DEPARTAMENT DE DIDÀCTICA DE LES CIÈNCIES
EXPERIMENTALS I DE LA MATEMÀTICA

PROGRAMA DE DIDÀCTICA DE LES CIÈNCIES EXPERIMENTALS
I DE LA MATEMÀTICA

BIENNI 2000-2002

FENÓMENOS RELACIONADOS CON EL USO DE METÁFORAS EN EL DISCURSO DEL PROFESOR. EL CASO DE LAS GRÁFICAS DE FUNCIONES

Tesi doctoral per optar al títol de Doctor de la Universitat de Barcelona

Presentada per

JORGE IVAN ACEVEDO NANCLARES

Dirigida per

Dr. VICENÇ FONT MOLL

i

Dra. JANETE BOLITE FRANT

UNIVERSITAT DE BARCELONA

BARCELONA, 2007

ANEXOS

ANEXO I

Páginas de la unidad didáctica:

Representación gráfica de funciones

4 Calcular el signe de $f''(-1)$, $f''(0)$ i $f''(1)$:

$$f''(-1) = 6(-1)^2 - 2 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{mínim en } x = -1$$

$$f''(0) = 6(0)^2 - 2 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{màxim en } x = 0$$

$$f''(1) = 6(1)^2 - 2 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{mínim en } x = -1$$

Activitats

16 A partir del criteri de la derivada segona, determina els màxims i mínims relatius de les funcions següents:

a $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 7$

b $f(x) = x^3 - 3x^2 - 45x + 2$

c $f(x) = 5e^{x-4}$

d $f(x) = x - \ln(1 + x)$

e $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 1}$

17 **a** Fes un esbós de les gràfiques de les funcions $f(x) = 2x^4$, $g(x) = -2x^4$ i $h(x) = -2x^5$.

b A partir de les gràfiques de l'apartat anterior, digues si les funcions $f(x) = 2x^4$, $g(x) = -2x^4$ i $h(x) = -2x^5$ presenten un màxim, un mínim o un punt d'inflexió en $x = 0$.

c Per a cadascuna de les tres funcions calcula $f''(0)$. Què hi observes?

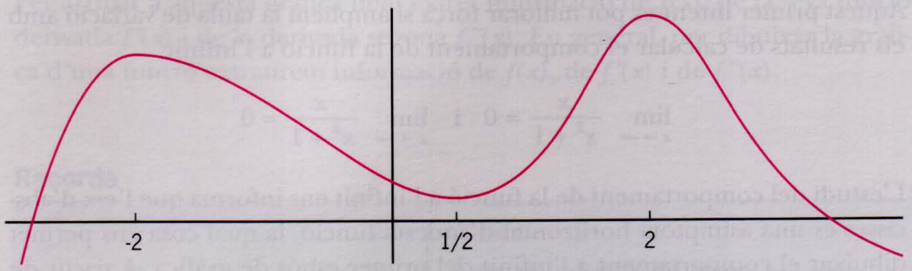
En l'activitat anterior has observat que si $f'(a) = 0$ i $f''(a) = 0$, són possibles diverses situacions. En aquest cas és convenient fer l'estudi del comportament del signe de la derivada primera en un entorn de $x = a$ per determinar en quina situació ens trobem.

Representació gràfica de funcions

En la unitat anterior has vist la relació entre el signe de $f'(x)$ i la gràfica de $f(x)$. Aquesta relació et va permetre resoldre activitats en què havies de fer la taula de variació d'una funció a partir de la seva gràfica. Començarem recordant aquest tipus d'activitats.

Activitat

18 Utilitza la gràfica de la funció $f(x)$ per completar la taula següent:



x	(−∞ , −2)	−2	(−2 , 1/2)	1/2	(1/2 , 2)	2	(2 , +∞)
f'(x)							
f(x)							

En aquesta unitat has seguit el procés contrari, és a dir, has dibuixat un esbós de la gràfica a partir de la seva taula de variació (activitats 8 i 9), que has construït partint de la funció derivada $f'(x)$.

Passar de la gràfica a la taula de variació no presenta gaire dificultat; ara bé, la majoria de vegades el que coneixem és l'expressió analítica de $f(x)$ i no la seva gràfica. En aquest apartat, coneixerem les eines que ens permeten representar la gràfica d'una funció a partir de la seva expressió analítica.

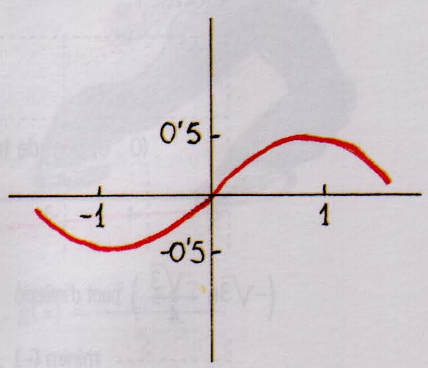
Considerem la funció $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$. Hi ha certes característiques de la funció $f(x)$ que en faciliten la representació gràfica:

1 Aquesta funció té per domini tot $\mathbb{R}$, perquè el denominador sempre és diferent de zero. A més, és contínua.
2 És imparella, perquè $f(-x) = -f(x)$.
3 Talla l'eix d'abscisses i l'eix d'ordenades en el punt (0 , 0) perquè l'únic valor que anul·la el numerador és $x = 0$.

Si en calculem la taula de variació a partir de

$f'(x) = \dfrac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$, tenim:

x	(−∞ , −1)	−1	(−1 , 1)	1	(1 , +∞)
f'(x)	−	0	+	0	−
f(x)	↘	f(−1) = −0,5 mínim	↗	f(1) = 0,5 màxim	↘

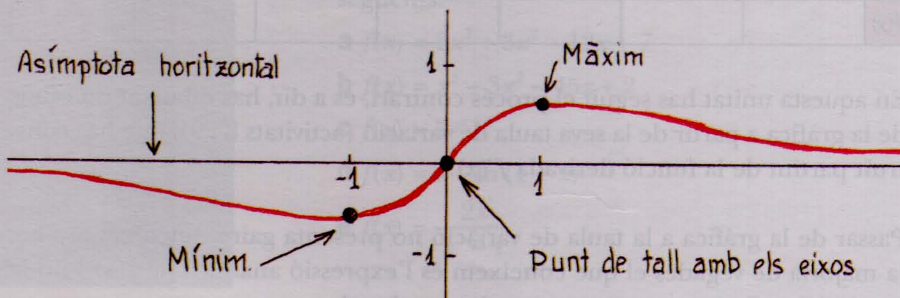


A partir d'aquesta informació, podríem fer l'esbós de la gràfica de la funció que hi ha a la dreta.

Aquest primer intent es pot millorar força si ampliem la taula de variació amb els resultats de calcular el comportament de la funció a l'infinit:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0 \quad \text{i} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0$$

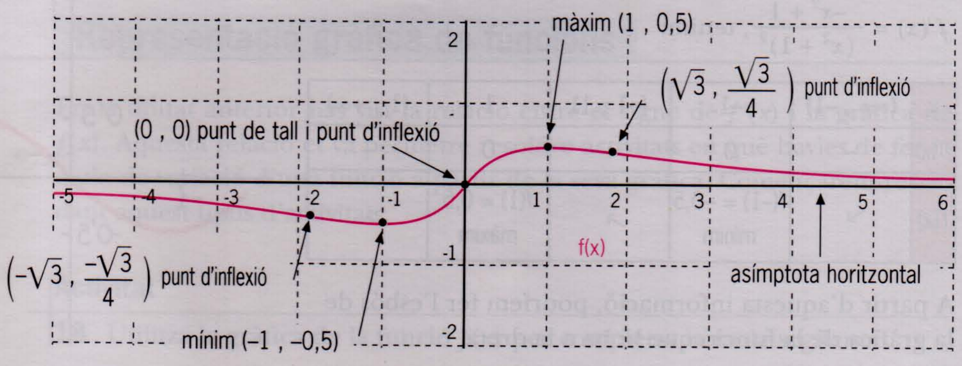
L'estudi del comportament de la funció a l'infinit ens informa que l'eix d'abscisses és una asímptota horitzontal d'aquesta funció, la qual cosa ens permet dibuixar el comportament a l'infinit del primer esbós de gràfica. A partir de la informació que tenim, podem considerar que la gràfica següent és un esbós més precís de la gràfica de la funció $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$:



En aquesta gràfica observem que hi ha punts d'inflexió que separen intervals de concavitat i convexitat. La taula de concavitat i convexitat ens permetrà millorar la gràfica situant exactament els punts d'inflexió:

x	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3}, 0)$	0	$(0, \sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3}, +\infty)$
$f''(x)$	−	0	+	0	−	0	+
$f(x)$	$\frown$	$f(-\sqrt{3}) = \dfrac{-\sqrt{3}}{4}$ punt d'inflexió	$\smile$	$f(0) = 0$ punt d'inflexió	$\frown$	$f(\sqrt{3}) = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$ punt d'inflexió	$\smile$

A partir de tota la informació que hem recollit, tenim que la gràfica de la funció és:



Per arribar a aquesta gràfica hem extret informació de $f(x)$, de la seva funció derivada $f'(x)$ i de la derivada segona $f''(x)$. En general, per dibuixar la gràfica d'una funció extraurem informació de $f(x)$, de $f'(x)$ i de $f''(x)$.

Recorda

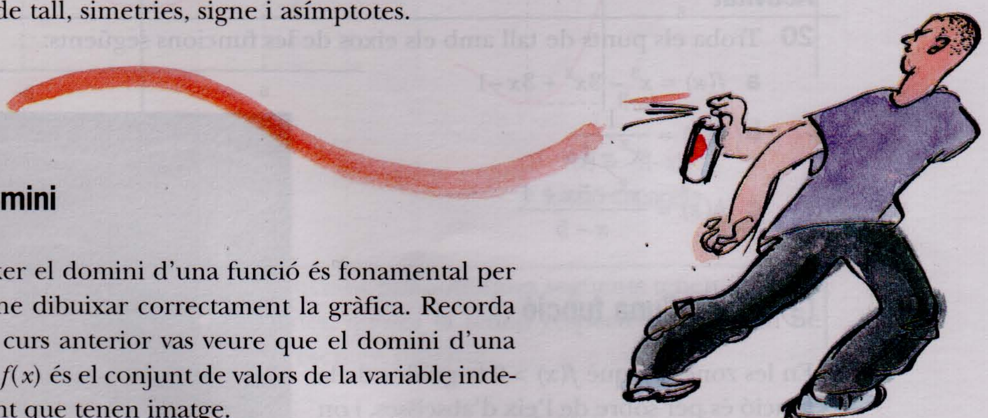
Informació de $f(x)$ ⇒
- Domini
- Punts de tall amb els eixos
- Asímptotes i comportament a l'infinit
- Simetries
- Signe

Informació de $f'(x)$ ⇒
- Intervals de creixement i decreixement
- Màxims i mínims

Informació de $f''(x)$ ⇒
- Intervals de concavitat i convexitat
- Punts d'inflexió

Moltes vegades no caldrà investigar tots aquests aspectes i en d'altres casos caldrà informació complementària (per exemple, una taula de valors auxiliar).

En els apartats anteriors hem vist com obtenir informació a partir de $f'(x)$ i de $f''(x)$. A continuació recordarem, i en algun cas ampliarem, el que ja vas veure en el curs anterior sobre la informació que es pot extreure de $f(x)$: domini, punts de tall, simetries, signe i asímptotes.



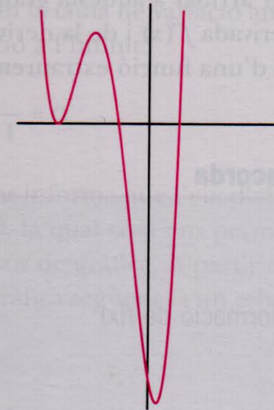
① Domini

Conèixer el domini d'una funció és fonamental per poder-ne dibuixar correctament la gràfica. Recorda que el curs anterior vas veure que el domini d'una funció $f(x)$ és el conjunt de valors de la variable independent que tenen imatge.

Activitat

19 Troba i escriu el domini de les funcions $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$, $g(x) = \dfrac{x^2-5x+4}{x-5}$ i $h(x) = \ln(x-1)$.

② Punts de tall amb els eixos



Donada una funció $f(x)$ com, per exemple, $f(x) = x^4 + 6x^3 + 8x^2 - 6x - 9$, per trobar els punts de tall amb l'eix d'abscisses només cal trobar les solucions de l'equació $x^4 + 6x^3 + 8x^2 - 6x - 9 = 0$.

Per resoldre aquesta equació, s'ha de factoritzar:

$$x^4 + 6x^3 + 8x^2 - 6x - 9 = (x+3)^2\,(x+1)(x-1)$$

$$(x+3)^2\,(x+1)(x-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = -3 \\ x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Les solucions són $x = -3$, $x = 1$, $x = -1$. I, per tant, els punts de tall de la funció amb l'eix d'abscisses són: $(-3\ ,\ 0)$, $(-1\ ,\ 0)$ i $(1\ ,\ 0)$

Per trobar el punt de tall amb l'eix d'ordenades, n'hi ha prou amb buscar $f(0)$:

$$f(0) = 0^4 + 6\cdot 0^3 + 8\cdot 0^2 - 6\cdot 0 - 9 = -9$$

El punt de tall amb l'eix d'ordenades és $(0\ ,\ -9)$.

En general, per a una funció qualsevol $f(x)$:

– Els punts de tall de $f(x)$ amb l'eix d'abscisses són $(x_1\ ,\ 0)$, $(x_2\ ,\ 0)$, $(x_3\ ,\ 0)$…, en què x_1, x_2, x_3... són les solucions de l'equació $f(x) = 0$.

– El punt de tall de la funció amb l'eix d'ordenades és $(0\ ,\ f(0))$.

Activitat

20 Troba els punts de tall amb els eixos de les funcions següents:

a $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

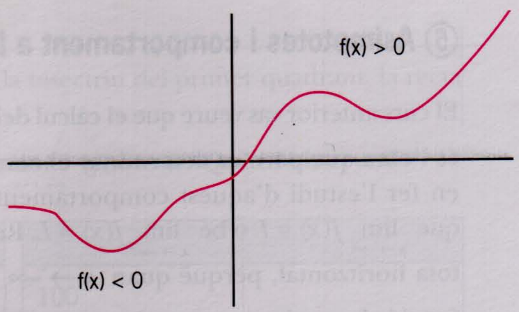
b $g(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$

c $h(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 4}{x - 5}$

③ Signe d'una funció

En les zones en què $f(x) > 0$ la gràfica de la funció és per sobre de l'eix d'abscisses, i on $f(x) < 0$ la gràfica és per sota d'aquest eix.

A partir de la gràfica d'una funció és immediat determinar-ne les regions on la funció és positiva o negativa; però si la funció ve donada per la seva expressió analítica, establir-ne el signe pot ser una mica complicat. A continuació hi ha una activitat en la qual és molt senzill determinar-ne el signe, i en l'apartat *Per saber-ne més* s'aprofundeix en aquest procediment.



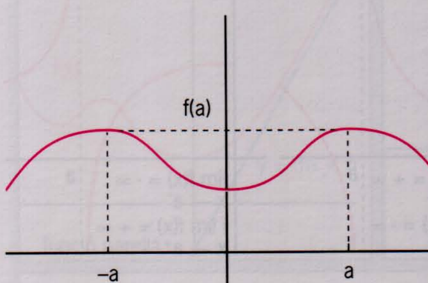
Activitat

21 Determina les regions del pla en què la funció és positiva i aquelles on és negativa per a les funcions següents:

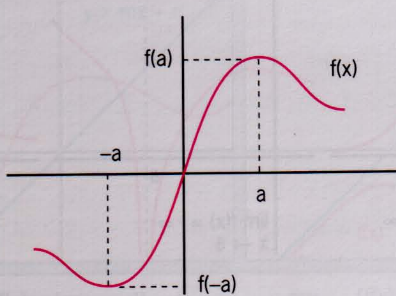
a $f(x) = x^3 - 3x$ **b** $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$ **c** $f(x) = (x + 1)e^x$

④ Simetries

El curs anterior vas veure que una funció $f(x)$ és simètrica respecte de l'eix d'ordenades quan es verifica que $f(x) = f(-x)$. Aquestes funcions s'anomenen *funcions parelles*. També vas veure que una funció $f(x)$ és simètrica respecte de l'origen de coordenades si es verifica que $f(x) = -f(-x)$. Es tracta de *funcions imparelles.*



f(x) = f(–x)
funció parella



f(x) = –f(–x)
funció imparella

Activitat

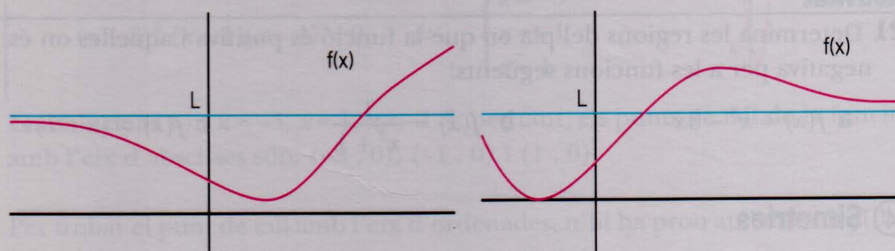
22 Determina quines de les funcions polinòmiques següents tenen simetria respecte de l'eix d'ordenades, quines la tenen respecte de l'origen de coordenades i quines no presenten simetria.

a $f(x) = x^6$ **b** $g(x) = x^5$ **c** $h(x) = x^4 + x^2$
d $i(x) = x^3 + x$ **e** $j(x) = 2x + 1$ **f** $k(x) = x^4 + x^3 + x + 5$

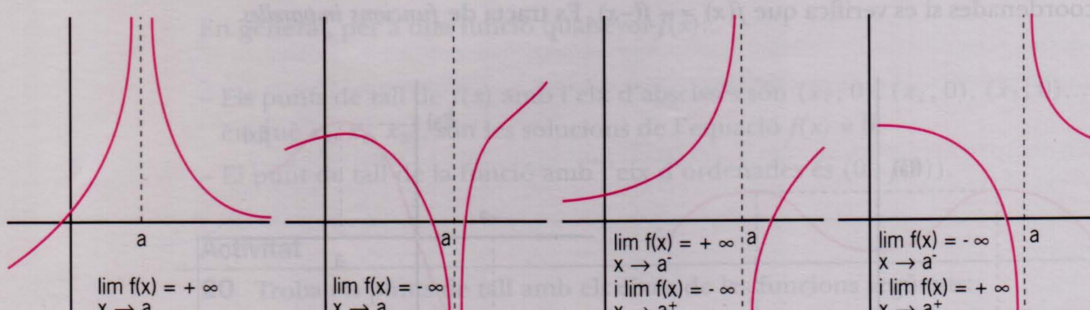
g $l(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$ **h** $m(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 4}{x - 5}$ **i** $n(x) = \dfrac{3x^2}{x^4 + x^2 + 1}$

⑤ Asímptotes i comportament a l'infinit

El curs anterior vas veure que el càlcul dels límits a l'infinit $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ i $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ és l'eina que permet determinar el comportament de la funció a l'infinit. Si en fer l'estudi d'aquest comportament s'obté que la funció $f(x)$ compleix que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$ o bé $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$. Recorda que la recta $y = L$ és una asímptota horitzontal, perquè quan $x \to -\infty$ (o bé quan $x \to +\infty$) la gràfica de la funció s'aproxima progressivament a la recta $y = L$.



Si una funció $f(x)$ en $x = a$ compleix que $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ és un límit de tipus infinit, llavors presenta una gràfica d'aquest tipus:



En aquest cas la recta $x = a$ és una asímptota vertical de la funció, perquè la gràfica de la funció es prolonga indefinidament en sentit vertical i s'aproxima a la recta $x = a$ tant com es vulgui.

Activitat

23 Determina les asímptotes verticals i horitzontals de les funcions:

a $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$ **b** $g(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 4}{x - 5}$ **c** $f(x) = (x + 1)\,e^x$

Asímptotes obliqües

Es tracta d'un nou tipus d'asímptota, que encara no havíem treballat.

Activitat

24 Donades la funció $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$ i la bisectriu del primer quadrant, la recta $y = x$.

Completa les taules següents i calcula $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - y)$. Què hi observes?

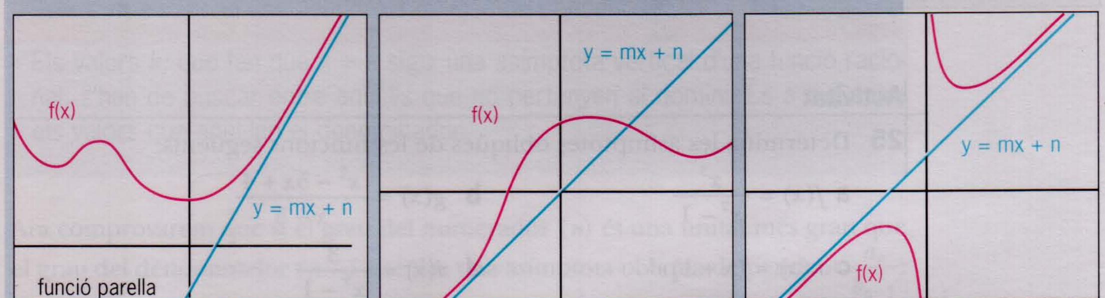
x	f(x)
100	
1.000	
10.000	
100.000	
....	

x	y
100	
1.000	
10.000	
100.000	
....	

Recorda

Si la gràfica de $f(x)$ s'aproxima a la recta $y = mx + n$, amb $m \neq 0$, quan $x \to +\infty$, o quan $x \to -\infty$, direm que la recta $y = mx + n$ és una **asímptota obliqua** de la funció $f(x)$.

Si la recta $y = mx + n$ és una asímptota obliqua de la funció $f(x)$, la diferència entre les ordenades de la funció $f(x)$ i de la recta $y = mx + n$ s'aproxima a zero quan $x \to +\infty$ o bé quan $x \to -\infty$.



