DEPARTAMENT DE DIDÀCTICA DE LES CIÈNCIES
EXPERIMENTALS I DE LA MATEMÀTICA

PROGRAMA DE DIDÀCTICA DE LES CIÈNCIES EXPERIMENTALS
I DE LA MATEMÀTICA

BIENNI 2000-2002

FENÓMENOS RELACIONADOS CON EL USO DE METÁFORAS EN EL DISCURSO DEL PROFESOR. EL CASO DE LAS GRÁFICAS DE FUNCIONES

Tesi doctoral per optar al títol de Doctor de la Universitat de Barcelona

Presentada per

JORGE IVAN ACEVEDO NANCLARES

Dirigida per

Dr. VICENÇ FONT MOLL

i

Dra. JANETE BOLITE FRANT

UNIVERSITAT DE BARCELONA

BARCELONA, 2007

CAPÍTULO 3

METÁFORAS QUE HAN ESTRUCTURADO HISTÓRICAMENTE LA GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

RESPUESTA A LA 1ª PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN

Resumen

En este capítulo se responde a la primera pregunta de investigación: ¿Cuáles son las diferentes metáforas que se han utilizado históricamente para organizar el conocimiento sobre las gráficas de las funciones?. Con relación a esta primera pregunta, hemos corroborado, matizado y enriquecido la afirmación de Font (2000) que dice que las gráficas se han estructurado históricamente a partir de las siguientes metáforas: a) Las curvas son secciones, b) Las curvas son la traza que deja un punto que se mueve sujeto a determinadas condiciones, c) Las curvas son la traza que deja un punto que se mueve sujeto a determinadas condiciones y el análisis de estas condiciones permite encontrar una ecuación que cumplen los puntos de la curva y d) La grafica de una función f es el conjunto formado por los puntos de coordenadas (x, f (x)).

En el primer apartado se expone, de manera muy sintética, la evolución histórica del objeto función. En el segundo apartado se analizan las cuatro metáforas que, según Font (2000) han estructurado el conocimiento de las gráficas de las funciones. Con relación a la metáfora conjuntista se explica, a partir de las funciones semióticas y de las fusiones conceptuales, el tipo de comprensión que permite esta metáfora. A su vez, las metáforas que consideran " la gráfica de una función como la traza que deja un punto que se mueve sujeto a determinadas condiciones", o bien como " la traza que deja un punto que se mueve sobre la gráfica", se explican a partir de la metáfora del camino. Se concluye que, a pesar de que las metáforas dinámicas y las estáticas son claramente diferentes, tienen ciertas implicaciones comunes, una de las más importantes es que ambas permiten distinguir entre gráfica y punto. Para finalizar, se argumenta que la comprensión de las gráficas de funciones es el resultado de la fusión de la visión dinámica con la estática.

3.1 METÁFORAS EN LA EVOLUCIÓN HISTÓRICA DEL OBJETO FUNCIÓN

El objeto institucional función es el resultado de una emergencia que se ha producido a lo largo de mucho tiempo. A continuación se expone, de manera muy sintética, su evolución histórica[1].

- En Babilonia para los cálculos astronómicos se utilizaban tablas en los que se hacía una compilación de efemérides del sol, la luna y los planetas. En esta civilización se estudiaron problemas de variaciones continuas, tales como luminosidad de la luna en intervalos de tiempos iguales, o los períodos de visibilidad de un planeta en relación con el ángulo que éste forma con el sol. Aunque no utilizaron letras para representar cantidades variables, los términos longitud, anchura, área y volumen, servían perfectamente para este fin.
- Los filósofos griegos consideraban el cambio y el movimiento como algo externo a las matemáticas. Según Aristóteles los objetos matemáticos no estaban sujetos al movimiento con la sola excepción de aquellos a que se refiere la astronomía. Esta visión estática es claramente dominante en los Elementos de Euclides. A pesar de ello, en la Grecia clásica las curvas se consideraron como secciones o bien como la traza que deja un punto que se mueve sujeto a determinadas condiciones.
- En la Edad Media aparece la primera gráfica conocida. Representa los cambios de latitud de los planetas respecto de la longitud. La primera idea de función como una relación entre variables aparece en las escuelas medievales de Oxford y París.
- Galileo estudió el movimiento desde un punto de vista que se puede considerar funcional utilizando palabras y proporciones.
- En los siglos XXV y XVI destaca la creación del álgebra simbólica que, si bien inicialmente no incidió en el desarrollo de la noción de función, puso los cimientos para la posterior representación analítica de las funciones.

[1] Para elaborar este estudio histórico hemos utilizado, sobre todo, el resumen expuesto en Font (2000a), reproducido con algunas modificaciones en Ramos (2006), que se ha completado con estudios específicos sobre las funciones (Youschkevitch, 1976; Azcárate y Deloufeu 1990; Arenzana 1997; Lacasta y Pascual 1998, etc.) y también con libros generales sobre la historia de las matemáticas (Boyer 1986; Collette 1985; Kline 1992, etc.).

- En el primer apartado del segundo libro de "La Géométrie", Descartes divide las curvas en mecánicas y geométricas. Una curva es geométrica si la podemos imaginar descrita por un movimiento continuo o bien por diversos movimientos sucesivos, de manera que los últimos vengan determinados por los anteriores. En cambio, las mecánicas son las que resultan de dos movimientos independientes que no guardan entre sí una relación que pueda ser medida. La curva geométrica es para Descartes la traza que produce un punto que se mueve por un instrumento articulado compuesto por diversos reglas, de manera que el movimiento efectuado sobre un regla se transmite por los diferentes reglas del instrumento y hace que el punto se mueva trazando una determinada curva.

  Esta manera de entender la curva y la introducción implícita del sistema de coordenadas permite a Descartes hallar la expresión algebraica de la curva y le lleva a definir claramente el objeto de la Geometría Analítica: las curvas geométricas; y las técnicas que se han de utilizar para su estudio: la teoría de las ecuaciones.

- Fermat aplicó los métodos de Vieta a los problemas de lugares geométricos y en "Ad locos planos et solidos isagoge" (escrito aproximadamente en 1637) presenta con las notaciones de Vieta los principios fundamentales de la Geometría Analítica. En esta obra enuncia el principio fundamental de la geometría analítica:

  > Cuando una ecuación contiene dos cantidades desconocidas, hay un lugar correspondiente, y el punto extremo de cada una de estas cantidades describe una línea recta o una línea curva. (Collette 1985, vol. II, p. 23).

  Esta proposición, además de ser la base de la geometría analítica, introduce la idea de variable algebraica. Fermat expone muy claramente la idea de que una ecuación con dos incógnitas es una expresión algebraica de las propiedades de la curva. Según Font (2000), mientras que Descartes considera curvas generadas por movimientos de las cuales busca la ecuación, Fermat introduce curvas dadas por ecuaciones algebraicas. De acuerdo con Font (2000) consideramos que se puede decir que Descartes se preocupa más de la traducción de la gráfica a la expresión simbólica, mientras que Fermat se preocupa más de la traducción de la expresión simbólica a la gráfica.

- Newton, en el año 1736, publicó su libro "Methodus fluxionum et Serierum Infinitarum". En este libro dice que considera las variables como generadas por el movimiento continuo de puntos, rectas y planos, más que como agregados estáticos de infinitesimales. A una cantidad variable le llama “fluente” y la representa por las letras *x, y*, a su cambio relativo “fluxión” que representa por $\dot{x}$ e $\dot{y}$. En este libro, Newton considera que el problema fundamental del cálculo es el siguiente: dada una relación entre fluxiones, obtener una relación entre sus respectivas fluyentes y recíprocamente. La primera publicación de Newton que incluye su cálculo diferencial fue los “Principia”, publicados en el año 1687. Aunque se publicó antes esta obra es posterior tanto a “De Analysi per Aequationes Numero Terminorum Infinitas” (en el cual se utilizan los infinitesimales) como a “Methodus Fluxionum et Serierum Infinitarum” (en el cual se utiliza el método de las fluxiones). En los “Principia”, Newton utiliza métodos de demostración geométricos, seguramente debido a que consideraba que este tipo de demostraciones era más comprensible para sus contemporáneos y expone un método alternativo a los infinitesimales y al método de las fluxiones: las cantidades divisibles evanescentes.

