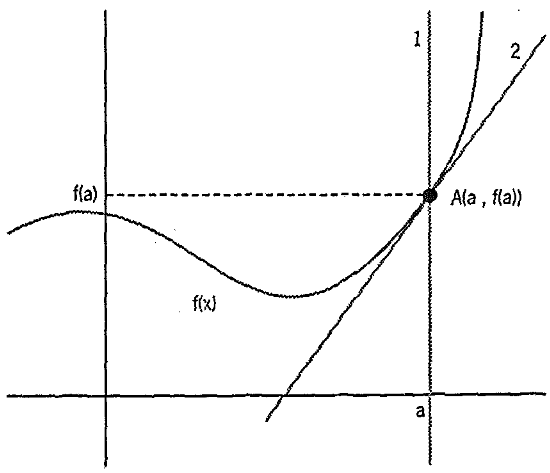





**Activitat**

**16** Digues, per a cada gràfica, quina és la recta tangent a la funció en $x = a$.



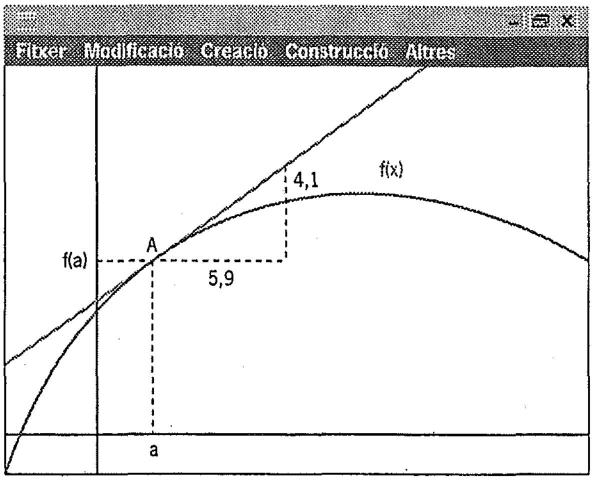




## ② Pendent de la recta tangent

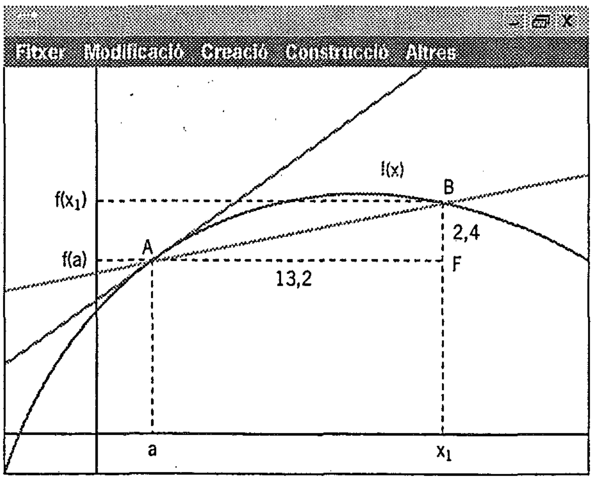
Un cop aclarit el concepte de recta tangent, veurem un mètode per trobar-ne el pendent.

## Activitat

**17 a** La recta que passa pel punt $A$ d'abscissa $x = a$ és la recta tangent a la funció $f(x)$ en $x = a$? Per què? Quin és el pendent d'aquesta recta?

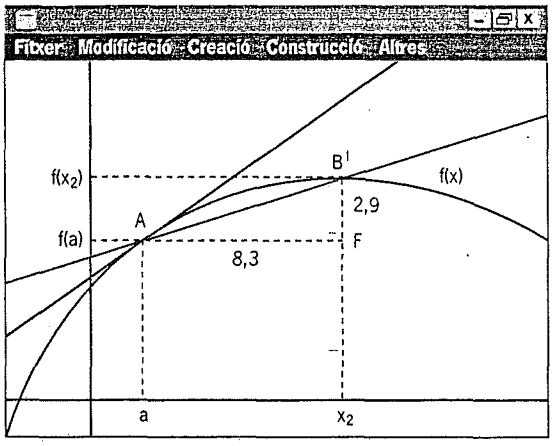


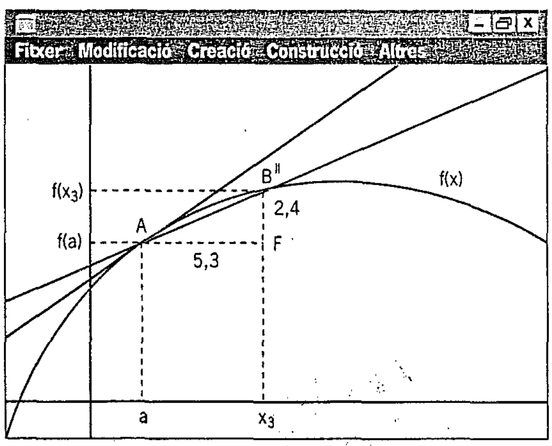

**b** Si considerem un altre punt $B$ d'abscissa $x_1$ en la gràfica de la funció $f(x)$ i dibuixem la recta secant que passa per $A$ i $B$, la figura anterior es converteix en la figura següent:

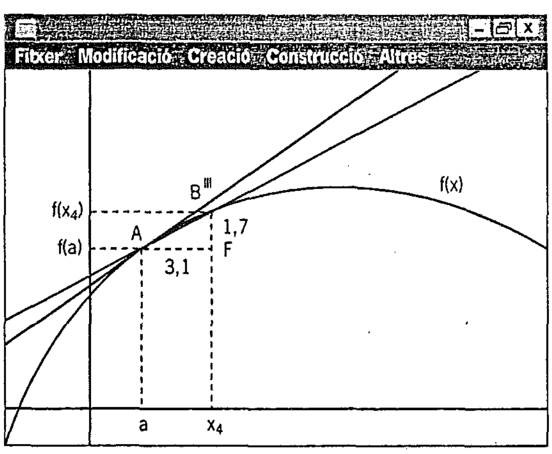



Completa la taula i troba el pendent de la recta secant $AB$.

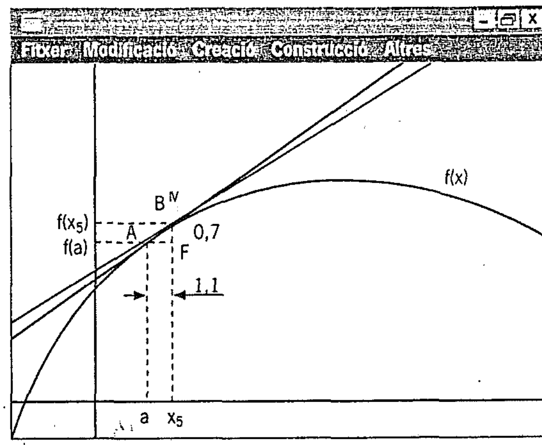
| Longitud FB | Longitud AF | Pendent de la recta secant AB |
|---|---|---|
| | | |

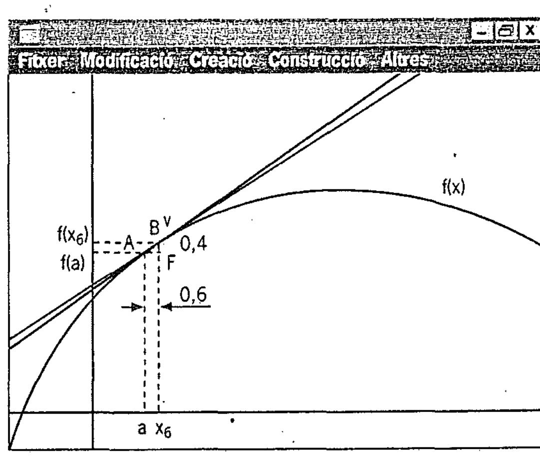


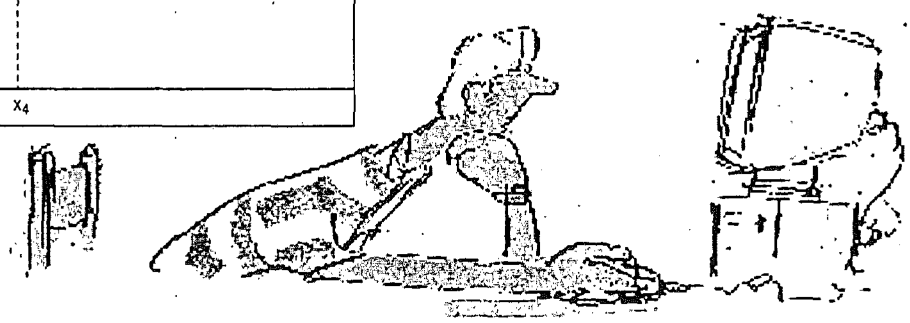




**c** Les figures següents són el resultat de mantenir el punt $A$ fixat i de moure el punt $B$ sobre la gràfica de la funció $f(x)$ de manera que es vagi apropant a $A$. A quina recta s'aproximen aquestes rectes secants?



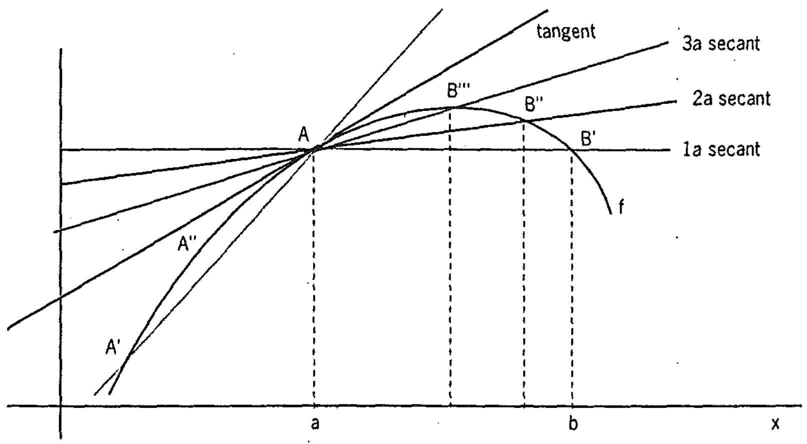
**d** Posa el resultat obtingut a l'apartat $b$ a la primera fila de la taula següent i completa les altres files a partir de les figures de l'apartat anterior. Digues també a quina recta s'aproximen les rectes secants i a quin nombre s'aproximen els pendents de les rectes secants.

| Recta secant | Pendent de la recta secant: $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ |
|---|---|
| Recta secant $AB$ | |
| Recta secant $AB'$ | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| ... | ... |
| Rectes secants → Recta ... | Pendents de les rectes secants → Pendent de la recta ........................ = ... |

**e** Quina és la derivada de la funció $f(x)$ en el punt d'abscissa $x = a$?

A l'activitat anterior has vist la relació que hi ha entre el pendent de la recta tangent a una funció en el punt d'abscissa $x = a$ i la derivada de la funció en $x = a$.

Per determinar gràficament la recta tangent a la gràfica d'una funció $f(x)$ en el punt d'abscissa $a$, es pot procedir de la manera següent: dibuixar un altre punt $B'$ d'abscissa $b$. Els punts $A$ i $B'$ determinen una recta secant. Si mantenim $A$ fixat, en moure $B$ sobre la gràfica de $f(x)$ de manera que es vagi apropant a $A$, obtenim diverses rectes secants que s'aproximen a una recta determinada: és aquesta la recta tangent a la funció $f(x)$ en el punt d'abscissa $x = a$. En el dibuix hi ha representada l'aproximació a $A$ per la dreta ($B'$, $B''$, $B'''$, ...), i també per l'esquerra ($A'$, $A''$, $A'''$, ...).



Aquest procediment per trobar la recta tangent a la funció en un punt permet també precisar la idea intuïtiva de *recta tangent* que hem utilitzat fins ara, de manera que en podem donar una definició: la recta tangent a la gràfica de la funció $f(x)$ en el punt $A$ és la recta a la qual s'aproximen les rectes secants que passen per $A$ i per un altre punt $B$ de la gràfica quan $B$ s'aproxima a $A$.

Ara repetiràs el procés de l'activitat 17 sense l'ajut de les imatges d'ordinador.

## Activitat

**18** Dibuixa la funció $f(x) = x^2$ tot fent una gràfica amb paper mil·limetrat.

**a** Dibuixa la recta secant a la gràfica en els punts d'abscissa $x = 1$ i $x = 3$. Troba'n el pendent.

**b** Fes el mateix per a $x = 1$ i $x = 2$, i per a $x = 1$ i $x = 1{,}5$.

**c** Introdueix els resultats trobats en una taula com la següent i completa els que falten.

| $x$ | 3 | 2 | 1,5 | 1,1 | 1,01 | 1,001 | 1,0001 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ | | | | | | | |

**d** Dibuixa la recta secant a la gràfica per als punts d'abscissa $x = 1$ i $x = -1$; i troba'n el pendent.

**e** Fes el mateix per a $x = 1$ i $x = 0$, i per a $x = 1$ i $x = 0{,}5$.

**f** Introdueix els resultats trobats en una taula com la següent i completa els que falten.

| $x$ | –1 | 0 | 0,5 | 0,9 | 0,99 | 0,999 | 0,9999 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ | | | | | | | |

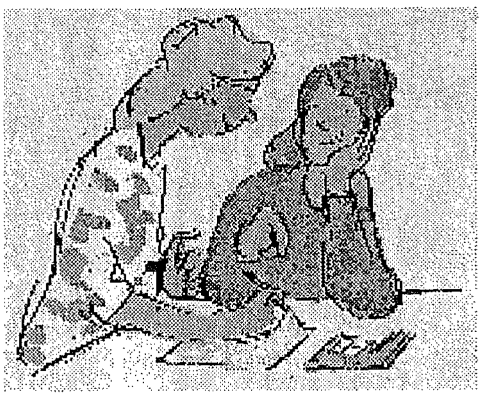
**g** Quan $x \to 1$, cap a quin nombre s'aproximen els quocients $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ de les dues taules?

