DEPARTAMENT DE DIDÀCTICA DE LES CIÈNCIES
EXPERIMENTALS I DE LA MATEMÀTICA

PROGRAMA DE DIDÀCTICA DE LES CIÈNCIES EXPERIMENTALS
I DE LA MATEMÀTICA

BIENNI 2000-2002

FENÓMENOS RELACIONADOS CON EL USO DE METÁFORAS EN EL DISCURSO DEL PROFESOR. EL CASO DE LAS GRÁFICAS DE FUNCIONES

Tesi doctoral per optar al títol de Doctor de la Universitat de Barcelona

Presentada per

JORGE IVAN ACEVEDO NANCLARES

Dirigida per

Dr. VICENÇ FONT MOLL

i

Dra. JANETE BOLITE FRANT

UNIVERSITAT DE BARCELONA

BARCELONA, 2007

CAPÍTULO 5

LAS METÁFORAS EN EL MARCO DEL ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO

RESPUESTAS A LAS 6ª Y 7ª PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

Resumen:

En este capítulo primero retomamos y ampliamos las cinco dualidades o atributos contextuales considerados en el EOS (brevemente comentadas en el capítulo 2) para después ver la relación que tienen con los procesos metafóricos. Las diferentes miradas que posibilitan las facetas duales sobre los procesos metafóricos ponen de manifiesto la estrecha relación de dichos procesos con otros instrumentos de conocimiento, también esenciales de la actividad matemática, como son, entre otros, los procesos de representación y los de generalización y particularización. A continuación exponemos como la principal función de la metáfora es el de posibilitar un cambio de Configuración Epistémica/Cognitiva.

La investigación en didáctica de las matemáticas ha permitido resaltar por una parte la importancia que tienen las metáforas en el proceso de instrucción y, por otra, han puesto de manifiesto que cualquier reflexión sobre las metáforas tiene que tener presente la gran complejidad de factores relacionados con ellas. En esta investigación hemos partido de la hipótesis de que dicha complejidad se puede describir en términos "ontosemióticos". Es decir, en términos de las entidades intervinientes y de las relaciones que se establecen entre ellas. Por tanto, y de acuerdo con este punto de vista, en este proyecto se ha pretendido como *segundo gran objetivo* afrontar la complejidad que la investigación sobre las metáforas requiere mediante los constructos elaborados por el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS).

Este segundo objetivo nos ha llevado a formular las siguientes preguntas de investigación:

6) ¿Cómo se relaciona la metáfora con las cinco dimensiones duales contempladas en dicho enfoque teórico?

7) ¿Cómo se relaciona la metáfora con los elementos constituyentes de las Configuraciones Epistémicas/Cognitivas?

A continuación exponemos las respuestas a estas dos preguntas.

5.1 RESPUESTA A LA 6ª PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN

Para contestar al la sexta pregunta *¿Cómo se relaciona la metáfora con las cinco dimensiones duales contempladas en el Enfoque Ontosemiótico?* primero retomaremos y ampliaremos las cinco dualidades o atributos contextuales considerados en el EOS brevemente comentadas en el capítulo 2 para después ver la relación que tienen con los procesos metafóricos

5.1.1 Dualidades cognitivas

Para el EOS (Godino, 2002), según las circunstancias contextuales y del juego de lenguaje en que participan, las entidades matemáticas pueden ser consideradas desde las siguientes facetas o dimensiones duales: personal e institucional, ostensiva y no ostensiva, extensivo e intensivo, elemental y sistémica, expresión y contenido.

La dualidad "personal / institucional"

Dependiendo de las circunstancias contextuales y del juego de lenguaje en que nos encontramos, una misma expresión puede referirse a un objeto personal o institucional. Si se trata de la manifestación de un sujeto individual, como la respuesta a una prueba de evaluación, la realización de una tarea escolar por un estudiante, hablamos de objetos personales. Por el contrario si se trata de documentos curriculares, libros de texto, explicaciones de un profesor ante su clase, consideramos que se ponen en juego objetos institucionales. La distinción entre las facetas personal e institucional de los conocimientos matemáticos nos parece fundamental para poder describir y explicar las interacciones entre el profesor y los alumnos en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Esta distinción permite caracterizar el aprendizaje como "acoplamiento progresivo" entre significados personales e institucionales.

La dualidad "extensiva / intensiva" (o ejemplar / tipo")

El EOS interpreta la distinción entre extensivo-intensivo en un sentido lingüístico, esto es, como equivalente a la distinción entre el ejemplar (algo particular, que se determina por sí mismo) y el tipo (objeto genérico que define una cierta clase o conjunto más o menos difuso de objetos). Dicha consideración es relativa al juego de lenguaje. En efecto, un mismo objeto, según el contexto, se puede interpretar como un caso particular o como uno general.

Los términos extensivo e intensivo están sugeridos por las dos maneras de definir un conjunto, por extensión (un extensivo es uno de los miembros del conjunto) y por intensión (se consideran todos los elementos a la vez). Por tanto, por extensivo se entiende un objeto particularizado (individualizado) y por intensivo una clase o conjunto de objetos, que, a su vez, cuando convenga se puede considerar como un objeto. Un mismo objeto, según el juego de lenguaje, se puede interpretar como un caso particular o como uno general.

La dualidad "expresión / contenido" (o "significante / significado")

Los distintos objetos que intervienen en las prácticas matemáticas no se deben concebir como entidades aisladas, sino puestas en relación unos con otros. La distinción entre expresión y contenido y su correspondencia por medio de una función semiótica nos permite tener en cuenta el carácter esencialmente relacional de la actividad matemática. Se entenderá por función semiótica la correspondencia entre un antecedente (expresión) y un consecuente (contenido) establecida por un sujeto (persona o institución) de acuerdo con un cierto criterio o código de correspondencia. En el EOS se considera que cualquier objeto puede desempeñar el papel de expresión o contenido en una función semiótica. Además, las relaciones de dependencia entre expresión y contenido pueden ser de tipo representacional (un objeto se pone en lugar de otro), instrumental u operatoria (un objeto usa a otro u otros como instrumento), y componencial o cooperativa (dos o más objetos componen un sistema del que emergen nuevos objetos). De esta manera, la semiótica que propone el EOS generaliza de manera radical la noción de representación, tan usada en las investigaciones cognitivas realizadas en educación matemática.

La dualidad "elemental / sistémico"

En el EOS el significado de un objeto se considera como un conjunto de prácticas en las que dicho objeto es un dato esencial. Este punto de vista supone que un objeto pueda considerarse como un sólo elemento o bien como un conjunto sistémico de prácticas en las que intervienen este objeto conjuntamente con otros entre los que hay determinadas relaciones, lo que permite considera a los objetos (personales o institucionales) como nudos de una red. Por ejemplo, si consideramos el objeto elemental derivada y nos preguntamos por su significado inmediatamente aparecen determinadas prácticas en las que interviene y las relaciones con otros objetos -(límite, velocidad, derivada, función, tangente trigonométrica, rectas, etc.). Estos nuevos objetos a su vez se pueden entender de manera sistémica. De esta manera, tenemos una red de nudos los cuales a su vez son redes de nudos y así sucesivamente.

La dualidad "ostensivo / no ostensivo"

Cualquiera de los objetos tiene una faceta ostensiva, esto es perceptible, y otra no ostensiva. En principio las entidades lingüísticas se muestran por sí mismas directamente a nuestra percepción (escritura, sonido, gestos). Pero las entidades praxémicas y discursivas, aunque son intrínsecamente diferentes de las lingüísticas necesitan a estas entidades de manera esencial para su constitución y funcionamiento. El lenguaje viene a ser el medio por el cual no sólo se expresan los no ostensivos, sino también es instrumento para su constitución y desarrollo. Por ello se considera como la faceta ostensiva de los objetos matemáticos. Un caso especial serán las entidades lingüísticas que sólo tendrían, en una primera aproximación, la faceta ostensiva. No obstante, desde el punto de vista del sujeto individual, los objetos lingüísticos pueden ser pensados. Tales objetos mentales constituyen la faceta no ostensiva de los ostensivos lingüísticos.