En general se puede decir que para Newton la función es una herramienta fundamental que se usa, pero que no es objeto de estudio en sí misma. Las gráficas de funciones eran consideradas no como un agregado estático de infinitesimales, sino como la trayectoria descrita por un punto en movimiento, la cual se puede expresar mediante una fórmula (generalmente en forma implícita).

Otra aportación importante de Newton fue considerar que la expresión simbólica de una función se podía transformar en una serie infinita.

- Para Leibnitz, al igual que para Newton, la función es una herramienta fundamental que se usa, pero que no es objeto de estudio en sí misma. Ahora bien, Leibnitz a diferencia de Newton, considera la gráfica de una función como un agregado de segmentos infinitesimales más que como la trayectoria de un punto que se mueve.

- La primera definición explícita de función aparece en un artículo de Bernoulli sobre soluciones a problemas de isoperímetros del año 1718. Para Bernoulli, una función de una magnitud variable era una cantidad compuesta de cualquier manera con esta magnitud variable y de constantes. Euler, que fue discípulo de Bernoulli, en el capítulo I de su libro “Introductio an analysin infinitorum” publicado en el año 1748, modifica la definición de su maestro substituyendo el término “cantidad” por “expresión analítica”:

> Euler define la función de una cantidad variable como una “expresión analítica” formada de cualquier manera con esta cantidad variable, con números y con constantes. (Collette 1985, vol. II, p. 192)

En función de las operaciones que intervienen, Euler clasifica las funciones en algebraicas y transcendentes. Las funciones algebraicas, en irracionales y no-irracionales, y estas últimas, en polinómicas y racionales (cociente de polinomios). También hace una clasificación en funciones implícitas y explícitas, así como en uniformes (unívocas) y multiformes. También afirma que la forma universal para la expresión analítica de una función es la serie entera infinita de la forma: $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \ldots\ldots$

- En el siglo XVIII, los matemáticos más importantes (Euler, Lagrange, etc.) consideraban que cualquier función se podía representar por una serie entera, siempre que no fuese una función definida a trozos. Euler consideraba que a cada expresión analítica le correspondía una gráfica cartesiana, y que expresiones analíticas, que de entrada parecían diferentes, podían tener la misma gráfica. Pero consideraban que a gráficas diferentes correspondían expresiones analíticas diferentes. En la terminología de Euler, las gráficas definidas a trozos eran “discontinuas o mixtas o irregulares”.
- La necesidad de considerar funciones mixtas en determinados problemas llevó a Euler a buscar una definición de función que englobase a todas las curvas que no se podían definir por una sola expresión, pero que se podían dibujar por el movimiento libre de la mano. En su libro “Institutiones calculi differentialis” publicado en el año 1755 dio la siguiente definición:

> Si ciertas cantidades dependen de otras, de tal manera que si las otras cambian, estas cantidades cambian también, entonces se llama estas cantidades funciones de las últimas; esta denominación tiene la máxima amplitud y contiene, en ella misma, todas las maneras por las cuales una cantidad puede ser determinada por otras. Si, por consiguiente, x designa una cantidad variable, entonces las otras cantidades que dependen de x de cualquier manera, o que están determinadas por x, se llaman funciones de x. (citado en Lacasta y Pascual 1998, p. 38).

- La aritmetización del análisis realizada por Cauchy, Bolzano, Weierstrass y otros llevó a una definición de función prácticamente equivalente a la que se usa actualmente. El año 1837, Dirichlet dio la definición de función en los siguientes términos:

> Imaginemos que "a" y "b" son dos valores fijos y "x" una cantidad variable que toma sucesivamente todos los valores comprendidos entre "a" y "b" . Corresponde entonces a cada valor "x" una cantidad única, "y", finita; mientras "x" recorre de modo continuo el intervalo de "a" a "b" , y = f (x) varía asimismo, e "y" representa una función para ese intervalo. No es, en absoluto, necesario que "y" dependa de "x" en todo ese intervalo de acuerdo con la misma regla, y no hay que pensar en una dependencia expresable en términos de fórmulas matemáticas. Representando de un modo gráfico, es decir, tomando a "x" como abscisa y a "y" como ordenada una función aparece como una curva a la que cada abscisa comprendida entre "a" y "b" le corresponde un solo punto. Esta definición no fija a las distintas partes de la curva ninguna regla común: se la puede uno imaginar compuesta de distintas partes o trazada de modo totalmente anárquico. De esto se desprende que una función sólo se puede contemplar como completamente precisada para un cierto intervalo ya si está dada gráficamente o si en las distintas partes del intervalo se dan de modo matemático las reglas vigentes. Mientras en una función sólo se tenga certeza de una parte del intervalo queda completamente en manos de la arbitrariedad el modo en que continuará el resto del intervalo. (Citado en Arenzana 1997, p. 72).

- Con la posterior aplicación de la teoría de conjuntos a las funciones, este objeto se extendió a conjuntos cualesquiera y la gráfica de la función se consideró como el conjunto de puntos de coordenadas $(x, f(x))$.

Godino (2006), basándose en el análisis epistemológico y didáctico realizado en Ruiz (1998) para determinar las concepciones de los alumnos de secundaria sobre la noción de función, considera que la evolución anterior se puede organizar en cinco configuraciones epistémicas que en la figura 1 están dispuestas en círculos concéntricos. Esta disposición expresa la progresiva ampliación de los sistemas de prácticas asociados a la noción de función, desde planteamientos implícitos/intuitivos (protomatemáticos), hasta la formalización más general mediante la teoría de conjuntos. El objetivo de establecer esta secuencia de configuraciones es explicitar las configuraciones asociadas a las prácticas que forman el significado de referencia del objeto función.

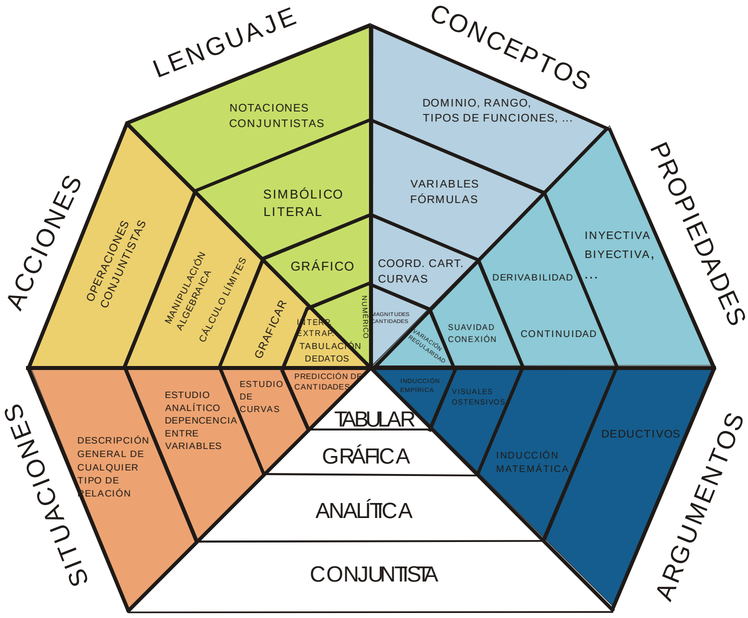


Figura 1. Configuraciones epistémicas de la noción de función

3.2 METÁFORAS ESTÁTICAS Y DINÁMICAS

Según Font (2000), los trabajos de Descartes son muy interesantes porque parten de las dos metáforas clásicas sobre las curva: (1) Las curvas son secciones, (2) Las curvas son la traza que deja un punto que se mueve sujeto a determinadas condiciones, para añadirles una tercera metáfora: (3) Las curvas son la traza que deja un punto que se mueve sujeto a determinadas condiciones. El análisis de estas condiciones permite hallar una ecuación que cumplen los puntos de la curva. Font (2000) también considera que posteriormente aparece la metáfora conjuntista.