**h** Quin és el pendent de la recta tangent a la gràfica en $x = 1$?

**i** Quina és la derivada de la funció $f(x)$ en $x = 1$?

**j** Quines són les coordenades del punt de tangència?

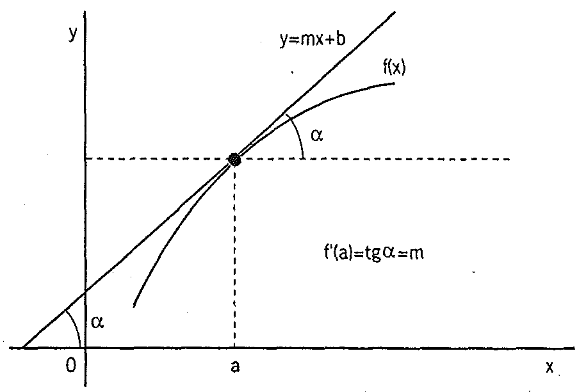
**k** Quina és l'equació de la recta tangent a la funció en $x = 1$?



**Recorda**

La derivada de la funció $f(x)$ en $x = a$, $f'(a)$, és igual al pendent de la recta tangent a la funció $f(x)$ en el punt d'abscissa $x = a$.

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \text{pendent de la recta tangent a la funció en } x = a$$




Si a l'expressió de la derivada fem el canvi $x = a + h$, llavors $h = x - a$, i quan $x \to a$, es compleix que $h \to 0$.

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

## ③ Relació entre les diferents interpretacions de la derivada d'una funció $f(x)$ en el punt d'abscissa $x = a$

**Activitat**

**19** Utilitzant la nova expressió de la derivada i els conceptes següents, completa els punts suspensius de la taula amb:

- Velocitat mitjana
- Pendent de la recta tangent
- Derivada de la funció en $x = a$

| *Interpretació física* | *Interpretació matemàtica* | |
|---|---|---|
| | *Interpretació analítica* | *Interpretació geomètrica* |
| $d(t)$ | $f(x)$ | Gràfica de $f(x)$ |
| … $v_m(t_0, t_0 + h) = \dfrac{d(t_0 + h) - d(t_0)}{h}$ | Taxa mitjana de variació $\dfrac{f(a + h) - f(a)}{h}$ | Pendent de la recta secant |
| Velocitat instantània $v(t_0) = \lim_{h \to 0} \dfrac{d(t_0 + h) - d(t_0)}{h}$ | … $f'(a) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(a + h) - f(a)}{h}$ | … |

# Càlcul de la derivada d'una funció en un punt

Ara calcularem la derivada d'una funció en un punt per diferents procediments.

## ① Càlcul de la derivada d'una funció en $x = a$ a partir de la definició

Per calcular $f'(a)$ s'ha de calcular $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$. Si substituïm $h$ per zero obtenim la indeterminació $\frac{0}{0}$. Per eliminar-la, cal seguir el procediment:

### Exemple

Donada la funció $f(x) = x^2 + 2$, calcula $f'(2)$.

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(2+h)^2 + 2 - (2^2 + 2)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2^2 + 4h + h^2 + 2 - 2^2 - 2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{4h + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(4+h)}{h} = \lim_{h \to 0} (4+h) = 4$$

### Activitats

**20** Donada la funció $f(x) = 2x^2 + 3$, calcula $f'(3)$.

**21** Donada la funció $f(x) = x^2 + 2x + 1$, calcula $f'(1)$.

**22** Donada la funció $f(x) = -2x^2 + x - 1$, calcula $f'(-2)$. Calcula també l'equació de la recta tangent en $x = -2$.

## ② Càlcul aproximat de la derivada d'una funció en $x = a$ utilitzant la calculadora

Hi ha funcions per a les quals pot ser difícil calcular el límit

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Per a aquestes funcions trobaràs un valor aproximat de $f'(a)$ amb la calculadora.

### Activitat

**23 a** Donada la funció $f(x) = \sin x$, completa, utilitzant la calculadora, la taula següent. Recorda que la calculadora ha d'estar en mode RAD perquè agafi el 0,5 com a 0,5 radians.

| $h$ | $\dfrac{\sin(0,5+h)-\sin(0,5)}{h}$ |
|---|---|
| 0,1 | 0,852167 |
| 0,01 | 0,875175 |
| 0,001 | ... |

**b** Dóna un valor aproximat de $f'(0,5)$ amb tres xifres decimals.

Per a un valor $h$ molt petit, com ara $10^{-6}$, $10^{-7}$, $10^{-8}$, ..., la taxa mitjana de variació $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ és un valor molt pròxim a $f'(a)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ i, per tant, per trobar un valor aproximat de $f'(a)$ només cal calcular la taxa mitjana de variació pel valor de $h$ escollit, amb $h$ prou petit.

### Activitats

**24** **a** Calcula la taxa mitjana de variació de la funció $f(x)=\ln x$ entre 2 i $2+10^{-4}$.
**b** Calcula un valor aproximat de $f'(2)$ amb tres xifres decimals.

**25** **a** Calcula la taxa mitjana de variació de la funció $f(x)=\sqrt{x}$ entre 3 i $3+10^{-4}$.
**b** Calcula un valor aproximat de $f'(3)$ amb tres xifres decimals.

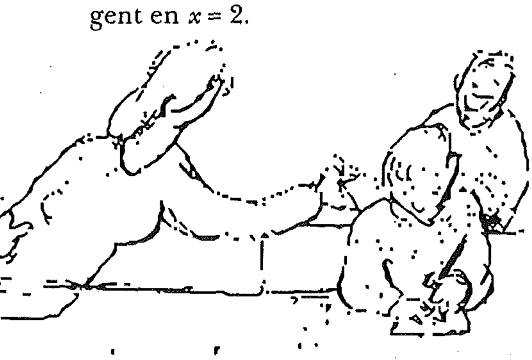
## ③ Càlcul gràfic

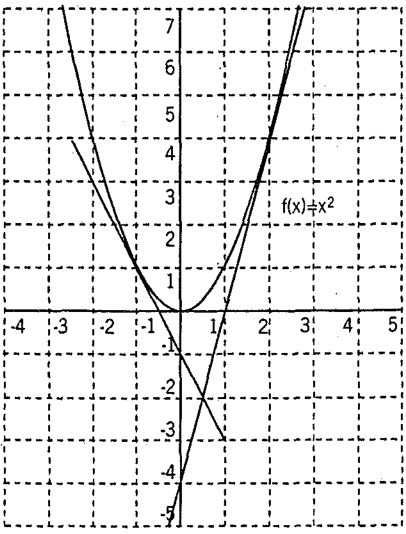
Si tenim gràfiques en què la recta tangent en un punt està dibuixada, també es pot trobar gràficament la derivada, tenint en compte que $f'(a)$ és el pendent de la recta tangent.

### Activitat

**26** Donada la funció $y=x^2$ i les rectes tangents a la funció en $x=-1$, $x=0$ i $x=2$:

**a** Calcula $f'(-1)$, $f'(0)$ i $f'(2)$.
**b** Troba l'equació de la recta tangent en $x=2$.





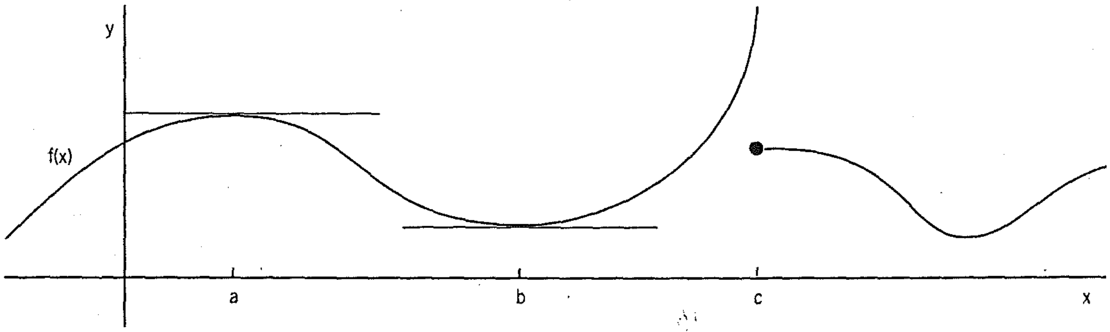
## ④ Punts d'una funció en els quals no existeix la derivada de la funció

**Activitat**

**27 a** A partir de la gràfica següent, troba $f'(a)$ i $f'(b)$.

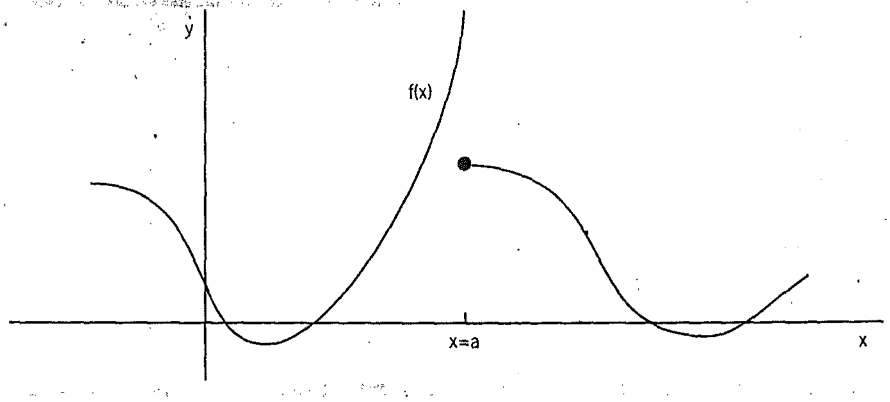
**b** Intenta ara trobar gràficament $f'(c)$, amb quina dificultat topes?

**c** En els punts en què la funció $f(x)$ és discontínua, existeix la derivada de la funció? Per què?




**Recorda**

En els punts d'abscissa $x = a$ en els quals la funció $f(x)$ és discontínua no existeix $f'(a)$. Per tant, si una funció $f(x)$ té derivada en $x = a$, la funció és contínua en $x = a$.




**Activitat**

**28 a** Troba gràficament $f'(1)$ a partir de la figura de la pàgina següent.

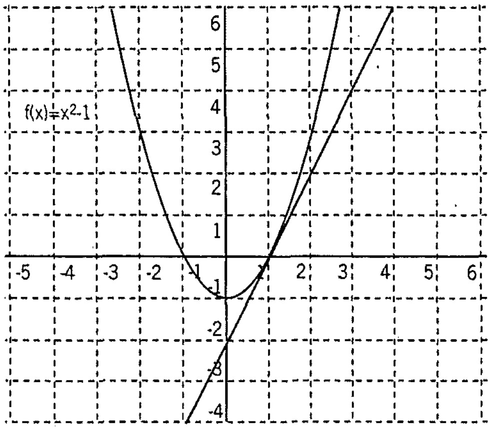
**b** Troba la gràfica de la funció $g(x) = |x^2 - 1|$.

**c** Tres alumnes han intentat calcular gràficament la derivada de la funció $g(x)$ en $x = 1$, i han arribat a les conclusions següents:

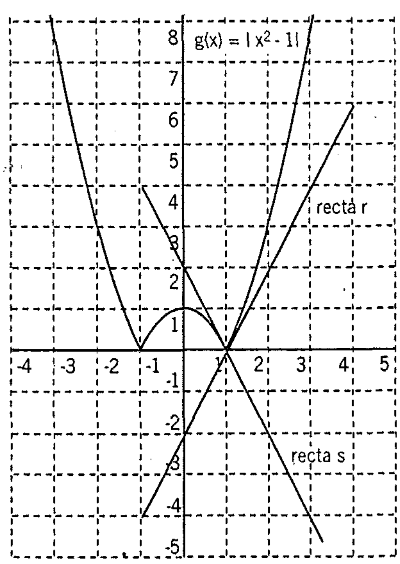
JOAN: $g'(1) = 2$

ORIOL: $g'(1) = -2$

MARIA: $g'(1)$ no existeix




Quin conclusió creus que és més encertada?

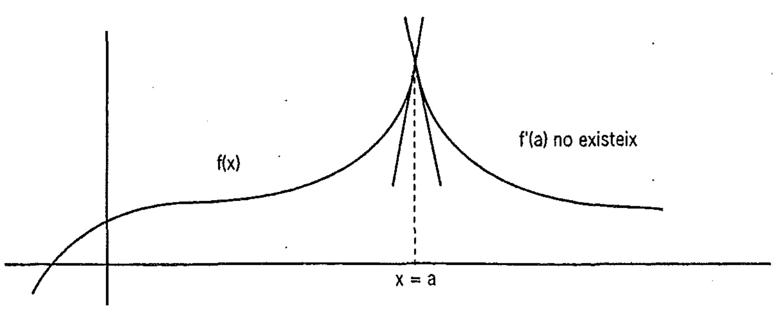



Es pot pensar que n'hi ha prou que la funció sigui contínua en $x = a$ per poder assegurar que existeix la derivada. Doncs bé, no és suficient que la funció sigui contínua, ja que cal que ho sigui d'una manera suau, és a dir, que no presenti punxes ni cantonades.

La gràfica de la funció $g(x) = |x^2 - 1|$ coincideix amb la de la funció $f(x) = x^2 - 1$, menys a l'interval $(-1\ ,\ 1)$, que és una reflexió de la gràfica de $f(x) = x^2 - 1$. Si considerem un entorn de $x = 1$ veiem que la recta $r$ és la que més s'aproxima a la funció per a valors de $x$ més grans que 1. En canvi, per a valors de $x$ més petits que 1, la recta $s$, que resulta de reflectir la recta $r$, és la que més s'aproxima a la funció. En aquest cas direm que la funció en $x = 1$ no té recta tangent i que no existeix $g'(1)$.