$\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - (mx + n)) = 0$ $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - (mx + n)) = 0$ $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - (mx + n)) = 0$ i $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - (mx + n)) = 0$

Exemple

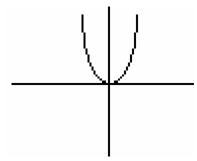
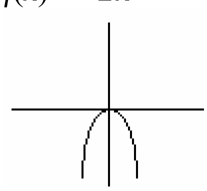
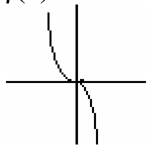
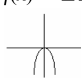
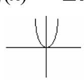
Volem determinar les asímptotes obliqües de la funció $f(x) = \dfrac{2x^2}{x-2}$:

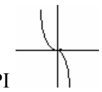
1 Per determinar el pendent m de l'asímptota només cal tenir en compte que per a valors x molt grans podem considerar que $f(x) - (mx + n)$ és gairebé zero. Per tant, podem considerar que $mx + n \approx f(x)$:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{mx + n}{x} = m$$

ANEXO 2

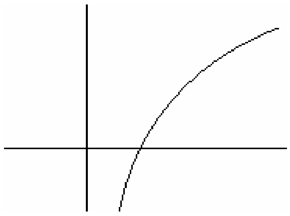
Trascripción de la clase impartida por el profesor *A*

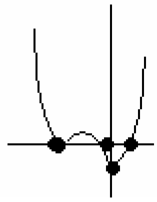
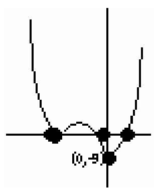
TRASCRIPCIÓN	PIZARRA	OBSERVACIONES
1. P: Vamos a corregir la actividad 17. La actividad 17 nos pide hacer un esbozo de las gráficas,… de las gráfica de la función, $2x^4$, $-2x^4$, $-2x^5$		El profesor empieza la clase haciendo un esbozo de las gráficas de la actividad 17
2. P: Cuyo esbozo de esta gráfica es así	$f(x) = 2x^4$ 	
3. P: Y de esta otra… ¡Uh! …es así 4. P: ¡De acuerdo!	$f(x) = -2x^4$ 	
5. P: Y de esta otra es así…	$f(x) = -2x^5$ 	
6. P: ¡Hola!... pasa, pasa…		Le dice a una alumna que llega a clase
7. P: Aquí tenemos el esbozo de estas tres gráficas. Dice: a partir de las gráficas de la página anterior, diga si las funciones: $f(x) = 2x^4$, $g(x) = -2x^4$ y $h(x) = -2x^5$ presentan un máximo y un mínimo o un punto de inflexión en x=0.		Lee del libro
8. P: Aquí vemos que en *x*=0 hay un mínimo, aquí en *x*=0 hay un máximo, y aquí en *x*=0 hay un punto de inflexión.	$f(x) = 2x^4$  *Máximo* $f(x) = -2x^4$  *Mínimo*	Señala en la pizarra los puntos sobre las gráficas Después escribe "mínimo" debajo de la primera gráfica, "máximo" debajo de la segunda y "punto de

9. P: El apartado *c*, para cada una de las funciones se ha de encontrar una derivada en x=0.	$f(x) = -2x^5$  PI	inflexión” debajo de la tercera.
10. P: Comencemos por la primera la efe, la primera derivada… $8x^3$… la segunda derivada, $24x^2$. Fijaos que la primera, la función $f(x)$, en x=0 presenta un mínimo y la derivada en x=0 es 0, como cabía esperar, porque ahora esta tangente es horizontal, y la segunda derivada en x=0 también da 0.	$f(x) = 2x^4$ $f\,'(x) = 8x^3$ $f\,''(x) = 24x^2$ $f\,'(0) = 0$ $f\,''(0) = 0$	El profesor hace el gesto de poner la mano indicando la posición horizontal de la recta tangente en cada gráfica. También escribe los cálculos en la pizarra
11. P: Recordemos que si ésta es positiva quiere decir que es un mínimo, y si es negativa es máximo y si da cero quiere decir que se necesita otra información para identificar si es máximo o un mínimo… u otra cosa.		
12. P: La función $g(x) = -2x^4$ la derivada $-8x^3$ y la segunda derivada $-24x^2$. Lo mismo, fijaos que la primera derivada en x=0 es cero y la segunda derivada también.	$g(x) = -2x^4$ $g\,'(x) = -8x^3$ $g\,''(x) = -24x^2$ $g\,'(0) = 0$ $g\,''(0) = 0$	
13. P: La función $h(x) = -2x^5$ la primera derivada es $-10x^4$ la segunda derivada $-40x^3$ la derivada en x= 0 es 0 y la segunda derivada en x= 0 también es cero.	$h(x) = -2x^5$ $h\,'(x) = -10x^4$ $h\,''(x) = -40x^3$ $h\,'(0) = 0$ $h\,''(0) = 0$	
14. P: Eso prueba que si la primera derivada es cero y la segunda derivada es cero tanto podemos encontrar un mínimo, un máximo o un punto de inflexión, quiere decir que no se pueden determinar qué es. Es un comentario que tenéis después en el libro…		Señala las gráficas para resaltar el máximo, el mínimo y el punto de inflexión en cada uno de los gráficos dibujados en la pizarra
15. P: En la actividad anterior se ha de observar que si la primera derivada en x $=a$ es 0, y la segunda derivada en x=0 también es 0, son diversas situaciones.		Lee del libro la actividad y señala en la pizarra la gráfica y la derivada

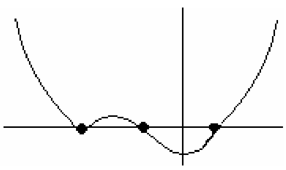
En este caso es conveniente hacer el estudio del comportamiento del signo de la derivada primera, para un entorno de $x=a$ para determinar en que situación nos encontramos.		primera y segunda de cada función. Pone la mano antes y después de $f'(0) = 0$, simulando gestos de recorridos
16. P: Quiere decir que si nosotros queremos saber que hay en $x= 0$ un máximo o un mínimo o un punto de inflexión y al hacer la segunda derivada da cero, quiere decir que la segunda derivada no aporta suficiente información para determinarlo.		
17. P: Lo que se ha de hacer es una tabla de variación. Si antes del cero es creciente, si después de cero es decreciente. Si antes del cero y después del cero es creciente, un punto de inflexión. Si antes del cero es creciente y después del cero es decreciente, un máximo. Si antes del cero es decreciente y después de cero es creciente, un mínimo. Haced la tabla de variación de la función..		Continua haciendo gestos con las manos, a la izquierda y a la derecha
18. P: ¿Hay alguna pregunta?		
19. P: Abrir el libro en la página 201. El otro día representé aquí en la pizarra una gráfica de una función, no a partir de una tabla de valores, sino observando las características, ¿cuáles? las tenéis recogidas aquí en el recuadro… vamos a leerlas.		
20. P: El dominio, el punto de corte con los ejes, las asíntotas y el comportamiento al infinito, las simetrías, los signos, intervalos de crecimiento y decrecimiento, los máximos y mínimos, los intervalos de concavidad y convexidad y puntos de inflexión. Como necesitamos todo eso lo que haremos será, punto por punto, estudiar diversas funciones, ¿De acuerdo?... Es decir, vamos a estudiar el dominio de diversas funciones, los puntos de corte con los		Este comentario lo hace el profesor leyendo textualmente del libro de texto, y luego explica lo que hará

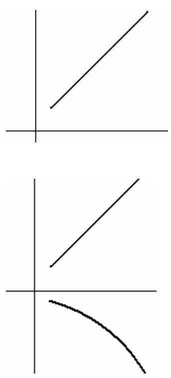
ejes de diversas funciones, para después de todo este estudio coger una función cualquiera e intentar representar como lo hice yo el otro día aquí.		
21. P: Entonces comencemos por el dominio…Recordemos que el dominio de una función es el conjunto de valores de la variable independiente que tiene imagen. …... De otra manera; son los valores que yo puedo calcular la imagen, son las equis de las que puedo calcular la imagen.		El profesor borra la pizarra
22. P: Por ejemplo, esta función $f(x)=1/(x+1)$, el dominio de esta función está formado por el conjunto de números que cuando yo sustituyo la *x* por esos números puede hacer todo este cálculo, o sea, puedo encontrar la imagen.	$f(x)=1/(x+1)$	Escribe la fórmula de la función en la pizarra,
23. P: ¿Eso siempre se puede hacer?...menos de un número, ¿De cuál?		
24. A: El –1		
25. P: Entonces el dominio son los números reales menos el -1, o sea, para cualquier número se puede encontrar una imagen menos la de –1	$D(f) = R\text{-}\{1\}$	Mientras hace este comentario primero señala la *x* y luego hace un gesto para abarcar toda la función
26. P: Hay funciones más complicadas como por ejemplo, logaritmo neperiano de “x”; $f(x)=\ln x$	$f(x)=\ln x$	
27. P: ¿Cuál es el dominio de esta función? Pensemos como va la gráfica y a partir de …Digas		Pregunta a los alumnos
28. A: De cero a más infinito		
29. P: Sí, de cero hasta más infinito, es el dominio, porque logaritmos de números negativos no existen, logaritmo de menos uno no existe. ¿El cero incluido o no incluido?	$(0,+\infty)$	El profesor escribe en la pizarra “(0,+ ∞)” y señala con el dedo al cero

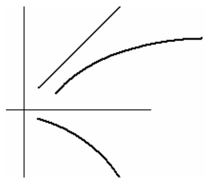
30. A: No 31. P: No… Muy bien		
32. P: Por tanto, el dominio de esta función es de cero a más infinito. Recordemos que la gráfica de esta función, hacia una cosa así, .. la gráfica de esta función hacia una cosas así, y el dominio es de cero a más infinito.		El profesor hace una gráfica y la señala. Después mueve el dedo índice siguiendo la traza de la gráfica (de abajo hacia arriba y de izquierda a derecha). Después pone la mano sobre el origen de coordenadas y la desplaza hacia la derecha para resaltar que el dominio es (0,+ ∞)
33. P: ¿Dudas?		
34. P: Un último ejemplo raíz cuadrada de *x*, ¿Cuál es el dominio de esta función?…!Venga ! 35. A: los reales 36. P: ¡Ah si¡	$f(x) = \sqrt{x}$ $D(f) =$	
37. P: Menos los negativos … porque la raíz cuadrada de un número negativo no existe, también podríamos decir los mismos números reales menos los negativos, más fácil, todos los números positivos, podemos ponerlo así, más fácil, podemos ponerlo en forma de intervalo, del cero hasta el más infinito, el cero esta vez si que está incluido, si que está incluido… 38. P: Les dejo a ustedes la actividad 19,… La actividad 19.	$D(f)=R^+$ $D(f)=[0, \infty)$	El profesor primero pone los reales positivos, pero luego borra y dice que prefiere en forma de intervalo Después con el dedo índice de la mano señalando el cero, la desplaza hacia la derecha para representar el intervalo (0,+ ∞)
39. P: Sólo una cuestión. Puntos de corte con lo ejes… el eje vertical, eje de ordenadas, el eje horizontal, el eje de abscisas.	Puntos de corte con los ejes	El profesor coge el libro y empieza el estudio de los puntos de corte con los ejes. Escribe en la pizarra “Puntos de corte con loa ejes”. Después hace gestos con la mano

		indicando que el eje de ordenadas es vertical y el de abscisas horizontal
40. P: Por ejemplo tenemos esta función, es una función polinómica de grado 4, la gráfica o un esbozo de la gráfica la tenemos aquí en el libro, página 202.	$f(x)=x^4+6x^3+8x^2-6x-9$	Escribe la función en la pizarra, justo debajo de la frase que acaba de escribir
41. P: Se trata de encontrar los puntos de corte con el eje de ordenadas y con el eje de abscisas.		Reproduce el esbozo de la gráfica que hay en el libro, pero uno de los puntos de corte le queda muy próximo al origen de coordenadas. Marca con la tiza y señala con el dedo los puntos de corte (primero con el eje de ordenadas y después con el de abscisas)
42. P: Comencemos por el eje de ordenadas, el vertical, este punto viene determinado por la imagen del cero, sustituimos… es menos nueve, recordemos que en el caso de que una función sea un polinomio, la imagen del cero siempre coincide con el término independiente, por tanto el punto que estamos encontrando, el punto de corte con el eje de ordenadas es cero menos nueve, es el cero menos nueve.	$f(0)=$ $f(0)=-9$ 	Señala con el dedo el punto de corte con el eje de ordenadas sobre la gráfica. Señala con el dedo el término independiente Escribe (0,-9) a la izquierda del punto de corte con el eje de ordenadas
43. P: El punto de corte con el eje de abscisas, horizontal, vendrá determinado por los valores, de los valores de la "*y*" que tengan imagen cero, quiere decir que todo este polinomio es igual a cero… Lo que se ha de hacer es encontrar que valores de la "*y*" que son solución de esta función, la solución de esta función son los números que sustituidos aquí dan cero, quiere decir que las imágenes son cero, justamente aquí. ¿Cómo se soluciona esta ecuación?	$x^4+6x^3+8x^2-6x-9 = 0$	Hace el gesto de "horizontal" con la mano Señala la expresión $x^4+6x^3+8x^2-6x-9$

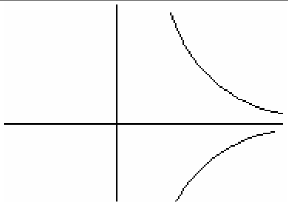
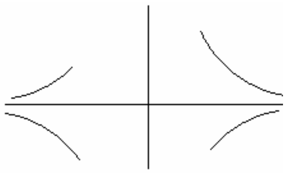
44. P: Dime Tatiana		
45. A: Por Ruffini		Borra la pizarra
46. P: Ruffini, puede ser factorizar el polinomio y cuando tengan factorizado el polinomio será muy fácil encontrar la solución de la ecuación,	1 6 8 -6 -9	El profesor escribe los coeficientes del polinomio
47. P: Recordemos como se hacia. Tómenos los coeficientes, 1, más 6, más 8, menos 6, menos 9 y ahora vamos a probar con números aquí, o sea, ¿qué números probamos?		
48. P: Oscar qué números probamos		
49. A: El 3?		
50. P: El 3 51. P: ¿Continuo?	1 6 8 -6 -9 3 3 27 ____________ 1 9	El profesor escribe en la pizarra el 3 y comienza a aplicar la técnica de Ruffini sin terminarla.
52. A: No 53. P: No, el 3 no, qué otro, diga!…		Los alumnos mentalmente llegan a la conclusión de que el resto no puede ser cero y dicen que no vale la pena continuar
54. A: el 1 55. P: Sí, el uno si que ha funcionado 56. P: ¿Con que número más probamos? 57. A: El Menos 1 58. P: Muy bien,… cero. ¿Qué más?	1 6 8 -6 -9 1 7 15 9 1 ____________ 1 7 15 9 0 -1 -6 -9 -1 ____________ 1 6 9 0 -3 -3 -9 ____________ 1 3 0	El profesor va escribiendo en la pizarra los números que dicen los alumnos y va aplicando la técnica de Ruffini
59. A: menos 3		
60. P: menos tres…¿y ya está?		
61. P: El polinomio factorizado será *x* menos 1, por *x* más 1 y por *x* más 3 al	$x^4+6x^3+8x^2-6x-9 = (x-1)(x+1)(x+3)^2$	El profesor termina el proceso y escribe los

cuadrado, por tanto la solución de esta ecuación…		factores del polinomio
62. P: ¿Cuáles serán Chema?		Para justificar que el factor (x-3) ha de estar elevado al cuadrado señala en la pizarra el -3 y el último 3
63. A: 1, -1, -3		
64. P: Ya está 1, -1, -3, esta son las soluciones de esta ecuación Esto quiere decir que son los valores, para los cuales esta función tiene imagen cero.	Las soluciones son 1, -1 y 3	Escribe en la pizarra los números que dice Chema
65. P: Estos puntos de corte son el uno cero, que es el de aquí, seria este.	Los puntos de corte son (1,0) 	Escribe en la pizarra y comete el error de señalar con el dedo el origen de coordenadas. En este momento se da cuenta de que los puntos de corte que ha hallado no coinciden con los que se observan en la gráfica. Después de dudar va a al mesa a consultar en libro de texto y se da cuenta de que no ha dibujado correctamente el esbozo de la gráfica. Lo rectifica y, sin hacer ningún comentario a los alumnos, continua
66. P: El menos 1 que es este…		
67. P: …El uno cero que seria este, el menos 1 cero que seria este y el menos 3 cero que seria este de aquí.	Los puntos de corte son (1,0), (-1,0) i (-3,0)	Con las manos realiza primero el gesto "vertical" y después el "horizontal"
68. P: Ya hemos determinado los puntos de corte con el eje de las ordenadas y el eje de las abscisas.		
69. P: ¿Dudas?...		

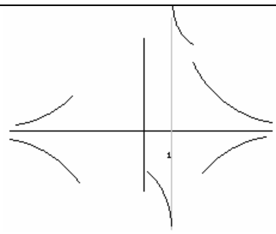
70. P: ¡No!		
71. A: No		
72. P: Si tenéis dudas preguntad. Todo esto es un repaso.		
73. P: ¿Qué herramientas teníamos para poder factorizar un polinomio?		
74. A: No me acuerdo		
75. P: La ecuación de segundo grado, sacar factor común y las identidades notables. Estas son las herramientas que tenemos		
76. P: Les toca a ustedes la actividad 20.		
77. P: En el libro, el próximo capítulo está dedicado al signo de una función, este capítulo nos lo saltaremos, igual que también simetrías, también nos lo saltaremos, son interesantes a la hora de representar la gráfica de una función, muchas veces lo he hecho, estamos justos de tiempo y nos hemos de saltar alguna cosa y será eso.		
78. P: Ahora miremos la asíntota de una función y las simetrías, vamos a ir directamente a la página 204. Asíntotas y comportamiento al infinito……	Asíntotas y comportamiento al infinito	Borra toda la pizarra, coge el libro en las manos y escribe el título que acaba de decir
79. P:…Asíntotas y comportamiento al infinito		
80. P: Una de las cosas que estudiamos para representar la gráfica de una función es el comportamiento al infinito. ¿Qué hace la función cuando la equis tiende al infinito?, ¿Qué hace la gráfica de la función cuando la equis tiende al infinito? Podría hacer así, tirar a más infinito,		El profesor mientras hace el esbozo de las gráficas mueve las mano haciendo movimientos que son la continuación del segmento de gráfica dibujada, sugiriendo la continuación indefinida del segmento dibujado.
81. P: Puede hacer así tirar a menos infinito,		

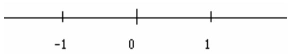
82. P: también podría crecer y estabilizarse hasta un número, así,		
83. P: Pueden ser diversas formas, en cualquiera de estas formas lo que estamos estudiando es precisamente esto, límite de $f(x)$ cuando x tiende a más infinito ¿Cuánto vale el límite… de esta función?	$\lim_{x\to+\infty} f(x)$	Hace gestos con la mano, primero hacia la derecha y después a la izquierda
84. P: Recordad que el cálculo del límite en un punto, ya está hecho, cuando estudiamos el límite cuando x tiende a más infinito y también cuando x tiende a menos infinito. Las dos cosas, y sobre todo nos interesa saber si la función es continua o no, o si es discontinúa, si tiene discontinuidad asintótica.	$\lim_{x\to-\infty} f(x)$	
85. P: Como vosotros ya sabéis, si la función tiene discontinuidad asíntotica, hay una asíntota vertical. Entonces vemos que el límite cuando x tiende a un valor "a" concreto, nos puede dar el caso el caso que de más infinito o también puede darse el caso que el límite de $f(x)$ sea menos infinito, o bien que los límites laterales, por la izquierda o por la derecha, den uno más infinito y otro menos infinito. Las diversas posibilidades las tenemos en la página 204… Son estas.	$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$	El profesor toma de nuevo el libro
86. P: Son estas posibilidades…		
87. P: Límite cuando x tiende a "a", es más infinito o menos infinito, o también cuando el límite por la izquierda y por la derecha no coinciden.		Hace gestos moviendo primero la mano hacia la izquierda y después hacia la derecha.
88. P: Tenemos un caso concreto, supongamos que tengamos esta función $f(x)=1/(x^2-1)$ y queremos saber qué comportamiento tendrá en el infinito,	$f(x)=1/(x^2-1)$	El profesor gira la página 204 del libro hacía los alumnos y

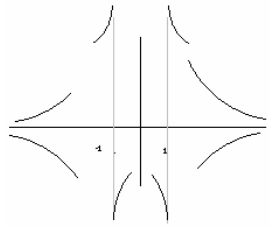
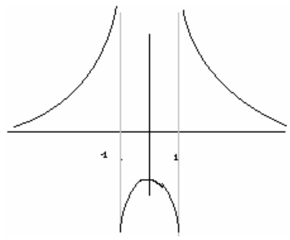
qué hará la gráfica. Lo que hemos de hacer es calcular el límite cuando x tiende a más infinito de $f(x)$ o así; límite de uno partido por x al cuadrado menos uno, cuando x tiende a más infinito. ¿Qué da este límite?… ¿Qué valor tiene? ¿Cuánto vale este límite?		señala con el dedo las gráficas correspondientes a cada una de las 4 posibilidades.
89. A:.. menos infinito 90. P: …….No!! 91. P: ¿Es cero? 92. P: Bien Chema 93. A: Cero	$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} 1/(x^2-1) =$	Escribe esta expresión y espera la respuesta de los alumnos
94. P: Sí, es cero	$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} 1/(x^2-1) = 0$	Pone el cero a la derecha del signo igual en la expresión que había en la pizarra
95. P: Recordemos que cuando x tiende al infinito, lo que hacemos era mirar los grados, grado del numerador, grado del denominador. El grado del nominador en este caso es cero y el grado del denominador es 2,.. este menor que es este, entonces es cero, el límite es cero. 96. P: Si no recordamos esta regla, ¿qué es lo que se debe hacer?…Por ejemplo hacer una tabla pues, llenamos la tabla de valores que tiendan a menos infinito y sustituimos, ¿qué sustituimos? Por ejemplo la x la sustituimos por 1000, mil al cuadrado un millón, un millón menos 1 es 999999 y uno dividido por eso, es un valor muy pequeño casi cero, y este es muy grande, dividir por un número grande es prácticamente cero, esta expresión cuando x tiende a menos infinito, todo esto es más grande, que uno partido por esta expresión, esto tenderá a cero		Señala con el dedo sobre la fórmula de la pizarra tanto el numerador como el denominador

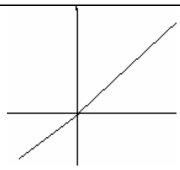
97. P: Esto quiere decir que la gráfica de la función cuando *x* tiende a menos infinito se acercan así, se acercan a las abscisas, por encima o bien así, por debajo así, no la llegará a tocar, lo cual quiere decir, el eje de abscisas es una asíntota horizontal,… recordemos, asíntota horizontal.		Dibuja en la pizarra y mueve las manos para indicar la tendencia de la gráfica cuando *x* tiende a más infinito
98. P: "*y*" igual cero es una asíntota horizontal, entonces el limite de *f*(*x*), cuando *x* tiende a menos infinito es igual al limite de 1 partido entre *x* al cuadrado menos 1, cuando *x* tiende a menos infinito, ¿cuanto vale este limite?…	*y* = 0 es una asíntota horizontal $\lim_{x\to-\infty} f(x)= \lim_{x\to-\infty} = 1/(x^2-1)=$	Escribe en la pizarra esta expresión, pregunta a los alumnos y espera respuesta
99. A: igual		
100. P: ¡igual! También vale 0.	$\lim_{x\to-\infty} f(x)= \lim_{x\to-\infty}=1/(x^2-1)=0$	Pone el cero a la derecha del signo igual en la expresión que había en la pizarra
101. P: Eso quiere decir que a medida que la x tiende a menos infinito hacia los números negativos, la gráfica se ira acercando al eje de las abscisas de una forma o de la otra, una de las dos formas que de momento no sabemos si hará así o hará así, una de las dos, lo que pasa en y = 0 es una asíntota horizontal…	 *y* = 0 es una asíntota horizontal	Dibuja en la pizarra sobre la gráfica que ya tenía dibujada, y mueve las manos para indicar la tendencia de la gráfica cuando *x* tiende a menos infinito. Después escribe en la pizarra que *y* = 0 es una asíntota horizontal
102. P: ¿Esta función es continua? Uno partido entre *x* al cuadrado menos 1		
103. A: No		
104. P: ¿Dónde no es continua?		
105. P: En menos 1 y en 1, ¿por qué motivo?		

106. P: Porque cuando *x* tiende a 1 la función tiende a más infinito o menos infinito y cuando x tiende a menos 1 la función tiende a mas infinito o menos infinito, vamos a comprobarlo.	$\lim_{x\to 1} f(x)= \lim_{x\to 1} 1/(x^2-1)=?$	Continua moviendo las manos para representar la tendencia y escribe esta expresión en la pizarra
107. P: El limite cuando x tiende a 1 de f(x) es igual al limite cuando x tiende a $\frac{1}{(x^2-1)}$ sustituimos 1 partido por 0 es infinito, menos infinito o más infinito, vamos a verlo. Para ver si es más infinito o menos infinito limites laterales… Aquí directamente límite cuando x tiende a 1 por la izquierda de $\frac{1}{(x^2-1)}$ que es menos infinito o más infinito, pensemos un momento, recordemos como se hacia.	$\lim_{x\to 1^-} 1/(x^2-1)=$ $\lim_{x\to 1^+} 1/(x^2-1)=$	Escribe los dos límites laterales
108. A: Menos infinito		
109. P: Menos infinito, cuando x tiende a menos 1 por la izquierda quiere decir que los números son más pequeños que 1: 0.5, 0.9, etc. Lo elevan al cuadrado y da cero punto, cero y algo, y le resto 1, quedará un número negativo. 1 dividido por un número negativo también quedará un número negativo, por eso da menos infinito.	$\lim_{x\to 1^-} 1/(x^2-1)= -\infty$	Señala la fórmula de la función que hay en la pizarra mientras hace estos comentarios.
110. P: El límite cuando x tiende a 1 positivo, ¿qué dará?		
111. P: ¡Oscar va!………		
112. A: Positivo.	$\lim_{x\to 1^+} 1/(x^2-1)=+\infty$	
113. P: Como pueden ver que como los límites laterales no coinciden el límite no existe… o bien el límite es infinito o sea que da mas o menos infinito.		

114. P: Recordemos que no hay una única notación, gráficamente que podemos decir de esto… pues, que... cuando uno se acerca por la izquierda…así…la gráfica tiende a menos infinito acercándose cada vez mas a esta recta, y cuando x tiende a 1 por la derecha la gráfica coge hacia arriba acercándose cada vez mas a esta asíntota vertical o esta recta eso dice, que esa recta x igual 1 es una asíntota vertical…….	 La recta x = 1 es una asíntota vertical	Dibuja en la pizarra sobre la gráfica que ya tenía dibujada, y mueve las manos para indicar la tendencia de la gráfica cuando x tiende a uno. Después escribe en la pizarra que x = 1 es una asíntota vertical
115. P: ¿Dudas? ……..		
116. P: ¿Ya hemos acabado?		
117. P: ¿qué nos queda?		
118. P: El menos uno, hemos de calcular el límite cuando x tiende a menos 1 en esta ecuación. El limite cuando x tiende a menos 1 es igual al limite $\frac{1}{(x^2-1)}$ eso dará infinito, más o menos infinito. Calcular los límites laterales.	$\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1} 1/(x^2-1)$ $\lim_{x\to -1^-} = 1/(x^2-1) =$	Escribe en la pizarra primero el límite y después los límites laterales Continua moviendo las manos para representar la aproximación por la izquierda y por la derecha
119. P: Límite de f(x) cuando x tiende a menos 1 por la izquierda y límite cuando x tiende a menos 1 por la derecha…	$\lim_{x\to -1^+} = 1/(x^2-1) =$	
120. P: Chema… Uh…		
121. A: Menos infinito		
122. P: ¿Qué?		
123. A: Menos infinito		
124. P: ¿Estáis de acuerdo?		
125. P: ¿Por qué?		
126. P: ¿y?…		
127. P: Quedará positivo.		