A continuación vamos a situar la metáfora con relación a las cinco facetas o dimensiones duales consideradas en el EOS. Es decir, vamos a situar la metáfora en el centro del decágono siguiente y vamos a considerarla desde cada una de las cinco facetas duales.

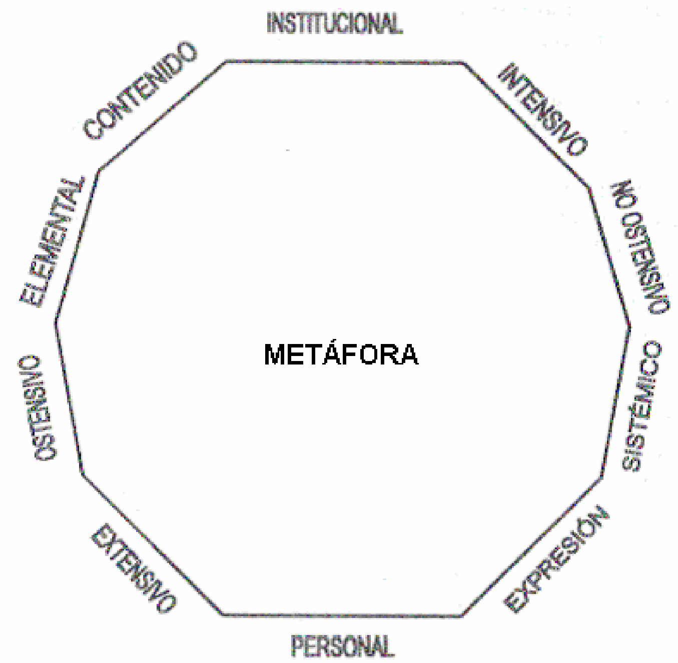


Figura 1. Dualidades cognitivas del EOS

5.1.2 La metáfora con relación a la dimensión dual "personal / institucional"

El caso estudiado, las metáforas relacionadas con las gráficas de funciones, es un buen ejemplo para ilustrar cómo se sitúa la metáfora con relación a la dimensión dual "personal / institucional". Por una parte, hemos justificado que la metáfora estática se encuentra fosilizada en las matemáticas institucionales (pregunta 1) y, por otra parte, que la metáfora dinámica es un recurso utilizado por el profesor (pregunta 2) que resulta determinante en la estructuración de los objetos matemáticos personales de los alumnos (pregunta 4). Puesto que las metáforas dinámicas y las estáticas estructuran de manera diferente a la gráfica de una función es necesario preguntarnos por el tipo de coexistencia que se produce entre ambas, enmarcando esta pregunta en la dimensión dual "personal / institucional".

A partir de un análisis histórico (pregunta 1), la respuesta es que, más que coexistencia en el plano institucional, lo que se observa es que hay períodos en los que una domina a la otra, siendo la metáfora conjuntista la que domina actualmente. En los objetos matemáticos institucionales actuales la metáfora conjuntista es la dominante, incluso se puede decir que casi no hay cabida para las dinámicas. Más que una combinación de metáforas que da lugar a una fusión conceptual tenemos la desaparición de una a manos de la otra (pregunta 1). Aunque las metáforas dinámicas y las estáticas son claramente diferentes tienen ciertas implicaciones comunes. Por ejemplo, ambas permiten distinguir entre gráfica y punto. Este hecho hace que un profesor experto las pueda manejar de manera coherente, siempre que supedite las dinámicas a las estáticas. Por ejemplo, en el caso del dominio de una función que sea un intervalo cerrado, si suponemos que el extremo del intervalo se mueve hasta llegar al otro extremo se obtiene un conjunto que es el dominio de la función. Es decir, un profesor experto puede hacer la fusión de la visión dinámica y de la estática de las gráficas que se ha expuesto en la figura 8 del capítulo 3

Si nos preguntamos por la coexistencia de ambos tipos de metáfora en el proceso de instrucción, hemos encontrado una mayor presencia de las metáforas dinámicas (pregunta 3).

Si nos preguntamos por al coexistencia en el plano personal del alumno, hemos constatado que el uso de metáforas dinámicas en el discurso del profesor produce efectos significativos en la estructura del significado personal de los alumnos que pueden llegar a ser, en muchos alumnos, dominantes sobre los efectos que produce la metáfora conjuntista (pregunta 4). Mientras que un profesor experto puede manejar de manera coherente las dos metáforas hay alumnos que no logran hacerlo. Es decir, la fusión de la visión dinámica y de la estática de las gráficas que se ha expuesto en la figura 8 del capítulo 3 no se consigue y se produce una comprensión fundamentada sobre la proyección del esquema del camino (figura 7 del capítulo 3). Esta falta de coherencia es una de las causas importantes de conflictos semióticos relacionados con la representación gráfica de funciones.

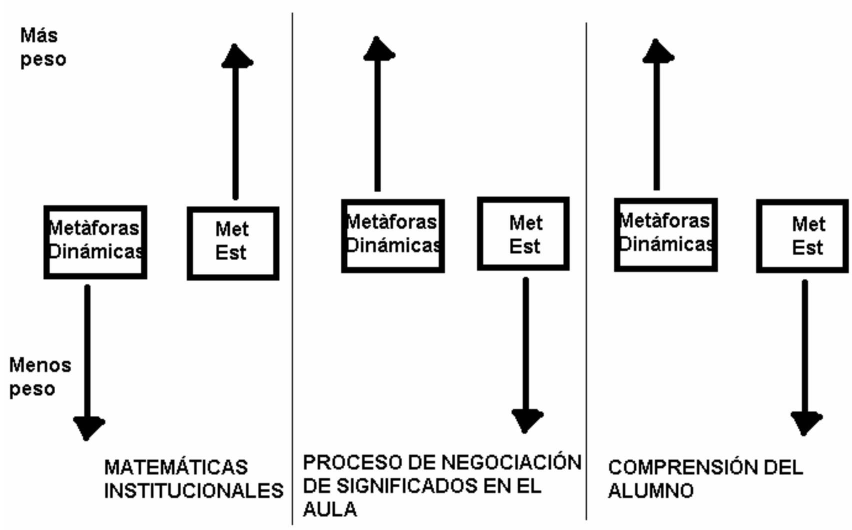


Figura 2. Coexistencia de metáforas

5.1.3 La metáfora con relación a la dimensión dual “extensivo / intensivo”

En nuestra opinión, uno de los orígenes de la aplicación de la faceta extensivo-intensivo a los objetos matemáticos son las metáforas de tipo ontológico que tienen su origen en nuestras experiencias con objetos físicos. La metáfora “objetual” permite considerar acontecimientos, actividades, emociones, ideas, etc. como si fueran entidades (objetos, cosas, etc.) o sustancias. Esta metáfora se combina de manera inconsciente con otra metáfora ontológica: la del contenedor (Lakoff y Núñez, 2000). La combinación de dichas metáforas permite considerar ideas, conceptos, etc. como entidades o sustancias que se contienen unas a otras. Las metáforas ontológicas en el discurso escolar muchas veces suelen estar implícitas, pero también se pueden presentar de manera más explícita. Por ejemplo, en el *Curso de Geometría* de P. Puig Adam (1965, pág. 4) se observan claramente en los axiomas de existencia y enlace:

> Ax. 1.1 Reconocemos la existencia de infinitos entes llamados <<puntos>> cuyo conjunto llamaremos <<espacio>>.
>
> Ax. 1.2 Los puntos del espacio se consideran agrupados en ciertos conjuntos parciales de infinitos puntos llamados <<planos>> y los de cada plano en otros conjuntos parciales de infinitos puntos llamados <<rectas>>.

Si bien podemos considerar que la faceta extensivo-intensivo es una proyección metafórica de esquemas de imágenes básicos como “parte-todo” o el del “contenedor”, una cuestión que no resuelve este punto de vista es la siguiente: cómo es que ciertas metáforas, con el paso del tiempo, se entienden como aplicación de la faceta extensivo-intensivo.

Una objeción importante que se puede poner a la afirmación de que “entender la gráfica de una función $f(x)$ como el conjunto de puntos cuyas coordenadas son $(x, f(x))$” es una metáfora estática, consiste en afirmar que no se trata de una metáfora sino de una relación de tipo extensivo-intensivo. Esto es, afirmar que la gráfica es un ejemplo de conjunto y que no hay ningún tipo de metáfora, se trata simplemente de una subcategorización.