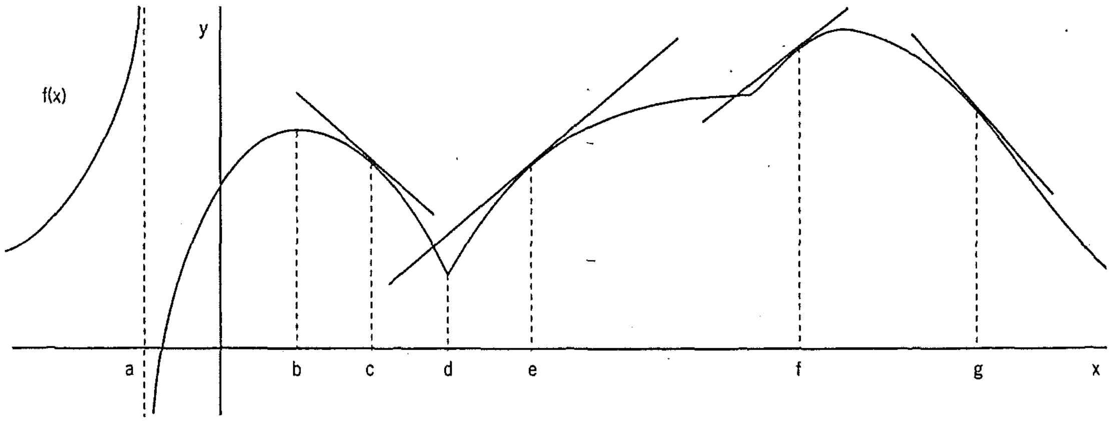
## Recorda

En els valors de l'abscissa en què la gràfica de la funció té forma de punxa no existeix la derivada de la funció.



**Activitat**

**29 a** Digues per a quins valors de l'abscissa no existeix la derivada de la funció.

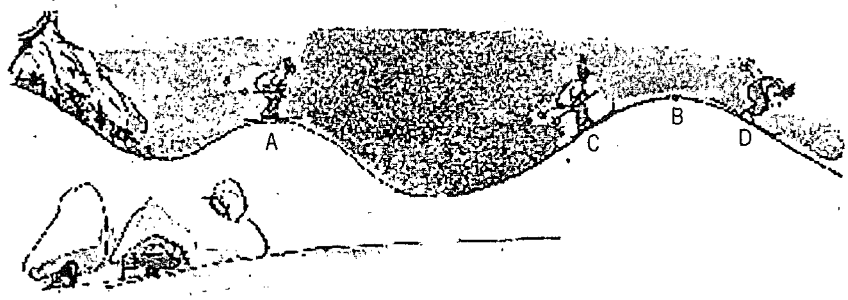



**b** Per als valors en què existeix la derivada de la funció, calcula'n gràficament el signe.

## Relació entre el signe de la derivada i la gràfica de la funció

**Activitats**

**30** La il·lustració següent ens mostra com s'ho passa de bé un esquiador.




**a** En quin d'aquests tres moments li costa més esquiar? Per què?
**b** Utilitza un regle i perllonga els esquís de l'esquiador en els punts *A*, *B* i *C*. Quines rectes has obtingut?
**c** Si considerem que el perfil de les muntanyes és la gràfica d'una funció, quant val la derivada de la funció en *A*? Quin és el signe de la derivada de la funció en els punts *C* i *D*?
**d** Un esquiador fa el recorregut següent: primer es para en un punt de derivada zero, després esquia un tram en què tots els punts tenen derivada positiva, fins que arriba a un altre punt de derivada zero. Després esquia un tram en què tots els punts són de derivada negativa fins que arriba a un altre punt de derivada nula, on es torna a parar. Fes-ne un esbós del recorregut.

**31** D'entre les gràfiques següents, identifica aquelles que puguin ser gràfiques de les funcions, les característiques de les quals donem a continuació.

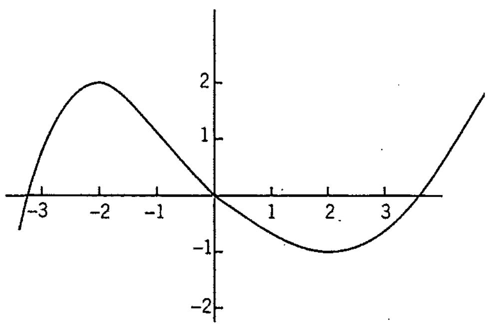
**a** La funció $f(x)$ compleix $f'(-2) = 0$, presenta un mínim en $x = 2$ i passa per l'origen de coordenades.

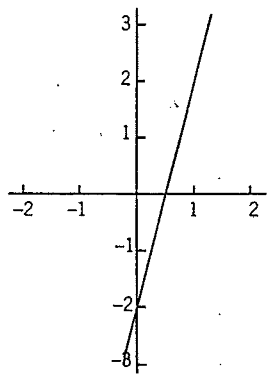
**b** La funció $g(x)$ compleix que la seva derivada en qualsevol punt sempre és positiva.

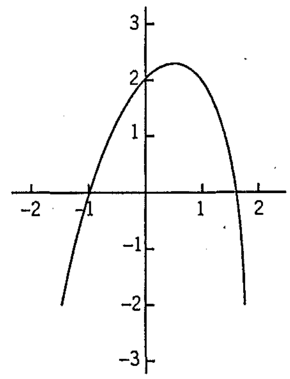
**c** La funció $h(x)$ compleix que la derivada en qualsevol punt de l'interval $(-3\ ,\ 1)$ és més gran que zero, i que la derivada en qualsevol punt de l'interval $(1\ ,\ 3)$ és negativa.

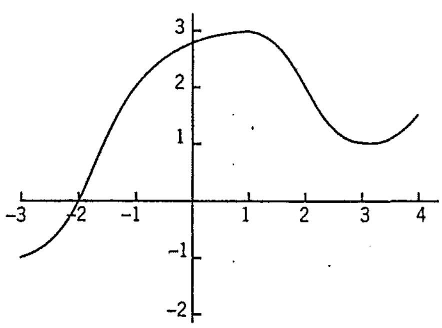
**d** La funció $i(x)$ compleix que la seva derivada en qualsevol punt és positiva, excepte en $x = 0$, que val zero.

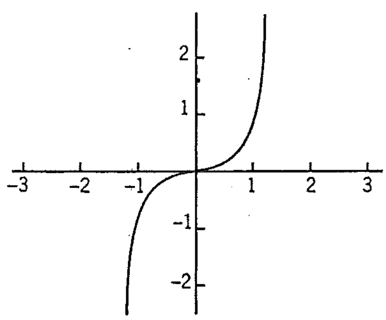
**e** La funció $k(x)$ té un sol punt en què la derivada val zero. Abans d'aquest punt la derivada sempre és més gran que zero, i després sempre és negativa.




## Recorda

Si en tots els punts d'un interval $(a\ ,\ b)$ la derivada d'una funció és positiva ($f'(c) > 0$ amb $c \in (a\ ,\ b)$), la funció és creixent en aquest interval.

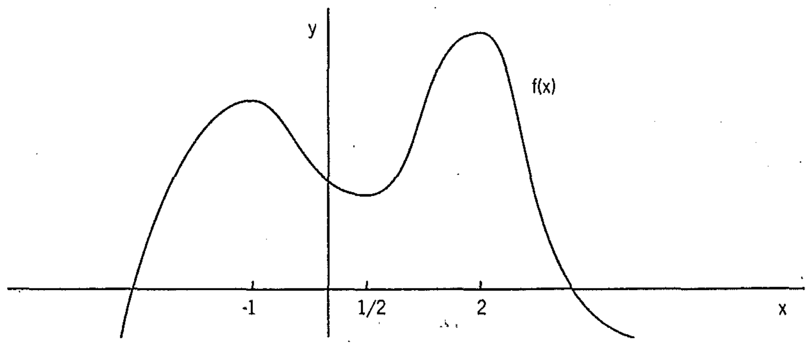
Si en tots els punts d'un interval $(a\ ,\ b)$ la derivada d'una funció és negativa, ($f'(c) < 0$ amb $c \in (a\ ,\ b)$) la funció és decreixent en aquest interval.

En els màxims i els mínims relatius la derivada val zero ($f'(c) = 0$).

Al llarg d'aquesta unitat has vist que en els màxims i els mínims relatius la derivada val zero. Ara bé, no tots els punts en què la derivada val zero són màxims o mínims. Per exemple, la funció de l'apartat *d* de l'activitat 31 no té cap màxim ni cap mínim relatiu, però en $x = 0$ es compleix que la derivada val zero.

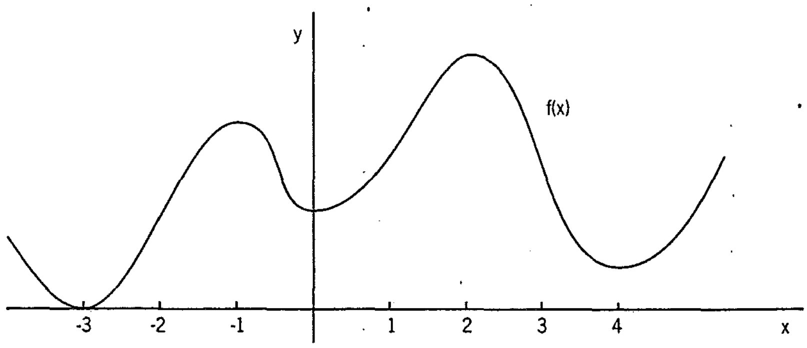
## Activitats

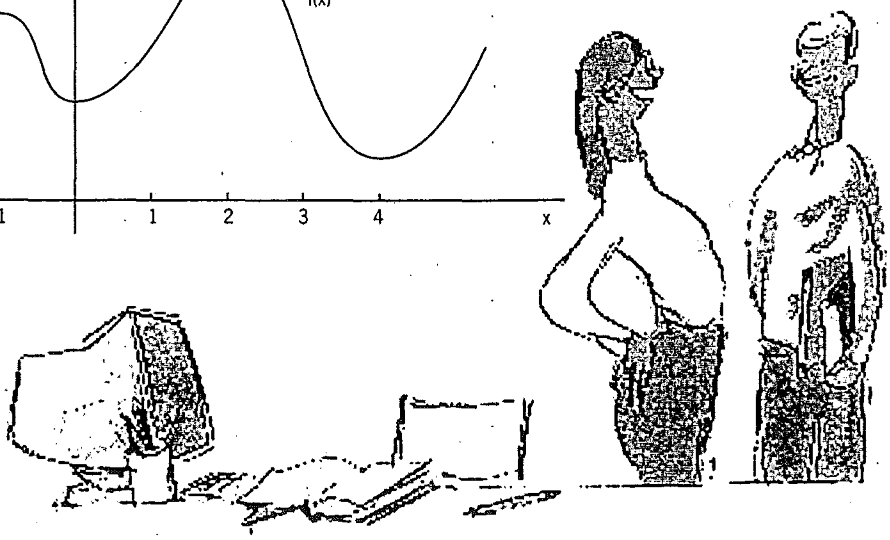
**32** A partir de la gràfica de la funció $f(x)$, completa la taula següent:




| $x$ | $(-\infty, -1)$ | $-1$ | $(-1, 1/2)$ | $1/2$ | $(1/2, 2)$ | $2$ | $(2, +\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | | | | | |
| $f(x)$ | ↗ | màxim | | | | | |

**33** Resumeix en una taula com l'anterior el comportament de la funció que té la gràfica següent:



## Funció derivada

Si ara volguéssim trobar les rectes tangents a la funció $f(x) = x^2$ en diferents punts (per exemple en $x = -7$, $x = 21$ i $x = 40$) hauríem de calcular la derivada de la funció en cada un d'aquests punts ($f'(-7)$, $f'(21)$ i $f'(40)$). Bé doncs, abans de calcular totes aquestes derivades completarem la taula següent amb els valors de les derivades de la funció $f(x) = x^2$ per a diferents punts que s'han calculat a les activitats 15, 18 i 26, la qual cosa ens permetrà trobar una altra manera de resoldre la qüestió.

| *abscissa* | −1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *derivada* | −2 | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 |

### Activitat

**34** **a** A partir de la taula troba una fórmula que, sabent el valor de l'abscissa, ens permeti calcular la derivada de la funció $f(x) = x^2$ per a aquest valor de l'abscissa.

**b** Utilitzant aquesta fórmula troba $f'(-7)$, $f'(21)$ i $f'(40)$.

A l'activitat anterior has vist que per a la funció $f(x) = x^2$ la funció $y = 2x$ associa cada abscissa $x$ amb la derivada de la funció en aquest punt. Aquesta funció s'anomena *funció derivada* de $f(x)$ i normalment es representa amb $f'(x)$.

| <u>Funció</u> | <u>Funció derivada</u> |
|---|---|
| $f(x) = x^2$ | $f'(x) = 2x$ |

Conèixer la funció derivada és un mètode indirecte molt útil a l'hora de calcular la derivada de la funció en un punt. En efecte, per calcular $f'(a)$ n'hi ha prou de seguir el procés següent:

1 Calcular la funció derivada $f'(x)$.
2 Substituir la $x$ per $a$ a la fórmula de la funció derivada.

La funció derivada també es pot utilitzar per trobar un punt de la funció $f(x)$ en què la derivada prengui un valor determinat.

### Exemple

Si volem saber en quin punt la funció $f(x) = x^2$ té una recta tangent que forma un angle de 45° amb l'eix d'abscisses, n'hi ha prou a buscar el valor de l'abscissa tal que la derivada en aquest punt val 1. Recorda que el pendent és la tangent trigonomètrica d'aquest angle ($\text{tg}\, 45° = 1$).

$$f'(x) = 2x \qquad 2x = 1 \Rightarrow x = 1/2 \qquad f'(1/2) = 1$$

### Activitat

**35** Donada la funció $f(x) = x^2$:

**a** Per a quin valor de l'abscissa la derivada val 16?

**b** Per a quin valor de l'abscissa la recta tangent té pendent 3?

**c** Per a quin valor de l'abscissa la recta tangent és paral·lela a la recta $y = 6x + 54$?

**d** Troba l'equació de la recta tangent a la funció en $x = 5$.

### Recorda

S'anomena **funció derivada** d'una funció $f(x)$ o **derivada**, la funció que fa correspondre a cada abscissa $x$ la derivada de la funció $f(x)$ en el punt d'abscissa $x$. La funció derivada normalment es representa amb $f'(x)$.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

La funció derivada s'anomena així perquè es troba a partir de la funció $f(x)$. És a dir, deriva de $f(x)$. Aquest fet determina que una funció i la seva funció derivada estiguin estretament relacionades.