128. A: Sí…		
129. A: (voces que no se entienden).		
130. P: ¿seguro?		
131. P: Aquí vimos que el límite cuando x tiende a 1 por la izquierda, quiere decir números más pequeños que 1. ¿Qué quiere decir más pequeño que uno? 0,9, uno partido por cero coma nueve al cuadrado menos uno será negativo.		Señala con el dedo la expresión de los límites laterales cuando x tiende a uno que todavía estaba en la pizarra.
132. P: ¿Pero en el caso del menos uno, que valor he de tomar?		
133. A: (*responden un número que no se entiende*)		
134. P: No.		
135. P: Si yo me acerco a menos uno por la izquierda, aquí estará -1,1 menos uno coma uno. -1,1 al cuadrado quedará positivo, dará un número más grande que 1 positivo entonces esto queda positivo y uno partido por esto dará positivo y quedará más infinito.	 $\lim_{x\to 1^-} = 1/(x^2-1) = +\infty$	Dibuja una recta horizontal en la que marca el menos uno, el cero y el uno. Señala con la tiza puntos que se encuentran a la izquierda del menos uno
136. P: ¿Qué implicación gráfica tiene? Cuando x tiende a menos 1 por la izquierda la gráfica va hacia arriba acercándose cada vez mas a esta recta que es asíntota vertical, así mismo por este lado se ira hacia abajo, entonces x igual menos 1 que es una asíntota vertical.	$\lim_{x \to -1^+} = 1/(x^2-1)=-\infty$	Escribe más infinito y menos infinito a la derecha del signo igual en la expresión de los límites laterales que había en la pizarra
137. P: ¿Dudas?		
138. P: Haré un comentario, sólo para dar una idea de cómo puede ir la gráfica, como puede, no que vaya así, como podría ir si tomamos este, este y este puede tirar hacia arriba y hará así, ira		Dibuja en la pizarra sobre la gráfica que ya tenía dibujada, y mueve las manos para indicar la tendencia de la gráfica

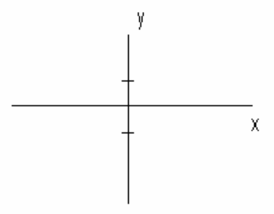
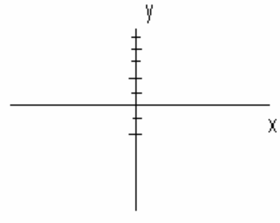
hacia allá y estamos entre este y este y esto puede ir hacia… 139. P: Miremos la gráfica puede ser así, así, así entonces una cosa así, eso podría ser el aspecto a lo mejor de esta gráfica. Podemos ver ahora otro tipo de información si el máximo esta aquí, esta más arriba o más abajo y otros detalles, lo que nos interesaba a nosotros era las asíntotas y el comportamiento al infinito.	 *x* =-1 es una asíntota vertical 	cuando *x* tiende a menos uno. Después escribe en la pizarra que x=-1 es una asíntota vertical Modifica la gráfica anterior de esta manera y acompaña sus comentarios con gestos
140. P: ¿Dudas?		
141. Pues les dejo a uds. La actividad 23 la parte *b* y *c*, los puntos *b* y *c*. ¿Y qué hay que hacer a partir de la formula de la función?, han de calcular los limites cuando x tiende a mas infinito y a menos infinito para ver si hay una asíntota horizontal o no hay, ver en que valores de *x* la función tiene discontinuidad asintótica comprobando con los limites laterales. Esa es la parte *b* y la parte *c* del 23.		Coge el libro de nuevo para hacer estos comentarios
142. P: ¿Dudas?		
143. P: Una novedad son las asíntotas oblicuas.		
144. P: Voy hacer la actividad 24 nos dan esta función, f(x) igual a *x* al cuadrado menos 1 partido por *x*, nos piden que comparemos el comportamiento hacia el infinito de esta función, y de esta otra, *y* igual *x*.	Asíntotas oblicuas Actividad 24 $f(x)= (x^2-1)/x$ $y = x$	Borra la pizarra y pone el título y el nº de la actividad y escribe las fórmulas
145. P: Recordemos que esta es una recta que pasa por el eje de coordenadas, es justamente la bisectriz el primer cuadrante por tanto el comportamiento de esta ya lo sabemos.		Dibuja la gráfica y de nuevo indica la tendencia de la gráfica con las manos.

146. P: ¿Cuál será?		
147. P ¿Cuál será el límite cuando x tiende a menos 1 de esta función?		Escribe esta expresión
148. P: Tatiana	$\lim_{x \to +\infty}$	
149. P: De esta función de aquí, de esta gráfica, ¿cuánto vale el limite cuando *x* tiende a mas infinito de esta función?………		Espera la respuesta de los alumnos
150. A: más infinito…		
151. P: más infinito, limite cuando x tiende a mas infinito es igual a infinito		Escribe el resultado
152. P: Ahora vamos a compararlo con este.	$\lim_{x \to +\infty} \qquad +\infty$	
153. ……RING……….		Suena el timbre de final de clase y el profesor termina la sección
154. Otro día continuaremos.		

ANEXO 3

Trascripción de la clase impartida por el profesor *B*

TRASCRIPCIÓN	PIZARRA	OBSERVACIONES
…		
1. P: Bien, ¡a ver!		El profesor comienza la clase y escribe en la pizarra uno de dos ejercicios que los alumnos debían haber hecho en casa
2. P: Este es uno de los dos ejercicios que habías de hacer, tenías que hacer dos cosas, vosotros tenías que hacer dos cosas, primero el dominio	$y = f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 5$	
3. P: Primero el dominio de *f*, dominio de *f* ¿cuál es el dominio de *f* Rocío?	1) $D(f)=$	Le pregunta a alumna
4. A: *R*		La alumna contesta
5. P: Es decir, a ver Marina	1) $D(f)=R$	
6. P:¿Tú cualquier número lo podemos elevar al cubo?, ¡sí!, ¿lo podemos elevar al cuadrado?, ¿lo puedes multiplicar por 9?, ¿puedes hacer las sumas y restas indicadas?, ¡sí! Por tanto quiere decir que es *R*.	1)$D(f) \rightarrow (y=f(x)$es continua)	El profesor señala la formula que esta escrita en la pizarra y continua preguntándole a la alumna
7. P: Eso es una cosa muy importante que quiere decir que es continua.		El profesor quiere llamar la atención sobre esto 
8. P: Y aquí ahora viene la segunda cosa, cortes con los ejes	2) Corte con los ejes	El profesor continua la clase
9. P: A ver, hoy comenzaré a hacer primero el corte		

con el eje "*y*", ¡a ver Rocío!, ¿el eje de las "*y*" de qué otra manera lo podemos llamar?	Eje *y*	
10. P: ¿Eje de qué?		
11. P: Diga; Marina		
12. A: Ordenadas		
13. P: De ordenadas, y ahora, a ver, ¡ah!	Eje *y* (eje de ordenadas)	
14. P: Equis e "*y*" griega, uno y uno. ¿Qué valor, Rocío, hemos de dar a la *x* para saber donde corta?, ¿en este punto cuánto vale la *x*?		El profesor dibuja un sistema de ejes coordenados y señala el eje "*y*"
15. A: cero		
16. P: Cero, por tanto el corte con el eje, la "*x*" vale cero, ahora es mas fácil de encontrar, ¿la "*y*" griega cuánto valdrá?		
17. P: Efe de cero, sería igual, cero al cubo menos seis por cero al cuadrado mas nueve por cero más cinco igual a cinco, por tanto quiere decir que pasa por le punto cero ,cinco, y eso pasará siempre	$f(0) = 0^3-6\cdot 0^2+9\cdot 0+5 = 5$ pasa por el punto (0,5)	El profesor hace los cálculos para encontrar el punto de corte con el eje de ordenadas
18. P: Uno, dos, tres cuatro y cinco, recordemos que este gráfico que yo tengo, es como si ustedes en casa tuvieran un folio de aquellos que no hacen servir y comenzarán a hacer un		

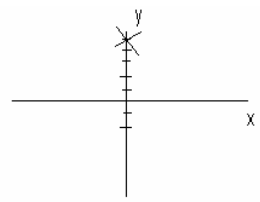
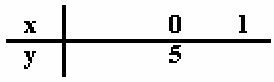
gráfico, cuando ya no sirve se tira y se hace otro, entienden eso, es una cosa en plan casero para escribir todo lo que queramos y aquí es esto. 19. P: la segunda parte sería el eje de las “*x*”, a ver Marina ¿el eje de las “*x*” como se llama? 20. P: ¿Eje de qué? 21. A: De abscisas 22. P: De abscisas, muy bien, que además en catalán se escribe de una manera muy complicada, yo reconozco que ahora lo sé hacer pero que me ha costado mucho, *a*, *b*, *s*, *c*, yo no sé por que, pero es así, eso le preguntan a alguien que… 23. P: El que les da catalán es la Pilar, ¡no! Pregúntele a Pilar el origen de tanta b, s, c aquí para molestar. 24. P: bien y ahora ¡Marina! ya que antes lo has dicho, el eje de las “*y*” se llama eje de ordenadas y el eje de las “*x*”, eje de abscisas ¿y los dos juntos cómo se llaman? 25. P: ¿Ejes de qué? 26. P: Lo habías dicho antes 27. A: De coordenadas	Eje *x* Eje *x* (ejes de abscisas)	El profesor constantemente pregunta a los alumnos

28. P: De coordenadas, aquí es donde está el problema, aquí es eso que diríamos, ahora es que el profesor de mates tiene mala idea, y ahora aquí vendrían dos cosas, sería		
29. P: Aquí quiero encontrar esto, aquí Rocío ¿qué condición verifican todos estos puntos del eje de las "*x*"?, aquí eso valía cero, ¿aquí qué es lo que valdrá cero?		El profesor señala la expresión que ha usado para hallar el punto de corte con el eje de ordenadas. Después señala el eje "*x*"
30. A: La "*y*"		
31. P: "*y*" griega igual a cero, y aquí lamentablemente no es tan fácil como eso, sino que sería, "*y*" griega, ¡perdón! En lugar de "*y*" griega ponemos cero y quedaría eso …	x^3-$6x^2$+$9x$+5 = 0	El profesor iguala la función a cero
32. P: Y esta es una ecuación de tercer grado, ah! Marta, de la cual no sabemos la fórmula, ¿entienden?, no sabemos la fórmula, y ahora para resolverla,…		
33. P: Y entonces hay que hacerla por tanteo, y además es un tanteo de muy mala idea, como dirían por aquí las cuatro personas que lo han hecho, ¡no!		
34. P: Aquí sería,… yo he de intentar hacer equis al cubo, menos seis equis al cuadrado más nueve	$x^3-6x^2+9x+5 \;\big\lvert\underline{(x-?)}$ $\underbrace{0}$	

equis más cinco, dividido por equis menos una cosa, de manera que aquí quede cero, eso lo intentaba hacer, por Ruffini, sería:		
35. P: Uno, menos seis, nueve y cinco, aquí he poner un número de manera que aquí quede un cero, por tanto si aquí ha de quedar un cero, aquí a de salir un menos cinco, ¿qué número puedo poner aquí?, ¿aquí puedo poner el dos?, ¿o el tres o el siete?, ¿Siete por un número puede dar menos cinco?	$\begin{array}{r\|rrrr} & 1 & -6 & 9 & 5 \\ & & & & -5 \\ \hline & & & & 0 \end{array}$	
36. A: no		
37. P: ¿Cuáles son los números que al multiplicar por otro puede dar menos cinco?		
38. P: Sólo hay cuatro, el uno, ¿cuál más? Menos uno, ¿cuál más? Cinco y menos cinco		
39. P: Y aquí sale la mala idea del profesor, porqué, casualmente, ninguno de los cuatro funciona, y entonces aquí tenemos, si ponemos el uno, qué pasa con uno, uno aquí, uno por uno, uno. Aquí sale un menos cinco, parece que funciona, pero claro he de poner aquí, uno por menos cinco, menos cinco, cuatro, cinco y cuatro,	1, -1 5, -5 $\begin{array}{r\|rrrr} & 1 & -6 & 9 & 5 \\ 1 & & 1 & -5 & 4 \\ \hline & 1 & -5 & 4 & 9 \end{array}$	El profesor tantea con el número uno

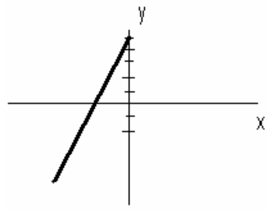
<table>
<tr><td>nueve, ¿es igual a cero?</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>40. A: No</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>41. P: No, por tanto el uno no vale</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>42. P: El menos uno, qué hacemos, entonces aquí uno, menos uno, aquí sería menos siete, ocho, aquí sería diecisiete, no ¡perdón! siete, aquí lo he hecho mal, dieciséis, menos dieciséis y menos once, por tanto el menos uno tampoco</td><td>$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -6 & 9 & 5 \\ -1 & & -1 & 7 & -16 \\ \hline & 1 & -7 & 16 & -11 \end{array}$$</td><td>Ahora el profesor tantea con el número -1</td></tr>
<tr><td>43. P: El cinco si lo hago… el cinco si lo hago, quedaría, uno, cinco, menos uno, menos cinco, cuatro, veinte y cinco, por tanto el cinco tampoco</td><td>$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -6 & 9 & 5 \\ 5 & & 5 & -5 & 20 \\ \hline & 1 & -1 & 4 & 25 \end{array}$$</td><td>El profesor ahora tantea con el número 5</td></tr>
<tr><td>44. P: Y el siguiente paso ¿cuál sería?, sería probar el menos cinco y tampoco funcionará, y entonces quedan dos actitudes que son las que yo he visto aquí, hay unas personas que aquí han dicho, no tiene solución y hay otras dos que se han quedado así, ¡ah! y no han contestado nada, bueno lo de la boca cerrada o abierta no lo sé,</td><td>x^3-6x^2+9x+5 = 0
no tiene solución</td><td></td></tr>
<tr><td>45. P: ¿Cuál es más,… bueno?, más que menos correcta, ¿cuál es menos incorrecta?</td><td></td><td></td></tr>
</table>

46. P: La de no hacer nada, porqué la de cometer un error es peor, porqué que no funcione esto ¿qué quiere decir? 47. P: Que no será un número entero, pero no quiere decir que no tenga solución, de acuerdo, por tanto eso es incorrecto, es decir la que van hacer ustedes, y ahora aquí lo que podemos decir de momento es; de momento no lo sabemos o no sale, eso sería una posibilidad de momento no sale 48. P: ¿Qué ideas se les ocurrirían a ustedes, a ver, ¿qué ideas?, si eso se los hubiera puesto, esta mala idea que caracteriza al profesor de matemáticas, como ha dicho la Ana, y sobre todo, pero como ahora las entrenadoras de basket aún son peores, estoy muy descansado. Y ahora, si yo hubiese puesto esta solución, esta ecuación sabemos que no puede ser ni uno, ni menos uno, ni cinco, ni menos cinco, pero el seis, el veinte tres, el cuarenta dos, el menos 123 tampoco, lo único que sabemos es que no puede ser un número entero, ¿por qué número decimal comenzarían?, ¿o qué harían? 49. A: Dos y medio	De momento no lo sabemos, o no sale	El profesor escribe este comentario en la pizarra

50. P: ¿Por qué comenzarían por el dos y medio? Ah! porque es un número divisor de cinco, por qué no dividir el cinco entre tres, aquí,… a ver, hay muchas posibilidades de momento si quieren hacer una cosa, nos fijaremos en esto, que es continua, y ahora si es continua, borro esto, que esto ya lo he hecho.		Borra parte de la pizarra
51. P: Y ahora me aprovecho de este hecho, que pasa por el punto cero cinco, y ahora aquí qué pasará, así o así, qué piensan ustedes qué haría, para dar un determinado valor ¿qué podrían encontrar vosotros?		El profesor en el esquema de los ejes y dibujado en la pizarra hace un par de señales sobre le punto (0,5)
52. P: Yo sé de efe de cero, si yo hago una tabla, "*x*" e "*y*" griega, aquí sé que cuando la equis vale cero la "*y*" griega vale cinco, para saber cuál es la tendencia alrededor de aquí, ¿qué encontraríamos?, ¿qué valor daríamos también?		
53. P: ¿Qué hace alrededor del cero?, ¿Qué otro número pensáis que podemos tomar?		
54. A: El uno		
55. P: Y si yo doy el uno, Marina ¿cuánto valdría todo esto? Uno menos seis menos nueve más		El profesor hace cálculos

<table>
<tr><td>cinco, ¿cuánto valdría todo eso?</td><td></td><td>reemplazando el valor de uno sobre la fórmula de la función</td></tr>
<tr><td>56. A: Espera</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>57. P: Me espero, me espero</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>58. P: A ver</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>59. A: Nueve</td><td><table><tr><td>x</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>y</td><td>5</td><td>9</td></tr></table></td><td></td></tr>
<tr><td>60. P: Nueve, por tanto ¿está más arriba o más abajo?</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>61. A: Mas arriba</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>62. P: Más arriba, a ver ustedes podrían decirme, podría hacer esto, pero a ver, a lo mejor no, también podría hacer lo otro, por tanto si a la derecha va hacia arriba

63. P: ¿Qué pasaría si vamos a la izquierda?</td><td></td><td>El profesor continúa explicando sobre el dibujo de los ejes, además utiliza gestos para representar que la gráfica va hacia arriba, a la izquierda, a la derecha, etc.</td></tr>
<tr><td>64. P: Podría acabar abajo, por tanto ¿qué valor darías tu a la izquierda?</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>65. A: Menos uno</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>66. P: Menos uno, ¿y qué pasa con el menos uno?</td><td><table><tr><td>x</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>y</td><td></td><td>5</td><td>9</td></tr></table></td><td></td></tr>
<tr><td>67. P: …(Risas del profesor)</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>68. P: Venga, Rocío, con el menos uno podrían ayudarles vosotros también, eh!</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>69. P: Menos uno, ¿si aquí doy menos uno, aquí qué tendría?</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>70. A: Tres.</td><td></td><td>El profesor va de nuevo sobre la fórmula y</td></tr>
</table>

		reemplaza el -1
71. P: Tres ¡No! A ver esto sería, menos uno, este menos seis, ¿eso cuánto sería? Menos nueve y menos cinco, ¿cuánto daría esto?	-1 -6 -9 + 5 = -11	
72. A: Menos once	$\begin{array}{c\|ccc} x & -1 & 0 & 1 \\ \hline y & -11 & 5 & 9 \end{array}$	
73. P: Menos once, por tanto ¿dónde estaría?, ¿dónde estaría el menos uno? El menos uno estaría aquí abajo, por tanto, a ver si os dais cuenta, si la función está aquí y ha de ir aquí, ha de cortar el eje de las equis, ¿o no?, aquí es obligatorio que como mínimo pase por un punto, por tanto de momento lo único que yo sé, haciendo esto, teniendo en cuenta eso y que es continua, es que esta solución, una solución está entre equis igual a menos uno y equis igual a cero, dicho de otra manera sería equis igual a menos cero coma, no sé cuanto	 Una solución está entre *x = -1 y x = 0*	El profesor hace gestos con la mano haciendo un recorrido de abajo a arriba sobre la línea más oscura para dar la explicación del recorrido continuo de la posible gráfica
74. P: Si queremos aproximar más ¿qué haríamos? Es decir, yo sé que está entre menos uno y cero, si quiero aproximar más ¿qué haría ahora? ¿qué valor daría aquí?		El profesor explica estos comentarios sobre el esbozo de la gráfica. Señala el -1 y el cero en el eje de abscisas.
75. A: Uno coma uno		
76. P: No, el uno coma uno ¿está a la izquierda o a la derecha?		

<table>
<tr>
<td>
77. A: Cero coma uno

78. P: Cero coma uno, ¿podría dar otra parte usando un criterio, que sea más fácil de hacer?, está entre el menos uno y el cero, ahora que interesaría ¿qué estuviese cómo?

79. A: En el medio

80. P: ¿Cuál es el que está en el medio?

81. A: Menos cero coma cinco

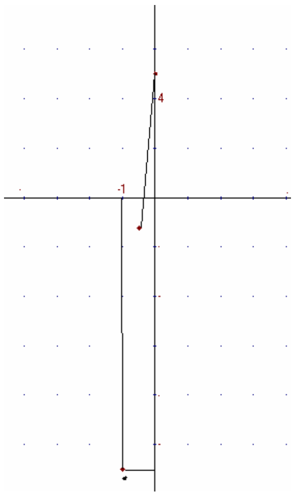
82. P: Menos cero coma cinco, por tanto lo ideal sería ahora, menos uno y menos once, da aquí menos cero coma cinco, ¿cuánto daría aquí? En el cero coma cinco, y eso es un “palo” Marina

83. P: Venga entonces hacedlo, por favor, ¿tienen calculadora?, hacedlo por favor

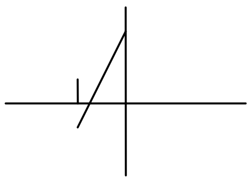
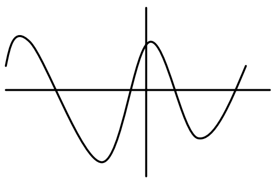
84. P: Esta ecuación, en plan coloquial lo digo, tiene mala idea, normalmente lo digo,… esta lo ha puesto el del libro, a ver, hay una posibilidad de hacer esto, y es que teniendo una calculadora mejor se hace, pero no hay otra

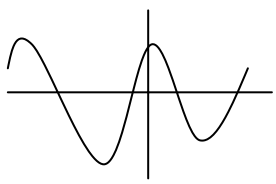
85. P: Cuando no salen estos, la única posibilidad es hacer eso,
</td>
<td>
<table>
<tr><td>x</td><td>-1</td><td>-0,5</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>y</td><td>-11</td><td></td><td>5</td><td>9</td></tr>
</table>
</td>
<td>
El profesor continua con las preguntas a los alumnos y con la explicación sobre el dibujo del esbozo de los ejes
</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><td>a ver, las personas que tienen una calculadora, un momento por favor, como la Marta, a lo mejor la podrían programar y hacerlo más fácilmente, pero eso es cuestión de manual</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>86. P: A ver, las chicas de por aquí, las personas que tienen una calculadora como esta, como pueden poner en lugar de equis el menos cero coma cinco y poner las operaciones, sale enseguida, entonces qué queda, ¿aquí qué ha salido?, que menos cero coma cinco cuánto vale, ¿cuánto vale menos cero coma cinco?</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>87. P: ¡Marta!</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>88. A: -1,125</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>89. P: -1,125, por tanto menos uno coma cinco es menos cero coma ciento veinticinco, es decir que está aquí, por tanto ¿el corte dónde estaría? Entre menos cero coma cinco y menos uno, o entre cero y menos cero como cinco</td><td><table><tr><td>x</td><td>-1</td><td>-0,5</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>y</td><td>-11</td><td>-1,125</td><td>5</td><td>9</td></tr></table></td><td></td></tr>
<tr><td>90. P: ¿Dónde pasaría la función, haría eso o haría eso?</td><td></td><td>El profesor continua explicando sobre el esbozo de los ejes</td></tr>
<tr><td>91. A: Eso depende</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>92. P: Eso es según, ¡no! Sí, sí, ya sé</td><td></td><td>El profesor hace gestos para indicar por donde</td></tr>
</table>

		debería cortar la función al eje *x*
93. P: Es decir lo que haría, tiremos el papel y lo hacemos más grande		
94. P: Menos uno, el menos uno nos ha dado menos once y el uno cinco, y ahora el menos cero coma cinco, nos ha dado otra vez, esto de aquí, por tanto si ha de pasar por este punto, por este y por este, pasaría entre menos cero coma cinco y cero		El profesor borra el dibujo de los ejes y lo hace más grande
95. P: Por tanto como aquí tenemos esto, la solución o una solución está entre equis igual a menos cero coma cinco y equis igual a cero y así podríamos seguir indefinidamente hasta encontrar una, dos, tres cifras decimales y es la única posibilidad	Una solución está entre $x = -0{,}5$ y $x = 0$	
96. P: Eso que estamos diciendo aquí, así no lo haya dicho de una manera formal, es aplicar el teorema de Bolzano, que quiere decir una cosa muy fácil, si tú tienes que un valor, el menos uno, la imagen es negativa, y en otro valor la imagen es positiva, si la función ha de pasar de aquí a aquí, obligatoriamente como mínimo hay un punto que lo corta, es decir; como mínimo hay una		El profesor continua explicando, lo hace sobre la información de la pizarra y el dibujo de la posible gráfica, además explica el teorema de Bolzano y hace gestos de abajo a arriba para indicar el "paso" de la gráfica Señala los valores en la tabla de la pizarra y también sobre la gráfica

