Lògica i fonaments: 1850-1920

Un estudi comparatiu de les contribucions del
corrent algèbric i logicista a la lògica contemporània

Departament de Lògica, Història i Filosofia de la Ciència

Programa: Lògica Matemàtica. Bienni: 1987-89

Per optar al títol de doctor en Filosofia

Lògica i fonaments: 1850-1920

Un estudi comparatiu de les contribucions del corrent algèbric i logicista a la lògica contemporània

Tesi doctoral presentada per

Joan Roselló Moya

Dirigida per

Josep Pla i Carrera

PRIMERA PART

El desenvolupament del corrent algèbric

CAPÍTOL I

Boole i la matematització de la lògica

1. El context històric

Per entendre la naturalesa i l'abast de l'obra de G. Boole (1815-1864), cal tenir en compte, primer de tot, el context intel·lectual en el qual sorgeix donat que en ell podem trobar-hi les principals influències rebudes per aquest autor. Boole era matemàtic de formació i com a tal cal situar-lo en el sí de l'escola analítica anglesa, a la qual també hi pertanyen matemàtics tan il·lustres com G. Peacock (1791-1858), W. R. Hamilton (1805-1865) o D. Gregory (1813-1844). Aquesta escola veié clarament la necessitat de distingir entre l'*àlgebra aritmètica* o anàlisi i l'*àlgebra simbòlica*, que entenien com un càlcul abstracte o formal, és a dir, com un càlcul les operacions i processos de raonament del qual no depenien de la interpretació dels símbols, sinó que eren universals en la seva aplicació i, per tant, com un càlcul susceptible de diverses interpretacions.[1] Així, per exemple, G. Peacock escrivia a *A Treatise on Algebra*, alguns anys abans que Boole publiqués *The Mathematical Analysis of Logic* (*1847*) que:

> L'àlgebra aritmètica és la ciència que resulta de l'ús de símbols i signes per denotar nombres i les operacions a les quals poden estar subjectes; aquests nombres o els seus representants, i les operacions sobre ells, són utilitzats en el mateix sentit i amb les mateixes limitacions que en l'aritmètica comuna. [En l'àlgebra simbòlica] els símbols que s'empren són totalment generals en la seva representació, i totalment il·limitats en els seus valors; i les operacions sobre ells, sigui quina sigui la forma en què hom les denoti, o sigui quin sigui el nom que hom els doni, són universals en les seves aplicacions.[2]

[1] Cal matisar que el naixement de l'àlgebra simbòlica no cal cercar-lo exclusivament a Anglaterra car, per exemple, J.D. Gergonne (1771-1859) en el seu *Essai de dialectique rationelle* ja havia anticipat la perspectiva anterior cap el 1816-1817 i l'*Ausdehnungslehre* (1847) de H. G. Grassman (1808-1877) fou potser l'obra més representativa i influent del moment i fins a final de segle; però no hi ha dubte que foren els matemàtics anglesos contemporanis a Boole els que més influïren en la seva obra.

[2] Citat a *Prior 1976*, 174.

Aquesta concepció de l'àlgebra com la ciència que estudia els símbols en general i les seves lleis de combinació donarà lloc al naixement en el si de la l'escola analítica anglesa de les àlgebres no numèriques -això és, àlgebres les lleis de les quals no coincideixen amb les de l'àlgebra numèrica o aritmètica- com, per exemple, les àlgebres dels quaternions de Hamilton o l'àlgebra de la lògica de Boole. Amb tot, en aquells moments l'àlgebra simbòlica estava donant els seus primers passos i depenia en bona mesura de les lleis i processos de l'àlgebra aritmètica. Això assegurava la validesa dels seus resultats, però fou també causa de confusions i retardà els seu desenvolupament com a ciència autònoma.[1] El mateix Boole dubtava respecte a la possibilitat de donar a les formes existents de l'anàlisi altres interpretacions consistents a banda d'aquella per a la qual havien estat creades, però considerava que, encara que no fos així, era perfectament plausible un desenvolupament autònom de l'àlgebra simbòlica i, en el seu si i al costat de les altres formes d'anàlisi existents, de l'*àlgebra de la lògica*. El paràgraf següent de *Mathematical Analysis* reflecteix perfectament la importància de la perspectiva anterior en la gènesi i desenvolupament de l'àlgebra lògica de Boole:

> Aquells que estan familiaritzats amb l'estat present de la teoria de l'Àlgebra Simbòlica són conscients que la validesa dels processos d'anàlisi no depenen de la interpretació dels símbols que s'empren, sinó només de les seves lleis de combinació. Tot sistema d'interpretació que no afecta la veritat de les relacions suposades és igualment admissible i és així que el mateix procés podria, sota un esquema d'interpretació, representar la solució d'una qüestió sobre les propietats dels nombres, sota una altra, la d'un problema geomètric, i sota una tercera, la d'un problema de dinàmica o òptica. Aquest principi és, de fet, d'una importància fonamental; i podria afirmar-se amb seguretat que els avenços recents de l'anàlisi pura han estat afavorits en bona mesura per la influència que ha exercit dirigint el corrent de recerca.
>
> Però el ple reconeixement de les conseqüències d'aquesta important doctrina ha estat, d'alguna manera, retardat per circumstàncies accidentals. S'ha esdevingut en tota forma coneguda d'anàlisi que els elements a determinar han estat concebuts com a mesurables en comparació amb algun estàndard fix. La idea predominant ha estat la de magnitud, o més estrictament, de raó numèrica. L'expressió de la magnitud o de

[1] Així, Peacock assenyala a *A Treatise on Algebra* que "L'àlgebra simbòlica adopta les regles de l'àlgebra aritmètica però suprimeix al mateix temps les seves restriccions [...] És precisament aquesta adopció de les regles de les operacions de l'àlgebra aritmètica com a regles per executar les operacions, que tenen el mateix nom en l'àlgebra simbòlica, allò que assegura la identitat dels resultats de les dues ciències en la mesura en què existeixen en comú." Citat a *Prior 1976*, 174.

> les operacions sobre la magnitud, ha estat expressament l'objecte per al qual els símbols de l'Anàlisi han estat inventats i les seves lleis han estat investigades. Així, les abstraccions de l'Anàlisi moderna, no menys que els diagrames ostensius de la Geometria antiga, han reforçat la idea segons la qual les Matemàtiques són essencialment, així com també efectivament, la Ciència de la Magnitud.
>
> La consideració del punt de vista abans enunciat, en la mesura que incorpora el vertader principi de l'Àlgebra de Símbols, hauria de dur-nos, tanmateix, a inferir que aquesta conclusió no és de cap manera necessària. Si es mostra que tota interpretació existent suposa la idea de magnitud, només per inducció podrem afirmar llavors que cap altra interpretació és possible. Però podríem dubtar si la nostra experiència és suficient per legitimar una tal inducció. La història de l'Anàlisi pura és, podria dir-se, massa recent per permetre'ns posar límits a l'abast de les seves aplicacions. Tot i que atorguéssim a la inferència un alt grau de probabilitat, podríem encara, i amb raó, mantenir la suficiència de la definició a la qual el principi abans enunciat ens duria. Podríem justament considerar-lo com el tret definitiu d'un vertader càlcul, és a dir, un mètode que es basa en la utilització de Símbols, les lleis de combinació dels quals són conegudes i generals, i els resultats de les quals admeten una interpretació consistent. Que a les formes existents d'anàlisi se'ls hagi assignat una interpretació quantitativa, és el resultat de la circumstància per la qual aquestes formes foren determinades, i no cal erigir-la en una condició general de l'Anàlisi. És sobre el fonament d'aquest principi general, que em proposo establir el Càlcul de la Lògica, i que reclamo per a ell un lloc entre les formes reconegudes de l'Anàlisi Matemàtica, malgrat que respecte els seus objectius i instruments hagi de romandre, de moment, sola.[1]

Aquest principi justifica, en efecte, la possibilitat de desenvolupar una àlgebra aplicable a l'estudi de les operacions de la ment, les lleis formals de la qual reflecteixin les lleis fonamentals a les quals estan subjectes aquestes operacions, això és, una àlgebra o càlcul de la lògica en el sentit que Boole entén aquest terme no tan sols a *Mathematical Analysis*, sinó també a *An investigation of the Laws of Thought* (*1854*). Ara bé, el que justifica el desenvolupament d'aquesta àlgebra al costat de les altres formes existents de l'anàlisi és el fet que "no només hi ha una forta analogia entre les operacions de la ment en general i les operacions de la ciència particular de l'àlgebra, sinó que hi ha en bona mesura una coincidència exacta entre les lleis a través de les quals les dues classes d'operacions són

---

1 *Boole 1916*, 49-50.

manipulades".[1] Naturalment, aquesta analogia només podrà ser establerta *a posteriori*, un cop determinades les lleis a les quals estan subjectes els signes a través dels quals representem les operacions de la ment humana, de manera que l'àlgebra de la lògica s'haurà de desenvolupar inicialment de forma autònoma "amb l'ajut de símbols amb una interpretació definida i amb lleis fonamentades únicament en aquesta interpretació".[2] Però, un cop determinada la coincidència formal de les lleis de l'àlgebra de la lògica amb les de l'àlgebra comuna, hom podrà importar a l'àlgebra lògica tots els processos de raonament emprats habitualment en l'àlgebra comuna, això és, bastir un "mètode general en lògica" a partir del mètode propi de l'àlgebra aritmètica. Així, per exemple, a *Mathematical Analysis*, Boole escriu que entre les propietats formals que satisfan les operacions lògiques n'hi algunes que també són satisfetes per les operacions aritmètiques, com és el cas de la *distributivitat* del producte respecte de la suma o la *commutativitat*, la qual cosa justifica l'adopció dels processos de raonament de l'àlgebra comuna al seu sistema, i de l'altra, la que és la propietat específica de la seva àlgebra lògica, a saber, la llei de l'*índex*, que és la que permet que aquella pugui ser interpretada com un vertader Càlcul de la Lògica:

> Les lleis que hem establert sota les formes simbòliques
>
> $$x(u+v) = xu + xv \text{ ....(1)}$$
> $$xy = yx \text{ ....(2)}$$
> $$x^n = x \text{ ....(3)}$$
>
> són una base suficient per a un Càlcul. A partir de la primera d'aquestes resulta que els símbols electius són *distributius*, de la segona que són *commutatius*; propietats que posseeixen en comú amb els símbols de la *quantitat* i en virtut de les quals, tots els processos directes de l'àlgebra comuna són aplicables al sistema present. L'únic i suficient axioma involucrat en aquesta aplicació és que les operacions equivalents dutes a terme sobre subjectes equivalents produeixen resultats equivalents. La tercera llei (3) l'anomenarem llei de l'índex. És peculiar als símbol electius, i serà de gran importància en permetre'ns reduir els nostres resultats a formes adequades per a la interpretació.[3]

---

1 *Boole 1854*, 6.
2 *Ibid.*, 6.
3 *Boole 1916*, 62-63.

Tal com mostra el text anterior, la coincidència entre les lleis formal de l'àlgebra lògica i les de l'àlgebra comuna no és total, la qual cosa planteja naturalment el problema de fins quin punt està justificada l'aplicació a la primera dels mètodes de la segona. En canvi, tal com veurem, Boole substituirà a *Laws of Thought* la *llei de l'índex* per la *llei de dualitat* $x^2 = x$, amb la qual cosa hi haurà una coincidència formal plena entre les lleis de l'àlgebra de la lògica i les de la subàlgebra $\{0, 1\}$ de l'àlgebra numèrica. Això permetrà a Boole construir *analògicament* la primera a partir de la segona i importar al seu sistema lògic tots els processos de raonament emprats habitualment en l'àlgebra comuna. En qualsevol cas, això farà que moltes operacions i expressions sorgides en emprar aquests processos algèbrics no puguin ser interpretades lògicament. Doncs bé, tal com veurem més endavant, aquest problemes seran resolts només de forma parcial a *Laws of Thought* i constituiran la preocupació central dels articles sobre lògica escrits per Boole amb posterioritat a aquesta obra: "Logic and Reasoning" i "On the Mathematical Theory of Logic", recollits a *George Boole's Collected Logical Works* (*Boole 1916*).

Fins ara ens hem fixat en la influència que tingué en la gènesi de l'àlgebra de la lògica de Boole el desenvolupament de l'àlgebra abstracta en el sí de l'escola analítica anglesa. Però en l'origen de l'obra de Boole també hi jugaren un paper decisiu alguns descobriments recents en el camp de la lògica. Ens referim a la *quantificació del predicat* de les proposicions categòriques de la lògica tradicional i a la introducció dels *termes negatius* i la noció d'*univers del discurs*. La quantificació del predicat suposà, en primer lloc, un canvi radical de perspectiva pel que fa a l'anàlisi lògica de les proposicions, donat que dugué, en la pràctica, a la substitució del punt de vista intensional, que havia dominat la lògica occidental d'ençà Aristòtil, pel punt de vista extensional. Com es ben sabut, Aristòtil considerà quatre tipus diferents d'enunciats categòrics:

Tot *A* és *B* o *Universals Afirmatius*
Cap *A* és *B* o *Universals Negatius*
Algun *A* és *B* o *Particulars Afirmatius*
Algun *A* no és *B* o *Particulars Negatius*,

