DEPARTAMENT DE DIDÀCTICA DE LES CIÈNCIES
EXPERIMENTALS I DE LA MATEMÀTICA

PROGRAMA DE DIDÀCTICA DE LES CIÈNCIES EXPERIMENTALS
I DE LA MATEMÀTICA

BIENNI 2000-2002

FENÓMENOS RELACIONADOS CON EL USO DE METÁFORAS EN EL DISCURSO DEL PROFESOR. EL CASO DE LAS GRÁFICAS DE FUNCIONES

Tesi doctoral per optar al títol de Doctor de la Universitat de Barcelona

Presentada per

JORGE IVAN ACEVEDO NANCLARES

Dirigida per

Dr. VICENÇ FONT MOLL

i

Dra. JANETE BOLITE FRANT

UNIVERSITAT DE BARCELONA

BARCELONA, 2007

CAPÍTULO 4

ANÁLISIS DE LOS DATOS

RESPUESTAS A LAS PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN 2-5

Resumen

A partir del análisis de los datos responderemos a las preguntas de investigación 2- 5. Para ello, utilizaremos fragmentos de las entrevistas y de las clases impartidas por los profesores que han participado en la investigación, producciones de alumnos y fragmentos de las entrevistas a algunos de sus alumnos.

Con relación a la segunda pregunta de investigación: ¿Qué tipo de metáforas utiliza el profesor al explicar la representación gráfica de funciones en el bachillerato? la respuesta es que los profesores utilizan, entre otras, metáforas fosilizadas, orientacionales, ontológicas, dinámicas y fusiones conceptuales.

En el segundo apartado, se responde a la tercera pregunta de investigación ¿Es consciente el profesor del uso que ha hecho de las metáforas en su discurso y hasta qué punto las tiene controladas? Para ello, se analizan (1) las grabaciones realizadas a los profesores mientras explicaban la representación gráfica de funciones y (2) las transcripciones de las entrevistas semiestructuradas que se les realizó posteriormente.

En el tercer apartado, se responde a la cuarta pregunta de investigación ¿Qué efecto producen en la comprensión del alumno las metáforas utilizadas por el profesor en su discurso? Para ello, primero se estudia, mediante las respuestas a un cuestionario específicamente diseñado para el caso, los efectos que produce el discurso metafórico de un determinado profesor en la comprensión de sus alumnos. El siguiente paso es investigar qué pasa cuando las producciones escritas estudiadas son las habituales de clase (como por ejemplo los exámenes). A continuación, se estudia el grupo de alumnos que no manifiestan metáforas en sus respuestas escritas, los cuales son entrevistados para estudiar si el uso de metáforas se manifiesta en su discurso oral.

En el cuarto apartado, se responde a la quinta pregunta de investigación ¿Qué papel juega la metáfora en la negociación de significados? Para ello se analizan tres episodios en los que la metáfora juega un papel completamente diferente. En los dos primeros episodios se analiza como el uso de metáforas juega un papel fundamental para llegar a una negociación del significado que el profesor considera apropiada para conseguir la comprensión de sus alumnos. En cambio, en el tercer episodio se analiza el papel que juega la metáfora en la negociación de significados entre alumnos.

4.1 RESPUESTA A LA 2ª PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN

¿Qué tipo de metáforas utiliza el profesor al explicar la representación gráfica de funciones en el bachillerato?

Para el análisis de los datos utilizaremos, como hilo conductor, la trascripción del discurso del profesor *A* (anexo 2). Se trata de una clase en la cual impartió la representación gráfica de funciones. Dicho hilo conductor será ampliado, cuando se considere conveniente, con fragmentos de las transcripciones de los otros profesores que han participado en la investigación.

La clase comienza con la resolución de un problema seleccionado del libro de texto (esbozo de la gráfica de las funciones $f(x)=2x^4$, $g(x)=-2x^4$ y $h(x)=-2x^5$) que los alumnos tenían que resolver en casa. A continuación se les propone la tarea de determinar máximos, mínimos y puntos de inflexión de manera visual a partir del esbozo de las tres funciones obtenidas antes. Después se les propone la tarea de determinar la derivada en $x = 0$ para cada una de las tres funciones anteriores.

Luego, en la segunda parte de la clase, el profesor propone la función $f(x)=x^4+6x^3+8x^2-6x-9$ y otras gráficas para calcular el dominio, cortes con los ejes, asíntotas y comportamiento al infinito. De esta manera transcurrió la clase que a continuación analizaremos.

En primera instancia queremos resaltar la importancia que tienen las metáforas fosilizadas en el discurso del profesor, que a pesar de pasar desapercibidas como metáforas, no son menos protagonistas en la formación y estructuración de conceptos matemáticos.

4.1.1 Metáforas fosilizadas

Generalmente no se suele distinguir entre metáforas muertas (fosilizadas o convencionalizadas) y expresiones literales. Sin embargo, teniendo en cuenta los propósitos de nuestra investigación, parece útil investigar cuáles son las expresiones literales que son el resultado de la fosilización de metáforas. Consideramos la creación y fosilización de metáforas como una línea continua en la que en un extremo tenemos la metáfora creativa y en el otro la metáfora fosilizada que, con el tiempo, se considera como una expresión literal.

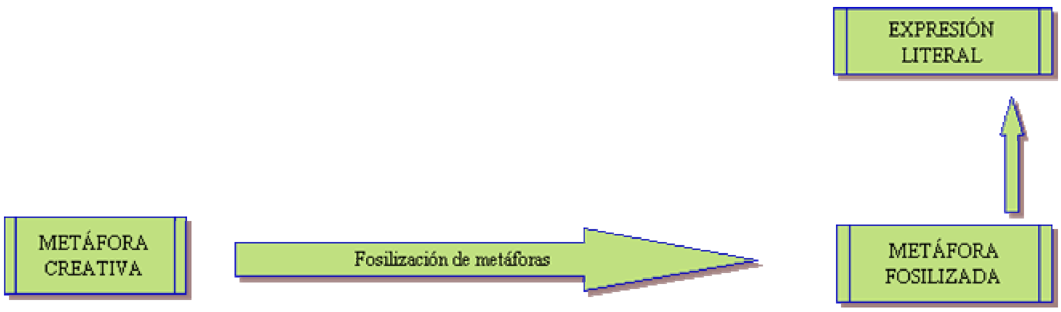


Figura 1. Fosilización de metáforas

Un criterio que nos puede ayudar a distinguir entre las metáforas vivas y las fosilizadas es el nivel de conciencia lingüístico-comunicativa del hablante, es decir la forma en que el hablante percibe las proferencias en cuestión. Si el hablante no reconoce el carácter metafórico de la proferencia, estamos ante una metáfora muerta que el hablante toma como expresión literal. Desde este punto de vista, podemos considerar que las metáforas fosilizadas son aquellas cuya naturaleza metafórica es ajena a la consciencia del hablante. Si se le pide al hablante que contraste su interpretación de sentido con otro (posible), sería incapaz de hacerlo o no seria fácil hacerlo, puesto que, para él, la interpretación está unívocamente determinada. Esto sucede, con mucha frecuencia, en las clases de matemáticas ya que, en muchos casos, el profesor y la institución "matemática" desconocen, o no reconocen, determinadas expresiones como metáforas, debido a que su carácter metafórico procede de una extensión léxica cuyo origen o motivación se ha disuelto con el tiempo.

A continuación veremos algunos ejemplos relevantes de metáforas fosilizadas. La trascripción del profesor *A* (anexo 2) es rica en metáforas fosilizadas. A modo de ejemplo basta ver las que se hallan en la configuración didáctica sobre el recordatorio de la definición de límite

Configuración didáctica: Recordatorio de las definiciones de límite

TRASCRIPCIÓN	PIZARRA	OBSERVACIONES
83. P: Pueden ser diversas formas, en cualquiera de estas formas lo que estamos estudiando es precisamente esto, **límite de *f*(*x*) cuando *x* tiende a más infinito** ¿Cuánto vale el límite… de esta función?	$\lim_{x \to +\infty} f(x)$	Hace gestos con la mano, primero hacia la derecha y después a la izquierda
84. P: Recordad que el cálculo del límite en un punto, ya está hecho, cuando estudiamos el **límite cuando *x* tiende a más infinito y también cuando *x* tiende a menos infinito**. Las dos cosas, y sobre todo nos interesa saber si la función es continua o no, o si es discontinúa, si tiene discontinuidad asintótica.	$\lim_{x \to -\infty} f(x)$	
85. P: Como vosotros ya sabéis, si la función tiene discontinuidad asíntotica, hay una **asíntota vertical. Entonces vemos que el límite cuando *x* tiende a un valor "*a*" concreto,** nos puede dar el caso el caso que de más infinito o también puede darse el caso que el límite de *f*(*x*) sea menos infinito, o bien que **los límites laterales, por la izquierda o por la derecha,** den uno más infinito y otro menos infinito. Las diversas posibilidades las tenemos en la página 204… Son estas.	$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$	El profesor toma de nuevo el libro
86. P: Son estas posibilidades…		

87. P: Límite cuando *x* tiende a "*a*" , es más infinito o menos infinito, o también cuando el límite por la izquierda y por la derecha no coinciden. 88. P: Tenemos un caso concreto, supongamos que tengamos esta función $f(x)=1/(x^2-1)$ y **queremos saber qué comportamiento tendrá en el infinito, qué hará la gráfica.** Lo que hemos de hacer es calcular **el límite cuando *x* tiende a más infinito de $f(x)$ o así;** límite de uno partido por *x* al cuadrado menos uno, cuando *x* tiende a más infinito. ¿Qué da este límite?… ¿Qué valor tiene? ¿Cuánto vale este límite?	$f(x)=1/(x^2-1)$ $\lim_{x\to+\infty} f(x)= \lim_{x\to+\infty} 1/(x^2-1) =$	Hace gestos moviendo primero la mano hacia la izquierda y después hacia la derecha. El profesor gira la página 204 del libro hacía los alumnos y señala con el dedo las gráficas correspondientes a cada una de las 4 posibilidades. Escribe esta expresión y espera la respuesta de los alumnos

Tabla 1. Recordatorio de las definiciones de límite Profesor *A*

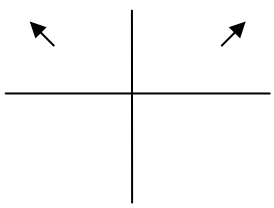
Podemos observar que el profesor *A* utilaza muchas expresiones metafóricas que se corresponden con metáforas fosilizadas, en el sentido de que la institución matemática las considera como expresiones literales y no es consciente de su origen metafórico. Es más, dichas expresiones no tiene expresiones alternativas si no se quiere utilizar un lenguaje "impreciso". Este origen metafórico se puede observar en la simbología utilizada (por ejemplo la flecha del símbolo de límite) y en la lectura de dicha simbología (por ejemplo, límite de *f*(*x*) cuando *x* tiene a más infinito).

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2-1} = 0$$

Para la mayoría de los matemáticos, expresiones como las que siguen difícilmente serán consideradas como metafóricas: *"x tiende", "límite por la derecha", aproximarse por la izquierda",* etc. A pesar de que son consideradas literales en el aula tienen origen metafórico. El origen de éstas y muchas otras expresiones esconden una proyección metafórica (entendida ésta en sentido amplio, es decir considerando, además de la metáfora, la metonimia, sinécdoque, etc.). Aunque tal origen es ajeno a la consciencia lingüística de la comunidad de personas que lo utilizan

El origen metafórico de las metáforas fosilizadas no sólo aparece en el discurso verbal del profesor sino que también se puede detectar en la gesticulación del profesor. Por ejemplo, el profesor *D*, cuando explica la tendencia de la función hacia el infinito, con sus gestos sugiere la idea de infinito en términos metafóricos (infinito es un lugar- de partida o de llegada), y la idea de "*x*" como una cosa-objeto (que tiene movimiento y se va hacia un lugar).

Configuración didáctica: tendencia de la función

TRANSCRIPCIÓN	PIZARRA	OBSERVACIONES
…		
50. P: ¿Cuál es el límite de este polinomio cuándo la **"*x*" tiende a más infinito?, más infinito**	$\lim_{x\to+\infty} f(x) = x^4 + \ldots = +\infty$	El profesor explica la tendencia de la gráfica hacia infinito
51. P: Y **cuándo tiende a menos,** también	$\lim_{x\to-\infty} f(x) = x^4 + \ldots = +\infty$	
52. P: Por tanto ya en el gráfico lo que pueden poner ustedes es, la curva **se va** hacia aquí (dibuja la flecha izquierda) **y hacia aquí** (la flecha derecha), seguro		Luego el profesor se dirige a la representación de los ejes y dibuja un par de flechas para representar la dirección y sentido de la gráfica 
53. P: Tanto cuando la **"*x*" tiende a más infinito,** como cuando la **"*x*" tiende a menos infinito,** la función tiende hacia		El profesor con gestos con la mano indica la tendencia de la gráfica hacia el más infinito y menos infinito

más infinito …		 

Tabla 2. Tendencia de la función. Profesor *D*

Además de estas expresiones metafóricas que se corresponden con metáforas fosilizadas, vemos que este profesor en su discurso utiliza otras expresiones que claramente no se pueden considerar que correspondan a metáforas fosilizadas y otras que quedan en una situación intermedia. A continuación, nos vamos a centrar en las expresiones metafóricas que, en nuestra opinión, no caen completamente en el dominio de las metáforas fosilizadas, en el sentido de que hay un lenguaje institucional alternativo más preciso.

Estas expresiones metafóricas corresponden a diferentes metáforas conceptuales: orientacionales, ontológicas, etc. que a continuación analizaremos con detalle.

4.1.2 Metáforas orientacionales

Las metáforas conceptuales de tipo orientacional las podemos rastrear en muchas de las expresiones utilzadas por el profesor *A* en su discurso. La construcción de un sistema de ejes coordenados le lleva a organizar el plano en términos de expresiones metafóricas del tipo “horizontal-vertical”, “arriba-abajo” o “izquierda-derecha” que son manifestaciones de este tipo de metáforas conceptuales. Por ejemplo, hay un momento en que la configuración didáctica se organiza en torno a la tarea de hallar los puntos de corte de la gráfica de la función con los ejes de coordenadas.

Configuración didáctica: Corte con los ejes de coordenadas

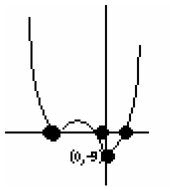
TRASCRIPCIÓN	PIZARRA	OBSERVACIONES
42. P: Comencemos por **el eje de ordenadas, el vertical**, este punto viene determinado por la imagen del cero, sustituimos… es menos nueve, recordemos que en el caso de que una función sea un polinomio, la imagen del cero siempre coincide con el término independiente, por tanto el punto que estamos encontrando, el punto de corte con el eje de ordenadas es cero menos nueve, es el cero menos nueve.	$f(0)$= $f(0)$=-9 	Señala con el dedo el punto de corte con el eje de ordenadas sobre la gráfica. Señala con el dedo el término independiente Escribe (0,-9) a la izquierda del punto de corte con el eje de ordenadas Hace el gesto de “horizontal” con la mano
43. P: El punto de corte con **el eje de abscisas, horizontal,** vendrá determinado por los valores, de los valores de la “*y*” que tengan imagen cero, quiere decir que todo este polinomio es igual a cero… Lo que se ha de hacer es encontrar que valores de la “*y*” que son solución de esta función, la solución de esta función son los números que sustituidos aquí dan cero, quiere decir que las imágenes son cero, justamente aquí. ¿Cómo se soluciona esta ecuación?	$x^4+6x^3+8x^2-6x-9 = 0$	Señala la expresión $x^4+6x^3+8x^2-6x-9$

Tabla 3. Corte con los ejes de coordenadas. Profesor *A*

Hay que resaltar que, en la trascripción de la clase de este profesor, solamente en una configuración didáctica el profesor deja de hacer la identificación entre eje de ordenadas y eje vertical y entre eje de abscisas y eje horizontal. En cambio, el libro de texto (ver anexo 1) que se utiliza es muy escrupuloso con este aspecto y nunca hace esta identificación.

A partir de la expresión metafórica orientacional "el eje de abscisas es horizontal y el de ordenadas es vertical" el profesor organiza las propiedades de la gráfica de la función. El uso de esta expresión metafórica le lleva a introducir otras expresiones orientacionales como son "izquierda-derecha" y "arriba-abajo". Por ejemplo, en 114 tenemos:

> 114. P: Recordemos que no hay una única notación, gráficamente que podemos decir de esto… pues, que... cuando uno se **acerca por la izquierda**…así…la gráfica **tiende a menos infinito** acercándose cada vez mas a esta recta, y cuando **x tiende a 1 por la derecha** la gráfica **coge hacia arriba** acercándose cada vez mas a esta asíntota vertical o esta recta, eso dice que esa recta ***x* igual 1 es una asíntota vertical**

Las expresiones metafóricas "el eje de abscisas es horizontal y el de ordenadas es vertical" son casos individuales de la metáfora conceptual "paralela al eje de abscisas es horizontal y paralela al eje de ordenadas es vertical". Dicha metáfora es muy habitual en las clases de bachillerato y se concretan en muchas expresiones metafóricas[1] diferentes. Por ejemplo, en la transcripción del profesor *A* hay un momento en que la configuración didáctica se organiza en torno a la tarea de determinar la derivada en $x = 0$ para cada una de las tres funciones que han aparecido anteriormente. El profesor explica la solución y da una interpretación geométrica al resultado obtenido analíticamente. El profesor hace observar a los alumnos que la derivada en los tres casos es cero debido a que en las tres gráficas la recta tangente en $x = 0$ es horizontal.

[1] La distinción entre *expresiones metafóricas* y *metáforas conceptuales* sirve para establecer generalizaciones que de otro modo quedarían ocultas. Las *metáforas conceptuales* permiten agrupar expresiones metafóricas. Una *expresión metafórica*, en cambio, es un caso individual de una metáfora conceptual. Por ejemplo, la metáfora conceptual "paralela al eje de abscisas es horizontal" agrupa, entre otras, expresiones metafóricas como "el eje de abscisas es el eje horizontal" o "la tangente es horizontal".

Configuración didáctica: Cálculo de la derivada en $x=0$.

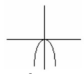
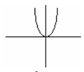
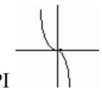
TRANSCRIPCIÓN	PIZARRA	OBSERVACIONES
9. P: El apartado *c*, para cada una de las funciones se ha de encontrar una derivada en $x=0$.	$f(x) = 2x^4$ $f(x) = -2x^4$   *Máximo* *Mínimo*	
10. P: Comencemos por la primera la efe, la primera derivada… $8x^3$… la segunda derivada, $24x^2$. Fijaos que la primera, la función $f(x)$, en $x=0$ presenta un mínimo y la derivada en $x=0$ es 0, **como cabía esperar, porque ahora esta tangente es horizontal, y la segunda derivada en** ***x*****=0 también da 0.**	$f(x) = -2x^5$  PI $f(x) = 2x^4$ $f'(x) = 8x^3$ $f''(x) = 24x^2$ $f'(0) =0$ $f''(0) =0$	El profesor hace el gesto de poner la mano indicando la posición horizontal de la recta tangente en cada gráfica. También escribe los cálculos en la pizarra

Tabla 4. Cálculo de la derivada en $x=0$. *Profesor A*

En esta transcripción se puede observar que el profesor *A* en su explicación utiliza el término "horizontal" en lugar de utilizar la expresión "paralela al eje de abscisas".

Las metáforas orientacionales no sólo aparecen en el discurso verbal del profesor ya que, en la mayoría de los casos, éstas son sugeridas o reforzadas por su gesticulación. Por ejemplo, el profesor *B* (ver anexo 3), cuando explica el crecimiento y decrecimiento de una función en un intervalo, hace gestos para reforzar la idea de que "crecimiento es subir" y "decrecimiento es bajar":

Configuración didáctica: crecimiento y decrecimiento

TRANSCRIPCIÓN	PIZARRA	OBSERVACIONES
… 211. P: Por tanto, de **menos infinito hasta uno la función haría una cosa, crecería,** es creciente o decreciente, pero no puede ser que un trozo sea creciente y otro decreciente. A partir del uno sería una cosa, en el uno habría un máximo o un mínimo, aquí sería el uno llegaría hasta el tres, **del uno al tres haría lo contrario,** en el tres habría, si aquí es un máximo o un mínimo o viceversa **y del tres iríamos al infinito**, ¿de dónde ha salido eso?, es fácil, yo aquí he hecho efe, y aquí he hecho la derivada primera, ¿de dónde ha salido el uno y el tres?, el uno y el tres han salido de igualar a cero la derivada primera	**x** | $(-\infty, 1)$ 1 $(1, 3)$ 3 $(3,+\infty)$	El profesor para explicar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, se dirige al esbozo de la gráfica e indica con gestos el supuesto comportamiento (crecimiento es subir y decrecimiento es bajar):   

Tabla 5: Crecimiento y decrecimiento. Profesor *B*

La metáfora conceptual "paralela al eje de abscisas es horizontal y paralela al eje de ordenadas es vertical" utilizada por el profesor es una metáfora de tipo grounding cuyo dominio de partida es el esquema de imagen "orientacional". Dicha proyección se puede ilustrar por la figura siguiente

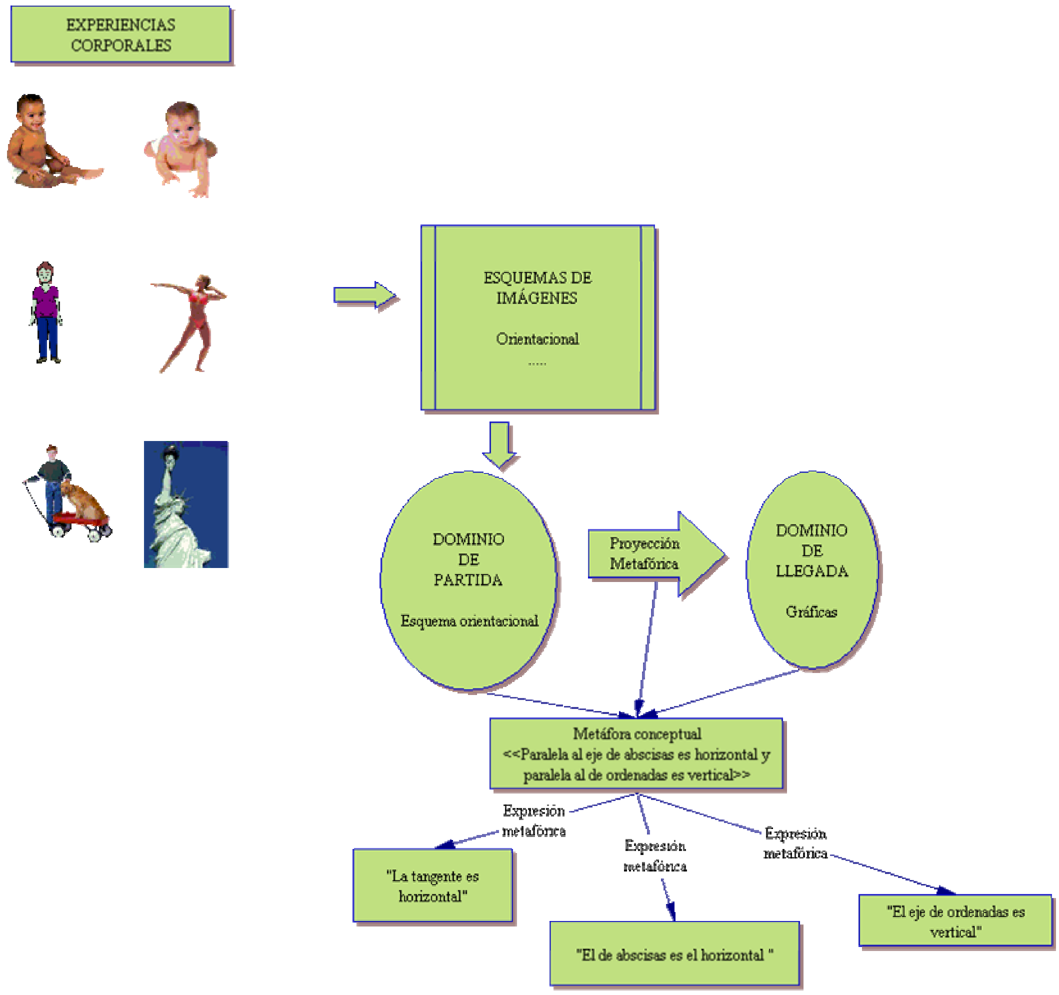


Figura 2. Proyección metafórica del esquema orientacional

En términos generales, vemos como el profesor explica a sus alumnos la representación gráfica de funciones mediante diferentes expresiones metafóricas que son casos individuales de la siguiente metáfora conceptual:

Metáfora orientacional:

"Paralela al eje de abscisas es horizontal y paralela al eje de ordenadas es vertical"

Dominio de partida	Dominio de llegada
Punto de corte de los ejes vertical y horizontal	Origen de coordenadas
Eje Horizontal	Eje x
Eje Vertical	Eje y
Recta Horizontal	Paralela al eje x
Recta Vertical	Paralela al eje y
Arriba	Valores de $y > 0$
Subir	Función creciente
Abajo	Valores de $y < 0$
Bajar	Función decreciente
Derecha	Valores de $x > 0$
Izquierda	Valores de $x > 0$
Algo está a la izquierda de otra cosa que está a su derecha	$x_1 < x_2$
Algo está más abajo de otra cosa que está más arriba	$y_1 < y_2$

Tabla 6. Proyección metafórica del esquema orientacional

Las metáforas orientacionales surgen del hecho de que tenemos cuerpos de un tipo determinado y que se relacionan de una determinada manera con su entorno físico -nuestro cuerpo determina un sistema de referencia egocéntrico (que puede ser estático o dinámico). Las metáforas orientacionales dan a un concepto una orientación espacial: por ejemplo *más es arriba, menos es abajo*. Estas metáforas no son arbitrarias, tienen una base en nuestra experiencia física y cultural y, a su vez, son la base de las teorías científicas. En el caso que nos ocupa, las gráficas de funciones, la metáfora orientacional actúa a tres niveles:

- Por una parte se encuentran ya fosilizada en los conceptos teóricos (por ejemplo, los valores del eje de ordenadas que están por encima del origen son positivos, mientras los que están por abajo son negativos)
- Por otra parte está presente en la explicación del profesor cuando, para hacer más intuitivos los conceptos teóricos, recurre a metáforas que se ajusten a la experiencia personal de él y de los alumnos (por

ejemplo cuando identifica eje de ordenadas con eje vertical y eje de abscisas con eje horizontal).

- También está presenta, como veremos más adelante, en la manera en la que el alumno organiza su conocimiento, por ejemplo, de los ejes de coordenadas ya que éste recurre a metáforas orientacionales basadas en su experiencia corporal.

4.1.3 Metáforas ontológicas

En muchas de las expresiones del discurso del profesor *A,* cuando explica las representaciones gráficas de funciones, podemos rastrear estructuras que son claramente producto de una organización conceptual marcada por metáforas ontológicas. En la trascripción se observan diferentes tipos de lo que (Lakoff y Johnson, 1991) llaman metáforas ontológicas. Esta clase de metáfora, que tiene su origen en nuestras experiencias con objetos físicos, permite considerar acontecimientos, actividades, emociones, ideas, etc. como si fueran entidades (objetos, cosas, etc.).

La combinación de dichas metáforas permite considerar ideas, conceptos, etc. como entidades o sustancias que se contienen unas a otras[2]. A continuación vamos a analizar tres tipos de metáforas ontológicas que consideramos los más relevantes para nuestra investigación: la del contenedor, parte-todo y la objetual.

Contenedor

Un ejemplo de metáfora ontológica es la del contenedor, según Núñez (2000), siguiendo los postulados de Johnson (1991), esta es una metáfora que se usa para estructurar la teoría de clases. Para este autor se trata de una metáfora ontológica inconsciente que tiene sus raíces en la vida cotidiana y que podemos visualizar de la siguiente manera (Núñez, 2000, p. 13):

[2] Las metáforas ontológicas en el discurso escolar muchas veces suelen estar implícitas, pero en textos matemáticos más formales se pueden presentar de manera más explícita. Por ejemplo, en el *Curso de Geometría* de P. Puig Adam (1965, pág. 4) se observan claramente en los axiomas de existencia y enlace:

> *Ax. 1.1 -Reconocemos la existencia de infinitos entes llamados <<puntos>> cuyo conjunto llamaremos <<espacio>>.*
>
> *Ax. 1.2 -Los puntos del espacio se consideran agrupados en ciertos conjuntos parciales de infinitos puntos llamados <<planos>> y los de cada plano en otros conjuntos parciales de infinitos puntos llamados <<rectas>>.*

Dominio de partida **Esquema del contenedor**	Domino de llegada **Clases**
Interior del contenedor	Clase
Objetos dentro del contenedor	Miembros de la clase
Ser un objeto del interior	La relación de pertenencia
Un interior de un contenedor dentro de uno más grande	Una subclase de la clase más grande
Superponer el interior de dos contenedores	Intersección de dos clases
La totalidad de los interiores de dos contenedores	La unión de clases
El exterior de un contenedor	El complementario de la clase

Tabla 7. Proyección metafórica del esquema del contenedor según Núñez (2000, p. 13)

En nuestra opinión, el esquema del contendor tiene más sentido proyectarlo sobre la topología de la manera siguiente:

Dominio de partida **Esquema del contenedor**	Dominio de llegada **Topología**
Interior del contenedor	Dentro
Objetos dentro del contenedor	X está dentro de Y
Ser un objeto del interior	Estar dentro
Sacar un objeto del contenedor	Dentro → fuera
Introducir un objeto en el contenedor	Fuera → dentro
Continente	Frontera
El exterior de un contenedor	Fuera

Tabla 8. Proyección metafórica del esquema del contenedor en la topología

En nuestra opinión, si consideramos que la teoría de clases es la proyección metafórica del esquema del contenedor nos topamos con el problema de que uno de los elementos básicos de dicho esquema “el contendor” ha de desaparecer, lo cual no pasa cuando se proyecta en la topología ya que el “contendor” se convierte en la frontera.

Para analizar el discurso del profesor, somos partidarios, tal como se ha explicado en el capítulo 3, de hablar de una mezcla conceptual, en la que intervienen, sobre todo, el esquema del contendor y el de parte-todo, que lleva a entender las gráficas de manera estática. Esta mezcla conceptual la observamos cuando el profesor considera la gráfica como un conjunto. Ahora bien, hay momentos del discurso del profesor en los que claramente se puede observar el esquema del contenedor o bien el de parte-todo, aunque lo normal es observar la mezcla conceptual. Por ejemplo, el esquema del contendor se observa en 29 y 30 en frases del profesor *A* como las siguientes:

29. P: Sí, de cero hasta más infinito, es el dominio, porque logaritmos de números negativos no existen, logaritmo de menos uno no existe. **¿El cero incluido o no incluido?**
37. P: (...) podemos ponerlo así, más fácil, podemos ponerlo en forma de intervalo, del cero hasta el más infinito, **el cero esta vez si que está incluido, si que está incluido**…

Mientras que en el discurso del profesor normalmente observamos una mezcla de metáforas ontológicas, en el discurso del los alumnos es más fácil observar las metáforas ontológicas por separado (tal como veremos más adelante cuando respondamos a la pregunta 3).

El profesor B (ver anexo 3) también utiliza expresiones que muestran una clara proyección metafórica que ilustra la estructura del contenedor, estas expresiones también están acompañadas de gestos que refuerzan esa idea, por ejemplo cuándo está hablando del dominio, se refiere a el segmento de recta que tiene dibujado en la pizarra como el contenedor que contiene los puntos del dominio, señalando los extremos del segmento:

100. P: Bien, Rocío ahora vas tú, ¡eh! es decir, yo sé que la función hace esto, ¡no! qué hará más, **yo sé que el dominio va desde aquí hasta aquí**, por tanto la función podría hacer esto, ¿esto lo podría hacer?

Figura 3. Gestos del profesor cuando explica el dominio de una función

Ahora bien, en el caso de las líneas (sean gráficas o bien sean rectas) entre el gesto inicial que marca el límite inferior y el gesto final que marca el límite superior, hay un lapso de tiempo y un desplazamiento de la mano, que también induce a entender la gráfica o el dominio como un camino (esto se desarrolla con más detalles más adelante).