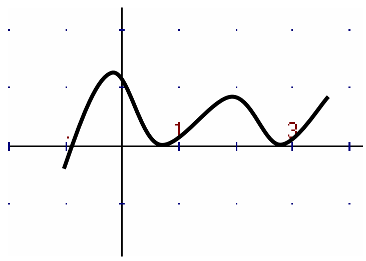
solución y está entre este valor y este, cuándo más acotas eso, cada vez irás aproximando la posible solución, pero la única posibilidad es esta, ya os he comentado, aunque de ustedes sospecho que ninguna hará matemáticas, que si fueseis a la facultad de matemáticas, entonces os demostrarían una cosa, primero, ustedes saben que hay una fórmula para resolver ecuaciones de primer grado que es muy fácil, y hay una fórmula un poco más complicada, pero no mucho, para resolver ecuaciones de segundo grado, y ahora, en la facultad de matemáticas os dirían que hay una fórmula bastante más complicada, y cuando digo una fórmula me refiero a que sólo aparecen en la fórmula sumas, restas, multiplicación, división potencias, que es lo que aparece en las ecuaciones de segundo grado, y radicales, y hay una otra más complicada aún, para resolver ecuaciones de tercer grado, y no se puede encontrar una fórmula en estas operaciones para resolver ecuaciones de grado superior, por tanto tú que preguntabas eso 97. P: Sí, hay una fórmula para resolver eso, pero		Señala la ecuación de grado tres de la pizarra

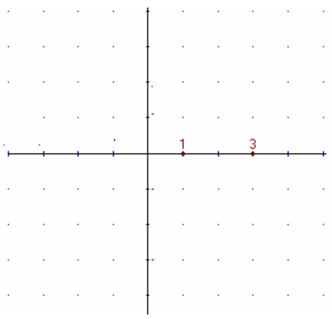
nosotros no la estudiaremos, la única posibilidad, nosotros lo haremos de esta manera, haciendo una descomposición factorial y si no sale, por tanteo, esto no deja de ser lo que se dice en castellano la “cuenta de la vieja” a ver cuando sale, vale		
98. P: De acuerdo, bien hasta aquí, las personas que no van a venir el lunes, es lo que debían de hacer, el ultimo día que va ser el lunes, vamos a añadir el dominio y el corte con los ejes al estudio,… borro eso…		Borra parte de la pizarra
99. P: Y aquí dirá, dominio y corte con los ejes es; eje “*y*” sería el cero cinco y el eje “*x*” entre cero y menos cero coma cinco	Eje *y* 6 (0, 5) Eje *x* entre 0 y -0,5	El profesor va de nuevo al titulo que tenia de corte con los ejes y pone está información
100. P: Bien, Rocío ahora vas tú, ¡eh! es decir, yo sé que la función hace esto, ¡no! qué hará más, yo sé que el dominio va desde aquí hasta aquí, por tanto la función podría hacer esto, ¿esto lo podría hacer?	 	El profesor primero dibuja los ejes y hace la primera parte de la gráfica, luego hace el esbozo de una función para preguntar a los alumnos por el posible esbozo de la gráfica, además hace gestos con la mano de izquierda a derecha sobre le eje “*x*” para representar el dominio de la función
101. P: Vale, entonces ¿qué otros puntos me interesa encontrar?		
102. P: ¿Qué otros		

puntos?		
103. P: Aquí no hay parábolas, ¿cuáles son el resto de puntos interesantes? Es decir, yo he encontrado este y este, que son los cortes con los ejes, ¿qué otros puntos?		El profesor señala los puntos de corte con los ejes sobre la gráfica
104. A: Los máximos y mínimos		
105. P: Los máximos y mínimos, que sería esto y esto, a ver, antes de seguir, yo les diría una cosa, que aquí he tenido una dificultad, aquí sabemos que una solución está entre esta y esta, ¿sabemos si hay más soluciones o no?	3) Hallar máximos y mínimos	El profesor va sobre el esbozo de la gráfica y marca los puntos máximos y mínimos
106. No lo sabemos, es decir, lo que pasa también se ha de decir, una ecuación de tercer grado, aquí saldría uno, dos, tres, cuatro y cinco, nunca tendrá cinco cortes, como mucho tendrá tres, igual que la ecuación de segundo grado como mucho tendrá dos, la ecuación de tercer grado, así no podría ser (señala la gráfica), pero ya veremos que forma tendrá, por tanto el tercer punto sería encontrar máximos y mínimos, ahora eso es para la gente que no vino ayer, el lunes yo dije, para la gente que no vino, pero		El profesor señala, mientras los va contando, los puntos de corte con el eje "*x*" de la gráfica anterior, pero aclara que una de grado tres sólo podrá tener tres cortes con los ejes, por tanto esa no podría serlo

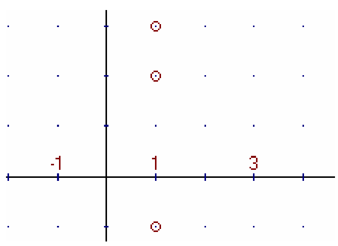
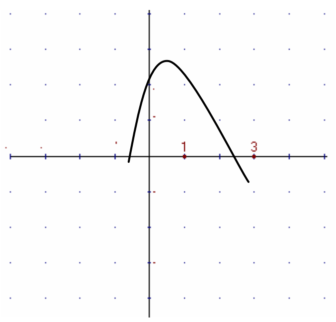
ustedes saben encontrar máximos y mínimos, antes de vacaciones hemos hecho problemas de máximos y mínimos, por tanto Rocío ¿tú qué piensas que has de hacer para encontrar máximos y mínimos? 107. A: No me recuerdo 108. P: ¿No te recuerdas? 109. P: A ver Marina, ¿qué harías? 110. A: La derivada 111. P: La derivada, muy bien. ¿Cuál es la derivada, Marina?		
112. A: tres equis …	$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$	
113. P: Tres equis cuadrado, menos doce equis, más nueve, y ahora exacto, para hacer esto hay que igualar a cero, y qué tenemos, una ecuación de segundo grado, que sería, tres equis cuadrado menos doce equis, más nueve igual a cero, que esto es una ecuación de segundo grado,… 114. …Esto ha sido el casting (el profesor hace una broma con una alumna que ha estornudado)	$3x^2 - 12x + 9 = 0$	El profesor escuchando a la alumna va escribiendo en la pizarra la derivada de la función
115. P: Esta fórmula si la conocen, ¿podemos hacer alguna cosa en la		Señala la fórmula de la pizarra

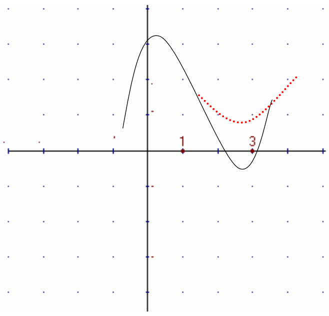
ecuación antes de aplicar la fórmula?		
116. P: ¿Qué es Rocío?		
117. A: Factor común		
118. P: ¿Y cuál es el factor común?		
119. A: El tres		
120. P: El tres, por tanto, ¿si divido todo por tres qué me queda?		
121. A: Equis…		
122. P: Equis cuadrado, menos cuatro equis, más tres y ahora aplico la ecuación de segundo grado y ustedes la hacen y me dicen cuánto da, porque eso vosotros si lo sabéis hacer	$x^2 - 4x + 3 = 0$	
123. …P: hoy están todas, cuatro y cinco, nueve… (cuenta las alumnas)		El profesor cuanta las alumnas que hay en la clase, mientras hace los cálculos con una calculadora
124. ¿Qué ha salido?		
125. A: ….		Los alumnos hacen cálculos con la calculadora
126. ..P: Muy bien		El profesor les ayuda en los cálculos
127. A…		Los alumnos hacen los cálculos
128. P: (Habla entrecortado el profesor)		

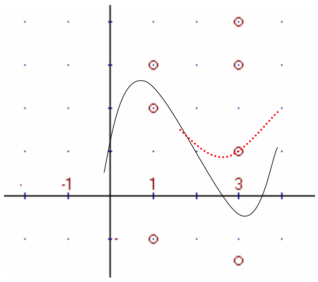
129. …P: ¿Marina ya lo has hecho? 130. … 131. P. ¿Cuánto ha dado, tú Laura? 132. A: ya está 133. P: ¡Ya lo tienes! 134. A: tres y uno		El profesor y una alumna bromean
135. P: Muy bien, chicas	$x = 3$ y $x = 1$	
136. P: (bromea el profesor) 137. P: Al finalizar haré el gráfico bien hecho, no se preocupen 138. P:!Vale!... bien		Borra la pizarra
139. P: A ver, ¿dónde han salido el máximo y el mínimo, en qué puntos? 140. P: En tres y en uno 141. P: Y ahora, el uno está aquí y el tres está aquí, qué quiere decir, ¿qué la función haría eso?		El profesor hace una hipotética gráfica con mínimos en x =1 y x = 3
142. P: ¿Eso sería dos mínimos?, ¿podría ser, o no? 143. P: A ver, aquí, es eso que decíamos antes de la ecuación, ¿cuántas soluciones tiene esta ecuación?, dos, ¿tiene más que no las hemos encontrado, o sólo tiene		El profesor señala los dos mínimos en 1 y en 3, pero también señala los dos máximos relativos de la gráfica

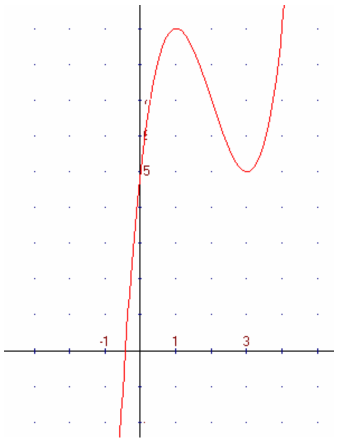
estás dos? 144. P: Sólo tiene estás dos, en lo que yo he dibujado hay dos mínimos aquí, pero esto y esto (puntos máximos) que son, ¿han salido? 145. A: No 146. P: No, por tanto no puede ser este dibujo 147. P: No, ¿de acuerdo? 148. P: Y ahora, ¿dónde situarían ustedes el máximo y el mínimo? 149. P: Es decir, el uno y el tres, que harían ahora para saber, en lugar de hacerlo aquí, ¿qué harías? ¿Cómo haríais el dibujo?, equis igual a uno, yo sé que la equis es igual a uno, o en equis igual a tres hay un máximo, o un mínimo, no sé que sería, ¿pero en qué punto tocaría?, di 150. A: Se ha de hacer la tabla 151. P: ¿Qué tabla? 152. A: ….. 153. P: bueno, lo que ustedes quieren decir, es que quieren saber cual será el máximo y cuál será el mínimo, ¡vale!, como han dicho aquí, podemos hacer la segunda derivada		El profesor borra la gráfica anterior, pero conserva los ejes

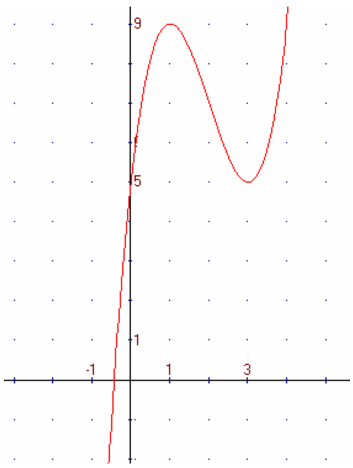
154. P: ¿Si hacemos la segunda deriva, cuánto queda?		
155. P: Efe segunda, ¿a qué sería igual?, a ver Marina tu que hoy estás lanzada, ¿cuánto vale?		
156. A: Seis equis menos doce		
157. P: Seis equis menos doce, por tanto, si yo ahora vengo aquí, ¿qué he de hacer para saber si es máximo o mínimo?, sustituir la equis en la segunda derivado, ¡no! y que daría, efe segunda de tres, ¿cuánto valdría?	$f''(x) = 6x - 12$ $f''(3)$	
158. A: cero		El profesor y alumnos hacen los cálculos
159. P: No		
160. P: Seis por tres menos doce, ¿cuánto vale?		
161. A: Seis		
162. P: ¿Seis es positivo o negativo?	$f''(3) = 6 \cdot 3 - 12 = 6$	
163. A: Positivo		
164. P: Positivo, y ahora que podemos decir, en equis igual a tres, "*y*" igual a efe de tres, ¿qué tiene un máximo o un mínimo?	$f''(3) = 6 \cdot 3 - 12 = 6 > 0$	
165. A: Un mínimo		
166. P: Mínimo, un mínimo relativo	En $x = 3$, $y = f(x)$ presenta un mínimo relativo	

167. P: ¿Y el otro?, efe segunda de uno, sería, seis por uno menos doce, que sería menos seis, que es negativo, y ahora en equis igual a uno, "*y*" igual a efe de equis presenta un máximo relativo	$f''(1) = 6(1)-12 = -6 < 0$ En $x = 1$, $y = f(x)$ presenta un máximo relativo	
168. P: Y ahora eso, a la Rocío y a la Judit les pido, yo sé que aquí hay un máximo, en equis igual a uno hay un máximo y en equis igual a tres hay un mínimo, ¡no!, cómo dibujo, cómo hago la gráfica para que en equis igual a uno haya un máximo y en equis igual a tres haya un mínimo,		El profesor señala con gestos los puntos 1 y 3 sobre el eje de las "*x*", y luego señala otros puntos con coordenadas $x = 1$
169. P: A ver yo reconozco que he estado un poco, como se dice eso, "poco fino", en un sentido, que yo siempre he indicado este punto, pero este punto de aquí, ¿tiene la equis igual a uno? ¿Este de aquí también? ¿Este de aquí también?		
170. P: Por tanto, ¿el máximo ha de estar en este punto? No, puede estar en cualquiera que tenga la equis igual a uno, por tanto, si viene aquí la función que haría, haría así, continuaría hacia arriba y aquí es donde tendría el máximo, ¿después que haría si aquí es un		El profesor hace una porción de gráfica y se detiene en el máximo mientras explica a los alumnos, luego de un mismo trazo continua la gráfica

máximo?		
171. A: bajar		
172. P: Bajaría, ¿hacia dónde?		
173. P: ¿dónde bajaría, cortaría aquí o no?		
174. A: Depende		
175. P: A ver, aquí lo que he dicho antes, aquí sólo tiene esta solución, ¿o podría tener más? Nosotros hemos dicho sólo hemos encontrado esta, pero podría… por tanto puede ser que haga esto, ¿y entonces en el tres que sería? Un mínimo, podría ser que hago esto, o podría ser que hago esto		El profesor hace una gráfica alternativa, que hemos puesto en rojo para distinguir de la otra
176. P: Si aquí nos hubiese dado tres soluciones, quiere decir que conoceríamos esta y esta, si no, no lo sabemos, por tanto a veces eso que comentábamos antes en esta ecuación, a veces va bien dejarlo en blanco, y aquí les daría una pista, si la gráfica hace esto ya sabría más o menos, incluso como podría ir, si esta por ejemplo da que ha de estar por encima, la solución la habría de encontrar a la izquierda, nunca a la derecha, porque sólo podría cortar aquí, ¿de acuerdo?		El profesor señala los dos puntos de corte con el eje “*x*” de la gráfica anterior, y continua explicando haciendo gestos sobre el esbozo de la gráfica

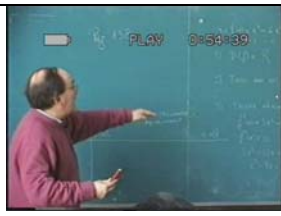
177. P: Ahora lo que nos conviene aquí es encontrar el valor de "*y*" griega, en lugar de decir en equis igual a uno, ¿cuánto vale la "*y*" griega? ¿dónde habría de sustituir, señorita, para encontrar el valor de "*y*" griega?, si yo quiero saber, dónde llega en equis igual tres, si está aquí o está aquí, o está aquí o aquí, ¿dónde sustituiría?		El profesor señala otros puntos con coordenadas $x = 3$
178. P: ¿En la derivada segunda? o sea que será seis, ¿en la derivada primera? o aquí		Señala la fórmula de la derivada segunda, de la derivada primera y de la función
179. A: En la primera		
180. P: ¿por qué? En la primera o aquí, a ver Marina, ¿yo aquí que función represento, la efe segunda, la efe prima o la efe?		Vuelve a señalar la fórmula de la derivada segunda, de la derivada primera y de la función
181. A: La efe		
182. P: la efe, por tanto el valor de "y" griega lo he de obtener sustituyendo aquí, por tanto yo aquí he de hacer efe de tres, y las personas que tengan una calculadora como estás, tardaran un poco más y las personas que tienen una calculadora como la…	$f(3)$	
183. A: Da cinco		

184. P: Da cinco, por tanto, ¡por favor Marina! Eh, que he encontrado aquí, que en efe de tres la función cuánto vale, la imagen es cinco, por lo tanto tenemos esto, es decir que la función sube y después baja hasta el cinco, ¿bajará otra vez? ¡No! Por qué sólo hay esté máximo y este mínimo, por tanto cuántos cortes tendrá el eje de las "y", ¿tendrá este y tendrá más? ¿o la función podría hacer esto? (hace un gesto de continuación de la gráfica a la izquierda). No porqué aquí habría un mínimo que no ha salido, ¿de acuerdo? 185. P: Por tanto esta función sólo tiene un corte, que estaría entre cero y menos cero coma cinco, y basta. 186. P: Y Ahora también he de hacer aquí efe de uno, "y" igual a efe de uno, esta ya la habían calculado, ¿valía once? ¡no! 187. P: Y ahora el gráfico que nos ha salido 188. A: Nueve 189. P: ¿Nueve u once? 190. A: Nueve 191. P: ¡ah! Sí tienes razón, gracias, y ahora, cinco,	$f(3) = 5$ 	El profesor mientras habla borra la gráfica anterior y a continuación de un solo traza hace es esbozo de la gráfica, además el profesor con un gesto hace como si la gráfica continuara a la izquierda

seis, siete, ocho y nueve 192. P: Por tanto la gráfica hace esto de aquí, esto sería el esbozo, yo espero que ustedes cuándo hagan una gráfica de estás en casa, lo hagan cuidadosamente, y qué la gráfica final sea eso, y que no importe por favor, cuando van a construir un gráfico de tener papel limpio y comenzar a hacer gráficas y ver dónde se han equivocado, y así si no funciona, la rompen, entienden 193. P: Y ahora como lo he dicho, yo para que no critiquen mucho, utilizando el programa de gráficas que les he dado el primer trimestre, he hecho las dos gráficas que tocaban hoy, la primera es esta, y la segunda es la que hay debajo, la segunda que teníamos 194. Bien, Rocío, cuando… no, perdón Marina, cuando la Rocío ha dicho de encontrar la segunda derivada para ver si era máximos o mínimos, tú has dicho que se podría hacer de otra manera, ¿cómo? 195. A: Con el cuadro 196. P: Con el cuadro, y entonces encontrar	$f(1) = 9$  	El profesor borra la gráfica anterior y ahora hace la gráfica definitiva, la dibuja de un solo trazo y con mucho cuidado El profesor continua la explicación de la gráfica,

máximos y mínimos también puede ser, para decirlo de alguna manera un tres-bis, que sería lo que el otro día llamamos tabla de crecimiento y decrecimiento	3 bis) Tabla de crecimiento y decrecimiento	escribe en la pizarra en nombre de la tarea a continuar
197. P: Y ahora, aquí de qué se trata, de hacer la equis, ¿cuál es el valor más pequeño que puede tomar la equis?		
198. A: El uno		
199. P: No		
200. A: Cero coma cinco		
201. P: No, la equis		
202. A: Dos		
203. P: No		
204. P: En qué valor yo le puedo comenzar a dar valores a la equis, ¿cuál es el valor más pequeño?		El profesor con un gesto señala la parte más a la izquierda de la gráfica en la pizarra, para indicar el menos infinito, y luego lo escribe en la tabla
205. A: menos infinito		
206. P: Y comenzaría en menos infinito, ¿dónde acabaría?		El profesor de nuevo pregunta a sus alumnos, y hace un gesto con la mano para indicar el punto de inicio y el posible recorrido
207. P: ¿Cuál es el valor más grande que le puedo dar a la equis?		El profesor pregunta a sus alumnos y señala el punto de más infinito para sugerir la respuesta
208. A: Infinito		
209. P: Infinito, y ahora como yo hablo de crecimiento y decrecimiento, los		

<table>
<tr>
<td>puntos clave son el máximo y el mínimo, la función va de menos infinito aquí, encuentro esos dos puntos que he encontrado, el tres y el uno, ¿cuál es más pequeño de estos dos?

210. A: El uno</td>
<td></td>
<td>

Ahora el profesor hace el gesto para indicar el más infinito, y luego va hacia la gráfica para señalar la parte más a la derecha de la gráfica

El además hace un gesto a lo largo de la recta para señalar los extremos

</td>
</tr>
<tr>
<td>211. P: Por tanto, de menos infinito hasta uno la función haría una cosa, crecería, es creciente o decreciente, pero no puede ser que en un trozo sea creciente y en otro decreciente. A partir del uno sería una cosa, en el uno habría un máximo o un mínimo, aquí sería el uno llegaría hasta el tres, del uno al tres haría lo contrario, en el tres habría, si aquí es</td>
<td>x | $(-\infty, 1)$ 1 $(1, 3)$ 3 $(3,+\infty)$</td>
<td>El profesor para explicar los intervalos de crecimiento o decrecimiento se dirige al esbozo de la gráfica e indica con gestos el comportamiento

</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>un máximo o un mínimo o viceversa y del tres iríamos al infinito, ¿de dónde ha salido eso?, es fácil, yo aquí he hecho efe, y aquí he hecho la derivada primera, ¿de dónde ha salido el uno y el tres?, el uno y el tres han salido de igualar a cero la derivada primera</td>
<td></td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>212. P: Por tanto, en el uno y tres, aquí han salido cero y cero, si seguimos como ha hecho la Rocío, qué nos ha dado aquí, al derivar el uno, hacer la derivada segunda cuándo sustituíamos en uno, ¿qué nos ha dado? Positivo o negativo

213. A: Negativo

214. P: Negativo, aquí nos ha dado menos seis, que era negativo

215. P: Y entonces he dicho, si la derivada primera se anula y la segunda era negativa, ¿qué había, un máximo o un mínimo?

216. A: Un máximo

217. P: Un máximo

218. P: En cambio, en tres ¿qué ha dado?, ha dado 6 que era positivo y aquí era un mínimo</td>
<td><table><tr><td>x</td><td>$(-\infty, 1)$</td><td>1</td><td>$(1, 3)$</td><td>3</td><td>$(3,+\infty)$</td></tr><tr><td>f</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>f´</td><td></td><td>0</td><td></td><td>0</td><td></td></tr></table>
<table><tr><td>x</td><td>$(-\infty, 1)$</td><td>1</td><td>$(1, 3)$</td><td>3</td><td>$(3,+\infty)$</td></tr><tr><td>f</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>f´</td><td></td><td>0</td><td></td><td>0</td><td></td></tr><tr><td>f´´</td><td></td><td>$-6<0$</td><td></td><td></td><td></td></tr></table></td>
<td>El profesor continua haciendo cálculos y completando la tabla

El profesor continua con la tabla de crecimiento y decrecimiento</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>219. P: ¿de acuerdo?

220. A: Sí</td>
<td>
<table>
<tr><td>x</td><td>$(-\infty, 1)$</td><td>1</td><td>$(1, 3)$</td><td>3</td><td>$(3,+\infty)$</td></tr>
<tr><td>f</td><td></td><td>Máx</td><td></td><td>Min</td><td></td></tr>
<tr><td>f´</td><td></td><td>0</td><td></td><td>0</td><td></td></tr>
<tr><td>f´´</td><td></td><td>-6<0</td><td></td><td>6>0</td><td></td></tr>
</table>
</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>221. P: ¡A ver! Marina, si la función es continua, eso es muy importante, quiere decir que yo siempre podré dibujar sin alzar el lápiz del papel o la tiza de la pizarra, lo que sea ¡no!</td>
<td></td>
<td>Ahora llama la atención sobre la continuidad de la función y se dirige a la representación gráfica que tenia al otro lado de la pizarra y haciendo gestos con la mano desplaza la tiza sobre la gráfica, sin alzarla en ningún momento


</td>
</tr>
<tr>
<td>222. P: Ahora de menos infinito a 1, si en 1 hay un máximo ¿qué hará? ¿Será creciente o será decreciente?

223. A: Creciente</td>
<td></td>
<td>El profesor continua la explicación y sigue con los gestos simulando el crecimiento y el decrecimiento de la gráfica

Los alumnos también participan de las preguntas del profesor</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>224. P: Creciente

225. P: Entre el máximo y el mínimo, ¿qué será?

226. A: Decreciente

227. P: Decreciente, y aquí sería creciente

228. P: ¿Entienden?</td>
<td><table>
<tr><td>x</td><td>(-∞, 1)</td><td>1</td><td>(1, 3)</td><td>3</td><td>(3,+∞)</td></tr>
<tr><td>f</td><td>↗</td><td>Máx</td><td>↘</td><td>Min</td><td>↗</td></tr>
<tr><td>f´</td><td></td><td>0</td><td></td><td>0</td><td></td></tr>
<tr><td>f´´</td><td></td><td>-6<0</td><td></td><td>6>0</td><td></td></tr>
</table></td>
<td>El profesor, al mismo tiempo que habla y que los alumnos responden, hace las flechas para indicar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la gráfica, con esto da por terminada la tabla</td>
</tr>
<tr>
<td>229. P: Y ahora, ¿de qué otra manera podemos hacer este otro gráfico, sin hacer la derivada segunda?, que es lo que decía la Marina, si yo hago eso, aquí tendríamos lo mismo, a ver, Marina ¿de qué otra manera podemos saber si eso es un máximo, un mínimo o si era creciente, decreciente y creciente, sin hacer la derivada segunda? ¿Qué hacíamos?