Estando de acuerdo con la afirmación de Font de que estas cuatro metáforas son las que básicamente han estructurado históricamente el conocimiento sobre las gráficas funcionales, nos proponemos aquí matizar y ampliar dicha afirmación centrándonos, sobre todo, en las metáforas dinámicas (2 y 3) y en la metáfora estática conjuntista (4).

3.2.1 Metáforas y mezclas conceptuales estáticas

Vamos a comenzar en el orden inverso al desarrollo histórico, por lo que analizaremos primero la metáfora conjuntista[2]. Para ello, es necesario considerar primero un sistema de coordenadas en el plano.

---

[2] En Sastre, P., Boubée, C., Rey, G., Maldonado, S. y Villacampa, Y. (2006) se hace un estudio sobre las metáforas que históricamente han estructurado el concepto de función. Con relación a las metáforas que han estructurado la gráfica de las funciones, se amplia

En el objeto matemático “plano con sistema de ejes coordenados” tanto las metáforas orientacionales como las ontológicas se hallan fosilizadas, es decir han dejado de considerarse como tales. La fusión de ambos tipos de metáforas, en nuestra opinión, hace que el objeto matemático “plano con sistema de ejes coordenados” se puede considerar una fusión conceptual (Fauconnier y Turner, 1996).

Cada uno de los ejes, a su vez, ya es el resultado de una fusión conceptual (figura 2). Las metáforas ontológicas permiten entender como conjuntos tanto a la recta como a los números - La aplicación de estas metáforas ontológicas a los ejes tiene sus ventajas e inconvenientes. Por ejemplo, por una parte permite considerar (singularizar) un punto en una recta, pero por la otra también puede facilitar que el alumno considere que cada punto tiene grosor o que la recta está formada por una serie de puntos seguidos en la que cada uno tiene un anterior y un posterior, etc.-. Por otra parte, las metáforas orientacionales están en la base de la metáfora conceptual que permite entender los puntos de la recta como números (y viceversa) – la mezcla conceptual que resulta es la que permite considerar que a los números positivos les corresponden puntos que se hallan a la derecha del origen y que a los negativos puntos a la izquierda; y que si un número es mayor que otro, el punto que corresponde al primero se halla a la derecha del que corresponde al segundo-.

---

la lista de metáforas propuesta en Font (2000a) con la siguiente: una curva es un número infinito de tramos rectos infinitamente pequeños, la cual se puede hallar en los trabajos de Leibniz. Esta metáfora se puede considerar una metáfora estática precursora de la metáfora conjuntista.

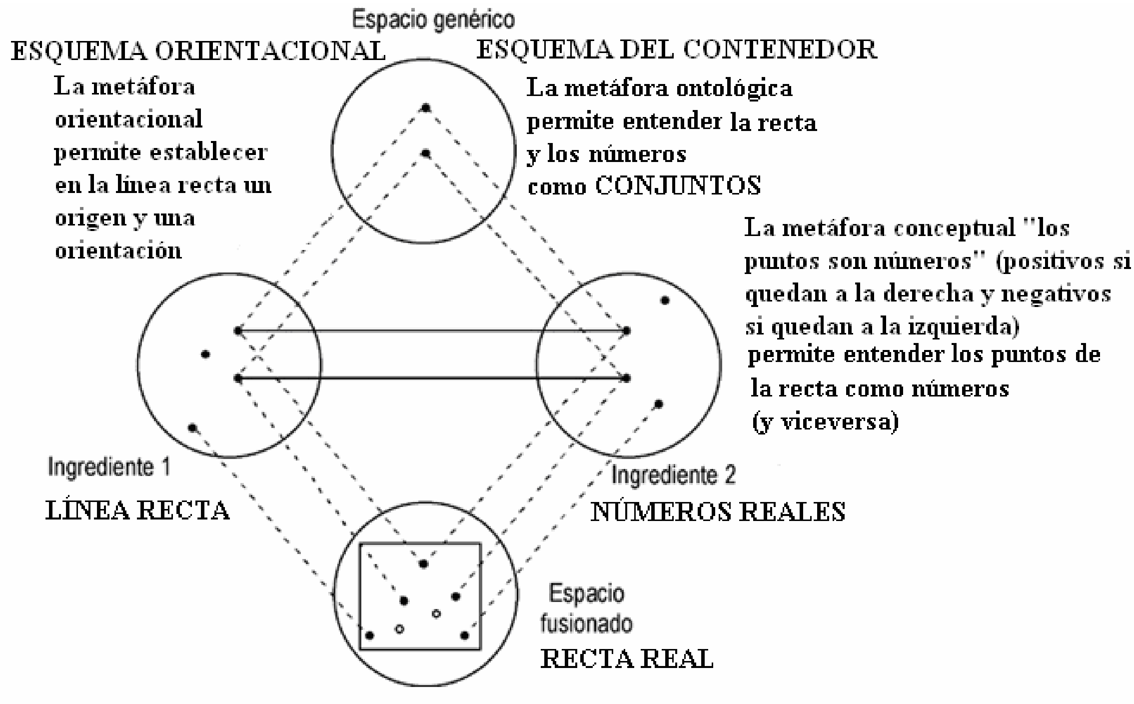


Figura 2. Fusión conceptual “Recta real”

En el caso del plano (figura 3), las metáforas ontológicas permiten entender como conjuntos tanto al plano como a los pares de números ordenados. Por otra parte, las metáforas orientacionales están en la base de la metáfora conceptual que permite entender los puntos del plano como pares de números ordenados (y viceversa). La combinación de estas metáforas, junto a otros factores, posibilita la emergencia, como espacio fusionado, del objeto “plano con un sistema de ejes coordenados fijado a priori” – la mezcla conceptual que resulta es la que permite considerar que a los puntos del primer cuadrante le corresponde pares de números positivos, etc. -.