La metáfora "La gráfica es un contenedor de puntos" es una metáfora ontológica de tipo grounding cuyo dominio de partida es el esquema de imagen "contenedor" que se puede ilustrar por la figura siguiente:

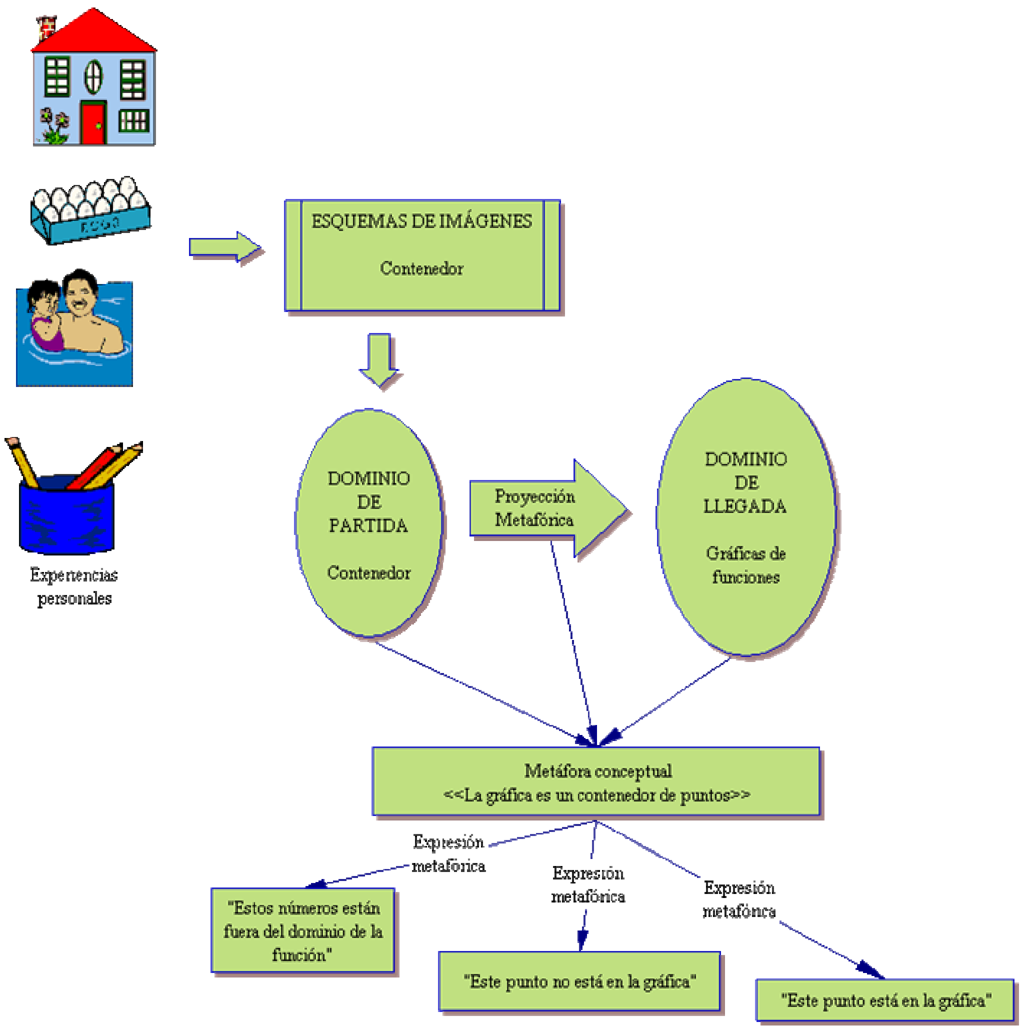


Figura 4. Proyección metafórica del esquema del contendor

Metáfora ontológica:
"La gráfica es un contenedor de puntos"

Dominio de partida **Esquema del contenedor**	Dominio de llegada **Gráficas de funciones**
Contenedor (o interior del contenedor)	Gráfica
Objeto dentro del contenedor	Punto de la gráfica
Ser un objeto del interior	Esta en / estar incluido
Un contenedor dentro de uno más grande	Una parte de la gráfica dentro de otra parte que la contenga
Objeto contenido en dos contendores diferentes	Puntos de intersección
El exterior de un contenedor	Puntos que no están en a la gráfica

Tabla 9. Proyección metafórica del esquema del contenedor en las gráficas de funciones

Parte - todo

En el discurso del profesor *A* se puede observar la metáfora "parte-todo" cuando explica el cálculo dominio, ya que hace observar que los dominios calculados anteriormente eran una "parte" de *R*, o sea una parte del todo, ya que *R* lo considera el total

Configuración didáctica: Cálculo del dominio

TRASCRIPCIÓN	PIZARRA	OBSERVACIONES
...		…
21. P: Entonces comencemos por el dominio…Recordemos que el dominio de una función **es el conjunto de valores** de la variable independiente que tiene imagen. …... De otra manera; son los valores que yo puedo calcular la imagen, son las equis de las que puedo calcular la imagen.		El profesor borra la pizarra
22. P: Por ejemplo, esta función $f(x)=1/(x+1)$, el dominio de esta función está formado por el **conjunto de números que**	$f(x)=1/(x+1)$	Y escribe la fórmula de la función en la pizarra,

cuando yo sustituyo la *x* por esos números puede hacer todo este cálculo, o sea, puedo encontrar la imagen. **23.** P: ¿Eso siempre se puede hacer?...**menos de un número, ¿De cuál?** 24. A: El –1		
25. P: Entonces **el dominio son los números reales menos el -1, o sea, para cualquier número se puede encontrar una imagen menos la de –1**	$D(f) = R\text{-}\{1\}$	Mientras hace este comentario primero señala la *x* y luego hace un gesto para abarcar toda la función

Tabla 10. Cálculo del dominio. Profesor *A*

El profesor B también utiliza expresiones que muestran una clara proyección metafórica que ilustra la estructura de parte-todo, estas expresiones también están acompañadas de gestos que refuerzan esa idea, por ejemplo cuándo está hablando de los puntos que contiene la gráfica, lo hace en términos de las partes componentes de la misma:

101. P: Vale, entonces ¿qué **otros puntos me interesa encontrar?**

102. P: ¿Qué otros puntos?

103. P: Aquí no hay parábolas, ¿**cuáles son el resto de puntos interesantes**? Es decir, **yo he encontrado este y este**, que son los cortes con los ejes**, ¿qué otros puntos?**

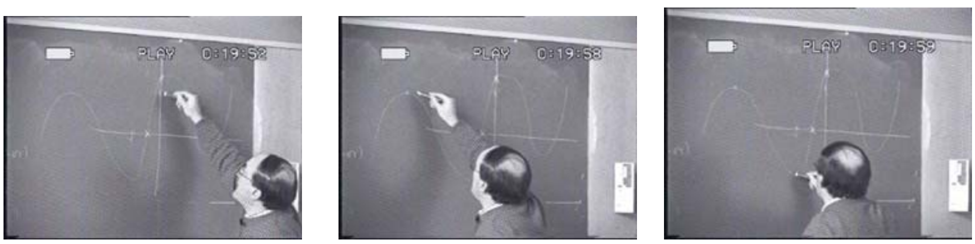


Figura 5. Gestos del profesor comentando los puntos que interesa buscar para representar la función

La metáfora “Los puntos son partes de la gráfica” es una metáfora ontológica de tipo grounding cuyo dominio de partida es el esquema de imagen “parte-todo” que se puede ilustrar por la figura siguiente:

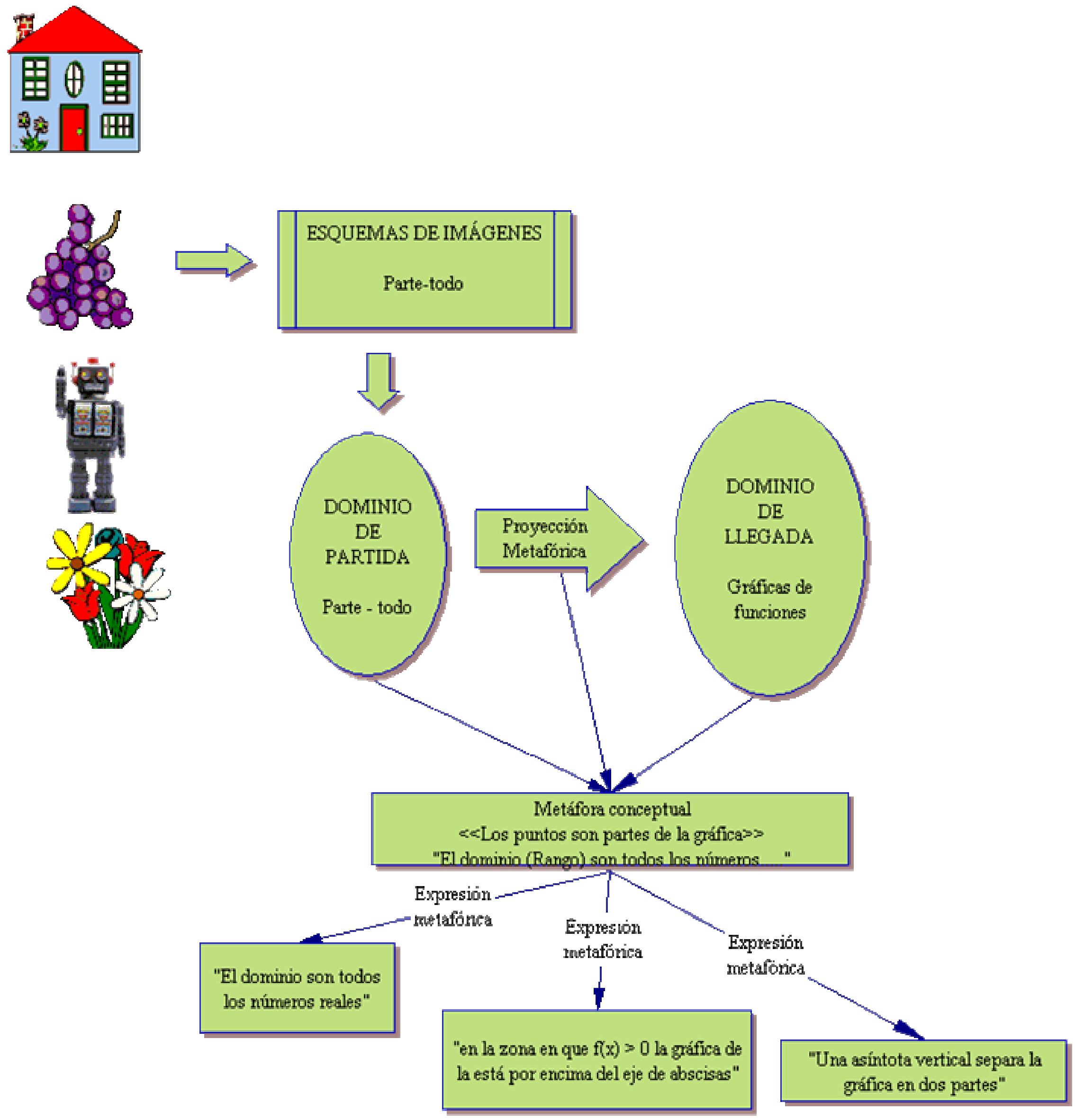


Figura 6. Proyección metafórica del esquema parte-todo

Metáfora ontológica:
"Los puntos son partes de la gráfica"

Dominio de partida **Esquema parte-todo**	Dominio de llegada **Gráficas de funciones**
Todo	La gráfica
Partes constituyentes	Puntos de la grafica

Tabla 11. Proyección metafórica del esquema parte-todo en las gráficas de funciones

La proyección metafórica del esquema "parte-todo" también sirve para estructurar el dominio y el rango.

La metáfora objetual

En general, podemos afirmar que la metáfora ontológica "objetual" es omnipresente en el discurso del profesorado ya que en él las entidades matemáticas se presentan como "objetos que tienen propiedades". La metáfora objetual pretende conseguir que la representación ostensiva de la cual se habla y que está dibujada en la pizarra (papel, ordenador, etc.) se constituya en un objeto no ostensivo ideal, explícita o implícitamente, por el tipo de discurso que se realiza sobre ella. La representación de la pizarra es una figura concreta y ostensiva (en el sentido que está dibujada con el material "tiza" y es observable por cualquier persona que esté en el aula) y como resultado del proceso de idealización se tiene un objeto matemático no ostensivo (en el sentido de que se supone que es un objeto matemático que no se puede presentar directamente si no es mediante ciertos ostensivos asociados). El proceso de idealización es un proceso que duplica entidades ya que, además del ostensivo que está en el mundo de las experiencias materiales humanas, se crea (como mínimo de manera virtual) un no ostensivo idealizado. La relación que se establece entre estas dos entidades es la de expresión-contenido ya que se considera que el ostensivo es la representación del no ostensivo. Este hecho tiene algunas implicaciones que queremos resaltar, una de las más importantes es que la relación de representación se da entre objetos claramente diferentes (ostensivos por una parte y no ostensivos por la otra). Ahora bien, a pesar de que por una parte se acepta que los objetos no ostensivos sólo son accesibles por medio de sus ostensivos asociados, se puede caer en el error de segregar este par de objetos y dar vida independiente a los objetos no ostensivos (algo parecido a cuando se considera el espíritu como algo segregado del cuerpo), entre otros motivos porque el discurso objetual que se suele utilizar en las matemáticas induce a creer en la "existencia" del objeto matemático como algo independiente de su representación. Wittgenstein (1987) ha sido, seguramente, uno de los filósofos de la matemática que más claramente ha llamado la atención sobre este peligro, para este filósofo la asimilación de los términos matemáticos a nombres, especialmente la concepción de que son nombres de objetos ideales o abstractos, es fundamental para las confusiones que se producen al reflexionar sobre las matemáticas.

La segunda es que según el discurso que haga el profesor el tipo de "existencia" que se le supone al objeto matemático puede pasar de un juego de lenguaje propio del platonismo débil a un juego de lenguaje propio del "platonismo fuerte" (Ferreirós, 1999). El término 'platonismo' en sentido interno o débil fue propuesto por Paul Bernays (un colaborador de Hilbert) en una conferencia que impartió en junio de 1934 en la universidad de Ginebra. Bernays pretendía dar nombre a un modo de razonar que es característico sobre todo del análisis y la teoría de conjuntos, aunque también del álgebra moderna y la topología. Dicho modo de pensar consiste en lo siguiente: los objetos de la teoría se conciben como elementos de una totalidad o conjunto, que se considera dada al margen de cualquier dependencia respecto al sujeto pensante, al matemático. Precisamente porque los elementos del conjunto se conciben como dados, una consecuencia de dicho modo de pensar es que para una propiedad cualquiera (expresable con los medios de la teoría) puede decirse que o bien la poseen todos los elementos del conjunto, o bien hay uno que no la posee. El platonismo débil, en el sentido de Bernays, es característico de la moderna matemática abstracta y se debe diferenciar del platonismo "fuerte" (externo, ontológico, o propiamente filosófico) cuya función es justificar el platonismo débil y cuya tesis principal consiste en la afirmación de que los objetos matemáticos gozan de una existencia real, análoga en algún sentido (aunque diferente) a la existencia de los objetos físicos.

La distinción entre los dos tipos de platonismo está relacionada con los diferentes juegos de lenguaje en los que interviene el término "existir". La noción de existencia se presta a ser utilizada, como mínimo, de dos maneras muy diferentes. En efecto, es muy diferente preguntarnos: ¿existe un número primo entre 22 y 26?; que preguntarnos: ¿existen los números primos?. Hay una numerosa literatura al respecto: Moore (1972), Carnap (1981), Wittegestein (1990), etc. Según Wittegstein la palabra existencia tiene dos sentidos, uno "absoluto" y otro "relativo"; como ejemplo del primero aduce la extrañeza que sentimos delante de la existencia del mundo o la existencia de las cosas en general, mientras que un buen ejemplo del segundo seria la extrañeza, completamente diferente, que produce la existencia de una casa que creíamos que había sido derribada.

Uno de los filósofos que más claramente han expuesto el problema de estos dos sentidos de la palabra existencia ha sido Carnap en su artículo “Empirismo, semántica y ontología” (1981). Carnap distingue, en relación a la existencia de entidades abstractas, dos tipos de cuestiones: las internas y las externas:

> "(..). Si alguien quiere hablar en su lenguaje acerca de un nuevo tipo de entidades, tiene que introducir un sistema de nuevas maneras de hablar, sujeto a nuevas reglas; llamaremos a este procedimiento la construcción de un marco *lingüístico* para las nuevas entidades en cuestión. Y en este momento debemos distinguir dos tipos de cuestiones de existencia: en primer lugar, cuestiones acerca de la existencia de ciertas entidades del nuevo tipo *dentro del marco*; llamaremos a éstas *cuestiones internas*; y, en segundo lugar, cuestiones concernientes a la existencia o realidad *del sistema de entidades como un todo*, a las que llamaremos cuestiones externas. Las cuestiones internas y las respuestas posibles a ellas se formulan con ayuda de las nuevas formas de expresiones. A las respuestas se puede llegar o bien por métodos puramente lógicos, o bien por métodos empíricos, según que el marco sea lógico o fáctico. Las cuestiones externas tienen un carácter problemático que exige un análisis más ajustado." (Carnap, 1981, p. 402).

Carrnap continua su artículo aplicando la distinción entre cuestiones internas de existencia y cuestiones externas al mundo de las cosas, al sistema de los números naturales, al sistema de les proposiciones, etc. Independientemente de que estemos de acuerdo o no con la solución que da Carnap al problema de la existencia del marco de los números (Carnap 1981, pp. 404-405) hay una cosa clara: la existencia interna dentro de un determinado marco lingüístico no es problemática. Lo que resulta problemático es la existencia del sistema de entidades como un todo.

La metáfora objetual, en nuestra opinión, es la causa de que se hable de la existencia de los objetos matemáticos en el sentido que hemos llamado platonismo débil. En este tipo de discurso las cuestiones de existencia se plantean dentro de un determinado marco lingüístico propio de la institución matemática que, en principio no tiene porque ser problemático. Este sería el caso de los párrafos 29 y 37 de la transcripción del profesor *A*:

29 Sí, de cero hasta más infinito es el dominio, porque logaritmos de **números negativos no existen**, logaritmo **de menos uno no existe**. ¿El cero incluido o no incluido?

37. P: Menos los negativos … porque **la raíz cuadrada de un número negativo no existe**, también podríamos decir los mismos números reales menos los negativos, más fácil, todos los números positivos, podemos ponerlo así, más fácil, podemos ponerlo en forma de intervalo, del cero hasta el más infinito, el cero esta vez si que está incluido, si que está incluido

Ahora bien, no está claro que el alumno se quede en el platonismo débil y no cambie de juego de lenguaje para entender la existencia en términos del platonismo fuerte. Sobre todo, si el profesorado no es extremadamente cuidadoso en la manera como utiliza el término "existir". Para poner un solo ejemplo, el párrafo del profesor *W*: *"Por lo tanto, esta función* ***existe*** *siempre, el dominio será todo R y por lo tanto no* ***tendrá*** *ninguna asíntota vertical"*. En esta frase hay una desviación del uso legítimo de la palabra "existe", ya que lo que tiene sentido sería decir que: *las imágenes existen para cualquier valor de la variable independiente*. Al atribuir la existencia a la función en lugar de a las imágenes, pasamos de un uso perfectamente delimitado a un uso "peligroso" del término "existe" que puede llevar a entender que la función es un objeto que existe como existe una silla (pasamos de una existencia "matemática" a una existencia "real").

Otro ejemplo en el que podemos observar la metáfora objetual es cuando el profesor para referirse al concepto de gráfica de función lo hacen en términos de un objeto con propiedades físicas. Por ejemplo, el profesor *C*, cuando habla sobre la realización de cálculos matemáticos para encontrar la primera derivada de una función, usa expresiones verbales (y también gestuales) que sugieren la idea de que los objetos matemáticos se pueden manipular como las cosas que tienen una cierta entidad física.

50. Derivada del numerador, ¡no! multiplicada por el denominador sin derivar, menos el numerador sin derivar que multiplica al denominador derivado, ¡de acuerdo! Dividido por el denominador al cuadrado
51. Esto es la primera derivada, **ahora ¿qué hay que hacer?, operar, manipular**…
52. ¿Qué nos queda?…

Figura 7. Panorámica de la clase del profesor C cuando éste sugiere la metáfora objetual

La metáfora “Las entidades matemáticas son objetos” es una metáfora ontológica de tipo grounding, que se puede considerar casi como una metáfora fosilizada cuando se utilaza correctamente, cuyo dominio de partida es el esquema de imagen “objetual” que se puede ilustrar por la figura siguiente:

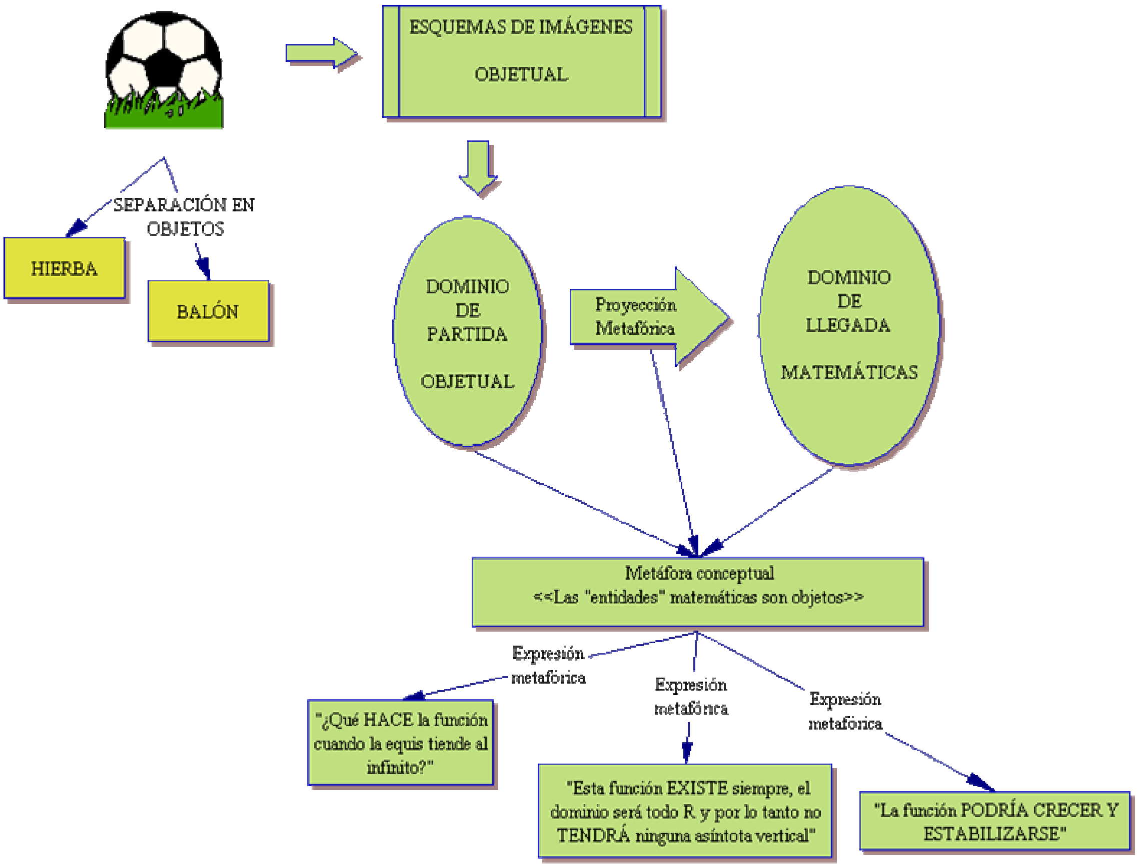


Figura 8. Proyección metafórica del esquema objetual

Metáfora ontológica:
“Las entidades matemáticas son objetos físicos”

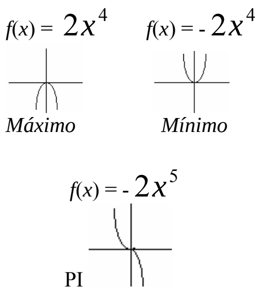
Dominio de partida **Esquema objetual**	Dominio de llegada **Entidades matemáticas**
Objeto físico	Objeto matemático
Propiedades del objeto	Propiedades del objeto matemático

Tabla 12. Proyección metafórica del esquema objetual

4.1.4 Metáforas dinámicas. Movimiento ficticio

Las metáforas dinámicas las podemos rastrear en muchas de las expresiones utilizadas por el profesor *A* (anexo 2) en su discurso. Por ejemplo, hay un momento en que el profesor explica sobre el hecho de que si la derivada segunda es cero, podemos tener máximos, mínimos o puntos de inflexión. Primero calcula las derivadas primera y segunda de las tres funciones anteriores haciendo observar a los alumnos que en los tres casos en $x = 0$ la derivada segunda se anula. Después utiliza las gráficas de las funciones cuyo esbozo estaba dibujado en la pizarra para hacerles ver que en la primera función en $x = 0$ hay un máximo, en la segunda un mínimo y en la tercera un punto de inflexión, Luego el profesor que propone una técnica para determinar si tenemos un máximo, un mínimo o un punto de inflexión en $x = a$ cuando $f''(a) = 0$. Para ilustrar dicha técnica toma el caso particular "$a = 0$", y propone realizar el estudio de la variación de la derivada primera en un entorno del punto de abscisa $x = 0$.

Configuración didáctica: Criterio suficiente de máximos, mínimos y puntos de inflexión. Estudio de la variación de la derivada en un entorno del punto

TRANSCRIPCIÓN	PIZARRA	OBSERVACIONES
…		
16. P: Quiere decir que si nosotros queremos saber que hay en $x = 0$ un máximo o un mínimo o un punto de inflexión y al hacer la segunda derivada da cero, quiere decir que la segunda derivada no aporta suficiente información para determinarlo.		Lee del libro la actividad y señala en la pizarra las gráficas, y la derivada primera y segunda de cada función. Pone la mano antes y después de $f'(0) = 0$, simulando gestos de recorridos
17. P: Lo que se ha de hacer es una tabla de variación. **Si antes del cero es creciente, si después de cero es decreciente. Si antes del cero y después del cero es creciente, un punto de inflexión. Si**		Continua haciendo gestos con las manos, a la izquierda y a la derecha

antes del cero es creciente y después del cero es decreciente, un máximo. Si antes del cero es decreciente y después de cero es creciente, un mínimo. Haced la tabla de variación de la función.		

Tabla 13. Criterio suficiente de máximos, mínimos y puntos de inflexión. Estudio de la variación de la derivada en un entorno del punto. Profesor *A*

En esta configuración, el discurso metafórico del profesor puede inducir al alumno a entender el cero como un punto determinado sobre un camino que se recorre o una línea por la cual se transita. Palabras como “antes de cero”, “después de cero” pueden producir este efecto en el alumno. Para Lakoff y Núñez (2000) se trata de una expresión metafórica que induce el “movimiento ficticio” y cuya raíz es el esquema de imagen “camino”. En dicho esquema de imagen se sugiere una organización espacial, se tiene un origen (“de”), un camino (“pasa por”, “aquí”, “a lo largo”), y un fin (“a”, “hasta”) y además se contempla algo que se mueve (punto, objeto, etc.) y que se puede localizar en un momento dado, en algunos casos el inicio es el “más infinito” y el final es “menos infinito”.

En general todos los profesores investigados han representado la gráfica de la función en términos dinámicos, además del profesor *A,* el profesor *B,* por ejemplo, al referirse al dominio de una función, y a la representación gráfica de la misma, expresa el posible recorrido o camino desde donde parten y hasta donde llegan, como si fuese un objeto móvil.

209. P: Infinito, y ahora como yo hablo de crecimiento y decrecimiento, los puntos clave son el máximo y el mínimo, **la función va de menos infinito aquí,** encuentro esos dos puntos que he encontrado, el tres y el uno, ¿cuál es más pequeño de estos dos?

Figura 9. Gestos que sugieren un camino en la explicación del profesor *B*

Una expresión metafórica que también sugiere el movimiento ficticio es la que considera que las funciones continuas son aquellas que se pueden trazar sin levantar el lápiz del papel. Es una metáfora que podemos observar en el fragmento de la clase de profesor *B*, que además acompaña con gestos que sugieren una trayectoria continua

<table>
<tr><th>TRASCRIPCIÓN</th><th>PIZARRA</th><th>OBSERVACIONES</th></tr>
<tr>
<td>…

221. P: ¡A ver! Marina, si la función es continua, eso es muy importante, quiere decir que yo siempre podré dibujar sin alzar el lápiz del papel o la tiza de la pizarra, lo que sea ¡no!</td>
<td>
<table>
<tr><td>x</td><td>$(-\infty, 1)$</td><td>1</td><td>$(1, 3)$</td><td>3</td><td>$(3,+\infty)$</td></tr>
<tr><td>f</td><td></td><td>Máx</td><td></td><td>Min</td><td></td></tr>
<tr><td>f´</td><td></td><td>0</td><td></td><td>0</td><td></td></tr>
<tr><td>f´´</td><td></td><td>$-6<0$</td><td></td><td>$6>0$</td><td></td></tr>
</table>
</td>
<td>Ahora llama la atención sobre la continuidad de la función y se dirige a la representación gráfica que tenia al otro lado de la pizarra y haciendo gestos con la mano desplaza la tiza sobre la gráfica, sin alzarla en ningún momento



</td>
</tr>
</table>

Tabla 14: Idea intuitiva de continuidad de una función. Profesor *B*

En esta trascripción se puede observar que el profesor *B*, en su explicación utiliza expresiones dinámicas y gestuales para representar la continuidad de una función. El movimiento gestual de la mano, que se desplaza de un lado a otro, sugiere una trayectoria continua que es la traza producida por el movimiento de un objeto, la mano recorre todos los puntos intermedios de un lado a otro.

La metáfora "La gráfica es un camino" es una metáfora de tipo grounding cuyo dominio de partida es el esquema de imagen "camino". Este esquema de imagen, en nuestra opinión es subsidiario del esquema orientacional egocéntrico. Se puede ilustrar por la figura siguiente:

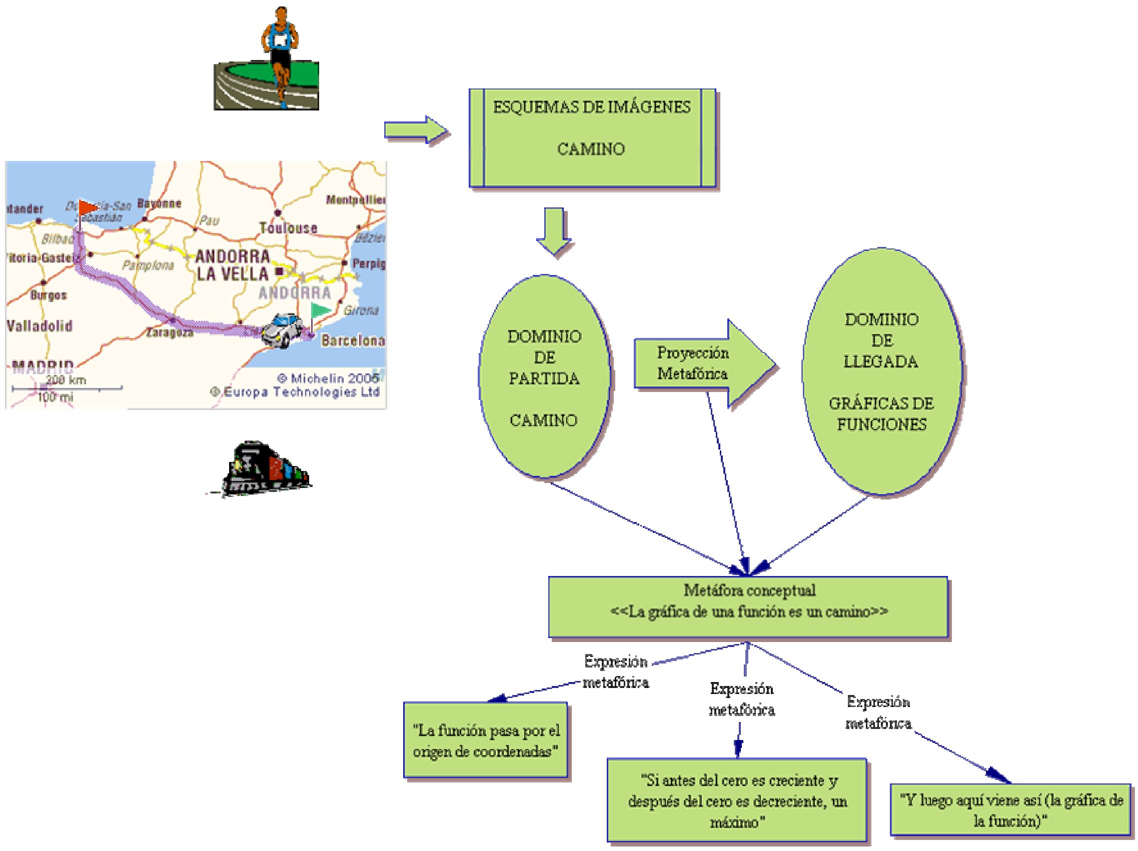


Figura 10. Proyección metafórica del esquema "camino"

Metáfora ontológica:

"La gráfica es un camino"

Dominio de partida **Esquema del camino**	Dominio de llegada **Gráficas de funciones**
Camino	Gráfica
Una localización en el camino	Punto de la gráfica
Estar sobre el camino	La relación de pertenencia (ser un punto de la gráfica)
Origen del camino	Origen de la gráfica (por ejemplo, menos infinito)
Final del camino	Final de la gráfica (por ejemplo más infinito)
Estar fuera del camino	Puntos que no pertenecen a la gráfica

Tabla 15. Proyección metafórica del esquema camino

Una variante de esta metáfora conceptual es "La gráfica es la traza que deja un punto que se mueve sujeto a determinadas condiciones". La diferencia con la anterior es que, en este caso, el camino no está dado previamente, sino que es la traza que resulta del movimiento del punto. Esta última se pone en funcionamiento cuando se traza la gráfica de una función, mientras que en la primera la gráfica ya está dada previamente.

4.1.5 Fusiones conceptuales

Al ser el profesor *A* un profesional experto era de esperar que en su discurso pudiéramos observar, como mínimo, dos tipos de mezclas conceptuales. Por una parte, la mezcla conceptual, dominante en las matemáticas institucionales, que lleva a entender las gráficas de funciones de manera estática (tal como ya se ha explicado en el capítulo 3) y, por otra parte, mezclas conceptuales que fuesen el resultado de su intento de hacerse entender por los alumnos.