230. A: Dábamos un valor

231. P: ¿Qué valor darías aquí Judit?

232. A: Cero</td>
<td><table>
<tr><td>x</td><td>(-∞, 1)</td><td>1</td><td>(1, 3)</td><td>3</td><td>(3,+∞)</td></tr>
<tr><td>f</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>f´</td><td></td><td>0</td><td></td><td>0</td><td></td></tr>
</table></td>
<td>El profesor borra la tabla anterior y empieza otra nueva tabla con parte de la información anterior</td>
</tr>
<tr>
<td>233. P: ¿No he escuchado cuál? ¡Vale! Cero, aquí daba efe prima de cero, ¿cuánto vale efe prima de cero?, si sustituyo aquí

234. A: Nueve

235. P: Nueve es positivo o negativo</td>
<td></td>
<td>El profesor hace cálculos, evaluando en la derivada de la función, para determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><td>236. A: Positivo

237. P: Si la derivada era positiva, cómo era la función ¿creciente o decreciente?

238. A: creciente</td><td><table><tr><td>x</td><td>(-∞, 1)</td><td>1</td><td>(1, 3)</td><td>3</td><td>(3,+∞)</td></tr><tr><td>f</td><td>↗</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>f´</td><td>f´(0) = 9</td><td>0</td><td></td><td>0</td><td></td></tr></table></td><td></td></tr>
<tr><td>239. P: Era creciente, entre uno y tres ¿qué valor darían?

240. A: dos

241. P: Dos, efe segunda, efe prima, ¡perdón! de dos ¿cuánto da aquí? ¡Marina por favor!

242. P: Sería; el cuadrado de dos, cuatro por tres doce, doce y nueve, veinte y uno, y ahora doce por dos veinticuatro, sería menos tres, ¿menos tres es positivo o negativo?

243. A: Negativo

244. P: Por tanto si es negativo, ¿qué hace la función?</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>245. A: Decrecer

246. P: Decreciente, por tanto en uno qué hay, ¿máximo o mínimo?

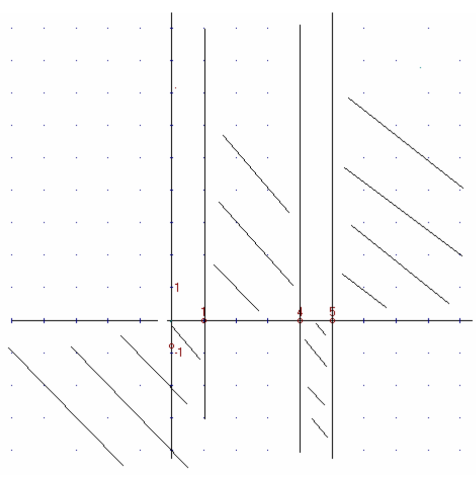
247. A: Máximo</td><td><table><tr><td>x</td><td>(-∞, 1)</td><td>1</td><td>(1, 3)</td><td>3</td><td>(3,+∞)</td></tr><tr><td>f</td><td>↗</td><td></td><td>↘</td><td></td><td></td></tr><tr><td>f´</td><td>f´(0) = 9</td><td>0</td><td>f´(2)=-3</td><td>0</td><td></td></tr></table></td><td>El profesor continua completando la información de la tabla</td></tr>
<tr><td>248. P: Máximo, y ahora entre tres e infinito, ¿qué valor darían aquí?</td><td><table><tr><td>x</td><td>(-∞, 1)</td><td>1</td><td>(1, 3)</td><td>3</td><td>(3,+∞)</td></tr><tr><td>f</td><td>↗</td><td>Máx</td><td>↘</td><td></td><td></td></tr><tr><td>f´</td><td>f´(0) = 9</td><td>0</td><td>f´(2)=-3</td><td>0</td><td></td></tr></table></td><td></td></tr>
</table>

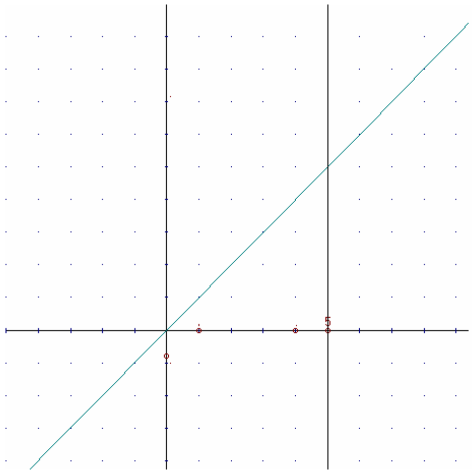
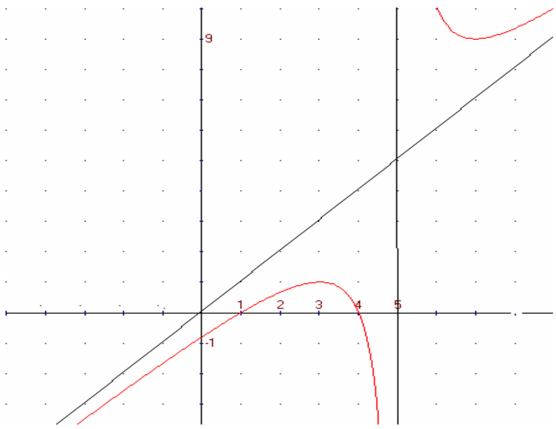
<table>
<tr><td>249. A: Cuatro</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>250. P: Cuatro, y puedes dar veinte también, y ahora qué sería, si das un valor veinte, eso que decía la Cristina al principio del curso, como el veinte estaría al cuadrado, ¿el qué dominaría cuál sería?, el valor del cuadrado, ¡no! pero también al cuadrado, por tanto que sería eso, ¿positivo o negativo, si hacemos efe de veinte?</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>251. P: Eso sería positivo y esto sería creciente, y aquí sería un mínimo,</td><td>x | (-∞, 1) 1 (1, 3) 3 (3,+∞)
f | ↗ Máx ↘ Min ↗
f´ | f´(0) = 9 0 f´(2)=-3 0 +</td><td></td></tr>
<tr><td>252. P: Y ahora recordemos que eso también lo decíamos el trimestre pasado, qué sale en este caso más rentable, ¿qué es más fácil, hacer la derivada segunda o hacer esto?, ¿tú qué dices?</td><td></td><td>El profesor reflexiona sobre cuál es la forma más eficiente de encontrar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos</td></tr>
<tr><td>253. A: "Eso"…</td><td></td><td>La alumna responde, pero no se le entiende bien, suponemos que ha dicho "eso"</td></tr>
<tr><td>254. P: ¡No te he escuchado!</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>255. P: ¿Tu harías eso?, a ver yo también lo dije la vez pasada, en aquel caso hacer la derivada segunda es muy difícil ¿o no? ¡no!, por tanto, claro por eso lo digo, hacer esto es muy fácil, mientras que aquí en vez de tener una función de</td><td></td><td></td></tr>
</table>

este tipo, tenemos una división, ¿qué será más fácil? dar valores, ¿de acuerdo?, por tanto hay la alternativa, ¿entienden? 256. P: …		El profesor continua haciendo bromas con los alumnos y da por terminada la clase

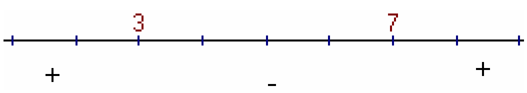
ANEXO 4

Trascripción de la entrevista al profesor *F*

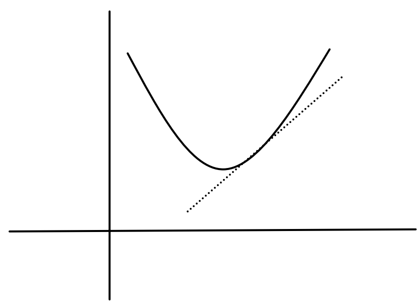
TRANSCRIPCIÓN	OBSERVACIONES
1. P: Recordemos que es una función racional, que es cociente de dos polinomios con coeficientes enteros, y tener en cuente que como polinomios que son, los exponentes son naturales, el dominio de la función que ya tenemos calculado es el conjunto de puntos donde está definida y tener presente siempre que salvo en el punto cinco la función está definida, excepto en este punto.	El profesor comienza su explicación comentando la información que se encuentra en la pizarra de la función $f(x)=\dfrac{x^2-5x+4}{x-5}$
2. P: Puntos de corte, tener en cuenta como son los que cortan el eje de abscisas, tienen en común todos que su segunda componente es cero y el eje de ordenadas la primera es un quebrado, en este caso menos cuatro quintos, tenemos aquí el uno y el cuatro.	El profesor descompone en factores la función: $f(x)=\dfrac{x^2-5x+4}{x-5}$ que quedará $f(x)=\dfrac{(x-1)(x-4)}{(x-5)}$
3. P: También tener en cuenta que esta función $(f(x)=\dfrac{x^2+5x-4}{x-5})$ la podríamos descomponer como: equis menos uno por equis menos cuatro partido equis menos cinco	
4. Me parece interesante también tener en cuenta el estudio del signo de esta función, situar los puntos uno y cuatro y el cinco aquí, y hacer el estudio parcial de numerador y denominador para tener en cuenta el recorrido de la gráfica por donde va circular ésta, entonces tomamos puntos, un punto por ejemplo el cero nos daría positivo, aquí sería negativo, y positivo en adelante, anterior sería positivo, y siempre probando con un punto anterior a cinco negativo, entonces aquí nos quedaría negativo, positivo, negativo, y positivo, ¿y qué nos indica esto?, pues en un paso previo y preeliminar nos indica que la gráfica va a pasar por aquí, ahora sería un primer paso	El profesor realiza el siguiente esquema para delimitar las regiones por las cuales puede "pasar" la gráfica (zona rallada) 

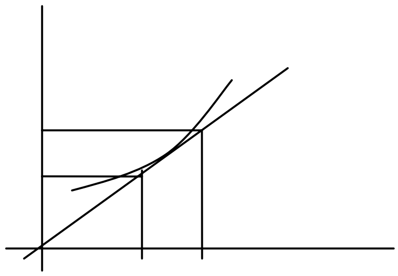
preeliminar con el signo de $f(x)$.	
5. P: De acuerdo, ya tenemos los puntos de corte situados aquí, las asíntotas una vertical en cinco, y una oblicua en el primer cuadrante, continuaríamos estudiando la monotonía, crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos, ya los tenemos situados y hemos encontrado un máximo en el tres, y un mínimo en el cinco, estos son el resultado de haber echo un paso en la primera derivada haber igualado a cero sobre aquella función que sino recuerdo mal, me parece que era… ésta… ¡no!. Y sobre la segunda en cinco, vale.	El profesor hace cálculos y hace las rectas de las asíntotas 
6. P: Pues vamos a empezar con la representación, primero situaríamos las asíntotas, ya las tenemos aquí, después los puntos de corte, uno en cuatro con el eje “x”, con el eje “y”, y bueno tener en cuenta siempre que en el punto tres aquí hay un máximo y en el punto… cinco, seis y siete, aquí un mínimo, pues nada la gráfica de la función… sería de esta manera,	El profesor mientras habla va dibujando los puntos de corte, máximos y mínimos, y luego dibuja la gráfica casi de un mismo trazo de izquierda a derecha 
7. P: Me parece que para concluir la representación gráfica de esta función, además de pensar que nos hemos dejado algunos pasos que hemos visto en teoría, como pueden ser pues el estudio de la simetría, el estudio de la inversa, yo creo que sería recomendable pensar en ésta otra gráfica: f(x)=$\dfrac{x^2-5x+4}{x-5}$ y	El profesor hace comentarios sobre cómo podría ampliar la reflexión de los alumnos sobre la representación gráfica de las funciones. Cuando comenta que la función se estira por el hecho de haber aumentado el coeficiente del numerador acompaña su explicación con un movimiento de la mano

acabaríamos rematando el estudio para mañana, pensando, esta posible gráfica como sería, analizar pues eso, la simetría de esta función, pensar si sería la inversa o no sería a esta otra gráfica, también pensaría en aumentar el coeficiente del numerador, creo que también sería interesante para ver si corta necesariamente la función o simplemente respeta su posición, simplemente se estira, cambiaría el coeficiente principal del denominador por cualquier otro, y haríamos estudios con él, por ejemplo con el programa Derive para analizar las diferentes posiciones, se podría tener esta gráfica, siempre manteniendo la misma posición, y después tener en cuenta que como función racional la diferencia entre el numerador y el denominador es de un grado, entonces siempre habrá asíntotas oblicuas que es lo más interesante de esta función.	
8. E2: Yo creo que en la explicación que has hecho, el paso de la asíntotas ha sido muy rápido, ¿cómo justificarías a los alumnos que esta función tiene esta gráfica? 9. P: Sí, la mejor manera… 10. E2: Es que lo de las asíntotas has ido muy rápido a ver si puedes explicar un poco…	El entrevistador 2 pide que el profesor se extienda un poco más en la explicación con el objetivo de saber como explica las asíntotas
11. ¡Ya! De todas maneras tener en cuenta que el concepto de asíntota es una línea, a la que la grafica de la función se aproxima, se va aproximando pero no llega a tocarla, entonces una forma muy aconsejable sería tomar ciertos valores próximos a los puntos, a ver particularmente en el cinco, tomaríamos uno de esos valores que ya a lo mejor los hubiéramos tomado al calcular las	El profesor hace gestos para indicar hacia dónde “se dispara la gráfica” También escribe la notación de los límites laterales para acompañar su explicación Lim = $f(x)$ $x \to 5^+$

asíntotas, al calcular la asíntota vertical, hubiéramos visto que al acercarnos por derecha e izquierda con diferentes valores, con cuatro con nueve o cinco con uno, bueno acercándonos a cinco por la derecha cinco con uno, cinco cero cero uno, cada vez los valores se nos disparan más hacia el infinito en este caso, y al acercarnos por la derecha nos acercaría a menos infinito haciendo aproximaciones del número en alguna tabla aproximativa con valores como estos.	Lim = $f(x)$ $x \to 5^-$
12. E2: Te parece que la idea esta de que la asíntota vertical, decir que alrededor del cinco los valores de la imagen se dispara hacia arriba, hacia abajo, ¿te parecería intuitivo o peligroso contar esto así? ¿Eso qué se dispara, lo que tú has apuntado hace un momento, te parece intuitivo o peligroso?	El entrevistador quiere hace esta pregunta con el objetivo de ver si el profesor es consciente del lenguaje que utiliza en la representación gráfica
13. P: Habiéndose hecho una serie de pruebas y justificándose que realmente es así, me parece que con tres pruebas, y si el alumno no llega a creérselo, y aumentando significativamente el número de cifras decimales, creo que el alumno puede llegar a entenderlo	El profesor aprueba el lenguaje utilizado y cree que el alumno lo entenderá de esta manera, siempre y cuando se combine con otra explicación más aritmética
14. E1: ¿Cómo saber qué la gráfica crece o decrece?	El objetivo de esta pregunta es saber si el profesor utiliza metáforas orientacionales para describir este concepto
15. P: La gráfica crece o decrece, a ver, a partir de aquí, ésta es la primera derivada, obtenemos los posibles extremos relativos, ¡no! los posibles no quieren decir que lo sean, al principio tendríamos un valor de tres y otro del siete, haríamos un estudio del signo y sobre este factor daríamos puntos para comprobar el signo de la función, probaríamos aquí y nos daría	El profesor acompaña su explicación escribiendo lo siguiente en la pizarra $y = 3$ $y = 7$ 

positivo, y negativo y positivo, entonces la función sería creciente, de menos infinito a tres, sería el intervalo de crecimiento y el de decrecimiento sería desde el siete exceptuando el cinco que no entra en la definición de la gráfica	
16. E1: Vale. ¿Y ahora cómo representáis esos intervalos, en la gráfica?	
17. P: ¡En la gráfica, cómo representamos el intervalo!	
18. E1: Sí	
19. E1: Los intervalos de crecimiento y decrecimiento	
20. P: Vale, si aquí tenemos el tres justo, lo que me he saltado probablemente sea un a tabla de valores, deberíamos haber dado una serie de valores para ir justificando sobre la función que realmente va creciendo, deberíamos haber tomado una serie de valores anteriores al tres	El profesor señala la gráfica para responder a la pregunta
21. E1: ¿Pero qué significa que va creciendo?	El objetivo de esta pregunta es intentar que el profesor amplié más su respuesta acerca del crecimiento y decrecimiento de una función
22. P: ¡Qué crece!	
23. E1: Sí, ¿qué significa eso?	
24. P: A ver, vamos a ver, qué cuando tienes un valor situado a la derecha de otro, las imágenes de esta función son mayores que la cualquier punto anterior	El profesor utiliza una explicación en términos estáticos de entornos para dar su respuesta
25. E1: Y cuando le explicas esto al alumno qué quieres que él entienda por crecimiento, ¿cuál es la idea que tú quieres qué el alumno entienda de cuando una función crece o decrece?	El objetivo de esta pregunta es ver si el profesor, de entrada, formula lo que pretende conseguir de sus alumnos en términos metafóricos

26. P: Que a medida que crece en el eje de las abscisas en valor, la imagen crece en tamaño también	El profesor responde en términos metafóricos y al mismo tiempo hace gestos con la mano indicando desplazamiento sobre el eje y aumento de tamaño
27. E1: ¿Crees qué es más fácil explicarle de una manera intuitiva a un alumno el crecimiento y decrecimiento o es mejor por entornos, o sea, en término estáticos o en términos generales dinámicos?	El objetivo de esta pregunta es saber como justifica el profesor la utilización de un lenguaje dinámico en la representación de las gráficas
28. P: Creo que un poco las dos cosas, de todas maneras, no sé, creo que más juego viene con la concavidad y convexidad, si intentas explicar concavidad y convexidad por entornos, se suelen perder más y creo que puede que tengas razón en ese momento que al ser más intuitivo explicarles el concepto de ecuación de recta tangente a una curva, y decir que la gráfica de la función queda por encima o por debajo de ella, de todas maneras por entornos se puede entender también, depende de los niveles y el público que tu tengas, es evidente también que a través de una definición no formal, no muy formal, se puede más o menos intuir la idea, pero es posible que a través de una gráfica imaginen mejor el crecimiento, tienes razón, depende un poco también del público que tengas	El profesor es partidario de combinar el lenguaje dinámico y el estático, justifica además su respuesta dando el ejemplo de la convexidad y concavidad de una gráfica y hace el esquema siguiente: 
29. E1: ¿Uno viendo una gráfica de una función, de inmediato puede saber si crece o decrece?	El objetivo de esta pregunta es saber si el profesor determina el crecimiento y decrecimiento de la función en términos de metáforas orientacionales
30. P: Con la idea de lo que uno se imagina, crecer intuitivamente, puede que si	El profesor parece reconocer que puede funcionar la metáfora orientacional (aunque no la verbaliza)
31. ¿Qué te imaginas por crecer intuitivamente?	Ahora el objetivo es verificar la observación anterior

32. P: ¿Crecer intuitivamente?	
33. E1: Sí	
34. P: Pues, que dados dos valores uno menor que otro, sus imágenes correspondientes sean una mayor que la otra, es decir, que cuando tú tengas un valor sobre el eje de las abscisas, dos y tres, la imagen de este valor sea mayor,… esto sería una función creciente	El profesor responde en términos matemáticos, y lo justifica con el siguiente esquema 
35. E2: Y si yo le dijese al alumno que cuando me voy a la derecha la función va hacia arriba sería más intuitivo que lo que acabes de decir o menos intuitivo.	El objetivo de esta pregunta es saber si el profesor es consciente de la diferencia entre el lenguaje dinámico y el estático
36. P: Te vas…	
37. E2: O sea, que cuando voy a la derecha la función va hacia arriba, tú le has puesto 2, 3, *f* de dos, *f* de tres, yo digo si crece, si me voy a la derecha la función se va hacia arriba ¿te parecería más intuitivo que esto que acabes de decir o menos intuitivo?	El entrevistador 2 matiza un poco más pregunta anterior
38. En principio igual, pero de todas maneras ahora no me atrevo, no me atrevería a darte una respuesta	El profesor empieza a dudar de las ventajas del uso de metáforas
39. E2: ¿Entonces lo ves peligroso, por ejemplo si dijésemos que cuando va a la derecha, la función se va ir arriba?	El objetivo de esta pregunta es especificar las creencias del profesor con respecto de las expresiones metafóricas
40. Ahora, en principio, sí	El profesor tenuemente reconoce que puede traer inconvenientes este tipo de expresiones metafóricas
41. E2: ¿Tienes más preguntas?	

42. E1: No	
43. E2: A ver, aquí hay un elemento que digamos que hay todo un estudio previo de la función, que es un estudio estático, son todos estos pasos que has hecho, son estáticos, pero de entrada en el momento que has empezado, ya has introducido implícitamente aspectos dinámicos, has dicho en algún momento que la gráfica pasaba, cuando hablabas de los signos, que la gráfica pasaba por aquí, la gráfica no pasó por aquí etc. Mira, has hecho algunos movimientos gestuales que, implícitamente, el alumno que recibe esta explicación se encuentra con un tono, con una explicación estática y luego unos elementos implícitos no muy conscientes en el lenguaje y una gesticulación de tipo dinámico, ¡no!. Entonces la pregunta es ¿eres conciente de que estás introduciendo estos elementos?, has dicho que la gráfica pasa por aquí, pasa por allá y tal, es decir como si la gráfica fuese un señor que se fuese de excursión.	El entrevistador 2 quiere hacerle notar al profesor que ha utilizado muchas expresiones dinámicas para referirse unos conceptos estáticos y luego hace una pregunta con el objetivo de saber si el profesor tiene alguna intención didáctica con este tipo de expresiones
44. P: Sí, sí	
45. E2: ¿Crees que van tan bien estas cosas qué incluso tendríamos que acentuar más estos elementos dinámicos para que se te entienda mejor la representación gráfica?	El entrevistador matiza más la pregunta anterior
46. P: Depende de los objetivos que tú persigas, si lo que quieres es que al hacer la gráfica única y exclusivamente se puede hacer de manera que sea como más sencillo, lo que es la representación de la gráfica, ¿y qué sí puedes prescindir de la jerga?, sí. Pero tal como tú hasta cierto punto, no sé, lo veo más como una pregunta un poco capciosa, creo que de todas maneras en un momento	El profesor deja entender que este lenguaje puede facilitar la comprensión y la explicación de las representaciones gráficas, aunque muestra sus reservas

dado intentar forzar a la rigurosidad en lo mínimo, pero es evidente que cuesta trabajo, pero si las cosas no las empiezas a ver de base, pues luego como que se te hacen más duras	
47. E2: De todas maneras tú, dentro de un planteamiento bastante riguroso has estado utilizando estos elementos, sobre todo al principio cuando has hecho lo de los signos, has dicho que la gráfica pasaba por aquí, pasaba por allá	El entrevistador le hace notar al profesor que a pesar de que ha intentado utilizar un discurso riguroso, también ha utilizado elementos metafóricos en su discurso
48. P: Sí, ¿y?	El profesor reconoce que ha utilizado este tipo de expresiones metafóricas dinámicas en su discurso
49. E2: Pero vamos, que en todo caso, tú consideras que se tienen que vigilar bastante estos elementos para que no haya confusión, ¿no?....entiendo un poco de tus comentarios, o sea, a pesar de que tú los has mitigado, lo ves peligroso y tendrías que controlarlo un poco	El entrevistador matiza un poco más la pregunta anterior con el objetivo de concretar la posición del profesor frente al lenguaje metafórico en la representación gráfica
50. P: Sí, sí, sí	
51. P: Sí, hasta cierto punto, tienes que intentar, no sé, explicar que a fuerza de decir las cosas las acabas por ver, pero la jerga científica a lo mejor puede ser complicada, pero has de intentar hacer que poco a poco las palabras vayan sonando	El profesor muestra ahora más reservas al uso de este tipo de discurso que antes
52. E1: ¿Una pregunta?	
53. P: Tampoco he utilizado la palabra entorno en ningún momento que me habéis dicho vosotros	
54. E1: Una pregunta. Cuándo habéis hecho, cuándo he preguntado por crecimiento y decrecimiento, habéis planteado una situación en términos de entornos, cuando una equis sub-	El entrevistador 1 quiere confrontar al profesor con ejemplos de expresiones en términos de entornos y expresiones metafóricas con el objetivo de saber a cuál le dará mas relevancia a la hora de

uno es menor que una equis sub-dos y tal, ¿consideras que dar el crecimiento de la gráfica en estos términos o decirle a un alumno que la gráfica es como un carro que hace cierta trayectoria es lo mismo, cuál es mejor o cual es la diferencia?	explicar
55. P: Pues un poco depende de los niveles según, supongo que el crecimiento lo puedes estudiar como estamos comentando, una función todas ella es real lo que se sobreentenderá y todas ellas continuas exceptuando puntos, pensando en si va hacia arriba, hacia abajo, pero en un momento dado considero oportuno en otros niveles como en segundo de bachiller pues al menos dar una definición mas o menos formal, sin ningún para todo ni ningún existe que en ningún momento he considerado, ni tan siquiera he centrado sobre que conjunto estaba trabajando, ni donde estaba la función definida 56. P: Quiere decir que lo he intentado hacer lo menos formal posible 57. P: Me parece más interesante en pensar situaciones abiertas, como por ejemplo no pensar en una en concreto y que luego ellos tengan que analizar o trasladar o pensar otras posibles soluciones, para dejar puertas abiertas o que pasaría si le dieses aquí un dos o no sé, me parece como más interesante antes que molestarlos en que si la gráfica esta adecuada o no 58. E2: Observa que cuando has dicho precisamente el exponente… 59. P: Que la diferencia de exponentes era uno, y todos ya veíamos que había una oblicua 60. E2: No, no antes	El profesor relativiza la utilización del lenguaje y da a entender que depende del nivel académico de los alumnos,