Se trata de una objeción importante ya que en muchos casos no podemos distinguir una metáfora de una subcategorización. En el caso de las gráficas de funciones sólo un análisis histórico permite afirmar que “entender la gráfica de una función $f(x)$ como el conjunto de puntos cuyas coordenadas son $(x, f(x))$” es una metáfora que se ha convertido con el tiempo en una subcategorización.

Tanto la subcategorización como la metáfora tienen una estructura del tipo *A* es *B*. De acuerdo con Lakoff y Johnson (1991) consideramos que la subcategorización y la metáfora son puntos extremos de un continuum único. En el caso de algunas metáforas es muy claro que *A* y *B* son muy diferentes y nos situamos en un extremo de este continuum, mientras que en la subcategorización *A* se considera un extensivo de un intensivo *B* y también es claro que nos situamos en el otro extremo del continuum. Pero cuando no está claro si *A* y *B* son muy diferentes o bien si se pueden relacionar como extensivo e intensivo, entonces la relación *A* es *B* cae en algún punto de la mitad del continuum. Por otra parte, metáforas que en el momento de su aparición se situaban claramente en un extremo del continuo con el paso del tiempo se han convertido en subcategorizaciones situadas en el otro extremo.

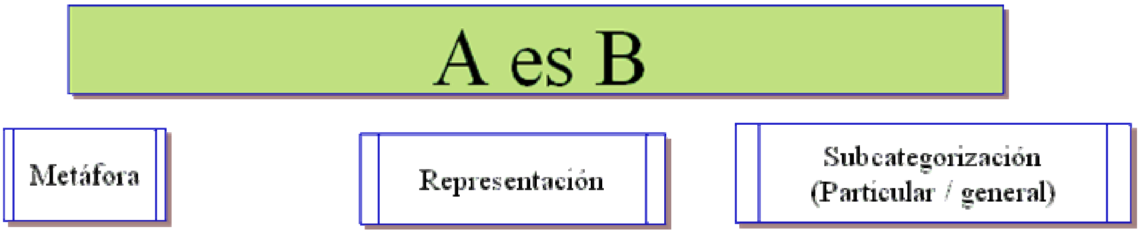


Figura 3. La relación A es B

Para el EOS, la forma en que las linking metáforas estructuran un campo de las matemáticas en términos de otra consiste, entre otros aspectos que comentaremos en la respuesta a la pregunta siete, precisamente en relacionar, mediante la dimensión extensivo-intensivo, objetos matemáticos que antes no se relacionaban entre sí de esta manera.

En esta investigación, hemos profundizado en el proceso que convierte una metáfora creativa en un caso de aplicación de la dualidad extensivo/intensivo. Para ello, nos hemos centrado en el momento de la aparición de la geometría analítica.

A continuación, vamos a considerar una de las metáforas más fructíferas en la historia de las matemáticas: la interpretación de las curvas del plano como conjunto de puntos cuyas coordenadas son solución de una ecuación, y vamos a explicar el proceso que convierte esta metáfora en una subcategorización. Esta metáfora se halla en la Geometría de Descartes y para explicar el proceso histórico que la convierte en subcategorización, seguiremos los trabajos de Font (2000, 2001d y 2007) y Font y Peraire (2001).

De entrada, la curva geométrica para Descartes es la traza que produce un punto que se mueve por un instrumento articulado compuesto por diversas reglas, de manera que el movimiento efectuado sobre una regla es trasmitido por las diferentes reglas del instrumento y hace que el punto se mueva trazando una determinada curva. Por ejemplo:

- Una circunferencia *es* la curva geométrica que se obtiene a partir de la traza que deja la punta del compás.

En este caso actúa la dualidad extensivo-intensivo (A es B), es decir A (una circunferencia concreta) es un elemento de la clase B (curvas que se obtienen a partir de la traza que deja la punta del compás). En este caso actúa una metáfora fosilizada (las curvas son trazas de puntos que se mueven sujetos a determinadas condiciones). Dicho de otra manera, la metáfora fosilizada se ha transformado en la dualidad extensivo-intensivo.

Descartes en la Geometría introduce una de las metáforas más creativas de la historia de las matemáticas:

- La circunferencia que se obtiene al trazar la punta del compás *es* el "conjunto de puntos que son solución de una ecuación del tipo $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$"[1]

Se trata de una metáfora creativa que permite entender la clase B desde otro punto de vista (B es B', o $B \sim B'$, o B c B'). Gracias a esta metáfora, podemos estructurar nuestro conocimiento de las curvas de la geometría sintética en términos de nuestro conocimiento del álgebra. Con el paso del tiempo se considera que lo que hacemos es representar las curvas de la geometría sintética por medio de ecuaciones:

- La expresión $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ se considera como la *representación* de una circunferencia.

Este proceso se cierra con el olvido de B. Es decir, A es B pasa a un segundo plano o incluso A es B se sustituye completamente por A es B'. De esta manera, con el paso del tiempo A es B' se convierte en una metáfora fosilizada que se interpreta en términos de extensivo e intensivo.

- Una circunferencia *es* el conjunto de puntos que son solución de una ecuación del tipo $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ (o simplemente una circunferencia *es* una ecuación del tipo $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$).

Tal como muestra el ejemplo de la geometría analítica se trata de un proceso complejo que, por otra parte, puede llegar a necesitar mucho tiempo. Se trata de un proceso que conlleva que un objeto (la

[1] Descartes utiliza el término "círculo" y una ecuación del tipo $y^2 = lx - x^2$

circunferencia en este caso) que "vivía" en un determinado programa de investigación (la geometría sintética) pasa a "vivir" también en otro programa de investigación (la geometría analítica).

5.1.4 La metáfora con relación a la dimensión dual "expresión-contenido"

Con relación a la dimensión expresión contenido tenemos que una nueva metáfora (*A* es *B'*) es una expresión que permite entender los elementos de *B* (partimos previamente de la relación extensivo / intensivo *A* es *B*) como elementos de *B'*. Es decir, *A* es *B'* permite estructurar los elementos *A* de *B* en términos de *B'*. Dicho de otra manera, la metáfora dota de una nueva estructura a *B*. Visto de esta manera la expresión *A* es *B'* se puede considerar que funciona de manera icónica con respecto al contenido *B*.

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="2">Expresión</th><th>Contenido</th></tr>
<tr><td>B´</td></tr>
<tr><th>Expresión</th><th>Contenido</th><td></td></tr>
<tr><td>A</td><td>B</td><td></td></tr>
</table>

Figura 4. La metáfora con relación a la dualidad expresión / contenido

Para representar una situación podemos utilizar diferentes tipos de signos. Por ejemplo, podemos utilizar gestos, dibujos o iconos que se parezcan a los objetos o a la situación que queremos representar, o bien palabras o símbolos convencionales que no tengan ningún parecido con el objeto representado. Una primera clasificación de los signos propuesta por Peirce es la siguiente: 1) *Icono,* se trata de un signo que tiene relación física con el objeto que representa, 2) *Índice,* se trata de un signo que permite dirigir la atención sobre un objeto (por ejemplo una señal de prohibido girar a la derecha) y 3) *Símbolo,* se trata de un signo cuya relación con el objeto se determina por una convención. No es fácil siempre ponerse de acuerdo cuándo un signo en matemáticas se corresponde con alguno de estos tres grupos, por lo que muchos autores prefieren hablar de representaciones o sistemas de signos en general.

Ahora bien, cuando desde el EOS se reflexiona sobre la metáfora desde la dimensión expresión-contenido se coincide con el punto de vista de otros investigadores (Otte, 2001) que consideran que la metáfora actúa de manera icónica, puesto que una representación icónica, además de representar al objeto, nos informa de la estructura de dicho objeto. Dicho de otra manera, la metáfora es primero una “forma de hacer ver” que, al tener consecuencias inferenciales, también es una “forma de hacer saber”.

