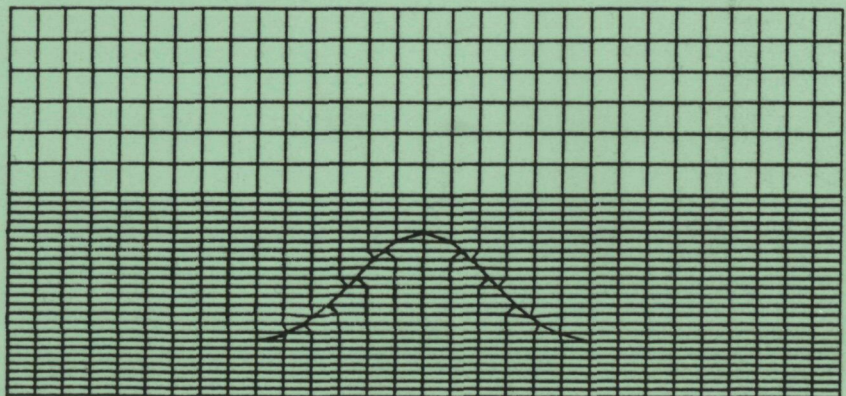
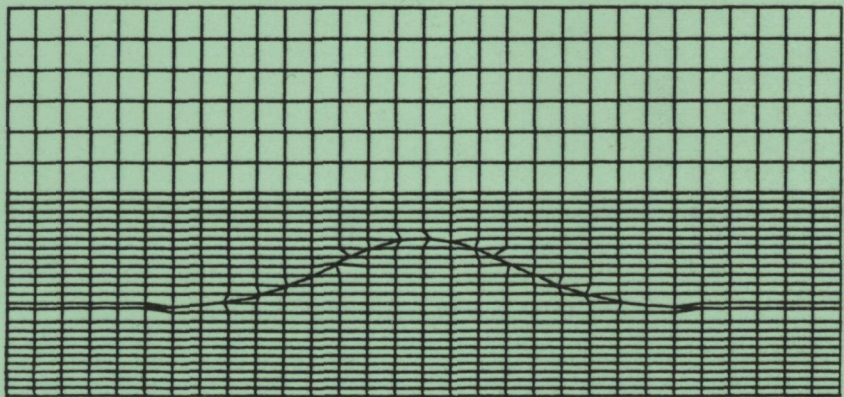
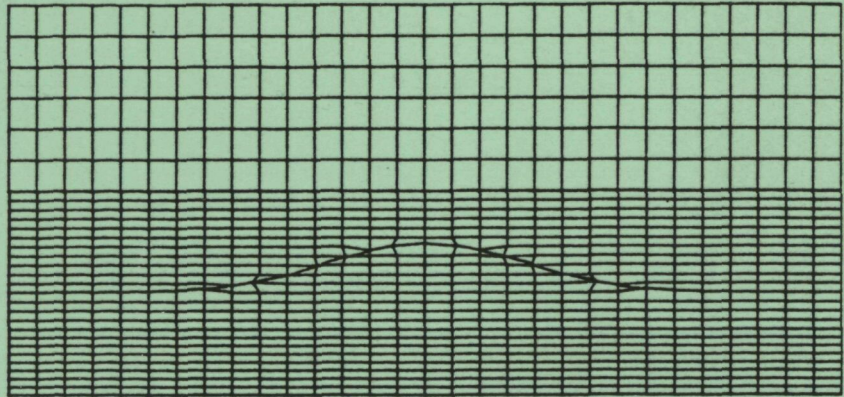


*Universitat de Barcelona*  
*Departament de Geologia Dinàmica, Geofísica i Paleontologia*

**INVERSION BIDIMENSIONAL EN MAGNETOTELURICA**



**ALEJANDRO MARCUELLO PASCUAL**



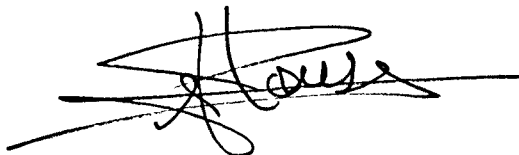
**INVERSION BIDIMENSIONAL EN MAGNETOTELURICA**

**Alejandro Marcuello Pascual**

Memoria presentada en el Departament de Geologia  
Dinàmica, Geofísica i Paleontologia de la Universitat  
de Barcelona para optar al grado de Doctor en Física.

Barcelona, septiembre de 1989

Visto bueno

A handwritten signature in black ink, appearing to read 'Jaume Pous i Fàbregas', with a horizontal line drawn through it.

Jaume Pous i Fàbregas

Director de la tesis

A handwritten signature in black ink, appearing to read 'Alex Marcuello', written in a cursive style.

Alejandro Marcuello

### Agradecimientos.

La realización de este trabajo ha sido posible gracias a la colaboración desinteresada de numerosas personas a las que quiero expresar mi más sincero agradecimiento.

En particular al Dr. J. Pous, director de este trabajo, y Pim Queralt por el apoyo incondicional que he recibido continuamente, y que hago extensivo a H. Rojas y al Dr. H. Zeyen, y a los demás miembros del Departament de Geologia Dinàmica, Geofísica i Paleontologia (UB).

Al Prof. S.E. Hjelt, al Dr. P. Kaikkonen y a T. Korja, y demás miembros del "Geofysiikan Laitos (OY)" (Departamento de Geofísica de la Universidad de Oulu, Finlandia) por la ayuda recibida en todos los sentidos durante mis estancias en dicho centro.

Finalmente, quiero agradecer a mi familia y amigos su comprensión y apoyo a lo largo del mismo.

## INDICE

INTRODUCCION.....	1
Referencias.....	5
Capítulo I. FUNDAMENTOS DEL METODO MAGNETOTELURICO .....	7
I.1. Introducción.....	7
I.2. Antecedentes históricos al método magnetotelúrico .....	8
I.3. Métodos de inducción electromagnética.....	11
I.4. Fundamentos del método magnetotelúrico.....	15
I.5. Hipótesis de Cagniard.....	20
I.6. Validez de la teoría de Cagniard.....	25
I.7. Referencias.....	29
Capítulo II. MODELIZACION BIDIMENSIONAL .....	35
II.1. Introducción.....	35
II.2. Modelización de problemas electromagnéticos.....	36
II.3. El MEF en la resolución de ecuaciones diferenciales....	38
II.3.1 Los métodos de proyección.....	39
II.3.2 El método de las diferencias finitas.....	43
II.3.3 El método de los elementos finitos.....	45
II.4. Ecuaciones para modelos bidimensionales.....	47
II.5. Construcción de un algoritmo de EF para el problema MT.	51
II.6. Descripción del programa de modelización.....	57
II.7. Control del programa .....	64
II.7.1 El medio homogéneo.....	64
II.7.2 Modelo de Weaver, LeQuang y Fischer .....	69

II.8. Efectos topográficos.....	74
II.8.1 Cadena montañosa.....	75
II.8.2 Valle.....	81
II.8.2 Proximidad de mar.....	86
II.9. Referencias.....	88
Capítulo III. INVERSION EN MAGNETOTELURICA .....	95
III.1. Introducción.....	95
III.2. Esquemas de inversión.....	96
III.3. Descripción del algoritmo de inversión.....	100
III.4. Inversión unidimensional.....	104
III.4.1 Conocimiento a priori sobre algunos valores de los parámetros.....	107
III.4.2 Flexibilidad en la elección del modelo inicial.....	111
III.4.3 Ligaduras.....	111
III.4.4 Equivalencia debido al número de capas.....	115
III.4.5 Fases.....	117
III.5. El problema bidimensional con geometría variable.....	119
III.5.1 Generador de mallas.....	121
III.5.2 Construcción de la matriz de sensibilidad...	124
III.6. Descripción del programa.....	127
III.7. Generación de mallas: Ejemplos.....	137
III.7.1 Función gaussiana.....	138
III.7.2 Elipse.....	143
III.7.3 Salto inclinado.....	146

III.8. La matriz de sensibilidad.....	149
III.8.1 Control de la matriz de sensibilidad.....	149
III.8.2 Efecto del tamaño de la discretización.....	154
III.8.3 Efecto de la proximidad de la frontera lateral.....	162
III.8.4 Sensibilidad para diferentes periodos.....	167
III.9. Aplicaciones.....	173
III.9.1 Convergencia del algoritmo.....	175
III.9.2 Conocimiento a priori sobre algunos valores de los parámetros.....	184
III.9.3 Flexibilidad de elección del modelo inicial.	191
III.10. Referencias.....	194
 Capítulo IV. CONCLUSIONES.....	 199





## INTRODUCCION.

Desde el trabajo fundamental de Cagniard (1953) a principios de los años 50 el método magnetotelúrico ha pasado por diversas etapas. Al principio no despertó demasiado interés entre la comunidad Geofísica. Las limitaciones tecnológicas de los primeros sensores y la imposibilidad de modelizar estructuras de Tierra más reales que el clásico modelo estratificado contribuyeron a este escaso éxito.

En los últimos años, sin embargo, el panorama ha cambiado radicalmente. El desarrollo de la tecnología digital ha permitido el diseño y construcción de equipos de registro y procesado digital de señales, capaces de detectar y registrar las débiles fluctuaciones del campo magnetotelúrico que han hecho de este método una herramienta cada vez más cotidiana en el estudio del interior de la Tierra. Los modernos ordenadores han permitido la modelización de estructuras geológicas más reales mediante las técnicas numéricas de las diferencias finitas o de los elementos finitos. Durante la

década de los setenta aparecen los primeros trabajos de modelización en 2 y 3 dimensiones y posteriormente los primeros sobre inversión.

El carácter inherente de solución numérica conlleva diferentes criterios en el tipo de aproximación por lo que estos métodos están sujetos a constante revisión y son objeto de investigación actual.

En este contexto se sitúa el presente trabajo, que tiene como objetivo el desarrollo de un proceso automático de inversión bidimensional. Se presenta la singularidad de simular el contacto entre los distintos medios que constituyen el modelo de Tierra mediante funciones analíticas, cuyos parámetros determinarán la geometría de la superficie de contacto. La modelización se ha realizado con el método de los elementos finitos y para ello se ha tenido que diseñar y construir un algoritmo adecuado para este problema específico.

El problema inverso se ha planteado como la búsqueda de un estimador bayessiano. Para su resolución se ha construido un algoritmo con la posibilidad de incluir información a priori. El comportamiento de este algoritmo se ha estudiado exhaustivamente con modelos unidimensionales, que presentan una mayor operatividad. En el modelo bidimensional, la inversión se realiza sobre los parámetros de la función que determina la geometría de la superficie de contacto entre los distintos medios del modelo de Tierra. Este

hecho representa un importante avance frente a los intentos anteriores de inversión bidimensional de geometría constante. Así mismo cabe destacar la elaboración de un generador automático de mallas, empleado para la modificación de la malla en cada iteración del proceso de inversión.

El método magnetotelúrico, como herramienta de estudio del interior de la Tierra, es una técnica poco utilizada en nuestro país. Si bien existe algún trabajo inicial (Fournier y Febrer, 1977) utilizando frecuencias muy bajas, es a partir de los últimos años que se ha despertado un interés creciente. En el CSIC de Madrid se dirige la atención al diseño de instrumentación y se utiliza el método principalmente en estructuras de tipo volcánico. En 1983 se presenta la primera tesis doctoral (García, 1983), en la que se desarrolla un sistema de instrumentación digital y se aplica al estudio de las intrusiones magmáticas del volcán Timanfaya en la isla de Lanzarote. En 1986 se realiza el estudio del volcanismo del Teide (Tenerife) (Ortiz et al., 1986). Paralelamente se prepara la segunda tesis doctoral (Astiz, 1986) sobre aspectos de los diversos filtros digitales en el procesado de datos magnetotelúricos y se aplica al estudio de los volcanes Vulcano y Etna (Italia), a la vez que se realizan diversos sondeos puntuales en Cataluña, por primera vez en zonas no volcánicas. Así pues, el presente trabajo, que incide sobre aspectos metodológicos de la interpretación, es un

claro complemento a los anteriores realizados en España.

Aunque el objetivo final es el algoritmo de inversión, una de las partes fundamentales de este trabajo ha sido el algoritmo de modelización. Por ello hemos estructurado la redacción de esta memoria en las siguientes partes. En primer lugar se hace una revisión de los fundamentos del método magnetotelúrico, dando un original enfoque en el contexto general de los métodos electromagnéticos de origen natural y discutiendo detalladamente las hipótesis y aproximaciones realizadas (Capítulo 1). A continuación (Capítulo 2) se describe el proceso de modelización bidimensional. Se revisa brevemente el método de los elementos finitos en un contexto general de modelización numérica de problemas electromagnéticos. Se describe el algoritmo particular del problema magnetotelúrico que hemos construido y se evalúa su bondad mediante modelos de control. Asimismo se estudian los efectos topográficos que habitualmente distorsionan las medidas de sondeos magnetotelúricos (valle, montaña y efecto de proximidad al mar) como una aplicación del mismo. En el siguiente capítulo, el 3, se presenta el algoritmo de inversión y se detalla el de generación automática de mallas, que juega un papel fundamental en dicho proceso de inversión. Otra de las partes importantes desarrolladas en este capítulo ha sido la obtención de la matriz de sensibilidad de los modelos, que tiene una capital importancia dentro de nuestro

esquema de inversión. Finalmente, presentamos diferentes aplicaciones del mismo. El último capítulo, el 4 , está dedicado a las conclusiones y la discusión de los resultados.

#### Referencias.

Astiz, M.M. 1986. Desarrollo de filtros digitales para el estudio de estructuras geológicas profundas mediante sondeos magnetotelúricos. Tesis Doctoral. Universidad de Barcelona.

Cagniard, L. 1953. Principe de la méthode magnéto-tellurique, nouvelle méthode de prospection géophysique. Ann. Géophys., 9, 95-125.

Fournier, H.G. y Febrer, J. 1977. Sondaggio magnetotellurico profondo all'Osservatorio Geomagnetico de ell'Ebro a Roquetas (Tortosa- Spagna). Atti et memorie dell'Accademia de Patavina di Scienze, Lettere et Arti, vol. LXXXIX (1976-1977). Part II:125-129.

García, A. 1983. Modelos corticales a partir de sondeos magnetotelúricos. Aplicación a zonas volcánicas activas. Tesis Doctoral. Publicaciones Universidad Complutense de Madrid.

Ortiz, R., Araña, V., Astiz, M.M. y García, A. 1986.  
Magnetotelluric study of the Teide (Tenerife) and Timanfaya  
(Lanzaroté) volcanic areas. J. Vol. Geoth. Res., 30.

## Capítulo I. FUNDAMENTOS DEL METODO MAGNETOTELURICO

### I.1 INTRODUCCION.

Los trabajos pioneros que sirvieron para establecer las bases del método magnetotelúrico se sitúan en la década de los 50. En dicha época aparecen los trabajos de Kato y Kikuchi (1950), Rikitake (1950a y b; 1951a y b), Tihonov (1950) y Cagniard (1953). De entre los cuales, el trabajo de Louis Cagniard ha sido sin duda el que ha causado un mayor impacto debido a una visión más pragmática. Dicho autor lo describe no sólo como un método de estudio de la Tierra a escala global, sino que intuye sus posibilidades en el dominio de la prospección geofísica. Además, fue quien le dió el nombre por el que se lo conoce en la actualidad.

En esencia, el método consiste en comparar en un mismo lugar las componentes horizontales de los campos eléctrico y magnético naturales. La relación entre ambas componentes depende de la estructura electromagnética del subsuelo y de su estudio puede determinarse dicha estructura.

En este capítulo se presenta, en primer lugar, la situación en la que se encontraban las investigaciones sobre las variaciones del campo geomagnético y de las corrientes telúricas antes de la



formulación del método magnetotelúrico. A continuación, se le situará en el contexto general de los métodos de inducción electromagnética de campo natural. Se discutirá los fundamentos y la validez de las hipótesis y aproximaciones que lo sustentan.

## I.2 ANTECEDENTES HISTORICOS AL METODO MAGNETOTELURICO.

Los antecedentes al método se sitúan en dos puntos, en los estudios del campo magnético externo y en los estudios de las llamadas corrientes telúricas, realizados durante la segunda mitad del siglo pasado y comienzos de éste. De entre los primeros hay que destacar los trabajos de Schuster (1889, 1908). En ellos comprueba, a partir del análisis de la variación diurna del campo geomagnético ( $S_q$ ), la existencia de una parte de origen interno que no era despreciable frente a la de origen externo; al mismo tiempo, estudia si la parte interna puede estar originada por las corrientes inducidas en la Tierra por las variaciones del campo magnético externo. Esta idea fue seguida por otros autores (Chapman, 1919; Chapman y Price, 1930; Lahiri y Price, 1939) para estudiar la estructura conductora global de la Tierra. El método, que únicamente considera las variaciones temporales del campo magnético, se conoce como sondeo magnetovariacional global (SMVG). Respecto a los estudios de las corrientes telúricas, hay que señalar que fueron

iniciados por los ingenieros de telégrafos. Ellos querían aprovechar el hecho de que la Tierra se comportaba como un conductor para utilizarla como línea de retorno de las líneas telegráficas; pero la existencia de unas corrientes cuya intensidad, dirección y sentido variaban de una forma aleatoria con el tiempo eliminó dicha posibilidad. Estas corrientes que circulan por debajo de la superficie terrestre son las denominadas "telúricas", del latín "tellus, telluris", que significa Tierra. La existencia de estas corrientes interesó rápidamente a los geofísicos para su aplicación al estudio de la Tierra. Como consecuencia, aparecieron los primeros observatorios telúricos. Su vida fue, en general, efímera debido por una parte a que aparecieron las primeras líneas de tren y tranvías electrificadas, que perturbaban fatalmente los registros y, por otra, a que dichas corrientes estaban íntimamente ligadas a la estructura local del subsuelo sobre el que estaba construido el observatorio. Precisamente, este último hecho fue el que llevó a sugerir a Schlumberger la utilización de este método con fines de prospección cuando señala que, a partir de medidas simultáneas de las variaciones telúricas en una región, se obtendría información sobre la estructura del subsuelo. Sin embargo, no fue hasta mediados de los años 30 que no se hicieron los primeros ensayos. La primera publicación aparece a finales de la misma década (M. Schlumberger, 1939).

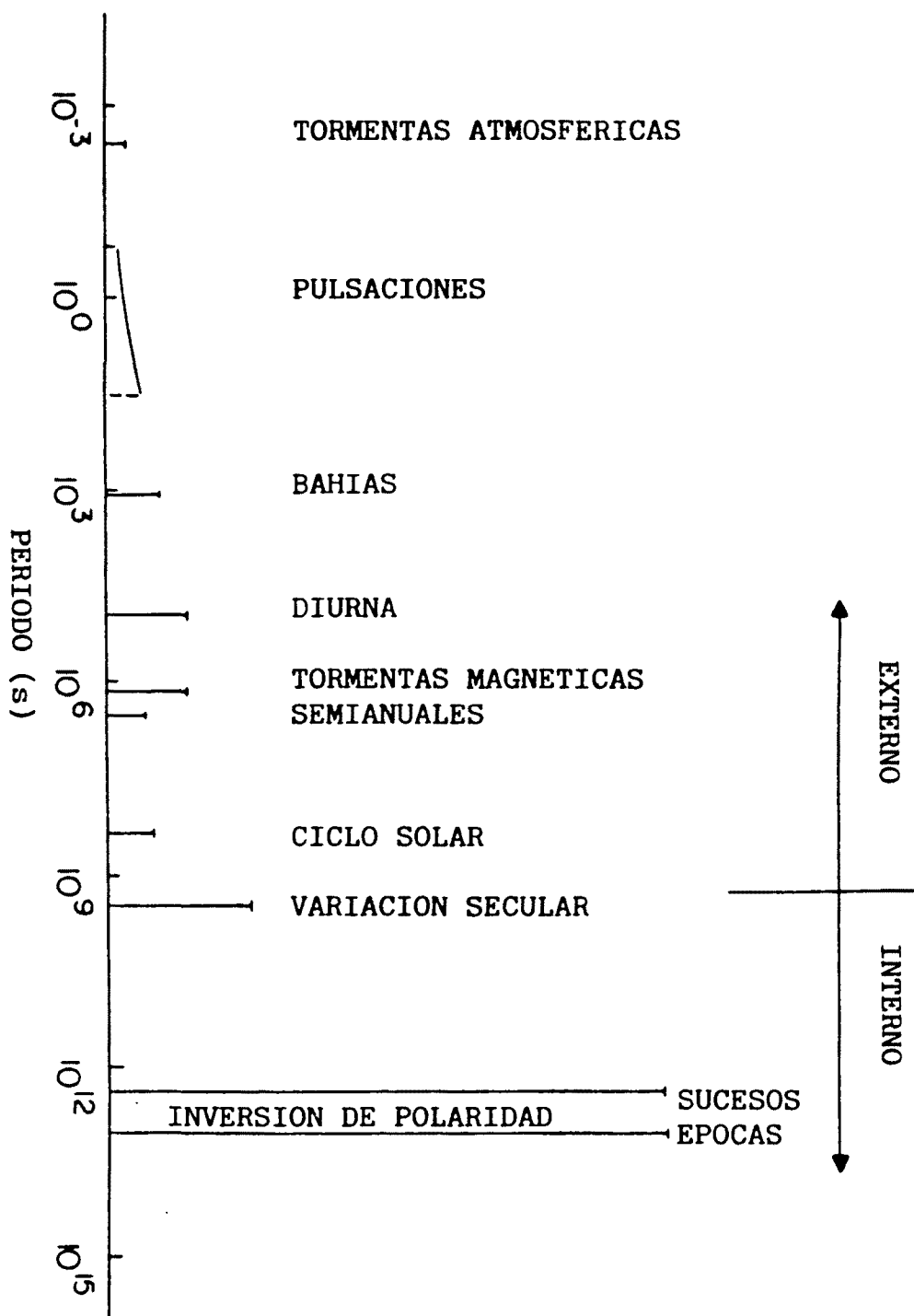


Figura 1.1: Espectro de las variaciones más importantes del campo geomagnético. Las amplitudes de los periodos más cortos están exagerados respecto a la variación secular y las inversiones de polaridad.