Un ejemplo en el que podemos observar la mezcla conceptual "estática" de la figura siguiente (explicada en el capítulo 3) lo tenemos en la configuración didáctica en la que el profesor *A* explica el cálculo del dominio:

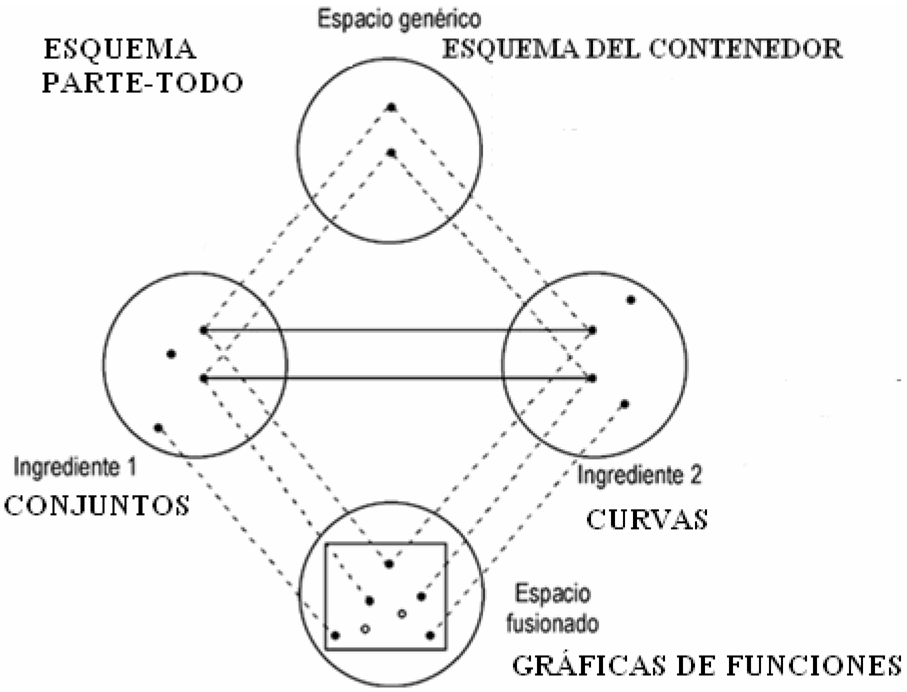


Figura 11. Fusión conceptual estática "Gráfica de funciones"

Configuración didáctica: Cálculo del dominio.

TRANSCRIPCIÓN	PIZARRA	OBSERVACIONES
… 21. Entonces comencemos por el dominio… Recordemos que el **dominio de una función es el conjunto de valores de la variable independiente que tiene imagen.** …... De otra manera; son los valores que yo puedo calcular la imagen, son las equis de las que puedo calcular la imagen.	$f(x)=1/(x+1)$	Señala la *x* de la fórmula con el dedo
22. Por ejemplo, esta función $f(x)=1/(x+1)$, el dominio de esta		Con la mano rodea la fracción $1/(x+1)$

función está **formado por el conjunto de números que cuando yo sustituyo la** ***x*** por esos números puede hacer todo este cálculo, o sea, puedo encontrar la imagen. …		

Tabla 16*:* Cálculo del dominio. Profesor *A*

En el siguiente fragmento de la trascripción del profesor *A* también se puede observar una mezcla conceptual de tipo antropomórfico (zoomórfico). Dicha mezcla produce una animación de los objetos matemáticos, incluso se podría decir una animalización o personificación de los objetos matemáticos ya que éstos pasan a "hacer cosas" a "crecer" etc. También podemos observar los gestos que hace el profesor para reforzar la idea

Configuración didáctica: Asíntotas y comportamiento al infinito.

TRANSCRIPCIÓN	PIZARRA	OBSERVACIONES
…		
78. P: Ahora miremos la asíntota de una función y las simetrías, vamos a ir directamente a la página 204. Asíntotas y comportamiento al infinito……	Asíntotas y comportamiento al infinito	Borra toda la pizarra, coge el libro en las manos y escribe el título que acaba de decir
79. P: …Asíntotas y comportamiento al infinito		
80. P: Una de las cosas que estudiamos para representar la gráfica de una función es el comportamiento al		El profesor mueve las manos haciendo movimientos que son la continuación del segmento de gráfica dibujada, sugiriendo la continuación indefinida

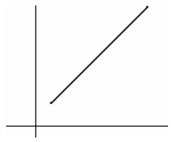
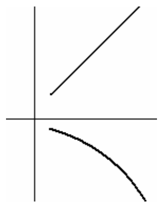
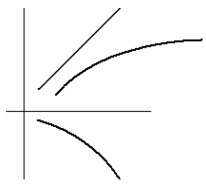
infinito. **¿Qué hace la función cuando la equis tiende al infinito**?, **¿Qué hace la gráfica de la función cuando la equis tiende al infinito? Podría hacer así, tirar a más infinito,**		del segmento dibujado. 
81. P: **Puede hacer así tirar a menos infinito**		
82. P: **También podría crecer y estabilizarse hasta un número, así,**		

Tabla 17. Asíntotas y comportamiento al infinito. Profesor A

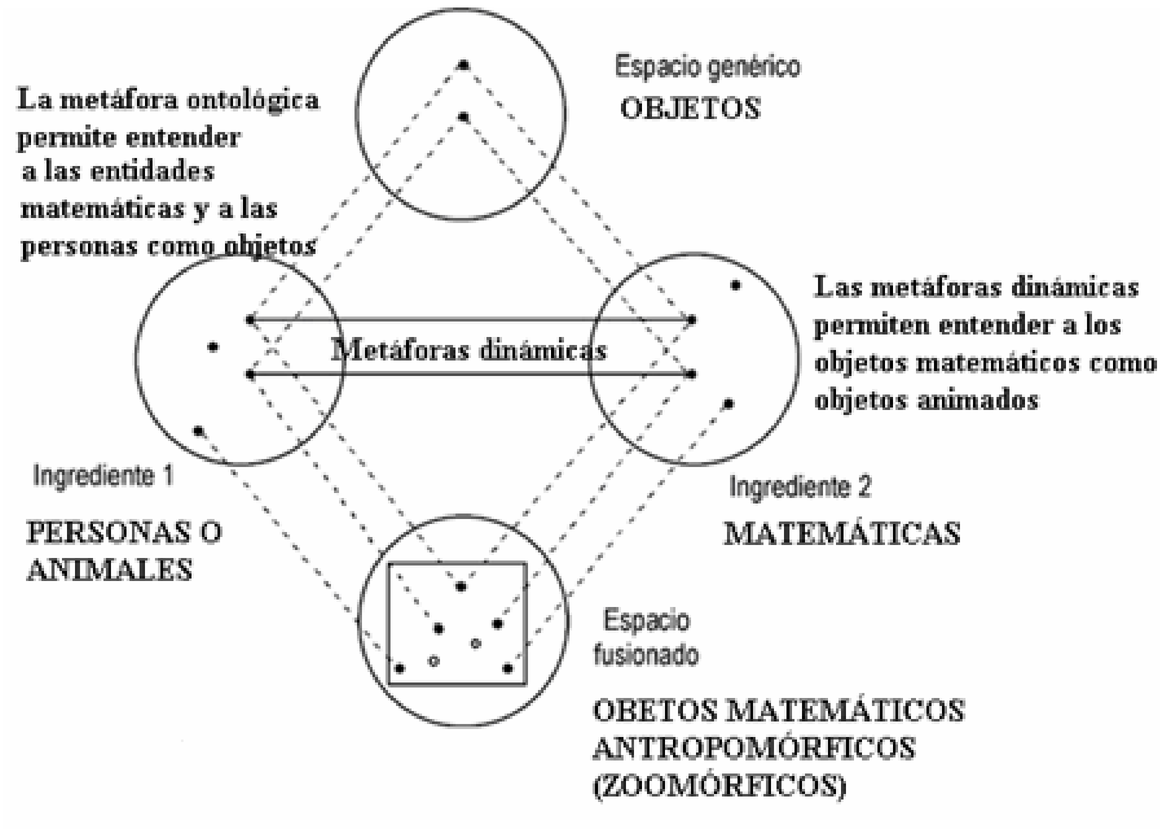


Figura 12. Fusión conceptual zoomórfica

También podemos rastrear este tipo de fusiones conceptuales en el profesor *B.* El siguiente fragmento de trascripción muestra como el profesor mientras calcula el dominio de la función, se refiere a la "*x*" como una cosa con cualidades físicas (crecer, se hace grande o pequeña)

Configuración didáctica: Cálculo del dominio

TRASCRIPCIÓN	PIZARRA	OBSERVACIONES
… 197. P: Y ahora, aquí de qué se trata, de hacer la equis, ¿cuál es **el valor más pequeño que puede tomar la equis**? 198. A: El uno	Tabla de crecimiento y decrecimiento *x*	

199. P: No		
200. A: Cero coma cinco		
201. P: No, la equis		
202. A: Dos		
203. P: No		
204. P: En qué valor yo le puedo comenzar a dar valores a la equis, ¿cuál **es el valor más pequeño?**		El profesor con un gesto señala la parte más a la izquierda de la gráfica en la pizarra, para indicar el menos infinito, y luego lo escribe en la tabla
205. A: menos infinito	*x* | -∞	
206. P: Y **comenzaría** en menos infinito, ¿**dónde acabaría**?		El profesor de nuevo pregunta a sus alumnos, y hace un gesto con la mano para indicar el punto de inicio y el posible recorrido
207. P: ¿Cuál es **el valor más grande** que le puedo dar a la equis?	*x* | -∞ + ∞	El profesor pregunta a sus alumnos y señala el punto de más infinito para sugerir la respuesta
208. A: Infinito …		

Tabla 18. Cálculo del dominio. Profesor B

Esta fusión conceptual de tipo también se puede observar en 95-98 en la trascripción del profesor *C*, que además refuerza con gestos para complementar las ideas:

95. **P: Crecerá mucho más rápidamente el denominador que el numerador**, Por lo tanto…a ver por favor…

96. P: Habíamos quedado que si el grado del denominador es superior al grado del numerador, cuando ***x* se hace grande**, **crece mucho más rápido el denominador que el numerador**, por lo tanto será mucho mayor, será mucho mayor el denominador a medida que **la *x* crezca**, que vaya tomando valores grandes

97. P: Será **mucho mayor** el denominador que el numerador…

98. P**: Cada vez se hará más pequeño**

Figura 13. Panorámica de la clase del profesor C cuando sugiere la fusión conceptual "zoomórfica"

4.2 RESPUESTA A LA 3ª PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN

¿Es consciente el profesor del uso que ha hecho de las metáforas en su discurso y hasta qué punto las tiene controladas?

A los profesores *A*, *B*, *C* y *D* se les grabó una de sus clases en su lugar de trabajo habitual y posteriormente se les hizo una entrevista semiestructurada. A los profesores *D* y *F* se les pidió que explicaran a los dos entrevistadores cómo explicarían a sus alumnos la representación gráfica de una función y después se les se les hizo también una entrevista semiestructurada.

En las transcripciones de su explicación de la representación gráfica de funciones se pueden observar, entre otros, los siguientes hechos significativos: 1) El profesor usa de diferentes metáforas en su discurso (metáforas orientacionales, la asíntota como una barrera, animación de los objetos matemáticos, etc.) 2) Utiliza un discurso dinámico, acompañado de gestos con sus manos, para explicar los componentes estáticos de la gráfica. En su discurso, la metáfora "La gráfica de una función se puede considerar como la traza que deja un punto que se mueve sobre la gráfica" está presente en frases como "viene por aquí", "pasa por…", etc.

En las entrevistas se pudo observar:

1) Que el nivel de consciencia de los profesores respecto de las expresiones metafóricas que utilizaban era muy bajo.

2) Cuando se les hizo observar las expresiones metafóricas que estaban utilizando se dieron cuenta de que efectivamente lo hacían.

3) Al usarlas de manera inconsciente no había ningún control sobre ellas (por ejemplo, alertar de las inferencias incorrectas que se podían derivar de la metáfora conceptual subyacente a las expresiones metafóricas).

4) Cuando se les preguntó que valoraran el efecto de dichas expresiones metafóricas sobre la comprensión de los alumnos, la valoración de todos ellos fue que las expresiones metafóricas facilitaban la comprensión de los alumnos.

5) Cuando se les preguntó que valoraran los posibles inconvenientes del uso de dichas expresiones metafóricas en la comprensión de los alumnos, la valoración de los profesores (*A*, *B*, *C* y *D*) fue que dichas expresiones no presentaban ningún inconveniente o peligro. En cambio, la valoración del profesor *E* fue que, si no se complementaban con explicaciones más rigurosas, podían ser peligrosas para la comprensión de los alumnos.

A continuación siguen algunos segmentos de las clases y de las entrevistas de los profesores *C*, *E* y *F* que sirven para justificar las afirmaciones anteriores.

4.2.1 Profesor *C*

En la trascripción del profesor *C* se pueden observar, entre otros, los siguientes hechos significativos: 1) El profesor usa diferentes metáforas en su discurso. 2) Utiliza un discurso dinámico, acompañado de gestos con sus manos, para explicar los componentes estáticos de la gráfica. En su discurso, la metáfora "La gráfica de una función se puede considerar como la traza que deja un punto que se mueve sobre la gráfica" está presente en frases como "viene por aquí", "pasa por cero cero", etc. 3) Por otra parte, da por supuesto que los números son objetos que crecen y que pueden aumentar de tamaño, al usar frases como: "el denominador crece más rápido", "*x* se hace grande", "la *x* crece", etc. 4) El crecimiento y decrecimiento de la gráfica se explica en términos visual-dinámicos con frases como: "por aquí decrece porque viene así". Se trata de una clase bastante parecida a la que impartió el profesor *A*.

Algunos segmentos de esta trascripción ya se han comentado en el apartado anterior, por lo que aquí nos limitaremos a comentar, a título de ejemplo, el siguiente segmento en el que dicho profesor utiliza metáforas dinámicas:

Configuración didáctica: Esbozo de la gráfica de una función

TRANSCRIPCIÓN	PIZARRA	OBSERVACIONES
…		
69. P: Pues ahora vamos a ver el esbozo de la función bien hecho, ahora, pues, sí que tenemos en menos uno una asíntota ¡eh!		Después de haber hecho todo el estudio analítico de la función $y= 2x/(x^2-1)$ (dominio, puntos de corte con los ejes, crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos, concavidad y convexidad, puntos de inflexión y asíntotas) el profesor se dispone a dibujar la gráfica.
70. P: ¡A ver! Fijaos, hemos dicho, bueno		El profesor empieza dibujando los ejes de

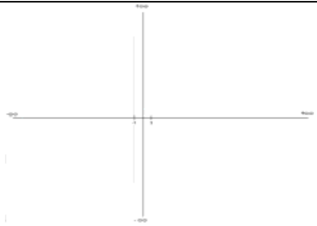
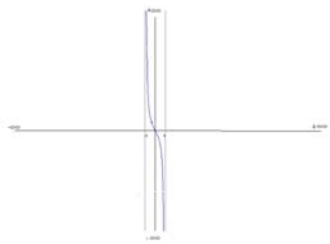
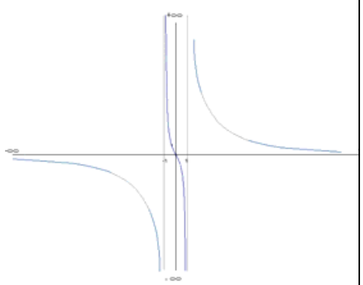
ya veíamos como, venga.		coordenadas y ubica en los dos ejes los signos $+\infty$ y $-\infty$. A continuación traza las asíntotas verticales que cortan el eje de abscisas en 1 y –1
71. P: La asíntota vertical eh!.. a la derecha de la asíntota vertical, **es coger de más infinito, infinito y pasa por cero cero** que tenemos un punto de inflexión que es donde hay un cambio y da una cosa así.		El profesor empieza a trazar la parte central de la gráfica de la función. Empieza por más infinito y termina en menos infinito.
72. P: Y luego **aquí viene así**		Hace el trazado de la parte izquierda de la gráfica y luego el de la parte derecha de la gráfica y mueve las manos para reforzar sus comentarios sobre la gráfica
73. P: Y **aquí viene así**		
74. P: Eh! ...		Señala la gráfica
75. P: Comparad la coherencia…… de este esbozo con todo lo que hemos dicho antes, eh!…		
76. P: Fijaos que a veces…vamos, con lo dicho hasta ahora……eh!… hacéis el proceso bien y después hacéis el esbozo una cosa rara.		Sigue explicando cosas de clases anteriores y recordando algunas gráficas trabajadas anteriormente en clase

Tabla 19: Esbozo de la gráfica de una función. Profesor *C*

Con el objetivo de conocer si el profesor *C* hacía uso de las metáforas de una manera controlada, y si era consciente de los efectos que produce su uso en el aprendizaje de los alumnos, se le realizó una entrevista semiestructurada que también fue grabada en vídeo. La entrevista duró 30 minutos, de los cuales se transcriben a continuación tan sólo algunos fragmentos.

TRANSCRIPCIÓN	OBSERVACIONES
1. E. En el vídeo que he visto dices frases como: Aquí viene así, viene por aquí, pasa por cero cero, equis crece, va por aquí, crece más el numerador que el ¡denominador,! Y cuando lo haces indicas movimientos con tus manos,... ¿qué quieres expresar con eso?	El objetivo de esta pregunta es determinar si el profesor es consciente del uso de metáforas comentadas anteriormente en su discurso
2. P. ¡Hombre! supongo que es absolutamente inconsciente, porque eso yo no lo pienso, yo no digo; me voy a mover de esta manera o de la otra, ¿qué hacer?, yo creo que son gestos para reforzar la idea que expresas,.. para reforzarla, ¡no! Es decir; viene por aquí, pues, debería señalar por donde pasaría la función, siguiendo, !eh! imaginando que tu sigues la función dando valores a la equis de manera creciente, pues, cual sería la imagen o el trazado que seguiría la curva ¡no!, me parece, son cosas que, ¡eh! claro no me las he planteado, sí que gesticulas pensando que refuerzas lo que tu estas diciendo ¿no? esto está, esto está claro,. Porque si no sería también muy aburrido dar un discurso sin, no, no llegará de la misma manera, esto está claro	Deja en evidencia que lo hace de manera totalmente inconsciente, y asume que los gestos refuerzan una idea, el profesor en su clase ha explicado algo estático en términos dinámicos, lo que supone una metáfora que no tiene controlada y no es consciente de sus consecuencias.
3. E: No, no estático tampoco, pues, sería…	

4. P: Tratar de reforzar, tratar de reforzar la idea, claro.	
5. **E: Mueves las manos cuando explicas algunas partes de la gráfica y cuando dices: "la equis crece", "el numerador crece más que el denominador", ¿siempre explicas las gráficas de esta manera? o sea, ¿siempre has explicado las gráficas moviendo las manos y con esta clase de expresiones "viene aquí", "aquí pasa por aquí"?**	El objetivo es saber si es habitual en él este tipo de acciones.
6. P. Sí	El profesor reconoce que el uso de gestos y el uso de este tipo de metáforas forman parte habitual de su práctica profesional.
7. **E: ¿Podría uno explicar el gráfico estático sin movimiento?, ¿crees qué es mejor para ellos darle un poco de movimiento?**	El objetivo de esta pregunta es saber qué motivos son los que le llevan a explicar las gráficas en términos dinámicos, en lugar de hacerlo de manera estática
8. P: Sí, sí por supuesto, claro, claro, yo creo que, hay un eslogan en la moda que dice" la arruga es bella" es un eslogan publicitario para la moda, pues, yo creo, yo decía entonces ¡el dinamismo es bello! Atrae, es bello, en clase no es lo mismo un discurso quieto y tal, y decir las cosas muy bien dichas que ver algo que se mueva, al alumno si hay algo que se mueva, eso lo mira más, entonces en cualquier sección intento, no puedes abusar,.... pero si hay algún momento que tu traes alguna cosa que se mueve, eso centra más la atención, por ejemplo en geometría ,...pues, yo traía	Corrobora lo que ya ha dicho antes: su objetivo es "facilitar la comprensión del concepto" y trata de justificar su uso con argumentos relativamente triviales. No obstante, entre estos argumentos destaca la importancia que da este profesor al aspecto dinámico como elemento que puede facilitar la atención de los alumnos

algunos chavales a propuesta de aquel libro rojo de la Emma Castelnuovo, de las transformaciones de las figuras, de cualquier figura, de los cuadriláteros,... bueno entonces eso se construye con unas varillas, se pueden ir moviendo, hace años yo lo construí, pues con esta idea, el dinamismo atrae,... y entonces hay que introducir elementos de éstos, de que el alumno vea que hay cosas que se mueven, el alumno, !a ver qué pasa! Por lo menos por unos momentos se interesa a ver qué pasa.	
9. **E: ¿Y no has pensado qué de pronto eso les traiga algún error conceptual, de interpretación?**	El objetivo de esta pregunta es cuestionar su discurso
10. P: No, ¡qué provoque!, el hecho de que, algún error conceptual. ¿Qué provoque algún error conceptual, cómo, cómo cuál por ejemplo?	Él no tiene idea de qué clases de errores le estoy hablando, lo cual pone de manifiesto que este profesor no es consciente de que el uso de metáforas, además de facilitar la comprensión, también puede dificultarla,
11. **E: Por ejemplo que un punto no se mueve, que un punto es…**	El objetivo es poner un ejemplo de las dificultades que pueden aparecer por la interpretación literal de la metáfora.
12. P: No, el punto no se mueve, la función tampoco, pero, lo ves, cuando dices que pasa, no es como un tren que pasa, sino que el trazado pisa esos puntos, yo no lo he pensado, no creo que esto, no he detectado que las confusiones vengan por aquí, no lo he pensado, no creo, no, no...	Si bien se cuestiona por un momento su discurso, en el fondo sigue considerando que el uso de las metáforas facilita la comprensión y no da importancia a las posibles dificultades que pueda generar

Tabla 20. Fragmento entrevista profesor *C*

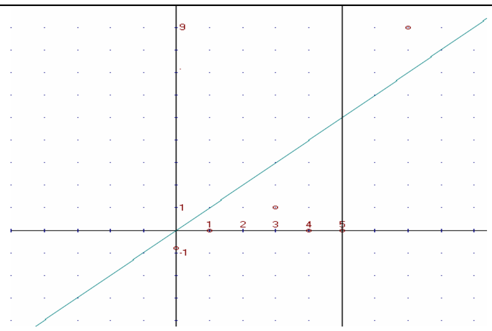
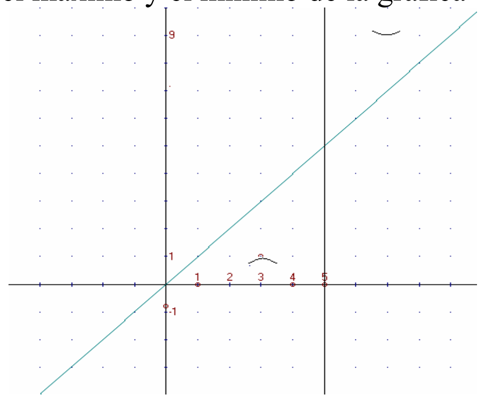
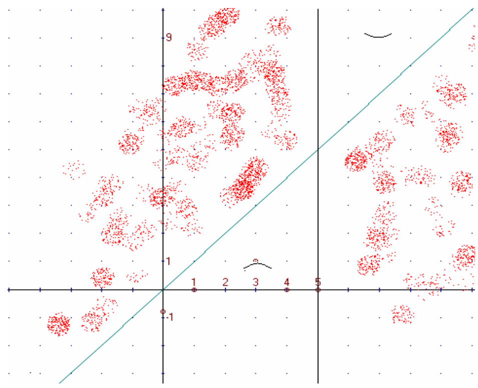
En esta entrevista podemos observar como el profesor *C* no es consciente de que usa metáforas dinámicas y, por tanto, no las controla. Como consecuencia de las preguntas del entrevistador, el profesor *C* se da cuenta de que usa este tipo de metáforas, pero considera que su uso facilita la comprensión y no da importancia a las posibles dificultades que pueda generar en sus alumnos. De hecho, considera que el uso de metáforas no genera ningún tipo de error conceptual en sus alumnos.

4.2.2 Profesor *E*

Una vez constatado que los profesores usaban metáforas en su discurso cuando explicaban la representación gráfica de las funciones en sus clases, decidimos cambiar el contexto en el que los profesores tuvieran que explicar la representación gráfica. En el caso del profesor *E* se le solicitó que explicase a los dos entrevistadores como explicarían la representación gráfica de funciones a sus alumnos. Si bien los oyentes hipotéticos debían ser sus alumnos, los "oyentes" presentes eran los entrevistadores. Nuestra suposición era que, en este caso, disminuiría el número de metáforas, pero que estas seguirían presentes en el discurso del profesor, como así fue.

En la trascripción profesor *E* se pueden observar, entre otros, los siguientes hechos significativos: 1) El profesor usa diferentes metáforas en su discurso (proyección metafórica del esquema parte-todo, la asíntota como barrera, metáforas orientacionales, etc). 2) Utiliza un discurso dinámico, acompañado de gestos con sus manos, para explicar los componentes estáticos de la gráfica. En su discurso, la metáfora "La gráfica de una función se puede considerar como la traza que deja un punto que se mueve sobre la gráfica está presente en frases como "pasa por …", etc.

TRASCRIPCIÓN	OBSERVACIÓNES
… 2. P: Ahora que ya hemos visto todos los pasos anteriores, lo primero que voy a hacer es dibujar el dominio, **que el dominio es toda la recta real menos el cinco**, vale, luego vamos a dibujar las asíntotas, creo que es lo mejor, hay una asíntota vertical en equis igual a cinco y **hay una asíntota oblicua que pasa por el origen**, entonces **la**	El profesor dibuja el sistema de ejes coordenados, los puntos de corte, el máximo, el mínimo y las asíntotas

función no puede pasar, no puede atravesar ni esta asíntota ni esta otra asíntota. Ahora vamos a dibujar los puntos de corte, en el eje de abscisas está el punto uno, cero, vamos a marcarlo con una redonda, y el cuatro cero, y en el eje de ordenadas cero menos cuatro quintos, que debe estar más o menos por aquí, entonces en el punto equis igual a tres y en equis igual a siete tenemos en equis igual tres un máximo y su imagen es uno, como es un máximo, de momento, vamos a hacer este dibujito para saber que es un máximo y en el equis igual a siete la imagen vale nueve, estaría por aquí más o menos, como es un mínimo lo contrario y lo pondré aquí, lo ponemos aquí, vale!	 Luego determina con marcas icónicas el máximo y el mínimo de la gráfica 
3. P: Entonces la función, ¿cómo se comporta la función en este lado de aquí?, **no puede atravesar este eje** en todo esto de aquí no estará dibujada y **no podrá atravesar esta asíntota** y en todo esto de aquí tampoco estará dibujada **porque no puede atravesar esta asíntota** de aquí, entonces nos quedará esta región y esta región de aquí arriba…vale,	El profesor con gestos con la mano señala las partes que hemos sombreado con rojo para determinar las regiones en las que la gráfica no estará dibujada 
4. P: La función en menos infinito da menos infinito, **es una función que desciende**, entonces la dibujamos de tres a cuatro, ¡ay! de tres hasta cinco **tiene que pasar por los puntos de corte** que son este punto este punto y	Ahora el profesor dibuja primero la gráfica desde menos infinito hasta la asíntota x = 5 y después desde dicha asíntota hasta más infinito

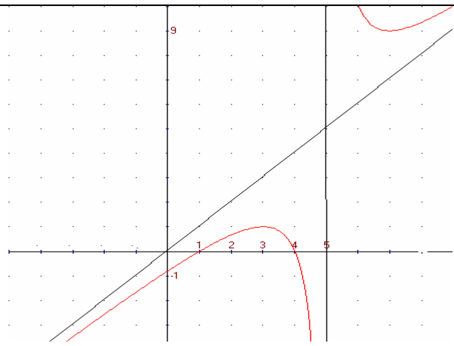
por este de aquí, aquí es decreciente y como esta recta es una asíntota tenderá aquí al infinito y esto de aquí lo mismo, esta función sabemos que es de esta manera y no de una manera así, porque en el intervalo de menos infinito a tres no hay, si miramos la tabla de concavidad, o la tabla de máximos y mínimo y crecimiento no hay máximos, mínimos ni punto de inflexión, no hay nada, vale y **en esa función en la parte de aquí en la parte de la derecha,** pues de cinco al siete es decreciente, vendría por aquí y del siete a infinito es creciente vendría por aquí, puntos sucesivos, y para acabar comprobaríamos con la tabla de concavidad y convexidad que está bien dibujada, de menos infinito a cinco la función es convexa, yo diría, entonces es así, está bien y de cinco a infinito no sé ve aquí, porque no hay sitio pero la función es cóncava, no creo que tampoco no vamos a estudiar la simetría, el dibujo está un poco sucio porque hay poco sitio, pero bueno, esto sería.	

Tabla 21. Primer fragmento de la entrevista al profesor *E*

Cuando al profesor *E* se le pregunta qué entiende por crecimiento, decrecimiento, etc., éste responde con explicaciones en las que no usa metáforas (que no sean fosilizadas)

TRASCRIPCIÓN	OBSERVACIÓNES
18. E1: Ahora, ¿qué significa que una curva crece o decrece?	
19. P: Que su derivada es positiva, o sea que, pues a medida que va aumentando el valor de la *x* el valor de la *y* aumente	El profesor utiliza un lenguaje matemático adecuado para dar su respuesta

Tabla 22. Segundo fragmento de la entrevista al profesor *E*

En cambio cuando se le pregunta sobre lo qué quiere que los alumnos entiendan, el profesor *E* introduce metáforas dinámicas en su respuesta:

TRASCRIPCIÓN	OBSERVACIÓNES
20. E1: ¿Qué quieres que tus alumnos entiendan cuando les dices que una función crece o decrece, que es lo que queréis que los alumnos entiendan, comprendan de una función creciente y decreciente?	
21. P: Yo sólo te digo una cosa, aparte de la representación de la función o sea, para representar una función no les explicaría lo que es crecimiento y el decrecimiento, sino que igual antes, probablemente antes de hacerla les diría que si una función crece quiere decir lo que he dicho antes **que a medida que nos movemos en el eje de las *x* la *y* aumenta** o sea, si tenemos un incremento en el eje de las *x* es diferente al incremento en eje de la *y* que también es positivo, eso es, como en tiempo velocidad, cosas de física…	El profesor hace gestos con la mano para indicar el aumento y movimiento de las X y de las Y

Tabla 23. Tercer fragmento de la entrevista al profesor *E*

Por otra parte, cuando el entrevistador le sugiere aumentar la carga del lenguaje metafórico en sus explicaciones para los alumnos, el profesor *E* manifiesta su acuerdo y no le ve ningún tipo de problema:

TRASCRIPCIÓN	OBSERVACIÓNES
29. E2: ¿Y si yo le dijera a los alumnos que en equis igual a cinco hay una asíntota vertical quiere decir que la función se dispara hacia arriba o hacia abajo, lo encontrarías muy poco riguroso? En equis igual a cinco tiene una asíntota vertical quiere decir que la función se dispara alrededor de equis igual a cinco. Se dispara, bien hacia arriba o bien hacia abajo, depende de los casos, ¿si te parece que esto sería poco riguroso, pero tal vez sería intuitivo para los alumnos la idea esta? 30. P: Me parece bien, es una manera fácil, práctica. 31. E2: Por ejemplo decir que una asíntota oblicua quiere decir que cuando los valores se van a la izquierda prácticamente ya sabemos como es, que es casi igual que una recta y cuando se va a la derecha prácticamente ya sabemos que se comporta como una recta,... 32. P1: Si para una primera aproximación estaría de acuerdo	El entrevistador 2 interviene y hace esta pregunta con el objetivo de ver si el profesor está de acuerdo con usar un discurso claramente metafórico en las explicaciones dirigidas a los alumnos

Tabla 24. Tercer fragmento de la entrevista al profesor *E*

A continuación cuestionamos su discurso y le hacemos notar que ha utilizado bastantes expresiones metafóricas, que además acompaña con gestos. El profesor al principio muestra una actitud de sorpresa, y reconoce que los gestos son inconscientes, y no le queda muy claro lo de las expresiones metafóricas. Ahora bien, considera que ello facilita que el alumno no se aburra. Después le hacemos notar que su discurso ha tenido un importante componente dinámico, ante lo cual el profesor *E* de nuevo manifiesta sorpresa y no es consciente que su discurso esta impregnado de una estructura metafórica dinámica, por último se le pregunta si este tipo de discurso puede crear algún tipo de confusión en los alumnos, a lo cual responde que no, ya que cree que facilita la comprensión de los alumnos

TRASCRIPCIÓN	OBSERVACIÓNES
33. E1: Cuando explicas dices palabras como aquí viene así, pasa por, atraviesa el eje, y mueves las manos, ¿qué quieres explicar con eso?, ¿por qué eso?	el objetivo es ver si el profesor es consciente de las expresiones metafóricas que dice al representar la gráfica
34. P: ¿Moviendo las manos?	El profesor se sorprende con esta pregunta
35. E1: ¿Y por qué estas palabras, pasa por, viene por aquí, atraviesa el eje, la gráfica pasa por?	
36. P: Porque este punto pertenece a la gráfica, no sé como decir, que la gráfica de la función pasa por este punto. ¡Y mover las manos¡, no sé, supongo que es de cada uno, me parece bien la gesticulación	El profesor simultáneamente justifica el lenguaje dinámico en base al estático, y se manifiesta a favor de la gesticulación
37. E1: ¿Qué quieres conseguir con esto?	De nuevo el entrevistador 1 le pregunta por el posible sentido de este tipo de lenguaje en el aula
38. P:Que el chaval no se aburra	El profesor da a entender que lo utiliza con una cierta intención didáctica
39. E1: Y has hecho un discurso en términos dinámicos para explicar algo estático. ¿Crees qué esto pueda, de alguna manera, repercutir en los conceptos que el alumno hace suyos de la representación gráfica de funciones?	El objetivo de esta pregunta es ver si es conscientes de los efectos metafóricos que se pueden producir en los alumnos
40. P: ¿En términos dinámicos?	El profesor se sorprende y parece no reconocer la estructura dinámica utilizada

41. E2: Sí, todo el estudio previo es estático	Se le aclara que toda la información previa a la representación era de tipo estático, y que él, al interpretar esa información, lo ha hecho en forma dinámica
42. P: ¿Sí?	
43. E2: La gráfica es el conjunto de puntos de coordenadas equis y su imagen, en cambio aunque lo has hecho poco, para hacer la representación gráfica has introducido aspectos gestuales y comentarios de que pasa por aquí, atraviesa y tal, que es un lenguaje y una gesticulación más bien dinámico en comparación a todo lo anterior que es más bien estático. Tú a lo mejor lo has hecho un poco sin darte cuenta, entonces ahora que te lo hacemos observar, ¿tú crees que vale la pena acentuar este aspecto dinámico y si esto puede afectar la comprensión del alumno o dificultarla?	Se le aclara la pregunta y se le hace notar que ha explicado la representación en términos de metafóricos dinámicos
44. P: No sé. No entiendo la pegunta	El profesor pone cara de sorprendido y se queda un momento sin palabras y al final opta por decir que no entiende la pregunta
45. E2: Cuándo pones la gráfica dices, por ejemplo, "que la gráfica no atraviesa la asíntota oblicua", "que pasaba por el punto", la gesticulación que has hecho son elementos más bien dinámicos que implica que se empieza por un sitio y vamos desde la izquierda, y ¡vamos!,..!no! entonces estos elementos dinámicos implícitos en tu explicación que están, lo hemos visto. Una cosa sería hacerlo en términos estáticos o en términos dinámicos, entonces	De nuevo se le aclara la pregunta

la pregunta sería, si estos elementos dinámicos, que tú implícitamente has estado utilizando, si crees que valía la pena. para una mejor comprensión del alumno, exagerarlos o acentuarlos más o si bien habría que disminuirlos, porque en definitiva estamos hablando de algo estático, ¿esto puede facilitar la comprensión o la puede dificultar?	
46. P: Hombre yo creo que sí, lo único que se pretende es que el chaval dibuje la función lo podría hacer en plan de, esto lo dibujo así, para el crecimiento subo bajo, de hecho va bien que entienda lo que está haciendo y que sepa que si los puntos de corte son éstos la función tiene que pasar por este punto, no es que sea un punto que lo dibuja, que una parte del dibujo, sino que tiene que pasar, que tiene una dinámica que esta representando una función	El profesor reconoce que podría ser útil utilizar este tipo de lenguaje, además lo utiliza de nuevo en su respuesta como si no estuviera muy consciente de su carácter metafórico
47. E1: ¿Y tú crees qué pueda crear una confusión con los alumnos estos movimientos dinámicos?	El entrevistador 1 le cuestiona los posibles efectos de este tipo de lenguaje
48. P: ¿Confusión? No, yo igual esto que he dicho de la aceleración, de la velocidad eso si, pero esto que he hecho aquí no	El profesor de nuevo parece no reconocer el carácter metafórico de sus expresiones, y no da crédito a la idea de una posible mala interpretación de los conceptos por parte de los alumnos
49. E2: Por ejemplo, cuando dices que la x aumenta, hay un momento en que dices este término, ¿no crees que el alumno crea que la x es como una persona que crece y disminuye?	El entrevistador 2 le pone un ejemplo con el objetivo de concretizar más la pregunta anterior

50. P: Hombre la otra manera es explicarlo, se podría explicar, a la manera de una función continua, la idea intuitiva es cuando no levantas el boli, ¿no?. ¿Y cuándo una función es creciente?, pues cuando va hacia arriba, ¿y cuándo es decreciente?, cuando va hacia abajo, eso no es el crecimiento o el decrecimiento, para hacerlo alguna vez podría estar bien, pero no sé creo que habría que darle, una definición. Que es continua cuando no levantas el boli, está bien como idea, pero.. también tiene que saber que hay una derivada positiva, que el límite de la función son los incrementos, que aquí la derivada es…y teniendo el estudio del crecimiento y decrecimiento que hacemos y la convexidad se supone que ha hecho un estudio de la derivada y el chaval, que una función sea creciente y el papel que juega la derivada es una cosa que debe tener clara, entonces no me parece que introducirle elementos dinámicos no me parece una carga muy excesiva, yo creo que más bien ayudaría. ……………………………..	El profesor también da un ejemplo para matizar la pregunta y su respuesta, y ahora parece que entiende bien el sentido de la pregunta

Tabla 25. Cuarto fragmento de la entrevista al profesor *E*

En esta entrevista también podemos observar como el profesor *E*, al igual que el profesor *C* no es consciente de que usa metáforas dinámicas y, por tanto, no las controla. Como consecuencia de las preguntas del entrevistador, el profesor *E* se da cuenta de que usa este tipo de metáforas, pero considera que su uso facilita la comprensión y no da importancia a las posibles dificultades que pueda generar en sus alumnos.