Trama funciones semióticas asociada a la figura 4, cuando la metáfora considerada es “las curvas son el conjunto de puntos cuyas coordenadas son solución de una ecuación”

A continuación, vamos a explicitar con más detalle la trama de funciones semióticas asociadas a la figura 4, cuando se considera la metáfora “las curvas son el conjunto de puntos cuyas coordenadas son solución de una ecuación”.

Para el proceso de análisis que vamos a realizar a continuación se considerará como expresión o contenido de las funciones semióticas básicamente la faceta extensiva-intensiva de los objetos matemáticos. Se considerarán las siguientes funciones semióticas:

	Extensional	Intencional
Extensional	FS1	FS2
Intensional	FS3	FS4

Tabla 1. Tipos de funciones semióticas

FS1 Esta función semiótica relaciona una entidad extensional con otra entidad extensional

FS1.1 Relaciona un objeto con otro de la misma clase.
Por ejemplo, relaciona la función $f(x)$ con la función $g(x)$.

FS1.2 Relaciona un objeto con otro que no es de la misma clase.

Por ejemplo, relaciona la abscisa $x = 3$ con $f(3)$

FS2 Esta función semiótica relaciona una entidad extensional con una entidad intensional

FS2.1 Relaciona un objeto con la clase a la que pertenece.

Por ejemplo relaciona $f(x)$ con la clase "función".

FS2.2 Relaciona un objeto con una clase a la cual no pertenece.

Por ejemplo, cuando una curva se considera como un conjunto de puntos.

FS3 Esta función semiótica relaciona una entidad intensional con una entidad extensional.

FS3.1 Esta función semiótica relaciona una clase con un ejemplo de la clase.
Por ejemplo cuando se dice "dada una función….", o cuando se dice, por ejemplo, que $f(x) = 2x$ es un ejemplo de "función".

FS3.2 Esta función semiótica relaciona una clase con un objeto que no es de la clase.
Este tipo de función semiótica permite describir, por ejemplo, la encapsulación de un proceso en el que intervienen objetos que se pueden agrupar en una clase. Por ejemplo, si tenemos las tasas medias de variación $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ cuando $h \to 0$ y es la expresión a la cual asociamos el límite, $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. En este caso estamos asociando a una expresión que es una clase de objetos el contenido "límite", es decir, el resultado del proceso de aproximación.

Otro ejemplo lo tenemos cuando interpretamos una clase de objetos como un objeto. Por ejemplo: cuando un conjunto de puntos se considera como una curva.

FS4 Esta función semiótica relaciona una entidad intensional con otra entidad intensional.

FS4.1 Esta función semiótica define una clase de objetos de manera diferente.
Por ejemplo, cuando relacionamos la definición de tangente en un punto como "la recta que en les proximidades del punto más se aproxima a la curva" con la definición de recta tangente como "límite de las rectas secantes".

FS4.2 Esta función semiótica relaciona una entidad intensional con otra entidad intensional diferente.
Por ejemplo, cuando la clase de las funciones trigonométricas nos lleva a considerar la clase de las funciones trigonométricas inversas o bien la clase de las funciones no periódicas.

Todas estas funciones semióticas tienen en común que todas ellas son de tipo representacional, en el sentido de que facilitan que la expresión se considere una representación del contenido, pero además pueden ser de tipos diferentes según que la expresión o el contenido sean extensivos o intensivos y según cuál sea el criterio de correspondencia entre la expresión y el contenido. Por ejemplo, la FS2.1 por una parte es representacional, en el sentido de que el caso particular se puede tomar como un representante de la clase, pero por otra parte es de tipo metonímico (parte-todo) ya que un extensivo (una parte) se toma por el todo (la clase), en este caso el criterio de correspondencia es el de pertenencia.

La FS3.1 por una parte es representacional, en el sentido de que el caso general se puede tomar como una representación (más genérica) del caso particular (más específico), pero por otra parte es de tipo metonímico (todo-parte) ya que un intensivo (el todo) se identifica con la parte (el extensivo), en este caso el criterio de correspondencia es el de "contener".

El punto de partida de la metáfora "las curvas son el conjunto de puntos cuyas coordenadas son solución de una ecuación" es una curva que, de acuerdo con la metáfora inicial que utilizaba Descartes, se considera como una curva que es la traza que deja un punto sujeto a determinadas condiciones. Puesto que esta es una metáfora fosilizada actúa como una subcategorización, es decir se puede considerar una función semiótica del tipo FS2.1 puesto que identificamos la expresión que se nos presenta (una línea curva en el plano) como un objeto de una determinada clase, la clase "curva generada a partir de unos determinados movimientos más simples" o "curva que resulta de la traza que deja un punto que se mueve sujeto a determinadas condiciones".

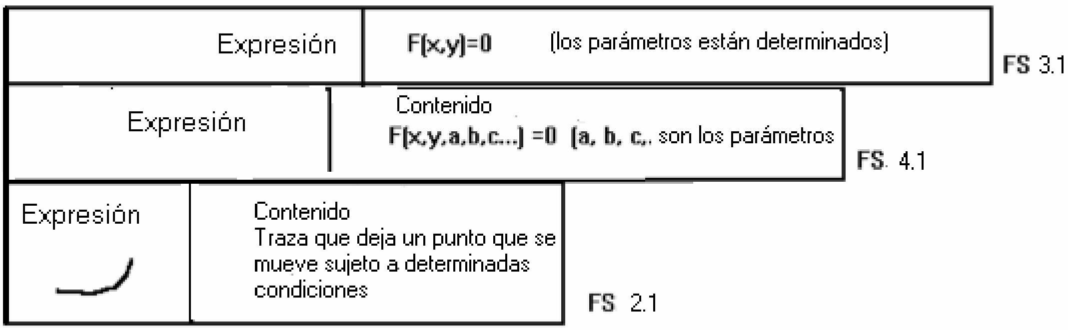


Figura 5. Trama de funciones semióticas asociada a la metáfora:
"las curvas son el conjunto de puntos que son solución de una ecuación"

La FS 2.1 es una función semiótica de tipo metonímico (parte-todo), la FS 4.1 es una función semiótica de tipo metafórico y la FS 3.1 es una función semiótica de tipo metonímico (todo-parte).

A continuación, "curva que resulta de la traza que deja un punto que se mueve sujeto a determinadas condiciones" se interpreta como "conjunto de puntos que son la solución de la expresión $F(x,y,a,b,c...) = 0$ donde a, b, c... son parámetros". Aquí está actuando el pensamiento metafórico y dicha metáfora se puede considerar como una función semiótica del tipo FS4.1 porque una determinada clase es interpretada de una manera diferente. Por último, se determinan los parámetros. Este último paso se puede considerar una función semiótica del tipo FS3.1 porque a una determinada clase le hacemos corresponder una entidad extensional (las soluciones de la fórmula que resulta de determinar los parámetros).

Dicho de otra manera, la metáfora dominante activa la dimensión extensivo-intensivo (*A* es *B*). La nueva metáfora permite entender la clase B desde otro punto de vista (*B* es *B'*, o *B* ~ *B'*, o *B* d *B'*) De esta manera, se llega a la conclusión *A* es *B'* en la que de nuevo vuelve a funcionar la dimensión extensivo-intensivo. Este proceso se cierra con el olvido de *B*. Es decir, *A* es *B* pasa a un segundo plano o incluso *A* es *B* se sustituye completamente por *A* es *B'*. De esta manera, con el paso del tiempo *A* es *B'* se convierte en una metáfora fosilizada que se interpreta en términos de extensivo e intensivo. El ejemplo de la geometría analítica que hemos considerado anteriormente resulta especialmente interesante porque muestra que por una parte es un proceso muy complejo y, por otra parte, que puede llegar a necesitar mucho tiempo.