La derivada d'una funció en un punt és un nombre que ens dóna el pendent de la recta tangent a la funció en aquest punt, mentre que la funció derivada és una funció que ens dóna, per a cada valor de l'abscissa, el pendent de la recta tangent. Sovint es parla de la derivada sense precisar si és la derivada de la funció en un punt o és la funció derivada; en aquests casos el context és el que ens indicarà quin és el significat que se li dóna.

## Càlcul de la funció derivada

Per trobar la funció derivada $f'(x)$ s'ha de calcular

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Si substituïm $h$ per zero, obtenim la indeterminació $\frac{0}{0}$. Per eliminar-la convé simplificar l'expressió com es veu en l'exemple:

### Exemple

Donada la funció $f(x) = x^2$, calcula $f'(x)$.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2hx + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(2x+h)\, h}{h} = \lim_{h \to 0} (2x + h) = 2x$$

**Activitat**

**36 a** Donada la funció $f(x) = 3x^2 + 3$, calcula $f'(x)$.

**b** Donada la funció $f(x) = x^2 + 3x - 1$, calcula $f'(x)$.

**c** Donada la funció $f(x) = \dfrac{1}{x}$, calcula $f'(x)$.

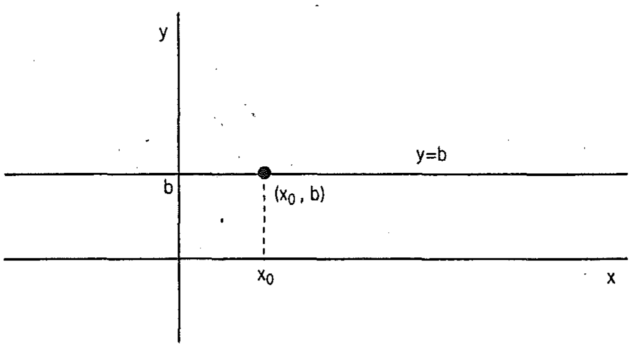
El càlcul de l'expressió $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ per a determinades funcions pot resultar molt complicat. En els apartats següents trobarem, per diferents mètodes, les funcions derivades de les funcions estudiades a les unitats anteriors i unes regles de derivació que permeten calcular la funció derivada d'una manera més ràpida.

## Funció derivada de les funcions de proporcionalitat directa i de les funcions afins

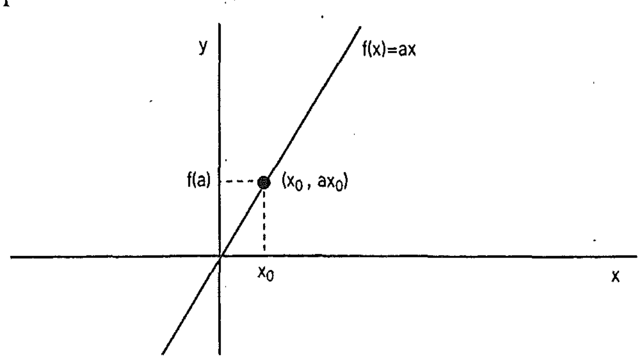
**Activitats**

**37 a** Donada la funció constant $y = b$ i un punt qualsevol d'abscissa $x_0$, quina és la recta tangent a la funció en aquest punt? Quin n'és el pendent?

**b** Justifica que la funció derivada de la funció constant és $f'(x) = 0$.




**38 a** Donada la funció de proporcionalitat $f(x) = ax$ i un punt qualsevol d'abscissa $x_0$, quina és la recta tangent a la funció en aquest punt? Quin n'és el pendent?



**b** Justifica que la funció derivada de la funció de proporcionalitat $f(x) = ax$ és la funció $f'(x) = a$.

**39** Demostra gràficament i analíticament que la funció derivada de la funció afí $f(x) = ax + b$ és la funció $f'(x) = a$.

**40** Calcula la funció derivada de les funcions següents:

$y = 3 \qquad y = 2x \qquad y = 5x + 3 \qquad y = -0{,}4x - 7$

**Recorda**

| Funció | Funció derivada |
|---|---|
| $f(x) = b$ | $f'(x) = 0$ |
| $f(x) = ax$ | $f'(x) = a$ |
| $f(x) = ax + b$ | $f'(x) = a$ |

## Regles de derivació

En aquest apartat veurem com trobar la funció derivada de funcions que són el resultat de fer operacions amb altres funcions més senzilles.

### ① Funció derivada del producte d'un nombre per una funció

La derivada de la funció producte d'un nombre per una funció és igual al nombre per la derivada de la funció.

$$(c \cdot f)'(x) = c \cdot f'(x)$$

Per calcular la funció derivada $(c \cdot f)'(x)$ s'ha de calcular:

$$\lim_{h \to 0} \frac{(c \cdot f)(x+h) - (c \cdot f)(x)}{h}$$

$$(c \cdot f)'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(c \cdot f)(x+h) - (c \cdot f)(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c \cdot (f(x+h) - f(x))}{h} =$$

$$= c \cdot \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = c \cdot f'(x)$$

## ② Funció derivada de la suma i de la diferència de funcions

A continuació demostrarem que la funció derivada de la funció suma és la suma de les funcions derivades:

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

$$\begin{aligned}(f+g)'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{(f+g)(x+h) - (f+g)(x)}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) + g(x+h) - f(x) - g(x)}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(x) + g'(x)\end{aligned}$$

Si prescindim de passos intermedis tenim: $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$

Per demostrar que la derivada de la diferència de funcions és la diferència de les funcions derivades, s'ha de seguir el procés anterior, substituint el signe de la suma pel signe de la resta.

$$(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x)$$

## ③ Funció derivada del producte de dues funcions

La funció derivada del producte de dues funcions és la funció que resulta en multiplicar la derivada de la primera funció per la segona funció sense derivar i sumar-li el producte de la derivada de la segona funció per la primera funció sense derivar.

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$$

## ④ Funció derivada del quocient de dues funcions

La funció derivada del quocient de dues funcions és igual a la derivada del numerador pel denominador sense derivar, menys la derivada del denominador pel numerador sense derivar dividit, tot, pel quadrat del denominador.

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{(g(x))^2}$$

Les regles de la derivació del producte i del quocient entren en contradicció amb una de les idees intuïtives que normalment es tenen sobre la derivació, ja que normalment s'espera que la derivada del producte sigui el producte de derivades i que la derivada del quocient sigui el quocient de derivades.

La funció derivada del producte de funcions i la derivada del quocient de dues funcions també es poden trobar calculant $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, però demostrar-ho és complicat. Per això les demostracions d'aquestes dues regles de derivació estan proposades com a problemes d'ampliació.

## Recorda

| Funció | Funció derivada |
|---|---|
| $(c \cdot f)(x)$ | $(c \cdot f)'(x) = c \cdot f'(x)$ |
| $(f + g)(x)$ | $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$ |
| $(f - g)(x)$ | $(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x)$ |
| $(f \cdot g)(x)$ | $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$ |
| $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ | $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{(g(x))^2}$ |

Aquestes regles de derivació, de moment, només les podem aplicar en operacions amb funcions polinòmiques de primer i segon grau.

## Exemple

Calcula la funció derivada de la funció $f(x) = \frac{2x+1}{3x+4}$

N'hi ha prou d'interpretar la funció $f(x)$ com un quocient de funcions i aplicar la regla de derivació de la derivada d'un quocient:

$$f'(x) = \frac{(2x+1)' \cdot (3x+4) - (3x+4)' \cdot (2x+1)}{(3x+4)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2 \cdot (3x+4) - 3 \cdot (2x+1)}{(3x+4)^2}$$

I simplificar:

$$f'(x) = \frac{6x+8-6x-3}{(3x+4)^2} = \frac{5}{(3x+4)^2}$$

## Activitats

**41** Calcula la funció derivada de les funcions següents:

**a** $f(x) = -5x^2 + x + 3$

**b** $g(x) = 8x^2 - 7x - 12$

**c** $h(x) = (8x^2 - 7x - 12) \cdot (-3x^2)$

**42** Calcula la funció derivada de les funcions següents:

**a** $f(x) = (-15x^2) \cdot (x + 1)$

**b** $g(x) = (8x^2 + 3x) \cdot (-3x)$

**c** $h(x) = (8x^2 - x - 1) \cdot (-3x^2 + 3x)$

**43** Calcula la funció derivada de les funcions següents:

**a** $f(x) = \dfrac{x^2 - 3}{x^2}$ **b** $g(x) = \dfrac{4x^2 - 5x + 1}{x^2 + 2}$ **c** $h(x) = \dfrac{7x^2 - 3x}{-2x^2 + 3x - 5}$

## Derivada de les funcions polinòmiques i de les funcions racionals

Per derivar les funcions polinòmiques i les racionals, a més de les regles de derivació de l'apartat anterior necessitem la derivada de la funció $f(x) = x^n$

### Derivada de la funció $f(x) = x^n$

**Activitats**

**44 a** Completa la taula següent:

| *Funció* | *Transformació de la funció* | *Derivada* |
|---|---|---|
| $f(x) = x$ | $f(x) = x^1$ | $f'(x) = 1 = 1x^0$ |
| $f(x) = x^2$ | $f(x) = x^2$ | $f'(x) = 2x = 2x^1$ |
| $f(x) = x^3$ | $f(x) = x^2 \cdot x$ | $f'(x) = 2x \cdot x + 1 \cdot x^2 = 2x^2 + x^2 = 3x^2$ |
| $f(x) = x^4$ | $f(x) = x^3 \cdot x$ | $f'(x) =$ |
| $f(x) = x^5$ | ... | ... |
| ... | ... | ... |
| $f(x) = x^n$ | | |

**b** Quina derivada té la funció $f(x) = x^n$?

**45** Calcula la derivada de les funcions següents:

**a** $f(x) = x^7$ **b** $f(x) = x^{32}$ **c** $f(x) = 3x^4$ **d** $f(x) = \dfrac{3}{2}x^6$

**Recorda**

La derivada de la funció $f(x) = x^n$ (amb $n$ un nombre natural) és la funció $f'(x) = nx^{n-1}$

Conèixer la derivada de la funció $f(x) = x^n$ i les regles de derivació ens permet trobar la derivada de les funcions polinòmiques i racionals.

**Activitats**

**46** Calcula la derivada de les funcions polinòmiques següents:

**a** $f(x) = -4x^5 + 3x + 3$

**b** $g(x) = 18x^7 - 7x^3 - 12$

**c** $h(x) = (x^3 - 7x - 12) \cdot (-3x^4)$

**47** Calcula la derivada de les funcions racionals següents:

**a** $f(x) = \dfrac{3x^7 - 3x}{x^5 + 1}$ **b** $g(x) = \dfrac{-x^2 - 3x + 17}{-2x^2 + 2}$ **c** $h(x) = \dfrac{-7x^7 - 3x^2}{-x^3 + 3x^2 - 5}$

## Derivada de les funcions exponencials i logarítmiques

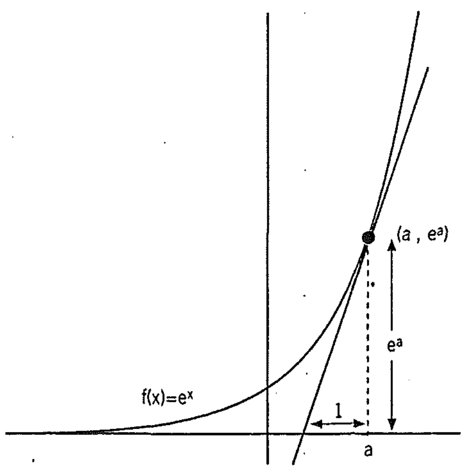
En aquest apartat trobarem les derivades de les funcions exponencials i logarítmiques que s'han treballat a la unitat 4.

### ① Derivada de la funció $f(x) = e^x$

En estudiar les propietats de la funció $f(x) = e^x$ a la unitat 4 hem vist la propietat següent: per a qualsevol punt d'abscissa $x = a$, la subtangent sempre val 1. Aquesta propietat permet calcular gràficament la derivada de la funció $f(x) = e^x$.

**Activitats**

**48** **a** Utilitzant el triangle que té per base la subtangent, calcula $f'(a)$.
**b** Demostra que la derivada de la funció $f(x) = e^x$ és $f'(x) = e^x$.

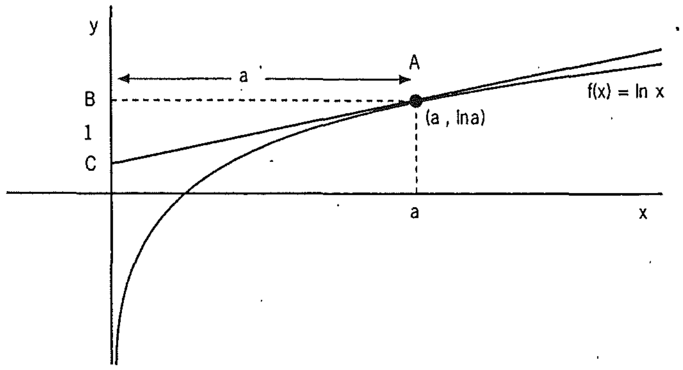



**49** Calcula les derivades de les funcions següents:

**a** $f(x) = x^2 - 3e^x + 1$ **b** $g(x) = (x^2 - 3x) \cdot e^x$ **c** $h(x) = \dfrac{e^x}{x^3}$

### ② Derivada de la funció $f(x) = \ln x$

Com que la funció $f(x) = \ln x$ és la inversa de la funció $g(x) = e^x$, la propietat que la subtangent sempre val 1 es trasllada a la funció logarítmica de la manera següent:




## Activitats

**50** **a** Utilitzant el triangle $ABC$ de la figura anterior calcula $f'(a)$.

**b** Demostra que la derivada de la funció $f(x) = \ln x$ és $f'(x) = \dfrac{1}{x}$.

**51** Calcula les derivades de les funcions següents:

**a** $f(x) = -2x^5 - \ln x + 12$

**b** $g(x) = (x^2 - \ln x) \cdot e^x$

**c** $h(x) = \dfrac{1}{\ln x}$

**d** $i(x) = \dfrac{e^x + 3x}{\ln x}$

## ③ Derivada de la funció $f(x) = \log_a x$

En estudiar la família de les funcions logarítmiques, hem observat que totes són el resultat de fer una dilatació a la funció $f(x) = \ln x$. És a dir, que qualsevol funció logarítmica compleix $\log_a x = k \cdot \ln x$. Per tant, la funció derivada de la funció $f(x) = \log_a x$ serà:

$$f'(x) = k \cdot (\ln x)' = k \frac{1}{x} = \frac{k}{x}$$

Ara bé, en estudiar el canvi de base, hem vist que $k$ és igual a $\log_a e$ o bé $\dfrac{1}{\ln a}$.
Per tant:

$$(\log_a x)' = \frac{\log_a e}{x} \quad \text{o bé} \quad (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

Aquestes dues expressions de la funció derivada, s'utilitzen indistintament.