4.2.3 Profesor *F*

Al profesor *F* también se le solicitó que explicase a los dos entrevistadores como explicaría la representación gráfica de funciones a sus alumnos. Si bien los oyentes hipotéticos debían ser sus alumnos, los "oyentes" presentes eran los entrevistadores. Este hecho hizo que el profesor *F*, a diferencia del profesor *E*, realizara un discurso dirigido a "colegas" y no tanto a sus hipotéticos alumnos. Nuestra suposición era que, en este caso, con más razón disminuiría el número de metáforas, pero que estas seguirían presentes en el discurso del profesor, como así fue.

En la trascripción del profesor *F* (ver anexo 4) también se pueden observar, entre otros, los siguientes hechos significativos: 1) El profesor usa diferentes metáforas en su discurso (proyección metafórica del esquema contenedor, parte – todo, animación de los objetos matemáticos, la asíntota como barrera, metáforas orientacionales, etc.). 2) Utiliza un discurso dinámico, acompañado de gestos con sus manos, para explicar los componentes estáticos de la gráfica. En su discurso, la metáfora "La gráfica de una función se puede considerar como la traza que deja un punto que se mueve sobre la gráfica" está presente en frases como "pasa por …", etc.

TRASCRIPCIÓN	OBSERVACIÓNES
1. P: Recordemos que es una función racional, que es cociente de dos polinomios con coeficientes enteros, y tener en cuenta que como polinomios que son los exponentes son naturales, el dominio de la función, que ya tenemos calculado, **es el conjunto de puntos** donde está definida y tener presente siempre **que salvo** en el punto cinco la función está definida excepto en este punto.	El profesor comienza su explicación comentando la información que se encuentra en la pizarra de la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 4}{x - 5}$

Tabla 26. Primer fragmento de la entrevista al profesor *F*

En el siguiente fragmento vemos un discurso marcado por las expresiones dinámicas

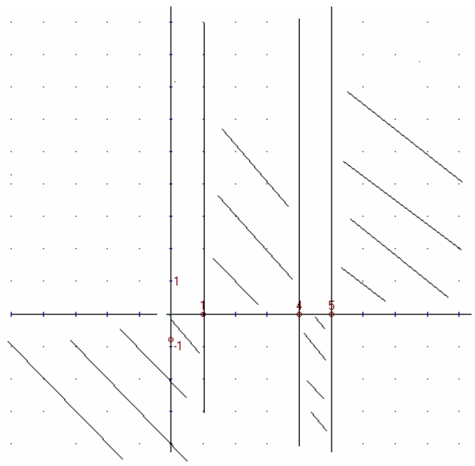
TRASCRIPCIÓN	OBSERVACIÓNES
4. Me parece interesante también tener en cuenta el estudio del signo de esta función, situar los puntos uno y cuatro y el cinco aquí, y hacer el estudio parcial de numerador y denominador para tener en cuenta **el recorrido de la gráfica por donde va circular ésta**, entonces tomamos puntos, un punto por ejemplo el cero nos daría positivo, aquí sería negativo, y positivo en adelante, anterior sería positivo, y siempre probando con un punto anterior a cinco negativo, entonces aquí nos quedaría negativo, positivo, negativo, y positivo, ¿y qué nos indica esto?, pues en un paso previo y preeliminar nos indica que la gráfica **va a pasar por aquí**, ahora sería un primer paso preeliminar con el signo de *f*(*x*).	El profesor realiza el siguiente esquema para delimitar las regiones por las cuales puede "pasar" la gràfica (zona rallada). 

Tabla 27. Segundo fragmento de la entrevista al profesor *F*

En el siguiente fragmento podemos observar algunas metáforas objetuales

TRASCRIPCIÓN	OBSERVACIÓNES
7. (…) también pensaría en aumentar el coeficiente del numerador, creo que también sería interesante para ver si corta necesariamente la función o simplemente respeta su posición, **simplemente se estira**, cambiaría el coeficiente principal del denominador por cualquier otro, y haríamos estudios con él, por ejemplo con el programa Derive para analizar las diferentes posiciones, se podría tener esta gráfica, siempre manteniendo la misma posición, y después tener en cuenta que como función racional la diferencia entre el numerador y el denominador es de un grado, entonces siempre habrá asíntotas	El profesor hace comentarios sobre cómo podría ampliar la reflexión de los alumnos sobre la representación gráfica de las funciones. Cuando comenta que la función se estira por el hecho de haber aumentado el coeficiente del numerador acompaña su explicación con un movimiento de la mano

oblicuas que es lo más interesante de esta función.	

Tabla 28. Tercer fragmento de la entrevista al profesor *F*

En el siguiente trozo de trascripción podemos observar la idea de asíntota como barrera

TRASCRIPCIÓN	OBSERVACIÓNES
11. ¡Ya! De todas maneras tener en cuenta que **el concepto de asíntota es una línea, a la que la grafica de la función se aproxima, se va aproximando pero no llega a tocarla**, entonces una forma muy aconsejable sería tomar ciertos valores próximos a los puntos, a ver particularmente en el cinco, tomaríamos uno de esos valores que ya a lo mejor los hubiéramos tomado al calcular las asíntotas, al calcular la asíntota vertical, hubiéramos visto que al acercarnos por derecha e izquierda con diferentes valores, con cuatro con nueve o cinco con uno, bueno acercándonos a cinco por la derecha cinco con uno, cinco cero cero uno, **cada vez los valores se nos disparan más hacia el infinito en este caso, y al acercarnos por la derecha nos acercaría a menos infinito** haciendo aproximaciones del número en alguna tabla aproximativa con valores como estos.	El profesor hace gestos para indicar hacia dónde "se dispara la gráfica" También escribe la notación de los límites laterales para acompañar su explicación $\lim_{x\to 5^+} = f(x)$ $\lim_{x\to 5^-} = f(x)$

Tabla 29. Cuarto fragmento de la entrevista al profesor *F*

Cuando al profesor *F* se le pregunta qué entiende por crecimiento, decrecimiento, etc., éste responde con explicaciones en las que no usa metáforas (que no sean fosilizadas)

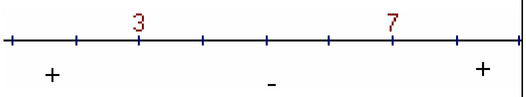
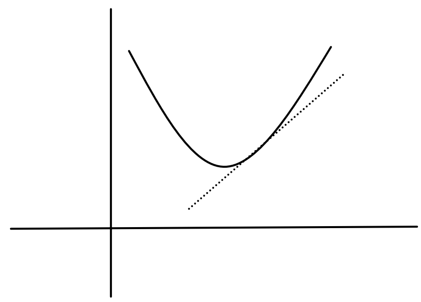
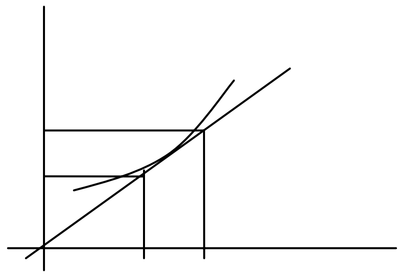
TRASCRIPCIÓN	OBSERVACIÓNES
14. ¿Cómo saber qué la gráfica crece o decrece?	El objetivo de esta pregunta es saber si el profesor utiliza metáforas orientacionales para describir este concepto
15. P: La gráfica crece o decrece, a ver, a partir de aquí, ésta es la primera derivada, obtenemos los posibles extremos relativos, ¡no! los posibles no quieren decir que lo sean, al principio tendríamos un valor de tres y otro del siete, haríamos un estudio del signo y sobre este factor daríamos puntos para comprobar el signo de la función, probaríamos aquí y nos daría positivo, y negativo y positivo, entonces la función sería creciente, de menos infinito a tres, sería el intervalo de crecimiento y el de decrecimiento sería desde el siete exceptuando el cinco que no entra en la definición de la gráfica	El profesor acompaña su explicación escribiendo lo siguiente en la pizarra $y = 3$ $y = 7$ 

Tabla 30. Quinto fragmento de la entrevista al profesor *F*

En cambio, cuando se le pregunta sobre lo qué quiere que los alumnos entiendan, el profesor *F*, de entrada, en su respuesta introduce metáforas que producen la animación de los objetos matemáticos en su respuesta:

TRASCRIPCIÓN	OBSERVACIONES
25. E1: Y cuando le explicas esto al alumno qué quieres que él entienda por crecimiento, ¿cuál es la idea que tú quieres qué el alumno entienda de cuando una función crece o decrece?	El objetivo de esta pregunta es ver si el profesor, de entrada, formula lo que pretende conseguir de sus alumnos en términos metafóricos
26. P: **Que a medida que crece en el eje de las abscisas en valor, la imagen crece en tamaño también**	El profesor responde en términos metafóricos y al mismo tiempo hace gestos con la mano indicando desplazamiento sobre el eje y aumento

	de tamaño
27. E1: ¿Crees qué es más fácil explicarle de una manera intuitiva a un alumno el crecimiento y decrecimiento o es mejor por entornos, o sea, en término estáticos o en términos generales dinámicos?	El objetivo de esta pregunta es saber como justifica el profesor la utilización de un lenguaje dinámico en la representación de las gráficas
28. P: Creo que un poco las dos cosas, de todas maneras, no sé, creo que más juego viene con la concavidad y convexidad, si intentas explicar concavidad y convexidad por entornos, se suelen perder más y creo que puede que tengas razón en ese momento que al ser más intuitivo explicarles el concepto de ecuación de recta tangente a una curva, y decir que la gráfica de la función **queda por encima o por debajo de ella,** de todas maneras por entornos se puede entender también, depende de los niveles y el público que tu tengas, es evidente también que a través de una definición no formal, no muy formal, se puede más o menos intuir la idea, pero es posible que a través de una gráfica imaginen mejor el crecimiento, tienes razón, depende un poco también del público que tengas	El profesor es partidario de combinar el lenguaje dinámico y el estático, justifica además su respuesta dando el ejemplo de la convexidad y concavidad de una gráfica y hace el esquema siguiente: 
29. E1: ¿Uno viendo una gráfica de una función, de inmediato puede saber si crece o decrece?	El objetivo de esta pregunta es saber si el profesor determina el crecimiento y decrecimiento de la función en términos de metáforas orientacionales
30. P: Con la idea de lo que uno se imagina, crecer intuitivamente, puede que si	El profesor parece reconocer que puede funcionar la metáfora orientacional (aunque no la verbaliza)
31. ¿Qué te imaginas por crecer	

intuitivamente?	Ahora el objetivo es verificar la observación anterior
32. P: ¿Crecer intuitivamente?	
33. E1: Sí	
34. P: Pues, que dados dos valores uno menor que otro, sus imágenes correspondientes sean una mayor que la otra, es decir, que cuando tú tengas un valor sobre el eje de las abscisas, dos y tres, la imagen de este valor sea mayor,… esto sería una función creciente	El profesor responde en términos matemáticos, y lo justifica con el siguiente esquema 
35. E2: Y si yo le dijese al alumno que cuando me voy a la derecha la función va hacia arriba sería más intuitivo que lo que acabes de decir o menos intuitivo.	El objetivo de esta pregunta es saber si el profesor es consciente de la diferencia entre el lenguaje dinámico y el estático
36. P: Te vas…	
37. E2: O sea, que cuando voy a la derecha la función va hacia arriba, tú le has puesto 2, 3, *f* de dos, *f* de tres, yo digo si crece, si me voy a la derecha la función se va hacia arriba ¿te parecería más intuitivo que esto que acabes de decir o menos intuitivo?	El entrevistador 2 matiza un poco más pregunta anterior
38. En principio igual, pero de todas maneras ahora no me atrevo, no me atrevería a darte una respuesta	El profesor empieza a dudar de las ventajas del uso de metáforas
39. E2: ¿Entonces lo ves peligroso, por ejemplo si dijésemos que cuando va a la derecha, la función se va ir arriba?	El objetivo de esta pregunta es especificar las creencias del profesor con respecto de las expresiones metafóricas
40. Ahora, en principio, sí	El profesor tenuemente reconoce que puede traer inconvenientes este tipo de

	expresiones metafóricas

Tabla 31. Sexto fragmento de la entrevista al profesor *F*

En el segmento anterior se observa que el profesor *F*, (1) utiliza metáforas (2) las acepta en el discurso escolar, pero con reservas. Incluso, a instancias de los entrevistadores, llega a reconocer que pueden resultar peligrosas (a diferencia del profesor *C* y *E* que no las ven peligrosas). Esta aceptación con reservas también se observa en otro segmento anterior de la trascripción y también en otro posterior:

Segmento anterior

TRASCRIPCIÓN	OBSERVACIONES
12. E2: Te parece que la idea esta de que la asíntota vertical, decir que alrededor del cinco los valores de la imagen se dispara hacia arriba, hacia abajo, ¿te parecería intuitivo o peligroso contar esto así? ¿Eso que se dispara, lo que tú has apuntado hace un momento, te parece intuitivo o peligroso?	El entrevistador quiere hace esta pregunta con el objetivo de hacer consciente al profesor del lenguaje metafórico que utiliza en la representación gráfica. También pretende ver si le ve ventajas o inconvenientes
13. Habiéndose hecho una serie de pruebas y justificándose que realmente es así, me parece que con tres pruebas, y si el alumno no llega a creérselo, y aumentando significativamente el número de cifras decimales, creo que el alumno puede llegar a entenderlo	El profesor aprueba el lenguaje utilizado y cree que el alumno lo entenderá de esta manera, siempre y cuando se combine con otra explicación más precisa

Tabla 32. Séptimo fragmento de la entrevista al profesor *F*

Segmento posterior

TRASCRIPCIÓN	OBSERVACIONES
43. E2: A ver, aquí hay un elemento que digamos que hay todo un estudio previo de la función, que es un estudio estático, son todos estos pasos que has hecho, son estáticos, pero de entrada en el momento que has empezado, ya has introducido implícitamente aspectos dinámicos, has dicho en	El entrevistador 2 quiere hacerle notar al profesor que ha utilizado muchas expresiones dinámicas para referirse a unos conceptos estáticos y luego hace una pregunta con el objetivo de saber si el profesor tiene alguna intención didáctica con este tipo de expresiones

algún momento que la gráfica pasaba, cuando hablabas de los signos, que la gráfica pasaba por aquí, la gráfica no pasó por aquí etc. Mira, has hecho algunos movimientos gestuales que, implícitamente, el alumno que recibe esta explicación se encuentra con un tono, con una explicación estática y luego unos elementos implícitos no muy conscientes en el lenguaje y una gesticulación de tipo dinámico, ¡no!. Entonces la pregunta es ¿eres conciente de que estás introduciendo estos elementos?, has dicho que la gráfica pasa por aquí, pasa por allá y tal, es decir como si la gráfica fuese un señor que se fuese de excursión.	
44. P: Sí, sí	
45. E2: ¿Crees que van tan bien estas cosas qué incluso tendríamos que acentuar más estos elementos dinámicos para que se te entienda mejor la representación gráfica?	El entrevistador matiza más la pregunta anterior
46. P: Depende de los objetivos que tú persigas, si lo que quieres es que al hacer la gráfica única y exclusivamente se puede hacer de manera que sea como más sencillo, lo que es la representación de la gráfica, ¿y qué sí puedes prescindir de la jerga?, sí. Pero tal como tú hasta cierto punto, no sé, lo veo más como una pregunta un poco capciosa, creo que de todas maneras en un momento dado intentar forzar a la rigurosidad en lo mínimo, pero es evidente que cuesta trabajo, pero si las cosas no las empiezas a ver de base, pues luego como que se te hacen más duras	El profesor deja entender que este lenguaje puede facilitar la comprensión y la explicación de las representaciones gráficas, aunque muestra sus reservas

47. E2: De todas maneras tú, dentro de un planteamiento bastante riguroso has estado utilizando estos elementos, sobre todo al principio cuando has hecho lo de los signos, has dicho que la gráfica pasaba por aquí, pasaba por allá	El entrevistador le hace notar al profesor que, a pesar de que ha intentado utilizar un discurso riguroso, también ha utilizado elementos metafóricos en su discurso
48. P: Sí, ¿y?	El profesor reconoce que ha utilizado este tipo de expresiones metafóricas dinámicas en su discurso
49. E2: Pero vamos, que en todo caso, tú consideras que se tienen que vigilar bastante estos elementos para que no haya confusión, ¿no?....entiendo un poco de tus comentarios, o sea, a pesar de que tú los has mitigado, lo ves peligroso y tendrías que controlarlo un poco	El entrevistador matiza un poco más la pregunta anterior con el objetivo de concretar la posición del profesor frente al lenguaje metafórico en la representación gráfica
50. P: Sí, sí, sí	
51. P: Sí, hasta cierto punto, tienes que intentar, no sé, explicar que a fuerza de decir las cosas las acabas por ver, pero la jerga científica a lo mejor puede ser complicada, pero has de intentar hacer que poco a poco las palabras vayan sonando	El profesor muestra ahora más reservas al uso de este tipo de discurso que antes

Tabla 33. Octavo fragmento de la entrevista al profesor *F*

En esta entrevista también podemos observar como el profesor *F*, al igual que el profesor *C* y el *E* no es consciente de que usa metáforas dinámicas y, por tanto, no las controla. Como consecuencia de las preguntas del entrevistador, el profesor *C* se da cuenta de que usa este tipo de metáforas, pero, a diferencia de los profesores *C* y *E* que no ven ningún peligro a este tipo de discurso, el profesor *F* manifiesta bastantes reservas e insiste en la necesidad de utilizar un discurso más riguroso, aunque también reconoce que el uso de metáforas en el discurso del aula puede facilitar la comprensión en sus alumnos.

Y, para terminar, queremos resaltar un aspecto curioso. En las transcripciones realizadas, no hemos observado casi nunca que el profesor corrija las metáforas que va utilizando de manera consciente o inconsciente, sólo lo hemos observado, en el caso del profesor *B*. En un fragmento de la segunda clase grabada al profesor *B*, éste corrige la expresión "cortes con los ejes" por "raíces con los ejes": *Es continua, quiere decir que cuando tu la representas, ¿hay cortes con los ejes o no? ¡perdón!, raíces con los ejes*. Resulta significativo que después de esta corrección no tarda mucho en volver a utilizar la expresión "cortes con los ejes" sin corregirla.

4.3 RESPUESTA A LA 4 ª PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN

¿Qué efecto producen estas metáforas sobre los alumnos?

Con relación a la cuarta pregunta, se ha confirmado nuestra hipótesis de que el uso de metáforas en el discurso del profesor produce efectos muy significativos en la comprensión de los alumnos. Las respuestas de los alumnos sugieren claramente que las metáforas utilizadas por el profesor tienen mucho más peso del que normalmente se considera, ya que son las que muchos de ellos utilizan para responder a las preguntas, en lugar de las definiciones más precisas que tienen recogidas en sus cuadernos y libros de texto.

Para llegar a esta conclusión, primero estudiamos, mediante las respuestas a un cuestionario específicamente diseñado para el caso, los efectos que produce el discurso metafórico del profesor en la comprensión de los alumnos del profesor *C*. El análisis de las respuestas al cuestionario nos permitió concluir que efectivamente el discurso metafórico del profesor *C* condicionaba la comprensión de sus alumnos. El siguiente paso fue investigar qué pasaba cuando las producciones escritas estudiadas eran las habituales de clase (como por ejemplo los exámenes) en lugar de un cuestionario diseñado *ad hoc*. Después de analizar los exámenes de los alumnos de los profesores grabados en vídeo observamos dos grupos de alumnos. En el primer grupo había alumnos en cuyas producciones escritas no se utilizaba un discurso metafórico (más allá de las metáforas fosilizadas). El segundo grupo eran alumnos en los se podía observar, en su discurso escrito, el uso de metáforas. A continuación, nos centramos, sobre todo, en el primer grupo y los entrevistamos para estudiar si el uso de metáforas se manifestaba en su discurso oral, como así fue.

4.3.1 Respuestas a un cuestionario de los alumnos del profesor *C*

A continuación siguen las respuestas de 9 alumnos del profesor *C* que muestran claramente el peso que tiene el pensamiento metafórico en la estructuración de sus objetos personales. El siguiente cuestionario fue contestado por 9 alumnos escogidos al azar entre todos los que participaron en la clase grabada en vídeo del profesor *C.*

Se trata de un cuestionario formado por 6 preguntas semiabiertas cuyo objetivo era determinar el efecto que producen, en la comprensión de los alumnos, las metáforas utilizadas por el profesor al explicar los siguientes conceptos: gráfica de una función, crecimiento y decrecimiento. Las preguntas eran:

1.- Describe la siguiente gráfica

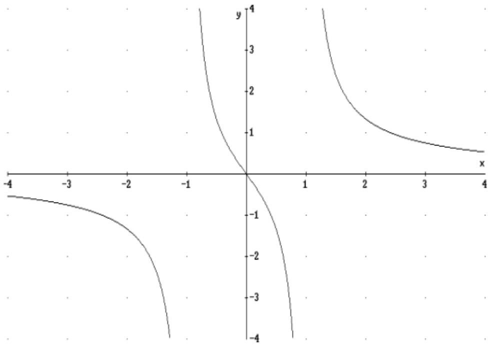


Figura 14. Gráfica 1 del cuestionario

En esta primera pregunta se da libertad al alumno para que describa con sus propias palabras una gráfica. El objetivo de la pregunta es determinar si utiliza metáforas dinámicas y, más en concreto, términos que el profesor utilizó en clase, tales como: Pasa por..., viene de..., se va hasta..., etc.

2.- La gráfica ¿crece o decrece? Explica por qué.

El objetivo de la pregunta es determinar de qué metáforas se vale para explicar los conceptos de crecimiento y decrecimiento y si lo hace con términos análogos a los que el profesor utilizó en clase, tales como: sube, baja, viene del infinito, va al infinito,.. etc.

3.- ¿Qué les pasa a los puntos de la curva en las asíntotas verticales?

Esta pregunta, formulada en términos parecidos a los utilizados por el profesor en su explicación, tiene por objetivo determinar si el alumno responde usando implícitamente el lenguaje de las sucesiones, con respuestas como "cuando los valores de la abscisa se aproximan a 1 por la derecha, los valores de la ordenada son tan grandes como se quiera"; o bien si lo hace con expresiones como: "me puedo aproximar tanto como quiera". Se trata de establecer hasta qué punto hay coherencia entre las respuestas del alumno y la explicación del profesor. En el primer caso el alumno ha de considerar diferentes valores para la abscisa y para la ordenada, mientras que en el segundo, el alumno considera un solo valor de la abscisa o de la ordenada, el cual "se aproxima", "se hace grande", etc.

4- ¿Crees qué hay alguna diferencia entre los puntos de abscisa $x = a$ y $x = b$?

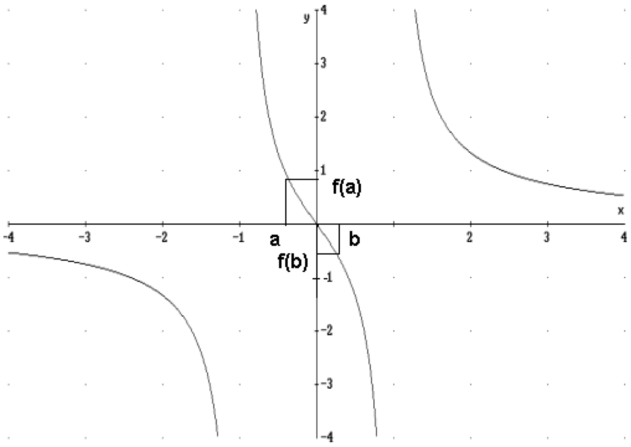


Figura 15. Gráfica 2 del cuestionario

Con esta pregunta se pretendía observar qué tipo de argumentación utilizaba el alumno para describir la diferencia entre los dos puntos. Se trataba de ver si los alumnos argumentaban (1) con los nuevos contenidos introducidos por el profesor –crecimiento o decrecimiento en un punto, concavidad y convexidad en un punto– (2) con metáforas orientacionales, como por ejemplo "La imagen de *a* está arriba y la de *b* abajo"; (3) con el signo de las coordenadas, como por ejemplo "La abscisa y la ordenada de un punto son positivas, mientras que las del otro son negativas"; (4) con los dos últimos tipos de argumentaciones, como por ejemplo: "Es positivo porque está a la derecha o arriba", "Es negativo porque está a la izquierda o abajo", etc.

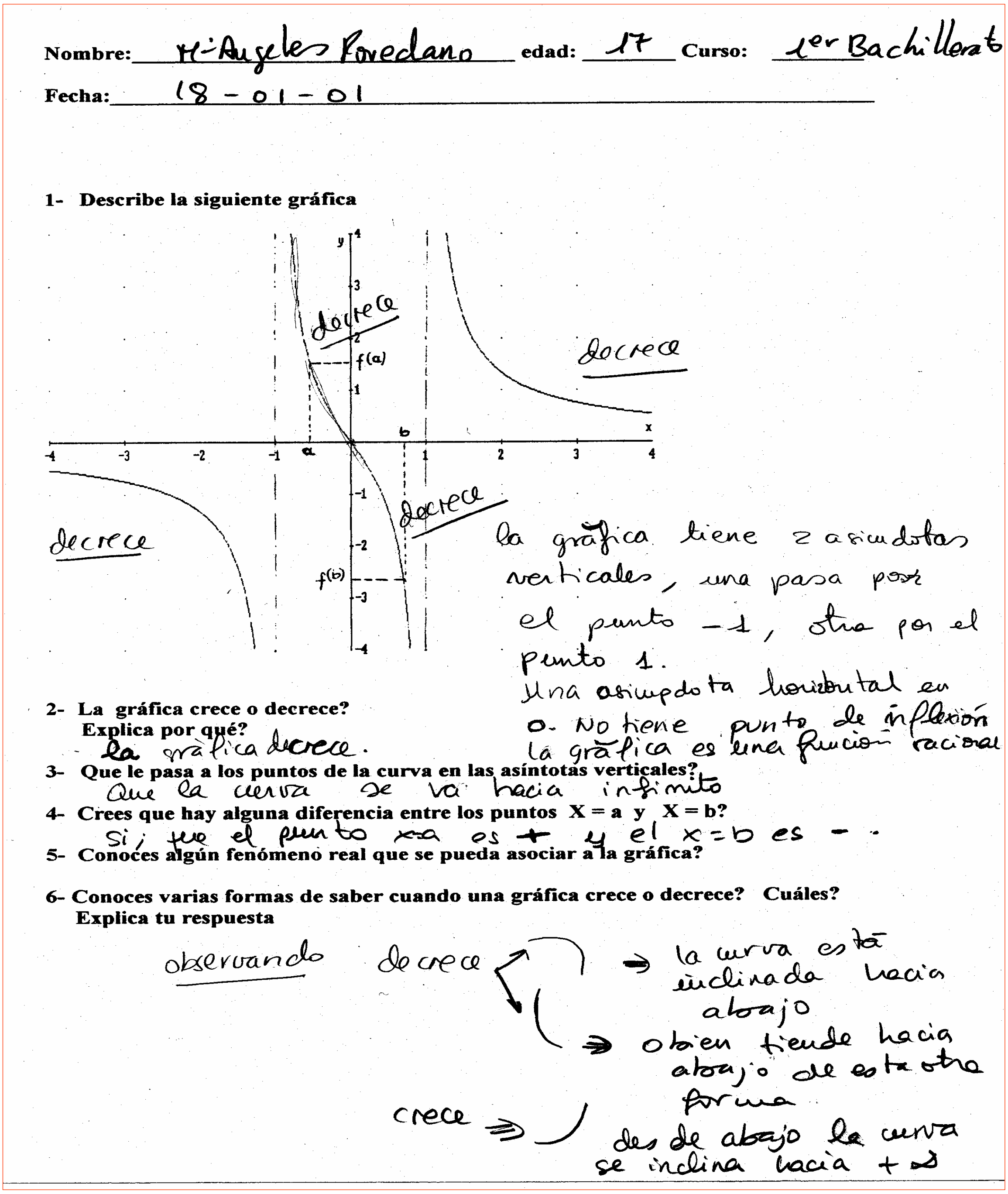
5- ¿Conoces algún fenómeno real qué se pueda asociar a la gráfica?

EL objetivo era saber si el alumno era capaz de adaptar la gráfica a una situación cotidiana.

6- Conoces varias formas de saber cuando una gráfica crece o decrece ¿cuáles? Explica tu repuesta

En esta pregunta no se especifica si se trata de crecimiento o decrecimiento en un punto o bien en un intervalo. El objetivo es determinar si los alumnos responden utilizando de manera implícita la metáfora “la gráfica de una función es la traza que deja un punto que se mueve sobre la gráfica” con frases como “viene de arriba abajo”, etc., o bien utilizando el signo de la derivada.