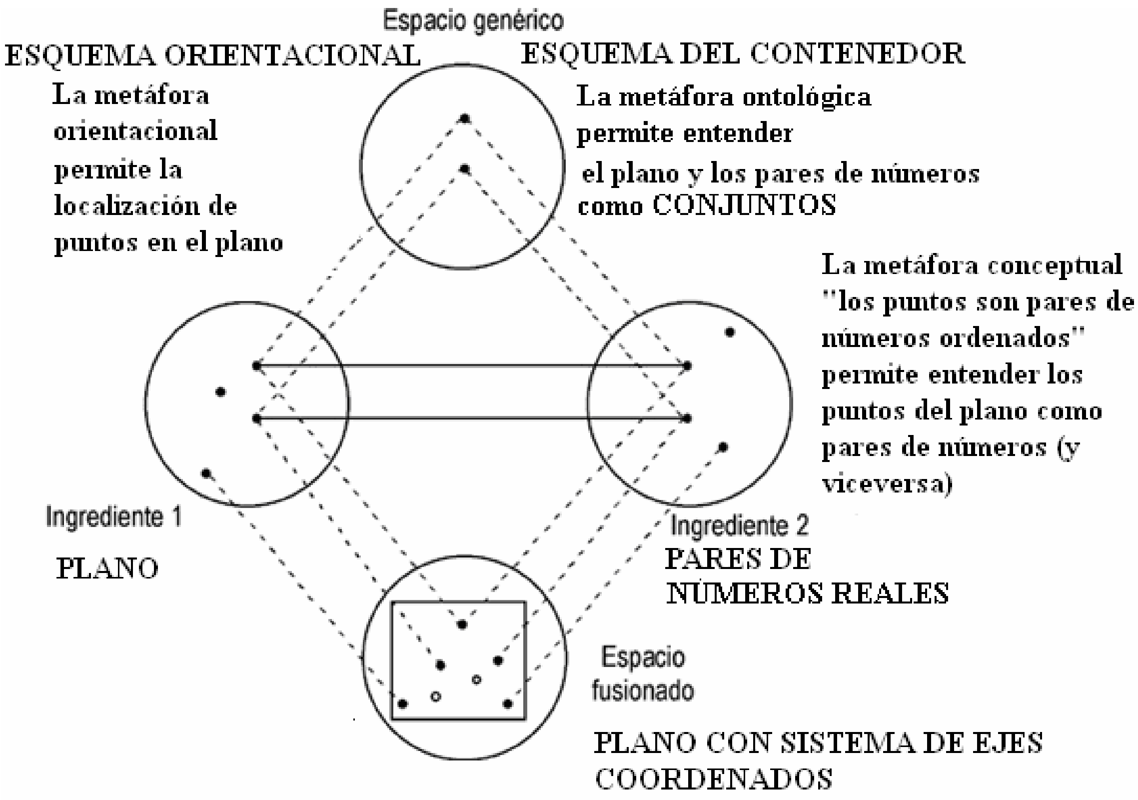


Figura 3. Fusión conceptual “Plano con sistema de ejes coordenados”

En Font (2000 y 2001d) se considera que la última de las diferentes metáforas que han estructurado históricamente las gráficas funcionales es la que él denomina “metáfora conjuntista”. Se trata de una metáfora estática que permite entender la gráfica de una función $f(x)$ como el conjunto de puntos cuyas coordenadas son $(x, f(x))$. Ahora estamos en condiciones de explicar, a partir de las funciones semióticas y de las fusiones conceptuales comentadas anteriormente, el tipo de comprensión que permite esta metáfora.

Una función semiótica asocia a una expresión un contenido (línea superior) con la particularidad de que a su vez la expresión esta formada por un contenido junto con las unidades expresivas que lo transmiten (línea inferior). Es decir, el par expresión/contenido (línea inferior) se convierte en expresión de un contenido ulterior (línea superior).

<table>
<tr><td colspan="2">Expresión</td><td>Contenido</td></tr>
<tr><td>Expresión</td><td>Contenido</td><td></td></tr>
</table>

Tabla 1. Expresión y contenido de una función semiótica

Para que un sujeto hipotético pueda interpretar la figura de la izquierda como la gráfica de una función $f(x)$ formada por los puntos de coordenadas $(x, f(x))$ es necesario que dicho sujeto establezca la trama de funciones semióticas de la derecha**.** LA FS1 es una función semiótica que le permite interpretar la figura como una gráfica funcional y la FS2 le permite interpretar la línea curva como el conjunto de puntos de coordenadas $(x, f(x))$.

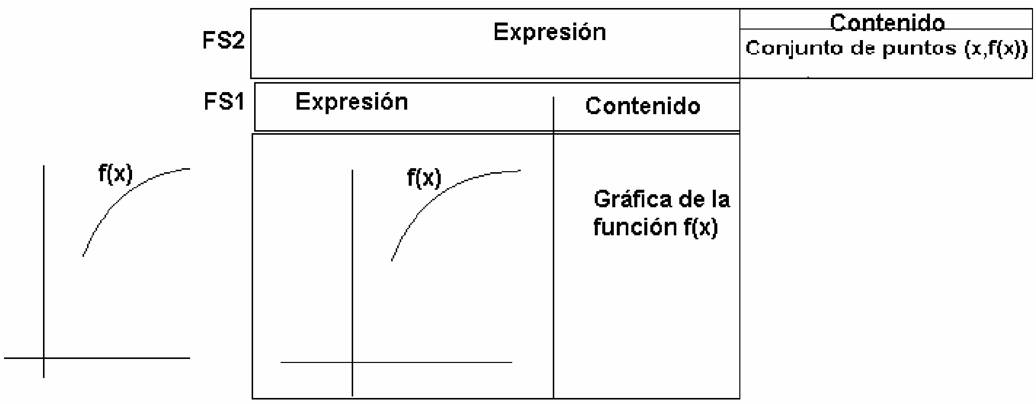


Tabla 2. Trama de funciones semióticas asociada a la gráfica de una función

Esta trama de funciones semióticas es una herramienta de tipo descriptivo que no entra a explicar "el porqué" el sujeto relaciona cada expresión con su contenido. Ahora bien, para que dicha trama se pongo en funcionamiento, una condición necesaria es que previamente el sujeto haya realizado la fusión conceptual que permita entender el plano como un conjunto de puntos de coordenadas (x, y) y también ha de poner en funcionamiento la siguiente metáfora conceptual: la gráfica de una función es el conjunto de pares $(a, f(a))$.

Domino de partida Conjuntos	Dominio de llegada Gráficas de funciones
Conjunto de pares $(a, f(a))$	Gráfica de la función
Miembros del conjunto	Puntos de la gráfica
La relación de pertenencia	Ser un punto de la gráfica
Un subconjunto de un conjunto más grande	Dominio, rango, puntos de corte, máximos mínimos, puntos de inflexión, intervalos de crecimiento o decrecimiento, etc.

Tabla 3. "La gráfica de una función es el conjunto de pares $(a, f(a))$"

La mayor parte de la información que se obtiene a partir de $f(x)$ (por ejemplo, dominio, puntos de corte con los ejes, asíntotas verticales o signo), de $f'(x)$ (intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos) y de $f''(x)$ (intervalos de concavidad y convexidad y puntos de inflexión) se obtiene como puntos que cumplen ciertas propiedades, es decir como subconjuntos de uno más grande.

Esta metáfora conceptual de tipo linking que sirve para conectar la teoría de conjuntos con las gráficas de funciones se superpone sobre una metáfora de tipo grounding que tiene como dominio de salida los esquemas de imágenes "parte-todo" y "contendor" y como dominio de llegada las curvas. Dicha metáfora se puede observar en los trabajos de Leibniz y es claramente rechazada por Newton cuando considera que las líneas no son descritas y engendradas por la yuxtaposición de sus partes, sino por el movimiento continuo de puntos.

Actualmente hay programas informáticos, fácilmente utilizables en el aula, que facilitan, aunque sea de manera inconsciente, este tipo de proyecciones metafóricas estáticas. La metáfora que considera que las gráficas de las funciones son un contenedor de puntos o que es un todo formado por partes se presenta implícitamente en los programas informáticos que visualizan la gráfica "toda de golpe", como por ejemplo la hoja de cálculo Excel. A continuación sigue el informe[3] elaborado por un alumno de primero de universidad que participaba en un taller de modelización en el que se utilizaba la hoja de cálculo Excel

---

TALLER DE MODELIZACIÓN: SEGUNDO TRIMESTRE MATEMATICAS

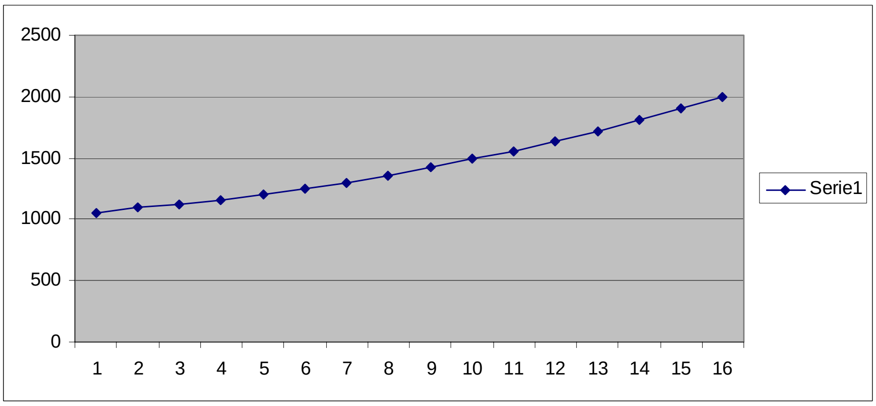
INFORME:

Al empezar la clase se nos proporcionó el nuevo caso destinado al segundo trimestre. Un caso basado en la previsión de ventas de varios productos. En primer lugar a cada subgrupo se le asignó dos[4] productos de los cuales habría que hacer su seguimiento posteriormente. Tras saber lo que nos pedían llegamos a la conclusión de debíamos representar los valores de

[3] Informe de un alumno que participó en la investigación descrita en Serrano, Bosch y Gascón (en prensa).