### I.3 METODOS DE INDUCCION ELECTROMAGNETICA.

Los métodos de estudio de la Tierra que hemos descrito se basan en un mismo fenómeno físico: el fenómeno de la inducción electromagnética de origen natural. Este fenómeno está ligado a las variaciones temporales del campo geomagnético, cuyas características más importantes están indicadas en la figura 1.1.

Para describir las características fundamentales de dichos métodos utilizamos la descripción dada por Porstendorfer (1975).

Introducimos un sistema de referencia X, Y, Z, donde el plano XY reposa sobre la superficie de la Tierra, y el eje Z apunta hacia su interior (fig.1.2).

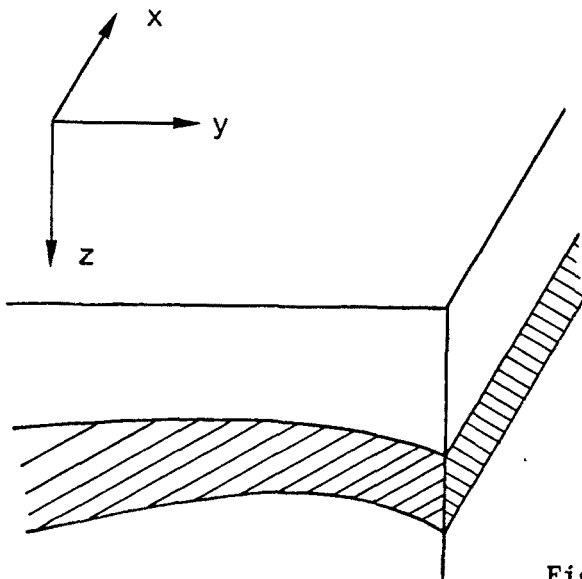


Figura 1.2: Esquema del sistema de referencia utilizado.

En este sistema, el campo electromagnético está representado por  $(E_x, E_y, E_z)$  y  $(H_x, H_y, H_z)$ . Mediante relaciones lineales entre estas 6 componentes podemos caracterizar los distintos métodos.

Así, si relacionamos linealmente la componente vertical del campo magnético con sus componentes horizontales:

$$H_z = A H_x + B H_y, \quad (1.1)$$

las medidas de las tres componentes magnéticas nos permiten determinar los coeficientes que dependen de la estructura electromagnética del subsuelo. Esto constituye la base del llamado método magnetovariacional o sondeo geomagnético.

Si relacionamos las componentes horizontales del campo eléctrico en dos puntos distintos  $r^0$  y  $r^1$ .

$$\begin{aligned} E_x^1 &= A_{xx} E_x^0 + A_{xy} E_y^0 \\ E_y^1 &= A_{yx} E_x^0 + A_{yy} E_y^0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

estaremos en el dominio del método telúrico.

Finalmente, si relacionamos en un mismo punto las componentes horizontales del campo eléctrico con las componentes horizontales del campo magnético de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} E_x &= Z_{xx} H_x + Z_{xy} H_y \\ E_y &= Z_{yx} H_x + Z_{yy} H_y \end{aligned} \quad (1.3)$$

tendremos las relaciones básicas del método magnetotelúrico.

Existen otras posibles combinaciones entre las componentes del campo magnético y eléctrico, si bien las anteriores son las más importantes.

La evolución de estas técnicas ha sido diferente a lo largo de los últimos años. El método magnetovariacional presenta dos tipos de aplicaciones. Es una técnica necesaria para los estudios de conductividad a escala global. En este sentido es un importante complemento de los sondeos magnetotelúricos. La distribución actual de observatorios geomagnéticos sobre la superficie del planeta y el hecho de que las observaciones geomagnéticas han sido registradas ininterrumpidamente a lo largo de largos periodos de tiempo facilita la posibilidad de este tipo de estudios. La segunda aplicación consiste en la localización de anomalías conductoras en la corteza o manto superior. Para ello se determinan los denominados vectores de inducción sobre la superficie de la región de estudio para diferentes periodos de la perturbación electromagnética, por ejemplo, los vectores de Wiese o los de Parkinson. Esta técnica ha tenido un gran impulso a partir de la aparición de los magnetógrafos de Gough y Reitzel (1967) que presentan unas características óptimas de fiabilidad, transporte y bajos costos.

Por el contrario, el método de las corrientes telúricas es una técnica apenas utilizada en la actualidad, porque es básicamente cualitativa y, sobre todo, porque sus medidas son muy sensibles a

las perturbaciones andrógénas.

El método magnetotelúrico tuvo unos inicios difíciles debido, por una parte; a la controversia sobre la validez de sus fundamentos (las hipótesis de Cagniard) y por otra, a las dificultades tecnológicas en el diseño de los sensores y de los equipos registradores. Esta técnica ha presentado una evolución impresionante una vez que dichos inconvenientes fueron superados. El tipo de aplicaciones depende del rango de frecuencias de la perturbación electromagnética estudiada. Para estudios muy superficiales se estudian frecuencias altas ( $1\text{Hz}-10^3\text{Hz}$ ); este hecho requiere unas características propias para los sensores y los equipos registradores que permiten hablar de una subtécnica denominada AMT (AudioMagnetoTelúrica). El origen de dicho nombre se debe a que el rango de frecuencias de las ondas electromagnéticas utilizadas coincide con el de las ondas sonoras audibles por el hombre. En el otro extremo, para estudios corticales y manto superior se utilizan periodos largos ( $> 100\text{s}$ ). Los resultados son complementarios a los del SMVG.

La cantidad de estudios realizados en este campo indica que el método magnetotelúrico (MT), en particular, y los métodos de inducción electromagnética, en general, aparecen como una herramienta fundamental para el estudio de la Tierra.

#### I.4 FUNDAMENTOS DEL METODO MAGNETOTELURICO.

Revisamos ahora algunas de las ideas sobre las que se fundamenta el método.

Para las regiones de estudio habituales, se desprecia el efecto de la curvatura de la Tierra. Con esta aproximación, los efectos de la curvatura sólo son para periodos superiores a algunas horas (Scholte y Veldkamp, 1955; Srivastava, 1965; Kaufman y Keller, 1981). Este hecho supondrá una importante simplificación a la hora de desarrollar las ecuaciones que lo describen.

En segundo lugar, se considera que el fenómeno electromagnético está originado por la inducción creada por las fuentes externas. Estas se originan de la interacción del viento solar con la magnetosfera terrestre, que provoca unas ondas magnetohidrodinámicas. Estas ondas son las responsables directas de la aparición de densidades de corriente en la magnetosfera e ionosfera y de densidades de carga en la ionosfera. Estas densidades son las fuentes del campo magnetotelúrico. Ante una estructura de fuentes como ésta, dos mecanismos son posibles para la creación de un campo electromagnético en la Tierra. Un primer mecanismo sería el de la inducción electromagnética originado por las corrientes magnetosféricas e ionosféricas. El segundo mecanismo sería el de la conexión óhmica ("galvanic leakage") entre las cargas ionosféricas



y la superficie de la Tierra. Evidentemente, cada uno de estos mecanismos tiene asociados fenómenos físicos muy diferentes. Como la conductividad del aire es de al menos diez órdenes de magnitud menor que la de la Tierra, el mecanismo predominante será el de la inducción electromagnética. Ello ha sido comprobado mediante el estudio del campo en la superficie terrestre para diferentes perturbaciones (Eckhard et al, 1963; Berdichevski y Fainberg, 1972 y 1974).

El modelo objeto de estudio está representado en la figura 1.3. En donde podemos identificar los siguientes dominios:  $\Omega_1$  corresponde al dominio ocupado por las fuentes;  $\Omega_2$ , a la atmósfera, con unas propiedades electromagnéticas  $\sigma_0$ ,  $\mu_0$ ,  $\epsilon_0$ , y  $\Omega_3$  que corresponde a la Tierra, con unas propiedades  $\sigma_1$ ,  $\mu_1$ ,  $\epsilon_1$ . La superficie de la Tierra está representada por  $\Sigma$ .

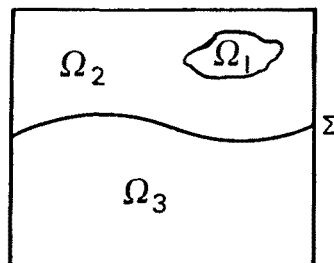


Figura 1.3: Modelo general de estudio donde se indican los diferentes dominios del problema:  $\Omega_1$  corresponde al dominio que contiene las fuentes;  $\Omega_2$ , a la atmósfera;  $\Omega_3$ , a la Tierra.

En este modelo se ha asumido que la atmósfera se comporta como un dieléctrico, y las únicas corrientes posibles en ella son las corrientes de desplazamiento. Pero las características de conductor o dieléctrico en electrodinámica no son propiedades que dependan exclusivamente de los valores de la conductividad del medio,  $\sigma$ , como en el caso de la electrostática sino que también dependerán de la frecuencia del fenómeno electromagnético,  $\omega$ , y de la permeabilidad eléctrica,  $\epsilon$ . De forma que para un campo armónico sinusoidal, el predominio de una característica u otra vendrá indicado por el cociente  $\frac{\sigma}{\omega \epsilon}$ . Si este cociente es muy grande, el medio se comportará como un conductor para dicha frecuencia y si es muy pequeño, como un dieléctrico.

Para el rango de frecuencias habituales en magnetotelúrica ( $10^{-4}$ -10Hz), los valores de  $\sigma$  ( $10$ - $10^{-5} \Omega^{-1} m^{-1}$ ) y  $\epsilon$  ( $10^{-11}$ - $10^{-10}$  F/m) en la Tierra, se puede asumir que el comportamiento de ésta será el de un conductor. Por lo tanto, las corrientes de desplazamiento dentro del conductor serán despreciables frente a las de conducción. Este hecho se conoce como aproximación cuasiestática o cuasiestacionaria. En consecuencia, el campo electromagnético se comportara de una forma diferente en los dominios  $\Omega_2$  y  $\Omega_3$ . En  $\Omega_2$  el fenómeno característico es el de la propagación de la onda electromagnética. En  $\Omega_3$ , el fenómeno característico será el de la difusión del campo dentro del conductor. En el método magnetotelúrico, tal como indica Price (1962), no nos preocupamos de

la propagación de la onda electromagnética, sino de la difusión del campo electromagnético en su interior. Ello es la causa de que se requiera una alta precisión en las observaciones.

Los parámetros electromagnéticos que determinan la estructura del subsuelo son la conductividad,  $\sigma$ , la permitividad eléctrica,  $\epsilon$ , y la permeabilidad magnética,  $\mu$ . Sin embargo, las dos últimas no tienen la misma relevancia que la primera. Por una parte, y debido a la hipótesis cuasiestacionaria, las observaciones magnetotelégrafas serán insensibles a las variaciones de  $\epsilon$ ; por otra parte, la  $\mu$  de los diferentes minerales y rocas es una magnitud que presenta unas variaciones muy pequeñas entre los mismos, siempre que no haya la presencia de materiales ferromagnéticos. Así, esta técnica es incapaz de detectar sus variaciones, que además quedarían ocultas por las variaciones de conductividad, que son varios órdenes de magnitud mayor. Por lo tanto, la magnitud que identificará de forma satisfactoria los diferentes medios del subsuelo será la conductividad eléctrica  $\sigma$ , la cual presenta una gran variación entre unos materiales y otros.

Debido al fenómeno de inducción electromagnética, el campo originado por el sistema de fuentes situado en  $\Omega_1$  (que identificaremos como campo primario o externo) se crea en el conductor,  $\Omega_3$ , un sistema de fuentes que da lugar a un campo

electromagnético (secundario o interno). Este se superpone al campo primario y en la superficie se observa el campo total. Este campo contiene información sobre la estructura conductora de la Tierra.

El sistema de fuentes secundario tiene dos partes bien diferenciadas. La primera parte está constituida por las corrientes eléctricas que circulan en el interior del conductor por la acción del campo primario. La segunda parte está formada por las densidades de carga que pueden aparecer cuando hay gradientes espaciales de conductividad, dando lugar a densidades volúmicas de carga, o cuando hay superficies de discontinuidad en la conductividad, creando densidades superficiales de carga en dichas superficies. Los efectos provocados por la primera parte se llaman efectos inductivos y los efectos originados por la segunda parte se denominan efectos galvánicos (Berdichevski y Dmitriev, 1976). La descripción anterior es una simplificación del fenómeno real, porque cada una de estas partes del campo secundario será a su vez una fuente de efectos de orden superior, y así sucesivamente.

El campo secundario es el campo que contiene información sobre el subsuelo. Es posible realizar una descomposición del campo total en una parte de origen interno y otra de origen externo, mediante diferentes métodos como el de Gauss-Schmidt (descrito en Chapman y Bartels, 1940), el método de Kertz-Siebert o las fórmulas de Stratton-Chu (descritos en Berdichevski y Zhdanov, 1984), e intentar determinar la estructura del subsuelo a partir de este campo

secundario. Sin embargo, en el método magnetotelúrico se establece una hipótesis de fuente para poder determinar la distribución de conductividades a partir de las relaciones entre los campos totales. Una elección adecuada de la estructura de la fuente permitió a Cagniard (1953) introducir el método magnetotelúrico de una forma simple, que pasamos a comentar.

### I.5 HIPOTESIS DE CAGNIARD.

En este apartado asumimos la hipótesis cuasiestacionaria, juntamente con las aproximaciones de que el campo primario sea de origen externo y la de no considerar el efecto de la curvatura de la Tierra, que ya han sido discutidas en los apartados anteriores, y pasamos a discutir el modelo que permitió a Cagniard introducir este método. Al mismo tiempo, introduciremos la notación que emplearemos a lo largo de toda la memoria.

En el artículo original, Cagniard escoge el modelo más sencillo posible, que está indicado en la figura 1.4. Este modelo corresponde a una Tierra representada por un medio semiinfinito, homogéneo e isótropo, con una conductividad  $\sigma$ . Según el sistema de referencia descrito en I.3, donde el plano XY descansa sobre la superficie de la Tierra y el eje Z apunta hacia el interior de la misma, la

superficie de la Tierra estara representada por el plano  $z=0$ .

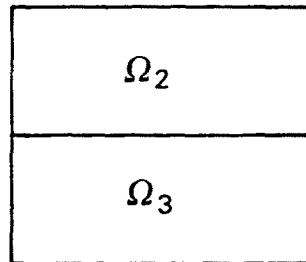


Figura 1.4: Dominios del espacio descrito por el trabajo de Cagniard (1953), en el que no aparecen las fuentes.

Por otro lado, se asume que los efectos del sistema de fuentes corresponden a los de una onda electromagnética plana monocromática, con una dependencia temporal armónica, polarizada linealmente y que incide normalmente a la superficie de la Tierra.

Bajo estas condiciones y asumiendo las condiciones normales en el infinito, el campo eléctrico y magnético tienen una expresión (e.g. Kaufman y Keller, 1981):

$$\begin{aligned} E_x &= A e^{kz} \\ H_y &= \frac{k}{i\omega\mu} A e^{kz} \end{aligned} \tag{1.4}$$

donde  $k = \sqrt{-i\omega\mu\sigma}$ , y  $\omega$  es la frecuencia angular de la onda electromagnética. Ambos campos dependen de la amplitud de la onda

incidente. Para eliminar esta dependencia se introduce el concepto de impedancia,  $Z$ , definida como el cociente entre las componentes del campo eléctrico y del campo magnético perpendiculares entre ellos. Esta magnitud es compleja.

Es fácil comprobar que el cociente de los campos eléctrico y magnético depende exclusivamente de las propiedades electromagnéticas de la Tierra y de la frecuencia de la onda electromagnética:

$$\left| \frac{E_x}{H_y} \right| = \frac{1}{\sqrt{\omega \mu \sigma}} \quad (1.5)$$

A partir de esta fórmula es posible determinar la resistividad de la Tierra (en el texto utilizaremos indistintamente el término de conductividad eléctrica,  $\sigma$ , y el de resistividad eléctrica,  $\rho$ ; la relación entre ambas es  $\rho=1/\sigma$ ). Así,

$$\rho = \frac{1}{\omega \mu} \left| \frac{E_x}{H_y} \right|^2 \quad (1.6)$$

Por otra parte, el hecho de que la Tierra se comporte como un medio conductor provoca la aparición de una diferencia de fase entre el campo eléctrico y el campo magnético.

$$\phi = \text{tg}^{-1} \left[ \frac{\text{Im } Z}{\text{Re } Z} \right] \quad (1.7)$$

La diferencia de fase entre ambos campos en la superficie es de  $\pi/4$  rad para todas las frecuencias.

La fórmula (1.4) indica que la amplitud de los campos decrece de forma exponencial en el interior del conductor. Ello es consecuencia de la disipación de la energía dentro del conductor debido al efecto Joule de las corrientes eléctricas creadas en su interior. De esta forma, a una cierta profundidad, el conductor habrá absorbido prácticamente toda la energía de la onda electromagnética. La magnitud que nos indica el decrecimiento de la amplitud con la profundidad es la "profundidad de penetración" o "penetración" ("skin depth"),  $\delta$ , que se define como la profundidad a la que la amplitud del campo ha disminuido en un factor  $e$ . Esta longitud dependerá de la conductividad del medio y de la frecuencia de la onda electromagnética:

$$\delta = \left[ \frac{2 \rho}{\omega \mu} \right]^{1/2} \quad (1.8)$$

dado que asumimos que  $\mu = \mu_0$ , podemos encontrar una fórmula aproximada para  $\delta$ :

$$\delta = 0.5 \sqrt{\rho T}$$

donde  $\delta$  estará dada en km siempre que  $\rho$  este dado en  $\Omega_m$  y el periodo T, en s. Esta magnitud permite hacer una estimación de la profundidad de estudio. Podemos decir que la profundidad será grande cuando la tierra sea resistiva ( $\rho$  grande) y/o para periodos largos de la perturbación electromagnética.



Si aplicamos la fórmula (1.6) cuando el medio no es homogéneo, encontramos diferentes valores de  $\rho$  para diferentes valores de T. La cantidad calculada de esta forma, que tiene unidades de resistividad, es un concepto muy popular en la prospección geoelectrica: la resistividad aparente. Se define como aquella resistividad que correspondería a la de un medio homogéneo obtenida bajo las mismas condiciones de observación. La representación de los diferentes valores encontrados para la resistividad aparente frente al periodo (u otra cualquier magnitud que sea equivalente) se denomina curva de resistividad aparente.

De esta forma se justifica el nombre de "sondeo magnetotelúrico", porque permite determinar la distribución vertical de conductividades estudiando los campos eléctrico y magnético para diferentes periodos.

Igualmente se puede estudiar la diferencia de fase entre el campo eléctrico y el campo magnético. La representación de la diferencia de fase frente al periodo T entre el campo eléctrico y el magnético nos daría la llamada curva de fases. Esta curva también es una característica de la distribución de conductividad en la Tierra. En general es menos utilizada que la de resistividad aparente porque es mucho más sensible a los errores experimentales.

En su trabajo original, Cagniard extendió su estudio a un medio de dos capas, y para el mismo presentó un abaco de curvas de resistividad aparente y curvas de fase. La expresión (1.6) no es la

única forma de definir la resistividad aparente, existen otras formas posibles (Spies y Eggers, 1986).

En el desarrollo anterior se ha utilizado exclusivamente el dominio espectral, basándonos en el hecho de considerar una onda incidente monocromática. Esta es la forma más usual. No obstante, también es posible realizarlo en el dominio temporal  $E(t)$  y  $H(t)$ , partiendo directamente de los registros (Kunetz, 1972).

Finalmente, el conjunto de funciones que describen el comportamiento de la Tierra, tales como la impedancia, la resistividad aparente, las fases, etc. se agrupan bajo el nombre de funciones de respuesta de la Tierra (Vozoff, 1972).

#### I.6 VALIDEZ DE LA TEORIA DE CAGNIARD.

La teoría descrita por Cagniard es muy sencilla y ello la hizo inicialmente muy atractiva. Pero era excesivamente simple y por ello, recién publicada se cuestionó su validez. No obstante, hay que reconocer el valor del trabajo de Cagniard y señalar que el método magnetotelúrico se ha desarrollado y evolucionado alrededor de la discusión de dichas hipótesis.

El método descrito por Cagniard se puede reducir a una idea muy simple: es un modelo completamente unidimensional. No hay que entender que la unidimensionalidad indique que la distribución de conductividades en la tierra depende exclusivamente de la coordenada vertical, sino que además la perturbación electromagnética originada por el sistema de fuentes puede ser descrita únicamente por la coordenada vertical. Por lo tanto, las hipótesis de Cagniard serán válidas siempre y cuando el modelo cumpla esas condiciones de unidimensionalidad. Las violaciones de la misma llevan a estudiar la validez de las hipótesis de Cagniard. Podemos establecer la siguiente clasificación de las violaciones del modelo unidimensional:

1. Violación de la unidimensionalidad de las fuentes. Ello llevara al problema de la no uniformidad del campo electromagnético primario o de la validez de la hipótesis de onda plana.
2. Violación de la unidimensionalidad de la distribución espacial de la conductividad en la Tierra debido a la existencia de estructuras bi- y tridimensionales.
3. Violación simultánea de los puntos 1. y 2.