## Activitat

**52** Calcula les derivades de les funcions següents:

**a** $f(x) = -x^5 - \log_5 x + 12$

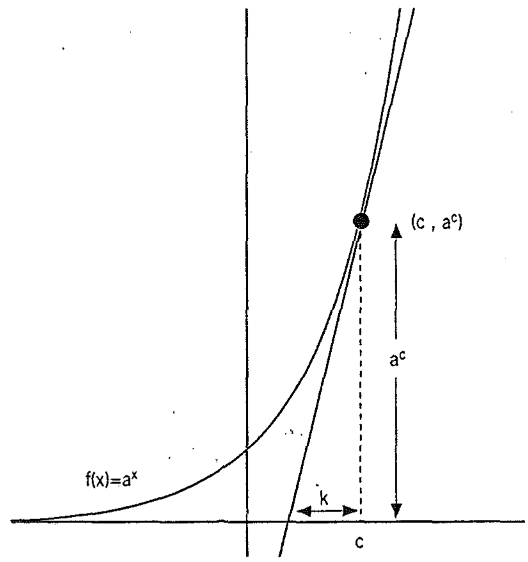
**b** $g(x) = (x^2 - \ln x) \cdot \log_2 x$

**c** $h(x) = \dfrac{\log x}{\ln x}$

**d** $i(x) = \dfrac{2e^x + \log_7 x}{\ln x}$

## ④ Derivada de la funció $f(x) = a^x$

Quan hem estudiat les propietats de la funció exponencial de base $a$ a la unitat 4, hem vist la propietat següent: per a qualsevol punt de la gràfica de la funció, la subtangent sempre val el mateix nombre $k$.

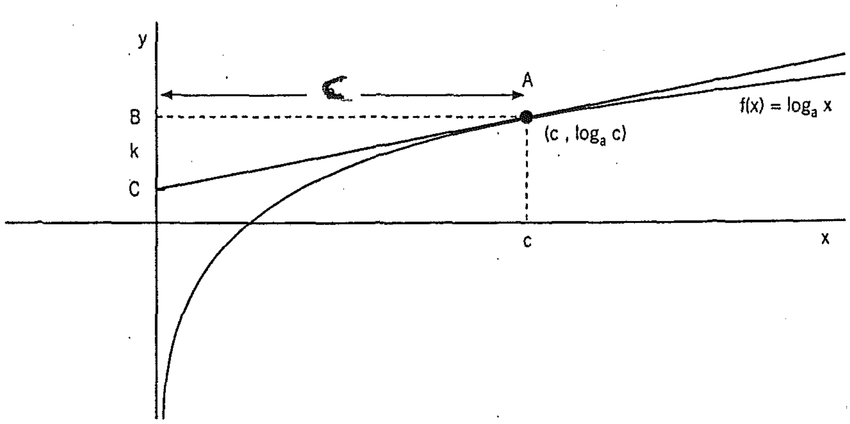



**Activitat**

**53 a** Utilitzant el triangle de base $k$, calcula $f'(c)$.

**b** Demostra que la funció derivada de la funció exponencial de base $a$ és la funció $f'(x) = \dfrac{a^x}{k}$.

Per tenir completament determinada la derivada de la funció exponencial de base $a$, només cal saber el valor de $k$. Aquest valor es pot calcular utilitzant el fet que la funció exponencial de base $a$ té per inversa la funció $f(x) = \log_a x$.



**Activitat**

**54** **a** Explica per què el segment *BC* té la mateixa longitud $k$ que la subtangent de la funció exponencial de base $a$.

**b** Utilitzant el fet que $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$, demostra que $k = \dfrac{1}{\ln a}$.

Un cop sabem que $k = \dfrac{1}{\ln a}$, tenim:

$$(a^x)' = \frac{a^x}{k} = a^x \cdot \frac{1}{k} = a^x \cdot \ln a$$

**Activitat**

**55** Calcula les derivades de les funcions següents:

**a** $f(x) = 4^x - \log_3 x + 27$

**b** $g(x) = (5^x - \ln x) \cdot \log_{12} x$

**c** $h(x) = \dfrac{\log x}{8^x}$

**d** $i(x) = \dfrac{26x + \log_{11} x}{9^x}$

**Recorda**

| Funció | Funció derivada |
|---|---|
| $f(x) = e^x$ | $f'(x) = e^x$ |
| $f(x) = a^x$ | $f'(x) = a^x \cdot \ln a$ |
| $f(x) = \ln x$ | $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ |
| $f(x) = \log_a x$ | $f'(x) = \dfrac{\log_a e}{x}$ o bé $f'(x) = \dfrac{1}{x \ln a}$ |

## Derivada de les funcions trigonomètriques

En aquest apartat trobarem les derivades de les funcions trigonomètriques que s'han treballat a la unitat 5.

### Derivada de la funció $f(x) = \sin x$

El càlcul de la derivada de la funció sinus a partir del límit

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

és una mica complicat. Per aquest motiu, en aquest curs ens limitarem a donar una justificació intuïtiva de les fórmules de les derivades de les funcions sinus i cosinus.

Per trobar la funció derivada de la funció sinus utilitzarem un graficador de funcions. Per a un valor $h$ molt petit, com ara $10^{-6}$, $10^{-7}$, $10^{-8}$... la funció taxa mitjana de variació entre $x$ i $x + h$

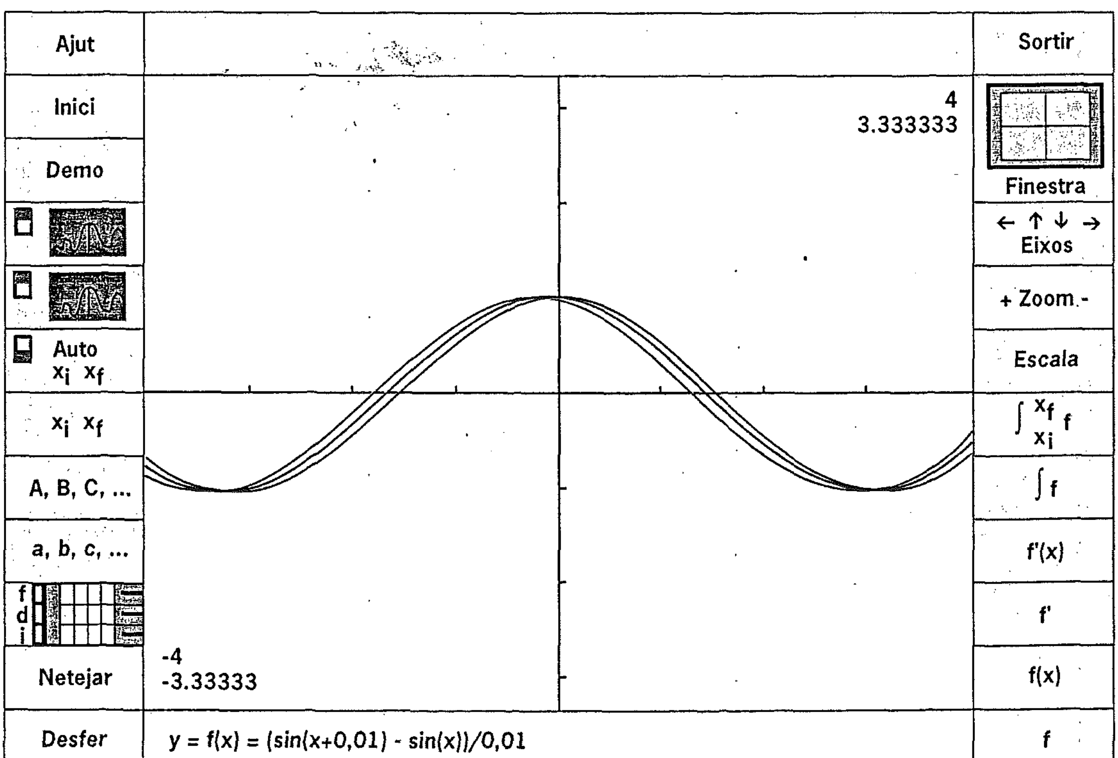
$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

és una funció que és quasi igual que la funció derivada

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

i, per tant, per trobar una funció que tingui la gràfica quasi igual que la funció derivada, només cal representar en un graficador de funcions la funció taxa mitjana de variació entre $x$ i $x + h$ per a un valor de $h$ petit.

Per exemple, si en un graficador representem la funció taxa mitjana de variació de la funció $f(x) = \sin x$ entre $x$ i $x + 0{,}5$, obtenim la gràfica 1 (blava); si és entre $x$ i $x + 0{,}1$, obtenim la gràfica 2 (verda); entre $x$ i $x + 0{,}01$, obtenim la gràfica 3 (vermella); i per a qualsevol valor de $h$ més petit que 0,01, tornem a obtenir la gràfica 3.



| Funció taxa mitjana de variació entre $x$ i $x + h$ | Gràfica |
|---|---|
| $\dfrac{\sin(x + 0{,}5) - \sin x}{0{,}5}$ | Gràfica 1 (color blau) |
| $\dfrac{\sin(x + 0{,}1) - \sin x}{0{,}1}$ | Gràfica 2 (color verd) |
| $\dfrac{\sin(x + 0{,}01) - \sin x}{0{,}01}$ | Gràfica 3 (color vermell) |
| $\dfrac{\sin(x + h) - \sin x}{h}$ (amb $h < 0{,}01$) | Torna a sortir la gràfica 3 (color vermell) |

Per tant, podem suposar que la gràfica de la funció derivada de la funció sinus és la gràfica de color vermell (gràfica 3). Si podem trobar la fórmula de la funció que té per gràfica la gràfica 3, haurem trobat la fórmula de la funció derivada de la funció sinus.

Si observem la gràfica de color vermell i recordem el que hem vist a la unitat 5 sobre les gràfiques de les funcions trigonomètriques, tot fa pensar que la gràfica de color vermell és la funció cosinus. Per confirmar aquesta suposició només cal representar amb el mateix graficador la funció cosinus i observar que torna a sortir la gràfica de color vermell.

## Derivada de les funcions $f(x) = \cos x$, $f(x) = \text{tg}\, x$ i $f(x) = \text{cotg}\, x$

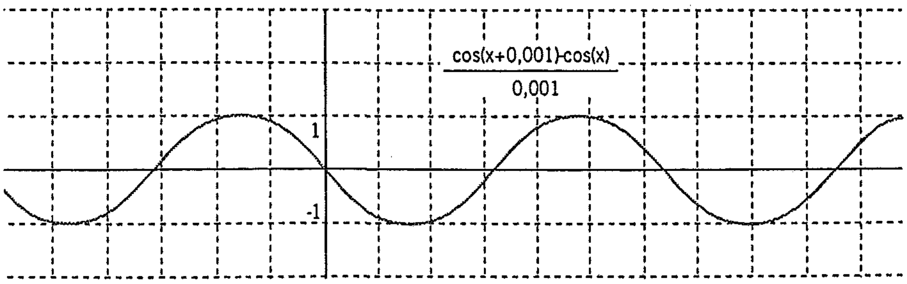
**Recorda**

La derivada de la funció $f(x) = \sin x$ és la funció $f'(x) = \cos x$.

**Activitats**

**56** **a** A partir de la gràfica de la funció $f(x) = \sin x$, dibuixa la gràfica de la funció $f(x) = -\sin x$.

**b** En un graficador hem representat la funció taxa mitjana de variació de la funció $y = \cos x$ entre $x$ i $x + 0{,}001$, i hem obtingut la gràfica següent:




Un alumne diu que la derivada de la funció $f(x) = \cos x$ és la funció $f(x) = -\sin x$. Estàs d'acord amb aquesta afirmació? Per què?

**57** Utilitzant la regla de la derivada d'un quocient i el fet que $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, calcula la derivada de la funció $\operatorname{tg} x$ i simplifica el resultat. Fixa't que poden sortir dos resultats equivalents.

**58** Utilitzant la regla de la derivada d'un quocient i el fet que $\operatorname{cotg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$, calcula la derivada de la funció $\operatorname{cotg} x$ i simplifica el resultat. Fixa't que poden sortir dos resultats equivalents.

**59** Calcula la derivada de les funcions següents:

**a** $f(x) = 3x^3 + \cos x$

**b** $g(x) = 3x^3 + \sin x - \cos x$

**c** $h(x) = (x^5 + \cos x) \cdot \sin x$

**d** $i(x) = (x^5 + \operatorname{tg} x) \cdot e^x$

**e** $j(x) = \dfrac{\operatorname{tg} x}{\sin x}$

**f** $k(x) = \dfrac{\operatorname{cotg} x}{\cos x + 4x}$

**Recorda**

| Funció | Funció derivada |
|---|---|
| $f(x) = \sin x$ | $f'(x) = \cos x$ |
| $f(x) = \cos x$ | $f'(x) = -\sin x$ |
| $f(x) = \operatorname{tg} x$ | $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ o bé $f'(x) = 1 + \operatorname{tg}^2 x$ |
| $f(x)' = \operatorname{cotg} x$ | $f'(x) = \dfrac{-1}{\sin^2 x}$ o bé $f'(x) = -1 - \operatorname{cotg}^2 x$ |

## Derivada de la funció $f(x) = x^{n/m}$

En aquest apartat veurem com la regla que hem obtingut per derivar la funció $f(x) = x^n$ amb $n$ un nombre natural també és vàlida quan l'exponent és una fracció.