[4] Aunque teníamos dos productos nos limitamos a uno por la complejidad de la actividad.

cada producto en un gráfico y determinar de qué tipo era esta. Mediante Excel elaboramos dicho gráfico y encontramos que el trazado representado no era suficientemente claro como para decretar el tipo de función que era.



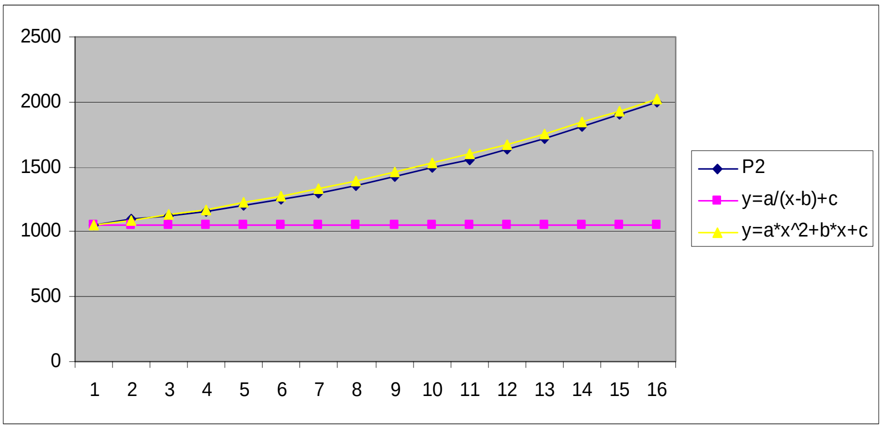
Como vemos la grafica delimita unos puntos que forman parte de una función más grande así que es imposible saber a simple vista el comportamiento de la grafica a grandes proporciones. Abarcábamos las siguientes posibilidades: hiperbólica, exponencial, parábola y cúbica. Posteriormente plasmamos las formulas de estas ecuaciones en una tabla de Excel y en celdas separadas dimos valores a: a, b y c.

Adjuntamos tabla a continuación:

	periodo	P2	y=a/(x-b)+c	y=a*2^x+b	y=a*x^2+b*x+c	y=a(x-b)^3+c
mar-03	0	1050				
jun-03	1	1100				
sep-03	2	1120				
dic-03	3	1160				
mar-04	4	1200				
jun-04	5	1250				
sep-04	6	1300				
dic-04	7	1360				
mar-05	8	1420				
jun-05	9	1490				
sep-05	10	1550				
dic-05	11	1640				
mar-06	12	1720				
jun-06	13	1810				
sep-06	14	1900				
dic-06	15	2000				

A partir de aquí empezamos a sustituir valores en las funciones y variando los de a, b y c con el fin de que los valores resultados se aproximaran lo máximo posible a los del producto. Además configurando Excel logramos representar los dos trazados en el gráfico y así podíamos observar la progresión del grafico nuevo al origen. El objetivo de este método era encontrar que tipo de función se aproximaba más a los valores dados para descubrir de qué tipo era la propia función.

Una vez sabido esto empezamos a probar números y hallamos algo muy parecido a la gráfica inicial del producto dos.

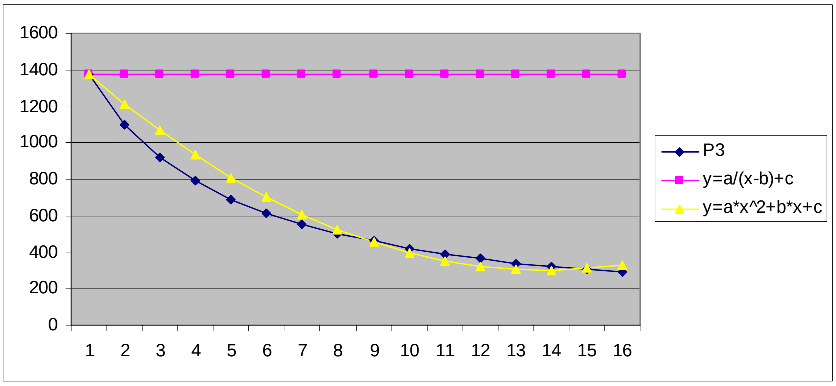


Como vemos en la leyenda e trazado que más se aproxima es una parábola. Observamos que los dos trazados azul y amarillo están casi superpuestos uno del otro. Por otro lado la tabla de resultados nos concluyo de la siguiente manera:

	periodo	P2	y=a/(x-b)+c	y=a*2^x+b	y=a*x^2+b*x+c
mar-03	0	1050	1049,9431	36,99	1050
jun-03	1	1100	1049,9415	38,98	1086,99
sep-03	2	1120	1049,9397	42,96	1127,96
dic-03	3	1160	1049,9378	50,92	1172,91
mar-04	4	1200	1049,9358	66,84	1221,84
jun-04	5	1250	1049,9337	98,68	1274,75
sep-04	6	1300	1049,9314	162,36	1331,64
dic-04	7	1360	1049,9289	289,72	1392,51
mar-05	8	1420	1049,9263	544,44	1457,36
jun-05	9	1490	1049,9235	1053,88	1526,19
sep-05	10	1550	1049,9204	2072,76	1599
dic-05	11	1640	1049,9171	4110,52	1675,79
mar-06	12	1720	1049,9135	8186,04	1756,56
jun-06	13	1810	1049,9095	16337,08	1841,31
sep-06	14	1900	1049,9052	32639,16	1930,04
dic-06	15	2000	1049,9005	65243,32	2022,75

Aunque ha sido un cálculo bastante aproximado no es exacto y por eso hemos de ajustar un poco más los parámetros de a, b y c.

Una vez logrado el objetivo del primer producto pasamos a hacer lo mismo con el segundo.



RESULTADOS:

	periodo	P3	y=a/(x-b)+c	y=a*2^x+b	y=a*x^2+b*x+c
mar-03	0	1375	1375,0389	-160,5	1375
jun-03	1	1100	1375,0387	-154	1214,5
sep-03	2	920	1375,0385	-141	1067
dic-03	3	790	1375,0382	-115	932,5
mar-04	4	690	1375,038	-63	811
jun-04	5	610	1375,0378	41	702,5
sep-04	6	550	1375,0376	249	607
dic-04	7	500	1375,0374	665	524,5
mar-05	8	460	1375,0371	1497	455
jun-05	9	420	1375,0369	3161	398,5
sep-05	10	390	1375,0367	6489	355
dic-05	11	370	1375,0365	13145	324,5
mar-06	12	340	1375,0363	26457	307
jun-06	13	325	1375,0361	53081	302,5
sep-06	14	310	1375,0359	106329	311
dic-06	15	290	1375,0357	212825	332,5

Como vemos el tipo de grafico del segundo producto parece ser una parábola aunque no he podido ajustarla tan puntillosamente.

Por lo tanto y a modo de conclusión podemos afirmar que las dos funciones son de tipo parabólico.

Tabla 4. Informe alumno

Resumiendo, podemos considerar la visión estática de las gráficas como la mezcla conceptual de la figura siguiente. Los esquemas de las imágenes "parte-todo" y "contendor" sirven para estructurar la teoría de conjuntos y las curvas. Mientras que la metáfora conjuntista sirve para considerar las curvas como gráficas de funciones formadas por los puntos de coordenadas (a, $f(a)$).