Ejemplo de respuesta de uno de los alumnos:



Nombre: M-Ángeles Poredano **edad:** 17 **Curso:** 1er Bachillerato

Fecha: 18 - 01 - 01

1- Describe la siguiente gráfica

la gráfica tiene 2 asíntotas verticales, una pasa por el punto −1, otra por el punto 1. Una asímptota horizontal en 0. No tiene punto de inflexión. La gráfica es una función racional

2- La gráfica crece o decrece?
Explica por qué?

la gráfica decrece.

3- Que le pasa a los puntos de la curva en las asíntotas verticales?

Que la curva se va hacia infinito

4- Crees que hay alguna diferencia entre los puntos X = a y X = b?

Si, que el punto xa es + y el x=b es −.

5- Conoces algún fenómeno real que se pueda asociar a la gráfica?

6- Conoces varias formas de saber cuando una gráfica crece o decrece? Cuáles?
Explica tu respuesta

observando

decrece → la curva está inclinada hacia abajo

→ o bien tiende hacia abajo de esta otra forma

crece → desde abajo la curva se inclina hacia +∞

Figura 16. Respuesta de un alumno del profesor *C*

Las respuestas de los alumnos fueron las siguientes:

Pregunta **Alumnos**	**Describe la gráfica**	**La gráfica ¿crece o decrece?, Explica por qué**	**¿Qué les pasa a los puntos de la gráfica en las asíntotas verticales?**	**¿Crees que hay alguna diferencia entre los puntos de abscisa *x=a* y *x=b*?**	**¿Conoces algún fenómeno real que se pueda asociar a la gráfica?**	**Conoces varias formas de saber cuando una gráfica crece o decrece ¿cuáles? Explica tu repuesta.**
1	Dominio{ -1 { 1 Tiene asíntotas horizontales y verticales De-∞ a –1 es convexa De 1 a 0 cóncava De 0 a 1 convexa De 1 a +∞ cóncava	Decrece De-∞ a –1 decrece, de 1 a +∞ decrece, de –1 a 1 decrece	Que van paralelas a ellas hasta infinito y nunca la llegan a tocar	Que a es negativa y b es positiva	No lo sé	
2	Asíntotas verticales (-1,0) (1,0) Asíntotas horizontales (0,0) Intervalo de decrecimiento (-∞,-1) (-1,1) (1, +∞)	Decrece, porque va de más infinito(+∞) a menos infinito (-∞) desde el punto de vista del eje de las *y*	Que tienden hacia la asíntota pero nunca la tocan, van hasta infinito (+∞ a la derecha y -∞ por la izquierda)	Son de signos opuestos	No	Sí, mirando si va de izquierda a derecha hacia los números negativos→y si va de izquierda a derecha hacia los números positivos (de la U) la función crece
3	Las asíntotas verticales están en *x*=-1 y *x*=+1 Intervalos de crecimiento (-∞ , –1) (–1 , 1) (+1 , +∞) las asíntotas horizontales también tienden hacia 0 cuando más se alejan de *x*=0	De -∞ hasta –1 decrece; de –1 a +1 también decrece; y de +1 a +∞ decrece	Que se acercan a -1 o a +1	*x=b* está en el lado positivo y *x=a* está en el lado negativo		
4	Decrece La gráfica tiene dos asíntotas verticales, una pasa por el punto –1, la otra por el punto 1, una asíntota horizontal es 0, no tiene punto de inflexión, la gráfica es una función racional	La gráfica decrece	Que la curva se va hacia infinito	Sí, que el punto *x=a* es + y el punto *x=b* es –		Observando Decrece la curva está . inclinada hacia abajo o bien tiende hacia abajo de esta otra forma Crece desde abajo la la curva se inclina hacia +∞
5	Hay dos asíntotas para *x*=-1; *x*=1 verticales La gráfica corresponde a una función racional	Tiene intervalos de crecimiento y decrecimiento	Que las funciones tienen valores muy grandes o muy pequeños		No	Sí, 1.por el signo de la primera derivada *f´*(*x*) 2.por la concavidad o convexidad de la gráfica

6	En esta gráfica hay dos asíntotas verticales en 1 y –1, eso quiere decir que la función existe por todos los R menos 1 y –1 para estos últimos valores mentados últimamente la función no existe. Un punto de corte en(0,0) de inflexión (la función pasa de cóncava a convexa) de (-∞ , –1) función decreciente, (–1 a 0) decreciente (0,1) decreciente (1,+∞) decreciente	Decrece	Que nunca la curva llegará a tocar las asíntotas	Que la a es negativa y la b es positiva	No	Una mirando el gráfico. $f'(x) > 0 \rightarrow$ función creciente $f'(x) < 0 \rightarrow$ función decreciente
7	Está gráfica pertenece a una función racional porque tiene discontinuidades (asíntotas) que hace que la gráfica este dividida en diferentes partes	Tiene diferentes partes. 1a) decrece 2a) decrece 3a) decrece 4a) decrece	Que sufren una discontinuidad y que no existen	Sí, que $x=a$ es negativa y $x=b$ es positivo		1) observando el gráfico 2) dando valores a x y observar si crece o decrece
8		Decrece		La *a* es negativa y la *b* es positiva	No	
9	Int: (-∞ , –1) la función decrece porque cuando la función se acerca a la asíntota tiende al -∞ y por lo tanto decrece. Int: (-1,1) en x=-1 hay una asíntota y en x=1 otra, en este intervalo la función va de +∞ a -∞ por lo tanto también decrece. Int: (1, +∞) la función vuelve a decrecer, esta viene de la asíntota en +∞ y decrece, se va al +∞ por la asíntota horizontal en y=0	Decrece Se distingue claramente	No existe nunca ni P. I. En las asíntotas verticales	Sí, en los dos puntos la $f(x)$ decrece , pero cuando $x=a$ la f(x) es cóncava y cuando $x=b$ la función es convexa	R-$\{-1,1\}$	Sí, por los intervalos de crecimiento o decrecimiento o por los intervalos de concavidad y convexidad

Tabla 34: Respuestas de los alumnos del profesor *C*

Las respuestas de los alumnos permiten extraer las siguientes conclusiones:

- Con relación a la pregunta 1, se observa que 8 de los 9 alumnos dieron una descripción de la gráfica utilizando algunas de las características introducidas por el profesor (dominio, intervalos de decrecimiento, asíntotas, etc.), mientras que uno (el n.º 8) respondió en blanco. También hay que destacar que 3 de ellos reconocieron la gráfica como perteneciente a la familia de las racionales. En las respuestas de los alumnos n.º 3 y n.º 9 se observa una clara influencia del discurso metafórico del profesor.
- Con relación a la pregunta 2, se observa que los alumnos se limitan a responder sin dar ninguna explicación de su respuesta. Los únicos que dan algún tipo de justificación son el número 9, que se limita a

decir “Se distingue claramente” y el número 2, que da una explicación en términos metafóricos.

- Del análisis conjunto de las respuestas 1 y 2 se observa que cuatro alumnos (n.º 2, n.º 3, n.º 4 y n.º 9), en su descripción de la gráfica, utilizaron expresiones como: "pasa por", "va de...", "tiende hacia infinito", "cuando más se alejan de..." etc. De esta manera, nuestra hipótesis de que un sector importante de alumnos utilizaría un tipo de vocabulario metafórico parecido al del profesor en su explicación se corroboró.
- Con relación a las repuestas a la pregunta número 3, predominaron las respuestas en términos metafóricos como: “La curva se va hacia infinito”, “que nunca la curva llegará a tocar las asíntotas”, etc. Ninguno de ellos respondió, por ejemplo, que la recta $x=1$ era una asíntota vertical porque el límite de la función cuando $x \to 1^{+}$ era $+\infty$ y cuando $x \to 1^{-}$ era $-\infty$, de acuerdo con las definiciones que el profesor había dado previamente y que ellos tenían recogidas en sus cuadernos.
- Con relación a las repuestas de la pregunta número 4, predominaron las que sólo daban argumentos basados en el signo de las coordenadas (7 de los nueve alumnos). Uno no respondió y sólo uno asoció esta diferencia al hecho de que pertenecen a trozos diferentes de la curva: uno a la parte cóncava y el otro a la convexa.
- Con relación a la pregunta 5, todos los alumnos, tal como esperábamos, contestaron que no conocían ningún fenómeno cotidiano asociado a esta representación gráfica. La causa hay que buscarla en la propia dificultad de la pregunta, pero también resulta significativo que no haya ninguna respuesta, ni siquiera incorrecta, porque pone de manifiesto la inexperiencia de estos alumnos para responderla, a causa de que el proceso de estudio que han seguido normalmente no incluye ningún problema contextualizado. Solamente han trabajado en clase la siguiente situación: dada la fórmula de una función representarla gráficamente.
- Con relación a la pregunta 6, tres alumnos no respondieron, y 6 de los 9 reconocen el crecimiento y decrecimiento de una curva por el mero hecho de observarla visualmente. Dos de ellos apoyan su afirmación visual con expresiones metafóricas del tipo “la curva está inclinada hacia abajo” y sólo dos responden utilizando el signo de la derivada. Hay que destacar que ninguno utilizó claramente la definición de crecimiento en un punto o en un intervalo dada por el

profesor. Por ejemplo, no hubo ninguna respuesta del tipo: si $a < b$ entonces $f(a) < f(b)$. Sólo en la respuesta del alumno n.º 7 se puede intuir este tipo de argumentación.

Como conclusión general podemos decir que las respuestas al cuestionario confirman nuestra suposición de que el uso de metáforas en el discurso del profesor produce efectos significativos en la comprensión de los alumnos. El objetivo que se había marcado el profesor era la enseñanza de una técnica analítica de representación gráfica de funciones. Para facilitar su comprensión utiliza de manera inconsciente, y según él de manera inocua, expresiones que implican metáforas del tipo “la gráfica es la traza que deja un punto que se mueve sobre la gráfica” etc. Las respuestas de los alumnos sugieren claramente que este tipo de metáforas tiene mucho más peso del que normalmente se considera, ya que son las que muchos de ellos utilizan para responder a las preguntas, en lugar de las definiciones más precisas que tienen recogidas en sus cuadernos y libros de texto

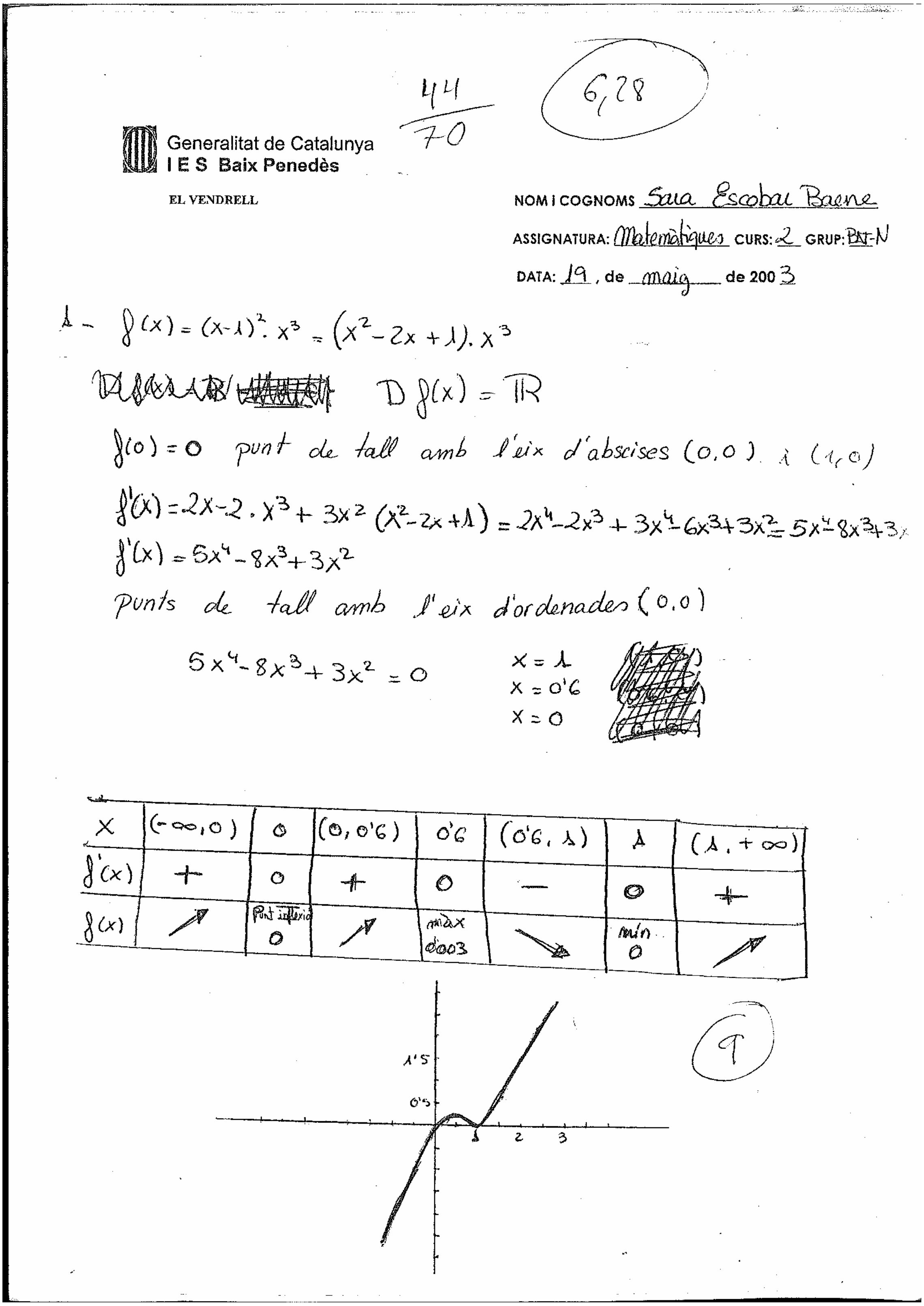
4.3.2 Análisis de los exámenes de los alumnos de los profesores grabados en vídeo.

En el análisis de los exámenes de los alumnos de los profesores grabados en vídeo se observan dos grupos de alumnos. En el primer grupo hay alumnos en cuyas producciones escritas no se utiliza un discurso metafórico (más allá de las metáforas fosilizadas). El segundo grupo son alumnos en los se puede observar, en alguna parte de su discurso escrito, el uso de metáforas.

Hay que resaltar que muchos alumnos quedan englobados en el primer grupo por la simple razón de que no escriben ninguna frase, más allá de los cálculos simbólicos

Ejemplos del primer grupo

En este grupo la mayoría de los alumnos no escriben ninguna frase. Un buen ejemplo lo tenemos en el siguiente segmento del examen de un alumno del profesor *A*



$\frac{44}{70}$ 6,28

Generalitat de Catalunya
I E S Baix Penedès

EL VENDRELL

NOM I COGNOMS Sua Escobar Baene

ASSIGNATURA: Matemàtiques CURS: 2 GRUP: BAT-N

DATA: 19, de maig de 2003

1 – $f(x) = (x-1)^2 \cdot x^3 = (x^2 - 2x + 1) \cdot x^3$

$D\,f(x) = \mathbb{R}$

$f(0) = 0$ punt de tall amb l'eix d'abscises $(0,0)$ i $(1,0)$

$f'(x) = 2x-2 \cdot x^3 + 3x^2 (x^2-2x+1) = 2x^4-2x^3+3x^4-6x^3+3x^2 = 5x^4-8x^3+3x^2$

$f'(x) = 5x^4 - 8x^3 + 3x^2$

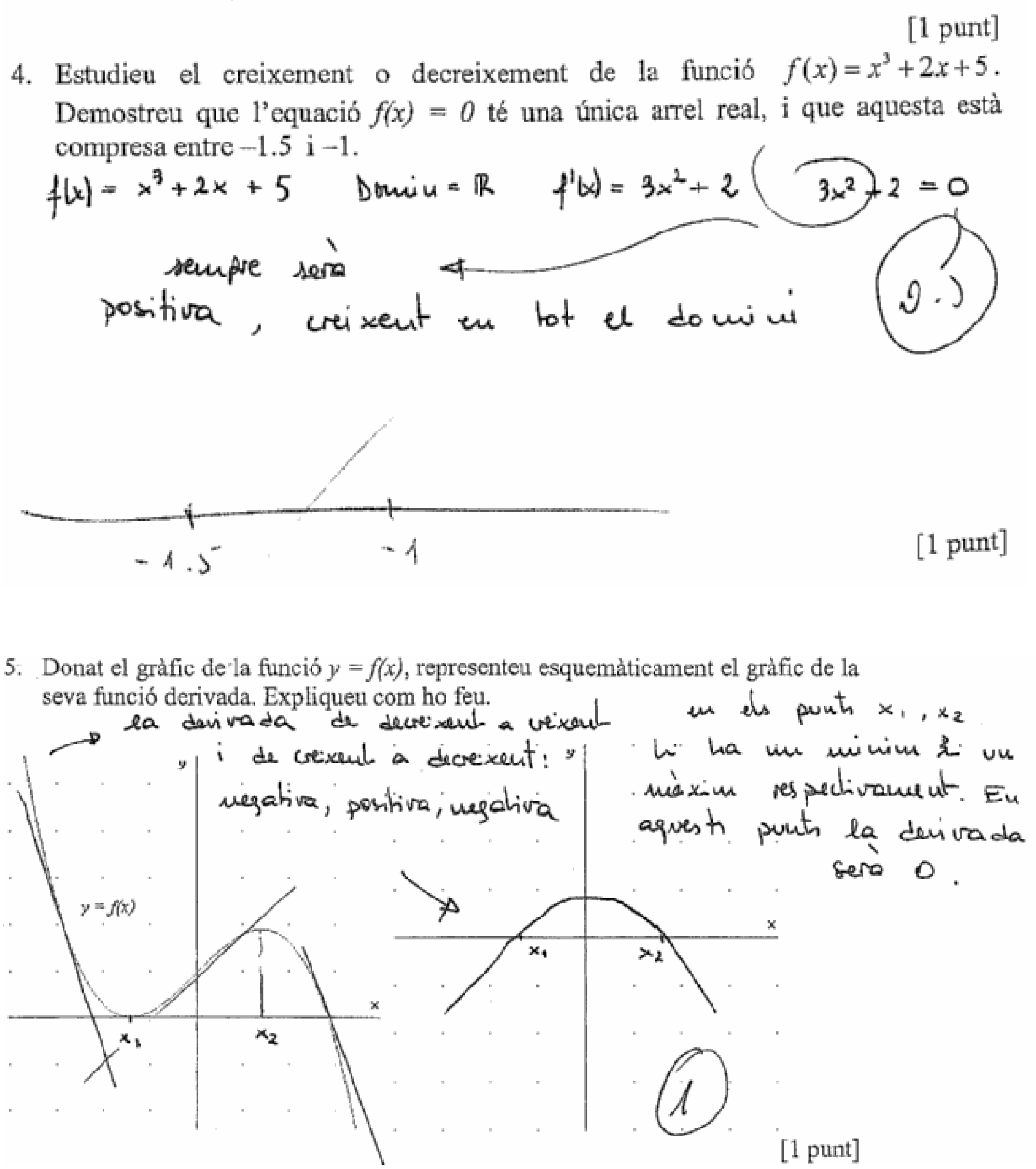
punts de tall amb l'eix d'ordenades $(0,0)$

$5x^4 - 8x^3 + 3x^2 = 0$ $x = 1$, $x = 0'6$, $x = 0$

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 0'6)$	$0'6$	$(0'6, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	Punt inflexió 0	↗	màx 0'003	↘	mín 0	↗

Figura 17. Parte de un examen de un alumno del profesor *A*

En este primer grupo también hay algunos alumnos que si escriben alguna frase en la que no se observan metáforas. Por ejemplo, en el examen del alumno *G*, que era alumno del profesor *D* (ver sección 3.3), no se observa el uso de metáforas. Las respuestas correctas a los diferentes apartados del examen son como la que sigue a continuación:



[1 punt]

4. Estudieu el creixement o decreixement de la funció $f(x) = x^3 + 2x + 5$. Demostreu que l'equació $f(x) = 0$ té una única arrel real, i que aquesta està compresa entre -1.5 i -1.

$f(x) = x^3 + 2x + 5$ Domini = $\mathbb{R}$ $f'(x) = 3x^2 + 2$ ($3x^2+2 = 0$

sempre serà positiva, creixent en tot el domini

0.5

-1.5 -1

[1 punt]

5. Donat el gràfic de la funció $y = f(x)$, representeu esquemàticament el gràfic de la seva funció derivada. Expliqueu com ho feu.

la derivada de decreixent a creixent i de creixent a decreixent: negativa, positiva, negativa

en els punts x_1, x_2 hi ha un mínim i un màxim respectivament. En aquests punts la derivada serà 0.

1

[1 punt]

Figura 18. Parte del examen del alumno *H* del profesor *D*

En este grupo también hay respuestas incorrectas en las que tampoco se observa el uso de metáforas (salvo las objetulaes, lo cual es casi inevitable). Este es el caso de la respuesta de uno de los alumnos del profesor *A*

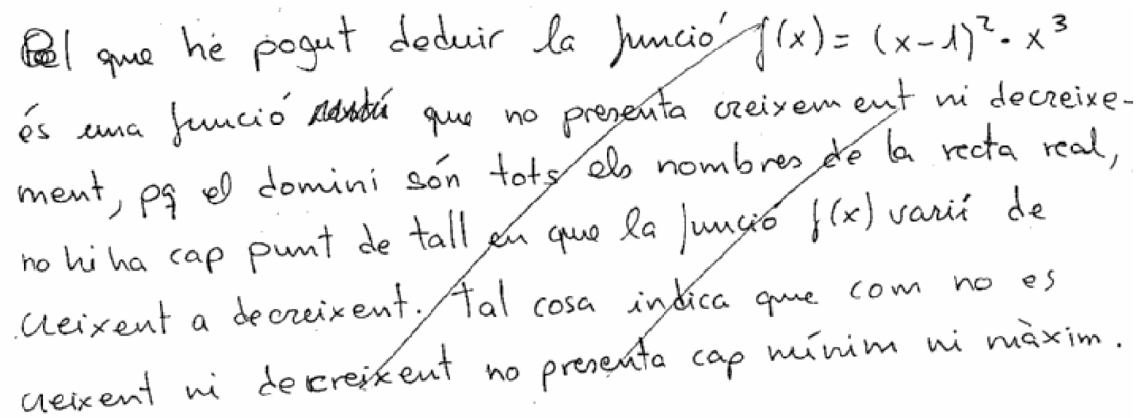

Pel que he pogut deduir la funció $f(x) = (x-1)^2 \cdot x^3$
és una funció ~~[illegible]~~ que no presenta creixement ni decreixe-
ment, pq el domini són tots els nombres de la recta real,
no hi ha cap punt de tall en que la funció $f(x)$ varií de
creixent a decreixent. Tal cosa indica que com no es
creixent ni decreixent no presenta cap mínim ni màxim.

Figura 19. Parte de un examen de un alumno del profesor *A*

Ejemplos del segundo grupo

En este grupo se engloban los alumnos que en la respuesta a alguno de los apartados del examen han escrito alguna frase en la que se observa claramente el uso de metáforas diferentes a las objetuales. Un buen ejemplo lo tenemos en el siguiente segmento del examen de un alumno del profesor *B*:

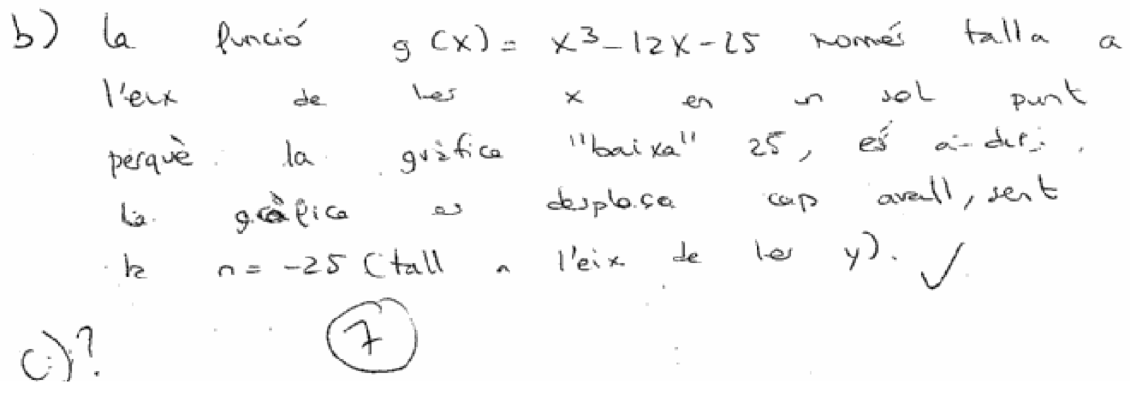

b) la funció $g(x) = x^3 - 12x - 25$ només talla a
l'eix de les x en un sol punt
perquè la gràfica "baixa" 25, és a dir,
la gràfica es desplaça cap avall, sent
la $n = -25$ (tall a l'eix de les y). ✓
c) ?
7

Figura 20. Parte de un examen de un alumno del profesor *B*

4.3.3 Alumno *G*

Uno de los alumnos en cuyas producciones escritas no se utiliza un discurso metafórico (más allá de las metáforas fosilizadas) es el alumno G del profesor *D*. Si bien en su respuesta escrita no se detectó el uso de metáforas que no fuesen las fosilizadas, éstas fueron omnipresentes en su explicación verbal de cómo había construido la gráfica. La entrevista realizada a este alumno muestra claramente como estructura su comprensión de las gráficas de funciones básicamente a partir de la proyección metafórica de unos pocos esquemas: camino, contenedor, parte-todo, orientacional y bloqueo.

Parte-todo y contenedor

Las proyecciones metafóricas (ontológicas) de los esquemas de las imágenes "parte-todo" y "contendor" son usadas por este alumno para estructurar su conocimiento del objeto matemático "dominio de una función" tal como se observa en el siguiente fragmento de la trascripción de su entrevista (anexo 5). En dicha entrevista, el alumno tiene que explicar sus respuestas al examen y también tienen que contestar a las preguntas del entrevistador:

TRANSCRIPCIÓN	OBSERVACIONES
	El entrevistador sitúa al alumno en la mesa de trabajo, le entrega una hoja en blanco y pone a su disposición el examen que días antes él había resuelto satisfactoriamente, además le dice que sólo se trata de explicar lo concerniente a la representación de la gráfica, además no hace falta volver a realizar los pasos previos realizados en su examen (dominio, asíntotas, …)
1. E2: Bueno, entonces empezamos. La idea es que nos expliques de qué va el examen, y que nos expliques como lo hiciste, y los resultados un poco de qué van.	
2. A: Vale, pues teníamos que resolver esa representación	El alumno señala el examen

gráfica, esta de aquí	
3. E2: ¿Cuál es la función?	
4. A: Tres equis al cuadrado menos seis partido por equis al cuadrado menos uno	Señala la formula en la hoja del examen $f(x) = (3x^2\text{-}6)/(x^2\text{-}1)$
5. E2: Vale	
6. A: Primero hay que buscar el dominio y lo buscamos igualando el denominador a cero, cuando lo hemos igualado, buscamos el resultado y nos sale más uno y menos uno, entonces el dominio es **todos** los números reales**, menos** el uno y el menos uno	El alumno mientras realiza estos comentarios señala con su dedo la parte del examen en el que se hallan los cálculos que ya realizó el día del examen.
7. E2: ¿Qué quiere decir que ese es el dominio, por qué **excluyes** esos dos números?	El entrevistador formula esta pregunta con el objetivo de averiguar si el alumno utiliza la metáfora del contenedor
8. A: Porque son los que **están fuera** del dominio, el dominio son **todos** los reales **menos** estos dos	El alumno señala su examen para indicar la respuesta
9. E2: ¿Y qué quiere decir que es el dominio de la función? ¿Qué entiendes por dominio?	El entrevistador formula esta pregunta con el objetivo de que el alumno amplíe la metáfora "son los que están fuera del dominio" que ha utilizado antes
10. A: Pues, lo que **abarca** la función, ¡no!........ **Todos los números que son parte de la función.**	El alumno mientras realiza estos comentarios hace gestos con la mano como si fuera el dominio un recipiente

Tabla 35. Primer fragmento de la entrevista al alumno *G*

La primera expresión metafórica de la metáfora ontológica que resulta de la proyección del esquema "parte-todo" la podemos en hallar en 6 (de un todo se puede separar una parte):

> 6 A: Primero hay que buscar el dominio y lo buscamos igualando el denominador a cero, cuando lo hemos igualado, buscamos el resultado y nos sale más uno y menos uno, entonces el dominio es **todos** los números reales, **menos** el uno y el menos uno

En la pregunta 7 el entrevistador usa la palabra "excluyes" para que el alumno haga algún comentario del cual se puede inferir que proyecta metafóricamente el esquema del "contenedor", lo que efectivamente sucede ya que en 8 el alumno utiliza la palabra "fuera":

> 7 E: ¿Qué quiere decir que ese es el dominio, por qué **excluyes** esos dos números?
>
> 8 A: Porque son los que están **fuera** del dominio, el dominio son todos los reales menos estos dos

En la pregunta 9 el entrevistador pretende que el alumno amplíe la expresión metafórica "son los que están fuera del dominio" que ha utilizado antes. En su respuesta (10) podemos ver como el alumno fusiona las proyecciones de los esquemas de las imágenes parte-todo y contenedor (que refuerza con gestos con la mano como si el dominio fuese un recipiente) y que, además, identifica el dominio con la función (se puede considerar que, además, realiza una metonimia parte-todo al identificar el dominio con la función)

> 9 E: ¿Y qué quiere decir que es el dominio de la función? ¿Qué entiendes por dominio?
>
> 10 A: Pues, lo que **abarca** la función, ¡no!........ **Todos** los números que son **parte de la función**.

También parece que utiliza una proyección metafórica del esquema del contenedor y del esquema parte-todo en 118. Aquí el alumno da una respuesta muy confusa y difícil de interpretar, pero las zonas que raya en el papel parecen sugerir que este alumno entiende que hay ciertas regiones que pueden contener partes de la gráfica y otras no.

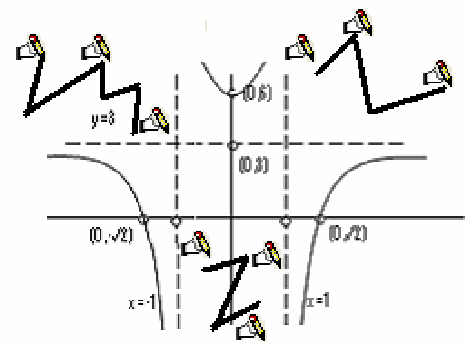
TRASCRIPCIÓN	OBSERVACIONES
117. E2: ¿Y lo puedes representar gráficamente ahí, más o menos la idea que tienes de límite?	El entrevistador quiere ver si el alumno puede dar una idea gráfica de lo que él entiende por límite
118. A: No sé, no sé como representar un límite. ¿**Sería lo que no engloba la función o al revés?**	Mientras da esta respuesta, tan confusa y difícil de interpretar, con su bolígrafo raya algunas regiones de su hoja tal como se muestra en la figura siguiente: 

Tabla 36. Segundo fragmento de la entrevista al alumno *G*

Otro ejemplo en el que parece sugerir que interpreta el papel como el contendor de la gráfica de la función es en el siguiente segmento:

TRANSCRIPCIÓN	OBSERVACIONES
107.E2: ¿Qué entiendes por límite?	El alumno en el examen había mostrado competencia en el procedimiento de cálculo de límites. Ahora queríamos ver cuál era la idea que tenía de este concepto.
108. A: Yo creo que límite **es como si dijéramos donde llega la función, o el límite que tiene**, por lo tanto el límite sería…	De nuevo el alumno contesta de una manera metafórica describiendo el límite como el final de la función o bien como aquello que envuelve a la función (Eso es lo que nos pareció intuir de sus gestos al responder)
109. E2: ¿Cuál es la gráfica de la función ahí?	En la respuesta anterior el alumno hizo un gesto envolvente

	sobre la gráfica y por eso el entrevistador hace esta pregunta para ver que quería decir con ese gesto
110. A: **Todo esto**	Señala todo el dibujo que esta en su hoja con un gesto envolvente
111. E2: Vale	

Tabla 37. Tercer fragmento de la entrevista al alumno *G*

Movimiento ficticio

Las expresiones metafóricas que sugieren "movimiento ficticio" como resultado de la proyección metafórica del esquema del camino también son usadas por este alumno para estructurar su conocimiento del objeto matemático "punto de corte de la gráfica con los ejes" tal como se observa en el siguiente fragmento de la trascripción de su entrevista (anexo 5):

TRANSCRIPCIÓN	OBSERVACIONES
…..	
14. A: Luego hay que buscar los puntos de corte con el eje de ordenadas, y eso se hace igualando la equis a cero y cuando la igualamos nos da menos seis partido por menos uno que es lo mismo que seis, entonces corta por el punto, cero seis.	El alumno mientras realiza estos comentarios señala con su dedo la parte del examen en el que se hallan los cálculos que ya realizó el día del examen.
15. Luego hay que buscar los puntos con el eje de abscisas y hay que igualar la función a cero y entonces se coge el numerador y se iguala a cero y el resultado da dos, nos da raíz de dos más y menos, entonces corta en dos puntos con el eje de abscisas en el menos raíz de dos cero y en el raíz de dos cero, ¡vale!	
16. E2: ¿Qué quiere decir que la gráfica corta?	El entrevistador formula esta pregunta con el objetivo de averiguar qué tipo de metáfora utilizará el alumno en su argumentación

17. A: Qué la **gráfica pasa por justamente por uno de estos puntos**, bueno… **Que este punto es justo por donde corta la gráfica cuando corta el eje de abscisas y el eje de ordenadas.**	Mientras el alumno explica hace gestos con las manos para indicar la supuesta trayectoria de la gráfica

Tabla 38. Quinto fragmento de la entrevista al alumno *G*

En 17 el alumno recorre al movimiento ficticio, incluso con sus gestos, para explicar lo que entiende por “la gráfica corta”

18. A: Que la gráfica **pasa** por justamente por uno de estos puntos, bueno… Que este punto es justo **por donde corta** la gráfica cuando corta al eje de abscisas y al eje de ordenadas.