### ① Derivada de la funció $f(x) = \sqrt{x}$

Aquesta funció derivada es pot calcular a partir de la derivada de la funció producte.

$$(\sqrt{x})^2 = x \Leftrightarrow \sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = x$$

Si calculem la derivada dels dos costats de la igualtat tenim:

$$(\sqrt{x}\cdot\sqrt{x})' = (x)'$$
$$(\sqrt{x})'\cdot\sqrt{x} + \sqrt{x}\cdot(\sqrt{x})' = 1$$
$$2\cdot(\sqrt{x})'\cdot\sqrt{x} = 1$$
$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}$$

Si escrivim el resultat anterior en forma de potència d'exponent fraccionari tenim:

$$\left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}}$$

**Activitat**

**60** Creus que la fórmula $(x^n)' = n\,x^{n-1}$ continua sent vàlida per a $n = 1/2$?

## ② Derivada de la funció $f(x) = \sqrt[n]{x^m}$

A l'activitat anterior has comprovat que la fórmula $(x^n)' = n\,x^{n-1}$ és vàlida quan $n = 1/2$. En el curs vinent veuràs que aquesta fórmula és certa per a qualsevol valor de l'exponent. Ara ens limitarem a utilitzar-la per calcular la funció derivada de la funció $y = \sqrt[n]{x^m}$

**Exemple**

Calcula la funció derivada de la funció $y = \sqrt[3]{x^4}$

$$(y)' = \left(\sqrt[3]{x^4}\right)' = \left(x^{\frac{4}{3}}\right)' = \frac{4}{3}\cdot x^{\frac{4}{3}-1} = \frac{4}{3}\cdot x^{\frac{1}{3}}$$

## ③ Derivada de la funció $f(x) = x^{-n}$

**Exemple**

Calcula la derivada de la funció $y = \frac{1}{x^3}$

$$y = \frac{1}{x^3} = x^{-3} \Rightarrow y' = -3x^{-3-1} = -3x^{-4} = \frac{-3}{x^4}$$

**Activitat**

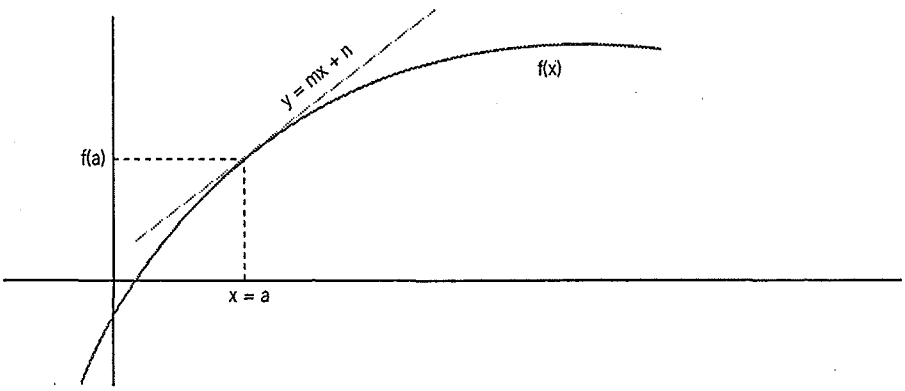
**61** Calcula la funció derivada de les funcions següents:

**a** $y = \sqrt[3]{x^5}$ **b** $y = 3\cdot\sqrt[5]{x^9}$ **c** $y = \frac{7\cdot\sqrt[5]{x^{12}}}{\sin x}$

**d** $y = \frac{\sqrt{x^{12}}}{\ln x}$ **e** $y = \frac{1}{x^2}$ **f** $y = \frac{4}{x^3}$

## Equació de la recta tangent

El procediment per trobar la recta tangent a la gràfica d'una funció $f(x)$ en $x = a$ és el següent:




1 Buscar $f'(a)$, que és el pendent $m$ de la recta tangent, de la manera següent:

1.1 Calcular la funció derivada $f'(x)$.

1.2 Substituir $x$ per $a$ en la fórmula de la funció derivada.

2 Buscar la segona coordenada del punt de tangència $(a, f(a))$ substituint $x$ per $a$ en la fórmula de la funció.

3 Trobar $n$ sabent que la recta tangent passa pel punt de tangència.

### Activitats

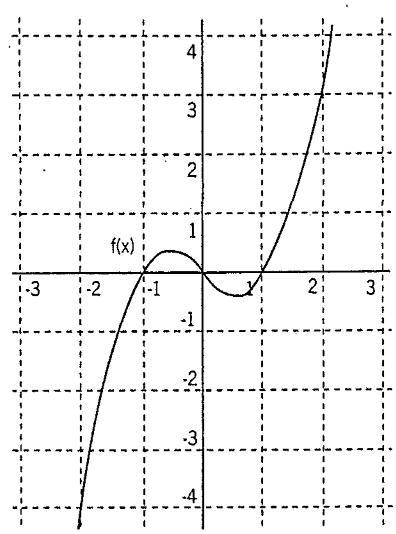
**62** **a** Troba l'equació de la recta tangent a la funció $y = x^3$ en el punt d'abscissa $x = 1$.

**b** Troba l'equació de la recta normal a la funció en $x = 1$. La recta normal és la perpendicular a la recta tangent.

**63** Troba l'equació de la recta tangent i de la normal a la funció $y = \sin x$ en el punt d'abscissa $x = \dfrac{\pi}{4}$.

**64** Troba l'equació de la recta tangent i la de la normal a la funció $y = \ln x$ en el punt d'abscissa $x = e$.

## Per practicar més




**1** Donada la funció $f(x)$, troba:

**a** La variació de la funció entre $-2$ i 0.

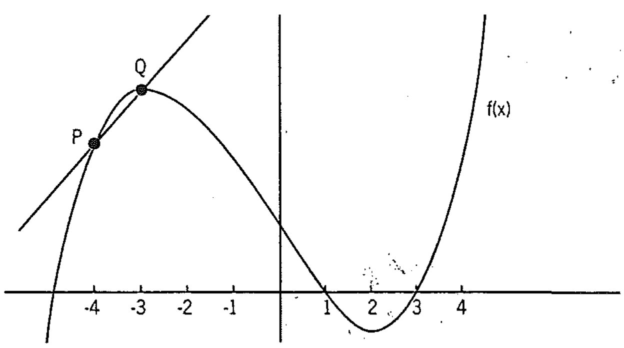
**b** Un nombre $a$ tal que la variació entre $a$ i 1 sigui zero.

**c** La taxa mitjana de variació de la funció entre $x = -1$ i $x = 2$.

**2** Quina de les expressions següents representa el pendent de la recta secant que passa pels punts $P\ (-4\ , f(-4))$ i $Q\ (-3\ , f(-3))$ de la figura?

**a** $\dfrac{f(-3)}{f(-4)}$ **b** $\dfrac{f(-3) - f(-4)}{-3 - (-4)}$ **c** $\dfrac{-3 - (-4)}{f(-3) - f(-4)}$

**d** Cap de les anteriors.




**3** Donada la funció $f(x) = x^2 + 2x - 3$, calcula:

**a** La taxa mitjana de variació de la funció entre $x = 1$ i $x = 3$.

**b** El pendent de la recta secant que passa pels punts $(1\ , f(1))$ i $(3\ , f(3))$.

**c** L'equació de la recta secant que passa pels punts $(1\ , f(1))$ i $(3\ , f(3))$.

**4** Sabent que $d(t) = 5t^2 + 3t - 1$ ens dóna l'espai recorregut per un mòbil al cap de $t$ segons, troba la velocitat instantània en $t = 2$ i $t = 4$ s.

**5** Donada la funció $f(x) = 2x^2 + x + 3$, calcula $f'(1)$ i $f'(4)$.

**6** Donada la funció $f(x) = -2x^2 + 3x - 5$, calcula:

**a** $f'(3)$

**b** L'equació de la recta tangent en $x = 3$.

**7** Troba en quin punt de la paràbola $f(x) = 4x^2 + 5$ la recta tangent té pendent 8.

**8** Donada la funció $f(x) = x^2 + 3x + 1$:

**a** Per a quin valor de l'abscissa la derivada val 20?
**b** Per a quin valor de l'abscissa la recta tangent té pendent 5?
**c** Per a quin valor de l'abscissa la recta tangent és paral·lela a la recta $y = 10x + 54$?

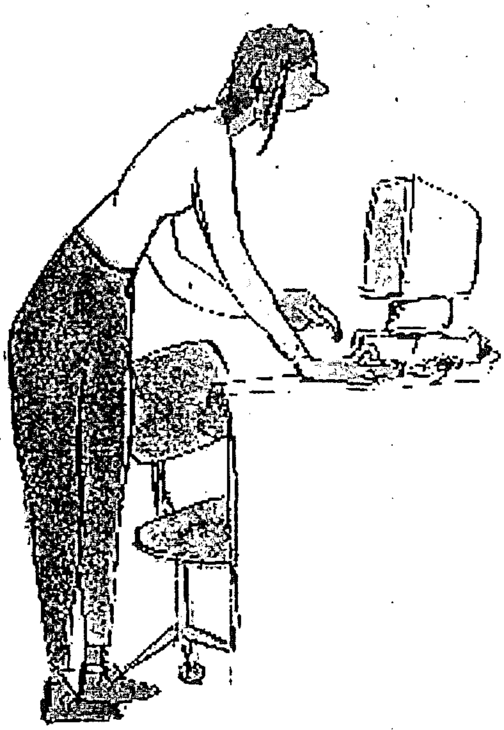
**9** Determina una funció polinòmica de segon grau, sabent que la gràfica passa pel punt (3 , 4), i que el pendent de la recta tangent en el punt (–1 , 1) val 1.

**10** Donada la corba d'equació $y = 3x^2 - 5$ i la recta $y = 4x + b$, troba el valor de $b$ perquè la recta sigui tangent a la corba. Determina també el punt de tangència.

**11** En quin punt la funció $f(x) = x^2 + 3$ té una recta tangent que forma un angle de 60° amb l'eix d'abscisses?

**12** Troba l'equació de la recta tangent a la funció $f(x) = -x^2 + 3x + 3$ en el punt d'abscissa $x = 1$.

**13** Donada la funció $f(x) = \dfrac{x-1}{x}$, calcula $f'(1)$ i $f'(4)$.

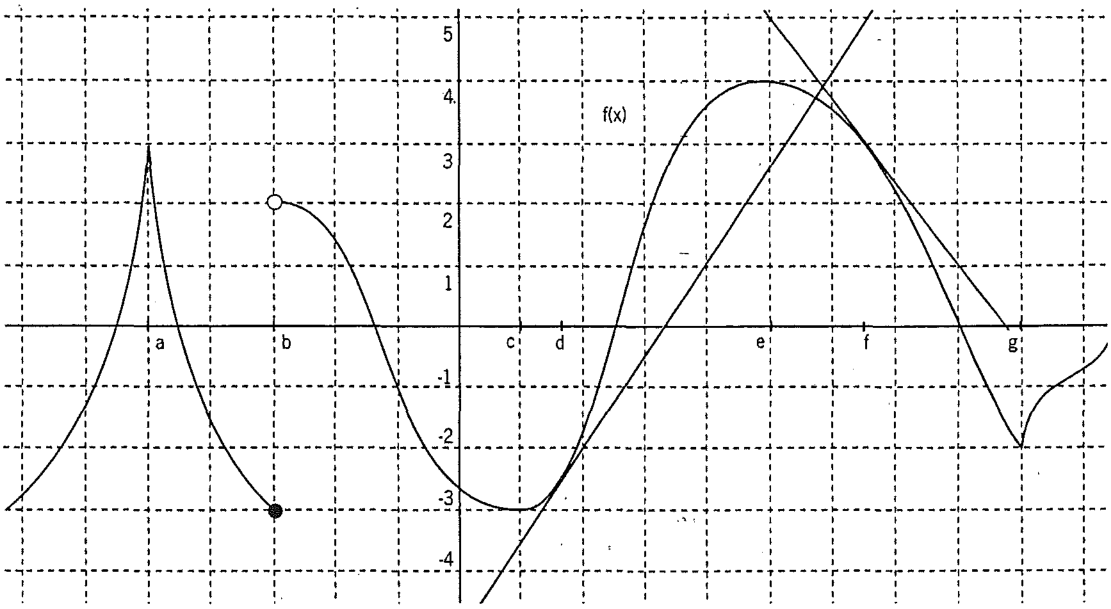


**14** En llançar una pedra enlaire verticalment a una velocitat inicial de 12 m/s, l'altura en metres que assoleix al cap de $t$ segons és donada per la fórmula $d(t) = 12t - 5t^2$.

**a** En quin instant la velocitat de la pedra serà 0 m/s?
**b** En quin instant la velocitat de la pedra serà 1,2 m/s?
**c** Troba la fórmula que dóna la velocitat instantània en funció del temps.

**15** **a** Troba l'equació de la tangent a la corba de la funció $f(x) = \log_5 x$ en el punt d'abscissa $x = 5$.
**b** Troba l'equació de la tangent a la corba de la funció $f(x) = \cos x$ en el punt d'abscissa $x = \pi/2$.

**16** Calcula gràficament, si és possible, la derivada de la funció $f(x)$ en els punts d'abscisses a, b, c, d, e, f i g.