que posteriorment es designarien respectivament amb les lletres A, E, I, O. Aristòtil no considerà, doncs, la possibilitat de quantificar el predicat, identificant la quantitat de la proposició amb la del subjecte. A més, Aristòtil entengué els enunciats anteriors fonamentalment des d'un punt de vista intensional, és a dir, considerant el predicat com una intensió o atribut del subjecte al qual pertany. Així, per exemple, a *De Interpretatione* les formes més habituals de la universal afirmativa són "*B* és predicat de tot *A*" o "*B* pertany a tot *A*". Aquesta perspectiva dominaria la lògica occidental, de manera que fins i tot Leibniz, a qui corresponen els intents més seriosos per desenvolupar un càlcul lògic fins arribar a Boole, no es va escapar mai, en aquest sentit, de l'influx d'Aristòtil. El trencament amb els punts de vista abans exposat deu molt al filòsof William Hamilton (1788-1856). Tal com ha escrit A. N. Prior: "el més gran servei de Hamilton fou insistir, seguint a Kant, en la naturalesa formal de la lògica i trencar amb la tradició que dominava a Europa en mostrar les seves formes com a relacions d'extensió entre classes".[1] És un fet prou conegut que Hamilton es considerava a si mateix com l'introductor de la quantificació del predicat i que mantingué una llarga disputa amb A. De Morgan (1806-1871) sobre la paternitat d'aquest fet. Però, pel que sembla, ni a ell ni a De Morgan se'ls pot atribuir aquest mèrit, donat que aquesta era coneguda ja des de Leibniz i F. Bentham, en la seva obra *Outline of a New System of Logic*, publicada l'any 1827, ja havia dividit les proposicions categòriques d'acord amb les diferents possibilitats de quantificació -existencial i universal- del subjecte i el predicat, obtenint així un llistat anàleg al que després feria famós Hamilton.[2] En qualsevol cas, la insistència de Hamilton i dels seus deixebles en la necessitat de quantificar el predicat duria en la pràctica a l'adopció del punt de vista extensional, que d'ençà aleshores seria ja dominant a Anglaterra. En segon lloc, mitjançant la quantificació del predicat s'igualava l'extensió del predicat a la del subjecte, la qual cosa permetria l'escriptura equacional de les proposicions categòriques quan es disposés del llenguatge simbòlic adequat i, en definitiva, el desenvolupament d'una *lògica* de tipus *equacional*. Això, en el cas de les proposicions afirmatives, només plantejava el problema de trobar una expressió simbòlica adient pels termes quantificats existencialment. Però en el cas de les proposicions negatives era necessària a més la introducció del termes negatius. Això topava frontalment amb l'autoritat d'Aristòtil per a qui els termes negatius com "no mortal" o "no savi" eren indeterminats, la qual cosa impossibilitava una expressió simbòlica correcta i la seva quantificació. El primer a considerar els termes negatius com a determinats i donar-los una forma simbòlica fou De Morgan. Això el portà naturalment, a més, a introduir la noció d'*univers* o *univers del discurs*, això és, la classe formada per la unió de la classe

[1] *Prior 1976*, 131.
[2] *Cf. Lewis 1918*, 36.

representada per un terme qualsevol *X*, *Y*, *Z*, … i la classe representada pel seu terme contrari o negatiu corresponent *x*, *y*, *z*, … . Segons De Morgan, en efecte:

> En no aturar-se sobre aquest poder de constituir això que nosaltres podem anomenar pròpiament (inventant un nou terme tècnic) l'*univers* d'una proposició o un nom […] aquells que escriuen sobre la lògica es priven d'un mitjà de clarificació molt útil. I sobretot, donen al *contrari* un caràcter negatiu indefinit, com feia Aristòtil quan deia que no-home no era pas el nom d'alguna cosa. Anomenem "home" l'univers en qüestió. Llavors, *Anglès* i *Estranger* son simples contraris; estranger no té altre sentit que definir no-Anglès. Però no podem dir que un dels dos termes sigui positiu o negatiu sinó relativament. Respecte a l'exigència del dret de ser considerat com un presoner de guerra, per exemple, estranger és el terme positiu, Anglès el terme negatiu [...] Al llarg d'aquest article, em serviré de les lletres minúscules *x*,*y*,*z*, etc, pels noms contraris a aquells representats per les majúscules *X*, *Y*, *Z*, etc. Així "Tota cosa en l'univers és o bé *X*, o bé *x*", "Algun *X* no és *x*", etc, són proposicions idèntiques.[1]

La introducció dels termes *contraris o negatius* portà De Morgan a ampliar el nombre de proposicions categòriques de 4 a 8 -donat que són 8 les formes possibles de relació entre dos termes si considerem també els seus termes negatius o contraris- i a expressar-les totes elles sota una mateixa forma lògica, obtenint així la llista següent:

(1) Tots els *X* són *Y*
(2) Tots els *x* són *Y*
(3) Tots els *X* són *y*
(4) Tots els *x* són *y*
(5) Alguns *X* són *Y*
(6) Alguns *x* són *Y*
(7) Alguns *X* són *y*
(8) Alguns *x* són *y*,

on (1), (3), (5) i (7) són A, E, I, O de la tradició.[2] La tasca reservada a Boole consistirà llavors, tal com veurem en les dues seccions següents, en la introducció d'un llenguatge

1 *Rivenc i Rouilhan 1992*, 34-35.
2 *Cf. Prior 1976*, 134 i *Boole 1854*, 202.

simbòlic que permeti expressar equacionalment les proposicions anteriors, de manera que puguin ser-li aplicats els processos de transformació i raonament de l'àlgebra simbòlica.