Figura 21. Gestos del alumno G expresando movimiento

Las proyecciones metafóricas de los esquemas de las imágenes “camino”, “contendor” y “parte todo” se pueden observar en las frases del siguiente segmento:

TRANSCRIPCIÓN	OBSERVACIONES
19. A: Las asíntotas y el comportamiento al infinito, esto es el tercer paso. Primero hay que buscar las verticales y se hacen cogiendo y haciendo el límite cuando **equis tiende a los dos números que no son del dominio,** primero se hace con el uno	El alumno continua su explicación haciendo referencia al examen
20. E2: ¡Perdón! ¿Y por qué coges precisamente esos dos?	El entrevistador hace esta pregunta con el objetivo de ver que tipo de argumentación emplea el alumno

21. A: Porque hay que **encontrar los sitios por donde no va a pasar la gráfica**, y estos dos **están fuera del dominio**, entonces estos son los que hay que buscar 22. E: ¡Vale!	El alumno de nuevo utiliza una explicación dinámica para responder, además de volver a utilizar la metáfora del contenedor para referirse al dominio

Tabla 39. Sexto fragmento de la entrevista al alumno *G*

Por ejemplo, En 21 el alumno recorre al movimiento ficticio (lo cual refuerza con gestos) y a la metáfora del contenedor:

> 21 A: Porque hay que encontrar los sitios por donde **no va a pasar** la gráfica, y estos dos **están fuera** del dominio, entonces estos son los que hay que buscar

La asíntota es una barrera

En el segmento que sigue a continuación, en 25, el alumno explica lo que es una asíntota vertical. En su explicación podemos observar tres metáforas que actúan conjuntamente. Por una parte, tenemos una proyección metafórica del esquema orientacional (arriba-abajo), por otra, tenemos el movimiento ficticio ya que "la función se aproxima por arriba y por abajo" y, por último, tenemos la metáfora conceptual "la asíntota es una barrera", es decir que la asíntota es una recta que no se llega a alcanzar nunca "lo que nunca llega a tocarla" (la asíntota es inalcanzable):

TRASCRIPCIÓN	OBSERVACIONES
.... 24. E: ¿Qué quiere decir asíntota vertical?	.... El entrevistador formula esta pregunta con el objetivo de averiguar qué tipo de metáfora utilizará el alumno en su argumentación
25 A: Asíntota vertical es una recta en la cual la función **se aproxima por arriba y por abajo, lo que nunca llega a tocarla,** y esto	El alumno de nuevo con sus manos hace gestos para expresar el movimiento aparente que hace la gráfica

26 E: ¿Y qué entiendes por límite?	El entrevistador formula esta pregunta con el objetivo de averiguar si la metáfora "la asíntota es inalcanzable" también estructura la comprensión del límite en el alumno
27 A: ..No sé ………….	Después de un momento de silencio, el alumno no supo responder ....

Tabla 40. Séptimo fragmento de la entrevista al alumno *G*

En un fragmento posterior, además de observar expresiones que sugieren el movimiento ficticio, podemos observar que el alumno explica que entiende por límite aquello "a donde al final se puede llegar".

TRASCRIPCIÓN	OBSERVACIONES
.... 32. E2: Dibújame una, ¿Cuál es la diferencia entre una asíntota vertical y una horizontal?	…….. El entrevistador formula esta pregunta con el objetivo de averiguar qué tipo de metáfora utilizará el alumno en su argumentación, además para ver si es capaz de cambiar de un registro metafórico a uno más formal
33. A: Pues si este es el eje de coordenadas, pues una vertical es así, si por ejemplo **pasa por este punto** que podría ser el uno y horizontal si por ejemplo **pasa por este punto** que podría ser el menos dos…………….	El alumno una vez más nos explica con un lenguaje dinámico la idea que de asíntota tiene, además lo acompaña de una representación en la que dibuja primero los ejes coordenados y luego hace una recta paralela al eje menor para dar la idea de asíntota vertical y de la misma manera dibuja una recta paralela al eje mayor para simular las asíntotas horizontales El alumno en ningún momento hace referencia explícita a cuál es el eje de ordenadas y cuál el de abscisas

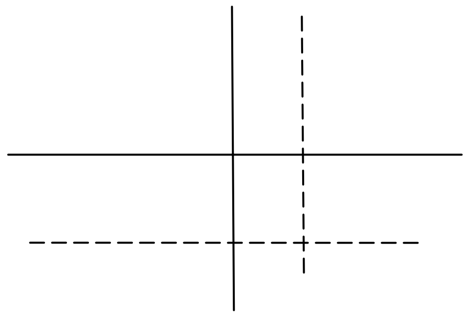
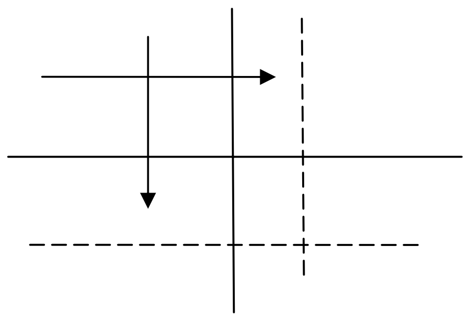
	
34. E2: Vale, Y sobre esta misma gráfica que has dibujado cual es la idea de límite que tienes. ¿Por qué hay que buscar los límites para saber cuáles son las asíntotas?	El entrevistador formula esta pregunta con el objetivo de indagar si el alumno podría cambiar de una explicación metafórica a una más formal, de igual manera se pretendía ver si el alumno, que anteriormente nos había dicho que no sabia el significado de límite, podría de esta manera expresar alguna idea
35. A: Porque la función llegaría por ejemplo hasta aquí o hasta aquí, este es el límite en el que la función llega	El alumno haciendo gestos con la mano al mismo tiempo que habla hace el recorrido de las flechas como se indican en el dibujo para indicar que la gráfica llegaría hasta allí 
36. E2: Vale, muy bien continuo ………….	....

Tabla 41. Octavo fragmento de la entrevista al alumno *G*

Entender la asíntota como una “barrera” resulta bastante problemático y es fuente de contradicciones con otras metáforas. Hay momentos en que las metáforas no entran en contradicción y otras en las que dicha contradicción aparece. Un ejemplo en el que la contradicción no se manifiesta la tenemos en el siguiente segmento cuando entiende la asíntota como algo que no se puede tocar ni tampoco atravesar:

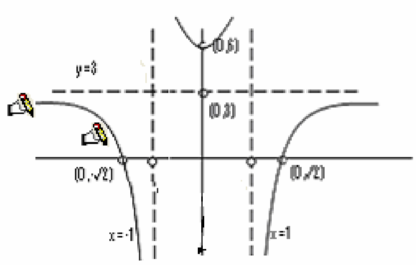
TRASCRIPCIÓN	OBSERVACIONES
....	....
119. E: Dices el límite de esta función cuando equis tiende a uno, ¿Qué quiere decir cuando equis tiende a uno?	El entrevistador hace esta pregunta con le objetivo de ver si la idea de tendencia el alumno la asume como dinámica o si, por el contrario, puede hacer un análisis estático en términos de entornos
120. A: **Cuando equis hace así, tiende hacia el uno, entonces te encuentras que tienes una asíntota y no puedes atravesarla**	El alumno, en lugar de señalar el eje de abscisas, representa de manera dinámica "equis tiende a uno" sobre la gráfica tal como se muestra en la figura siguiente. Por otra hace gestos en los que quiere representar que la asíntota es una barrera que no se puede atravesar 
....	....

Tabla 42. Noveno fragmento de la entrevista al alumno *G*

En cambio, en el siguiente fragmento, se manifiesta una contradicción entre el movimiento ficticio de la gráfica (de izquierda a derecha) con el hecho de que la asíntota es algo que no se puede atravesar (barrera infranqueable). En efecto, para el alumno hay un punto que realiza un movimiento ficticio que se desplaza sobre la función de izquierda a derecha, pero también de arriba abajo o viceversa. Además, es un punto que se desplaza en el tiempo y al llegar a una asíntota se detiene y luego empieza de nuevo el recorrido en el otro lado de la asíntota. La idea que tiene el alumno G de la asíntota como una línea cosa que no se puede tocar y menos atravesar, colisiona con el movimiento ficticio de la gráfica, lo cual obliga, de alguna manera, a atravesar la asíntota. En este caso, se produce una colisión de metáforas incompatibles, que el alumno resuelve mediante la proyección conjunta del esquema del camino y del esquema del *"bloqueo"*, lo cual permite aplicar la idea "salto de una barrera que una persona encuentra en su camino" al caso de la asíntota:

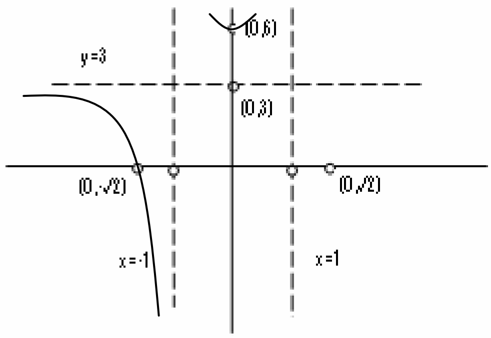
TRASCRIPCIÓN	OBSERVACIONES
....	....
81. E: ¿Y por qué hay un mínimo ahí?	El entrevistador hace esta pregunta para averiguar si el alumno es capaz de dar una explicación
82. A: Porque lo hemos encontrado aquí donde esta el mínimo cuando hay uno negativo así y uno positivo encuentras el mínimo.	El alumno explica señalando la tabla crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos que ha hecho en su examen
83. A: **Ahora hay que dibujar siguiendo esto, empezamos por la izquierda te dice que es negativa, entonces hay que empezar aquí y como hay una asíntota hay que seguirla así sin tocarla, luego hay que hacer así para pasar por este punto y seguir hasta abajo. Ahora te dice que vuelve a bajar**	Ahora el alumno empieza el esbozo de la gráfica con un primer trazo continuo que hace de izquierda a derecha  ....
....	

Tabla 43. Décimo fragmento de la entrevista al alumno *G*

El esquema del bloqueo, según Johnson (1991, p. 106), se puede representar por el siguiente esquema de imagen. El esquema del bloqueo está determinado por una entidad que obstaculiza el movimiento, se trata de una entidad estacionaria que se ha de “saltar” o “traspasar” de alguna manera.

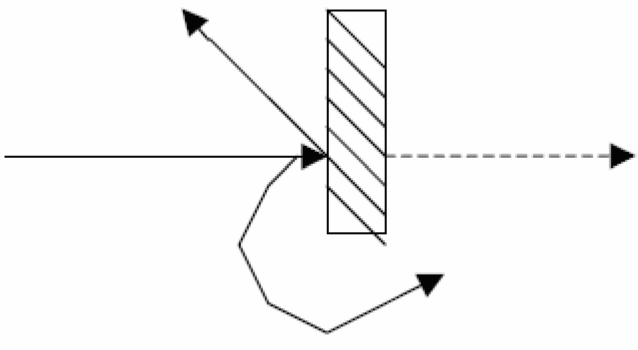


Figura 22. Esquema del bloqueo

Como resultado de la presencia conjunta de estos dos esquemas, en nuestra opinión, se produce una proyección del dominio fuente “persona que camina por un camino con una barrera” al dominio meta “gráfica de una función que tiene una asíntota vertical” en la que la idea de “salto” resuelve la contradicción:

Dominio de partida Camino	**Dominio de llegada** Gráfica de la función
Persona	Punto
Una persona que se mueve a lo largo de un camino	Un punto que se “mueve” sobre una curva que representa a una función real
Barrera	Asíntota vertical
Salto	La función no llega a tocar a la asíntota, pero continúa después de ella.

Tabla 44. Proyección metafórica de “salto de una barrera”

Metáfora orientacional

En el segmento que sigue a continuación, el alumno reproduce el esbozo de la gráfica. En su explicación podemos observar tres metáforas que actúan conjuntamente. Por una parte, tenemos una proyección metafórica del esquema orientacional, por otra, tenemos el movimiento ficticio y, por último, tenemos la metáfora conceptual “la asíntota es una barrera”, tal como se observa en el siguiente fragmento de la trascripción e imágenes de su entrevista:

83. A: Ahora hay que dibujar siguiendo esto, **empezamos por la izquierda** te dice **que es negativa, entonces hay que empezar aquí** y como hay una asíntota hay que seguirla así sin tocarla, luego hay que hacer así para pasar por este punto **y seguir hasta abajo**. Ahora te dice que **vuelve a bajar**

84. E2: ¡Perdón! ¿Y por qué empiezas ahí?

85. A: Porque se empieza ahí, ¡no!, Bueno, no sé, **siempre hay que empezar por la izquierda creo.**

86. A: Entonces te dice, hay **un negativo y otro negativo entonces bajas por aquí que sería así, bajas por aquí encuentras el mínimo aquí y te dice que subas entonces tienes que subir por aquí**

87. A: Y luego te dice **que vuelvas a subir**, entonces después de aquí irías aquí, vas al punto y ya está

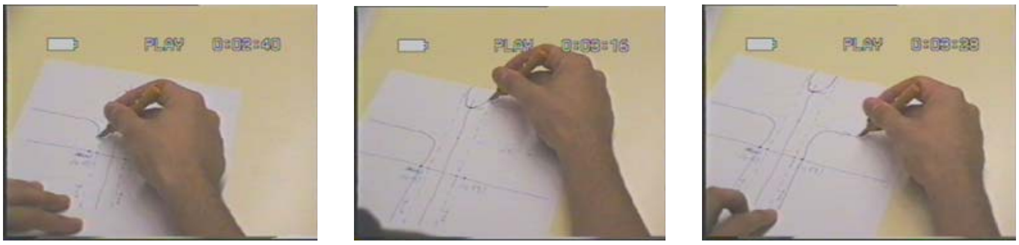
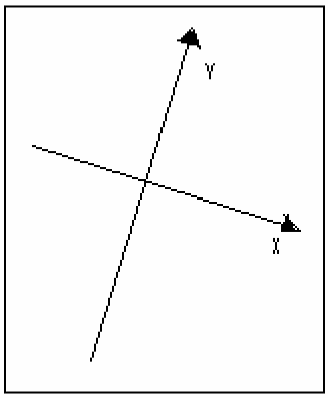


Figura 23. Esbozo de la gráfica del alumno G

En el párrafo que sigue a continuación se pretendía crear un conflicto semiótico de tipo cognitivo que le llevara a poner en cuestión la proyección metafórica del esquema orientacional que utilizaba en su comprensión de las asíntotas verticales y horizontales. Se trataba primero de observar si el alumno, ante un conflicto semiótico fácil de superar, en nuestra opinión, recurría en primera instancia a la metáfora orientacional, lo cual efectivamente sucedió. Consideramos que se trata de un conflicto semiótico fácil de superar ya que los ejes, están levemente inclinados con relación a los bordes de la hoja de papel, pero no se llega al extremo de que el alumno puede interpretar que se han intercambiado los ejes.

TRANSCRIPCIÓN	OBSERVACIONES
122. E2: Tengo otra pregunta, olvidémonos de esta gráfica. Si yo representara los ejes de esta forma… la tienes así. Represéntame las dos asíntotas, las verticales y las horizontales	El entrevistador toma una hoja en blanco y dibuja un sistema de coordenadas ortonormal, pero con los ejes ligeramente inclinados con relación a los bordes de la hoja (ver figura). El objetivo es ver cómo dibuja las asíntotas el alumno 
123.A: Pues la uno,…	La primera reacción del alumno es girar la hoja para conseguir que los ejes

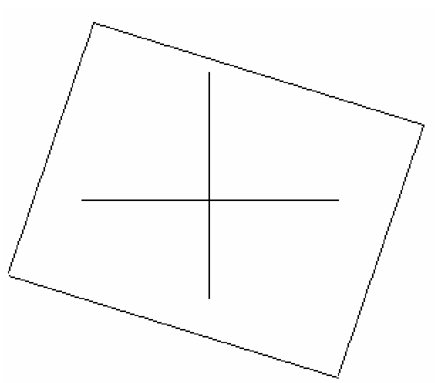
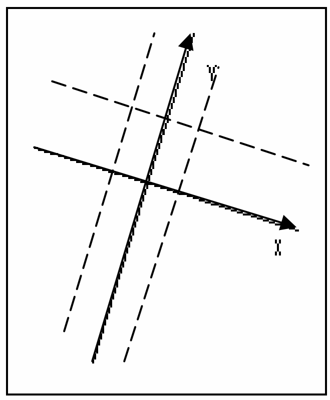
	queden en posición horizontal y vertical con respecto a él (ver figura) 
124.E2: Así	El entrevistador de nuevo pone la hoja en la posición inicial
125.A: Pues, no sería así, o sea, pues igual pero así, la del uno estaría aquí la del menos uno estaría aquí, la del tres estaría aquí	El alumno, después de unos momentos de indecisión, dibuja las asíntotas paralelas a los ejes, tal como indica la figura. 

Tabla 45. Decimoprimero fragmento de la entrevista al alumno *G*

4.3.4 Alumno *H*

Otro ejemplo significativo es el caso del alumno *H* del profesor *D* (anexo 6), que, según la institución escolar, tenía un buen dominio de la representación gráfica de funciones. A este alumno se le pidió que comentara verbalmente los pasos previos (dominio; cortes con los ejes; asíntotas y comportamiento en el infinito; estudio de máximos, mínimos, intervalos de crecimiento y decrecimiento; estudio de puntos de inflexión e intervalos de concavidad y convexidad) y la construcción de la gráfica de su examen. Tanto la gráfica como los pasos previos de su respuesta en el examen eran correctos.

Si bien en su respuesta escrita no se detectó el uso de metáforas que no fuesen las fosilizadas, éstas fueron omnipresentes en su explicación verbal de como había construido la gráfica. En el análisis de su trascripción hemos detectado que, en general, utiliza las mismas proyecciones metafóricas de los esquemas de imágenes comentadas en el análisis de la trascripción del alumno *G*. En los fragmentos de trascripción analizados observamos, al igual que con los otros alumnos, que las metáforas son reforzadas por su gesticulación.

Parte-todo y contenedor

Las proyecciones metafóricas (ontológicas) de los esquemas de las imágenes "parte-todo" y "contendor" son usadas por este alumno para estructurar su conocimiento del objeto matemático "dominio de una función" y "puntos de corte con los ejes", tal como se observa en el siguiente fragmento de la trascripción de su entrevista:

3. A: Y empezaré calculando el dominio de la función y como tenemos una función racional el dominio es **todos los números reales menos los números que eliminan el denominador**, que en este caso es **el uno**, luego tengo que el **dominio es todo los reales menos el uno** (hace gestos con el bolígrafo). Luego continuaré **calculando los puntos de corte con los ejes**, para calcular los puntos de corte con el eje "ox" igualaré la función a cero y **me salen el origen de coordenadas el cero cero**, y **el menos tres cero**, luego calcularé los de **corte con el "oy",** que me sale **el cero cero**, **es el mismo que éste**.

En 4, el alumno *H* comete el error de identificar la asíntota vertical con un número. Este error, que tiene su origen en la forma de calcular las asíntotas, produce una cierta metonimia en el alumno que le lleva a identificar la parte por el todo:

4. A: Muy bien, luego procederé ya con el cálculo de las asíntotas**, la asíntota vertical será aquellos números que eliminen el denominador** que en este caso es el uno, y para comprobar si es una asíntota vertical haré el límite por las dos bandas y veo que me da infinito por tanto tengo que **la asíntota vertical es uno**

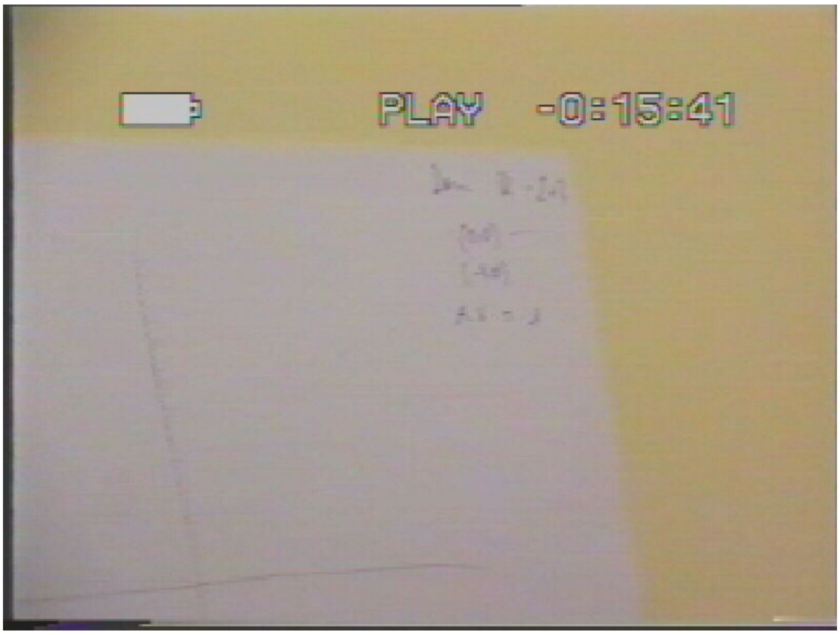


Figura 24. Imagen de la representación de asíntota del alumno H

En la imagen podemos ver la representación que hace *"AV=1"* para referirse a la asíntota vertical de una función

Movimiento ficticio

Las expresiones metafóricas que sugieren "movimiento ficticio" como resultado de la proyección metafórica del esquema del camino también son usadas por este alumno. En el segmento siguiente, para estructurar su conocimiento del objeto matemático "crecimiento y decrecimiento de una gráfica", sugiere algunos puntos como "lugares" por donde se "pasa". Los gestos que hace recorriendo con el bolígrafo la gráfica mientras habla, también son una evidencia que nos sirve para ilustrar este hecho:

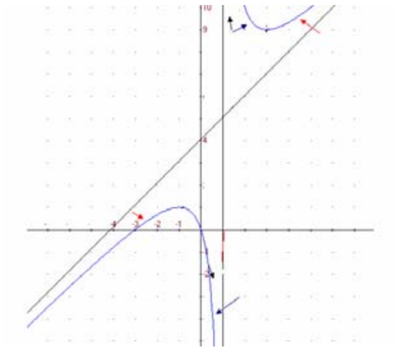
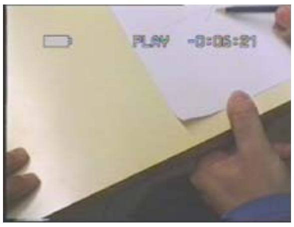
TRASCRIPCION	OBSEVACIONES
42. A: Yo creo que **por aquí s**ería creciente **hasta que llega al máximo,** entonces pasa a ser decreciente y aquí arriba sería decreciente este primer trozo hasta **que llega al mínimo y aquí** empezaría a ser creciente	El alumno señala con su bolígrafo cada parte de la gráfica haciendo un recorrido continuo sobre ella, en la flechas rojas dice que es creciente y en las azules decreciente    

Tabla 46. Primer fragmento de la entrevista al alumno *H*

En 16, da una explicación de como ha hallado las asíntotas verticales. En ella podemos observar dos metáforas que actúan conjuntamente. Por una parte, tenemos una metáfora orientacional (arriba-abajo), por otra, tenemos el "movimiento ficticio" ya que "la función se aproxima por arriba y por abajo", además hace gestos con el bolígrafo para representar la tendencia de la gráfica en el entorno de la asíntota, y al final de un breve momento de cálculos dibuja dos flechas que representaran la tendencia de la gráfica

16. A: Voy a calcular para equis igual a uno **acercándose por arriba de la función** que es equis al cuadrado más tres equis partido equis menos uno, tengo que….. me sale…… infinito, ¿no? ¡Me parece!..... más infinito, y el límite… de la equis……………………por tanto ya sé **que la función cuando se acerca al uno por números más grandes que uno tenderá hacia arriba y cuando se acerca al uno por números más pequeños tenderá hacia abajo**

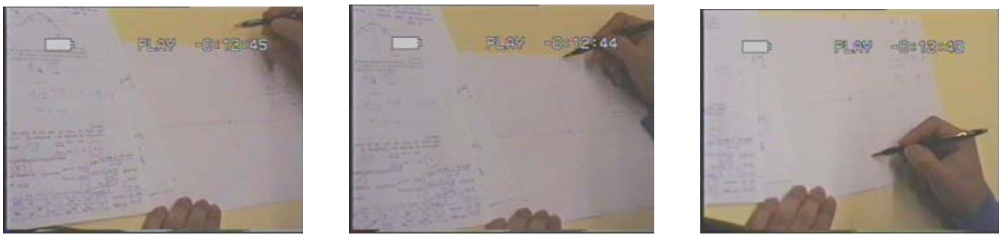


Figura 25. Gestos del alumno *H* expresando la tendencia de la gráfica

El alumno *H*, a diferencia del alumno *G*, no llega a manifestar explícitamente que la asíntota vertical es una recta que no se llega a alcanzar nunca, o que es una barrera. En su explicación de lo que es una asíntota vertical recurre a las metáforas que se hallan fosilizadas en el concepto de límite, en 19 y 20 vemos este hecho:

19 E2: Vale, ¿y qué entiendes por asíntota vertical?

20 A: La asíntota vertical es **una recta que nos permite estudiar el comportamiento de la función cuando esta tiende a más infinito o a menos infinito**

La asíntota es una barrera de separación

El alumno *H* sólo manifiesta su concepción metafórica de asíntota "como barrera de separación" cuando tiene que explicar qué entiende por asíntota oblicua, el alumno hace gestos con la mano izquierda para explicar que la asíntota oblicua es algo así como un "muro" que divide la gráfica en dos partes, después de los gestos dibuja la recta que "separará" la gráfica. En 35 y 36 se ilustra este hecho:

35. E2: ¿Qué significa una asíntota oblicua, qué entiendes por eso?
36. A: Una asíntota oblicua **es una recta que parte la función en dos partes simétricas respecto de la asíntota**, nos saldría la recta "*y*" igual a equis más cuatro,… Que sería más o menos una cosa así, esta sería la recta una cosa así

Figura 26. Gestos del alumno *H* representado la asíntota como obstáculo

Metáfora orientacional

El alumno *H* en su entrevista dio respuestas en las que se podía inferir; por un lado, que tenía un conocimiento del concepto de crecimiento y decrecimiento de una función en un punto en términos del signo de la derivada, y por otro, que entendía estos conceptos en términos de la metáfora orientacional. Además el alumno manejaba ambas interpretaciones sin ningún tipo de conflicto cognitivo

TRANSCRIPCIÓN	OBSERVACIONES
28. E2: ¿Y qué significa que una función sea creciente o sea decreciente?	El entrevistador formula esta pregunta con el objetivo de ver si el alumno amplia su discurso metafórico y asocia subir con creciente y bajar con decreciente
29. A: Una función es **creciente cuando el pendiente es positivo y decreciente cuando el pendiente es negativo**	El alumno al contrario de lo que esperábamos contesta con una argumentación más analítica que metafórica
30. E2: Vale, ¿y gráficamente cómo lo entiendes?	El entrevistador hace esta pregunta con el objetivo de ver cómo interpreta esta información el alumno al representarla

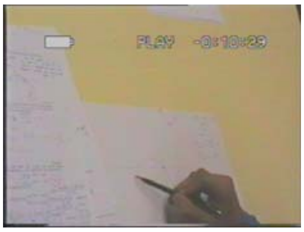
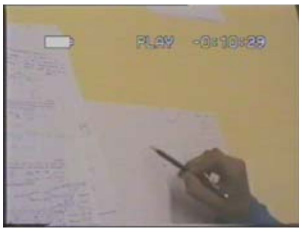
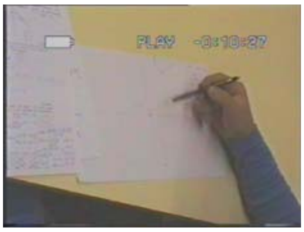
31. A5: Bueno gráficamente yo entiendo que **es creciente cuando la función va hacia arriba y decreciente cuando la función va hacia abajo**	El alumno acompaña su argumentación con gesto, y utiliza además de su lenguaje dinámico la metáfora orientacional   

Tabla 47. Segundo fragmento de la entrevista al alumno *H*

En el párrafo que sigue a continuación se pretendía crear un conflicto semiótico de tipo cognitivo al alumno *H*, tal como se hizo con el alumno *G*, que le llevara a poner en cuestión la metáfora orientacional que había manifestado en diversos segmentos de la entrevista. Se trataba primero de observar si el alumno, ante un conflicto semiótico que, en nuestra opinión, no fuese fácil de superar, recurría en última instancia a la metáfora orientacional o bien al signo de la derivada. Consideramos que se trata de un conflicto semiótico que no es fácil de superar ya que a diferencia del alumno *G*, los ejes no están levemente inclinados con relación a los bordes de la hoja de papel, sino que se llega al extremo de que el alumno puede interpretar que se han intercambiado los ejes.

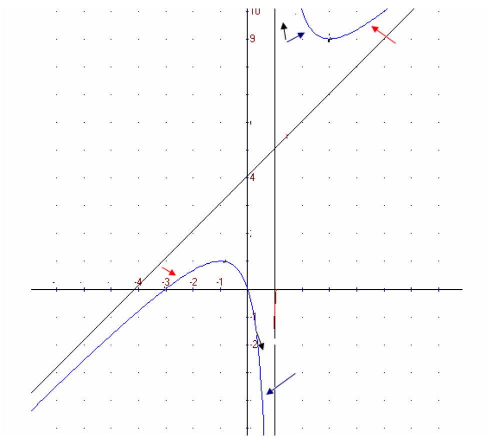
TRASCRIPCIÓN	OBSERVACIONES
41. E2: Bueno, entonces vamos a continuar, explícanos un poco visualmente dónde la gráfica es creciente y dónde es decreciente	El entrevistador formula esta pregunta con el objetivo de ver si el alumno amplia la metáfora antes dicha "creciente cuando la función va hacia arriba y decreciente cuando la función va hacia abajo" y ver si es capaz de argumentar de otra forma
42. A: Yo creo que por aquí sería creciente hasta que llega al máximo entonces pasa a ser decreciente y aquí arriba sería decreciente este primer trozo hasta que llega al mínimo y aquí empezaría a ser creciente	El alumno señala con su bolígrafo la cada parte de la gráfica haciendo un recorrido continuo sobre ella, en la flechas rojas dice que es creciente y en las azules decreciente 

Tabla 48. Tercer fragmento de la entrevista al alumno *H*

Al hacer el entrevistador el giro de la hoja, el alumno experimenta un conflicto semiótico y recurre al esquema orientacional para resolverlo, lo cual le lleva a considerar que lo que va hacia es creciente y lo que va hacia abajo es decreciente. Lo que antes había dicho correctamente que era creciente, ahora lo confunde y dice que es decreciente y viceversa, En el fragmento siguiente observamos este hecho. El alumno *H* solo superó este conflicto cuándo el entrevistador 2, se lo aclaró diciéndole que la gráfica continua siendo la misma, que el giro de la hoja no hace variar las propiedades matemáticas de esta.