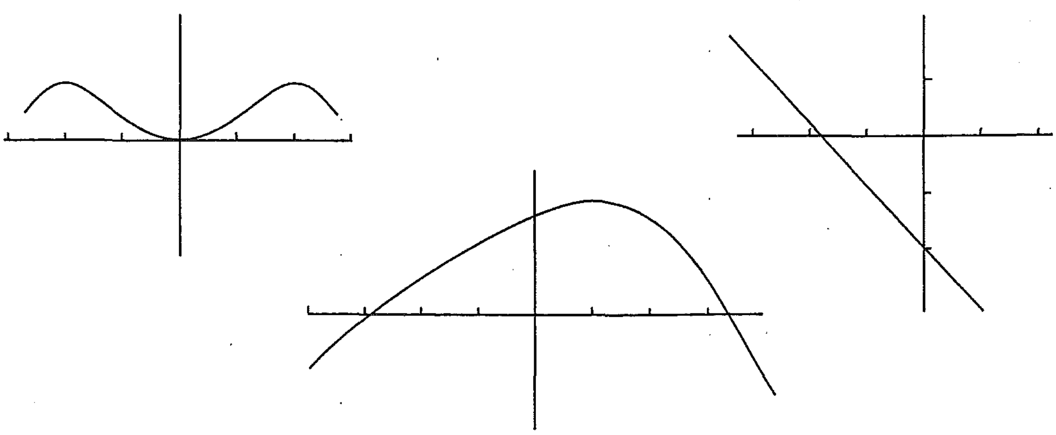


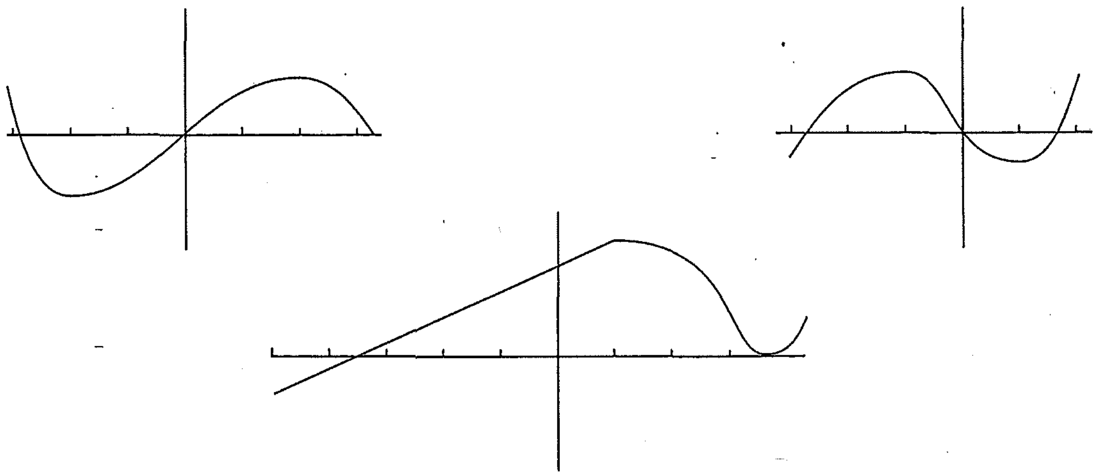

**17** D'entre les sis gràfiques següents, identifica aquelles que puguin ser gràfiques de les funcions que tinguin aquestes característiques:

**a** La funció $f(x)$ compleix $f'(-2) = 0$, presenta un màxim en $x = 2$ i passa per l'origen de coordenades.

**b** La funció $g(x)$ compleix que la seva derivada en qualsevol punt sempre és negativa.

**c** La funció $h(x)$ compleix que la derivada en qualsevol punt de l'interval $(-4, 1)$ és positiva, i la derivada en qualsevol punt de l'interval $(1, 3)$ és negativa.





**18** Calcula la funció derivada de les funcions següents:

**a** $f(x) = -5x^3 + 2x + 3$

**b** $g(x) = (8x^2 - 5x - 12) \cdot (-4x^2)$

**c** $h(x) = \dfrac{x^2 - 3}{x^2 + 3}$

**d** $i(x) = \dfrac{-4x^2 - 5x + 1}{x^2 + 2}$

**e** $j(x) = \dfrac{x - \ln x}{4^x}$

**f** $k(x) = x^2 - 3e^x + \sin x$

**19** Calcula la funció derivada de les funcions següents:

**a** $f(x) = -6x^6 - \ln x + 2$

**b** $g(x) = (x^2 - \ln x) \cdot (e^x + \sqrt{x})$

**c** $h(x) = \dfrac{x^2}{\ln x}$

**d** $h(x) = \dfrac{e^x + 3^x}{\ln x - 2x}$

**e** $i(x) = -4x^5 - \log_7 x + \sin x$

**f** $g(x) = (x^2 - \ln x) \cdot (\log_5 x + 2^x)$

**g** $h(x) = \dfrac{5 \cdot \log x}{2 \cdot \ln x}$

**h** $i(x) = \dfrac{2e^x + \log_7 x}{\ln x - 2x}$

**i** $j(x) = \dfrac{26^x + \log_{11} x}{9^x}$

**j** $k(x) = 5^x - \log_3 x + \sqrt{x}$

**k** $g(x) = (5^x - \ln x) \cdot \log_{12} x$

**l** $h(x) = \dfrac{\log x}{8^x}$

**20** Calcula la funció derivada de les funcions següents:

**a** $f(x) = (x^2 - 3^x) \cdot 2e^x$

**b** $g(x) = 3x^3 + \operatorname{tg} x$

c $h(x) = 3x^3 + 2\sin x - \cos x$

d $i(x) = (x^5 + \cos x) \cdot \text{cotg}\, x$

e $i(x) = 4 \cdot (2x^5 + \text{tg}\, x)$

f $k(x) = \dfrac{\text{cotg}\, x}{\sin x}$

g $y = \sqrt[7]{x^5}$

h $y = 5 \cdot \sqrt[5]{x^4}$

i $y = \dfrac{\sqrt[5]{x^{12}}}{\cos x}$

j $y = \dfrac{e^x \cdot \sqrt[5]{x^{12}}}{\log x}$

## Per saber-ne més

### ① Per pensar una mica més

**21** Un dipòsit d'aigua té forma cilíndrica amb unes dimensions d'1 m de radi i 4 m d'altura. Troba la taxa mitjana de variació entre dos nivells d'altura qualssevol.

**22** Suposem que l'altura $h(t)$ d'un projectil, $t$ segons després de ser llançat a una velocitat inicial de 30 m/s, menyspreant la fricció de l'aire i la variació de la gravetat, és donada per la funció $h(t) = 30t - 5t^2$.

**a** Calcula la velocitat del projectil en un instant $t$ qualsevol.
**b** Calcula en quin o en quins instants la velocitat s'anul·la.
**c** A quina velocitat torna a la Terra?

**23** El desplaçament de dos cossos que es mouen en una mateixa direcció respecte d'un origen $O$ és donat, en funció del temps, per les equacions:

$$d_1(t) = 100 + 5t \qquad d_2(t) = \frac{1}{2} \cdot t^2$$

A quina velocitat s'allunyaran l'un de l'altre un cop s'hagin trobat?

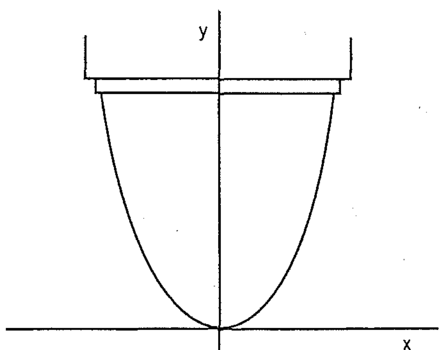
**24** **a** Troba l'equació de la tangent a la corba $y = \ln x$ en el punt d'intersecció amb l'eix d'abscisses.
**b** Fes el mateix per a $P(x) = (x - 1)\ (x - 2)\ (x - 4)$.

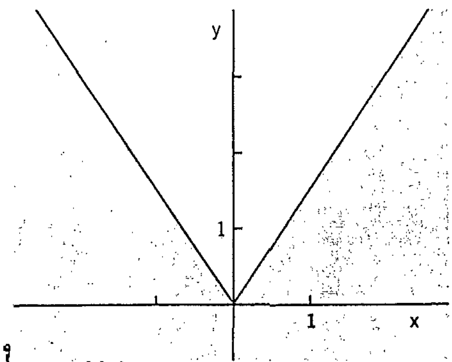
**25** La corba $y = ax^2 + bx + c$ passa pel punt $(1\ ,\ 3)$ i és tangent en l'origen a la bisectriu del primer quadrant. Determina $a$, $b$ i $c$.

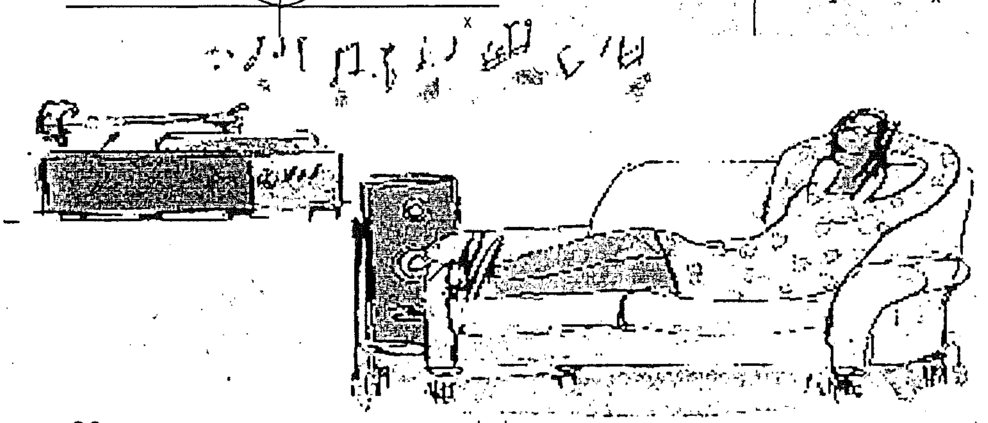
**26** Troba l'equació d'una funció quadràtica sabent que:

**1** Passa pel punt $(0\ ,\ 3)$.
**2** $f'(0) = 2$.
**3** Té un màxim en $x = 1$.

**27** L'agulla d'un tocadiscos antic té una secció parabòlica com la que s'indica a la figura. Expressada en dècimes de mil·límetre, la funció que ens dóna aquesta secció és $f(x) = 4x^2$. Si el solc del disc té la forma de *V*, tal com es veu en la figura, de manera que els costats són dues rectes de pendents iguals a 1,5 i −1,5, respectivament, troba els punts on l'agulla farà contacte amb el solc.



**28** **a** Representa la funció $f(x) = |x|$.
**b** Per a quin valor no existeix la derivada? Per què?
**c** Calcula l'equació de la recta tangent a la funció en el punt d'abscissa $x = -3$.

**29** Determina per a quin valor de l'abscissa, la funció $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x < 0 \\ 2x+1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ no té derivada.

**30** Calcula les derivades de les funcions següents:

**a** $y = \dfrac{4^x \cdot \sqrt[5]{x^3}}{\log x} + (\cos x) \cdot \ln x$

**b** $y = \dfrac{(3 \cdot \sqrt[5]{x^9}) \cdot (x^2 - 2x + 3)}{\sin x}$

**c** $y = \dfrac{5^x \cdot \sqrt[3]{x^{12}}}{\sin x}$

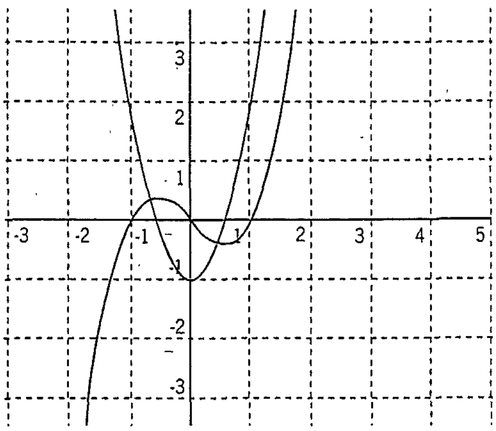
**d** $y = 4^x \cdot \log x + \dfrac{\cos x}{\ln x}$

**31** Sabent que la funció derivada d'una funció $f(x)$ és $f'(x) = 2x + 5$, troba $f(x)$.

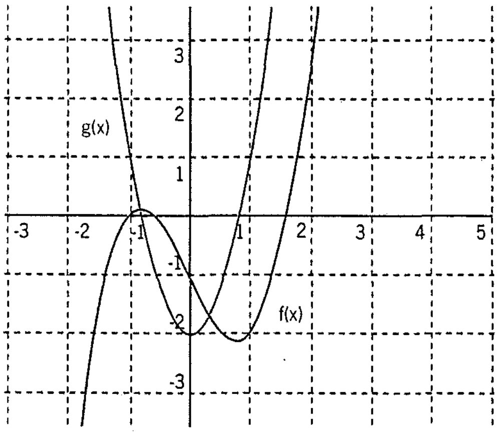
**32** Una de les dues funcions de les gràfiques següents és la funció $f(x) = x^3 - x$.

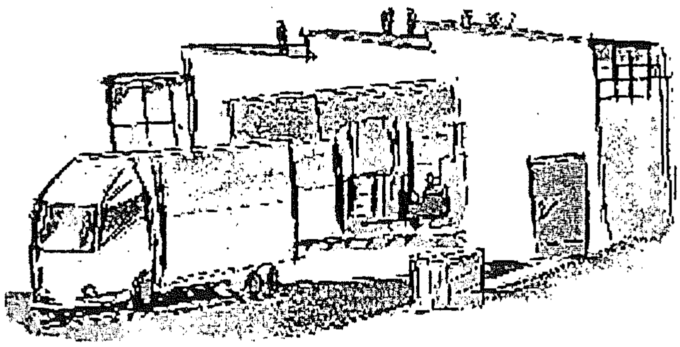
**a** Identifica quina de les dues gràfiques és la de la funció $f(x) = x^3 - x$.