El problema de la no uniformidad del campo primario fue el primero en ser discutido. Wait (1954) señaló que el sondeo magnetotelúrico

tal como lo había descrito Cagniard no era válido, en general, para el caso de un medio homogéneo donde existieran variaciones laterales del campo primario, e incluso esta situación empeoraba si el modelo no era homogéneo sino estratificado (Price, 1962). Como consecuencia, la teoría de Cagniard se aceptaba si las variaciones laterales del campo inductor eran pequeñas. No obstante, hay que indicar que, en realidad, es válida solamente si la variación lateral era lineal, tanto si esta variación es pequeña, como si es grande (Dmitriev y Berdichevski, 1979). La experiencia muestra (Berdichevski y Dmitriev, 1976) que para latitudes medias, la hipótesis de onda plana es aceptable para regiones de un tamaño de 100-200 km sobre el meridiano y 300-500 km sobre el paralelo. Por ello, se considera que para los estudios magnetotelúricos habituales la hipótesis de onda plana será satisfactoria, siempre y cuando no trabajemos en las regiones ecuatoriales y polares, para las que será necesario tener en cuenta variaciones laterales de las fuentes. Para estudiarlas se han construido diferentes modelos de sistemas de corrientes que modelizan el sistema de fuentes, como el de una corriente horizontal lineal (Hermance y Peltier, 1970), el de una lamina horizontal de corrientes (Hibbs y Jones, 1973 y 1976), o modelos mucho más sofisticados (Pirjola, 1985).

En segundo lugar, la violación de la unidimensionalidad de la distribución de conductividades presenta una situación más delicada.

La existencia de estructuras geológicas bi- o tridimensionales provocará que el modelo de Cagniard sea claramente insuficiente. El efecto de las estructuras no unidimensionales sobre las observaciones es la aparición de anisotropía, de forma que las observaciones dependerán de la dirección en que se hayan medido los campos, lo que les conferirá un carácter tensorial. Es importante recalcar que esta variación de la conductividad no sólo puede ser debida a estructuras enterradas sino también a variaciones en la topografía de la superficie terrestre. En consecuencia, para superar esta situación se hace necesario la elaboración de modelos bidimensionales y tridimensionales. Este punto constituye una de las líneas de trabajo actuales más importantes.

Finalmente, la violación de la unidimensionalidad de las fuentes y de la distribución de conductividad en la Tierra corresponde al problema más general posible, y su resolución pasa por la modelización simultánea de las fuentes y de la distribución de conductividades en la Tierra.

En definitiva, y a la vista de lo comentado, supondremos que las fuentes se comportan de manera que es válida la hipótesis de onda plana incidente sobre la superficie de la Tierra según la dirección Z. En consecuencia, la no unidimensionalidad del problema será debida únicamente a la no unidimensionalidad de la distribución de

conductividades, que es la idea habitual en los trabajos sobre el método magnetotelúrico.

#### I.7 REFERENCIAS.

Berdichevski, M.N. y Dmitriev, V.I. 1976. Basic Principles of interpretation of magnetotelluric sounding curves. In: A. Adam (Editor), Geoelectric and Geothermal studies. KAPG Geophys. Monogr., Akademiai Kiado, Budapest, 165-221.

Berdichevski, M.N. y Fainberg, E.B. 1972. On possibility of experimental division of the transient geomagnetic field into a poloidal and toroidal parts. Geomagn. Aeron., 12, 950-954.

Berdichevski, M.N. y Fainberg, E.B.. 1974. Division of the field of the  $S_q$ -variations into a poloidal and toroidal parts. Geomagn. Aeron., 14, 373-377.

Berdichevski, M.N. y Zhdanov, M.S. 1984. Advanced Theory of Deep Geomagnetic Sounding. Elsevier, Amsterdam, 408pp.

Cagniard, L. 1953. Principe de la méthode magnéto-tellurique, nouvelle méthode de prospection géophysique. Ann. Geophys., 9, 95-125.

Cagniard, L. 1956. Electricité tellurique. Handbuch der Physik, vol., 47, Springer-Verlag. Berlin. pp. 407-469.

Chapman, S. 1919. The solar and lunar diurnal variation of the earth's magnetism. Phil. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A. 218, 1-118.

Chapman, S. y Bartels, J. 1940. Geomagnetism. vol., 2. Clarendon Press. Oxford. 1049 pp.

Chapman, S. y Price, A. T. 1930. The electric and magnetic state of the interior of the earth as inferred from terrestrial magnetic variations. Phil. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A. 229, 427-460.

Dmitriev, V.I. y Berdichevski, M.N. 1979. The fundamental model of magnetotelluric sounding. Proceed. of the IEEE, 67, 1034-1044.

Eckhard, D., Larnar, K. y Madden, T. 1963. Long-Period Magnetic Fluctuation and Mantle Electrical Conductivity Estimates. J. Geophys. Res., 68, 6279-6291.

Gough, D.I. y Reitzel, J.S. 1967. A portable three-component magnetovariometer. *J. Geomagnetism and Geoelec.*, 19, 203-215.

Hermance, J.F. y Peltier, W.R. 1970. Magnetotelluric fields of a line current. *J. Geophys. Res.*, 75, 3351-3356.

Hibbs, R.D. y Jones, F.W. 1973. Electromagnetic induction in the Earth by a symmetric non-uniform source. *Geophys. J.R. astr. Soc.*, 32, 269-277.

Hibbs, R.D. y Jones, F.W. 1976. The calculation of the electromagnetic fields of the sheet current source with arbitrary spatial intensity distribution over layered half space-I. The General Method and Results. *Geophys. J.R. astr. Soc.*, 46, 433-452.

Kato, Y. y Kikuchi, T. 1950. On the phase difference of the earth current induced by changes of the earth's magnetic field, 1 and 2. *Sci. Rept. Tokyo Univ.*, 5th Ser., 139-(141-142)-145.

Kaufman, A.A. y Keller, G.V. 1981. *The Magnetotelluric Sounding Method*. Elsevier. Amsterdam. 596pp.

Kunetz, G. 1972. Processing and interpretation of magnetotelluric soundings. *Geophysics*, 37, 1005-1021.



Lahiri, D.N. y Price, A.T. . 1939. Electromagnetic induction in non-uniforme conductors, and the determination of the conductivity of the earth from terrestrial magnetic variation. Phil. Trans. Roy. Soc. London, Ser.A, 237, 509-540.

Pirjola, R. 1985. Electromagnetic induction in the Earth by an electrojet system harmonic in time and space. Geophysica, 21, 145-159.

Porstendorfer, G. 1975. Principles of magnetotelluric prospecting. Geoexploration monograph. Gebuder Borntraeger. Berlin-West. 118pp.

Price A.T. 1962. The theory of magnetotelluric methods when the source field is considered. J. Geophys. Res., 67, 1907-1918.

Rikitake, T. 1950a. Electromagnetic induction within the earth and its relations to the electrical state of the earth's interior. Bull. Earthquake Res. Ins., Tokyo Univ., 28, 45-100.

Rikitake, T. 1950b. Electromagnetic induction within the earth and its relations to the electrical state of the earth's interior. Bull. Earthquake Res. Ins., Tokyo Univ., 28, 219-(262-263)-283.

Rikitake, T. 1951a. Electromagnetic induction within the earth and its relations to the electrical state of the earth's interior. Bull. Earthquake Res. Ins., Tokyo Univ., 29, 61-69.

Rikitake, T. 1951b. Electromagnetic induction within the earth and its relations to the electrical state of the earth's interior. Bull. Earthquake Res. Ins., Tokyo Univ., 29, 271-275.

Scholte, J.G. y Veldkamp, J. 1955. Geomagnetic and geoelectric variations. J. Atmospheric Terrest. Phys., 6, 33-45.

Schlumberger, M. 1939. The applications of the telluric currents to surface prospecting. Trans. Amer. Geoph., Union, 3, 271-277.

Schuster, A. 1889. The diurnal variations of terrestrial magnetism. Philos. Trans. R. Soc., London, Ser. A., 180, 467-518.

Schuster, A. 1908. The diurnal variations of terrestrial magnetion. Philos. Trans. R. Soc., London, Ser. A., 208, 33-45.

Spies, B. R. y Eggers, D. E. 1986. The use and misuse of apparent resistivity in electromagnetic methods. Geophysics, 51, 1462-1471.

Srivastava, S. P. 1965. Theory of the magnetotelluric Method for non-uniform conductors. J. Geomagnetism and Geoelec., 17, 507-515.

Tihonov, A.N. 1950. On determination of electric characteristics of deep layers of the Earth's crust. Dokl. Akad. Nauk. SSSR, 151, 501-504.

Vozoff, K. 1972. The magnetotelluric method in the exploration of sedimentary basins. Geophysics, 37, 98-141.

Wait, J.R. 1954. On the relation between telluric currents and the Earth's magnetic field. Geophysics, 19, 281-289.

## Capítulo II. MODELIZACION BIDIMENSIONAL.

### II.1 INTRODUCCION.

La modelización en magnetotelúrica consiste en determinar las funciones de respuesta de la Tierra ( $\rho_{\alpha}$ ,  $\phi$ ,  $Z$  ...) para una distribución de conductividad dada. Hay una gran variedad de técnicas de modelización y no todas son igualmente válidas para su aplicación posterior en la resolución automática del problema inverso.

En este capítulo comenzaremos describiendo brevemente las diferentes técnicas de modelización de problemas electromagnéticos, de los que el magnetotelúrico es uno particular. De entre ellas hemos utilizado el método de los elementos finitos (MEF) para desarrollar un algoritmo de modelización bidimensional. A partir del cual, se ha elaborado un programa de ordenador cuyas principales características serán discutidas. Finalmente, se presentan algunos ejemplos, en particular, aplicados al estudio de los efectos topográficos.

## II.2 MODELIZACION DE PROBLEMAS ELECTROMAGNETICOS.

La modelización en el método magnetotelúrico vendrá completamente descrita por la teoría electromagnética representada por las ecuaciones de Maxwell.

Todo problema electromagnético puede resolverse de dos formas distintas, conocidas por el nombre de métodos diferenciales y método de la ecuación integral. El primero se basa en la búsqueda del campo en todo el dominio, que se determina mediante una ecuación diferencial (ED). En el método de la ecuación integral (EI) se obtiene el campo sólo sobre una superficie (Tierra), estudiando los efectos de las fuentes electromagnéticas sobre la misma.

Lógicamente, la solución del problema no depende del planteamiento elegido; no obstante, el proceso de resolución en ambos casos puede ser muy diferente. En general, para modelos con una geometría sencilla, el método de la EI es más adecuado que el de la ED; pero, por el contrario, cuando la geometría del modelo es compleja, los métodos diferenciales son preferibles a los de la ecuación integral.

En la actualidad se está desarrollando una tercera posibilidad, que combina los dos planteamientos anteriores, que se conoce como métodos híbridos (Lee et al., 1981; Tarlowski et al., 1984) y constituyen una importante línea en la modelización tridimensional.

En este trabajo utilizaremos los métodos diferenciales.

La resolución analítica (exacta) de las ecuaciones que describen

el problema sólo es posible en el caso de algunos modelos muy simples, como el contacto vertical (D'Erceville y Kunetz, 1962), un dique (Rankin, 1962) o un contacto inclinado (Geyer, 1972). Estos resultados tienen un gran valor porque permiten, por una parte, conocer el comportamiento de estos modelos simples y, por otra, ser utilizados para controlar los resultados obtenidos mediante técnicas numéricas.

Desde la aparición de los modernos ordenadores, la resolución de las ecuaciones puede abordarse mediante métodos numéricos. Una solución obtenida numéricamente es siempre aproximada, aunque podría refinarse suficientemente de manera que la solución exacta se encontraría como paso al límite. Para los métodos diferenciales existen dos grandes familias de técnicas de resolución numérica: los métodos de diferencias finitas (MDF) y los métodos de elementos finitos (MEF). En este trabajo se ha utilizado esta segunda.

Los trabajos previos sobre la modelización magnetotelúrica mediante estas técnicas han sido: Jones y Pascoe (1971), Brewitt-Taylor y Weaver (1976), Zhdanov et al. (1982) y Hermance (1982) en el dominio de los MDF; y los de Coggon (1971), Silvester y Haslam (1972), Reddy y Rankin (1973), Kisak y Silvester (1975), Rodi (1976), Kaikkonen (1977), Pridmore et al. (1981), Bromek (1982) y Wannamaker et al. (1987), en el campo de los MEF. Como observamos, la modelización es una de las líneas de trabajo actuales.

Una alternativa completamente distinta a los métodos anteriores la constituyen los llamados métodos analógicos de modelización. Estos consisten en la realización de un modelo a escala de una situación real. Su utilización requiere el uso de leyes de similitud, como las señaladas por Cagniard (1953) para el sondeo magnetotelúrico. Mediante esta técnica se estudian tanto estructuras bidimensionales como tridimensionales e, incluso, se utilizan diferentes tipos de fuentes. No obstante, la modelización analógica presenta algunos inconvenientes como la dificultad de encontrar sustancias con las conductividades apropiadas para los modelos, los efectos de los bordes o el efecto de las dimensiones finitas de los sensores que suaviza las medidas. Estas características hacen que esta modelización requiera una costosa infraestructura, lo que explica que sólo exista un reducido número de laboratorios dedicados a ello. Los resultados obtenidos en la modelización analógica de problemas reales son satisfactorios, como muestran los trabajos de Dosso et al. (1980) y Ramaswamy et al. (1980).

### II.3 EL MEF EN LA RESOLUCION DE ECUACIONES DIFERENCIALES.

Queremos presentar el método de los elementos finitos dentro del contexto de los métodos numéricos de resolución de ecuaciones

diferenciales. De esta forma, vamos a estudiar el método e indicar sus posibilidades y limitaciones. Por ello, realizaremos previamente una breve descripción de los denominados métodos de proyección y del método de las diferencias finitas, indicando sus principales características, ventajas e inconvenientes. Finalmente, describiremos el MEF como un caso particular de los métodos de proyección.

Estos métodos contienen algún tipo de discretización, que transforman una ecuación diferencial en un sistema lineal de ecuaciones. Este último se resuelve con las técnicas algebraicas habituales.

Representaremos una ecuación diferencial genérica mediante la expresión

$$L(F)=f \quad (2.1)$$

dentro de un dominio  $\Omega$ , juntamente con las condiciones de contorno correspondientes, donde  $L$  representa un operador diferencial lineal,  $F$  representa la solución y  $f$  el término inhomogéneo de la ecuación.

### II.3.1 Los métodos de proyección.

Para introducir este método partimos de la ecuación (2.1). De una manera formal, la actuación del operador  $L$  sobre  $F$  se interpreta como la transformación de un conjunto de funciones  $\{F\}$  de un espacio  $H_1$  sobre otro conjunto  $\{f\}$  en el espacio  $H_2$ . Dichos espacios se



suponen dotados de una estructura de espacios de Hilbert, sobre los que está definido el producto escalar de la manera usual:

$$(m,n) = \int_{\Omega} m \cdot n^* \, d\Omega, \quad (2.2)$$

donde \* indica el complejo conjugado, y  $\Omega$  el dominio de integración.

Para el proceso de búsqueda de una solución aproximada se considera un conjunto de N funciones  $\{\xi_i\}$  linealmente independientes entre ellas, que generan una variedad lineal de dimensión N dentro del espacio  $H_2$ . La definición (2.2) introduce de forma natural el concepto de proyección de elementos de  $H_2$  sobre la variedad lineal.

Este hecho permite considerar como solución  $F'$  aquella cuya imagen en  $H_2$ ,  $L(F')$ , tenga la misma proyección sobre la variedad lineal  $\{\xi_i\}$  que el término inhomogéneo  $f$ . Es decir,

$$(L(F') - f, \xi_i) = 0, \quad \forall i \quad (2.3)$$

Esta descripción está asociada a la idea geométrica de proyección, por lo que a estos métodos se los conoce como métodos de proyección. No obstante, la interpretación anterior no es la única posible, si interpretamos la diferencia  $L(F') - f$  como residuo de la aproximación  $F'$ , la expresión no representa otra cosa que el promedio del residuo sobre todo el dominio  $\Omega$ , ponderado por una funciones peso  $\xi_i$ . Por este motivo, también se conoce a este método

bajo el nombre de "residuos ponderados". Por otra parte, es fácil identificar la técnica de Rayleigh-Ritz-Galerkin (Strang y Fix, 1973) como caso particular de la fórmula (2.3). También es posible llegar a una expresión equivalente a (2.3) cuando la ecuación (2.1) se puede representar de una forma alternativa mediante un principio variacional. Y en este sentido podemos incluir los métodos variacionales como un caso particular de los métodos de proyección (e.g. Marchouk y Agochkov, 1985).

Si  $F_0$  es una solución de la ecuación  $L(F) = f$ , es evidente que cumple (2.3). Sin embargo, no toda función que cumpla (2.3) ha de ser necesariamente una solución de la ecuación diferencial (2.1), porque la ecuación (2.3) es menos restrictiva que la ecuación (2.1). En la situación particular de que (2.3) sea consecuencia de un principio variacional, la validez de la solución está garantizada (e.g. Strang y Fix, 1973).

La solución  $F'$  se buscará sobre una variedad lineal  $\{\phi_k\}$  de  $H_1$  de dimensión  $m$ , que permite representar  $F'$  como  $\sum_k a_k \phi_k$  y, por lo tanto, quedará determinada por los valores de  $a_k$ . Para obtenerlos se substituye la expresión de  $F'$  en (2.3), lo cual lleva a un sistema de ecuaciones expresado como

$$C_{ik} \alpha_k = f_i, \quad (2.4)$$

cuya matriz está dada por

$$C_{ik} = \int_{\Omega} \phi_k \xi_i^* d\Omega, \text{ y } f_i = \int_{\Omega} f \xi_i^* d\Omega.$$

En general, las variedades lineales  $\{\phi_k\}$  y  $\{\xi_i\}$  no coinciden. El caso particular en que coinciden es conocido en la literatura como método de Galerkin o de Bubnov-Galerkin (e.g. Marchouk y Agochkov, 1985) y es el criterio que utilizaremos.

La formulación descrita en (2.3) nos permite simplificar el comportamiento de las condiciones de contorno. Podemos distinguir dos tipos de condiciones de contorno: las naturales, que no impondrán ninguna limitación sobre las funciones  $\xi_i$ , y las esenciales o forzadas, que sí lo harán. La distinción entre condiciones naturales o esenciales dependerá de las características del operador diferencial  $L$ . Como regla práctica se tiene que si el operador diferencial es de orden  $2m$ , las condiciones esenciales son aquéllas que contienen derivadas de orden menor que  $m$ , y las condiciones naturales serán aquellas que contengan derivadas de orden igual o superior a  $m$ .

El punto crítico en este proceso de resolución es la elección de un conjunto adecuado de funciones o base  $\{\xi_i\}$  para que, por una parte cubra de forma satisfactoria el espacio de funciones y el error de aproximación disminuya cuando la dimensión de la variedad lineal aumente y, por otra, permita calcular las integrales  $C_{ik}$  y  $f_i$  de forma sencilla.

En general, la búsqueda de dicha base puede ser tan laboriosa como

la misma resolución analítica de la ecuación diferencial. Además, una vez encontrada una solución aproximada, el proceso de refinamiento de la misma para reducir el error de aproximación es un proceso laborioso porque es necesario encontrar nuevas funciones  $\xi$  que sean linealmente independientes de las de la variedad lineal y que, al mismo tiempo, permitan un cálculo sencillo de las integrales (2.4). Como consecuencia, el método aplicado de esta forma presenta poca flexibilidad.

### II.3.2 El método de las diferencias finitas.

La idea fundamental de este método consiste en aproximar las derivadas de la ecuación diferencial por cocientes de incrementos. Para realizar este proceso, se superpone sobre el dominio  $\Omega$  una malla regular que permita realizar la aproximación anterior de forma satisfactoria, con lo cual se calcula las derivadas en un nudo de la malla en función del valor de la solución en los nudos vecinos. Este proceso lleva a la construcción de un sistema lineal de ecuaciones cuya solución representa el valor de función en los nudos de la malla.

Este método presenta unas ventajas frente los métodos de proyección descritos anteriormente. Respecto a la forma de la matriz, podemos indicar en primer lugar que será casi vacía ("sparse"), es decir, que los elementos de la matriz serán

mayoritariamente nulos porque sólo serán diferentes de cero aquellos elementos cuya fila y columna indiquen nudos conectados. En segundo lugar, la matriz será de banda limitada, por lo que a partir de una subdiagonal de la matriz todos los elementos serán igualmente nulos. Este tipo de características simplifica la resolución del sistema de ecuaciones lineales mediante ordenador. Por otra parte, en muchos problemas físicos de interés la matriz es simétrica, con lo cual todavía se facilita más el proceso de cálculo.

En este planteamiento, un proceso de refinamiento de la solución para reducir el error de aproximación se limita simplemente a utilizar una malla más densa, con los nudos más próximos. Ello no modifica en absoluto el proceso de cálculo de los elementos de la matriz sino únicamente su número, lo cual lo hace idóneo para su utilización en ordenadores digitales. Por el contrario, el orden de la matriz del sistema aumentará, con lo que también aumentarán las necesidades de la memoria y de tiempo de ejecución para la resolución del sistema.

Además, frente a los métodos de proyección presenta dos desventajas, como son la recomendación de utilizar una malla rectangular, que impedirá un adecuado estudio de aquellos problemas que tengan unos contornos complicados; y por otra parte, el hecho de que las condiciones de contorno se aplican necesariamente sobre los nudos que descansan sobre las fronteras del problema, internas o externas, y no hay simplificación de las mismas.