2. El llenguatge de la lògica: Els signes i les seves lleis

Boole escriu a les primeres línies de *Laws of Thought* que:

> El propòsit del següent tractat és investigar les lleis fonamentals d'aquelles operacions de la ment mitjançant les quals es duu a terme el raonament; expressar-les en el llenguatge simbòlic d'un Càlcul, i sobre aquest fonament, establir la ciència de la Lògica i construir el seu mètode; fer d'aquest mateix mètode la base d'un mètode general per a l'aplicació de la doctrina matemàtica de la Probabilitat, i, finalment, recollir dels diversos elements de la veritat destacats en el decurs d'aquestes recerques algunes indicacions relatives a la naturalesa i constitució de la ment humana.[1]

La recerca de les lleis del pensament es durà a terme a partir del llenguatge, considerat com un instrument de la raó humana. Ara bé, tot llenguatge està format per uns elements anomenats *signes* o *símbols*, que Boole defineix com "una marca [*mark*] arbitrària que té una interpretació fixa i és susceptible d'una combinació amb altres signes subjecta a lleis fixes dependents de la seva mútua interpretació".[2] Respecte a la interpretació fixa que s'exigeix als signes, cal destacar que, segons Boole, "en els processos de raonament, els signes representen els conceptes i operacions de la ment i compleixen la seva funció; però com que aquests conceptes i operacions representen coses i les connexions i relacions de coses, així els signes representen coses amb les seves connexions".[3] Tenim així la següent *proposició*:

> Totes les operacions del Llenguatge, com a instrument del raonament, es poden dur a terme per un sistema de signes compost dels següents elements, a saber:

---

1 *Boole 1854*, 1.
2 *Ibid*., 25.
3 *Ibid*., 26.

> 1r. Símbols literals, com $x, y, z, \ldots$, que representen coses com a subjectes de les nostres concepcions.
>
> 2n. Signes d'operació com $+, -, \times$, que representen aquelles operacions de la ment gràcies a les quals les concepcions de les coses es combinen o es descomponen per formar noves concepcions que inclouen els mateixos elements.
>
> 3r. El signe d'identitat $=$.
>
> I aquests símbols de la Lògica estan subjectes en el seu ús a lleis definides, coincidents en part i en part diferents de les lleis dels símbols corresponents en la ciència de l'Àlgebra.[1]

Els *símbols literals* són els anomenats a *Mathematical Analysis símbols electius* i són emprats en lloc dels substantius, adjectius i frases descriptives del llenguatge comú, representant conseqüentment les classes d'individus a les quals aquells signes es refereixen. En definitiva*,* Boole entén els símbols literals o electius tant com a representants d'operacions o actes mentals -de *concepció* a l'obra de 1854, d'*elecció* a la de 1847- com dels resultats d'aquestes operacions. D'aquí que les operacions entre ells s'entenguin novament com a operacions de la ment i com a operacions amb classes. D'acord amb Boole, hom representarà la classe dels individus als quals pot aplicar un nom particular o descripció per una simple lletra, com ara x, de manera que, per exemple, si el nom és "home", llavors x representarà "tots els homes", o la classe "homes". Segons Boole:

> Per una classe entenem usualment una col·lecció d'individus, a cada un dels quals es podria aplicar un nom particular o descripció; però en aquesta obra ampliarem el significat del terme per tal d'incloure el cas en què hi hagi un sol individu que respongui al nom o descripció requerida, així com també els casos denotats pels termes "no res" i "univers" que com a classes haurien d'entendre's que comprenen respectivament "cap ésser" i "tots el éssers".[2]

Seguint amb l'exemple anterior, Boole observa que si hom representa ara "blanc" per y, llavors podrà representar "homes blancs" per xy i mitjançant aquesta *combinació* "es representarà la classe de coses a les quals els noms o descripcions representats per x i y són aplicables simultàniament".[3] Així doncs, la simple combinació o juxtaposició de lletres

---

[1] *Ibid.*, 27.
[2] *Ibid.*, 28.
[3] *Ibid.*, 28.

representarà la mateixa operació de la ment que el signe $\times$, això és, la multiplicació o el *producte lògic*. Les dues lleis fonamentals a les quals estan subjectes els símbols literals respecte d'aquesta operació són les següents:

$$xy = yx \qquad (1)$$

$$xx = x \qquad \text{o} \qquad x^2 = x. \qquad (2)$$

La primera de les lleis anteriors indica que els símbols literals "són *commutatius*, com els símbols de l'Àlgebra". Aquests símbols, en canvi, no satisfan en general la segona llei, la llei de *dualitat*, que si que satisfan els símbols de classe i que "constitueix el fonament essencial de la diferència entre aquelles formes d'inferència sobre les que versa la Lògica, i aquelles que es presenten per si mateixes en la ciència particular del Nombre".[1] Veiem doncs, que aquesta nova llei juga a *Laws of Thought* un paper anàleg al que jugava la llei de l'*índex* a *Mathematical Analysis*, malgrat restringir la seva validesa al cas $n = 2$. La substitució de la llei de l'índex per la llei de dualitat és deguda, en bona mesura, a les dificultats que suposa la interpretació de la primera en el sistema de la lògica de Boole. Així, assenyala Boole a *Laws of Thought*, "l'equació $x^3 = x$ no és interpretable en el sistema de la lògica. Car escrivint-la en qualsevol de les formes