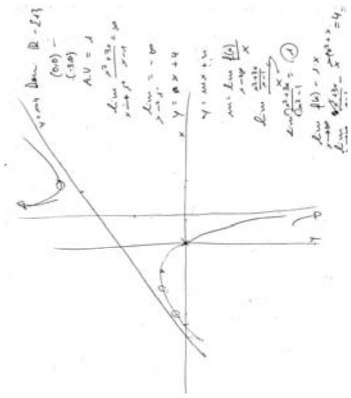
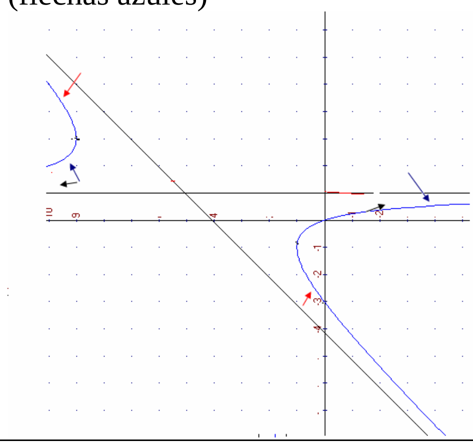
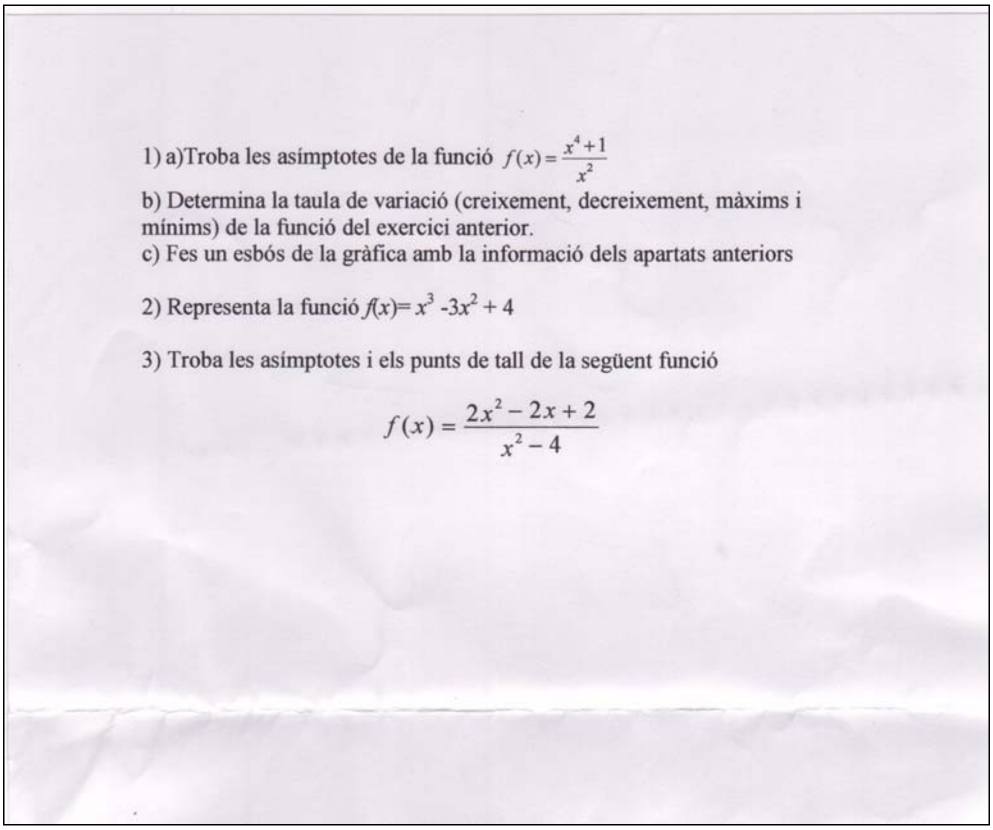
TRANSCRIPCIÓN	OBSERVACIONES
47. E2: Vale, de acuerdo. ¿Y si yo le cambiara de posición a la hoja, por ejemplo poniéndola así, reconocerías dónde es creciente y dónde es decreciente la gráfica, cambiaría en algo?	El entrevistador hace esta pregunta con el objetivo de ver si el alumno tiene la idea metafórica de orientación, con respecto de los ejes coordenados, y gira la hoja 90º más o menos de la manera que muestra la figura siguiente. 
48. A: ¿Pero se supone qué has cambiado los ejes también de sitio?	El alumno duda durante unos minutos y después pregunta
49. E2: No, no, los ejes son exactamente los mismos	El entrevistador le aclara que no se han rotado los ejes
50. A: Pues visto desde aquí, supongo que aquí sería creciente y en esta parte sería decreciente y aquí arriba sería creciente aquí que va hacia arriba y aquí sería decreciente	El alumno duda durante unos segundos y señala con el dedo (flechas rojas) lo que él piensa que ahora es decreciente y lo que ahora es creciente (flechas azules) 

Tabla 49. Cuarto fragmento de la entrevista al alumno *H*

4.3.5 Alumno *I*

A continuación analizaremos una serie de tres entrevistas realizadas a los alumnos *I, J y K* que en el momento de dicha actividad eran alumnos de los profesores *W* (tutor del CAP) y *E* (estudiante del CAP). La actividad fue relativamente corta y se trataba de que explicasen como habían hecho la gráfica del examen previamente realizado con el profesor *W*. La imagen siguiente ilustra el enunciado del problema



1) a)Troba les asímptotes de la funció $f(x)=\frac{x^4+1}{x^2}$

b) Determina la taula de variació (creixement, decreixement, màxims i mínims) de la funció del exercici anterior.

c) Fes un esbós de la gràfica amb la informació dels apartats anteriors

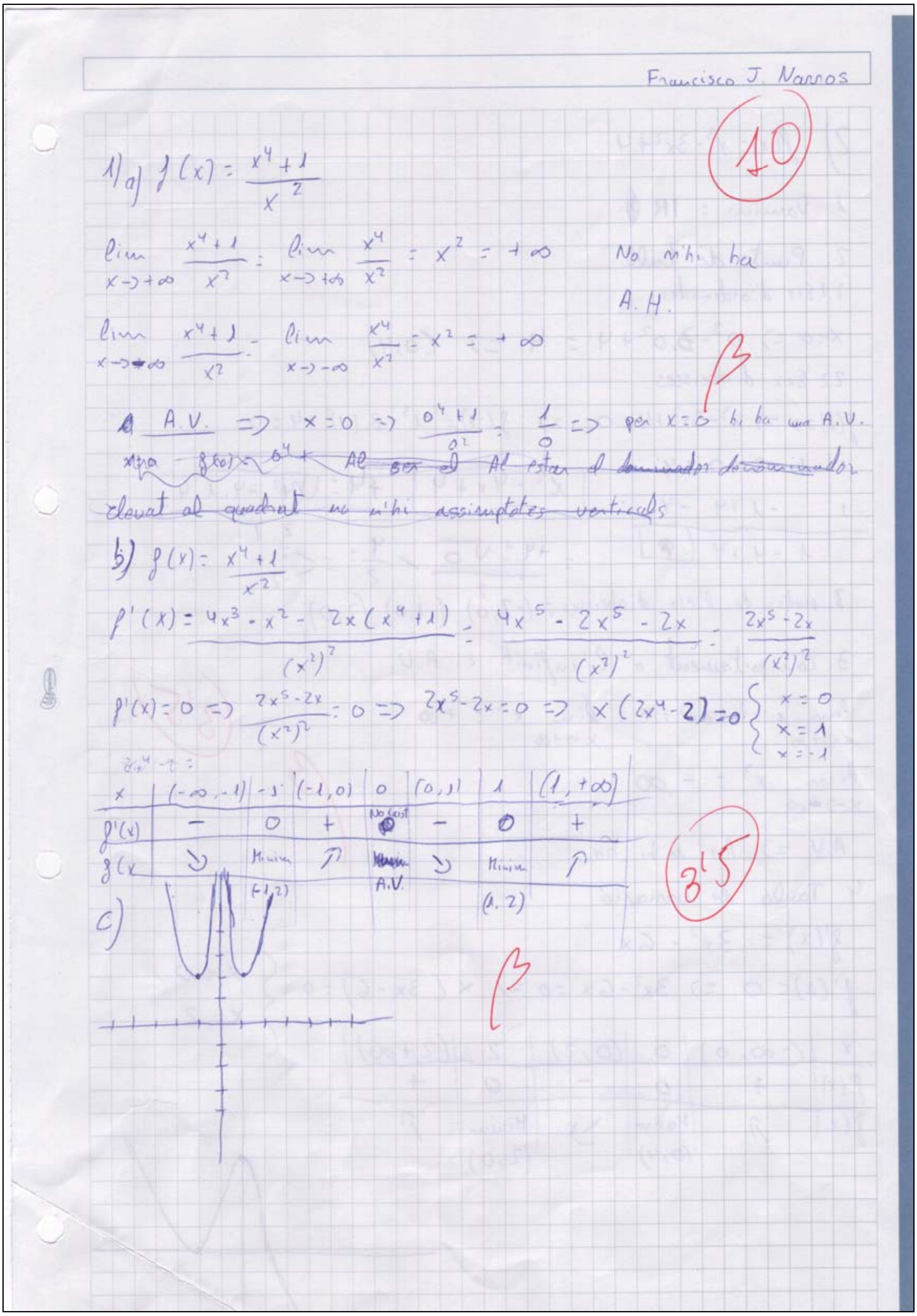
2) Representa la funció $f(x)= x^3 -3x^2 + 4$

3) Troba les asímptotes i els punts de tall de la següent funció

$$f(x)=\frac{2x^2-2x+2}{x^2-4}$$

Figura 27. Imagen del enunciado del examen realizado por los alumnos *I, J* y *K*

En la entrevista realizada al alumno *I*, éste muestra claras evidencias de que estructura su comprensión de las gráficas de funciones, básicamente, a partir de las mismas proyecciones metafóricas observadas en los alumnos *G* y *H* anteriormente analizados. La siguiente imagen ilustra el examen realizado por este alumno



Francisco J. Navarros

10

1) a) $f(x) = \frac{x^4+1}{x^2}$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^4+1}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^4}{x^2} = x^2 = +\infty$ No n'hi ha A.H.

$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^4+1}{x^2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^4}{x^2} = x^2 = +\infty$

B

A.V. $\Rightarrow x = 0 \Rightarrow \frac{0^4+1}{0^2} = \frac{1}{0} \Rightarrow$ per $x = 0$ hi ha una A.V.

~~Al estar el denominador elevat al quadrat no n'hi assimptotes verticals~~

b) $f(x) = \frac{x^4+1}{x^2}$

$f'(x) = \frac{4x^3 \cdot x^2 - 2x(x^4+1)}{(x^2)^2} = \frac{4x^5 - 2x^5 - 2x}{(x^2)^2} = \frac{2x^5-2x}{(x^2)^2}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x^5-2x}{(x^2)^2} = 0 \Rightarrow 2x^5 - 2x = 0 \Rightarrow x(2x^4-2) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$

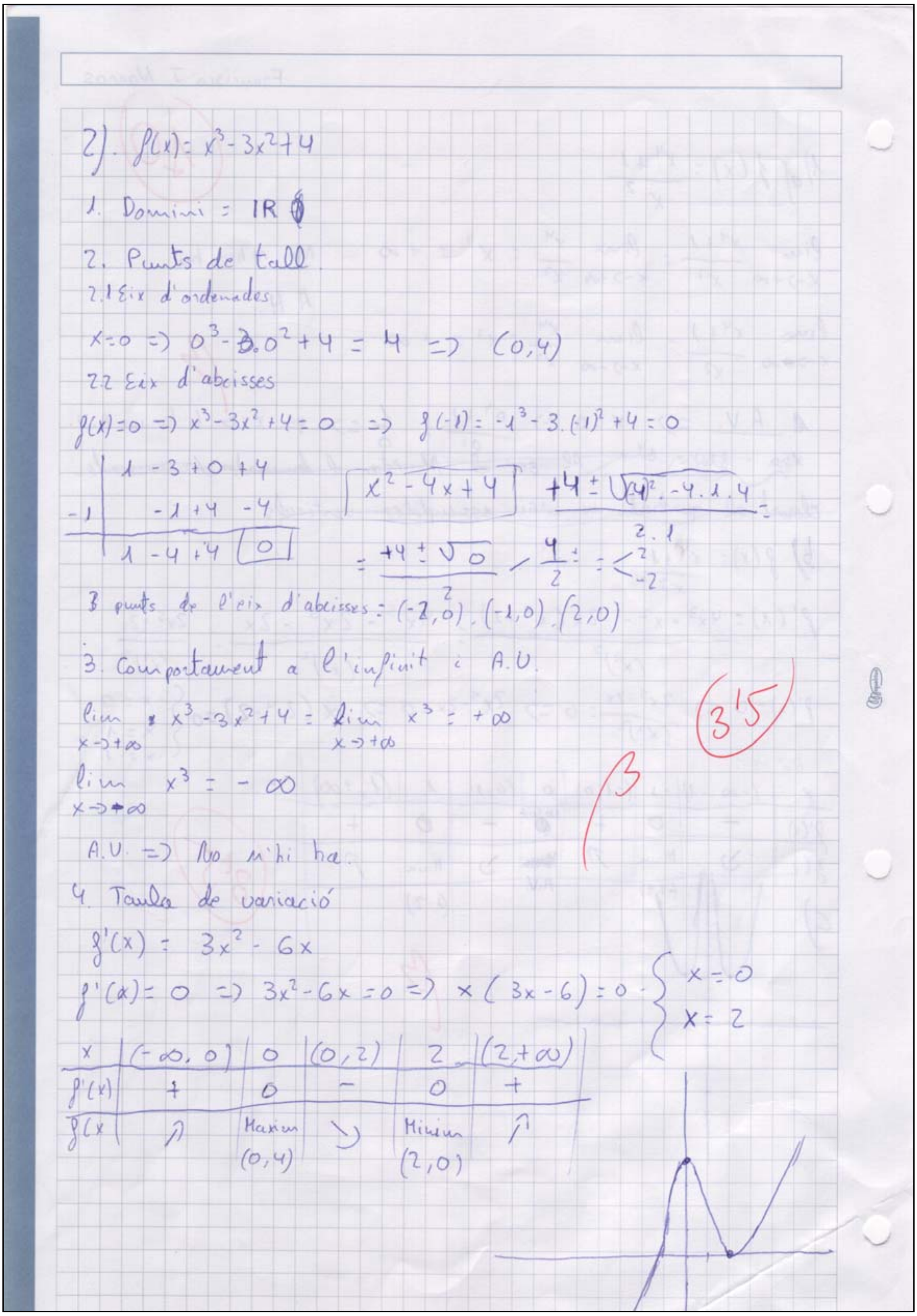
x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	No cont	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	Mínim $(-1,2)$	↗	A.V.	↘	Mínim $(1,2)$	↗

3'5

c)

B

Figura 28. Primera página del examen realizado por el alumno *I*



2). $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

1. Domini = $\mathbb{R}$

2. Punts de tall

2.1 Eix d'ordenades

$x = 0 \Rightarrow 0^3 - 3 \cdot 0^2 + 4 = 4 \Rightarrow (0,4)$

2.2 Eix d'abcisses

$f(x) = 0 \Rightarrow x^3 - 3x^2 + 4 = 0 \Rightarrow f(-1) = -1^3 - 3 \cdot (-1)^2 + 4 = 0$

	1	-3	+0	+4
-1		-1	+4	-4
	1	-4	+4	$\boxed{0}$

$\boxed{x^2 - 4x + 4}$ $\dfrac{+4 \pm \sqrt{(4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \dfrac{+4 \pm \sqrt{0}}{2} = \dfrac{4}{2} = <^{2}_{-2}$

3 punts de l'eix d'abcisses: $(-2,0)$, $(-1,0)$, $(2,0)$

3. Comportament a l'infinit i A.V.

$\lim_{x \to +\infty} x^3 - 3x^2 + 4 = \lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$

A.V. $\Rightarrow$ No n'hi ha.

4. Taula de variació

$f'(x) = 3x^2 - 6x$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x(3x - 6) = 0 \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array} \right.$

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	Maxim (0,4)	↘	Minim (2,0)	↗

3

3'5

Figura 29. Segunda página del examen realizado por el alumno *I*

En el segmento de la entrevista que sigue a continuación, el alumno *I* explica cómo ha realizado la gráfica de la función. En su explicación podemos observar tres metáforas que actúan conjuntamente. Por una parte, tenemos una proyección metafórica del *esquema orientacional* (arriba-abajo), por otra, tenemos el *movimiento ficticio* ya que "la función empieza descendiendo", "se va acercando a cero", etc. Y por último, tenemos la metáfora conceptual la asíntota es una recta que no se llega a alcanzar nunca "nunca la toca". También observamos que, de manera coherente con su proyección metafórica del esquema camino sobre las gráficas de las funciones, entiende el concepto de menos infinito como lugar de partida y el concepto de más infinito como lugar de llegada, lo cual nos lleva a considerar que proyecta también lo que Lakoff y Núñez llaman la metáfora básica del infinito (BMI)

TRANSCRIPCION	OBSERVACIONES
2. A: Vamos a partir de esta función, voy a hacer la gráfica, como hemos visto antes no hay asíntotas horizontales y que hay una asíntota vertical en equis igual a cero. A partir de aquí realicé la tabla de máximos y mínimos y encontré que en equis igual a menos uno hay un mínimo y en equis igual a uno hoy otro mínimo.	El alumno mientras realiza estos comentarios señala con su bolígrafo la parte del examen en el que se hallan los cálculos que ya realizó el día del examen. Después, en la hoja en blanco que previamente le había entregado el entrevistador, dibuja un sistema de ejes coordenados 
3. A: Y como hemos visto aquí en los pasos anteriores **se empieza descendiendo de menos infinito hacia abajo,** y en equis igual a menos uno hay un mínimo, y luego sabemos que **la función luego sube para arriba, y se va**	Mientras dice esto dibuja casi de un solo trazo (ralentizando la traza en el entorno del mínimo) la parte de la gráfica situada a la izquierda del eje de ordenadas, señalando, sobre el eje "*x*" un punto (se supone que se corresponde con el valor de la abscisa

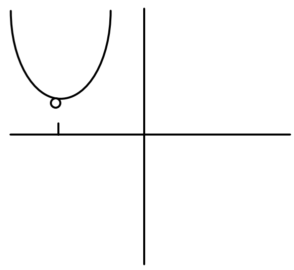
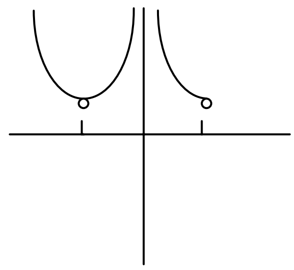
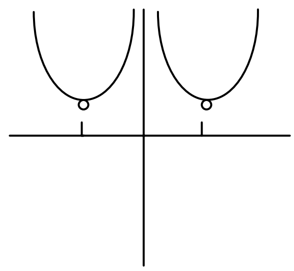
acercando a cero pero **nunca lo toca porque hay una asíntota vertical.**	*x=-1*), y además dibuja un punto para simular el mínimo 
4. A1: Luego **la función sigue, desciende desde equis igual a cero porque hay una asíntota vertical hasta equis igual a uno**, que hay otro mínimo **y luego la función crece de nuevo hasta más infinito.**	Mientras dice esto dibuja la otra parte de la gráfica de igual forma que la anterior (haciendo una pausa en el "punto del mínimo"). Además dibuja el punto sobre el eje "*x*" (se supone que se corresponde con el valor de la abscisa *x=1*), y también dibuja un punto para representar el otro mínimo  

Tabla 50. Primer fragmento de la entrevista al alumno *I*

El entrevistador al indagar más sobre la idea que tiene este alumno sobre la asíntota de una función, le pide que explique un poco más, el alumno responde de manera parecida a como lo ha hecho el alumno *G*, es decir comete el error de identificar la asíntota vertical con un número. Este error, que tiene su origen en la forma de calcular las asíntotas, produce una cierta metonimia en el alumno que le lleva a identificar la parte por el todo:

5. E1: ¿Nos podrías explicar un poco más qué entiendes por asíntota vertical?

6. A: Yo entiendo por asíntota vertical, **es el valor que no existe en la función**

Ahora bien, en el caso de este alumno hay que resaltar que aplica una proyección metafórica de tipo ontológico muy interesante ya que implícitamente distingue entre “ser” y “existir”. Para este alumno se puede “ser” (“es el valor”) y al mismo tiempo no existir (“que no existe en la función”)

En un fragmento posterior, al pedirle cómo se puede interpretar esto que ha dicho gráficamente, el alumno responde de manera confusa, aunque podemos intuir que de nuevo usa la metáfora “la asíntota es una recta que no se llega a alcanzar nunca”:

8. A: ¡Gráficamente! **es el punto que se va acercando a la gráfica pero que nunca la toca**

En la pregunta 9 (¿Qué quiere decir que una función es creciente y decreciente?) el entrevistador pretende que el alumno amplíe las expresiones metafóricas que sugieren que entiende el decrecimiento y el crecimiento de una función en un punto o en un intervalo en términos orientacionales. En su respuesta podemos ver como el alumno efectivamente utiliza expresiones metafóricas para explicar estos conceptos, y además utiliza gestos para simular el crecimiento y decrecimiento de la gráfica de la función

7. A: Yo interpreto que si… **la función crece va para arriba**

8. E1: Pues dilo

9. A: **Y cuando decrece va para abajo**

Figura 30. Gestos del alumno *I* expresando movimiento

En el párrafo que sigue a continuación se pretendía saber si podía interpretar el crecimiento o el decrecimiento de una función en términos del signo de la derivada. En la respuesta del alumno, confusa de nuevo, podemos intuir que no llega a tener claro que para conocer si la función es creciente o decreciente hay que calcular el signo de la derivada:

10. E2: ¿Y teóricamente tienes alguna forme de demostrarlo?
11. A: ¿Teóricamente?
12. E1: ¿O sea, cómo lo sabes?
13. A: Pues a partir de aquí sustituyendo la formula en los puntos
14. E2: ¿Y qué fórmula?
15. A: La función, ¡no!

4.3.6 Alumna *J*

En la entrevista realizada a la alumna *J*, éste muestra claras evidencias de que estructura su comprensión de las gráficas de funciones, básicamente, a partir de las mismas proyecciones metafóricas observadas en los alumnos *G*, *H* e *I* anteriormente analizados. La siguiente imagen ilustra el examen realizado por esta alumna:

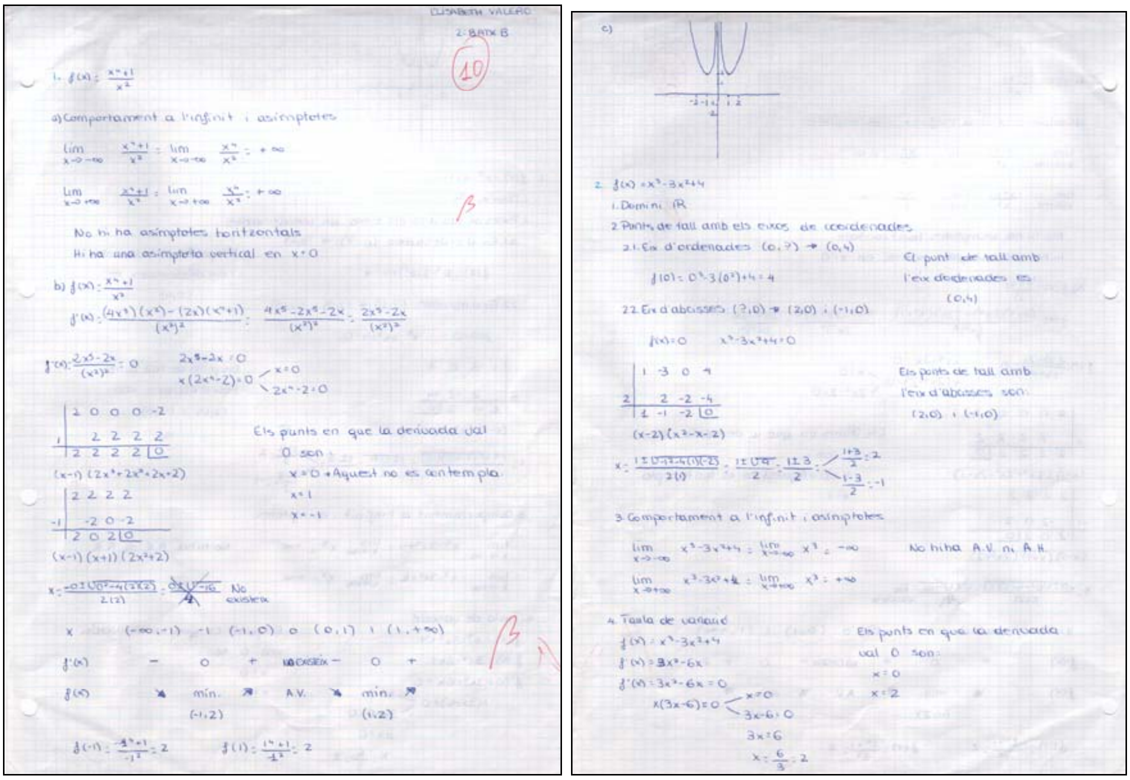
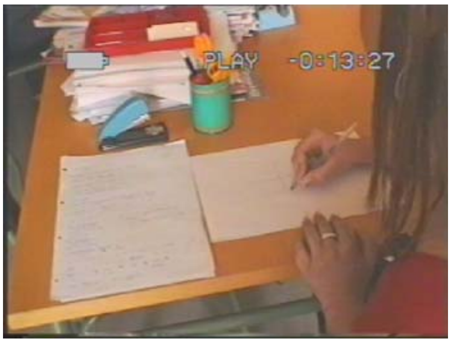
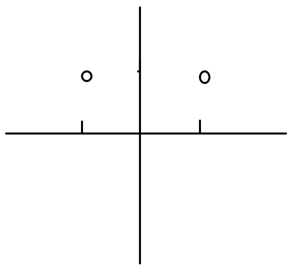


Figura 31. Imagen del examen realizado por la alumna *J*

En el segmento de la entrevista que sigue a continuación, la alumna *J* explica como ha realizado la gráfica de la función. En su explicación podemos observar dos metáforas que actúan conjuntamente. Por una parte, tenemos una proyección metafórica del *esquema orientacional* (arriba-abajo), por otra, tenemos el *movimiento ficticio* ya que “desde menos infinito hasta menos uno baja, desde menos uno hasta cero sube”, etc. También observamos que, de manera coherente con su proyección metafórica del esquema camino sobre las gráficas de las funciones, entiende el concepto de menos infinito como lugar de partida y el concepto de más infinito como lugar de llegada, lo cual nos lleva a considerar que proyecta también lo que Lakoff y Núñez llaman la metáfora básica del infinito (BMI).

TRASCRIPCION	OBSERVACIONES
… 9. A: Entonces tendríamos una asíntota vertical en equis igual a cero.	Al terminar de dibujar los ejes coordenados la alumna hace un gesto señalando con su bolígrafo el eje de las "*y*" para especificar que esa recta coincide con la asíntota vertical 
10. A: A partir de aquí hemos hecho la tabla de variación y hemos visto que tenemos un mínimo en el menos uno dos, aquí más o menos tendríamos un mínimo, luego hemos visto que teníamos otro mínimo en el uno dos.	Continúa la alumna dibujando los puntos, señalando sobre el eje "*x*" dos punto (se supone que se corresponde con el valor de la abscisa *x =-1 y x =1*), y además dibuja dos puntos sobre el plano (se supone que se corresponden con el valor (-1, 2) y el otro en (1,2), para simular los mínimos) 
11. A: Y a partir de aquí teniendo en cuanta la asíntota y sabiendo que no hay puntos de corte con los ejes pues diríamos, que **desde menos infinito hasta menos uno baja, desde menos uno hasta cero sube, luego a partir de cero a**	Mientras dice esto dibuja la gráfica de la función casi de un solo trazo, aunque dividido en cuatro tiempos primero dibuja la parte de la gráfica situada a la izquierda del eje de ordenadas y hace una parada en el punto del mínimo que previamente había dibujado, luego continua dibujando la otra parte de la gráfica, de esta manera también hace el trazo de la derecha del eje de las

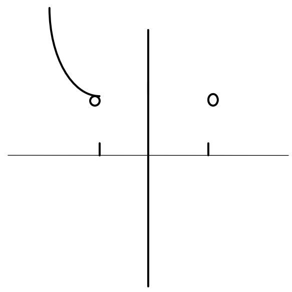
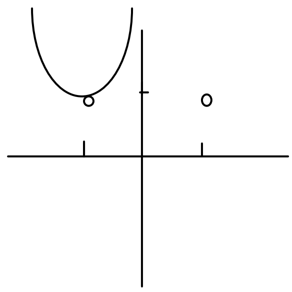
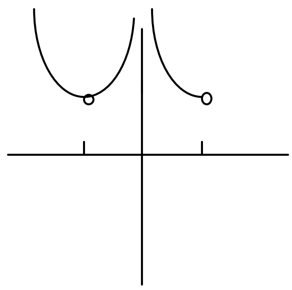
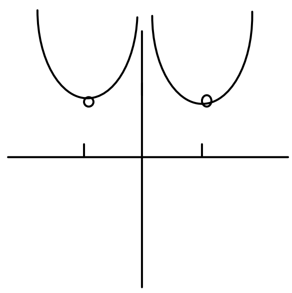
uno baja, y a partir de uno a más infinito sube. Y así tenemos la gráfica.	ordenadas     La alumna señala con su bolígrafo, haciendo movimientos sobre el eje “*y*”, la recta “*y*” que en este caso coincide con la asíntota de la gráfica

Tabla 51. Primer fragmento de la entrevista a la alumna *J*

En un fragmento posterior, al pedirle que explique que entiende por asíntota vertical, la alumna responde de manera que podemos intuir que usa la metáfora “la asíntota es una recta que no se llega a alcanzar nunca” conjuntamente con una metonimia que convierte a la recta en un punto

13. A: Asíntota vertical es cuando… bueno en este caso en equis igual a cero quiere decir que la **gráfica no llegará nunca a tocar ese punto**, se ira **aproximando pero nunca llegará a tocarlo**.

En la pregunta 17 (¿Cuando tu dices que baja y sube, qué quieres decir con esto?) el entrevistador pretende que la alumna amplíe las expresiones metafóricas que sugieren que entiende el decrecimiento y el crecimiento de una gráfica de función en un punto o en un intervalo en términos orientacionales, tal como ha descrito la gráfica anterior. En su respuesta podemos ver como la alumna emplea, de un lado un razonamiento basado en el signo de la derivada, y del otro interpreta estos resultados en términos metafóricos

18. A: Bueno pues, cuando tenemos la tabla de variación tenemos los puntos en que la derivada vale cero, a partir de aquí pues desde menos infinito hasta menos uno cogemos un punto, por ejemplo el menos dos y lo sustituyes en la derivada y entonces miras el número si el número que da es **negativo quiere decir que va hacia abajo**, **o sea que la forma sería hacia abajo y sería negativo.**

19. A: Vale

20. A: Y a partir de aquí así, entre menos uno cero coges el cero coma cinco

21. E2: ¡Vale! pero asocias lo de bajar y subir con creciente y decreciente, o sea la gráfica…

22. A: Si, **cuando es negativa siempre es decreciente** cuando es **positiva es creciente**

23. E2. ¿Entonces decreciente es cuándo baja y creciente es cuando sube?

24. A: **Sí**

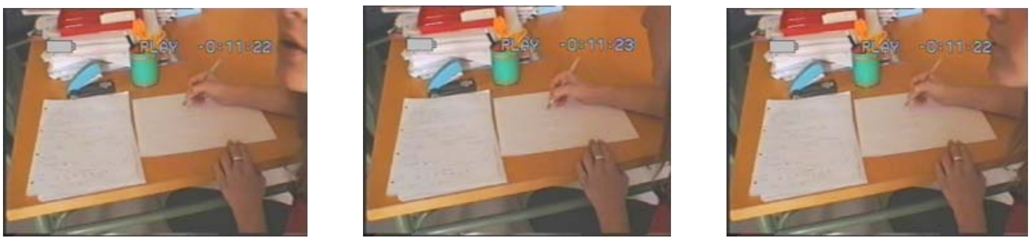


Figura 32. Gestos de la alumna *J* para expresar movimiento de la gráfica

4.3.7 Alumno *K*

En la entrevista realizada al alumno *K*, éste muestra claras evidencias de que estructura su comprensión de las gráficas de funciones, básicamente, a partir de las mismas proyecciones metafóricas observadas en los alumnos *G*, *H*, *I* y *J* anteriormente analizados. La siguiente imagen ilustra el examen realizado por este alumno

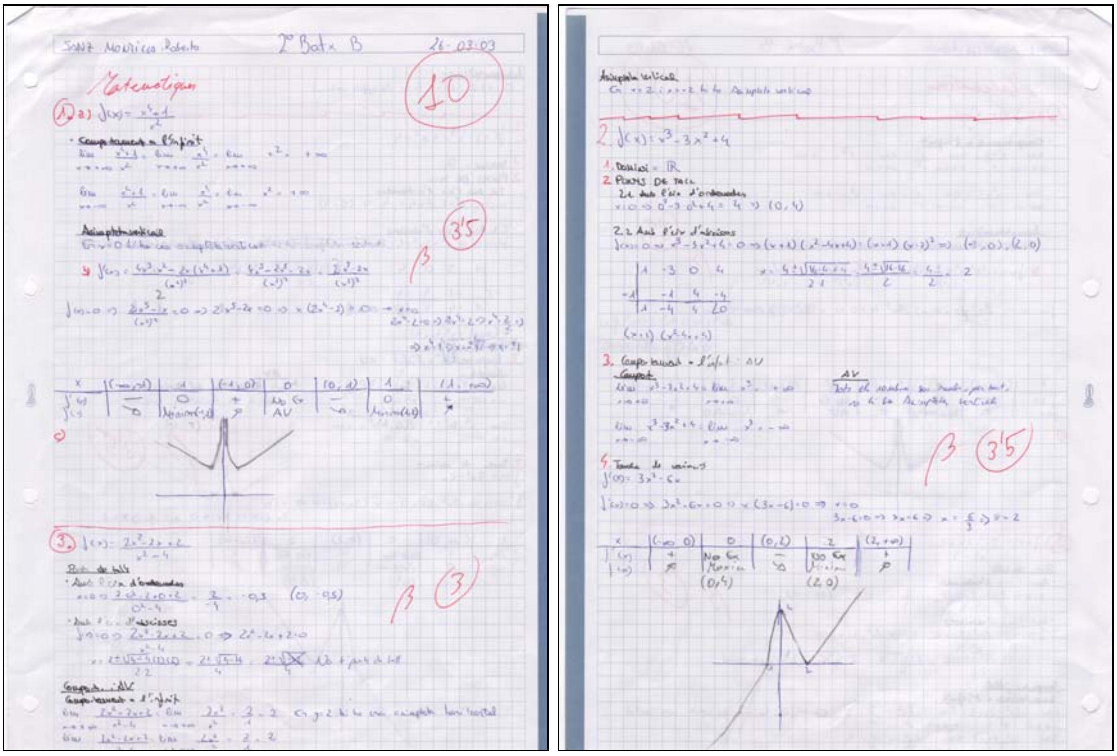
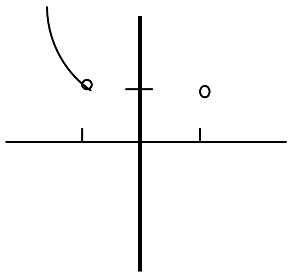


Figura 33. Imagen del examen realizado por el alumno *K*

En el segmento de la entrevista que sigue a continuación, el alumno *J* explica como ha realizado la gráfica de la función. En su explicación podemos observar dos metáforas que actúan conjuntamente. Por una parte, tenemos una proyección metafórica del *esquema orientacional* (bajar-subir), por otra, tenemos el *movimiento ficticio* ya que la gráfica de la función “baja hacia el mínimo”, etc. También observamos que, de manera coherente con su proyección metafórica del esquema camino sobre las gráficas de las funciones, entiende el concepto de menos infinito como lugar de partida y el concepto de más infinito como lugar de llegada, lo cual nos lleva a considerar que proyecta también lo que Lakoff y Núñez llaman la metáfora básica del infinito (BMI)

TRASCRIPCION	OBSERVACIONES
… 4. A: Si no aparecen los mínimos lo siguiente que hay tener importancia son las asíntotas verticales, que es lo que seguramente hay que tener en cuenta, pero como es la línea del número cero, ya con la línea central ya no hace falta	… Al terminar de dibujar los ejes coordenados el alumno hace un gesto resaltando con su bolígrafo el eje de las "*y*" para especificar que esa recta coincide con la asíntota vertical 
5. A: Lo siguiente es observar el comportamiento de la función, que es **desde menos infinito a menos uno es negativo, baja hacia el mínimo,** después hay que observar que **de menos uno al cero sube, comportamiento del cero al uno baja**, **y el comportamiento del uno al más infinito sube.**	El alumno continua haciendo el esbozo de la función, empieza de izquierda a derecha y al mismo tiempo que habla hace gestos del comportamiento de la función con la mano, al igual que señala su examen.  El alumno continua su dibujo después de una pausa el punto que había dibujado como el mínimo y de este manera hace los otros dos trazos de la gráfica

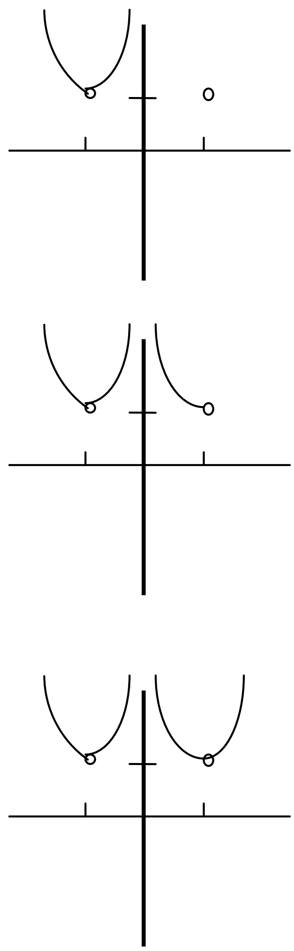


Tabla 52. Primer fragmento de la entrevista al alumno *K*

El entrevistador al indagar más sobre la idea que tiene este alumno sobre la asíntota de una función, le pide que explique un poco más, el alumno responde de manera parecida a como lo ha hecho el alumno *G*, es decir comete el error de identificar la asíntota vertical con un número. Este error, que tiene su origen en la forma de calcular las asíntotas, produce una cierta metonimia en el alumno que le lleva a identificar la parte por el todo:

7. A: Asíntotas verticales es el... Dentro de la función **es el número que no tiene imagen o que no tiene**…

En un fragmento posterior al aclararle, que no es como se cálcula, si no, que de una interpretación de lo que él entiende por el concepto de asíntota, El alumno responde de manera confusa, pero podemos intuir que asume la idea de "asíntota como barrera" o bien un "lugar" por el cual no puede "transitar" la gráfica de la función:

9. A: Que…la función **no pasa por allí**, que no…

En la pregunta 10 (¿Cuándo dices que baja o sube, qué es lo quieres decir con esto?) el entrevistador pretende que la alumna amplíe las expresiones metafóricas que sugieren que entiende el decrecimiento y el crecimiento de una gráfica de función en un punto o en un intervalo en términos orientacionales, tal como ha descrito la gráfica anterior. En su respuesta podemos ver como el alumno efectivamente utiliza expresiones metafóricas para explicar estos conceptos, y además utiliza gestos para simular el crecimiento y decrecimiento de la gráfica de la función. Además, de su respuesta oral y de su gesticulación deducimos que el alumno quiere expresar que si $a<b$ *y* $f(a)>f(b)$ la función es decreciente y que si $a<b$ *y* $f(a)<f(b)$ la función es creciente

11. A3: Que esa función, a partir del número que hay el mínimo, número que está anterior, números anteriores lo que hacen de menor a mayor es que el número que da de imagen da hacia menos, tiene un resultado menor, y cuando se refiere del número mínimo hacia un número mayor la **función o la imagen se dispara, se va hacia arriba**

Figura 34. Gestos del alumno *K* para expresar movimiento de la gráfica

4.4 RESPUESTA A LA 5ª PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN

¿Qué papel juega la metáfora en la negociación de significados?