61. P: Que era el cociente de polinomios y …	
62. E2: Para el posible estudio posterior, has dicho si la gráfica estiraba o no se estiraba, no sé si te acuerdas de eso	
63. P: Sí, sí	
64. E2: ¿Pero tu crees qué las gráficas se estiran?	El objetivo de esta pregunta es para cuestionar al profesor sobre una expresión metafórica concreta, y saber cómo la justifica
65. P: ¡Las gráficas se estiran! Hombre se trasladan, se desplazan, más que estirarse, si consideras equis cuadrado y un medio de equis cuadrado, una se abre más que la otra, que…	El profesor al contestar hace gestos con las manos para explicar como se "estiran las gráficas"
66. E2: No yo te decía este comentario para observar que en algunos momentos no has sido muy riguroso, la gráfica se estira, ¿no? parece que….	El entrevistador le hace notar al profesor que este tipo de expresiones no son muy rigurosas y que el las ha hecho en algunos apartes de su discurso
67. P: O se desplazan, pero he dicho trasladar	
68. Terminamos	Se da por terminada la entrevista

ANEXO 5

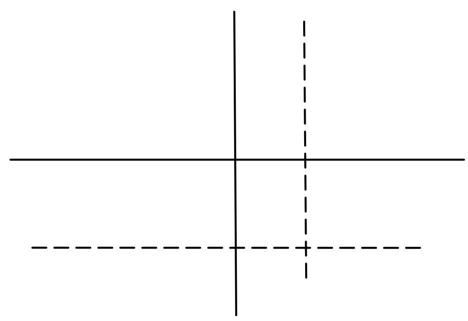
Trascripción de la entrevista al alumno *G*

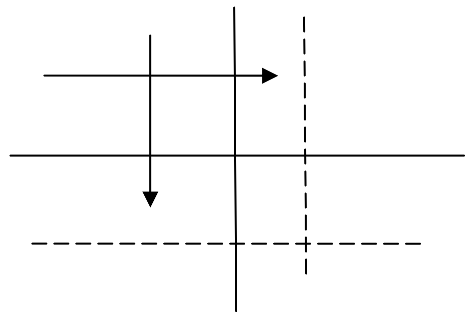
TRASCRIPCIÓN	OBSERVACIÓN
	El entrevistador sitúa al alumno en la mesa de trabajo, le entrega una hoja en blanco y pone a su disposición el examen que días antes él había resuelto satisfactoriamente, además le dice que sólo se trata de explicar lo concerniente a la representación de la gráfica, además no hace falta volver a realizar los pasos previos realizados en su examen (dominio, asíntotas, …)
1. E2: Bueno, entonces empezamos. La idea es que nos expliques de qué va el examen, y que nos expliques como lo hiciste, y los resultados un poco de qué van.	
2. A: Vale, pues teníamos que resolver esa representación gráfica, esta de aquí	El alumno señala el examen
3. E2: ¿Cuál es la función?	
4. A: Tres equis al cuadrado menos seis partido por equis al cuadrado menos uno	Señala la formula en la hoja del examen $f(x) = (3x^2-6)/(x^2-1)$
5. E2: Vale	
6. A: Primero hay que buscar el dominio y lo buscamos igualando el denominador a cero, cuando lo hemos igualado, buscamos el resultado y nos sale más uno y menos uno, entonces el dominio es todos los números reales**,** menos el uno y el menos uno	El alumno mientras realiza estos comentarios señala con su dedo la parte del examen en el que se hallan los cálculos que ya realizó el día del examen.
7. E2: ¿Qué quiere decir que ese es el dominio, por qué excluyes esos dos números?	El entrevistador formula esta pregunta con el objetivo de averiguar si el alumno utiliza la metáfora del contenedor
8. A: Porque son los que están fuera del dominio, el dominio	El alumno señala su examen para indicar la respuesta

son todos los reales menos estos dos	
9. E2: ¿Y qué quiere decir que es el dominio de la función? ¿Qué entiendes por dominio?	El entrevistador formula esta pregunta con el objetivo de que el alumno amplíe la metáfora "son los que están fuera del dominio" que ha utilizado antes
10. A: Pues, lo que abarca la función, ¡no!........ Todos los números que son parte de la función.	El alumno mientras realiza estos comentarios hace gestos con la mano como si fuera el dominio un recipiente
11. E2: ¡Vale!.. Si necesitas escribir algo para explicarle…	
12. A: Vale, ¿El punto dos?	
13. E2: Vale	
14. A: Luego hay que buscar los puntos de corte con el eje de ordenadas, y eso se hace igualando la equis a cero y cuando la igualamos nos da menos seis partido por menos uno que es lo mismo que seis, entonces corta por el punto, cero seis.	El alumno mientras realiza estos comentarios señala con su dedo la parte del examen en el que se hallan los cálculos que ya realizó el día del examen.
15. A: Luego hay que buscar los puntos con el eje de abscisas y hay que igualar la función a cero y entonces se coge el numerador y se iguala a cero y el resultado da dos, nos da raíz de dos más y menos, entonces corta en dos puntos con el eje de abscisas en el menos raíz de dos cero y en el raíz de dos cero, ¡vale!	
16. E2: ¿Qué quiere decir que la gráfica corta?	El entrevistador formula esta pregunta con el objetivo de averiguar qué tipo de metáfora utilizará el alumno en su argumentación

17. A: Qué la gráfica pasa por justamente por uno de estos puntos, bueno… Que este punto es justo por donde corta la gráfica cuando corta el eje de abscisas y el eje de ordenadas..	Mientras el alumno explica hace gestos con las manos para indicar la supuesta trayectoria de la gráfica
18. E2: Vale... Vale	
19. A: Las asíntotas y el comportamiento al infinito, esto es el tercer paso. Primero hay que buscar las verticales y se hacen cogiendo y haciendo el límite cuando equis tiende a los dos números que no son del dominio, primero se hace con el uno	El alumno continua su explicación haciendo referencia al examen
20. E2: ¡Perdón! ¿Y por qué coges precisamente esos dos?	El entrevistador hace esta pregunta con el objetivo de ver que tipo de argumentación emplea el alumno
21. A: Porque hay que encontrar los sitios por donde no va a pasar la gráfica, y estos dos están fuera del dominio, entonces estos son los que hay que buscar	El alumno de nuevo utiliza una explicación dinámica para responder, además de volver a utilizar la metáfora del contenedor para referirse al dominio
22. E: ¡Vale!	
23. A: El primero da menos tres partido por cero, bueno las asíntotas tienen que dar un número partido por cero y cuando te da entonces equis igual a uno que es el número que has hecho el límite, es una asíntota vertical y luego lo he hecho con el menos uno que es el otro número de aquí y también me ha dado el mismo resultado, y en equis igual a menos uno también hay otra asíntota vertical	El alumno continua su explicación señalando sobre la hoja del examen los cálculos que ye había hecho
24. E2: ¿Qué quiere decir asíntota	El entrevistador formula esta pregunta con

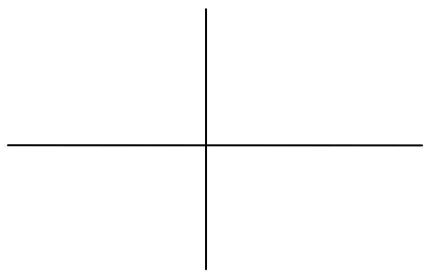
vertical?	el objetivo de averiguar qué tipo de metáfora utilizará el alumno en su argumentación
25. A: Asíntota vertical es una recta en la cual la función se aproxima por arriba y por abajo, lo que nunca llega a tocarla, y esto	El alumno de nuevo con sus manos hace gestos para expresar el movimiento aparente que hace la gráfica
26. E2: ¿Y qué entiendes por límite?	El entrevistador formula esta pregunta con el objetivo de averiguar si la metáfora “la asuntota es inalcanzable” también estructura la comprensión del límite en el alumno
27. A: ..No sé	Después de un momento de silencio, el alumno no supo responder
28. E2: Vale, ¿Y las asíntotas horizontales?	El entrevistador formula esta pregunta con el objetivo de averiguar qué tipo de metáfora utilizará el alumno en su argumentación,
29. A: Las asíntotas horizontales se buscan buscando el comportamiento al infinito primero con más infinito y luego con menos infinito, entonces lo haces de la función y esto da tres partido por uno porque como el cuadrado es lo mismo arriba que abajo se miran los números y da tres partido por uno que es tres, entonces en *y* igual a tres, hay una asíntota horizontal, y ahora con el negativo lo mismo y como es el mismo número y todo pues te va dar lo mismo y también en *y* igual tres da asíntota horizontal que es la misma	De igual manera que la anterior respuesta, el alumno recurre al examen para explicar el procedimiento de cómo poder saber cuáles son las asíntotas
30. E2: Vale, y si yo te pregunto lo mismo, ¿Qué es una asíntota horizontal?	El entrevistador formula esta pregunta con el objetivo de averiguar qué tipo de metáfora utilizará el alumno en su argumentación,

31. A: Es una recta en la cual se aproxima la función a la izquierda y la derecha	El alumno de nuevo hace su explicación recurriendo a una explicación dinámica haciendo gestos con las manos del aparente movimiento de las manos
32. E2: Dibújame una, ¿Cuál es la diferencia entre una asíntota vertical y una horizontal?	El entrevistador formula esta pregunta con el objetivo de averiguar qué tipo de metáfora utilizará el alumno en su argumentación, además para ver si es capaz de cambiar de un registro metafórico a uno más formal
33. A: Pues si este es el eje de coordenadas, pues una vertical es así, si por ejemplo pasa por este punto que podría ser el uno y horizontal si por ejemplo pasa por este punto que podría ser el menos dos……………	El alumno una vez más nos explica con un lenguaje dinámico la idea que de asíntota tiene, además lo acompaña de una representación en la que dibuja primero los ejes coordenados y luego hace una recta paralela al eje menor para dar la idea de asíntota vertical y de la misma manera dibuja una recta paralela al eje mayor para simular las asíntotas horizontales El alumno en ningún momento hace referencia explícita a cuál es el eje de ordenadas y cual el de abscisas 
34. E2: Vale, Y sobre esta misma gráfica que has dibujado, ¿cuál es la idea de límite que tienes? ¿Por qué hay que buscar los límites para saber cuales son las asíntotas?	El entrevistador formula esta pregunta con el objetivo de indagar si el alumno podría cambiar de una explicación metafórica a una más formal, de igual manera se pretendía ver si el alumno, que anteriormente nos había dicho que no sabia el significado de límite, podría de esta manera expresar alguna idea
35. A: Porque la función llegaría por ejemplo hasta aquí o hasta	El alumno haciendo gestos con la mano al mismo tiempo que habla hace el recorrido

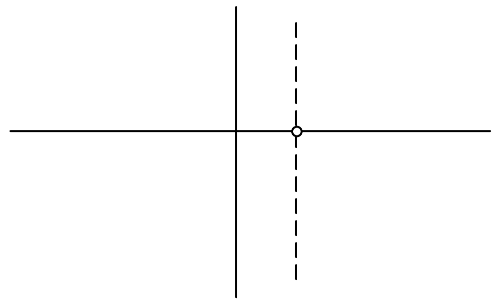
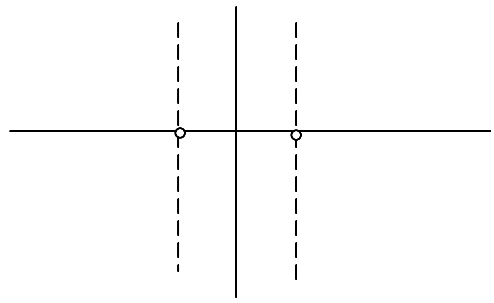
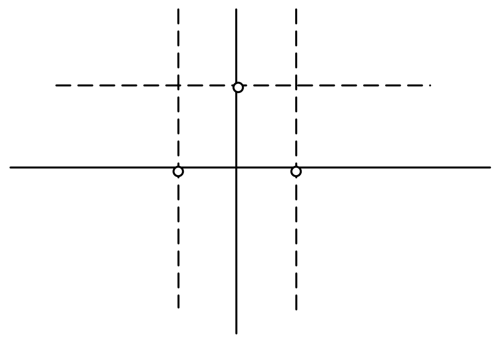
aquí, este es el límite en el que la función llega	de las flechas como se indican en el dibujo para indicar que la gráfica llegaría hasta allí 
36. E2: Vale, muy bien continúa	
37. A: Ahora hay que buscar los máximos y mínimos, y hay que derivar primero la función, la derivas y luego la igualas a cero y entonces tienes el valor de la equis, y entonces tienes que hacer el cuadro este, que para	El alumno mientras realiza estos comentarios señala con su dedo la parte del examen en el que se hallan los cálculos que ya realizó el día del examen
38. hacer el cuadro hay que coger el número que acabas de encontrar que es el cero, el menos uno y el uno que son los dos puntos que no estaban en el dominio, entonces lo haces primero con la derivada y luego con la función normal y buscas,… Primero coges el número más pequeño, el menos uno y buscas del menos infinito al menos uno, coges un número que por ejemplo aquí sería el menos dos lo sustituyes aquí y miras si te da positivo o negativo en este caso da negativo y pones negativo y la flecha hacia abajo	
39. E2: ¿Y por qué la flecha hacia abajo?	El entrevistador formula esta pregunta con el objetivo de averiguar si el alumno de nuevo utiliza la metáfora orientacional para

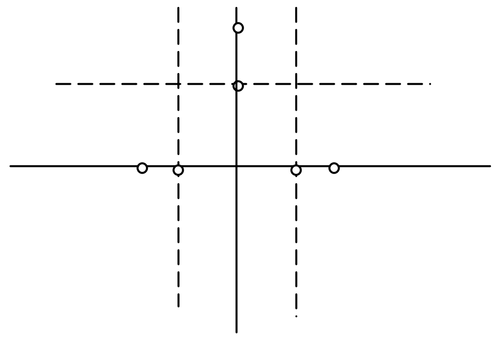
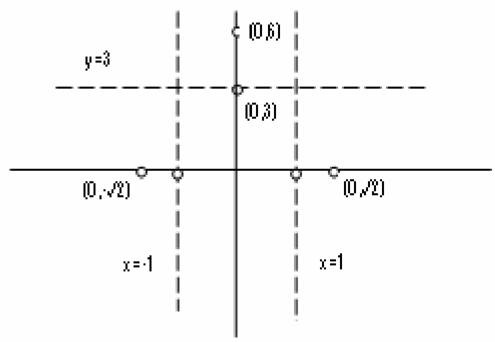
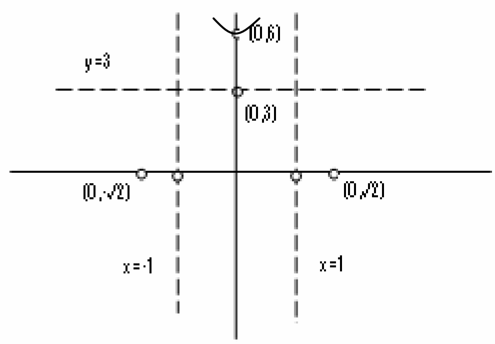
	su argumentación
40. A: Porque es negativo e ira así la función, ira hacia abajo.	El alumno de nuevo con sus manos hace gestos para expresar el movimiento aparente que hace la gráfica, haciendo un recorrido de arriba a abajo
41. A: Luego haces lo mismo aquí, bueno primero aquí en el cero le pones el cero porque es … lo acabas de buscar, es el número que te ha dado por tanto la derivada es cero y luego en el menos uno y en el uno también tendrías que poner cero, pero como hay asíntotas verticales justamente que están aquí como hay pues entonces no existe ni la derivada ni la función no existen, vale, entonces luego lo haces con el menos uno y el cero y también te da negativo, con el mismo procedimiento y luego con el cero y el uno pues da positivo y como da positivo resulta que hay un mínimo aquí porque hay este dibujo y hay un mínimo	El alumno mientras realiza estos comentarios señala con el bolígrafo la parte del examen en el que se hallan los cálculos que describe
42. E2: ¡Perdona! Aquí hay una flecha hacia arriba	El entrevistador quiere llamar la atención sobre las flechas
43. A: Aquí hacia abajo y aquí hacia arriba	
44. E2: ¿Qué quiere decir hacia arriba?	El entrevistador formula esta pregunta con el objetivo de averiguar si el alumno de nuevo utiliza la metáfora orientacional para su argumentación
45. A: Porque es positiva, hemos buscado el cero y medio por ejemplo, un número entre estos dos y nos ha dado positivo, entonces como hay uno abajo y otro arriba hay un mínimo aquí, y para encontrar el mínimo en	El alumno ahora asocia la flecha hacia arriba con el signo positivo mientras explica sobre la tabla que tenia realiza en su examen para determinar el crecimiento y decrecimiento

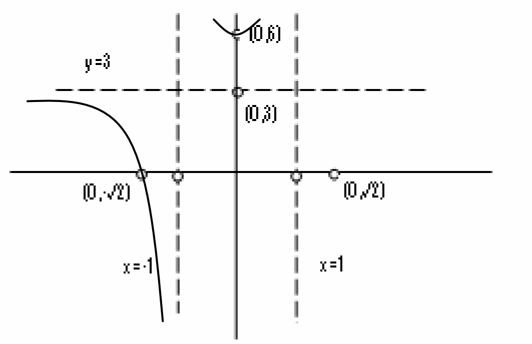
el punto exacto hay que buscar coges el cero que lo tienes aquí y luego el otro número hay que buscarlo aquí a la gráfica del principio sin derivar la función y entonces pues te da el número mínimo, y esto… y luego pues que es lo mismo que asíntota y no existe y aquí vuelve a ser positivo, por que por ejemplo el dos lo sustituyes y te da positivo	
46. E2: ¿Y aquí qué pasa que las dos flechas están hacia arriba?	El entrevistador formula esta pregunta con el objetivo de averiguar si el alumno de nuevo utiliza la metáfora orientacional para su argumentación, al igual se trata de ver si el alumno puede dar una explicación mas formal de la idea de asíntota
47. A: Pues que suben y luego siguen subiendo	Continua el alumno explicando en términos de la metáfora del "movmiento ficticio y la orientacional"
48. E2: ¿Y aquí que las dos flechas están hacia abajo, qué pasa?	De nuevo el entrevistador resalta el hecho de las flechas y su orientación
49. A: Pues bajan y luego vuelve a bajar	Y de nuevo el alumno continua con el mismo tipo de argumentación
50. E2: ¿Bueno y en este punto que hay?	El entrevistador señala sobre el examen en la parte de la tabla el lugar donde se encuentran las dos flechas hacia arriba
51. A: Las asíntotas en el menos uno y en el uno hay asíntotas porque no existe	El entrevistador le entrega una hoja en blanco
52. E2: Vale de acuerdo, entonces ahora vamos a hacer la gráfica, vamos a hacer una cosa para la gráfica, así la veas de aquí, vuelve a dibujarla un poco más grande	Se aclara que sólo se trata de explicar lo concerniente a la representación de la gráfica
53. A: Vale, con regla o da igual	

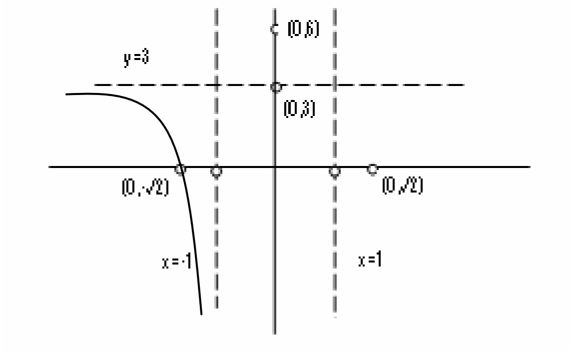
54. E2: Da igual, pero si quieres	
55. A: Da igual da igual	
56. E2: Entonces vamos a empezar desde el principio, a ver si me puedes explicar sobre esta representación, esto lo que has hecho	
57. A: ¡Vale!	El alumno dibuja un par de rectas perpendiculares 
58. E2: Entonces, primero, ¿que has hecho ahí?	El entrevistador le pide que explique que ha hecho
59. A: Vale, primero distribuyes con los puntos así	El alumno trata de explicar lo que hará, pero se le pide que explique el dibujo
60. E2: Vale, No, ¿Primero que es esto? ¿Qué has hecho ahí?	El entrevistador le pide que explique el dibujo de los ejes coordenados
61. A: Un eje de coordenadas	El alumno reconoce el dibujo como un sistema de ejes coordenados
62. E2: ¿Cuáles son las abscisas y cuáles son las ordenadas?	El entrevistador le pide que ya que él reconoció el dibujo como un sistema coordenado, entonces discrimine cada eje. El alumno tarda mucho en contestar
63. A:... Esta es la ordenada… esta la abscisa…	El alumno reconoce la línea más corta como las ordenadas y la más larga como las abscisas, lo hace mediante un gesto con las manos en la que las ordenadas las representa como una línea vertical y las abscisas como horizontal, en otras palabras: aplica que hay un eje vertical y uno horizontal, al vertical le llama eje de ordenadas o de las "*y*", al

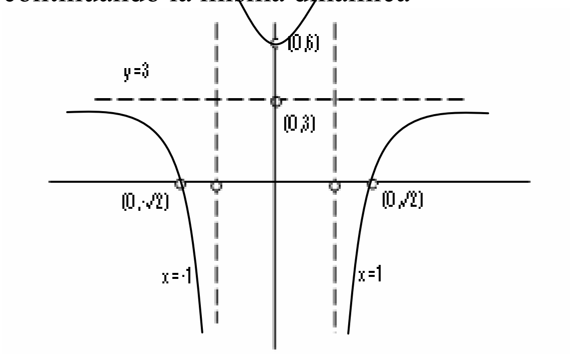
	horizontal le llama abscisas o "*x*". Eso es de suponer que este alumno pueda confundir el eje de ordenadas con el eje de abscisas
64. E1: ¿Cómo has sabido cuál es la ordenada y cuál es la abscisa?	El entrevistador, al observar su tardanza en contestar formula esta pregunta con el objetivo de averiguar si el alumno ha reconocido los ejes bajo la idea metafórica de orientación
65. A: Porque me he acordado.	Ante la pregunta el alumno duda, pero recuerda aunque no lo dice, que las verticales son el eje de ordenadas y el eje de abscisas son las horizontales (orientacional)
66. E2: ¡Vale! Entonces lo primero es, lo primero que has hecho es dibujar un eje coordenado y lo segundo es determinar cuál es la ordenada y cuáles son las abscisas	
67. A: Sí.	
68. E2: Muy bien, ahora otra pregunta antes de continuar, ¿identificas qué clase de función es esa?	El entrevistador hace esta pregunta con el objetivo de ver si el alumno la identifica como perteneciente a una familia de funciones con ciertas particularidades
69. A: …Una función... que está formada de polinomios que están con una fracción entre ellos	El alumno duda un poco para responder
70. E2: Vale, Continuemos, una vez tenemos ya los ejes, una vez tenemos ya las abscisas y las ordenadas, ¿qué sigue?	
71. E2: Primero, el dominio	
72. A: El dominio	
73. E2: Ya hemos encontrado el dominio	El alumno primero dibuja la asíntota que supuestamente está en $x = 1$, previamente dibuja un punto para representar el punto (1,0)

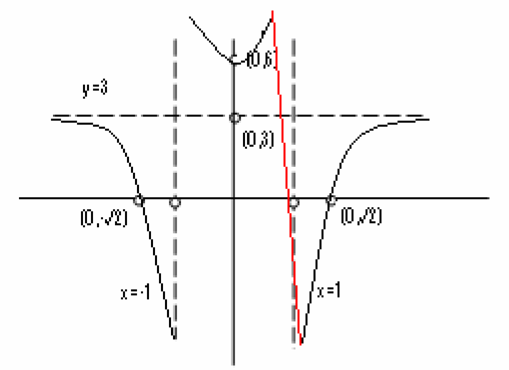
74. A: Pero el dominio ahora no lo utilizas de momento vas primero para poder dibujar tienes que, lo primero que hago yo es buscar las asíntotas que tenemos y dibujarlas, vale, la de equis igual a uno estaría aquí por ejemplo, se dibuja así discontinua para que no se confunda con el eje	
75. A: Luego hay la de menos uno que estaría aquí por ejemplo.	A continuación dibuja la asíntota que estaría en *x* = -1, también dibuja el punto (-1,0), previamente 
76. A: Y luego hay una asíntota horizontal en el tres que sería aquí.	Continua dibujando con la asíntota horizontal, *y* = 3 y el punto (0,3) 
77. A: Ahora poner los puntos que hemos encontrado, como el cero seis que si aquí está el 3, estaría por aquí, y luego el menos raíz de dos y el cero que sería, estaría por aquí y el otro estaría por aquí, ahora ya utilizamos esto pero…	Ahora el alumno dibuja tres puntos sobre la gráfica que se supone representan los puntos que ha encontrado en los cálculos que realizó en el examen El entrevistador le pide que ponga