El análisis de la trama de funciones semióticas a asociada a la metáfora *"las curvas son el conjunto de puntos cuyas coordenadas son solución de una ecuación"* permite refinar lo que se ha dicho en el apartado 5.1.3 sobre el proceso que convierte a la metáfora creativa en una subcategorización. Este proceso se puede considerar el resultado de la siguiente cadena de funciones semióticas:

Función semiótica de tipo metonímico → Función semiótica de tipo metafórico → Función semiótica de tipo representacional → Función semiótica de tipo metonímico

SUBCATEGORIZACIÓN INICIAL → METÁFORA → REPRESENTACIÓN → SUBCATEGORIZACIÓN FINAL

5.1.5 La metáfora con relación a las dimensión dual "elemental / sistémica

Si bien la metáfora se presenta de manera elemental (*A* es *B*), el hecho de que ahora *B* estructure *A* permite aplicar a *A* un conjunto de prácticas que son el significado de *B*. Dicho de otra manera, la metáfora es una manera compacta de generar un sistema complejo de nuevas prácticas.

La dualidad elemental-sistémica en el caso de la metáfora ha sido puesta de manifiesto por diferentes autores. Según Max Black (1966) cuando usamos una metáfora tenemos en una sola expresión dos pensamientos de cosas distintas en actividad simultánea. El significado de la expresión metafórica sería el resultante de la interacción de los dos elementos. En "Juan es una roca" los dos pensamientos activos a la vez serían el de la fortaleza de Juan y el de la de solidez de la roca. Para Black los dos elementos vendrían a ser uno, el foco de la metáfora -el enunciado efectivo- y otro, el marco que lo rodea. Este segundo elemento ha de ser considerado como un sistema más que como una cosa individual. Cuando decimos que "la sociedad es un mar", estamos poniendo delante de nuestros ojos, proyectando sobre la sociedad, todo un sistema conceptual en el que hay tempestades, puertos seguros, piratas, tiburones, naufragios y muchas cosas más.

En los trabajos de Lakoff y Númez (2000) la dualidad elemental-sistémica también ocupa un lugar central. Por una parte, la metáfora es elemental (*A* es *B*), pero, por otra parte, nos permite generar un nuevo sistema de prácticas (perspectiva sistémica) como resultado de la comprensión del dominio de llegada en términos del dominio de partida. Lakoff y Núñez desarrollan la dualidad elemental sistémica para diferentes metáforas. Valga como ejemplo la metáfora del contenedor, la cual, según Núñez (2000), es una metáfora que se usa para estructurar la teoría de clases. Para este autor se trata de una metáfora ontológica inconsciente que tiene sus raíces en la vida cotidiana (Núñez, 2000, p. 13):

- Elemental:

“Las clases son contenedores”

- Sistémica:

Dominio de partida Esquema del contenedor	Domino de llegada Clases
Interior del contenedor	Clase
Objetos dentro del contenedor	Miembros de la clase
Ser un objeto del interior	La relación de pertenencia
Un interior de un contenedor dentro de uno más grande	Una subclase de la clase más grande
Superponer el interior de dos contenedores	Intersección de dos clases
La totalidad de los interiores de dos contenedores	La unión de clases
El exterior de un contenedor	El complementario de la clase

Tabla 2. Desarrollo de la metáfora “Las clases son contenedores”

De hecho, la mayoría de las investigaciones sobre la metáfora se han dedicado principalmente al estudio de dicha dualidad. Por ejemplo, en Bolite y otros (2004b), siguiendo el modelo propuesto por Lakoff y Núñez (2000), se considera primero la metáfora elemental “los puntos son objetos físicos”. A continuación se descompacta el dominio de partida (los objetos físicos) y el dominio de llegada (los puntos) para ver que relaciones, prácticas, etc. del dominio de partida se trasladan al dominio de llegada:

- Elemental (*A* es *B*):

“Los puntos son objetos físicos”

- Sistémica:

Dominio de partida	Dominio de llegada
Un cuerpo físico en el espacio	Un punto en el plano cartesiano
Un coche moviéndose a lo largo de una trayectoria	Un punto que se “mueve” sobre una curva que representa a una función real
Un coche que atraviesa un túnel es el mismo cuando entra que cuando sale	Un punto que se mueve a lo largo de una curva es siempre el mismo
La trayectoria representa el movimiento	La gráfica de la pizarra es la trayectoria del punto

Tabla 3. Desarrollo de la metáfora “Los puntos son objetos físicos”

En esta investigación hemos profundizado en el aspecto inferencial de la metáfora para desvelar como se puede generar un sistema complejo de prácticas a partir de ella.

5.1.6 La metáfora con relación a las dimensión dual “ostensivo / no ostensivo”

Los procesos de materialización-idealización, en el EOS, están asociados a la faceta ostensivo-no ostensivo. Platón fue uno de los primeros que puso de manifiesto la importancia del proceso de idealización al considerar a los objetos de la experiencia como copias imperfectas de las “ideas” matemáticas. Desde entonces, la necesidad de tener en cuenta el proceso de idealización en la actividad matemática ha sido observada por muchas personalidades ilustres. Por ejemplo, Fischbein (1993) tiene muy en cuenta el proceso de idealización en su teoría de los "conceptos figurales". También es importante el proceso de idealización (entendido como caso límite de lo concreto) en la obra de Kitcher (1984), este autor sostiene que los orígenes de las matemáticas son empíricos y pragmáticos, y propone una posición constructivista que afirma que las matemáticas son una ciencia idealizada de operaciones que podemos realizar con relación a objetos cualesquiera. Para Kitcher las matemáticas son como una colección de historias sobre las realizaciones de un sujeto ideal al cual se le atribuyen poderes de actuación superiores a los que tienen las personas normales -por ejemplo, recorrer los términos de una progresión geométrica. Las acciones nuevas que consideramos que son realizables no son acciones cualesquiera sino aquellas que amplían acciones que se consideran realizables por las personas.

Los mecanismos mediante los cuales las personas, consideradas individualmente o socialmente, llegan a las ideas matemáticas y como éstas son materializadas en sistemas de signos a efectos de comunicación son motivo de investigación (directa o indirectamente) en casi todos los programas de investigación que se han desarrollado en el área de la Didáctica de las Matemáticas. En el caso que estamos tomando como referente teórico en esta investigación, el "embodiment" de Lakoff y Núñez (2000), se propone la metáfora como unos de los mecanismos básicos para que las personas puedan llegar a generar las ideas matemáticas, las cuales se consideran no-ostensivas.

Con relación a la dimensión dual "ostensivo / no ostensivo" la metáfora actúa en ambos niveles ya que por una parte se presenta de manera ostensiva en los textos o en el discurso oral y, por otra parte, puede ser generada y utilizada mentalmente por los sujetos. En esta investigación hemos profundizado en cómo se relaciona el aspecto ostensivo de la metáfora con el aspecto no ostensivo, en especial nos han interesado las inferencias no ostensivas que realiza el alumno.

5.2 RESPUESTA A LA 7ª PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN

Para contestar al la séptima *¿Cómo se relaciona la metáfora con los elementos constituyentes de las Configuraciones Epistémicas/Cognitivas?* primero retomaremos los constructos "Configuración Epistémica" y "Configuración Cognitiva" considerados en el EOS, brevemente comentados en el capítulo 2, para después ver la relación que tienen con los procesos metafóricos.

Configuraciones Epistémicas/Cognitivas

En el EOS se considera que es necesario contemplar una ontología formada por los siguientes elementos: 1) lenguaje, 2) situaciones-problema 3) conceptos, 4) procedimientos, técnicas… 5) proposiciones, propiedades, teoremas, etc. y 6) argumentos. Estos seis tipos de objetos se articulan formando configuraciones *epistémicas* (figura 2) si adoptamos un punto de vista institucional o *cognitivas* si adoptamos un punto de vista *personal*. El análisis de dichas configuraciones nos informa de la "anatomía de la actividad matemática".