La metáfora juega un papel clave en la negociación de significados. Ahora bien, este papel puede ser muy diferente según la situación que se considere. A continuación siguen tres episodios en los que la metáfora juega un papel diferente. En los dos primeros episodios el uso de metáforas juega un papel fundamental para llegar a una negociación del significado que el profesor considera apropiada para conseguir la comprensión de sus alumnos.

En cambio, en el tercer episodio se observa, primero, que la negociación de significados permite llegar a un consenso cuando se prescinde de la metáfora orientacional inicialmente utilizada por uno de los alumnos. Después, se observa como la metáfora orientacional vuelve a intervenir (implícitamente) en la negociación de significados que permite dar la respuesta definitiva a la pregunta inicialmente formulada.

4.4.1 La metáfora en la negociación de significados en una interacción profesor-alumno.

Para mostrar el rol que juega la metáfora en la negociación de significados nos centraremos en primer lugar en la metáfora orientacional y en la interacción que se produce entre el profesor *D* y dos alumnos suyos (primero un alumno de 14 años de tercero de Enseñanza Secundaria Obligatoria y, después, otro alumno de 17 años de segundo de Bachillerato de la modalidad de Ciencias Sociales).

Las metáforas orientacionales pueden facilitar inferencias erróneas en los alumnos, puesto que éstos, por ejemplo, ante la gráfica siguiente pueden considerar que, cuando *x* es la abscisa del máximo, la derivada no es cero ya que la recta tangente no es "horizontal"

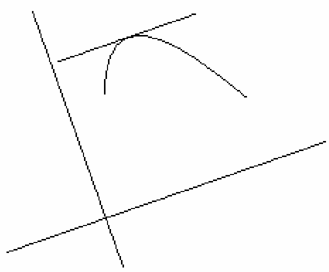


Figura 35. Máximo de una función en un punto

Este posible error no suele manifestarse debido a que en los libros de texto, y en las explicaciones de los profesores, se suelen presentar sistemas de coordenadas que tiene el eje de abscisas en posición horizontal y el eje de ordenadas en posición vertical. Se trata de un típico fenómeno de generación de ejemplos prototipos.

Otro error ampliamente documentado en la investigación didáctica sobre gráficas es el de la confusión entre el eje de ordenadas y el de abscisas o entre la x y la y. Esta confusión se puede explicar con base a la metáfora orientacional ya que lo que el alumno retiene, lo que considera importante, es que hay un eje vertical y uno horizontal, y sus nombres o representaciones son menos importantes. Un caso típico de este fenómeno es el de del siguiente alumno de 3º de ESO (14 años) que está estudiando la resolución gráfica de sistemas de dos ecuaciones de primer grado. Ante la duda de cuál es el eje de ordenadas hace la siguiente pregunta al profesor:

> A: ¿Cuál es el eje de ordenadas? ¿Es el eje vertical? (acompaña la última pregunta con un gesto en el que pone la mano derecha vertical)
>
> P: Sí, el eje de ordenadas es el eje vertical.

Esta identificación de eje vertical con eje de ordenadas y eje de las "y" y eje horizontal con eje de abscisas y eje de las "x" suele funcionar, con alguna confusión, hasta que se comienza a estudiar las asíntotas en el bachillerato, o las rectas paralelas a los ejes al estudiar la geometría analítica. El hecho de que haya funciones que tenga como asíntota vertical la recta $x = 0$ y como asíntota horizontal la recta $y = 0$ hace aumentar la confusión sobre los ejes de coordenadas en algunos alumnos. Este es el caso del siguiente alumno (17 años) de 2º de bachillerato de la modalidad de Ciencias Sociales, que si bien presentaba alguna confusión esporádica entre los ejes, después de estudiar las asíntotas horizontales y verticales tenía problemas para relacionar correctamente los pares: eje de abscisas / eje de ordenadas, eje horizontal / eje vertical, eje de la x / eje de las y y recta $y = 0$ / recta $x = 0$. Su falta de seguridad se debía a que un mismo eje se representaba también con la letra correspondiente al otro eje.

> P: la asíntota horizontal no es $x = 0$.
>
> A: pero no es el eje de abscisas.
>
> P: si, pero el eje de abscisas se representa por $y = 0$, no por $x = 0$.
>
> P: (ante la cara de sorpresa del alumno): el eje de abscisas, el horizontal, se representa por la letra x, pero también se puede considerar formado por todos los puntos cuya altura es cero, o sea por todos los puntos que tienen la y igual a cero.

4.4.2 La metáfora en la negociación de significados en una interacción profesor- clase

En la siguiente configuración didáctica de la clase del profesor *A*, también se observa el rol que juega la metáfora en la negociación de significados, cuando el profesor hace una explicación para toda la clase, entendida como el acoplamiento entre significados personales e institucionales en el seno de un proceso de instrucción. Esto no se puede hacer sin tener en cuenta toda la complejidad asociada a la metáfora, en especial su vinculación con otros instrumentos de conocimiento. Con el análisis de episodios de aula como el que sigue se espera mostrar la coexistencia simultánea de diferentes metáforas con diferentes representaciones, con el uso de elementos genéricos, etc. y como la metáfora juega un rol fundamental en la negociación de significados en el aula.

En la trascripción que sigue, el profesor *A* tiene por objetivo recordar el concepto "dominio de una función" y de las técnicas estudiadas para su determinación. Para ello, el profesor propone dos ejemplos de funciones.

CD: Cálculo del dominio de una función

TRANSCRIPCIÓN	PIZARRA	OBSERVACIONES
21. Entonces comencemos por el dominio…Recordemos que el dominio de una función es el conjunto de valores de la variable independiente que tiene imagen. …... De otra manera; son los valores que yo puedo calcular la imagen, son las equis de las que puedo calcular la imagen.	$f(x)=1/(x+1)$	El profesor borra la pizarra
22. Por ejemplo, esta función $f(x)=1/(x+1)$, el dominio de esta función está formado por el conjunto de números que cuando yo sustituyo la *x* por esos números puede hacer todo este cálculo, o sea, puedo encontrar la imagen.		Escribe la fórmula de la función en la pizarra,
23. ¿Eso siempre se puede hacer?...menos de un número, ¿De cuál?		

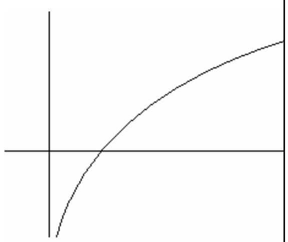
24. A: El –1		
25. Entonces el dominio son los números reales menos el -1, o sea, para cualquier número se puede encontrar una imagen menos la de –1	$D(f) = R$-{1}	Mientras hace este comentario primero señala la *x* y luego hace un gesto para abarcar toda la función
26. Hay funciones más complicadas como por ejemplo, logaritmo neperiano de "*x*"; $f(x) = \ln x$	$f(x) = \ln x$	
27. ¿Cuál es el dominio de esta función? Pensemos **como va la gráfica** y a partir de ….		Pregunta a los alumnos
28. A: De cero a más infinito		
29. Sí, de cero hasta más infinito, es el dominio, porque logaritmos de números negativos no existen, logaritmo de menos uno no existe. ¿El cero incluido o no incluido?	(0,+ ∞)	El profesor escribe en la pizarra "(0,+ ∞)" y señala con el dedo al cero
30. A: No		
31. No… Muy bien		
32. **Por tanto, el dominio de esta función es de cero a más infinito. Recordemos que la gráfica de esta función, hacia una cosa así, .. la gráfica de esta función hacia una cosas así, y el dominio es de cero a más infinito**.		**El profesor hace una gráfica y la señala. Después mueve el dedo índice siguiendo la traza de la gráfica (de abajo hacia arriba y de izquierda a derecha). Después pone la mano sobre el origen de coordenadas y la desplaza hacia la derecha para resaltar que el dominio es (0,+ ∞)**

Tabla 53. Cálculo del dominio del profesor *A*

El primero de los dos ejemplos es la función racional $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$. El profesor primero introduce la formulación: *el dominio es el conjunto de valores de la variable independiente que tienen imagen* en términos de la metáfora conjuntista, pero a continuación introduce la siguiente caracterización del dominio: *son los valores de los cuales se puede calcular la imagen*. Esta segunda formulación resulta más operativa para el cálculo del dominio que la primera, ya que facilita entrar en un "juego de lenguaje" que permite llegar a un consenso sobre cuál es el dominio de la función. Las características de este juego de lenguaje son:

- *Introducción de un elemento genérico*. El profesor introduce el elemento genérico *x* sobre el cual realizar las operaciones indicadas en la fórmula de la función mediante la frase "cuando yo substituyo la *x* (señala la *x* de la fórmula con el dedo) por esos números, puedo hacer todo este cálculo (con la mano rodea la fracción $1/(x+1)$)" y después dice "tomemos un número" y espera que los alumnos mentalmente encuentren los valores para los cuales se pueden realizar las operaciones indicadas en la fórmula de la función. Es de destacar la importancia que supone el gesto del profesor cuando con la mano rodea la fracción $1/(x+1)$ ya que produce un *estímulo ostensivo* que está concebido para atraer la atención de los alumnos. Al producir este estímulo ostensivo, el profesor quiere dar a entender a los alumnos que dicho estímulo es relevante y que su procesamiento inferencial merece la pena.

- *Consenso sobre el rango de valores del elemento genérico*. Los alumnos formulan hipótesis sobre el dominio hasta llegar a un consenso que es aceptado por los alumnos y, sobre todo, por el profesor. En este caso varios alumnos dicen "todos menos el -1" y el profesor da por buena esta afirmación.

En el segundo ejemplo se reproduce el mismo juego de lenguaje con las siguientes variantes. La primera variante es que en este caso el elemento genérico es un punto de la parte negativa del eje de abscisas. En efecto, en este caso el primer estímulo ostensivo que utiliza el profesor consiste en dibujar la gráfica de la función $f(x) = \ln x$ y espera que los alumnos mentalmente apliquen la técnica de: 1) pensar en un punto de la parte negativa del eje de abscisas, 2) trazar la perpendicular al eje de abscisas por este punto, 3) observar que esta recta no corta a la gráfica de la función logaritmo neperiano y 4) que este razonamiento es válido para cualquier punto de la parte negativa del eje de abscisas y también para el origen de coordenadas (esta técnica gráfica de determinación del dominio ya ha sido trabajada en una unidad anterior). La segunda variante es que, cuando los alumnos responde "de cero a más infinito", el profesor considera ambigua esta respuesta para llegar a un consenso y decide intervenir pidiendo a los alumnos si el cero es del dominio, para después aceptar como buena la respuesta de los alumnos de que el cero no es del dominio.

Es importante remarcar que el consenso al que se llega está expresado en términos metafóricos ya que, tanto los alumnos como el profesor, utilizan la expresión "de cero a más infinito", los alumnos lo hacen oralmente, mientras que el profesor, a esta expresión oral, asocia la representación $(0,+\infty)$ y también la gesticulación sobre la parte positiva del eje de abscisas (mueve la mano desde el origen de coordenadas hacia la derecha). Se trata de la metáfora que considera la semirrecta numérica como un camino con un comienzo y con un horizonte (el infinito). La cuestión que nos formulamos es la siguiente; ¿Después de esta negociación de significados, el alumno ha entendido que el dominio de la función es el conjunto de todos los valores de la variable independiente tales que $0 < x$, es decir, ha entendido el alumno que el intervalo abierto $(0,+\infty)$ tiene por elementos todos los valores x que son mayores que cero? que es precisamente lo que pretende el profesor (en una unidad anterior los alumnos ya habían estudiado los intervalos de números reales de esta manera).

Si bien con la información que tenemos no podemos contestar a esta pregunta hay bastantes elementos que hacen suponer que la negociación se habrá cerrado en falso para muchos de los alumnos. Estos elementos son: (1) la metáfora conjuntista, que es el objetivo final del profesor, ha sido utilizado al principio del episodio trascrito, pero cuando se trata de calcular el dominio de $f(x)= \ln x$ no se utiliza, (2) el profesor utiliza metáforas dinámicas del tipo "como va la gráfica", "de cero a más infinito" acompañadas de gestos que refuerzan este carácter dinámico, ya que mueve el dedo índice siguiendo la traza de la gráfica y, después, pone la mano sobre el origen de coordenadas y la desplaza hacia la derecha (Núñez, 2004), (3) con este último gesto el profesor pretende que los alumnos hagan por su cuenta la siguiente inferencia: (a) el dominio es como una camino con principio (posición inicial de la mano) pero sin final (tendencia marcada por el movimiento de la mano hacia la derecha) y (b) el cero (el principio) no es del dominio, por tanto el dominio no tiene principio ni final, por tanto el dominio es el intervalo abierto $(0,+\infty)$ que tiene por elementos todos los valores x que son mayores que cero. Nuestra pregunta sigue siendo: ¿Los alumnos han hecho esta inferencia, han explicitado lo que estaba implícito en la dirección que espera el profesor, o bien han hecho otro tipo de inferencias?

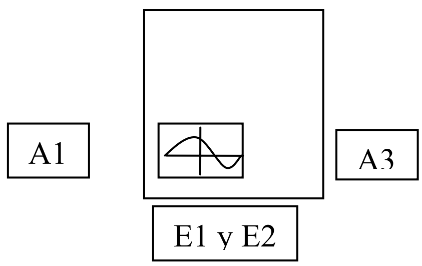
Esta trascripción pone de manifiesto que en la negociación de significados las metáforas funcionan en dos direcciones diferentes. En este episodio podemos observar como el profesor las usa creyendo que está facilitando el aprendizaje del alumno, para ello parte del dominio de las matemáticas y busca un dominio de la vida diaria del alumno (sus experiencias sobre procesos que tienen principio y final y sobre los que tienen principio pero no tienen final) de manera que este último sirva para estructurar el objeto matemático que quiere enseñar. En cambio, el alumno debe partir del dominio de su vida diaria para proyectarlo metafóricamente sobre el objeto matemático que debe aprender. El problema es, por una parte, que el dominio de la vida diaria no siempre es el mismo para ambos, y, por otra parte, que las inferencias que puede hacer el alumno a partir de su proyección metafórica, al sugerir ésta un amplio conjunto de implicaciones posibles, pueden ser muy diferentes a las que espera el profesor.

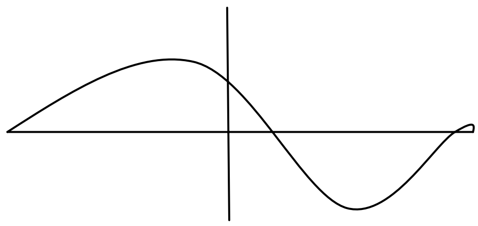
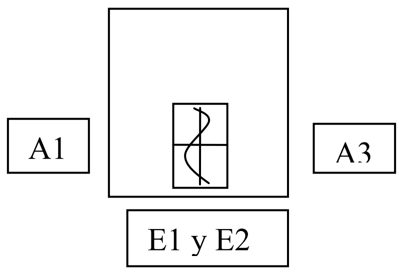
4.4.3 La metáfora en la negociación de significados en una interacción alumno-alumno

El episodio que se comenta es una actividad compartida entre los alumnos *I* y *K* (ver apartados 4.3.5 y 4.3.7) y está guiada por dos entrevistadores. El objetivo era, por un lado, ver cómo entendían los alumnos el crecimiento y decrecimiento de una gráfica de una función y, por el otro, crear un conflicto semiótico de tipo cognitivo que pusiera en cuestión la metáfora orientacional, usada normalmente por los alumnos para estructurar la comprensión del crecimiento y decrecimiento de una función.

Antes de la actividad los alumnos se sitúan en lados opuestos, mientras que los entrevistadores están en los lados contiguos, tal como se muestra en las figuras de la trascripción. Esta distribución se había planificado previamente con el propósito de que los alumnos tuvieran puntos de vista diferentes.

En las trascripciones de sus entrevistas anteriores habíamos observado que estos dos alumnos estructuraban los conceptos de crecimiento y decrecimiento, asíntotas y ejes coordenados en términos de una proyección metafórica del esquema orientacional. En dichas entrevistas su hoja de examen quedó inmóvil en una situación que no entraba en conflicto con su idea de que el eje de abscisas era horizontal y el de ordenadas vertical. En cambio, ahora la tarea en un inicio no es más que un esquema simple de un dibujo en una hoja de papel que aparentemente representa una función y que, plausiblemente, no debería quedar inmóvil ya que los alumnos ven la hoja de papel desde puntos de vista diferente.

TRASCRIPCIÓN	OBSERVACIONES
	Antes de empezar la actividad los alumnos *I* (A1) y *K* (A3) se encuentran localizados en posiciones diferentes con respecto de la mesa de trabajo(tal como se ilustra en la figura), luego se pone sobre ella una hoja con la gráfica abajo dibujada 

<table>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td>1. E2: ¿Si yo hago esta gráfica, cómo sé si crece o decrece?</td><td>El entrevistador hace esta pregunta para iniciar la actividad y tratar de producir un conflicto semiótico de tipo cognitivo en los alumnos</td></tr>
<tr><td>2. A3: Este el eje “x” y cuando crece es cuando hay una variación de la x…</td><td>El alumno 3 toma la hoja y la gira 90º (tal como se ve en la figura). Luego señala lo que él considera el eje de la “x”(el eje de mayor longitud) y mientras dice “cuando hay una variación de la x” desplaza el dedo índice de su mano derecha sobre el eje mayor de izquierda a derecha. No puede terminar su argumentación debido a la intervención de A1.


</td></tr>
</table>

Tabla 54. Negociación de significado de los alumnos A1 y A3. Primer fragmento

El alumno *A3* soluciona el problema recurriendo a la metáfora orientacional, pero su acción produce un conflicto semiótico de tipo cognitivo en *A1* (en nuestra opinión debido a que su punto de vista es diferente) que le lleva a interrumpir el discurso de *A3* y a poner la hoja de papel en la posición inicial.

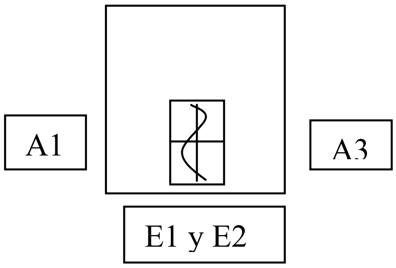
3 A1: Tiene que ser la "*x*" esta porque o sino esto no sería función.	
4 A3: ¿Cómo lo sabes?	
5 A1: porque si esto fuera la "*y*" y esto la "*x*" esto no puede ser una función, porque no puede tener más de una imagen	El alumno A1 vuelve a poner la gráfica en la posición inicial mientras señala primero el segmento de mayor longitud y después el de menor longitud.
6 A1: tiene que ser esta la "*x*" y esta la "*y*".	Con la gráfica en la posición inicial, hace observar a su compañero que habría valores de la *x* que tendrían más de una

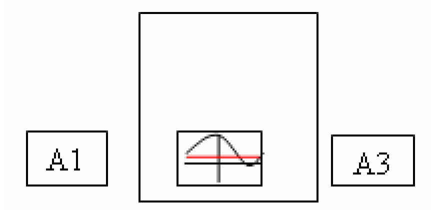
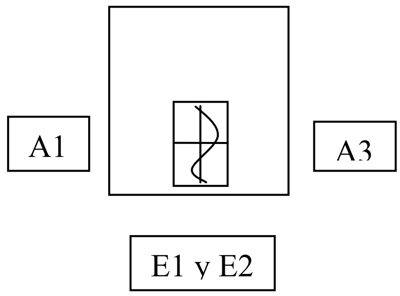
	imagen. Para ello, realiza un gesto con el dedo con el que pretende representar una línea paralela al eje mayor que corta a la gráfica de la función en varios puntos (línea roja)  Después pone la gráfica en la posición que se ilustra en la figura siguiente, con lo cual puede volver a utilizar la metáfora orientacional sin problemas (el eje de ordenadas vuelve a ser el vertical y el de las abscisas el horizontal).  Aunque A3 no hace ningún comentario, de manera implícita acepta que el eje mayor es el de las "*x*" y el menor el de la "*y*".

Tabla 55. Negociación de significado de los alumnos *A1* y *A3*. Segundo fragmento

En nuestra opinión es muy significativo que, para resolver su conflicto, *A1* tenga que prescindir de la metáfora orientacional y recurrir a la definición de función. Después recupera la metáfora orientacional y pone el papel de manera que el eje de ordenadas sea el vertical y el de abscisas el horizontal (ahora ya no tiene conflicto). *A1* ha resuelto su conflicto pero ha generado otro en *A3* que le demanda que argumente sus afirmaciones. Este conflicto lo resuelve *A3* aceptando los argumentos de *A1* y, en nuestra opinión, poniéndose en el punto de vista de *A1*, es decir adaptando su metáfora orientacional a la posición que ocupa *A1*.

Pero aún no han contestado a la pregunta. ¿Cómo saber si crece o decrece? tal como les hace observar el entrevistador 2. En 10 el alumno *A3* hace gestos deícticos y dinámicos sobre la gráfica, como se muestra a continuación. De nuevo resuelve el problema a partir de una combinación de metáforas que son el resultado de proyecciones metafóricas del esquema "orientacional" y del esquema "camino". La aplicación de la metáfora orientacional se ve facilitada por el hecho de que *A3* inclina la cabeza con lo que, de facto, esta viendo la gráfica desde la posición de los entrevistadores:

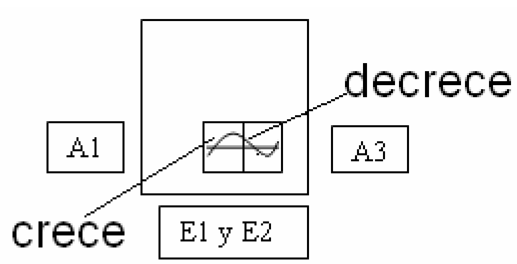
7	E2: ¿Y yo como sé dónde crece y dónde decrece?	El entrevistador formula esta pregunta con el objetivo de averiguar si el alumno contestará en términos de subir(creciente) y bajar (decreciente) en su argumentación
8	A3: ¿Cómo o cuándo?	
9	E1: Como quieras, cuándo y cómo, primero cuándo y luego cómo	Se le aclara que puede contestar de la forma que él quiera
10	A3: crece, decrece	A3 vuelve a girar la hoja y la pone en la posición inicial (ver figura siguiente). Después, mientras dice "crece" mueve el dedo sobre la gráfica para señalar que la función va subiendo. Mientras dice "decrece" mueve el dedo sobre la gráfica para señalar que la función va bajando  Mientras, A3 inclina la cabeza con lo que, de hecho, esta viendo la gráfica desde la posición de los entrevistadores.

Tabla 56. Negociación de significado de los alumnos *A1* y *A3*. Tercer fragmento

A1, vuelve a poner en cuestión la metáfora orientacional que utiliza *A3*. No sabemos si es debido a que él tiene un conflicto semiótico de tipo cognitivo o simplemente es que se lo quiere crear a su compañero:

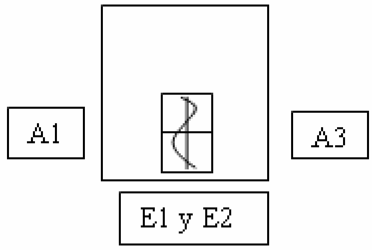
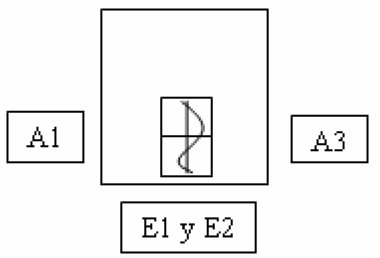
11 A1: Pero si lo miramos así,….	A1 vuelve a girar la hoja y la pone en la posición que se ve que se ve en la figura siguiente, con lo que se le produce un conflicto que, implícitamente, le lleva a poner en cuestión la metáfora orientacional que ha utilizado su compañero  Después vuelve a poner la hoja en la siguiente posición 

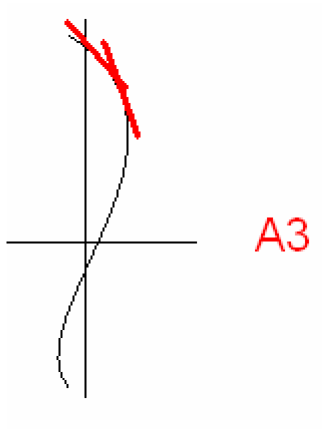
Tabla 57. Negociación de significado de los alumnos *A1* y *A3*. Cuarto fragmento

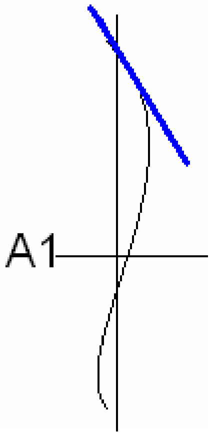
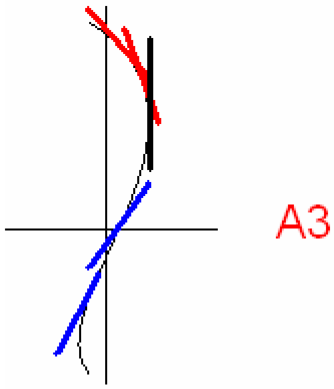
A1 propone una manera de resolver este conflicto que prescinde de la metáfora orientacional puesto que propone recurrir al estudio del signo de la derivada. Dicha solución es cuestionada por el entrevistador al hacerle observar que en la tarea que se les ha propuesto no disponen de la expresión simbólica de la función:

12 A1: sería hacer la tabla de máximos y mínimos y mirar en la derivada	A1 resuelve su conflicto semiótico de tipo cognitivo recurriendo al signo de la derivada y prescindiendo de la metáfora orientacional.
13 E1: No tienes la derivada, no hay fórmula	El entrevistador cuestiona su argumentación haciéndole notar que lo único que tiene es la gráfica de la función

Tabla 58. Negociación de significado de los alumnos *A1* y *A3*. Quinto fragmento

Dado (1) que no disponen de la fórmula de la función para hallar el signo de la derivada y (2) que han puesto en cuestión la metáfora orientacional, tienen que buscar una solución alternativa en la que la metáfora orientacional no sea utilizada. La solución que encuentran es hallar el signo de la derivada a partir del signo de la pendiente de la recta tangente, siendo muy significativo que la palabra subir o bajar es evitada en su discurso. Aparentemente no recurren a la metáfora orientacional, pero implícitamente vuelven a utilizarla dado que consideran que el eje mayor es el eje horizontal (abscisas) y el eje menor es el eje vertical (ordenadas), con lo cual pueden determinar el signo de la pendiente de la recta tangente por el hecho de que la recta sube o baja.

14 A3: Cuando, cuando….	Hace gestos con el dedo con los que quiere representar la recta tangente en diferentes puntos de la gráfica  El gesto de A3 parece que le sugiere a A1 la forma de responder

15 A1 Aquí es positivo, cuando la pendiente es positiva, aquí crecería,	Al igual que A3, A1 hace gestos con el dedo con los que quiere representar la recta tangente en diferentes puntos de la gráfica en los cuales la función es creciente 
16 A3: Sí,…..aquí es cero	A3 da la razón a A1 y vuelve a hacer gestos con el dedo con los que quiere representar la recta tangente en más puntos de la gráfica destacando el punto en el cual la recta tangente tiene la pendiente igual a cero. Lo más destacable es que A3 no gira la hoja de papel y que se sitúa en el punto de vista de A1. 
17 A1: Luego aquí el pendiente sería negativo, sería decreciente, y aquí es lo mismo sería positivo crece	A1 continúa su argumentación haciendo también gestos con el dedo con los que quiere representar la recta tangente en diferentes puntos de la gráfica en los cuales la función es decreciente. Hace los mismos gestos que A3

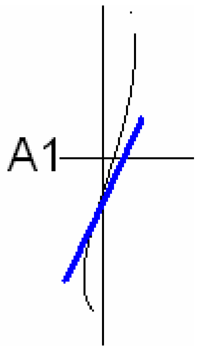
	 Se da por terminada la actividad

Tabla 59. Negociación de significado de los alumnos *A1* y *A*3. Sexto fragmento

Si bien resulta significativo que hay un momento en el que ponen en cuestión la metáfora orientacional, hay otra metáfora que no se cuestionan, nos referimos a la metáfora dinámica por el cuál la gráfica puede ser recorrida por la punta del dedo. Es decir que con sus gestos manifiestan implícitamente la metáfora estructural: “La gráfica de una función se puede considerar la traza que deja un punto que se mueve sobre la gráfica”. También hay otras metáforas en las que se ponen de acuerdo implícitamente cuando reflexionan sobre las tangentes y el signo de sus pendientes. Son las siguientes: (1) “Los puntos de la gráfica de una función son puntos de tangencia”, (2) “La derivada es la inclinación de la recta tangente con respecto del eje horizontal” y (3) “crecer es positivo y decrecer es negativo”, esta última sustituye a la metáfora inicial “crecer es subir y decrecer es bajar”.