**b** Comprova si l'altra gràfica correspon a $f'(x)$.




**33** Creus que la funció $g(x)$ és la funció derivada de la funció $f(x)$? Per què?



**34** El cost total ocasionat per la producció de $n$ articles mensuals en una fàbrica petita és donat per:

$$f(n) = 9.000 + 700n - n^2/100$$

**a** Calcula $f(26) - f(25)$.

**b** Calcula $f'(25)$ i compara'l amb el resultat anterior.

De $f'(n)$, se'n diu *cost marginal*, i és aproximadament la quantitat que augmenta el cost total si la producció s'incrementa una unitat. Troba'l quan $n = 18$ i quan $n = 35$.

## ② Derivada de la funció producte i de la funció quocient

Recorda bé que la derivada d'un producte no és el producte de derivades. L'activitat següent permet demostrar la fórmula de la derivada del producte de dues funcions.

**35** Considera les funcions $f(x)$, $g(x)$ i $(f \cdot g)(x)$. Demostra que si $f(x)$ i $g(x)$ són derivables en $x = a$, llavors $(f \cdot g)(x)$ també és derivable en aquest punt i $(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + g'(a) \cdot f(a)$.

Per això:

**a** Escriu la taxa mitjana de variació de $(f \cdot g)(x)$ entre $a$ i $x = a + h$.

**b** Comprova que:

$f(a+h) \cdot g(a+h) - f(a) \cdot g(a) = f(a+h) \cdot g(a+h) - f(a) \cdot g(a+h) +$
$+ f(a) \cdot g(a+h) - f(a) \cdot g(a)$

**c** Utilitza l'apartat anterior i fes les transformacions que calguin fins a aconseguir separar la taxa mitjana de variació de $(f \cdot g)(x)$ entre $a$ i $x = a + h$, en una suma de dues fraccions, en una de les quals hi hagi la taxa mitjana de variació de $f(x)$ i en l'altra la de $g(x)$.

**d** Calcula $(f \cdot g)'(a)$ aplicant les propietats dels límits i la definició de funció contínua en un punt.

La derivada d'un quocient no és el quocient de derivades. Les dues activitats següents permeten demostrar la fórmula de la derivada del quocient de dues funcions.

**36** **a** Calcula la taxa mitjana de variació de la funció $\dfrac{1}{f(x)}$ entre $a$ i $a + h$.

**b** Trasforma l'expressió de l'apartat anterior fins a arribar a l'expressió següent:

$$-\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \cdot \frac{1}{f(a+h) \cdot f(a)}$$

**c** Aplicant les propietats dels límits i la definició de *funció contínua en un punt* demostra:

$$\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = \frac{-f'(x)}{(f(x))^2}$$

**d** Per què creus que hem d'exigir que $f(a) \neq 0$?

**37** Utilitzant el fet que $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = f(x) \cdot \dfrac{1}{g(x)}$, la regla de la derivació d'un producte i el resultat de l'activitat anterior, demostra que:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

## ③ Derivades de les funcions exponencials i logarítmiques

A la unitat 4 hem vist que les funcions exponencials de base $a$ presenten la propietat següent: per a qualsevol punt de la gràfica de la funció, la subtangent sempre val el mateix nombre $k$. Aquesta propietat, juntament amb el fet que la funció exponencial i la logarítmica són inverses l'una de l'altra, ens ha permès calcular gràficament la derivada de les funcions exponencials i logarítmiques.

Un altre camí per trobar les funcions derivades de les funcions exponencials i logarítmiques és:

**1** Calcular la derivada de la funció $f(x) = \ln x$ a partir del càlcul del límit $\lim_{h \to 0} \dfrac{\ln (x+h) - \ln x}{h}$

**2** Utilitzant el fet que $f(x) = \ln x$ és la funció inversa de $f(x) = e^x$ i que $f'(x) = 1/x$, demostrar que la funció $f(x) = e^x$ té la propietat següent: per a qualsevol punt d'abscissa $x = a$, la subtangent sempre val 1.

**3** Calcular la derivada de la funció $f(x) = e^x$.

**4** Calcular la derivada de la funció $f(x) = \log_a x$ utilitzant el fet que qualsevol funció logarítmica compleix $\log_a x = k \cdot \ln x$.

**5** Utilitzant el fet que $f(x) = \log_a x$ és la funció inversa de $f(x) = a^x$ i que $(\log_a x)' = \dfrac{\log_a e}{x}$, demostrar que la funció $f(x) = a^x$ té la propietat següent: per a qualsevol punt d'abscissa $x = a$, la subtangent sempre val $\log_a e$.

**6** Calcular la derivada de la funció $f(x) = a^x$.

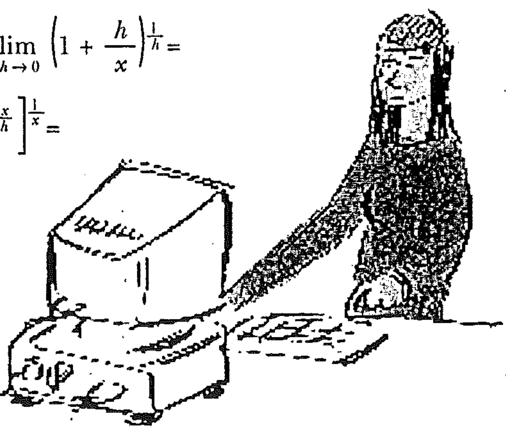
A continuació desenvoluparem el primer pas:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\ln (x+h) - \ln x}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\ln \dfrac{x+h}{x}}{h} = \lim_{h \to 0} \ln \left(\frac{x+h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} = \ln \lim_{h \to 0} \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} =$$

$$= \ln \lim_{h \to 0} \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h} \cdot \frac{1}{x}} = \ln \lim_{h \to 0} \left[\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}\right]^{\frac{1}{x}} =$$

$$= \ln \left[\lim_{h \to 0} \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}\right]^{\frac{1}{x}} = \ln e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$$



**38** Desenvolupa les etapes 2-6 del procés anterior.

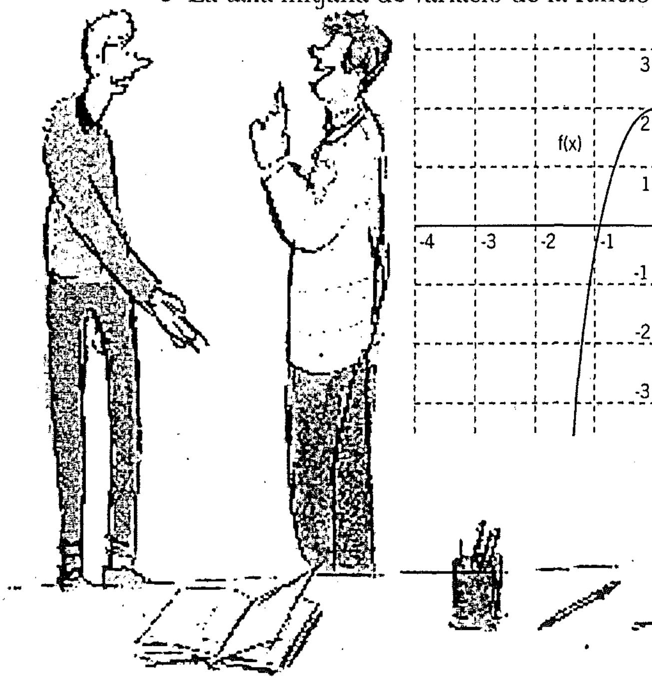
## Autoavaluació

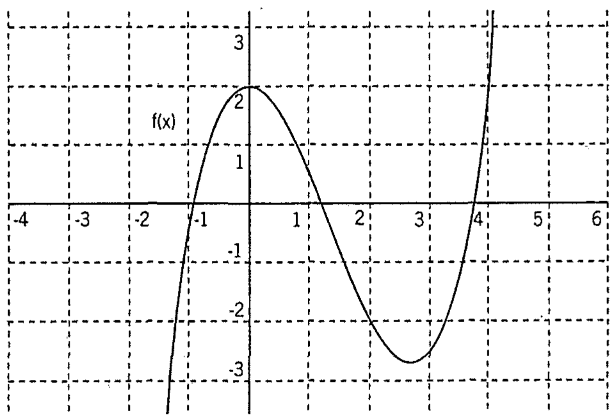
**1** Donada la funció $f(x)$ troba:

**a** La variació de la funció entre 0 i 2.

**b** Un nombre $a$ tal que la variació entre 0 i $a$ sigui zero.

**c** La taxa mitjana de variació de la funció entre $x = 0$ i $x = 2$.






**2** Donada la funció $f(x) = 2x^2 + x - 1$, calcula:

**a** La taxa mitjana de variació de la funció entre $x = 1$ i $x = 3$.

**b** El pendent de la recta secant que passa pels punts $(1, f(1))$ i $(3, f(3))$.

**c** L'equació de la recta secant que passa pels punts $(1, f(1))$ i $(3, f(3))$.

**3** Sabent que $d(t) = 10t^2 + 3t - 5$ ens dóna l'espai recorregut per un mòbil al cap de $t$ segons, troba la velocitat instantània en $t = 3$ i $t = 5$ s.

**4** Donada la funció $f(x) = -x^2 + x - 1$, calcula $f'(2)$ i l'equació de la recta tangent en $x = 2$.

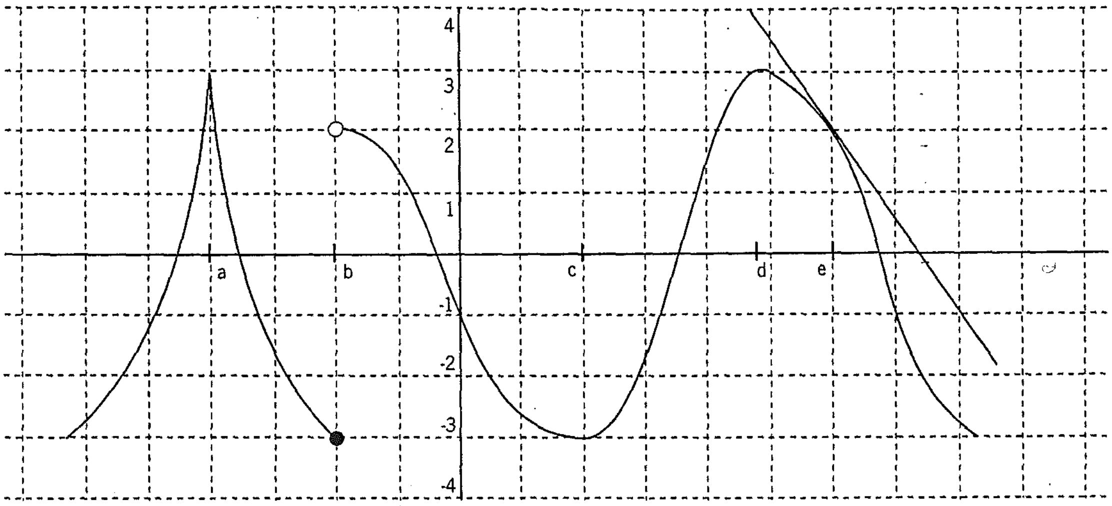
**5** Donada la funció $f(x) = 2x^2 + x + 3$:

**a** Per a quin valor de l'abscissa la derivada val 25?

**b** Per a quin valor de l'abscissa la recta tangent té pendent 5?

**c** Per a quin valor de l'abscissa la recta tangent és paral·lela a la recta $y = 15x + 104$?

**6** Calcula gràficament, si és possible, la derivada de la funció $f(x)$ en els punts d'abscisses a, b, c, d, e, f i g.




**7** Calcula la funció derivada de les funcions següents:

**a** $f(x) = -3x^3 + 12x + 4$

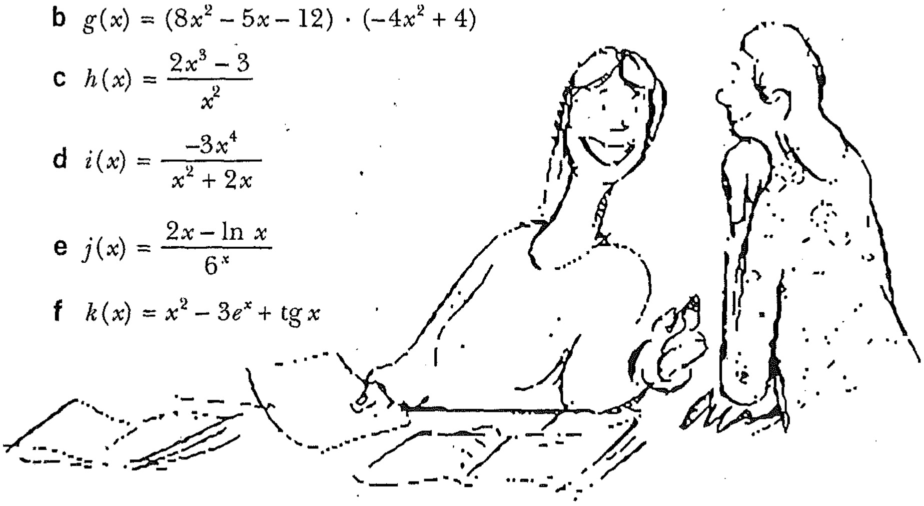
**b** $g(x) = (8x^2 - 5x - 12) \cdot (-4x^2 + 4)$

**c** $h(x) = \dfrac{2x^3 - 3}{x^2}$

**d** $i(x) = \dfrac{-3x^4}{x^2 + 2x}$

**e** $j(x) = \dfrac{2x - \ln x}{6^x}$

**f** $k(x) = x^2 - 3e^x + \operatorname{tg} x$



**8** Calcula la funció derivada de les funcions següents:

**a** $f(x) = -6x^6 - \ln x + \sqrt{x}$

**b** $g(x) = (x^2 - \log_4 x) \cdot \sqrt{x}$

**c** $h(x) = \dfrac{x^2}{2 + \ln x}$

**d** $i(x) = -4x^6 - \log_7 x + \sin x$

**e** $j(x) = \dfrac{\log x}{\ln x}$

**f** $k(x) = (x^2 - 3^x) \cdot 2e^x$

**g** $l(x) = 3x^3 + \operatorname{cotg} x$

**h** $m(x) = 5x^3 + 2\operatorname{tg} x - \cos x$