### II.3.3 El método de los elementos finitos.

En este contexto, el método de los elementos finitos aparece como un caso particular de los métodos de proyección. La idea clave es la utilización de funciones de soporte acotado como funciones base  $\xi_i$ . Las funciones de soporte acotado tiene la característica de ser funciones definidas en todo el dominio del problema,  $\Omega$ , pero sólo son no nulas en una región finita de este dominio.

Para elaborar el MEF con estas funciones de soporte acotado a partir de los métodos de proyección consideramos  $N$  subdominios,  $\Omega_i$ , del dominio,  $\Omega$ , de forma que su reunión sea el dominio total. Sobre cada uno de estos subdominios se considera una función  $\xi_i$ , de forma que su soporte acotado coincida con el subdominio  $\Omega_i$ . Claramente habrá tantas funciones como subdominios y, por construcción, el conjunto de dichas funciones  $\{\xi_i\}$  serán linealmente independientes entre ellas, lo que permite asociarlas a una variedad lineal de dimensión  $N$ .

La utilización de funciones con soporte acotado tiene unas importantes consecuencias. Por una parte, a efectos de cálculo, la integración (2.3) se reducirá al dominio  $\Omega_i$ . Un proceso de refinamiento de la solución consistirá simplemente en dividir los subdominios en dominios menores, pero sin modificar las características de las funciones base  $\xi$ . Ello hará que el proceso de

cálculo de los coeficientes del sistema de ecuaciones permanezca inalterado y simplemente haya cambiado el tamaño del dominio de integración. Este proceso se asemeja al esquema de DF con la ventaja de que los subdominios pueden ajustarse a los contornos del problema mejor que la malla regular del método de las diferencias finitas. Sin embargo, la principal aportación de la utilización de funciones de soporte acotado hay que buscarla en la mayor flexibilidad de elección de las funciones  $\xi_i$ . Para la selección de las mismas trabajamos en el contexto de los llamados elementos finitos nodales, que es un caso particular de la teoría general de los EF y son, sin duda, el esquema de EF más utilizado. Por ello y a partir de ahora, cuando nos refiramos a elementos finitos se sobreentenderá que corresponde a los EF nodales, siempre que no se diga lo contrario.

En este esquema de elementos finitos nodales, los parámetros  $a_i$  de la solución aproximada  $F' = \sum_i a_i x_i$  corresponden al valor de  $F$  o de sus derivadas en unos puntos  $P(y_i, z_i)$  que se denominan nodos:  $a_i = F(y_i, z_i) \equiv F_i$ . De esta forma la función  $F'$  se encuentra como  $F' = \sum_i F_i \xi_i$ . Ello provoca que las funciones  $\xi_i$  deban ser tales que alcancen el valor unidad en el nodo  $i$  y nulo en los demás nodos. La acción de las funciones base  $\xi_i$  se puede entender como la de interpolar el valor de  $F$  encontrado en los nodos sobre todo el dominio. Por este motivo, las funciones  $\xi_i$  también se las identifica con el nombre de funciones de interpolación.

## II.4 ECUACIONES PARA MODELOS BIDIMENSIONALES.

Vamos a obtener las ecuaciones del problema a partir de las ecuaciones de Maxwell las cuales, en el sistema de unidades SI (que es el utilizado), son

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{H} &= \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \nabla \cdot \vec{D} &= \gamma\end{aligned}\tag{2.5}$$

donde  $\vec{E}$ , representa al campo eléctrico;  $\vec{D}$ , es el desplazamiento;  $\vec{B}$ , el campo de inducción magnética, y  $\vec{H}$ , el campo magnético. La  $\vec{J}$ , representa la densidad de corriente, y  $\gamma$ , la densidad de carga.

A dichas ecuaciones hay que añadir las condiciones normales en el infinito. Se asumen igualmente las relaciones constitutivas de los campos  $\vec{B} = \mu \vec{H}$  y  $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ , juntamente con la ley de Ohm  $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ . Las magnitudes  $\mu$ ,  $\epsilon$  y  $\sigma$  tienen en el caso más general un carácter tensorial.

Asumimos que el campo primario está originado por una onda electromagnética plana que se propaga verticalmente hacia el interior de la Tierra, con una dependencia temporal armónica, por lo que los campos electromagnéticos serán de la forma  $F = F \cdot e^{i\omega t}$ , y que no hay ninguna distribución real de carga ( $\gamma = 0$ ). Si imponemos,



además, las relaciones constitutivas y la ley de Ohm anteriormente indicadas podremos reescribir las ecuaciones de Maxwell como

$$\begin{aligned}
 \nabla \times \vec{E} &= -i\omega\mu\vec{H} \\
 \nabla \times \vec{H} &= (\sigma + i\omega\epsilon)\vec{E} \\
 \nabla \cdot (\mu \vec{H}) &= 0 \\
 \nabla \cdot (\epsilon \vec{E}) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{2.6}$$

Combinando las dos primeras podemos escribir dos ecuaciones alternativas

$$\nabla \times ( [\sigma + i\omega\epsilon]^{-1} \nabla \times \vec{H} ) = -i\omega\mu \vec{H}
 \tag{2.7a}$$

$$\nabla \times ( [-i\omega\mu]^{-1} \nabla \times \vec{E} ) = (\sigma + i\omega\mu) \vec{E}
 \tag{2.7b}$$

Cualquiera de estas dos ecuaciones describe el problema. Las condiciones de contorno a través de las superficies de discontinuidad se desprenden de las dos últimas ecuaciones de Maxwell. En definitiva se reducirán a imponer, por una parte, que el campo magnético  $\vec{H}$  sea continuo a través de cualquier superficie de discontinuidad porque asumimos que la permabilidad magnética  $\mu$  va a ser una constante en el problema e igual a  $\mu_0$ ; por otra parte, que la componente tangencial del campo eléctrico también sea continua a través de las superficies de discontinuidad en la conductividad, pero no así la componente normal. Para esta última componente, la continuidad será para el vector densidad de corriente  $\vec{J}$  y no para el campo eléctrico  $\vec{E}$ . En el infinito tendremos las condiciones

$$\begin{aligned}
\vec{E} = \vec{E}_0 \quad \text{ó} \quad \vec{H} = \vec{H}_0 \quad \text{para } z \longrightarrow -\infty \\
\vec{E} = \vec{0} \quad \text{ó} \quad \vec{H} = \vec{0} \quad \text{para } z \longrightarrow +\infty \\
(\vec{i} \cdot \nabla) \vec{E} = \vec{0} \quad \text{ó} \quad (\vec{i} \cdot \nabla) \vec{H} = \vec{0} \quad \text{para } x \longrightarrow \pm\infty \\
(\vec{j} \cdot \nabla) \vec{E} = \vec{0} \quad \text{ó} \quad (\vec{j} \cdot \nabla) \vec{H} = \vec{0} \quad \text{para } y \longrightarrow \pm\infty
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Para los modelos bidimensionales tomamos que la dirección dada por el eje X es aquella sobre la que no hay variación en la conductividad. Una consecuencia importante de este hecho es que en todo el problema bidimensional se tendrá que  $\frac{\partial}{\partial x} = 0$ .

Las estructuras bidimensionales permiten introducir los conceptos de polarización E y de polarización H.

La situación en que el campo eléctrico está orientado completamente según la dirección de la estructura bidimensional, se denomina polarización E o modo transversal eléctrico (TE). Si es el campo magnético el que está orientado según la dirección de la estructura bidimensional, se habla de polarización H o modo transversal magnético (TM).

Esta distinción entre ambos modos es muy importante porque permite descomponer cualquier orientación del campo electromagnético respecto a la estructura bidimensional en dos partes: una con polarización E y otra con polarización H.

Esta descomposición no es arbitraria, cada parte representa un comportamiento físico diferenciado. En la situación de la

polarización E, el campo eléctrico es siempre perpendicular a los gradientes de conductividad del medio o sus superficies de discontinuidad; por lo tanto, no habrá densidades de carga asociadas a este hecho y el campo secundario estará generado exclusivamente por la distribución de corrientes creadas en el conductor por el campo primario (efecto inductivo). Esta situación es diferente en la polarización H porque pueden existir componentes del campo eléctrico paralelas a gradientes de conductividad o a superficies de discontinuidad y, por lo tanto, aparecer densidades de carga (efecto galvánico). En este modo habrá una superposición de efectos inductivos y de efectos galvánicos.

A efectos de resolución de las ecuaciones, la descomposición anterior permite una importante simplificación. Se observa que para cada modo hay un campo que tiene una única componente no nula, de esta forma, mediante la elección adecuada de la ecuación (2.7) pasamos trivialmente de una ecuación vectorial a una ecuación escalar. La elección sería

$$\nabla^* \cdot ( [\sigma + i\omega\epsilon]^{-1} \nabla^* H_x ) + i\omega\mu H_x = 0 \quad \text{para polarización H} \quad (2.9a)$$

$$\nabla^* \cdot ( [-i\omega\mu]^{-1} \nabla^* E_x ) - (\sigma + i\omega\mu) E_x = 0 \quad \text{para polarización E} \quad (2.9b)$$

donde  $H_x$  y  $E_x$  representan las componentes de los campos E y H según la dirección de la estructura bidimensional, que está orientada según el eje X;  $\nabla^*$  corresponde a  $(\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$ , pero dado que no habrá confusión, representaremos  $\nabla^*$  por  $\nabla$ .

Ahora, las condiciones en el infinito serán

$$\begin{aligned}
 E = E_0 \quad \text{o} \quad H = H_0 & \quad \text{para } z \longrightarrow -\infty \\
 E = 0 \quad \text{o} \quad H = 0 & \quad \text{para } z \longrightarrow +\infty \\
 \frac{\partial E}{\partial y} = 0 \quad \text{o} \quad \frac{\partial H}{\partial y} = 0 & \quad \text{para } y \longrightarrow \pm\infty
 \end{aligned}
 \tag{2.10}$$

La resolución de las ecuaciones (2.9), juntamente con las condiciones de contorno anteriores, constituyen el problema directo. Por comodidad, las representamos de una forma común mediante la expresión

$$\nabla \cdot (\alpha \nabla F) + \beta F = 0
 \tag{2.11}$$

con las condiciones en el infinito (2.10)

En donde, para polarización H:  $F = H$ ,  $\alpha = (\sigma + i\omega\epsilon)^{-1}$  y  $\beta = i\omega\mu$ ,  
y para polarización E:  $F = E$ ,  $\alpha = -(i\omega\mu)^{-1}$  y  $\beta = -(\sigma + i\omega\mu)$ .

## II.5 CONSTRUCCION DE UN ALGORITMO DE EF PARA EL PROBLEMA MT.

Para obtener el algoritmo de elementos finitos mediante los métodos de proyección partimos de la ecuación (2.11)

$$\nabla \cdot (\alpha \nabla F) + \beta F = 0,$$

Las condiciones en el infinito se imponen sobre el contorno  $\Gamma$  del dominio  $\Omega$  que está suficientemente alejado de la anomalía conductora bidimensional.

Si aplicamos la fórmula (2.3):

$$(\nabla \cdot [\alpha \nabla F] + \beta F, \xi_i) = 0, \quad \forall i = 1, \dots, n$$

que se puede reescribir como:

$$\int_{\Omega} (\nabla \cdot (\alpha \nabla F) + \beta F) \xi_i \, d\Omega = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$$

si aplicamos la primera fórmula de Green al primer término de la expresión anterior, se obtiene

$$\int_{\Gamma} (\alpha \nabla F \cdot \vec{n}) \xi_i \, d\Gamma - \int_{\Omega} \alpha \nabla F \cdot \nabla \xi_i \, d\Omega + \int_{\Omega} \beta F \xi_i \, d\Omega = 0 \quad \forall \xi_i \quad (2.12)$$

donde  $\vec{n}$  es un vector unitario perpendicular a la frontera y apuntando hacia afuera.

El primer término de la izquierda de la igualdad anterior, está calculado sobre la frontera  $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4$ , fig.2.1, donde que tenemos las condiciones en el infinito, así

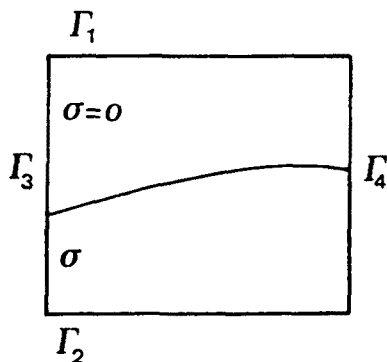


Figura 2.1: Identificación de las diferentes partes  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$ ,  $\Gamma_3$  y  $\Gamma_4$  de la frontera que simulan el infinito.

$$\int_{\Gamma} (\alpha \nabla F \cdot \vec{n}) \xi_i \, d\Gamma = \sum_{i=1}^4 \int_{\Gamma_i} (\alpha \nabla F \cdot \vec{n}) \xi_i \, d\Gamma$$

Veamos qué sucede sobre cada frontera. En  $\Gamma_3$  y  $\Gamma_4$  se tiene una condición de Neumann (que en nuestro problema corresponde a las que anteriormente denominábamos naturales), sobre ellas  $\nabla F \cdot \vec{n} = 0$ . Si se substituye dicho valor en la integral anterior, se tiene que los términos sobre  $\Gamma_3$  y  $\Gamma_4$  desaparecen y no tienen contribución en el proceso. Sobre  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  hay las condiciones de Dirichlet (que corresponden para este problema a las condiciones esenciales) y la situación es diferente. Estas condiciones imponen unos valores fijos del campo en las fronteras  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$ .

El cálculo de las integrales del contorno se han reducido a imponer unos valores de campo fijo sobre  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$ . De esta forma pasamos a estudiar los otros dos términos:

$$\int_{\Omega} \alpha \nabla F \cdot \nabla \xi_i \, d\Omega \quad \text{y} \quad \int_{\Omega} \beta F \xi_i \, d\Omega$$

que llevarán al planteamiento de un sistema lineal de ecuaciones sobre el que se habrá de imponer aquellas condiciones sobre  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$ .

La solución está representada por

$$F = \sum_{j=1}^N F_j \xi_j, \quad (2.13)$$

Si la sustituimos en (2.12), sin tener en cuenta la integración sobre el contorno, tendremos:

$$\sum_{j=1}^N F_j \left[ - \int_{\Omega} \alpha \nabla \xi_j \cdot \nabla \xi_i \, d\Omega + \int_{\Omega} \beta \xi_j \xi_i \, d\Omega \right] = 0 \quad \forall i, j \quad (2.14)$$

Si definimos

$$A_{ij} = - \int_{\Omega} \alpha \nabla \xi_i \cdot \nabla \xi_j \, d\Omega, \quad y \quad B_{ij} = \int_{\Omega} \beta \xi_i \xi_j \, d\Omega,$$

podremos reescribir

$$[A_{ij} + B_{ij}] F_j = K_{ij} F_j = 0 \quad (2.15)$$

que representa el sistema de ecuaciones lineales a resolver.

A la vista de la forma de las integrales que definen la matriz de coeficientes, podemos señalar que K será una matriz simétrica de coeficientes complejos.

La solución del problema se obtiene tras la resolución del sistema de ecuaciones e imponiendo sobre el contorno  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  los valores fijos y conocidos de F.

Ante la enorme gama de posibilidades de hacer la discretización del dominio a partir de los nodos, hemos elegido la más simple, que consiste en la triangulación del dominio. Asociamos a cada nodo una función cuyo soporte acotado corresponda a la región comprendida por todos los triángulos a los que el nodo pertenece. Esta región tiene

una forma poligonal. Dentro de cada triángulo imponemos que las propiedades electromagnéticas sean constantes.

Las funciones  $\xi_i$  cumplen una serie de condiciones generales como la de tener el valor unidad en el nodo  $i$  y nulo en los demás nodos y la de ser cuadrado integrables, tanto ellas y como sus primeras derivadas. Realizamos una elección de las funciones de interpolación  $\xi_i$  igualmente simple, la de considerar que dentro de cada triángulo la función de interpolación sea lineal.

De esta forma, la integración que define las matrices A y B se puede realizar sobre cada triángulo  $\Omega_e$  y posteriormente construir la matriz global K.

Dichas integrales sobre cada triángulo se pueden calcular analíticamente y corresponden a (e.g., Zienkiewicz, 1981):

$$\int_{\Omega_e} \nabla \xi_i \cdot \nabla \xi_j \, d\Omega = \frac{1}{4A_e} \sum_{i,j} [b_i b_j + c_i c_j] \quad (2.16a)$$

donde

$$b_i = \varepsilon_{ijk} (y_j - y_k)$$

$$c_i = \varepsilon_{ijk} (z_k - z_j)$$

$$A_{ij} = \sum_e \int_{\Omega_e} \beta_e \nabla \xi_i \cdot \nabla \xi_j \, d\Omega_e = \sum_e \frac{\beta_e}{4A_e} \sum_{i,j} [b_i b_j + c_i c_j]$$

y



$$\int_{\Omega} \xi_i \xi_j d\Omega = \frac{A_e}{\eta}, \text{ donde } \eta = \begin{cases} 6 & \text{si } i=j \\ 12 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (2.16b)$$

donde  $A_e$  es el área del triángulo;  $i, j, k$  indican sus vértices, y  $\varepsilon_{ijk}$  representa el tensor de permutaciones.

La resolución del sistema de ecuaciones da el valor del campo en los nodos, ello permite interpolarlo en todo el dominio del problema a partir de la igualdad (2.13). Pero, recordemos que la función que presenta mayor interés es la impedancia, a partir de la que es posible obtener la resistividad aparente y la fase. Esta se define como el cociente entre los campos eléctrico y magnético perpendiculares. En la resolución del problema bidimensional únicamente calculamos uno de estos dos campos. Para calcular el campo complementario perpendicular aplicamos las ecuaciones de Maxwell. En nuestro caso, calculamos la componente horizontal del campo complementario a partir de la derivada vertical del campo determinado mediante el MEF:  $\beta \frac{\partial F}{\partial z}$ .

Por la elección realizada de funciones de interpolación lineales en el interior de cada elemento triangular, la derivada con respecto a las coordenadas espaciales será constante. Como interesa calcular los campos sobre la superficie de la Tierra, se debe determinar la derivada precisamente en los lados de los triángulos y no en el interior de los mismos. Como debido a problemas numéricos los valores del campo complementario determinados en el triángulo

superior e inferior a la superficie pueden diferir, tomamos como valor del mismo el promedio de los valores calculados en los elementos contiguos:

$$\beta \frac{\partial F}{\partial z} \approx \frac{1}{2} \left[ \beta_0 \frac{F_i - F_{i-1}}{\ell_0} + \beta_1 \frac{F_{i+1} - F_i}{\ell_1} \right] \quad (2.17)$$

Para que esta técnica sea satisfactoria es necesario que las dimensiones de los elementos según la dirección de derivación sean pequeñas, para que en el interior de los elementos el valor de la derivada estimada a partir del cociente de incrementos sea próximo al valor en los lados. El tamaño adecuado dependerá del valor de  $\sigma$  y  $T$ , y como criterio se puede considerar el 1% de  $\delta$ .

Si  $b_0 = b_1 = b$  y  $\ell_0 = \ell_1 = \ell$ , la expresión anterior se reduce a

$$\beta \frac{\partial F}{\partial z} \approx \frac{1}{2} \beta \left[ \frac{F_{i+1} - F_{i-1}}{\ell} \right]$$

que coincide con el formalismo de las diferencias centradas.

## II.6 DESCRIPCION DEL PROGRAMA DE MODELIZACION.

Para realizar la modelización hemos desarrollado un programa de ordenador que contempla los aspectos descritos en el apartado anterior. El programa está escrito en lenguaje FORTRAN77 y tiene una estructura modular que permite identificar los diferentes procesos

que se realizan (fig. 2.2).

Este programa de modelización bidimensional requiere un gran número de variables que, juntamente con la doble precisión que hemos utilizado para reducir los errores internos de redondeo, hace que precise una gran capacidad de memoria (aproximadamente 2 Mb para 2600 nodos). Por lo tanto, ha sido necesario planificar una estrategia de programación para reducir la cantidad de memoria. Por ese motivo y para conseguir el aprovechamiento racional de la misma, hemos trabajado con memoria dinámica.

Igualmente es importante controlar el tiempo de ejecución del programa, máxime cuando su fin es su implementación en un programa de resolución del problema inverso. Ambas variables, memoria y tiempo de ejecución, están ligadas y tienen la misma importancia en nuestro proceso.

El programa está constituido por:

#### ENTRADA DE DATOS.

Para introducir los datos del modelo en el programa es necesario crear un archivo. Los datos que se indican en el archivo serán de dos clases: los parámetros físicos del modelo y las características de la discretización.