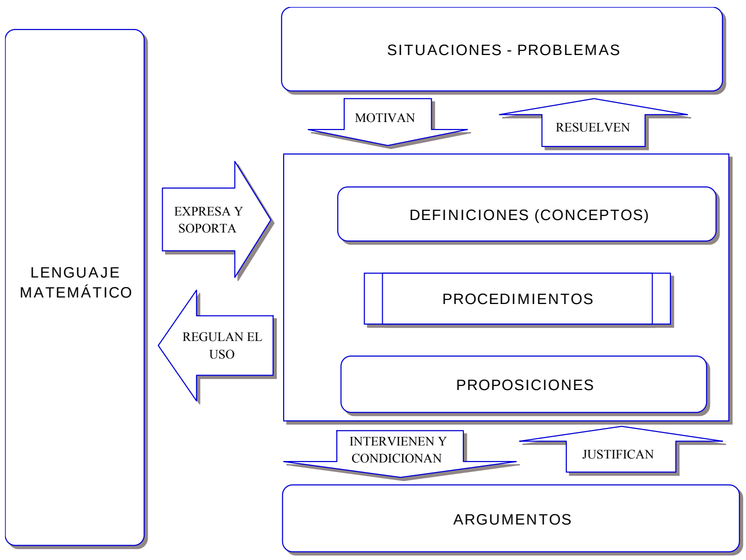


Figura 6: Componentes y relaciones en una configuración epistémica

Dada una situación problema es posible que se pueda resolver por diferentes métodos. Es decir, que pueda formar parte de dos configuraciones epistémicas/cognitivas (dependiendo del punto de vista adoptado) diferentes que, a su vez, pueden formar parte de bloques matemáticos muy diferentes (por ejemplo geometría y álgebra):

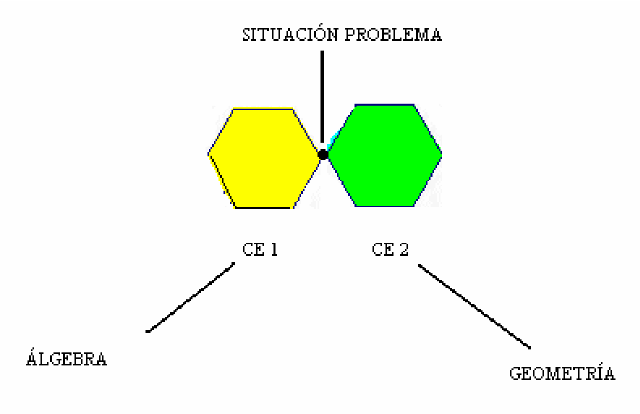


Figura 7. Configuraciones que comparten la misma situación problema

La comprensión de la relación que se produce entre las dos maneras de resolver el problema en algunos casos es el resultado de establecer una linking metáfora que permite la proyección de una de las dos configuraciones en la otra. En algunos casos la linking metáfora se limita a producir el paso de una configuración que no permitía resolver el problema a otra configuración diferente que si permite la resolución de dicho problema.

Cambio de Configuraciones Epistémicas/Cognitivas en las linking metáforas. El caso del problema de Pappus

A continuación, analizaremos con detalle como el problema de Pappus, gracias a la metáfora realizada por Descartes en su Geometría[2], pasa de una configuración epistémica propia de la geometría sintética a una configuración epistémica propia de la geometría analítica. Este paso implica que el objeto matemático "curva" cambie de "contexto", entendido éste en términos ecológicos (Ramos y Font, 2006). El hecho de que el objeto "curva", que antes vivía en una configuración propia de la geometría sintética, gracias a la metáfora introducida por Descartes pueda vivir en una configuración propia de la geometría analítica tiene diferentes efectos sobre cada uno de los objetos de las configuraciones espitémicas/cognitivas. Estas son, entre otra: 1) los problemas se pueden resolver de manera diferente, 2) aparecen nuevas representaciones del objeto matemático "curva" (en este caso ecuaciones), 3) se obtiene una nueva definición de "curva" (son los puntos cuyas coordenadas cumplen la ecuación), 4) nuevas propiedades (por ejemplo, las permiten transformar ecuaciones), 5) nuevos

[2] Para ello seguiremos la propia explicación que da Descartes en la Geometría y los trabajos de Font (2000, 2001d y 2007) y Font y Peraire (2001).

procedimientos (por ejemplo dibujar una curva mediante una tabla de valores) y 6) se posibilitan nuevas argumentaciones gracias a las inferencias que posibilita la metáfora.

A) Situación-problema: El problema de Pappus.

La intención de situar el problema de Pappus en una CE diferente a la CE propia de la geometría sintética es explícita en el libro de la Geometría. Para demostrar la potencia de su método, Descartes, a propuesta de Golius, parte de una cuestión planteada por la geometría clásica, el problema de Pappus, para preguntarse cuáles son los puntos que cumplen sus condiciones. El problema de Pappus era un problema no resuelto, a pesar de las tentativas de Euclides, Apolonio y del propio Pappus para resolverlo utilizando los métodos de los "clásicos". El problema de Pappus es un típico problema de lugares geométricos que Descartes formula de la siguiente manera:

> Sean *AB*, *AD*, *EF*, *GH*, etc., varias líneas dadas debiendo hallarse un punto *C,* desde el que trazando varias líneas rectas sobre las líneas dadas como *CB*, *CD*, *CF* y *CH*, de modo que los ángulos *CBA*, *CDA*, *CFE*, *CHG* sean dados, y de modo tal que el resultado de la multiplicación de una parte de estas líneas sea igual al resultado obtenido por la multiplicación de las otras, o bien que guarden alguna otra proporción dada, lo cual en nada dificulta el problema". (Descartes 1981, pág. 289*)*.

Ilustra el enunciado con un dibujo para cuatro rectas, para después pasar a resolver el caso de las cuatro rectas

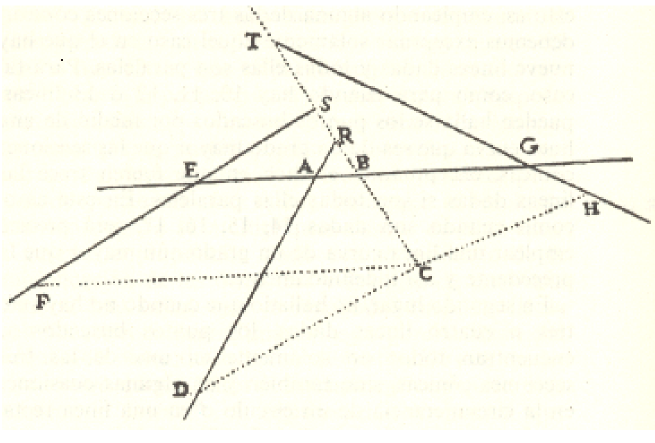


Figura 8. Dibujo para cuatro rectas del problema de Pappus

Después de resolver el problema de Pappus, Descartes se encuentra que, según el número de líneas que hay en el problema obtiene una expresión algebraica con dos variables, la *x* y la *y*, que pueden ser de grado cualquiera. Para hallar un punto *C* que sea solución del problema da un valor arbitrario a *x* o a *y* y resuelve la ecuación. Esta solución se obtiene geométricamente de la manera siguiente:

- si es de grado dos utilizando regla y compás.
- si es de grado tres o cuatro utilizando secciones cónicas.

Para resolver ecuaciones de grado superior a cuatro se necesitan curvas más complejas que las cónicas. Pero Descartes, en este momento, se encuentra, por una parte, con la clasificación de los griegos de los problemas en planos, sólidos y supersólidos o lineales[3] , y, por otra parte, con la limitación platónica. Platón, para superar el problema de que la diagonal no es conmensurable con el lado del cuadrado, pero es construible a partir del lado, impone la limitación de que todos los segmentos admisibles han de ser construibles con estos dos únicos instrumentos: la regla y el compás. Descartes acepta la limitación platónica en el sentido que solamente son aceptables segmentos construibles, pero lo que no acepta es limitarse a los instrumentos impuestos por Platón.

[3] Los problemas planos son aquellos que se pueden resolver construyendo segmentos utilizando regla y compás. Como ejemplo de problema plano tenemos la construcción del cuadrado de la diagonal a partir del lado o bien el problema de Pappus si se propone para 3, 4 ó 5 líneas (exceptuando el caso en que las 5 sean paralelas). La geometría de los "elementos" de Euclides consiste precisamente en construir todo aquello que es posible construir usando solamente la regla y el compás. Es precisamente esto lo que imponen los tres primeros postulados de Euclides.

Los problemas sólidos son aquellos que necesitan la introducción de una sección cónica, o sea es necesario algún instrumento que permita construir cónicas para poder resolverlos. Como ejemplo de problema sólido tenemos la construcción de la diagonal de un cubo a partir de su lado; o bien el problema de Pappus si se propone para 5 líneas paralelas o bien 6, 7,8 ó 9 líneas (si exceptuamos el caso en que las 9 líneas son paralelas).