78. E2: Ubica los puntos aquí para que no se nos confunda, ¿cuál era ese?	coordenadas a esos puntos para evitar confusiones 
79. A: Ah si, El cero seis, bueno la asíntota esta está en *y* igual a tres, aquí esta es equis igual a uno y esta es equis igual a menos uno, luego aquí esta el punto menos raíz de dos cero, no, cero menos raíz de dos, y aquí el punto cero raíz de dos.	El alumno escribe las coordenadas sobre la gráfica a petición del entrevistador para no crear confusiones, el alumno comete un error escribiendo el punto (0,- √2) por la correcta (-√2, 0) de igual manera escribe el punto (0, √2) por la correcta (√2,0). Hay que resaltar que en su examen también se observa esta confusión en la gráfica, pero no en los cálculos realizados para hallarlos 
80. A: Ahora aquí hay un mínimo, entonces hay que hacerle esto para luego dibujarlo mejor	El alumno hace una marca sobre el la coordenada (0,6) para determinar el supuesto mínimo que hay allí.  El entrevistador hace esta pregunta para

81. E: ¿Y por qué hay un mínimo ahí?	averiguar si el alumno es capaz de dar una explicación
82. A: Porque lo hemos encontrado aquí donde esta el mínimo cuando hay uno negativo así y uno positivo encuentras el mínimo.	El alumno explica señalando la tabla crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos que ha hecho en su examen
83. A: Ahora hay que dibujar siguiendo esto, empezamos por la izquierda te dice que es negativa, entonces hay que empezar aquí y como hay una asíntota hay que seguirla así sin tocarla, luego hay que hacer así para pasar por este punto y seguir hasta abajo. Ahora te dice que vuelve a bajar	Ahora el alumno empieza el esbozo de la gráfica con un primer trazo continuo que hace de izquierda a derecha 
84. E2: ¡Perdón! ¿Y por qué empiezas ahí?	El entrevistador hace esta pregunta con el objetivo de saber si alumno interpreta la gráfica como un camino que tiene principio y fin
85. A: Porque se empieza ahí, ¡no!, Bueno, no sé, siempre hay que empezar por la izquierda creo.	
86. A: Entonces te dice, hay un negativo y otro negativo entonces bajas por aquí que sería así, bajas por aquí encuentras el mínimo aquí y te dice que subas entonces tienes que subir por aquí.	Continua el alumno con el esbozo de la parte central de la gráfica, y justifica a partir de la tabla el comportamiento de la función antes y después del mínimo en términos metafóricos en los que se observa el movimiento ficticio

<table>
<tr>
<td></td>
<td>


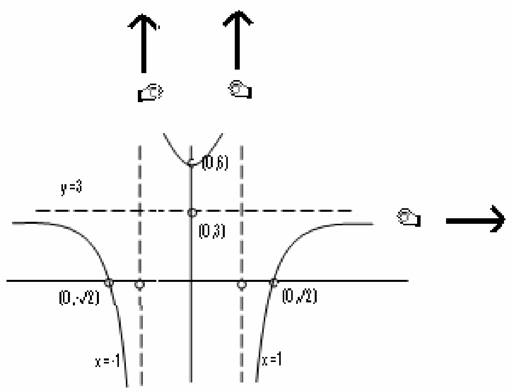
</td>
</tr>
<tr>
<td>87. A: Y luego te dice que vuelvas a subir, entonces después de aquí irías aquí, vas al punto y ya está</td>
<td>El alumno ahora dibuja la tercera parte de la gráfica con un trazo de izquierda a derecha continuando la misma dinámica


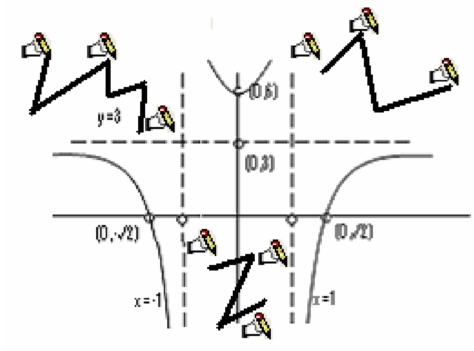
</td>
</tr>
<tr>
<td>88. E2: ¿Y qué pasó de aquí a aquí?</td>
<td>El entrevistador señala las dos partes de la gráfica que está en rojo con el objetivo de ver cómo el alumno justifica el “salto de la asíntota”


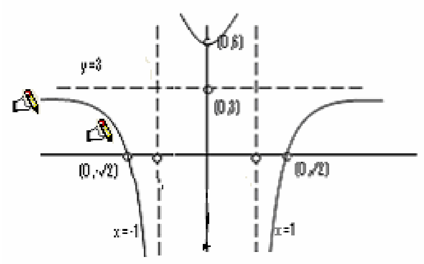
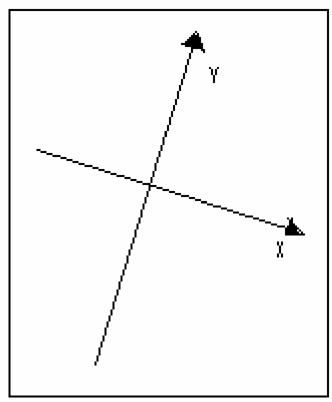
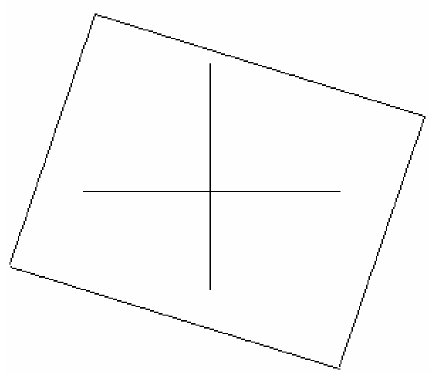
</td>
</tr>
<tr>
<td>89. A: Es que sigue, como si dijéramos, bueno no sé… ¿cómo que qué pasó?</td>
<td>El alumno señala las dos partes de la gráfica que están en rojo, pero no da una respuesta coherente</td>
</tr>
<tr>
<td>90. E2: Dices que empieza a subir aquí pero después continua subiendo aquí</td>
<td>El entrevistador señala las dos partes de la gráfica que coinciden con la línea roja, para aclararle la pregunta</td>
</tr>
</table>

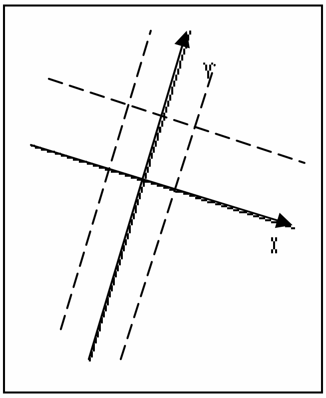
91. A: Sí, porque baja y sube y luego vuelve a subir, pero aquí ya no puedes subir entonces tienes que ir abajo otra vez	El alumno intenta dar una explicación de como "salta la asíntota". Cuando dice "baja y sube" con el dedo va recorriendo la parte central de la gráfica, cuando dice "luego vuelve a subir" con el dedo va recorriendo la parte de la derecha de la gráfica, cuando dice "pero aquí no puede subir", vuelve a la parte central y cuando dice "entonces tiene que ir abajo otra vez" vuelve a la parte de la derecha. Sigue sin dar una explicación coherente
92. E2: Vale ¿Qué significa entonces que eso esta creciendo?	El entrevistador hace esta pregunta con el objetivo de ver si el alumno emplea de nuevo la metáfora orientacional "subir" para explicar el crecimiento
93. A: Si, primero decrece y luego crece	El alumno confunde la pregunta y no contesta lo que le preguntamos
94. E2: Vale ¿Y qué significa que eso decrece?	El entrevistador hace de nuevo una pregunta similar con el objetivo de si el alumno emplea de nuevo la metáfora orientacional "bajar" para referirse al decrecimiento
95. A: Pues que va a ser positivo	El alumno de nuevo no contesta lo que se le pregunta de manera clara -
96. E2: ¿Y qué entiendes cuándo dices que la gráfica esta creciendo?	El entrevistador hace de nuevo esta pregunta con el objetivo de ver si el alumno emplea algún tipo de metáfora orientacional para explicar el crecimiento.
97. A: Pues que… está positiva como si dijéramos, no sé …	El alumno asocia primero, de manera titubeante, el crecimiento de la gráfica con el signo positivo de la derivada, aunque después reconoce que no lo sabe.
98. E2: Yo voy a hacer otra pregunta	
99. E1: Cómo es qué en la asintota horizontal se pone una *y* y no se pone una *x*, esta asíntota de aquí *y = 3,* si es horizontal …	Interviene el otro entrevistador con el objetivo de profundizar en el conocimiento que tiene el alumno de los ejes de coordenadas. El motivo de esta pregunta es que los entrevistadores sospechan que este alumno, al organizar los ejes de coordenadas en base a la metáfora orientacional ("hay un eje vertical y uno horizontal, al vertical le llama eje de

	ordenadas o de las "y", al horizontal le llama abscisas o "*x*"), puede llegar a creer que todo lo vertical se tiene que representar con "*y*" y todo lo horizontal con "*x*".
100. A: Porque es una asíntota horizontal y las verticales son equis igual a tal y las horizontal son *Y* igual a tal	No da ningún argumento, salvo el de que "se hace así".
101. E1: No te parece curioso porque la abscisa sea equis y cuando es vertical pongas una equis y cuando es horizontal pongas *y*	El entrevistador vuelve a insistir
102. A: No, no lo sé explicar, no sé porqué he opuesto… ¿está mal? 103. E1: No, no, está bien	El alumno es incapaz de dar ningún argumento, llegando a dudar de que su respuesta sea correcta.
104. A: Como aquí he puesto *y* aquí también he puesto *y* sin pensar que la *y* era esto y la equis la otra	Con sus gestos, en la primera "*y*" señala la asintotota horizontal y en la segunda "*y*" el eje de ordenadas. En la tercera "*y*" vuelve a señalar el eje de ordenadas y cuando dice "equis" señala el eje de abscisas. El alumno parece tener un conflicto cognitivo que deja sin resolver
105. E2: Explícanos un poco más o menos la idea que tienes de límite, ¿Qué significa límite?	El entrevistador de nuevo hace la misma pregunta que anteriormente ya había hecho con el objetivo de ver si el alumno ahora es capaz de dar algún de explicación sobre lo que él entiende por límite
106. A: No lo sé muy bien…	El alumno de nuevo se resiste a dar una explicación
107. E2: ¿Qué entiendes por límite?	El alumno en el examen había mostrado competencia en el procedimiento de cálculo de límites. Ahora queríamos ver cuál era la idea que tenía de este concepto.
108. A: Yo creo que límite es como si dijéramos donde llega la función, o el límite que tiene, por lo tanto el límite sería…	De nuevo el alumno contesta de una manera metafórica describiendo el límite como el final de la función o bien como aquello que envuelve a la función Eso es lo que nos

	pareció intuir de sus gestos al responder
109. E2: ¿Cuál es la gráfica de la función ahí?	En la respuesta anterior el alumno hizo un gesto envolvente sobre la gráfica y por eso el entrevistador hace esta pregunta para ver que quería decir con ese gesto
110. A: Todo esto 111. E2: Vale	Señala todo el dibujo que esta en su hoja con un gesto envolvente
112. E2: ¿Y entonces hasta dónde llegan?	El entrevistador hace esta pregunta con el objetivo de ver cómo entiende el alumno la expresión "donde llega la función".
113. A: Es que por ejemplo sería así, y estos aquí y estos aquí	El alumno hace con el bolígrafo los gestos de la figura siguiente para indicar que la gráfica continúa fuera de la hoja 
114. E2: Y entonces para encontrar estos límites el uno y el menos, uno que has buscado con los límites, ¿Qué pretendías buscar con eso?	De nuevo se hace otra pregunta relacionada con el objeto límite para ver si podemos averiguar más sobre su idea de límite.
115. A: Las asíntotas, el límite solo lo he utilizado para encontrar las asíntotas	El alumno de nuevo responde que el límite sólo lo ha utilizado de una forma instrumental y mecánica para determinar las asíntotas.
116. E2: ¿Y lo puedes representar gráficamente ahí, más o menos la idea que tienes de límite?	El entrevistador quiere ver si el alumno puede dar una idea gráfica de lo que él entiende por límite

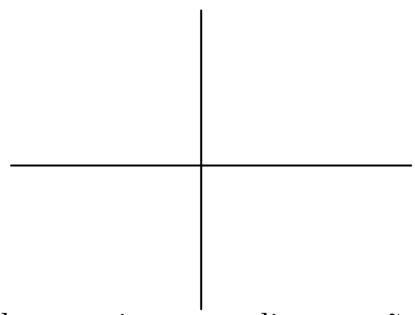
117. A: No sé, no sé como representar un límite. ¿Sería lo que no engloba la función o al revés?	Mientras da esta respuesta tan confusa y difícil de interpretar con su bolígrafo raya algunas regiones de su hoja tal como se muestra en la figura siguiente:  El alumno da respuesta sorprendente que no sabemos muy bien como interpretar. Aunque creemos que puesto que considera la gráfica como un “camino”, para él el “límite” sería “lo que está por fuera del camino”
118. A: No sé	El alumno reconoce que no tiene claro el concepto de límite
119. E2: Dices el límite de esta función cuando equis tiende a uno, ¿Qué quiere decir cuando equis tiende a uno?	El entrevistador hace esta pregunta con le objetivo de ver si la idea de tendencia el alumno la asume como dinámica o si por el contrario puede hacer un análisis estático en términos de entornos
120. A: Cuando equis hace así, tiende hacia el uno entonces te encuentras que tienes una asíntota y no puedes atravesarla	El alumno, en lugar de señalar el eje de abscisas, representa de manera dinámica “equis tiende a uno” sobre la gráfica tal como se muestra en la figura siguiente. Por otra hace gestos en los que quiere representar que la asíntota es una barrera que no se puede atravesar

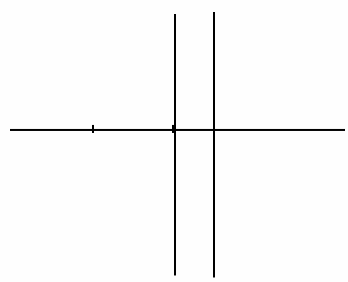
	
121. E2: Vale	
122. E2: Tengo otra pregunta, olvidémonos de esta gráfica. Si yo representara los ejes de esta forma… la tienes así. Represéntame las dos asíntotas, las verticales y las horizontales	El entrevistador toma una hoja en blanco y dibuja un sistema de coordenadas ortonormal, pero con los ejes ligeramente inclinados con relación a los bordes de la hoja (ver figura). El objetivo es ver cómo dibuja las asíntotas el alumno 
123. A: Pues la uno,…	La primera reacción del alumno es girar la hoja para conseguir que los ejes queden en posición horizontal y vertical con respecto a él (ver figura) 
124. E2: Así	El entrevistador de nuevo pone la hoja en la posición inicial
125. A: Pues, no sería así, o sea,	El alumno, después de unos momentos de indecisión, dibuja las asíntotas paralelas a

pues igual pero así, la del uno estaría aquí la del menos uno estaría aquí, la del tres estaría aquí	los ejes, tal como indica la figura. 
126. E2: Vale, ¿O sea qué son iguales estas dos gráficas así?	El entrevistador hace esta pregunta con el objetivo de ver si el alumno reconoce que se trata de los ejes y de las asíntotas de la gráfica que él había representado en su examen.
127. A: Sí, la ves torcida pero….	El alumno por una parte insiste en que los ejes están inclinados y, por la otra, reconoce que se trata de la misma gráfica, aunque parece que no queda del todo convencido.
128. E2: ¡Vale! Creo que ya terminamos	Se da por terminada la entrevista

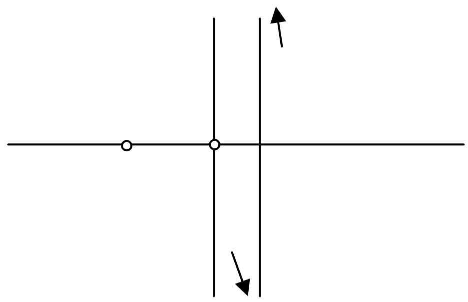
ANEXO 6

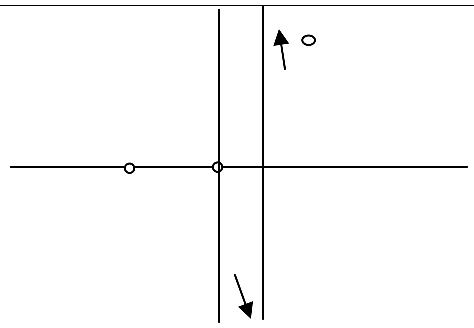
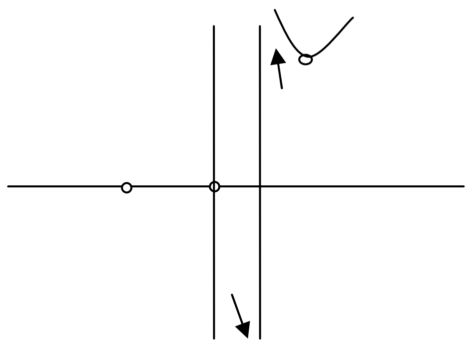
Trascripción de la entrevista al alumno *H*

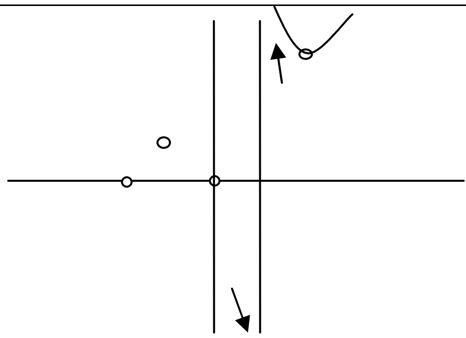
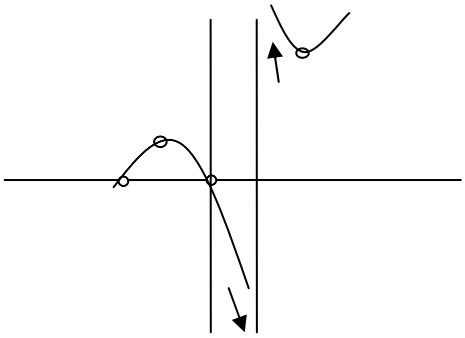
TRASCRIPCIÓN	OBSERVACIONES
1. E2: Ahora empezamos vale	El entrevistador sitúa al alumno en la mesa de trabajo, le entrega una hoja en blanco y pone a su disposición el examen que días antes él había resuelto satisfactoriamente, además le dice que sólo se trata de explicar lo concerniente a la representación de la gráfica, y que además no hace falta volver a realizar los pasos previos ya realizados en su examen (dominio, asíntotas, …)
2. A: Voy a explicar mi respuesta a la pregunta del examen que me pedía representar esta función *Y* igual a equis cuadrado más tres equis partido equis menos uno	El alumno se refiere a la función $y = (x^2 + 3x)/(x - 1)$ El alumno mientras habla dibuja sobre la hoja en blanco lo que se supone que es un sistema de coordenadas 
3. A: Y empezaré calculando el dominio de la función y como tenemos una función racional el dominio es todos los números reales menos los números que eliminan el denominador, que en este caso es el uno, luego tengo que el dominio es todo los reales menos el uno. Luego continuaré calculando los puntos de corte con los ejes, para calcular los puntos de corte con el eje "*ox*" igualaré la función a cero y me salen el origen de coordenadas el cero cero, y el menos tres cero, luego calcularé los de corte con el "*oy*", que me sale el cero cero, es el	El alumno mientras explica va señalando en el examen sobre los cálculos que tiene realizados, además en la parte superior derecha de la hoja en blanco va haciendo un resumen de los resultados que va explicando Dom = *R*-{1} {0,0} {-3,0}

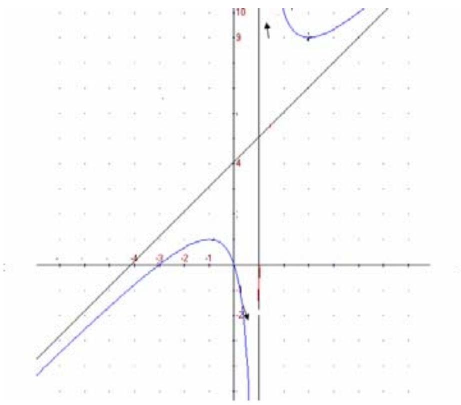
mismo que éste.	
4. A: Muy bien, luego procederé ya con el cálculo de las asíntotas, la asíntota vertical será aquellos números que eliminen el denominador que en este caso es el uno, y para comprobar si es una asíntota vertical haré el límite por las dos bandas y veo que me da infinito por tanto tengo que la asíntota vertical es uno	A.V = 1
5. A: En este caso no habrá asíntota horizontal ya que si hago el límite al infinito no me va a salir ningún número	El alumno continua señalando la tabla de crecimiento y decrecimiento que tiene en su hoja del examen
6. A: Luego calcularé los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función para esto tengo que calcular la derivada que me da este número y tengo que calcular los números de derivada cero, en este caso son el tres y el menos uno, para hacer esta tabla necesitaré estos números y los números que eliminan el denominador, en esta primera fila tengo estos números en la segunda tengo, bueno tengo la fila de la derivada y luego tengo el estudio del crecimiento y decrecimiento de la función, sustituiré estos números en la derivada y veo que aquí me saldrá positivo por tanto es creciente por tanto, aquí me sale negativo es decreciente, por tanto en el menos uno habrá un máximo entre el uno y el tres me saldrá decreciente y en los números más grandes que el tres me saldrá creciente por lo tanto tengo aquí un mínimo en el punto tres nueve, y un máximo en el menos uno uno.	El alumno dibuja sobre el sistema de coordenadas los puntos de corte y la asíntota vertical 
7. A: Por lo tanto tengo que aquí	Ahora el alumno señala con su bolígrafo

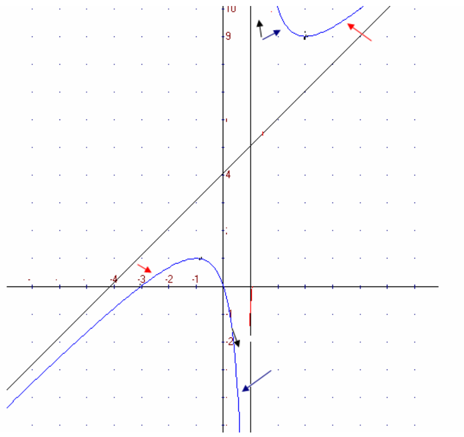
corta la función también cortará en el menos tres cero en este punto de aquí y una asíntota vertical en el *x* igual a uno que será esta de aquí.	en el examen el esbozo de la función
8. A: Muy bien, y ahora aquí tengo representada la función	
9. E2: Ahora vamos a representar la función utilizando la información que has desarrollado, muy bien, entonces empecemos	El entrevistador ahora le pide al alumno que haga de nuevo la gráfica
10. A: Muy bien, a ver tengo el límite	El alumno empieza calculando el límite de la función cuando *x* tiende a infinito
11. E2: ¿Qué vas a hacer primero?	El entrevistador le pide alumno que aclaré lo que va hacer
12. A: Primero voy a calcular el comportamiento de la función para equis igual a infinito y equis igual a menos infinito, para la asíntota vertical, para saber si la función irá para arriba o para abajo	El alumno empieza por el cálculo de las asíntotas, y su lenguaje al referirse a ellas es claramente dinámico
13. E2: O sea, vamos a calcular las asíntotas verticales 14. A: Sí 15. E2: Vale	El entrevistador hace esta pregunta con el objetivo de dejar claro la primera tarea a desarrollar
16. A: Voy a calcular para equis igual a uno acercándose por arriba de la función que es, equis al cuadrado más tres equis partido equis menos uno, tengo que….. me sale…… infinito !no! me parece..... más infinito, y el límite….. de la equis……………………por tanto ya sé que la función cuando se acerca al uno por números más grandes que uno tenderá hacia	El alumno hace los cálculos en una hoja en blanco, mientras los hace va hablando para si mismo y en vos baja, además al terminar hace un par de flechas, una hacia arriba y la otra hacia abajo para indicar el supuesto comportamiento de la función