$$x(1-x)(1+x) = 0$$

$$x(1-x)(-1-x) = 0,$$

veiem que la seva interpretació, si és possible de cap manera, ha de suposar la del factor $1+x$, o la del factor $-1-x$. El primer no és interpretable, perquè no podem concebre l'addició d'una classe qualsevol x a l'univers 1; el darrer no és interpretable perquè el símbol -1 no està subjecte a la llei $x(1-x) = 0$ a la qual estan subjectes tots els símbols de classe".[2] En definitiva, en substituir la llei de l'índex per la llei de dualitat, Boole evita els problemes plantejats pel fet que l'equació $x^3 = x$, encara que és vàlida aritmèticament quan restringim els valors que pot prendre x a 0 i 1, no és interpretable lògicament, car els seus desenvolupaments, $x(1-x)(1+x) = 0$ i $x(1-x)(-1-x) = 0$ contenen les expressions $1+x$ i

[1] *Ibid.*, 7.
[2] *Ibid.*, 50 n.

$-1-x$ que, tal com explica Boole, no són interpretables lògicament: el primer perquè, tal com veurem immediatament, l'addició només és interpretable en el sistema de Boole per a classes disjuntes, el segon perquè inclou un signe que no està subjecte a la llei de dualitat, que és la llei fonamental a la qual han d'estar subjectes tots els signes lògics.

Els signes d'addició i subtracció s'empren en lloc de les conjuncions "i" i "o" i de l'expressió "llevat de" del llenguatge corrent i representen "aquelles operacions mentals per mitjà de les quals unim les parts en un tot o separem un tot en les seves parts".[1] El fet que els signes + i – representin operacions inverses, per analogia amb el que s'esdevé en l'àlgebra comuna, restringeix la interpretabilitat de l'addició als casos en què els termes units mitjançant aquesta operació representin classes disjuntes, i la subtracció d'una classe respecte a una altra als casos en què la primera estigui inclosa en la segona. Car, per exemple, el pas de $x+y=z$ a $z-x=y$ o a $z-y=x$ només és possible si x i y no tenen cap element en comú i estan incloses respectivament en z. Ambdues operacions estan subjectes a les lleis formals següents:

$$x+y=y+x \tag{3}$$

$$z(x+y)=zx+zy \tag{4}$$

$$x-y=-y+x \tag{5}$$

$$z(x-y)=zx-zy. \tag{6}$$

Aquestes lleis, tal com recorda Boole, també concorden amb les que regeixen en l'àlgebra comuna. Naturalment la restricció de l'addició a classes disjuntes, fa que les expressions com ara $x+x$ o $1+x$ no es puguin interpretar en la lògica de Boole, per la qual cosa les equacions $x+x=x$ i $1+x=1$ tampoc seran interpretables. Tal com explicarem més endavant, el primer en criticar això fou W. S. Jevons (1835-1882), el qual considerava que la condició d'interpretabilitat de l'addició imposada per Boole feia inaplicable el sistema de Boole a l'anàlisi del pensament. Això dugué Jevons a interpretar l'addició en sentit no exclusiu i a suprimir conseqüentment l'operació de subtracció (*Cf. infra*, § 8) , camí que també seguirien més endavant Ch. S. Peirce i E. Schröder. Les expressions anteriors són un

[1] *Ibid*., 32.

bon exemple de les nombroses expressions que sorgeixen inevitablement en el sistema de la lògica de Boole i que, tanmateix, no són interpretables. Tal com dèiem abans, el problema de la interpretació de les expressions ininterpretables lògicament és un dels problemes principals que planteja l'àlgebra lògica de Boole i que ocuparà el nostre autor els anys subsegüents a la publicació de *Laws of Thought* (*Cf. infra*, § 7).