Los problemas supersólidos o lineales son aquellos que necesitan la introducción de una curva más compleja que las secciones cónicas. Como ejemplo de problema lineal tenemos el problema de Pappus si se propone para 9 líneas paralelas o bien para más de 9 líneas.

En el primer apartado del libro segundo, Descartes se pregunta cuáles son las líneas curvas que se pueden admitir en geometría y se pregunta por qué los antiguos no distinguieron diversos grados entre las líneas más complejas y por qué llamaron mecánicas a algunas de ellas. En este primer apartado también divide las curvas en mecánicas y geométricas. Para Descartes una curva es geométrica si la podemos imaginar descrita por un movimiento continuo o bien por varios movimientos sucesivos de manera que los últimos vienen determinados por los anteriores, mientras que las curvas mecánicas son las que resultan de dos movimientos independientes que no guardan entre sí una relación que pueda ser medida.

B) Definiciones (conceptos).

Antes de Descartes las curvas se consideraban como el resultado de hacer secciones (como por ejemplo las secciones cónicas) o bien se consideraban como el resultado de la composición de movimientos. Descartes se queja de la falta de claridad de los antiguos sobre las curvas y hace una reflexión que le lleva a distinguir, por primera vez, entre curvas algebraicas y trascendentes (según Bourbaki 1976). Para clarificar lo que entiende por curva geométrica, Descartes construye un instrumento que le permite dibujar una serie de curvas más complejas que las cónicas, y que, según él, tienen el mismo derecho a la existencia y a ser estudiadas que las secciones cónicas. La curva geométrica para Descartes es la traza que produce un punto que se mueve por un instrumento articulado compuesto por diversas reglas, de manera que el movimiento efectuado sobre una regla es trasmitido por las diferentes reglas del instrumento y hace que el punto se mueva trazando una determinada curva.

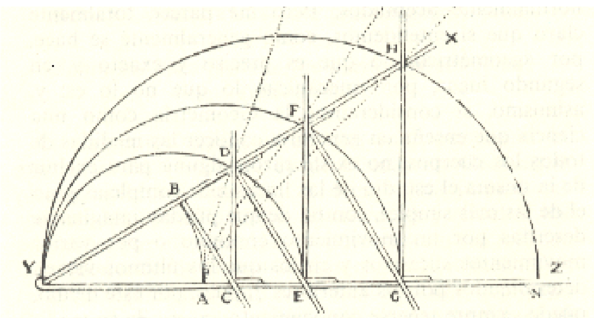


Figura 9. La curva geométrica para Descartes

Hasta aquí, en nuestra opinión, Descartes se mueve dentro de las dos metáforas clásicas sobre las curvas:

1) Las curvas son secciones
2) Las curvas son la traza que deja un punto que se mueve sujeto a determinadas condiciones.

Esta última manera de entender la curva y la introducción implícita del sistema de coordenadas permite a Descartes hallar la expresión algebraica de la curva y le lleva a definir claramente el objeto de lo que posteriormente se llamó Geometría analítica: las curvas llamadas por él geométricas; y las técnicas que se han de utilizar para estudiarlas: la teoría de las ecuaciones[4]. Dicho de otra manera, Descartes introduce una tercera metáfora para comprender qué son las curvas y también para representarlas:

3) Las curvas son la traza que deja un punto que se mueve sujeto a determinadas condiciones, cuyo análisis permite hallar una ecuación que cumplen los puntos de la curva.

Uno de los resultados de la metáfora realizada por Descartes es que aparece una nueva definición de curva (puntos que cumplen una determinada ecuación)

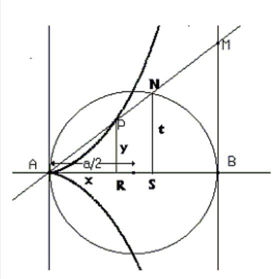
C) Representaciones

Uno de los resultados del trabajo de Descartes es que introduce nuevas representaciones para las curvas: las ecuaciones, pero implícitamente también introduce una nueva representación para las ecuaciones: las curvas.

El hecho de que el mismo objeto se pueda encuadrar en dos programas de investigación diferentes, cada uno con sus sistemas de representación, conlleva que "cada representación" se pueda convertir en "objeto representado" de la representación del otro programa de investigación. Cuando la cisoide se estudia en el marco de la geometría analítica se activa una compleja trama de funciones semióticas cuyo principio y final se puede representar por la figura 10:

[4] Si bien Descartes considera que las curvas que se pueden dibujar de manera escalonada son algebraicas, no da ninguna demostración. La demostración de que se pueden identificar el conjunto de curvas algebraicas planas con el conjunto de curvas que pueden ser dibujadas de manera escalonada (al menos localmente) la obtuvo Kempe en el siglo XIX (Bos, 1981).

EXPRESIÓN	CONTENIDO
	$x^3 + y^2x - ay^2 = 0$

EXPRESIÓN	CONTENIDO
	CISOIDE

Por tanto, dependiendo del contexto, la curva puede proporcionar una representación geométrica de la ecuación, o la ecuación puede proporcionar una simbolización algebraica de la curva. Este hecho lleva a considerar que la cisoide se puede representar por una curva en la "geometría sintética" y por una ecuación en la "geometría analítica".

D) Argumentaciones

Descartes introduce una nueva manera de argumentar para resolver los problemas de la geometría. La manera que tiene Descartes de hallar la expresión algebraica que cumplen los puntos de la curva consiste en analizar las condiciones que determinan el movimiento del punto que describe la traza y, a partir de este análisis, busca la ecuación que cumplen las coordenadas de los puntos de la curva. En nuestra opinión para saber que la curva en cuestión se trata de un caso particular de una familia de curvas (por ejemplo una hipérbola) son necesarios varios pasos:

1) Conocer el tipo de ecuación que corresponde a una hipérbola

2) Analizar las condiciones que determinan el movimiento del punto que describe la traza y, a partir de este análisis, buscar la ecuación que cumplen las coordenadas de los puntos de la curva y transformarla hasta obtener una ecuación que corresponde a una hipérbola.

Con relación al primer paso, sabemos que la resolución del problema de Pappus llevó a Descartes a obtener una clasificación de las cónicas que le permitía saber cuál es el tipo de ecuación que corresponde a una hipérbola. Pero lo que resulta difícil de explicar es cómo llega a saber que tiene que buscar la ecuación de una hipérbola.

Este segundo paso en muchos casos resulta complicado si previamente no sabemos el tipo de curva que buscamos. Una estrategia heurística que puede facilitar este segundo paso consiste, si es posible, en: a) Construir un instrumento articulado que permita realizar la traza y b) Reconocer la traza como un perteneciente a una familia de curvas de fórmula conocida. Dicho de otra manera, se trata de razonar a partir de saber la solución del problema. Con relación al segundo paso, no sabemos en su totalidad cuál fue el razonamiento que realizó Descartes, pero en nuestra opinión, es probable que siguiese esta estrategia heurística puesto que Descartes entendía la curva no tanto como los puntos que se obtienen de la ecuación al dar valores a una incógnita, sino fundamentalmente como la traza que deja un punto que se mueve sujeto a determinadas condiciones (la cuales se pueden expresar mediante una ecuación).

E) Procedimientos

Aunque Descartes dice, al final del primer libro de la Geometría, que si en una ecuación algebraica con dos incógnitas damos valores a una incógnita y buscamos los correspondientes valores de la otra, hallaremos infinitos puntos que describen una curva; no utiliza las ecuaciones para dibujar curvas. Descartes utiliza las ecuaciones para clasificar el tipo de curva. Es decir, las curvas que aparecen en la Geometría no son construidas a partir de una ecuación, sino que son generadas por el movimiento de un punto a partir del movimiento de curvas más simples. Para Descartes, las curvas, más que el conjunto de puntos que cumplen una determinada ecuación, son el resultado de movimientos sucesivos de curvas más simples, de manera que los últimos vienen determinados por los anteriores. Lo que hace Descartes es considerar la curva generada a partir de curvas más simples, y a partir del estudio de estos movimientos halla la ecuación de la curva.