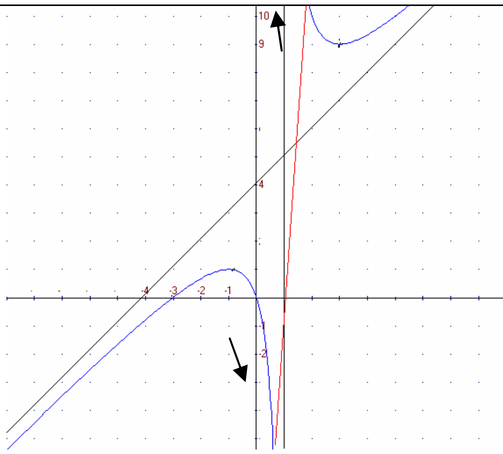
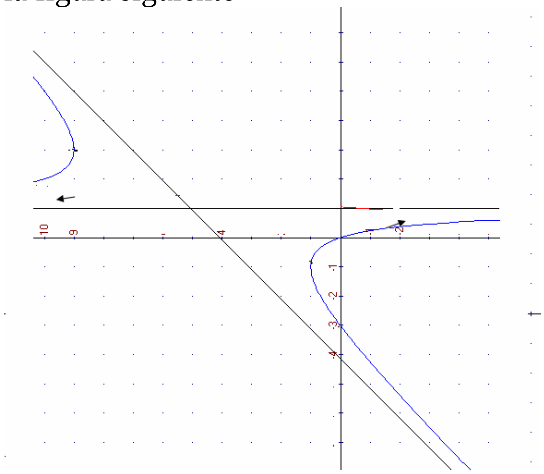
arriba y cuando se acerca al uno por números más pequeños tenderá hacia abajo	
17. E2: Vale, qué significa que de más in finito. ¿Qué entiendes por más infinito y menos infinito?	El entrevistador formula esta pregunta con el objetivo de que el alumno amplíe la metáfora "para saber si la función irá para arriba o para abajo" además de saber cual es el sentido que tiene él de "infinito"
18. A: Más infinito quiere decir que la función tenderá hacia números positivos muy grandes, y menos infinito al contrario, la función tenderá a números infinitos muy pequeños, ¡ay! muy grandes. números negativos muy grandes	El alumno responde de una forma matemáticamente aceptable, aunque continua con el lenguaje metafórico para referirse a la gráfica
19. E2: Vale, ¿y qué entiendes por asíntota vertical?	El entrevistador formula esta pregunta con el objetivo de saber si el alumno utiliza un lenguaje metafórico en términos de asíntota como barrera o como el límite
20. A: La asíntota vertical es una recta que nos permite estudiar el comportamiento de la función cuando esta tiende a más infinito o a menos infinito	
21. E2: Vale, muy bien	
22. A: Entonces como hemos visto aquí tenía que había un mínimo en el punto tres nueve que será más o menos por aquí	El alumno dibuja un punto sobre el esquema anterior que supuestamente representa el punto coordenado (3,9)

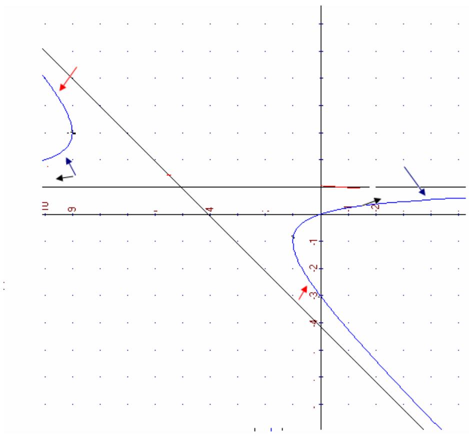
	
23. E2: Vale ¿Qué significa que es un mínimo?	El entrevistador formula esta pregunta con el objetivo de ver que tipo de metáfora utilizará el alumno, o ver si utiliza un registro más analítico
24. A: Un mínimo quiere decir que la función pasa de decreciente a creciente	El alumno utiliza una argumentación basada en la información de la tabla de crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos
25. E2: Vale, y gráficamente cómo sería, ¿qué sería?	El entrevistador formula esta pregunta con el objetivo de que el alumno amplíe la información anterior
26. A: Gráficamente tengo que la función tiende hacia acá sería una cosa así, este punto de aquí	El alumno dibuja la siguiente parte de la gráfica 
27. A: Y luego tengo un máximo en el punto menos uno uno, sería más o menos aquí, y al contrario que un mínimo significa que la función pasa de decreciente a creciente que sería una cosa así	El alumno dibuja la forma de mínimo en el punto que representa al (1,1)

	 Luego el alumno dibuja la otra parte de la gráfica 
28. E2: ¿Y qué significa que una función sea creciente o sea decreciente?	El entrevistador formula esta pregunta con el objetivo de ver si el alumno amplia su discurso metafórico y asocia subir con creciente y bajar con decreciente
29. A: Una función es creciente cuando el pendiente es positivo y decreciente cuando el pendiente es negativo	El alumno al contrario de lo que esperábamos contesta con una argumentación más analítica que metafórica
30. E2: Vale, ¿y gráficamente como lo entiendes?	El entrevistador hace esta pregunta con el objetivo de ver cómo interpreta esta información el alumno al representarla
31. A: Bueno gráficamente yo entiendo que es creciente cuando la función va hacia arriba y decreciente cuando va hacia abajo	El alumno acompaña su argumentación con gesto, y utiliza además de su lenguaje dinámico la metáfora orientacional
32. E2: Vale, de acuerdo	
33. A: Luego aquí me parece que hay un asíntota oblicua que en el	El alumno hace los cálculos en hoja en blanco, mientras los hace va hablando

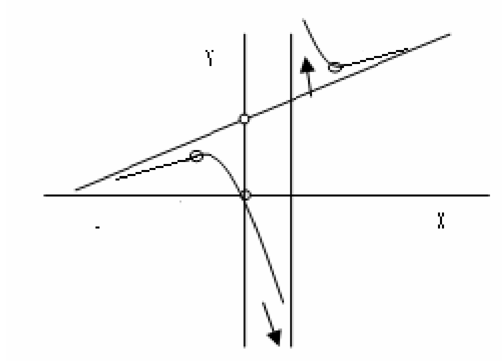
examen me la he olvidado y que se calcularía, una asíntota oblicua siempre da una recta, en este caso *y* igual a "*mx* más *n*", la "*m*" la podríamos calcular con el límite cuando equis tiende a infinito de *f*(*x*) partido equis ……………más equis,….. los dos coeficientes son uno y uno quedaría uno el pendiente y luego para calcular la *n* se tendría que hacer el límite……… cuando equis tiende a infinito de cuatro equis partido equis menos uno que esto nos daría cuatro…	para si mismo y en voz baja, se le entiende muy poco lo que dice
34. A: Por tanto la asíntota oblicua sería e igual a "x" más cuatro	El alumno concluye los cálculos de la asíntota oblicua $y = x + 4$
35. E2: ¿Qué significa una asíntota oblicua, qué entiendes por eso?	El entrevistador quiere saber si el alumno también utilizará metáforas del tipo orientacional y movimiento ficticio para dar su respuesta
36. A: Una asíntota oblicua es una recta que parte la función en dos partes simétricas respecto de la asíntota, nos saldría la recta *Y* igual a equis más cuatro………………. Que sería más o menos una cosa así, esta sería la recta una cosa así	A nuestro entender el alumno da una respuesta acorde con la representación visual de la gráfica, ya que no es cierto lo que dice, además dibuja la asíntota 
37. E2: Otras dos preguntas, ¿qué entiendes por límite?	El entrevistador formula esta pregunta con el objetivo de ver si el alumno amplia su discurso metafórico y asocia la idea de límite a una especie de barrera que trunca el desplazamiento de un objeto que se mueve

38. A: El límite de una función …… no lo sé	El alumno después de una pequeña pausa no responde a la pregunta
39. E2: ¿Y qué entiendes por pendiente de una recta?	El entrevistador formula esta pregunta con el objetivo de ver si el alumno amplia su discurso metafórico o si por el contrario lo sustenta de forma analítica
40. A: El pendiente de una recta lo podrías calcular dividiendo los… como lo diría…… no sé como explicarlo…..	De nuevo el alumno no responde correctamente a la pregunta
41. E2: Bueno, entonces vamos a continuar, explícanos un poco visualmente donde la gráfica es creciente y donde es decreciente	El entrevistador formula esta pregunta con el objetivo de ver si el alumno amplia la metáfora antes dicha” creciente cuando la función va hacia arriba y decreciente cuando la función va hacia abajo” y ver si es capaz de cambiar argumentar de otra forma
42. A: Yo creo que por aquí sería creciente hasta que llega al máximo entonces pasa a ser decreciente y aquí arriba sería decreciente este primer trozo hasta que llega al mínimo y aquí empezaría a ser creciente	El alumno señala con su bolígrafo cada parte de la gráfica haciendo un recorrido continuo sobre ella, en la flechas rojas dice que es creciente y en las azules decreciente 
43. E2: ¿Y qué le pasa a la gráfica de aquí a aquí?	El entrevistador hace esta pregunta con el objetivo de ver cómo el alumno justifica “el salto de la asíntota”, El alumno señala las dos partes de la gráfica que están unidas por la línea roja

44. A: ¡De aquí a aquí!	
45. E2: O sea, ¿qué pasa en este trozo de la gráfica?	El entrevistador le aclara la pregunta
46. A: Que hay una discontinuidad, ¡no! hay una asíntota por tanto la gráfica no es continua	El alumno responde de forma coherente y con un lenguaje matemático
47. E2: Vale, de acuerdo. ¿ *y* si yo cambiara de posición a la hoja, por ejemplo poniéndola así, reconocerías dónde es creciente y dónde es decreciente la gráfica, cambiaria en algo?	El entrevistador hace esta pregunta con el objetivo de ver si el alumno tiene la idea metafórica de orientación, con respecto de los ejes coordenados, y gira la hoja 90º más o menos de la manera que muestra la figura siguiente 
48. A: ¿Pero se supone que has cambiado los ejes también de sitio?	El alumno duda durante unos minutos y después pregunta

49. E2: No, no, los ejes son exactamente los mismos	El entrevistador le aclara que no se han rotado los ejes
50. A: Pues visto desde aquí, supongo que aquí sería creciente y en esta parte sería decreciente, y aquí arriba sería creciente aquí que va hacia arriba, y aquí sería decreciente	El alumno duda durante unos segundos y señala con el dedo (flechas rojas) lo que él piensa que ahora es decreciente y lo que ahora es creciente (flechas azules) 
51. E2: Vale, ¿tu tienes alguna pregunta?	El entrevistador le dice al otro entrevistador si tiene alguna aclaración
52. E1: No, comentarle que esto no es correcto, no, no sé si te das cuenta que no es correcto porque no has cambiado los ejes, te ha dicho que no cambies los ejes, y como no cambias los ejes la gráfica continua siendo la misma, en cambio tu has contestado, fíjate que la respuesta es ahora diferente, ¿te das cuenta o no?	El otro entrevistador le aclara que había un error en su respuesta, puesto que la gráfica no ha cambiado.
53. A: Sí, sí	
54. E1: ¿Y por qué crees que has cometido este error?	
55. A: No sé, me he dejado llevar un poco por mis instintos, no he pensado, no lo sé	
56. E1: No crees que es lo que te ha condicionado más, el hecho de que te cambie la hoja de posición, ¿te ha condicionado?	Ante su vaga respuesta, el entrevistador focaliza su atención respecto del movimiento de la hoja con el objetivo de que el alumno reflexione sobre ello

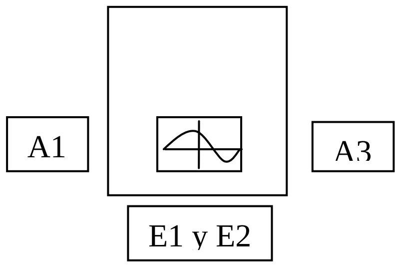
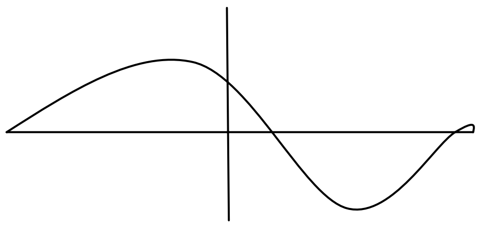
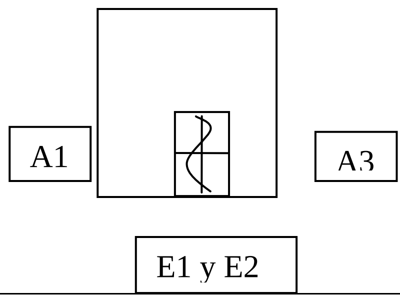
57. A: Sí supongo que será esto, al verlo desde esta perspectiva, pues me habrá parecido que aquí que iría hacia arriba sería creciente y aquí que iría hacia abajo sería decreciente, la única idea que tenia del crecimiento de la función era esta, que cuando va hacia arriba es creciente	
58. E2: Vale, ¿en clase como hacían este tipo de representaciones?	El entrevistador hace esta pregunta con el objetivo de ver si el alumno recuerda como su profesor introducía este tema
59. A: Pues más o menos como lo hemos hecho aquí	El alumno reconoce que en clase lo hacían más o menos igual
60. E2: ¿Recuerdas el profesor como te lo explicaba?	
61. A: Sí, empezamos siempre con el dominio nos explicaba como era el dominio según el tipo de función , si era una racional, si era una exponencial y vamos tratando todas estas partes los puntos de corte y todo este según como era la función, bueno es que más o menos era mismo que hemos hecho aquí	
62. E2: Vale, ¿cuál es el eje *x* y cual el eje *y* aquí?	Se le pide al alumno que diga cuál es el eje que él considera el "*x*" y cuál el "*y*"
63. A: El *x* sería este y el *y* sería este	El alumno señala la línea más larga como la "*x*" y la más corta como la "*y*"
64. E2: Vale, puedes ponerle los nombres	
65. A: *x* y *y*	

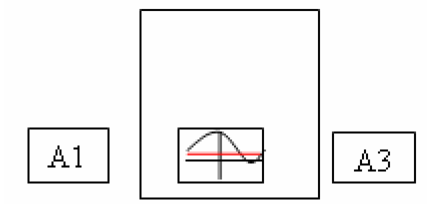
	
66. E2: ¿A ese eje *x* y a ese eje *y* le podemos llamar el eje horizontal y el vertical, o no?	El entrevistador quiere llamar la atención sobre la idea de horizontal y vertical para nombrar los ejes
67. A: Sí	
68. E2: ¿Por qué?	El entrevistador le pide explicaciones para ver que argumentación va a dar
69. A: Porque, bueno, visto desde esta perspectiva este sería el eje horizontal y este lo vería como vertical, ¡no!	El alumno recurre a la idea metafórica de orientación para resolver la pregunta
70. E2: ¿Y si yo hiciera esto conservaría la misma notación?	El entrevistador gira la hoja de la misma manera que la vez anterior, con el objetivo de cuestionar esta metáfora orientacional en el alumno
71. A: Sí, la conservaría. Sí, sí	El alumno esta vez da una respuesta coherente
72. E2: O sea este seguiría siendo horizontal y este vertical	El entrevistador señala primero el eje *x* y después el *y*
73. A: Sí, porque estos ejes son ficticios, no digamos, lo utilizamos nosotros para que nos sea más fácil resolver la función y supongo que seguirían siendo lo mismo	El alumno responde de manera poco clara
74. E2: ¿El profesor como lo hace, los llama horizontal y vertical o simplemente *x* e *y*?	El entrevistador hace esta pregunta con el objetivo de ver si en clase era normal identificar el eje abscisas con el eje

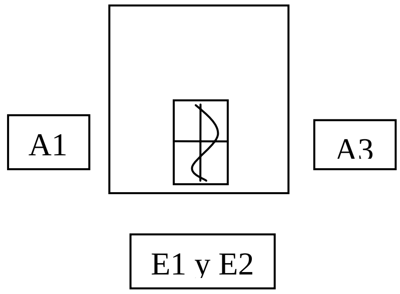
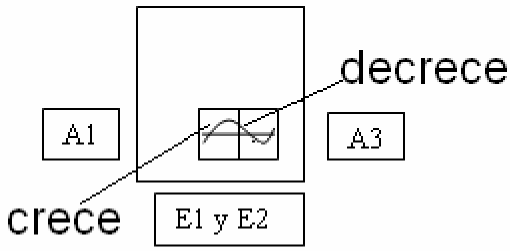
	horizontal *y* el eje vertical con el eje de ordenadas
75. A: *x* e *y*, abscisas y ordenadas	El alumno recuerda que normalmente le llaman a las "*x*" las abscisas y las "*y*" las ordenadas
76. E2: Vale, de acuerdo	
77. E1: ¿Y los alumno como le llaman, horizontal y vertical o *x* e *y*, abscisas y ordenadas?, ¿qué tienen más en cuenta los alumnos?	
78. A: Bueno, horizontal y vertical, a los alumnos si le cambias de posición los ejes ya se pierden un poco, como se ha visto antes cuando me habéis girado la hoja	El alumno piensa que muchos de sus compañeros pensarán en términos orientacionales y cometerán su mismo error
79. E2: Vale, ¿y otra cosa es, sabes reconocer, si yo tomo dos puntos sobre la gráfica, dos puntos diferentes, sabes reconocer teóricamente a partir del análisis si esa gráfica es creciente o decreciente?	El entrevistador hace esta pregunta con el objetivo de ver si el alumno es capaz de dar una respuesta alternativa
80. A: ¿Si me dieses por ejemplo dos puntos como estos dos, si me dieses las coordenadas de los dos puntos?	El alumno piensa un poco y concreta la pregunta
81. E2: Sí, exactamente	
82. A: Si la coordenada, si la segunda coordenada del segundo, la coordenada de la ordenada del eje *Y* fuera mayor que la del primero supondría que es creciente y por el contrario supondría que es decreciente	De su respuesta oral y de su gesticulación deducimos que el alumno quiere expresar que si $a<b$ y $f(a)>f(b)$ la función es decreciente y que si $a<b$ y $f(a)<f(b)$ la función es creciente
83. E2: Vale, creo que ya está	Se da por terminada la entrevista

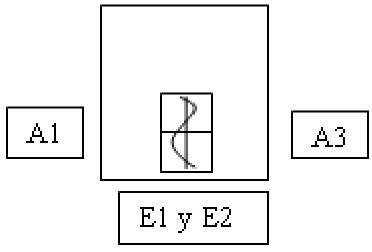
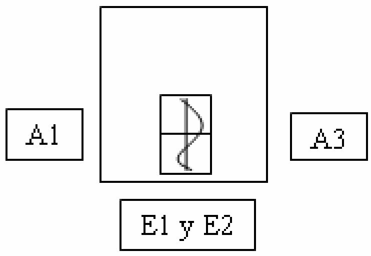
ANEXO 7

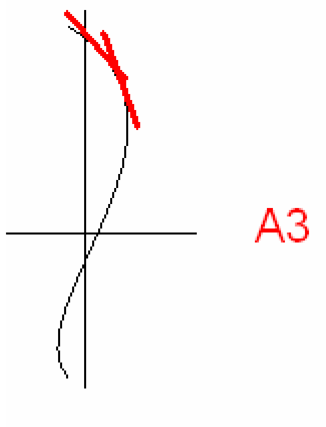
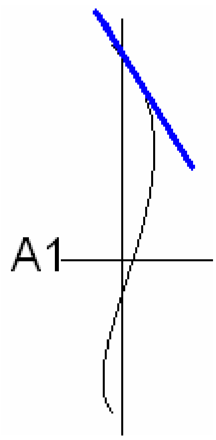
Trascripción de la entrevista a los alumnos *I* y *K*

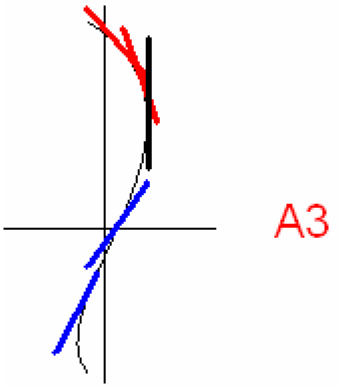
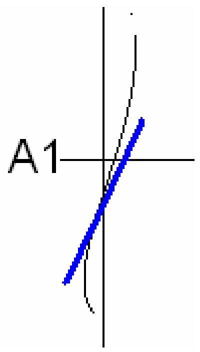
TRASCRIPCIÓN	OBSERVACIONES
	Antes de empezar la actividad los alumnos *A1* y *A3* se encuentran localizados en posiciones diferentes con respecto de la mesa de trabajo(tal como se ilustra en la figura), luego se pone sobre ella una hoja con la gráfica abajo dibujada  
1 E2: ¿Si yo hago esta gráfica, cómo sé si crece o decrece?	El entrevistador hace esta pregunta para iniciar la actividad y tratar de producir un conflicto semiótico de tipo cognitivo en los alumnos.
2 A: Este el eje "*x*" y cuando crece es cuando hay una variación de la *x*…	El alumno *A3* toma la hoja y la gira 90º (tal como se ve en la figura). Luego señala lo que él considera el eje de la "*x*" (el eje de mayor longitud) y mientras dice "cuando hay una variación de la *x*" desplaza el dedo índice de su mano derecha sobre el eje mayor de izquierda a derecha. No puede terminar su argumentación debido a la intervención de *A1*. 

	  
3 A1: Tiene que ser la "*x*" esta porque o sino esto no sería función.	El alumno *A1* vuelve a poner la gráfica en la posición inicial mientras señala primero el segmento de mayor longitud y después el de menor longitud.
4 A3: ¿Cómo lo sabes?	
5 A1: porque si esto fuera la "*y*" y esto la "*x*" esto no puede ser una función, porque no puede tener más de una imagen.	Con la gráfica en la posición inicial, hace observar a su compañero que habría valores de la *x* que tendrían más de una imagen. Para ello, realiza un gesto con el dedo con el que pretende representar una línea paralela al eje mayor que corta a la gráfica de la función en varios puntos (línea roja) 
6 A1: tiene que ser esta la "*x*" y esta la "*y*".	Después pone la gráfica en la posición que se ilustra en la figura siguiente, con lo cual puede volver a utilizar la metáfora orientacional sin problemas (el eje de ordenadas vuelve a ser el vertical y

	el de las abscisas el horizontal).  Aunque *A3* no hace ningún comentario, de manera implícita acepta que el eje mayor es el de las “*x*” y el menor el de la “*y*”.
7 E2: ¿Y yo cómo sé dónde crece y dónde decrece?	El entrevistador formula esta pregunta con el objetivo de averiguar si el alumno contestará en términos de subir(creciente) y bajar (decreciente) en su argumentación
8 A3: ¿Cómo o cuándo?	
9 E1: Como quieras, cuándo y cómo, primero cuándo y luego cómo	Se le aclara que puede contestar de la forma que él quiera
10 A3: crece, decrece	A3 vuelve a girar la hoja y la pone en la posición inicial (ver figura siguiente). Después, mientras dice “crece” mueve el dedo sobre la gráfica para señalar que la función va subiendo. Mientras dice “decrece” mueve el dedo sobre la gráfica para señalar que la función va bajando  Mientras, *A3* inclina la cabeza con lo que, de hecho, esta viendo la gráfica desde la posición de los entrevistadores.

11 A1: Pero si lo miramos así,….	A1 vuelve a girar la hoja y la pone en la posición que se ve que se ve en la figura siguiente, con lo que se le produce un conflicto que, implícitamente, le lleva a poner en cuestión la metáfora orientacional que ha utilizado su compañero  Después vuelve a poner la hoja en la siguiente posición 
12 A1: sería hacer la tabla de máximos y mínimos y mirar en la derivada	*A1* resuelve su conflicto semiótico de tipo cognitivo recurriendo al signo de la derivada y prescindiendo de la metáfora orientacional.
13 E1: No tienes la derivada, no hay fórmula	El entrevistador cuestiona su argumentación haciéndole notar que lo único que tiene es la gráfica de la función
14 A3: Cuando, cuando….	Hace gestos con el dedo con los que quiere representar la recta tangente en diferentes puntos de la gráfica

	
15 A1 Aquí es positivo, cuando la pendiente es positiva, aquí crecería,	El gesto de *A3* parece que le sugiere a *A1* la forma de responder *Al* igual que *A3*, *A1* hace gestos con el dedo con los que quiere representar la recta tangente en diferentes puntos de la gráfica en los cuales la función es creciente 
16 A3: Sí,…..aquí es cero	*A3* da la razón a *A1* y vuelve a hacer gestos con el dedo con los que quiere representar la recta tangente en más puntos de la gráfica destacando el punto en el cual la recta tangente tiene la pendiente igual a cero. Lo más destacable es que *A3* no gira la hoja de papel y que se sitúa en el punto de vista de *A1*.

		
17	A1: Luego aquí el pendiente sería negativo, sería decreciente, y aquí es lo mismo sería positivo crece	*A1* continúa su argumentación haciendo también gestos con el dedo con los que quiere representar la recta tangente en diferentes puntos de la gráfica en los cuales la función es decreciente. Hace los mismos gestos que *A3*  Se da por terminada la actividad