En los primeros indicamos las propiedades electromagnéticas de los diferentes materiales ( $\sigma, \epsilon, \mu$ ), el periodo T de la oscilación

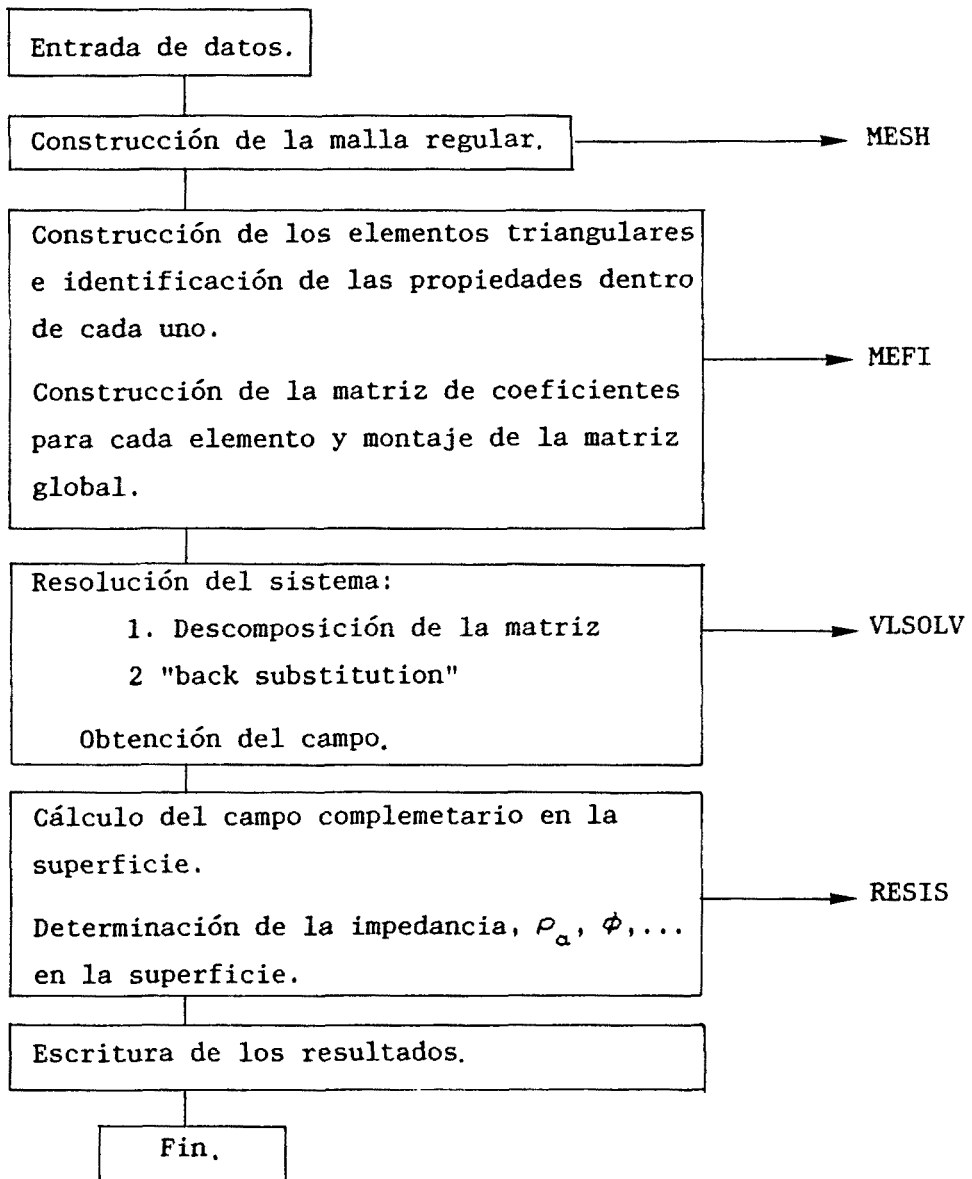


Figura 2.2: Esquema del programa de modelización.

electromagnética y el tipo de polarización (E o H) a estudiar.

En las segundas, se indican las posiciones de los nudos de la malla y las conexiones entre ellos, que permitan construir la discretización de la malla. También la opción que permite que el propio programa realice su discretización. Esta se hace a partir de un mallado rectangular, donde cada nudo de la malla se toma como nodo. Por abuso del lenguaje, utilizaremos indistintamente las palabras nudo y nodo.

#### LA SUBROUTINA MESH.

Construye una malla rectangular, determina las coordenadas de los nudos, los numera e identifica los nudos sobre la frontera con campo fijo.

Para organizar de forma adecuada este proceso, hemos dividido el dominio total en superelementos, tal como indica el dibujo de la figura 2.3. Dentro de cada uno es posible realizar una discretización diferente. Para cada fila de superelementos utilizamos la misma discretización vertical ( $\Delta z = \text{cte.}$ ) y para cada columna, la misma discretización horizontal ( $\Delta y = \text{cte.}$ ). Ello permite realizar una discretización rectangular diferenciada más densa en la región de interés y menos en las regiones periféricas, que corresponden a zonas de transición hacia las frontera externas. De esta forma conseguimos una racionalización de la memoria disponible.

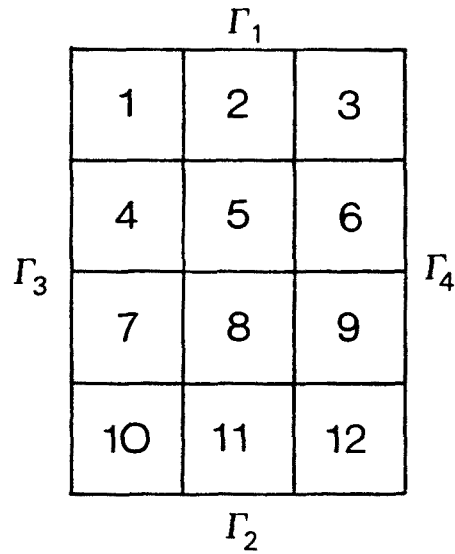


Figura 2.3: División del dominio en superelementos.

#### LA SUBRUTINA MEFI.

Triangula el dominio a partir de la malla rectangular mediante la conexión de los vértices extremos. Además asigna a cada triángulo los valores correspondientes de  $\sigma$ ,  $\varepsilon$  y  $\mu$ .

Con esto se acaba la etapa de discretización del dominio.

A continuación, y todavía dentro de la subrutina MEFI, se calcula la matriz de coeficientes. Este proceso se realiza de la siguiente forma: se calcula los coeficientes para un triángulo y, a continuación, se incorporas dichos valores a la matriz de coeficientes. Luego el proceso se repite para el siguiente triángulo.

Como la matriz es simétrica y en banda, con un semiancho de banda conocido, se almacena en una matriz con un número de filas igual al número de nudos y un número de columnas igual al semiancho de banda. Por lo tanto, la dimensión vendrá determinada por el semiancho de banda que indica la máxima diferencia en la numeración entre dos nudos conectados en la malla. Esto hace que el proceso de numeración sea importante para optimizar el gasto de memoria. Por esto, también el proceso de triangulación de la malla rectangular afectará al semiancho de banda.

#### LA SUBROUTINA VLSOLV.

Es una subrutina de resolución de sistemas de ecuaciones lineales para una matriz simétrica. Ha sido adaptada a nuestro problema y modificada para contemplar la existencia de nudos con campo fijo sin romper la simetría de la matriz. Este proceso se divide en dos partes, la descomposición de la matriz ("elimination") que resulta en una matriz triangular superior y la resolución del sistema mediante "back substitution".

La modificación para contemplar los nudos con campo fijo tiene lugar durante la descomposición de la matriz por filas. Al llegar a la fila correspondiente a un nudo con campo fijo multiplicamos el elemento del vector de términos independientes (que contiene el valor del campo en dicho nudo) por un número suficientemente grande

( $10^{25}$  en nuestro caso). Así, garantizamos que tras el proceso de descomposición de la matriz resulte que en dicha fila el elemento del vector de términos independientes tenga el valor del campo fijado, el elemento de la matriz sobre la diagonal sea 1, y los otros elementos de la fila sean nulos.

La elección de este método se basa en dos criterios. En primer lugar, es un método directo que tiene la característica de ser, en general, más exacto que los métodos iterativos. Y en segundo lugar, su simplicidad, que permite modificarlo fácilmente según las necesidades.

#### LA SUBROUTINA RESIS.

El objetivo de esta subrutina es el de determinar los valores de resistividad aparente y la fase en los puntos de la superficie a partir del valor del campo calculado por VLSOLV. Para ello, en primer lugar, determina el campo complementario a partir de la expresión (2.17):

$$\beta \frac{\partial F}{\partial z} \approx \frac{1}{2l} \left\{ \beta_0 F_{i-1} - \beta_1 F_{i+1} \right\}$$

donde  $\beta_0$  y  $\beta_1$  están determinados por las propiedades electromagnéticas de los medios superior e inferior respectivamente, cuya expresión depende del tipo de polarización.  $F_{i-1}$  y  $F_{i+1}$  son los valores del campo justo por encima y por debajo de la superficie.

A continuación, calcula el valor de la impedancia en dichos nudos



como cociente entre ambos campos.

Finalmente, se calcula el valor de la resistividad aparente y de la fase.

## II.7 CONTROL DEL PROGRAMA.

Una problemática inherente al proceso de modelización numérica es la comprobación de que éste funciona correctamente. Para ello la única posibilidad es la de comparar los resultados con otros obtenidos de forma independiente (que serán los datos de control). Estos datos se obtienen como solución analítica de las ecuaciones, la cual sólo es posible para un número muy restringido de modelos.

Los modelos de control elegidos han sido:

- 1.- Un medio homogéneo
- 2.- El modelo de Weaver, LeQuang y Fischer (1985 y 1986).

Estos dos modelos nos permitirán evaluar diferentes aspectos del programa que ahora pasamos a describir:

### II.7.1 El medio homogéneo.

Sin duda, es el modelo más simple posible y no nos servirá para comprobar si la modelización bidimensional funciona, porque no es un modelo bidimensional. Su importancia reside en que permite realizar

un estudio de las dimensiones óptimas de los elementos que utilizaremos para las dos polarizaciones.

Para la polarización E partimos de la solución analítica

$$E = \begin{cases} A \cdot e^{-z/\delta} \cdot e^{iz/\delta} & \text{para } z \geq 0 \\ B \cos\left(\frac{\omega}{c} z\right) + C \sin\left(\frac{\omega}{c} z\right) & \text{para } z < 0 \end{cases}$$

Donde A, B y C son unas constantes complejas que hay que determinar a partir de las condiciones de contorno para el campo E en la superficie de la Tierra ( $z=0$ ) y en la frontera superior del problema  $\Gamma_1$  ( $z=z_0$ ):

$$\left. \begin{aligned} E_+ &= E_- \\ \left(\frac{\partial E}{\partial z}\right)_+ &= \left(\frac{\partial E}{\partial z}\right)_- \end{aligned} \right\} \text{ en } z = 0$$

$$E = E_0 \quad \text{en } z = z_0$$

Como modelo particular hemos elegido  $\sigma = 0.01 \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$  y un periodo  $T = 1\text{s}$ . Tras varias pruebas hemos comprobado que los resultados son satisfactorios para un mallado con las siguientes características coincidiendo con los valores sugeridos por Kaikkonen (1986): En el modelo, la frontera superior se ha situado en  $z = -30 \text{ km} (\cong 6 \delta)$  y la inferior en  $z = 20 \text{ km} (\cong 4 \delta)$ . Los elementos han sido triángulos rectangulares isósceles de longitud de cateto  $2.5 \text{ km} (\cong \delta/2)$  excepto

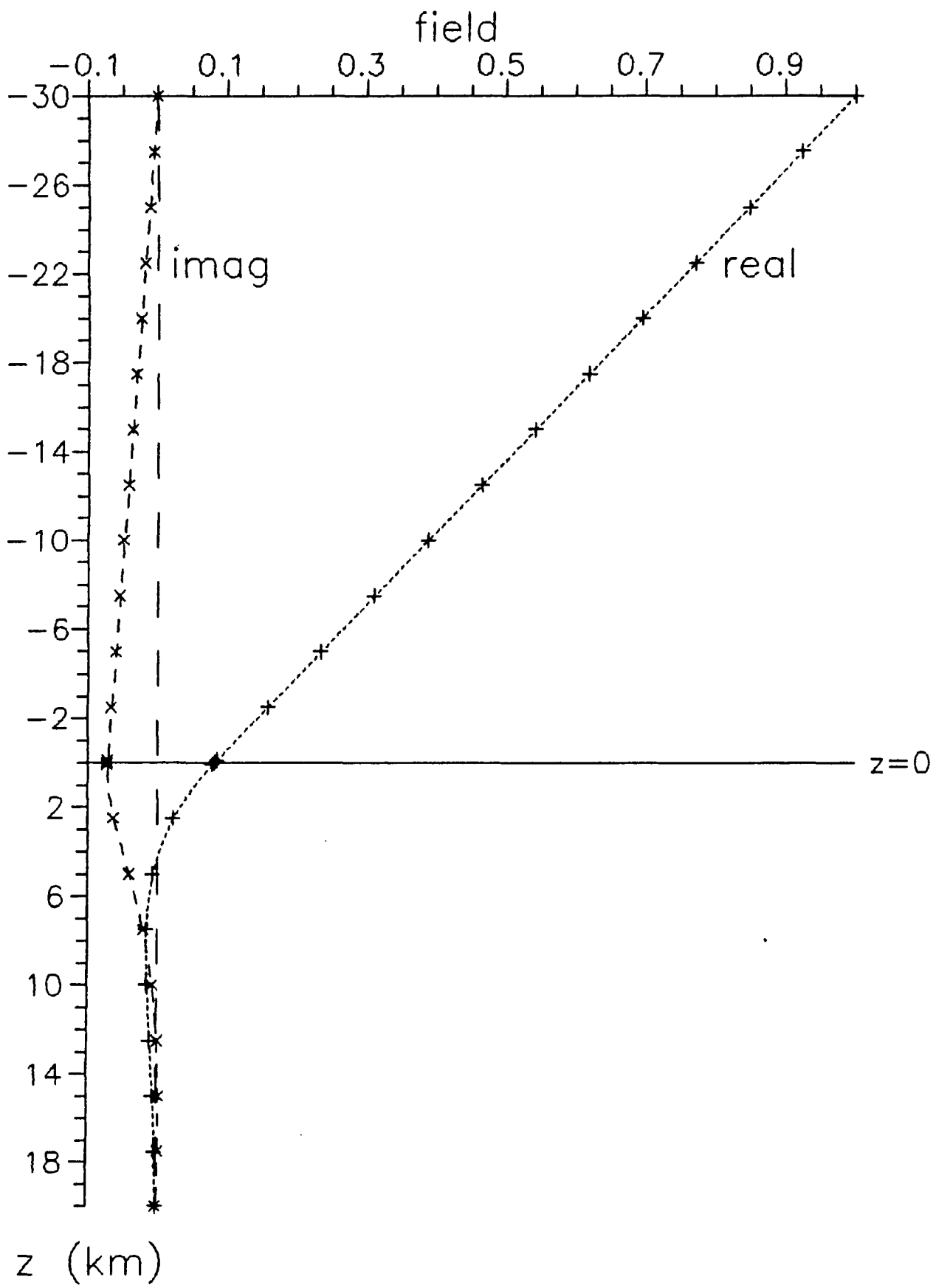


Figura 2.4: Distribución vertical del campo eléctrico. Las líneas a trazos finos corresponden a los valores analíticos. Sobre estas se han superpuesto los símbolos "+" y "x" que corresponden a los datos calculados numéricamente.

en los que están justo por encima y por debajo de la superficie de la Tierra, cuyo cateto en la dirección vertical ha sido 0.01 km ( $\cong 0.002 \delta$ ).

En la figura 2.4 se representan la parte real y la parte imaginaria del campo de las soluciones analítica y numérica.

Para la polarización H habitualmente no se simula el aire, lo que reduce las necesidades informáticas. Sin embargo, comprobamos que con el aire la solución es igualmente válida. Las soluciones del campo magnético son equivalentes a las del campo eléctrico:

$$H = \begin{cases} L \cdot e^{(-z/\delta)} \cdot e^{(iz/\delta)} & \text{para } z \geq 0 \\ M \cos\left(\frac{\omega}{c} z\right) + N \sin\left(\frac{\omega}{c} z\right) & \text{para } z < 0 \end{cases}$$

Donde las constantes L, M y N son complejas y se determinan a partir de las condiciones de contorno:

$$\left. \begin{aligned} H_+ &= H_- \\ \left(\frac{1}{\sigma} \frac{\partial H}{\partial z}\right)_+ &= \left(\frac{1}{i\omega\epsilon} \frac{\partial H}{\partial z}\right)_- \end{aligned} \right\} \text{ en } z = 0$$

$$H = H_0 \quad \text{en } z = z_0$$

En la figura 2.5 representamos los valores reales e imaginarios de H para la solución analítica y numérica, con el mismo modelo y discretización que en el caso del campo eléctrico.

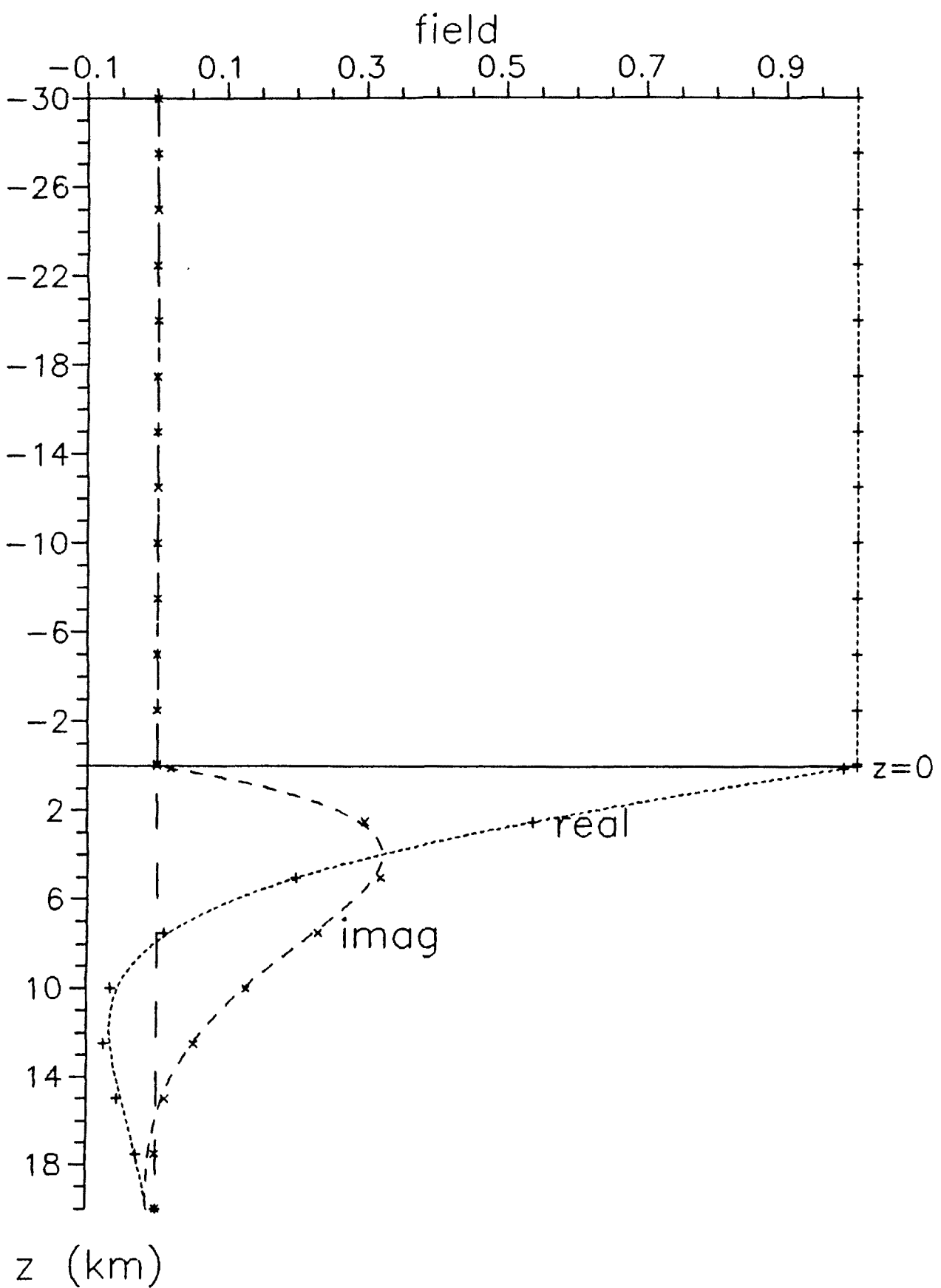


Figura 2.5: Distribución vertical del campo magnético. Las líneas a trazos finos corresponden a los valores analíticos. Sobre estas se han superpuesto los símbolos "+" y "x" que corresponden a los datos calculados numéricamente.

Las pequeñas discrepancias con la curva analítica son debidas a que la frontera en  $z= 20$  km no simula tan bien las condiciones en el infinito como en el caso de polarización E. Lo importante es que estos efectos en la superficie de la Tierra, que es donde centramos nuestro interés, son despreciables.

Finalmente, si dividimos las longitudes del problema y de la malla por la penetración del medio, que en este caso es  $\delta = 5.0$  km, podemos generalizar los resultados anteriores para cualquier medio homogéneo y valor de T, porque las unidades quedarán como función de  $\delta$ .

#### II.7.2 Modelo de Weaver, LeQuang y Fischer.

El modelo anterior, como ya hemos indicado, no servirá para comprobar la modelización bidimensional porque es homogéneo. Por este motivo es necesario disponer de un modelo completamente bidimensional. En este sentido la aportación del modelo bidimensional de Weaver et al. es realmente importante y permite estudiar diferentes situaciones. Fue publicado en 1985 para polarización H y en 1986 para polarización E. El modelo en cuestión está representado en la figura 2.6.