Descartes, aunque no utiliza las ecuaciones para dibujar las curvas, en el segundo libro reflexiona sobre cuáles son las curvas que se pueden dibujar hallando algunos de sus puntos y dice que las que se pueden dibujar a partir de puntos cualesquiera son las que él ha llamando geométricas y que éste es un procedimiento admisible para dibujar curvas en geometría. También dice que la condición que han de cumplir estos puntos es que han de ser puntos cualesquiera de la curva y no puntos determinados como, por ejemplo, en el caso de la espiral:

Sobre las líneas que se trazan hallando varios de sus puntos y que pueden ser admitidas en Geometría.

> De igual modo estimo oportuno señalar que existe una gran diferencia entre la forma expuesta para llegar a conocer varios puntos que permitan trazar una curva y la que se utiliza para trazar la espiral y sus semejantes. En este último caso no se calculan indiferentemente todos los puntos de la línea buscada, sino sólo aquellos que pueden ser determinados por algún procedimiento más simple que aquel que es requerido para formarla; propiamente hablando, no hallamos uno de sus puntos, esto es, alguno de aquellos que son puntos propios de esta línea de modo tal que no pudiesen ser hallados sino por su mediación. Por el contrario, no hay un punto en estas líneas que sirven para el problema propuesto, que no pueda ser determinado mediante el procedimiento indicado. Debe considerarse que si bien tal forma de determinar una línea curva, hallando indiferentemente diversos puntos de la misma, no es aplicable sino a las que puedan ser también descritas por un movimiento regular y continuo, no por ello se la debe excluir de la Geometría. (Descartes 1981, pág. 314).

Con estas explicaciones Descartes también introduce, aunque de manera muy incipiente, la que después será la metáfora conjuntista dominante:

4) La gráfica de una función f es el conjunto formado por los puntos de coordenadas $(x, f(x))$.

F) Propiedades

Descartes también formula y utiliza propiedades en la demostración del problema de Pappus. Algunas de las cuales son propiedades de los triángulos que expresa mediante notación algebraica. Para citar un solo ejemplo, dice:

> (…) Seguidamente como los ángulos del triángulo *ARB* son dados, la proporción que se da entre los lados *AB* y *BR* también es conocida, estableciéndola como z es a b; de modo que *AB* siendo x, *RB* será bx/z, pues el punto *B* se encuentra entre *C* y *R* (…) (Descarte, 1981, pág 290)

La preservación de la estructura en la proyección metafórica según Lakoff y Núñez

Según Lakoff y Núñez las linking metáforas permiten una proyección de un dominio fuente de las matemáticas en otro dominio meta también de las matemáticas. Por otra parte, estos autores afirman que en la proyección metafórica se preservan ciertas estructuras y propiedades aunque, en nuestra opinión no profundizan en este aspecto. Lo que hacen es poner ejemplos implícitos de cómo entienden las estructuras y propiedades que se preservan en la proyección. Un ejemplo lo tenemos cuando explican la proyección metafórica de la aritmética en la teoría de clases (Boole's First-Stage Metaphor):

BOOLE'S FIRST-STAGE METAPHOR

Source Domain ARITHMETIC		*Target Domain* CLASSES
Numbers	→	Classes
Addition	→	Union, symbolized by '∪'
Multiplication	→	Intersection, symbolized by '∩'
Commutative law for addition	→	Commutative law for union
Commutative law for multiplication	→	Commutative law for intersection
Associative law for addition	→	Associative law for union
Associative law for multiplication	→	Associative law for intersection
Distributive law for multiplication over addition	→	Distributive law for intersection over union
0	→	The empty class, symbolized by Ø
1	→	The universal class, symbolized by *I*
Identity for addition: 0	→	Identity for union: Ø
Identity for multiplication: 1	→	Identity for intersection: *I*
$A + 0 = A$	→	$A \cup \emptyset = A$
$A \cdot 1 = A$	→	$A \cap I = A$
$A \cdot 0 = 0$	→	$A \cap \emptyset = \emptyset$

Figura 11. Ejemplo de proyección metafórica según Lakoff y Núñez, 2000, p.125

En esta explicación aplican la dualidad elemental – sistémica a esta metáfora y presentan un dominio de salida y de llegada que son considerados de manera sistémica. Pero la estructura que presentan, se limita a un listado vertical en la que el lector puede intuir que las propiedades se proyectan en propiedades, las notaciones en notaciones, etc.

La preservación de la estructura en la proyección metafórica según el EOS

Nuestra conclusión es que el constructo Configuración Epistémica/Cognitiva permite explicitar y precisar la estructura que se proyecta en las linking metáforas. Hay una dominio de partida que tiene estructura de Configuración Epistémica/Cognitiva (según que el punto de vista adoptado sea el institucional o el personal) que se proyecta en un dominio de llegada que también tiene estructura de Configuración Epistémica/Cognitiva.

La figura que sigue muestra la proyección metafórica de tipo linking asociada a la metáfora "las curvas son los puntos cuyas coordenadas son solución de una ecuación". A nuestro entender, esta figura explica mejor la preservación de estructuras y propiedades que se produce en este tipo de proyecciones metafóricas.

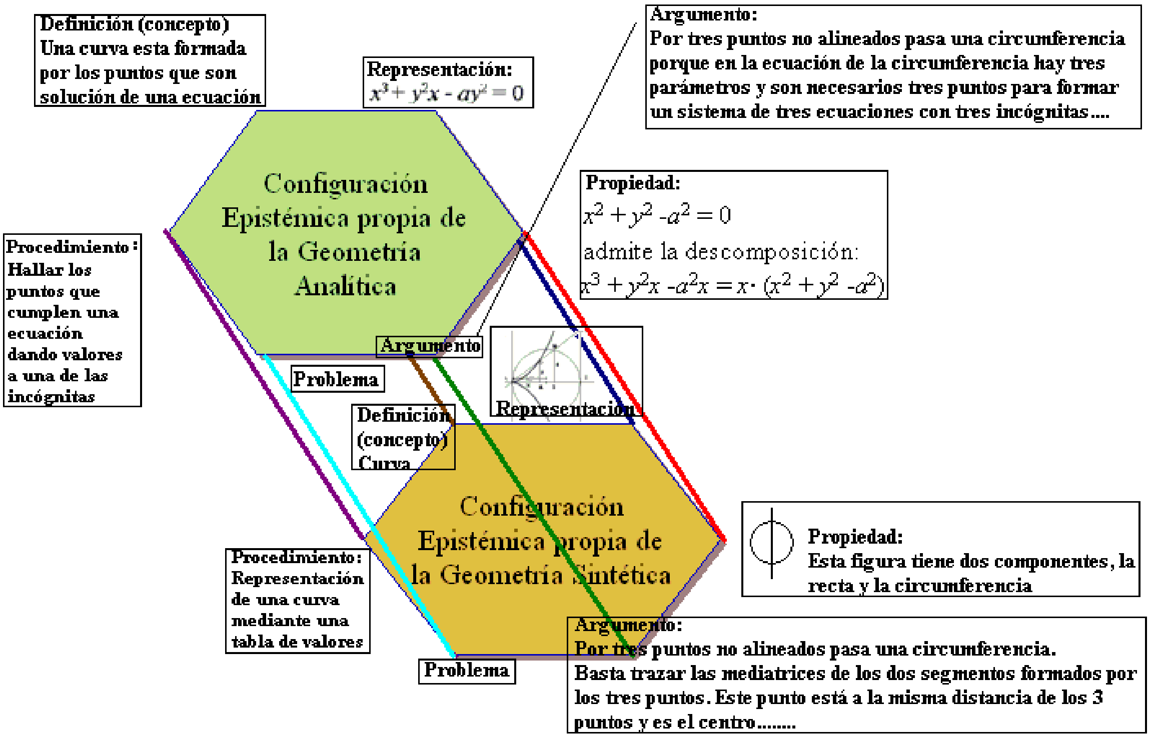


Figura 12. Configuraciones proyectadas en la metáfora de tipo linking "las curvas son los puntos cuyas coordenadas son solución de una ecuación"