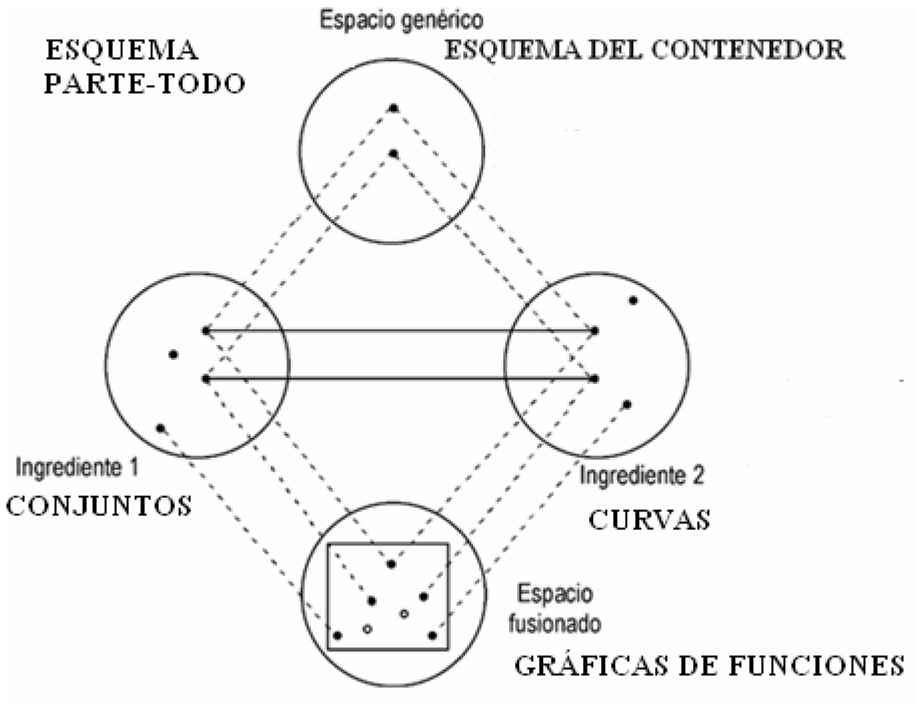


Figura 4. Fusión conceptual estática "Gráfica de funciones"

3.2.2 Metáforas dinámicas

Traza de puntos

Otra manera de estructurar la gráfica de una función, diferente a la metáfora conjuntista, consiste en considerarla como "la traza que deja un punto que se mueve sujeto a determinadas condiciones", o bien "como la traza que deja un punto que se mueve sobre la gráfica (entendida como un camino)". *Las metáforas dinámicas básicamente son metáforas orientacionales que surgen del hecho de que nuestro cuerpo determina un sistema de referencia egocéntrico que se mueve.* Por otra parte, este tipo de metáforas se pueden rastrear en la historia de las matemáticas (Font, 2000 y 2001d).

Si bien las curvas son presentes en toda la historia de las matemáticas, uno de los momentos en que se plantea claramente el paso de la gráfica de la curva a su expresión simbólica es en el momento del nacimiento de la geometría analítica. En el primer apartado del segundo libro de "La Géométrie", Descartes se pregunta cuáles son las líneas curvas que se pueden admitir en geometría y se pregunta por qué los antiguos no distinguieron diversos grados entre las líneas más complejas y por qué llamaron mecánicas a algunas de ellas. En este primer apartado también divide las curvas en mecánicas y geométricas. Para Descartes, una curva es geométrica si la podemos imaginar descrita por un movimiento continuo o bien por varios movimientos sucesivos de manera que los últimos vengan determinados por los anteriores, mientras que las curvas mecánicas son las que resultan de dos movimientos independientes que no guardan entre sí una relación que pueda ser medida.

Para clarificar lo que entiende por curva geométrica, Descartes construye un instrumento que le permite dibujar una serie de curvas más complejas que las cónicas, y que, según él, tienen el mismo derecho a la existencia y a ser estudiadas como las secciones cónicas. La curva geométrica es para Descartes la traza que produce un punto que se mueve por un instrumento articulado compuesto por diversas reglas, de manera que el movimiento efectuado sobre una regla se transmite por diferentes reglas del instrumento y hace que el punto se mueva trazando una determinada curva. Esta manera de entender la curva -y la introducción implícita del sistema de coordenadas- hace que Descartes pueda encontrar la expresión algebraica de la curva; también le lleva a definir claramente las curvas -llamadas por él geométricas- como el objeto de lo que después se va a llamar Geometría Analítica, al igual que la teoría de las ecuaciones como la técnica que se ha de utilizar para estudiarlas.

Según Font (2000) los trabajos de Descartes son muy interesantes porque parten de las dos metáforas clásicas sobre las curvas:

1) Las curvas son secciones

2) Las curvas son la traza que deja un punto que se mueve sujeto a determinadas condiciones

para añadir una tercera:

3) Las curvas son la traza que deja un punto que se mueve sujeto a determinadas condiciones. El análisis de estas condiciones permite encontrar una ecuación que cumplen los puntos de la curva

Hasta principios del siglo XIX, cuando Cauchy empieza la reorganización del análisis infinitesimal, esta última metáfora es la que se puede encontrar en los libros de análisis infinitesimal. Es decir, hasta la aritmetización del análisis, las gráficas de funciones eran consideradas como la trayectoria descrita por un punto en movimiento, la cual se podía expresar por una fórmula.

Esta manera de entender las gráficas de funciones queda muy clara en la obra de Newton dónde podemos encontrar constantes referencias a un punto que se mueve sobre una parábola, una hipérbola, etc. En el siguiente párrafo, extraído de Lacasta y Pascual (1998, pp. 28-29), donde Newton explica su método de fluxiones se observa claramente como éste se manifiesta explícitamente a favor de las metáforas dinámicas y en contra de la metáfora conjuntista:

> No considero las magnitudes matemáticas como formadas por partes, por pequeñas que éstas sean, sino como descritas por un movimiento continuo. Las líneas no son descritas y engendradas por la yuxtaposición de sus partes, sino por el movimiento continuo de puntos; las superficies por el movimiento de las líneas; los sólidos por el movimiento de las superficies; los ángulos por la rotación de los lados; los tiempos por un flujo continuo. Considerando, pues, que las magnitudes que crecen en tiempos iguales son mayores o menores según que lo hagan con mayor o menor velocidad, busqué un método para determinar las magnitudes partiendo de las velocidades de los movimientos o aumentos que las engendran. Llamando fluxiones a las magnitudes engendradas, di, hacia los años 1665-1666, con el método de fluxiones, del que haré uso en la cuadratura de curvas (extraído de Lacasta y Pascual, 1998, pp. 28-29),

En este párrado, Newton se posiciona a favor de las metáforas dinámicas y en contra de las estáticas (formadas por partes). Hay que tener en cuenta que Leibnitz, a diferencia de Newton, considera la gráfica de una función como un agregado de segmentos infinitesimales más que como la trayectoria de un punto que se mueve. Para Newton, las gráficas de funciones eran consideradas no como un agregado estático de infinitesimales, sino como la trayectoria descrita por un punto en movimiento, la cual se puede expresar mediante una fórmula (generalmente en forma implícita). Esta manera de entender las gráficas de funciones es muy evidente en la obra de Newton, en la cual podemos hallar constantes referencias a un punto que es mueve sobre una parábola, una hipérbola, etc. Además de considerar que la grafica se puede interpretar como la traza que deja un punto que se mueve sobre la gráfica, considera que el punto que genera la gráfica viene determinado por dos segmentos (abscisa y ordenada), cada un de los cuales es generado por un punto que se mueve en función del tiempo.