Para polarización H el problema tiene solución analítica. Sin embargo, para polarización E, el proceso es analítico pero la

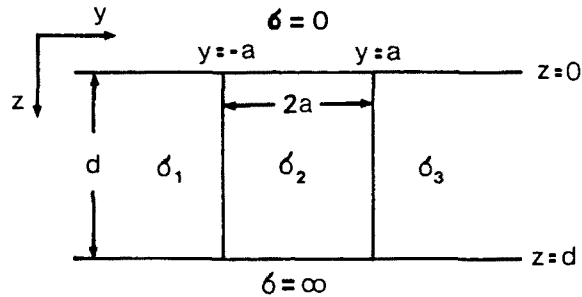


Figura 2.6: Modelo de control para cálculos numéricos. (Weaver et al., 1985, 86)

solución no lo es en el sentido que se encuentra mediante aproximaciones sucesivas. Este proceso los autores lo identifican como "cuasi-analítico" para diferenciarlos de los procesos puramente numéricos como el MEF.

El modelo particular considerado tiene los siguientes valores para los parámetros:  $\sigma_1 = 0.1 \Omega^{-1} m^{-1}$  ;  $\sigma_2 = 1 \Omega^{-1} m^{-1}$  ;  $\sigma_3 = 0.5 \Omega^{-1} m^{-1}$  ;  $a = 10 \text{ km}$  ;  $d = 50 \text{ km}$  ;  $T = 300 \text{ s}$

Para este modelo, Weaver et al. presentan el campo electromagnético en algunos puntos de la superficie. A partir de dichos valores, nosotros hemos calculado los valores de la  $\rho_o$  y  $\phi$  para poder ser comparados con los de nuestro algoritmo.

La malla utilizada para ambas polarizaciones está representada en la figura (2.7).

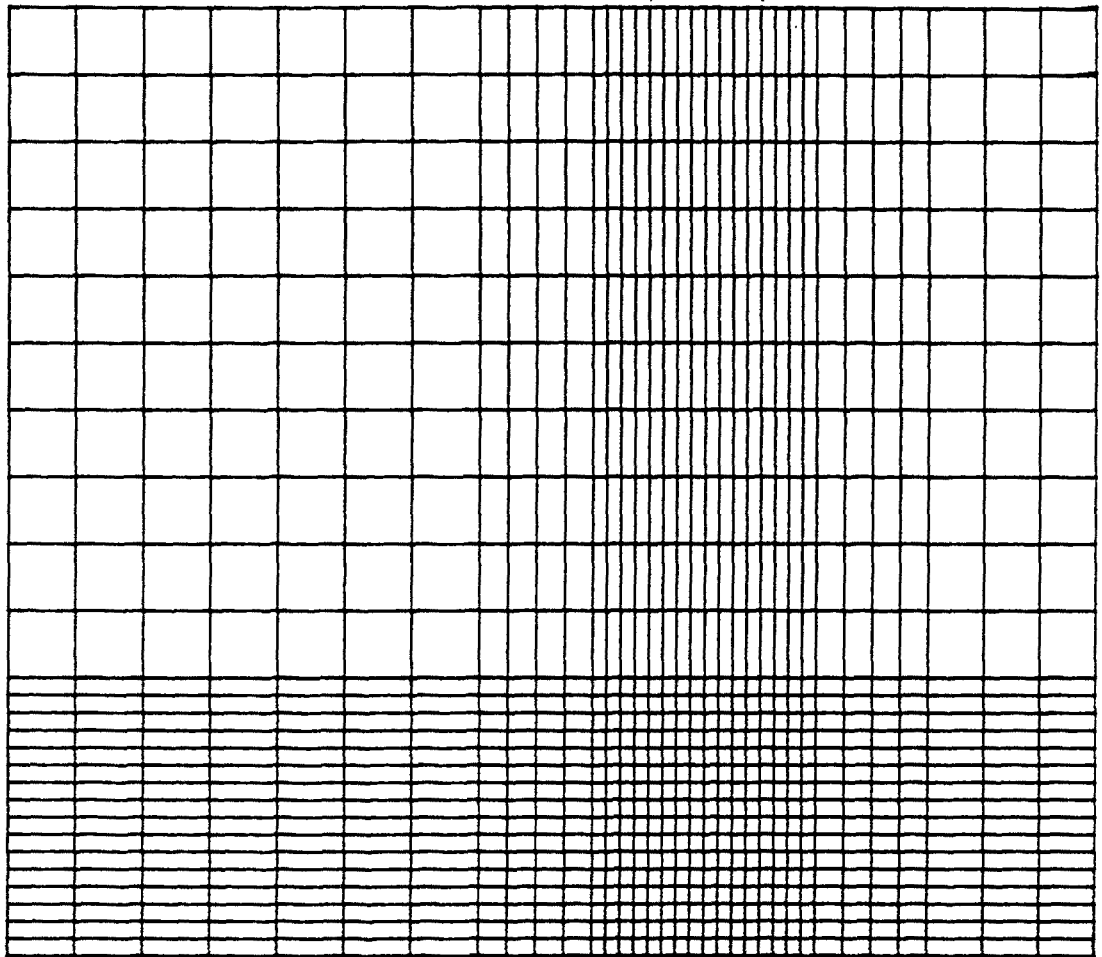


Figura 2.7: Malla utilizada para la comparación con el modelo de Weaver et al. (1985, 86)

Los resultados obtenidos se muestran en la figura (2.8) para la polarización H y en la figura (2.9) para la polarización E.

Para polarización H los resultados son muy buenos, siendo la discrepancia entre los calculados por el programa y los del modelo menor al 1.9%.



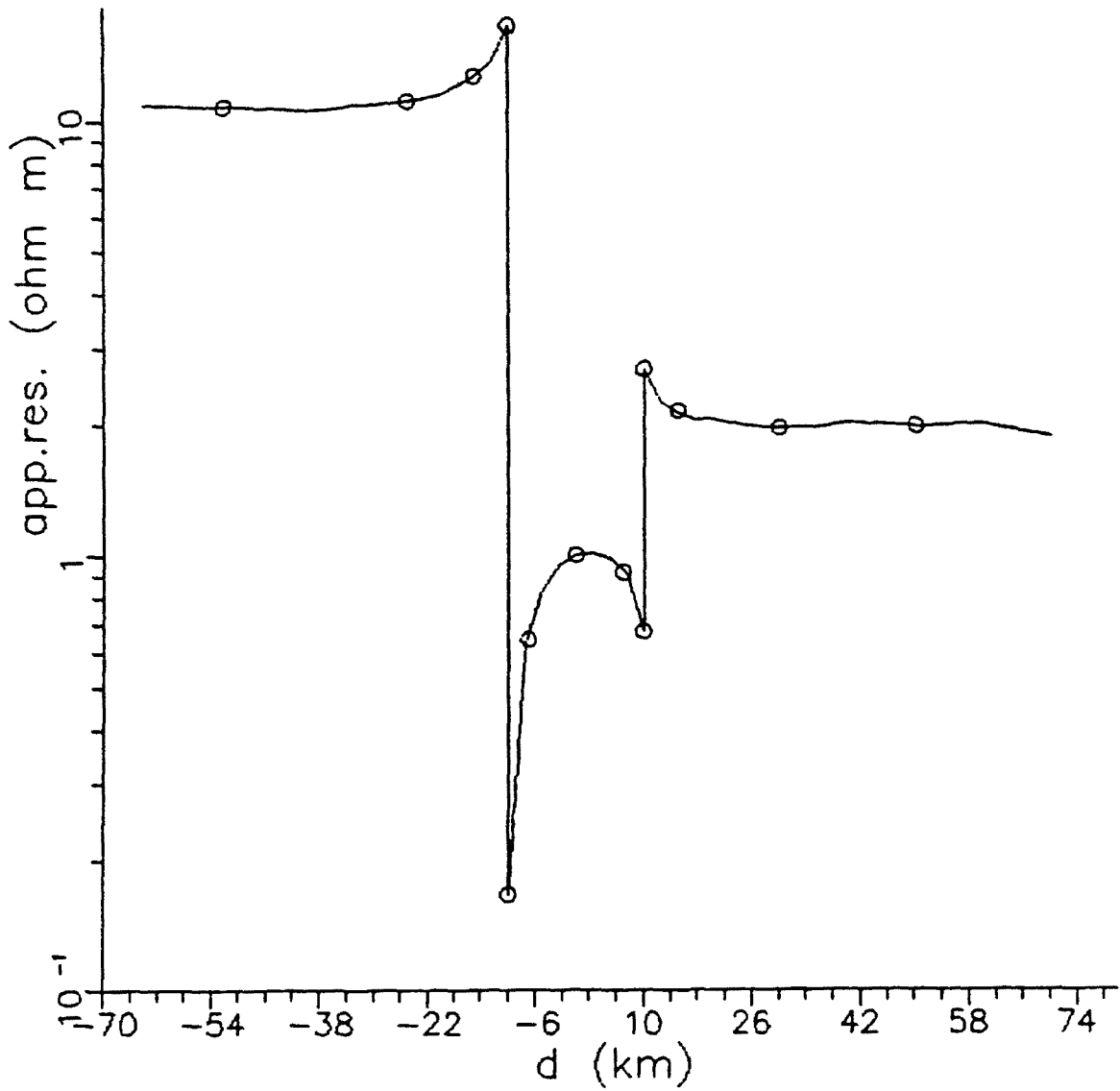
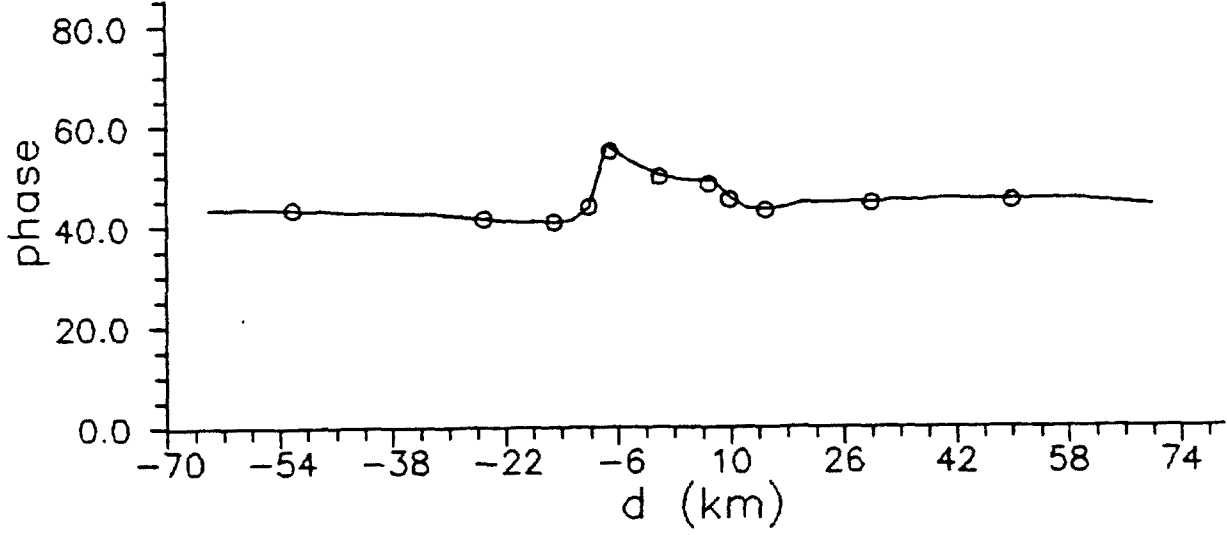


Figura 2.8: Comparación para polarización H entre los datos analíticos del modelo de control (o), y los obtenidos por nuestro algoritmo, en línea continua.

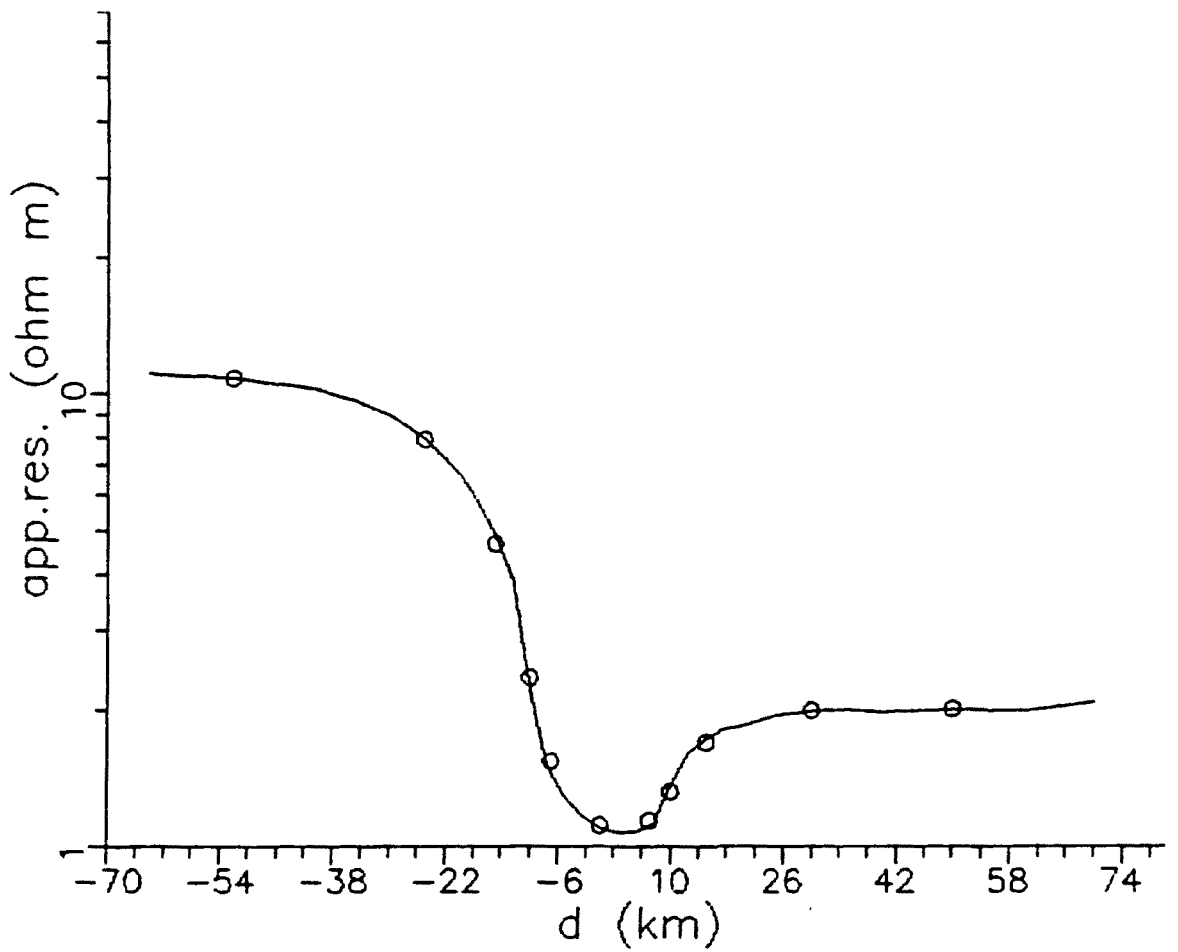
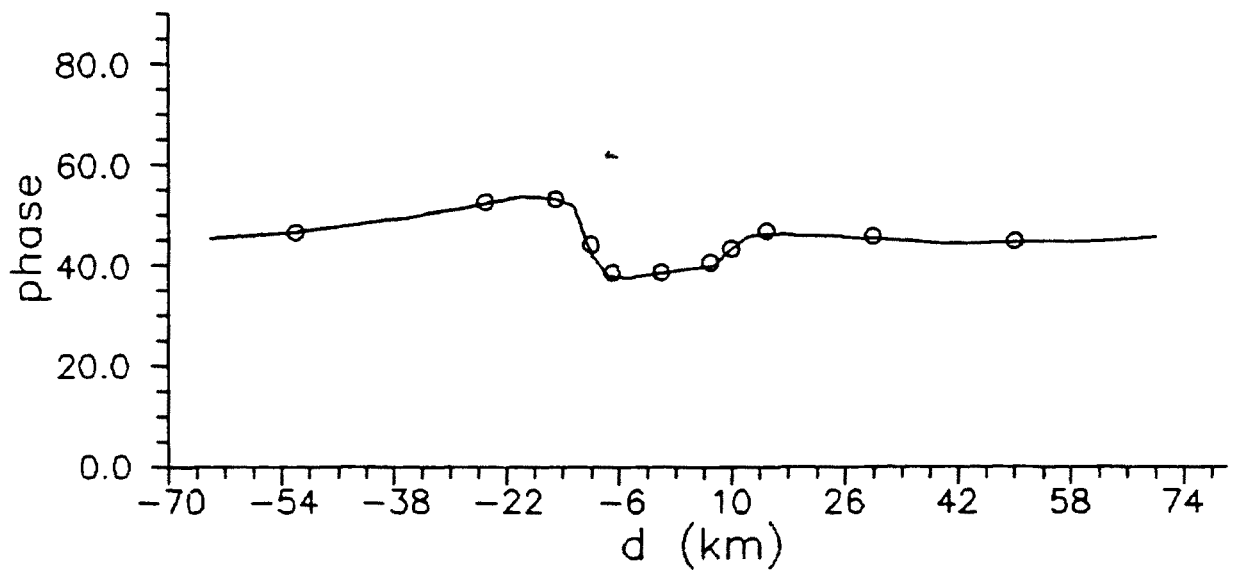


Figura 2.9: Comparación para polarización E entre los datos analíticos del modelo de control (o), y los obtenidos por nuestro algoritmo, en línea continua.

Para polarización E los resultados son igualmente buenos, pero presentan un mayor error en la proximidad de los contactos verticales, de hasta un 7%, siendo el error para los otros puntos equivalente al error en la polarización H.

## II.8. EFFECTOS TOPOGRAFICOS.

Habitualmente la superficie de la Tierra se considera un plano. Sin embargo, la existencia de accidentes topográficos provoca una distorsión en las observaciones magnetotélúricas. La importancia de estos efectos fue sugerido por Wescott y Hessler en 1962, pero hasta estos últimos años no se han estudiado en detalle (Wannamaker et al., 1986; Chouteau y Bouchard, 1988; Fischer, 1989).

La problemática de estos efectos viene dada porque no se tiene una idea exacta de la magnitud y del alcance de los mismos y, por lo tanto, no se conoce el grado de fiabilidad de la aproximación de la superficie terrestre por un plano.

Por este motivo hemos estudiado los efectos provocados por los accidentes topográficos más simples: cadena montañosa, valle y proximidad del mar, que a continuación pasamos a describir (fig. 2.10).

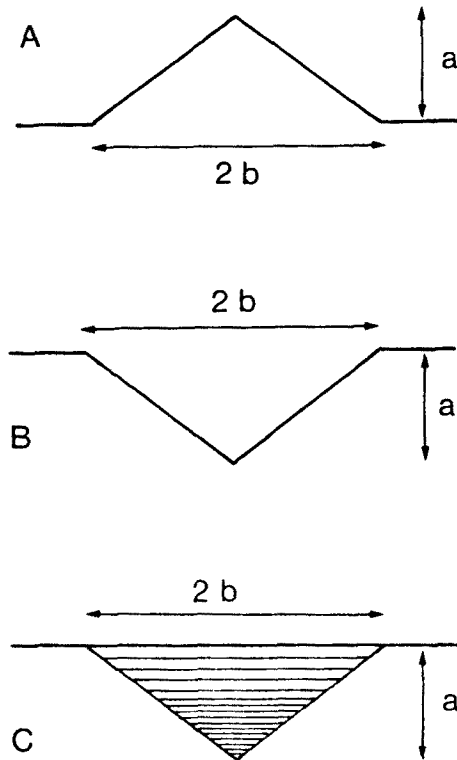


Figura 2.10: Modelos utilizados para el estudio de los efectos topográficos: (A) cadena montañosa, (B) valle y (C) proximidad del mar.

### II.8.1 Cadena montañosa.

Este tipo de accidente topográfico se ha modelizado como una estructura bidimensional de sección triangular isósceles. Los parámetros de la misma son su altura ( $a$ ) y anchura ( $2b$ ) (fig. 10a).

Por comodidad y para fijar la atención en los efectos topográficos

únicamente hemos considerado que la Tierra se comportara como un medio homogéneo de conductividad  $\sigma$ , por lo que, en ausencia de topografía, el perfil de  $\rho_a$  y  $\phi$  sería una recta de pendiente nula.

La modelización se ha realizado para ambas polarizaciones (E y H) y se ha estudiado para diferentes valores de los parámetros a y b, así como para diferentes periodos. Para que los resultados sean independientes de los valores particulares de dichos parámetros hemos realizado la siguiente reparametrización: La forma de la sección de la cadena estará representada por el cociente a/b, y el tamaño de la misma relativo al efecto electromagnético vendrá indicado por a/ $\delta$ .

En las figuras 2.11, 2.12, 2.13 y 2.14 representamos los valores de la  $\rho_a$  y  $\phi$  obtenidos a lo largo de la sección para diferentes valores de los cocientes a/b y a/ $\delta$ . A la vista de los mismos podemos indicar que los efectos son mucho más importantes para la polarización H que para la polarización E.

Una justificación de este comportamiento está en el hecho de que en polarización H habrá una componente de campo eléctrico normal a la superficie, lo cual provocará la aparición de densidades superficiales de cargas en la misma. Esta situación no ocurre en polarización E donde el campo eléctrico es siempre paralelo a la

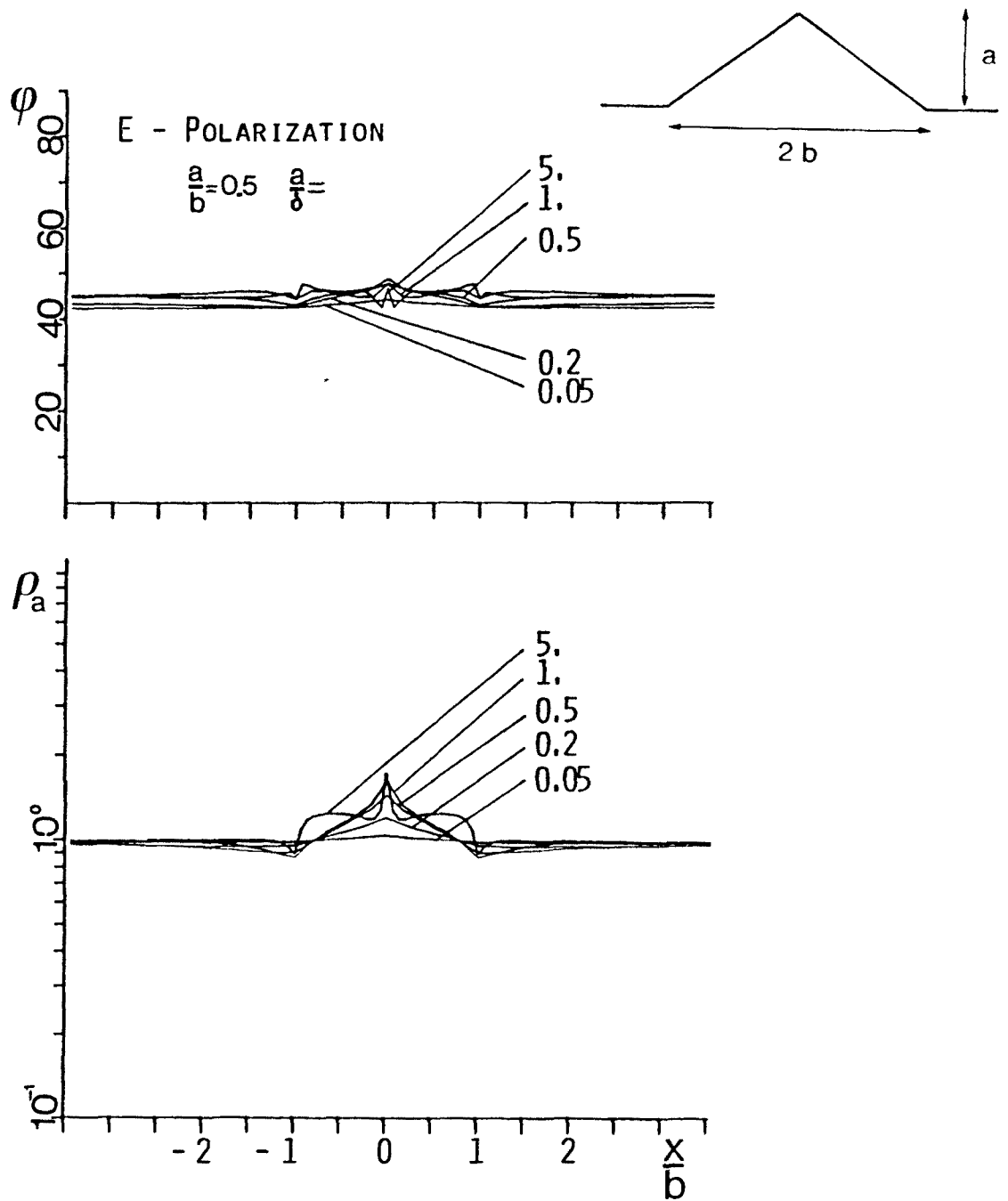


Figura 2.11: Polarización E. Comportamiento de las fases (parte superior) y resistividad aparente (parte inferior) en el caso de una cadena montañosa para diferentes valores del cociente  $a/\delta$  y manteniendo constante el cociente  $a/b$ .

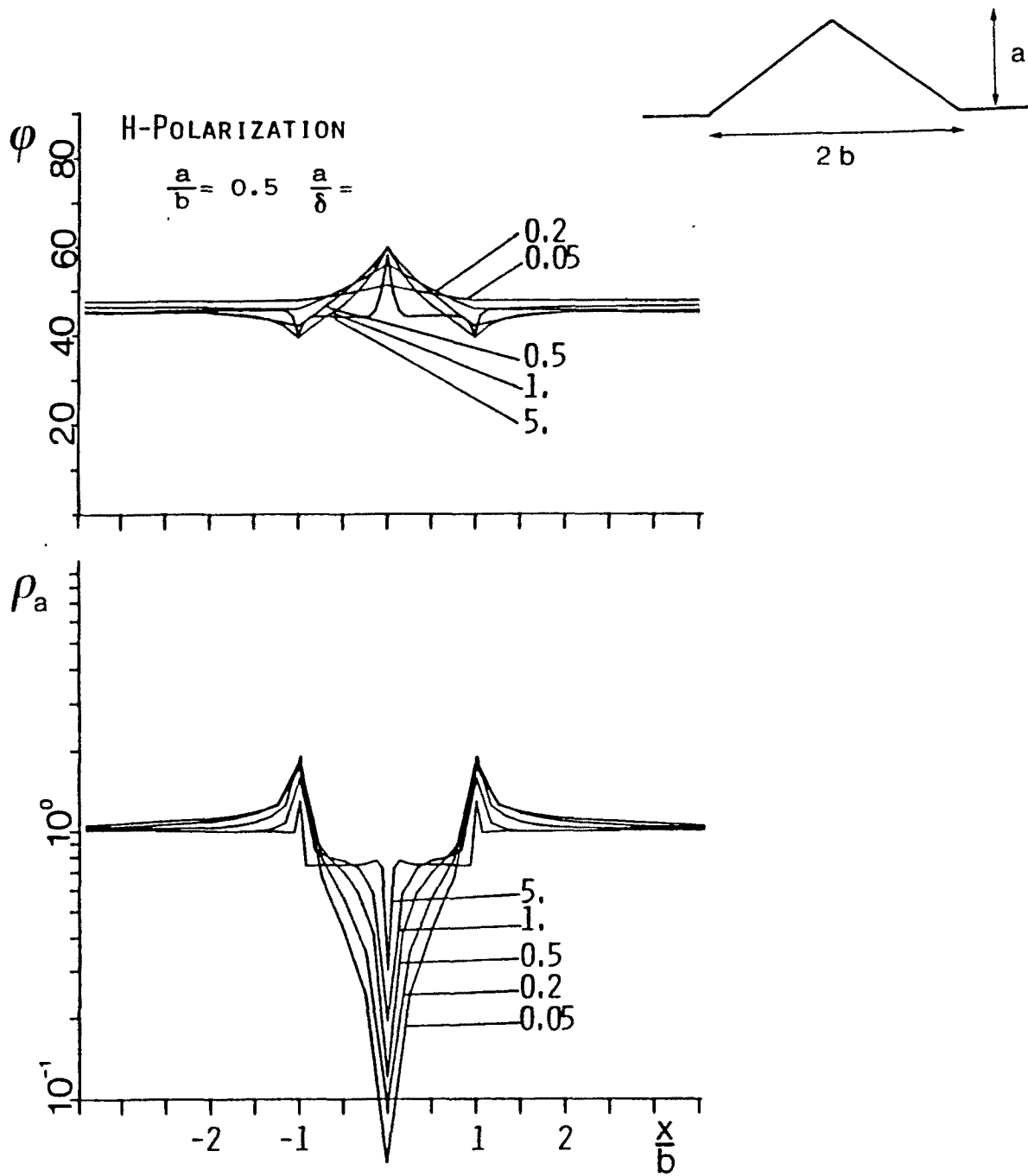


Figura 2.12: Polarización H. Comportamiento de las fases (parte superior) y resistividad aparente (parte inferior) en el caso de una cadena montañosa para diferentes valores del cociente  $a/\delta$  y manteniendo constante el cociente  $a/b$ .

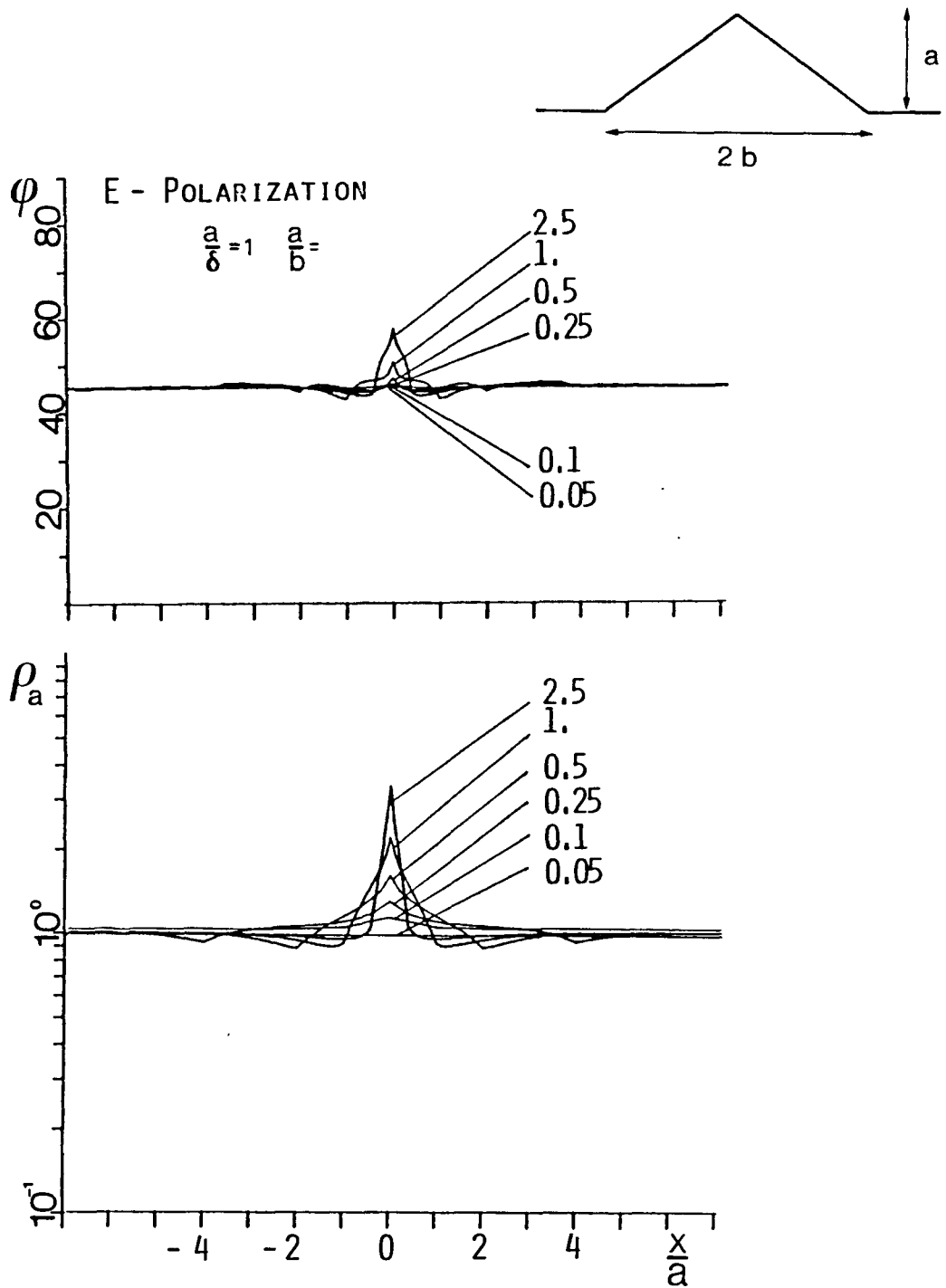


Figura 2.13: Polarización E. Comportamiento de las fases (parte superior) y resistividad aparente (parte inferior) en el caso de una cadena montañosa para diferentes valores del cociente  $a/b$  y manteniendo constante el cociente  $a/\delta$ .



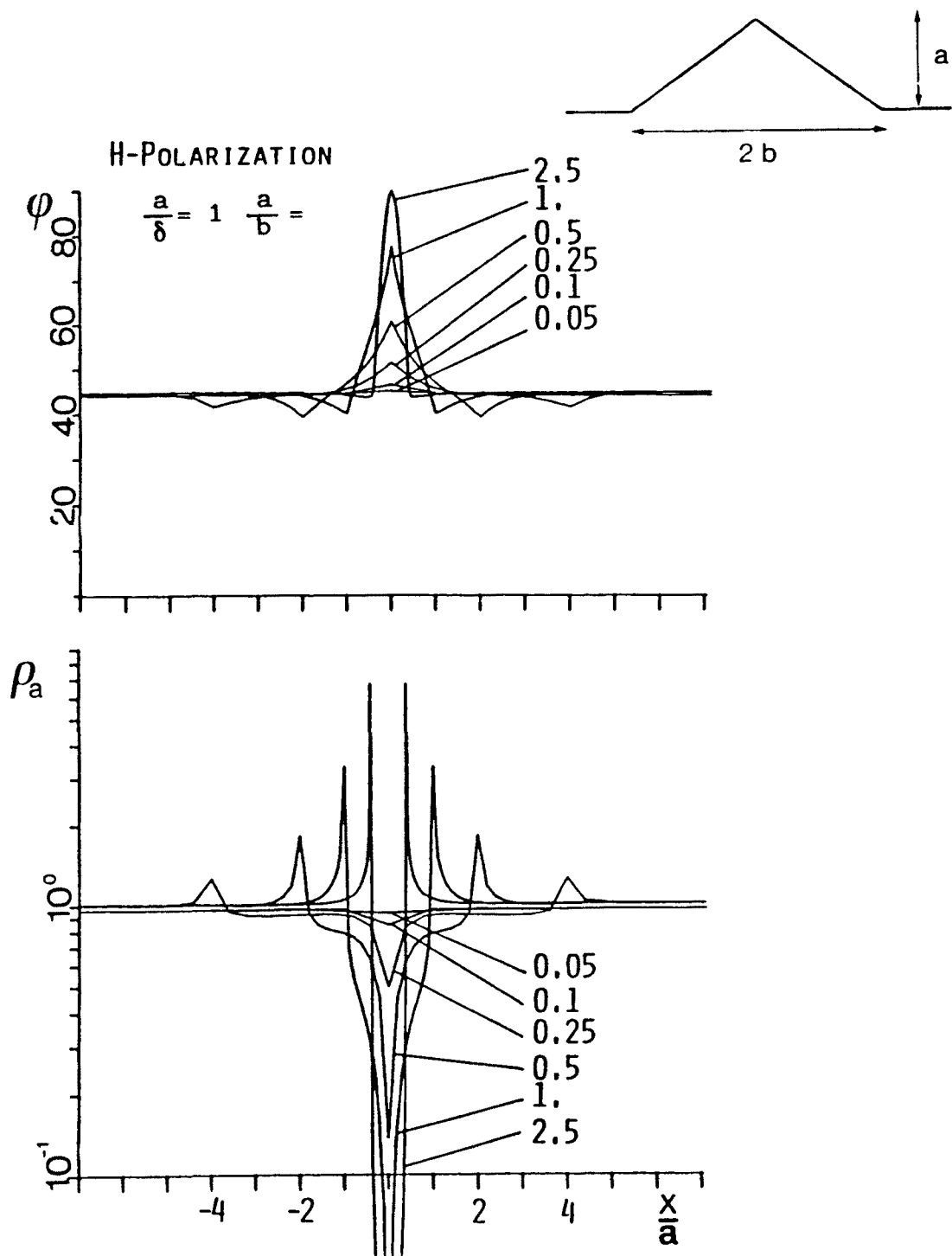


Figura 2.14: Polarización H. Comportamiento de las fases (parte superior) y resistividad aparente (parte inferior) en el caso de una cadena montañosa para diferentes valores del cociente  $a/b$  y manteniendo constante el cociente  $a/\delta$ .

superficie. Por lo tanto, esta mayor distorsión está ligada a efectos galvánicos.

Hemos podido constatar que sobre las laderas las distorsiones aumentan cuando aumenta el cociente  $a/b$  y cuando  $a/\delta$  disminuye, lo que equivale a decir que la sección de la montaña se haga más abrupta y aumente el periodo.

En las proximidades de la montaña el efecto decrece rápidamente al alejarnos de ella y, como criterio, podemos despreñar las distorsiones a una distancia de la base entre el semiancho y el ancho de la cadena.

#### II.8.2 Valle.

Hemos modelizado su sección como un triángulo isósceles con una profundidad  $a$  y una anchura  $2b$  (fig. 10b). La modelización se ha realizado para un medio homogéneo y los resultados para ambas polarizaciones se muestran en las figuras 2.15, 2.16, 2.17 y 2.18. En su representación hemos utilizado la misma parametrización como en el caso anterior de la cadena montañosa.

El comportamiento de las distorsiones es equivalente al descrito para la cadena montañosa. Dentro del valle la distorsión aumenta al

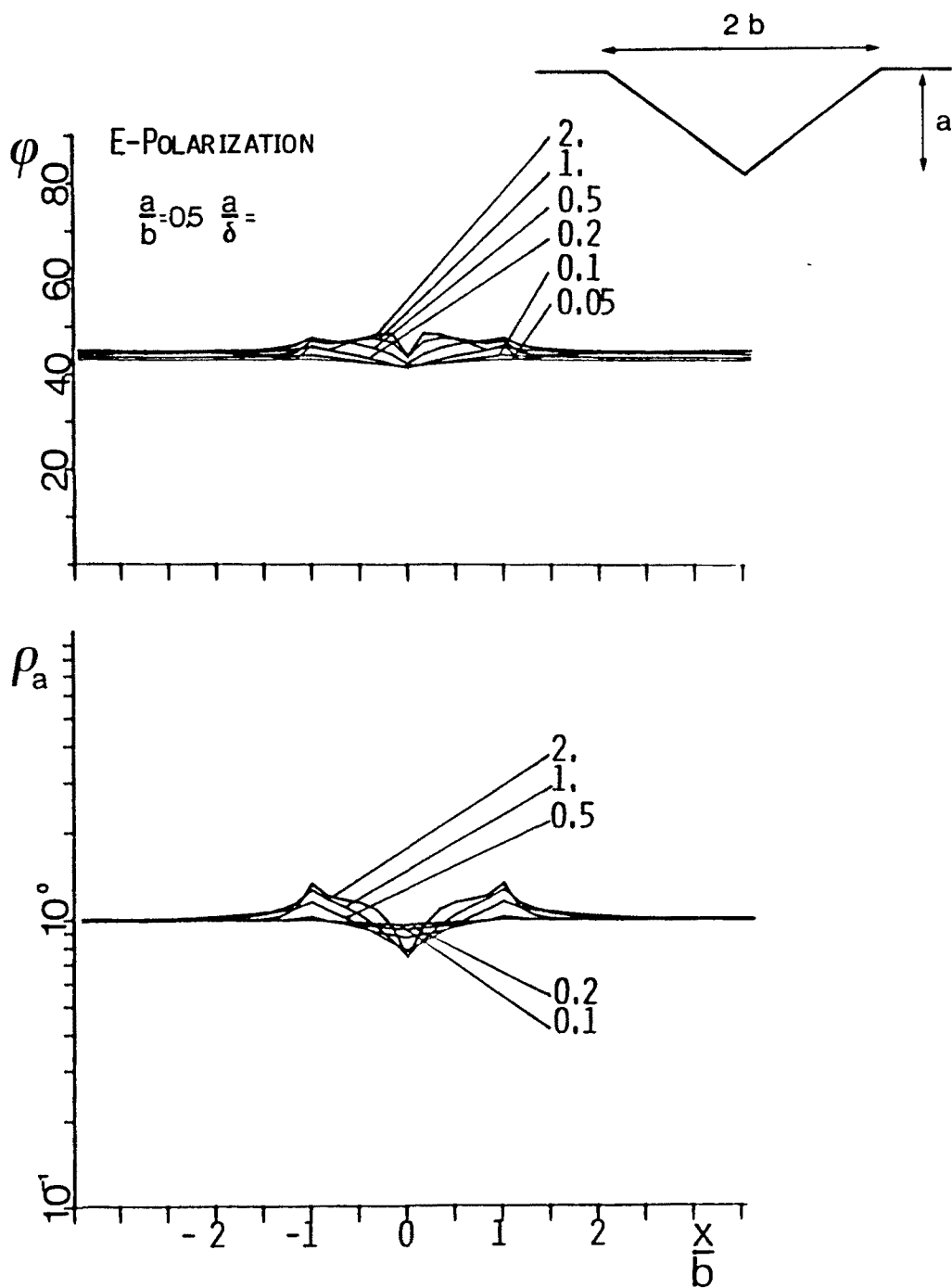


Figura 2.15: Polarización E. Comportamiento de las fases (parte superior) y resistividad aparente (parte inferior) en el caso de un valle para diferentes valores del cociente  $a/\delta$  y manteniendo constante el cociente  $a/b$ .