Por otra parte, actualmente hay programas informáticos, fácilmente utilizables en el aula, que facilitan, aunque sea de manera inconsciente, este tipo de metáforas dinámicas. La metáfora que considera que las gráficas de las funciones son la traza de un punto que se mueve sujeto a determinadas condiciones puede ser recuperada para la enseñanza gracias a micromundos como el *Cabri-géomètre*. Una variación de esta metáfora: la gráfica de una función es la traza de un punto que se mueve siguiendo la gráfica (entendida como camino), se puede trabajar con programas que permiten representar funciones con parámetros y con las calculadoras gráficas.

Pero no sólo los programas informáticos facilitan estructurar las gráficas como trazas de puntos, la misma manera de hablar, el discurso que se realiza sobre las gráficas, puede llevar a entender las gráficas de funciones de esta manera. En muchos casos, el discurso del profesor puede inducir al alumno a entender el punto de una gráfica como un punto determinado sobre un camino que se recorre o una línea por la cual se transita. Palabras como “antes de ”, “después de ” pueden producir este efecto en el alumno ya que producen la sensación de “movimiento ficticio” al sugerir: una organización espacial en la que se tiene un origen (“de”), un camino (“pasa por”, “aquí”, “a lo largo”), y un fin (“a”, “hasta”) y además se contempla algo que se mueve (punto, objeto, etc.) y que se puede localizar en un momento dado.

En la investigación explicada en Font (2000) se describe una situación de enseñanza-aprendizaje en la que alumnos de Bachillerato utilizan las siguientes construcciones, realizadas con el programa Cabri, con el objetivo de ayudarles a entender que la recta tangente es la recta a la cual se aproximan las rectas secantes:

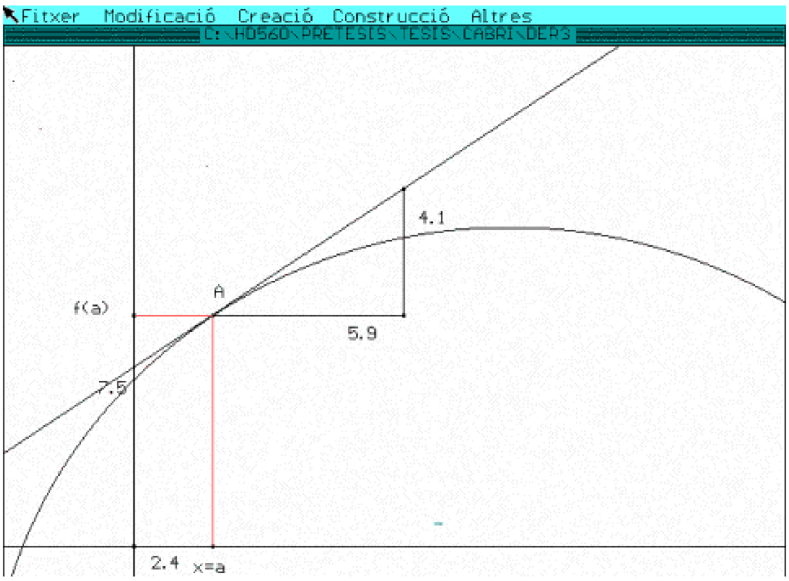


Figura 5. Recta tangente

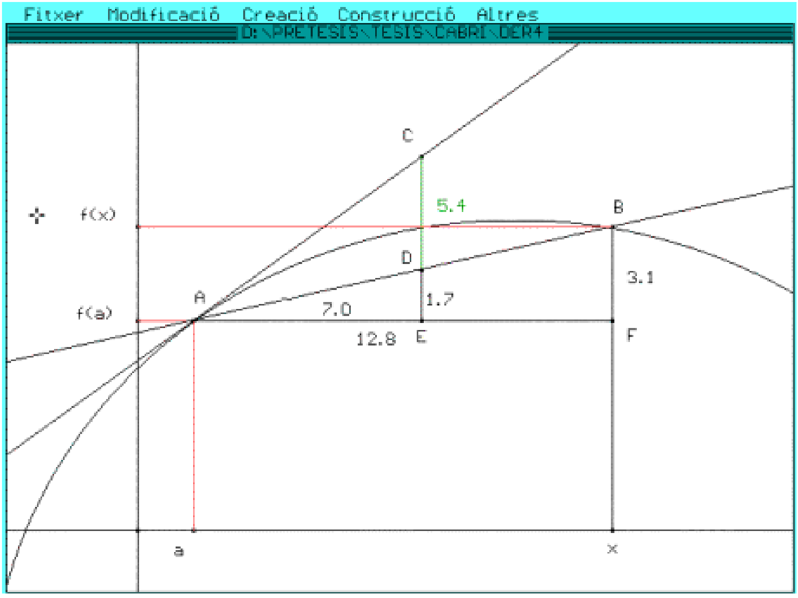


Figura 6. Aproximación de las secantes a la tangente

En este contexto, (Font, 2000, pág. 122) se observó que el hecho de que el profesor utilizara de manera inconsciente un discurso dinámico producía la siguiente dificultad en los alumnos:

> (...) observamos que había alumnos que, cuando movían el punto *A*, pensaban que el nuevo punto continuaba siendo el punto *A* y que la nueva recta tangente era la misma que antes pero con diferente inclinación. De hecho, es como si estructurasen la situación en términos de una persona que se mueve (punto *A*) con un saco en la espalda (recta tangente) por una carretera que primero sube y después baja (gráfica) y considerasen que la persona y el saco siempre son los mismos a pesar de estar en diferentes lugares y tener diferente inclinación.".

Este fenómeno también está documentado en otras investigaciones, por ejemplo en Bolite Frant et altres (2004a y 2004b).

Movimiento ficticio

Talmy (1999 y 2000) propone en su teoría sobre la lexicalización del movimiento que nuestro lenguaje y nuestra estructura conceptual hace uso de una clase de aplicaciones figuradas de los verbos del movimiento para describir una escena intrínsecamente estática en términos de una estructura dinámica, lo cual permite un inherente sesgo hacia el dinamismo. En la expresión del tal movimiento ficticio se distinguen tres componentes *Moción, trayectoria y modo.*

- *La moción* implica el desplazamiento de la figura sobre un fondo.
- *La trayectoria* indica el recorrido de dicho desplazamiento, es decir, si se hace hacia arriba, hacia abajo, hacia adentro, hacia afuera, en relación con un punto de referencia.
- *El modo* hace referencia a las circunstancias del desplazamiento, que se haga en vehiculo, a caballo, a pie, que se haga a través de agua, tierra, aire, que se haga rápido o lento, etc.

Los verbos del movimiento son utilizados sistemáticamente para describir escenas inmóviles, escenas que no tienen ocurrencias físicas de desplazamiento, este hecho es motivado por nuestra habilidad cognoscitiva de simular mentalmente el movimiento a lo largo de una trayectoria y por un cierto impulso natural de hablar de la localización de los objetos y de donde vamos en el mundo y también por la necesidad natural de moverse en el mundo, no simplemente para la conveniencia o el placer, si no y sobre todo para la supervivencia. El no poder moverse puede ser potencialmente peligroso, además nuestra capacidad de simular el movimiento es simplemente una reflexión de la necesidad de estar en el movimiento y de percibir el movimiento. Esto refleja simplemente la primacía del movimiento dentro de la experiencia humana y la encarnación de esa experiencia en nuestra estructura mental y el pensamiento lingüístico.

Para Talmy (1999, p. 268-269) la relación de este sesgo dinámico del movimiento ficticio con las metáforas conceptuales de Lakoff y Johnson (1991) es evidente.

> Metaphor theory, in particular as expounded by Lakoff and Johnson (1980), accords readily with general fictivity. The source domain and the target domain of a metaphor supply the two discrepant representations. The representation of an entity within the target domain is understood as factive and more veridical. The representation from the source domain that is mapped onto the entity in the target domain, on the other hand, is understood as fictive and less veridical.
>
> For example, linguistic expressions often involve space as a source domain mapped onto time as a target domain. This can be seen in sentences like *The ordeal still lies ahead of us*, and *Christmas is coming*. Here, the static spatial relation of "frontality" is mapped onto the temporal relation of "subsequence," while the dynamic spatial relation of "approach" is mapped onto temporal "succession." In terms of general fictivity, factive temporality is expressed literally in terms of fictive spatiality here.