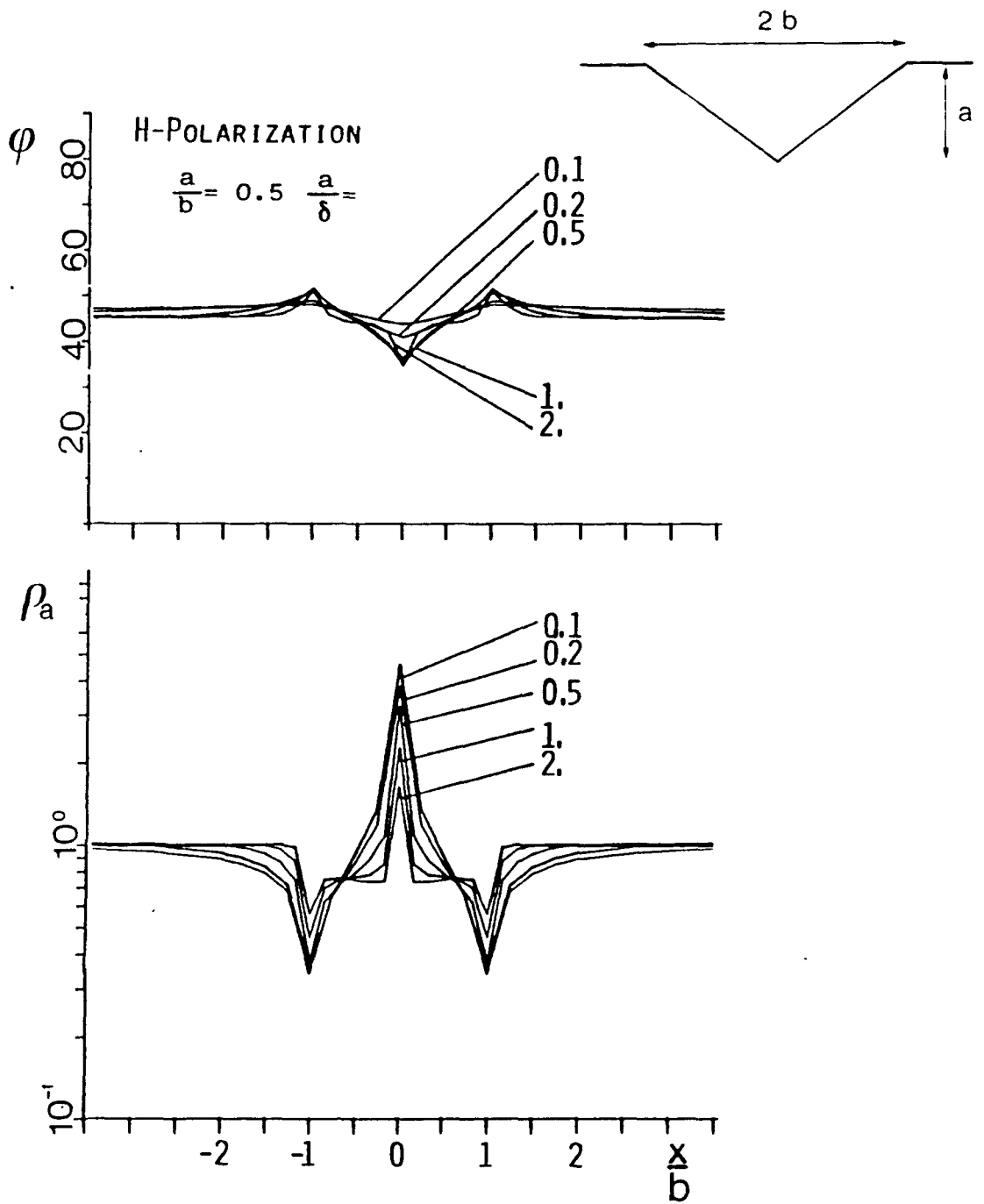


Figura 2.16: Polarización H. Comportamiento de las fases (parte superior) y resistividad aparente (parte inferior) en el caso de un valle para diferentes valores del cociente  $a/\delta$  y manteniendo constante el cociente  $a/b$ .

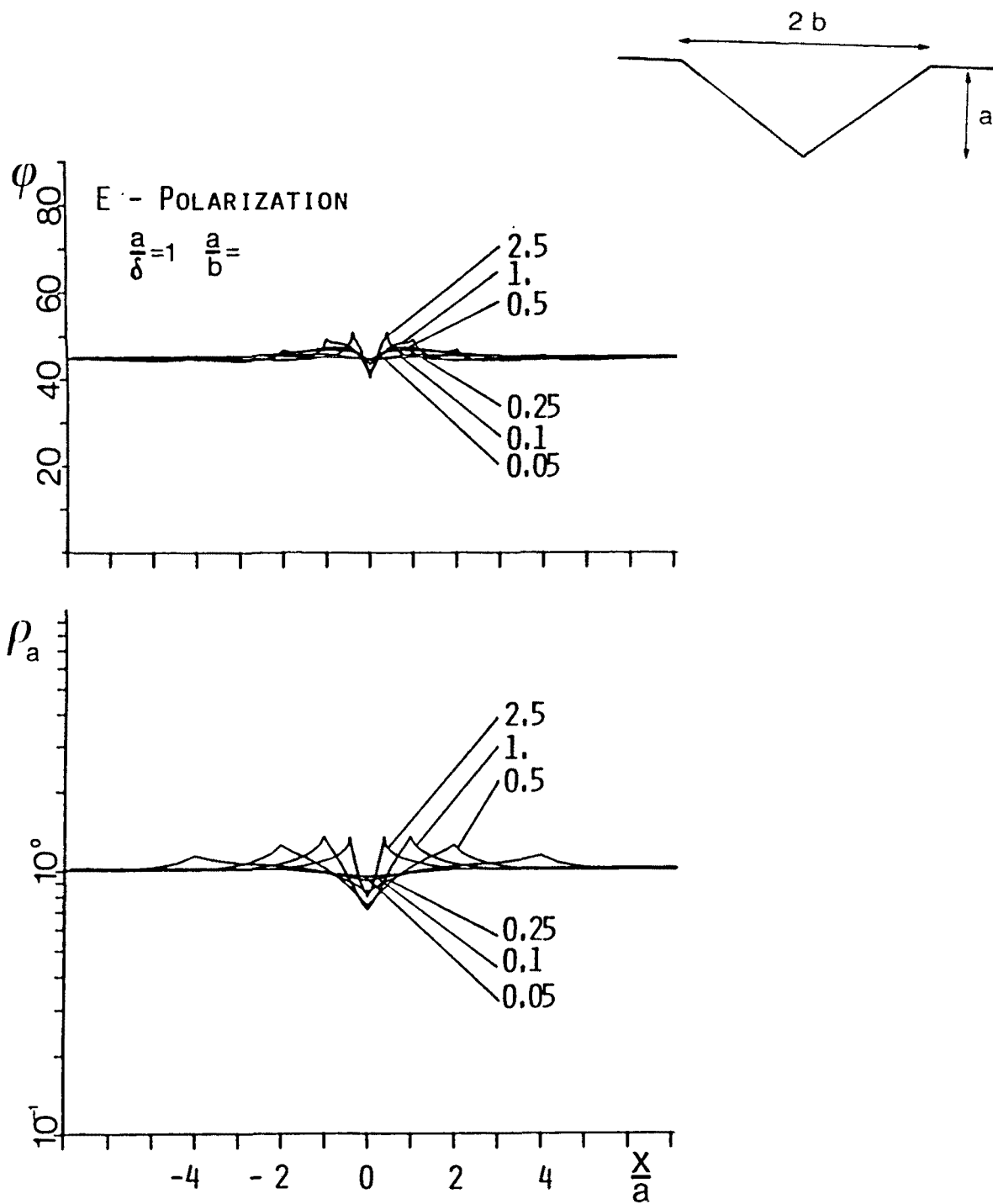


Figura 2.17: Polarización E. Comportamiento de las fases (parte superior) y resistividad aparente (parte inferior) en el caso de un valle para diferentes valores del cociente  $a/b$  y manteniendo constante el cociente  $a/\sigma$ .

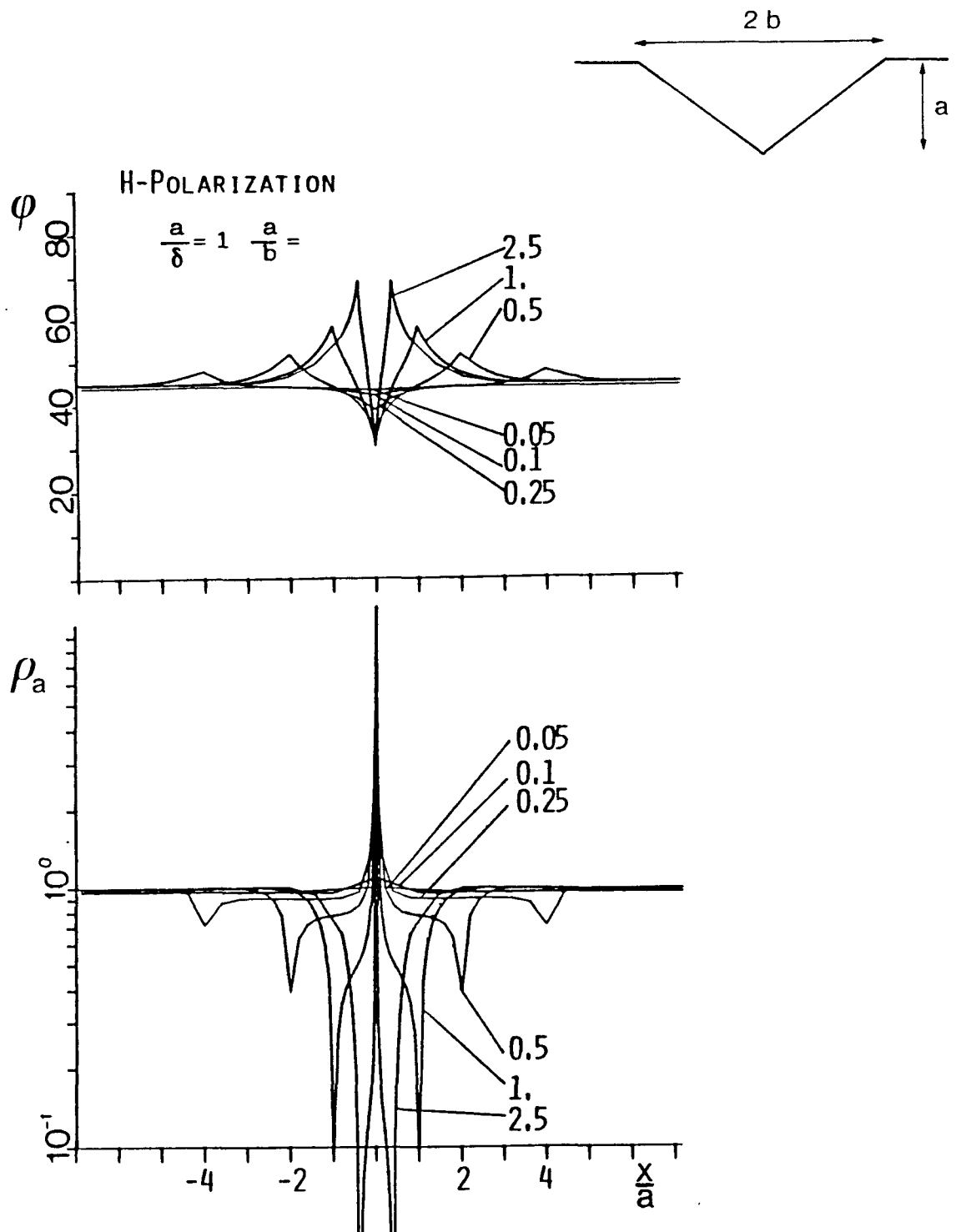


Figura 2.18: Polarización H. Comportamiento de las fases (parte superior) y resistividad aparente (parte inferior) en el caso de un valle para diferentes valores del cociente  $a/b$  y manteniendo constante el cociente  $a/\delta$ .

aumentar el cociente  $a/b$  y al disminuir el cociente  $a/\delta$ , siendo máxima en el centro del valle.

En sus proximidades la distorsión de las curvas decrece rápidamente, siendo el límite de influencia el semiancho del valle, parecido al caso de una montaña.

### II.8.3 Proximidad del mar.

Hay que resaltar que este caso es diferente a los anteriores ya que las perturbaciones están relacionadas con la presencia de un conductor, como es el mar. Ello nos sugiere que los efectos importantes serán más de origen inductivo que galvánico. Por este motivo hemos estudiado la polarización  $E$  únicamente.

Para el estudio de los efectos hemos elegido un modelo de un mar cerrado de profundidad  $a$  y anchura  $2b$  (fig. 10c). En este modelo se ha tomado un contraste de conductividades entre mar y tierra de  $10^4$ .

Los resultados se muestran en los perfiles de  $\rho_a$  y  $\phi$  de la figura 2.19. El comportamiento de las curvas indica que el alcance de la distorsión aumenta al aumentar el periodo. Las curvas muestran que hay un cambio de comportamiento para un valor de  $a/\delta$  comprendido entre 0.01 y 0.005 (o una penetración correspondiente a 2.5 y 5

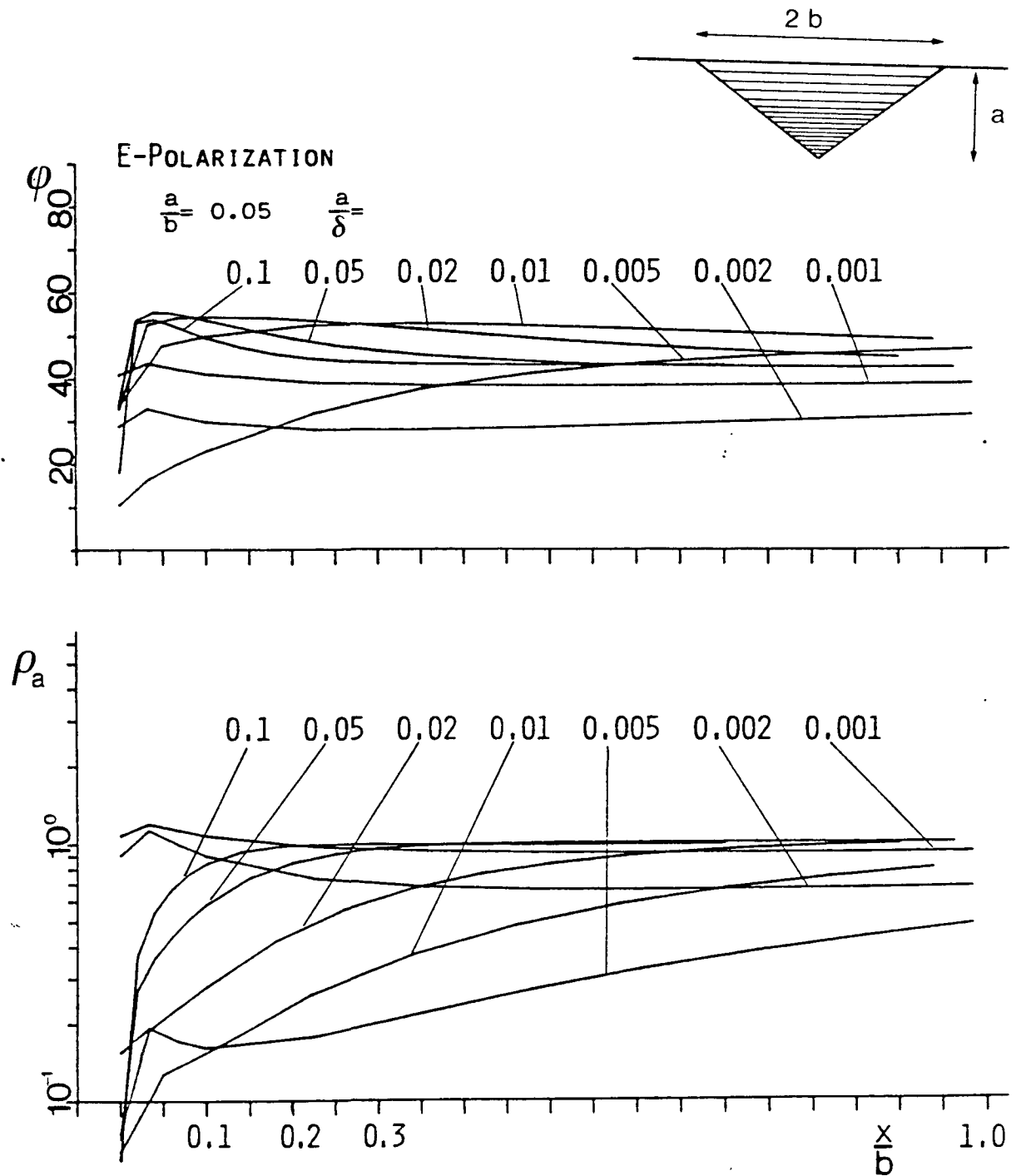


Figura 2.19: Comportamiento para polarización E de la resistividad y fase en las proximidades de la costa para diferentes valores del cociente  $a/\delta$  y manteniendo  $a/b$  constante.



veces el ancho del mar). Este cambio indica que para un punto del perfil la distorsión debida a la proximidad del mar aumenta cuando aumenta el periodo hasta un periodo de retorno a partir del cual la distorsión disminuye. Asociamos este cambio de comportamiento al hecho de que sea un mar cerrado y, lógicamente, por este motivo al aumentar el periodo disminuye el tamaño relativo del mar respecto a la perturbación electromagnética.

## II.9 REFERENCIAS.

Brewitt-Taylor, C.R. y Weaver, J.T. 1976. On the finite difference solution of two-dimensional induction problems. Geophys. J. R. astr. Soc., 47, 375-396.

Bromek, A. 1982. Modelling of electromagnetic induction for two-dimensional structures by the finite element method. Comparison of the results obtained using the finite element and finite difference methods for a model of the Carpathians. Acta Geophysica Polonica, 30, 153-165.

Cagniard, L. 1953. Principe de la méthode magnéto-tellurique, nouvelle méthode de prospection géophysique. Ann. Géophys., 9, 95-125.

Chouteau, M. y K. Bouchard. 1988. Two-dimensional terrain correction in magnetotelluric surveys. *Geophysics*, 53, 854-862.

Coggon, J.H.. 1971. Electromagnetic and electrical modeling by the finite element method. *Geophysics*, 36, 132-155.

D'Erceville, I. y Kunetz, G. 1962. The effect of a fault on the earth's natural electromagnetic field. *Geophysics*, 27, 651-665.

Dosso, H.W., Nienaber, W. y Hutton, V.R.S. 1980. An analogue model study of EM induction in the British Isles Region. *Phys. Earth Planet. Int.*, 22, 68-85.

Fischer, G. 1989. A strong topographic valley effect in AMT and VLF-R measurements. *Geophys. J.*, 96, 469-475.

Geyer, R. 1972. The effect of a dipping contact on the behavior of the electromagnetic field. *Geophysics*, 37, 337-350.

Hermance, J.F. 1982. Refined finite-difference simulations using local integral forms: Application to telluric fields in two dimensions. *Geophysics*, 47, 825-837.

Jones, F.W. y Pascoe, L.J. 1971. A general computer program to determine the perturbation of alternating electric currents in a two-dimensional model. Geophys. J. R. astr. Soc., 23, 3-30.

Kaikkonen, P. 1977. A finite element program package for electromagnetic modeling. J. Geophys., 43, 179-192

Kaikkonen, P. 1986. Numerical electromagnetic modeling including studies of characteristic dimensions: a review. Surveys in Geophysics, 8, 301-337.

Kisak, E. y Silvester, P. 1975. A finite element program package for magnetotelluric modelling. Computer Physics Communications, 10, 421-433.

Lee, K.H., Pridmore, D.F. y Morrison, H.F. 1981. A hybrid three-dimensional electromagnetic modeling scheme. Geophysics, 46, 796-805.

Marchouk, G. y Agoshkov, V. 1985. Introduction aux méthodes des éléments finis. Editions MIR, Moscú, 432 pp.

Pridmore, D., Hohmann, G.W., Ward, S.H. y Sill, W.R. 1981. An investigation of finite element modeling for electrical and electromagnetic data in three dimensions. *Geophysics*, 46, 1009-1024.

Ramaswamy, V., Jones, F.W., Dosso, H.W. y Nienarber, W. 1980. Comparison of numerical, analogue model and field-station vertical magnetic fields for the Vancouver Island Region. *Phys. Earth Planet. Int.*, 17, 295-299.

Rankin, D. 1962. The magnetotelluric effect of a dike. *Geophysics*, 27, 666-676.

Reddy, I.K. y Rankin, D. 1973. Magnetotelluric response of a two-dimensional sloping contact by the finite element method. *Pure and Appl. Geophys.*, 105, 847-857.

Rodi, W.L. 1976. A technique for improving the accuracy of finite element solutions for magnetotelluric data. *Geophys. J. R. astr. Soc.*, 44, 483-506.

Strang, G. y Fix, G. 1973. *An Analysis of the Finite Element Method*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 305 pp.

Silvester P. y Haslam, C.R.S. 1972. Magnetotelluric modeling by the finite element method. Geophys. Prospect., 20, 872-891.

Tarlowski, C.Z., Raiche, A.P. y Nabighian, M. 1984. The use of summary representation for electromagnetic modeling. Geophysics, 36, 38-52.

Wannamaker P.E, Stodt J.A. y Rijo L. 1986. Two-dimensional topographic response in magnetotellurics modeled using finite elements. Geophysics, 51, 2131-2144.

Wannamaker P.E, Stodt J.A. y Rijo L. 1987. A stable finite element solution for two-dimensional magnetotelluric modelling. Geophys. J. R. astr. Soc., 88, 277-296.

Weaver, J., LeQuang, B.V. y Fischer, G. 1985. A comparison of analytical and numerical results for a 2-D control model in electromagnetic induction- I. B-polarization calculations. Geophys. J. R. astr. Soc., 82, 263-277.

Weaver, J., LeQuang, B.V. y Fischer, G. 1986. A comparison of analytical and numerical results for a 2-D control model in electromagnetic induction- II. E-polarization calculations. Geophys. J. R. astr. Soc., 87, 917-948.

Wescott, E.M. y Hessler, V.P. 1962. The effect of topography and geology on telluric currents. J. Geophys. Res. 67, 4813-4823.

Zhdanov, M.S., Golubev, N.G., Spichak, V.V. y Varentsov, I.M. 1982. The construction of effective methods for electromagnetic modelling. Geophys. J. R. astr. Soc., 68, 589-607.

Zienkiewicz, O.C. 1981. El método de los elementos finitos. Ed. Reverté, Barcelona, 903 pp.