Como no es nuestro objetivo hacer un estudio más detallado de las implicaciones y relevancia del movimiento ficticio, creemos que con lo anterior es suficientemente claro y preciso para ilustrar la idea del sesgo dinámico de nuestro sistema cognitivo y por ende de nuestro lenguaje.

La aportación de Font (2000) la consideramos interesante porque permite concretar el "movimiento ficticio" en dos metáforas diferentes conceptuales: "las gráficas de las funciones son la traza de un punto que se mueve sujeto a determinadas condiciones" y "la gráfica de una función es la traza de un punto que se mueve siguiendo la gráfica (entendida como camino)".

La visión dinámica de las gráficas

La visión dinámica de las gráficas, en nuestra opinión, se sustenta fundamentalmente en la proyección metafórica del esquema del camino. Por tanto, consideramos que la visión dinámica de las gráficas de funciones (curvas) es una proyección metafórica de tipo grounding que tiene como dominio de salida el esquema de imagen del "camino" y como dominio de llegada las curvas.

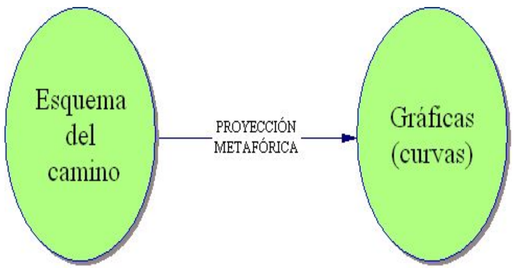


Figura 7. Proyección metafórica del esquema "camino" en las curvas

La metáfora conceptual sería la siguiente: "La gráfica de una función se puede considerar como la traza que deja un punto que se mueve sobre un camino (la gráfica)":

Domino de partida Camino	Dominio de llegada Curvas (Gráficas de funciones)
Una localización en el camino	Punto de la curva (gráfica)
Estar sobre el camino	La relación de pertenencia –ser un punto de la curva (gráfica).
Origen del camino	Origen de la curva (gráfica), por ejemplo, menos infinito.
Final del camino	Final de la curva (gráfica), por ejemplo más infinito.

Estar fuera del camino	Puntos que no pertenecen a la curva (gráfica).

Tabla 5: “La gráfica es la traza que deja un punto que se mueve sobre un camino”

Desde la perspectiva dinámica los objetos matemáticos “recta real” y “plano con sistema de ejes coordenados”, de entrada, también son considerados como una fusión conceptual en los mismos términos que los considerados en la conjuntista, no obstante al introducir el componente dinámico (movimiento ficticio) tanto los ejes como el plano se convierten en “sitios” que se pueden “transitar”, es decir los ejes se convierten en caminos y el plano es una posibilidad infinita de posibles caminos.

3.2.3 Implicaciones comunes de las metáforas estáticas y dinámicas

El análisis histórico permite concluir que, más que coexistencia o una fusión de metáforas estáticas y dinámicas, lo que se observa es que hay períodos en los que una domina a la otra, siendo la metáfora conjuntista la que domina actualmente. En los objetos matemáticos institucionales actuales la metáfora conjuntista es la dominante, incluso se puede decir que casi no hay cabida para las dinámicas. Desde una perspectiva histórica, más que una combinación de metáforas que da lugar a una fusión conceptual, nos parece más preciso hablar de la desaparición de una a manos de la otra. Ahora bien, aunque las metáforas dinámicas y las estáticas son claramente diferentes tienen ciertas implicaciones comunes. Son diferentes porque en la conjuntista (estática) funciona, sobre todo, una proyección metafórica en la que el dominio fuente es el esquema *todo-parte* (en el sentido de que un punto es una parte de la gráfica) mientras que en la dinámica funciona la de “estar sobre” (en el sentido de que el punto está sobre la gráfica en su movimiento ficticio). Ahora bien, a pesar de las diferencias, por ejemplo, ambas permiten distinguir entre gráfica y punto. Este hecho hace que un profesor experto las pueda manejar de manera coherente, siempre que supedite las dinámicas a las estáticas. Por ejemplo, en el caso del dominio de una función que sea un intervalo cerrado, si suponemos que el extremo del intervalo se mueve hasta llegar al otro extremo se obtiene un conjunto que es el dominio de la función.

3.2.4 Conclusión final sobre la comprensión de la gráfica de una función

Nuestra conclusión es que la comprensión de las gráficas de funciones es el resultado de la fusión de la visión dinámica y de la estática. El esquema de imagen “camino” sirve para estructurar las curvas de manera dinámica, mientras que la mezcla conjuntista explicada anteriormente en la figura 4 sirve para considerar las curvas como gráficas de funciones formadas por los puntos de coordenadas (*a*, *f*(*a*)).

El esquema siguiente muestra los diferentes componentes de la “comprensión” de las gráficas. La mezcla conceptual “plano con sistema de ejes coordenados” subyace tanto a la versión conjuntista estática como a la dinámica, y la fusión de estas dos, es lo que consideramos que produce la comprensión de las gráficas.

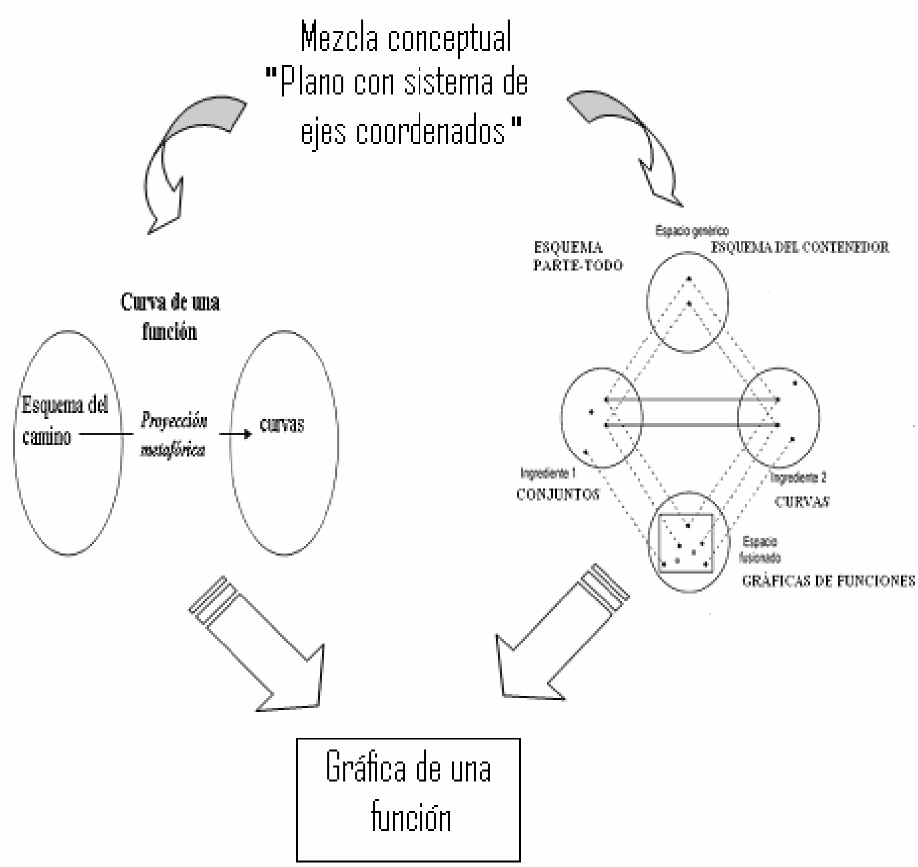


Figura 8. Visión integral de la gráfica de una función