Finalment, el signe d'igualtat representarà simbòlicament la *còpula* verbal "és" o "són", a la qual es poden reduir de fet tots els verbs com a "signes mitjançant els quals expressem una relació, i per mitjà dels quals formem proposicions".[1] Una equació de la forma

$$x = y$$

indicarà, doncs, que les classes de coses denotades per x i y son idèntiques, això és, que tots els membres d'una classe qualsevol de les dues són també membres de l'altra. La relació d'identitat és l'única considerada per Boole i, per tant, la seva lògica és una *lògica equacional*. Tal com veurem més endavant, la relació d'*inclusió* la va introduir Peirce en un article de 1870, com a conseqüència, en bona mesura, de la seva insatisfacció amb la formalització de la còpula a través del signe d'igualtat (*Cf. infra*, cap. II, § 2). Basant-se en la interpretació del signe d'igualtat abans esmentada, Boole introdueix la regla algèbrica de *transposició* i afirma que en el Càlcul de la Lògica, tal com s'esdevé en l'àlgebra ordinària, una equació segueix essent vàlida quan sumem, restem o multipliquem algun terme z als dos costats de l'equació. Però, l'analogia amb l'àlgebra comuna es trenca en considerar la llei algèbrica:

$$zx = zy \text{ implica } x = y,$$

que no se satisfà en el seu sistema. Tanmateix, Boole treu importància a aquest fet basant-se en què "aquest axioma no posseeix la generalitat d'aquells altres axiomes que s'han considerat. La deducció de l'equació $x = y$ a partir de l'equació $zx = zy$ només és vàlida quan se sap que x no és igual a 0".[2] Cal esmentar però, que fins i tot la llei algèbrica

---

[1] *Ibid.*, 34. Boole posa com exemple la proposició "Cèsar conquerí les Gàl·lies" que podem convertir en la proposició "Cèsar és qui conquerí les Gàl·lies", regida per la còpula verbal "és". Anàlogament, qualsevol altra proposició podrà reduir-se a una proposició regida per la còpula "és" o "són".

[2] *Ibid.*, 37.

$$z \neq 0 \text{ i } zx = zy \text{ implica } x = y$$

falla en Lògica, excepte en el cas particular en què $z \neq 0$ impliqui $z = 1$. Potser degut precisament a això, i basant-se sobretot en què la llei de la dualitat, encara que no és vàlida generalment en l'àlgebra comuna, ho és pels valors 0 i 1, Boole arriba a la conclusió que:

> En lloc de determinar la mesura de la concordança formal entre els símbols de la lògica i els del nombre en general, se'ns suggereix de forma més immediata comparar-los amb els símbols de la quantitat, *admetent només els valors* 0 *i* 1. Les lleis, els axiomes i els processos d'una àlgebra d'aquesta mena seran idèntics en tot el seu abast a les lleis, els axiomes i els processos d'una Àlgebra de la Lògica. Només la diferència d'interpretació els dividirà. Sobre aquest principi s'estableix el mètode del treball següent.[1]

Ara bé, a banda de la llei de dualitat, en la subàlgebra $\{0, 1\}$ de l'àlgebra numèrica també se satisfan les lleis formals següents:

$$0y = 0 \qquad \text{i} \qquad 1y = y,$$

sigui quin sigui el *nombre y*. Doncs bé, segons Boole, perquè aquestes lleis puguin ser obeïdes en el sistema de la Lògica hem d'assignar a 0 i 1 una interpretació tal que les classes $0y$ i $1y$ puguin ser idèntiques a 0 i 1 respectivament. I això només és possible si "les interpretacions respectives dels símbols 0 i 1 en el sistema de la Lògica són *No-res* i *Univers*".[2]

3. La divisió de les proposicions i l'expressió de les proposicions primàries

Un vegada explicats els signes del Càlcul de la Lògica i determinades les seves lleis de combinació en els capítols II i III de *Laws of Thought*, Boole es proposa en el capítol IV aplicar, primer, els resultats obtinguts a l'expressió dels termes complexos de les

[1] *Ibid.*, 37-38.
[2] *Ibid.*, 47.

proposicions i, després, a l'expressió de les proposicions mateixes. Però, prèviament a això, li cal determinar els diferents tipus de proposicions lògiques. Respecte això, Boole assenyala que, "tota afirmació que fem, podria referir-se a una o altra de les dues classes següents. O bé expressa una relació entre *coses*, o bé expressa -o és equivalent a l'expressió de- una relació entre *proposicions* [...] La primera classe de proposicions referents a coses l'anomeno "Primària"; la darrer classe referent a *proposicions* l'anomeno "Secundària""[1]. Aquesta distinció coincideix conceptualment amb la distinció clàssica entre proposicions categòriques i hipotètiques, però no és coextensiva amb ella, perquè Boole inclou, dins de la classe de les proposicions secundàries, totes aquelles proposicions que afirmen la veritat o falsedat d'una proposició primària com, per exemple, la proposició "És veritat que el sol brilla" (*Cf. infra*, § 6). En qualsevol cas, continua Boole, "en l'expressió tant de les proposicions primàries com de les secundàries, s'empraran en aquesta obra els mateixos símbols i subjectes, tal com es veurà, a les mateixes lleis. La diferència entre els dos casos és una diferència no de forma sinó d'interpretació. En tots dos casos, la relació que és de fet l'objecte de la proposició a expressar serà denotada pel signe =".[2] Deixant, doncs, l'anàlisi de les proposicions secundàries per a un proper capítol, Boole procedeix a determinar l'expressió dels termes que figuren en les proposicions primàries i la d'aquestes mateixes proposicions. Aquestes, com s'ha dit abans, expressen una relació entre dos termes -subjecte i predicat- que representen classes de coses. Aquest termes, segons la seva naturalesa, podran expressar-se simbòlicament mitjançant símbols literals simples o mitjançant la seva combinació. Boole enuncia en aquest sentit la *regla* d'expressió següent:

> *Expressi's els noms simples o qualitats pels símbols* x, y, z, etc*, els seus contraris per* $1-x, 1-y, 1-z, etc$*; per les classes de coses definides per noms o qualitats comunes, connectin-se els símbols corresponents com en la multiplicació; per les col·leccions de coses consistents en parts diferents l'una de l'altra, connecti's l'expressió d'aquestes parts mitjançant el signe +. En particular, representi's l'expressió "O bé x o bé y" per* $x(1-y)+y(1-x)$ *quan les classes denotades per x i y són exclusives, per* $x+y(1-x)$ *quan no són exclusives.* [3]

[1] *Ibid.*, 52-53.
[2] *Ibid.*, 54.
[3] *Ibid.*, 57.

En la regla anterior no hi figura l'expressió $x-y$ i l'expressió $x+y$ és reemplaçada per l'expressió $x(1-y)+y(1-x)$, encara que ambdues expressions són equivalents. El motiu és que ni $x-y$ ni $x+y$, a diferència de les expressions esmentades a la regla, satisfan en el sistema de Boole la llei de dualitat, tret característic de totes les expressions que representen "classes o col·leccions de coses"[1] i que és, per tant, el signe distintiu dels anomenats per Boole *signes lògics*. Notem, en efecte, que en la regla anterior Boole empra l'expressió $x(1-y)+y(1-x)$ per representar la disjunció "O bé x o bé y" quan x i y representen classes disjuntes, en comptes d'emprar directament l'expressió $x+y$. La regla tampoc no diu res de la subtracció -que tanmateix Boole ha emprat en els exemples anteriors a la seva determinació. Això és degut a que Boole vol assegurar-se que totes les expressions enunciades satisfan sense restriccions la llei de dualitat, i aquest no és el cas de $x+y$ o $x-y$, car en el sistema de Boole $(x+y)^2=x+y+2xy$ i $(x-y)^2=x+y-2xy$ i aquestes expressions no es poden desenvolupar més degut a la naturalesa de l'addició. En canvi, es té que $\{x(1-y)+y(1-x)\}^2=x(1-y)+y(1-x)$ i $\{x+y(1-x)\}^2=x+y(1-x)$, com es demostra fàcilment.[2]

Un cop determinada l'expressió dels termes de les proposicions primàries, només resta determinar com s'ha d'expressar la relació entre aquests a la qual es refereix la proposició que es vol expressar simbòlicament. Ara bé, aquesta relació pot considerar els termes *universalment* o *particularment*. El primer cas que Boole estudia és precisament aquell en què els dos termes es consideren universalment; en aquest cas, la seva expressió es guiarà per la regla anterior, donat que la relació considera la totalitat de les classes representades pel termes. Així, per exemple, la proposició "Les estrelles fixes són sols" -en la mesura que és equivalent a les dues proposicions "Totes les estrelles fixes són sols" i "Tots els sols són estrelles fixes"-, es representarà simbòlicament per:

$$x=y,$$

on x representarà la classe "estrelles fixes" i y la classe "sols". El segon cas que estudia Boole és el de les proposicions en les quals un dels dos termes és particular. Suposem, per exemple, que volem expressar simbòlicament una proposició *universal afirmativa* com ara "Tots els homes són mortals". En aquest cas, assenyala Boole, "és clar que el que volem significar és

1 *Ibid.*, 57.
2 *Cf. ibid.*, 56-57.

"Tots els homes són alguns éssers mortals". Representem llavors per *v* una classe indefinida en tots els sentits, excepte en aquest, a saber, que alguns dels seus membres són éssers mortals, i representi *x* "éssers mortals", aleshores *vx* representarà "alguns éssers mortals". D'aquí que si *y* representa "homes", l'equació hauria de ser

$$y = vx\text{''.}$$ [1]

Veiem, doncs, que Boole introdueix el signe *v* com un símbol de classe més -i com a tal compleix la llei de dualitat- amb l'única peculiaritat que apareix sempre en una expressió o equació prefixant a algun altre símbol de classe i que conté alguns dels individus representats per aquesta. Aquest fet planteja ja alguns problemes d'interpretació, car indica que Boole entenia el signe *v* més aviat com un *operador*, que selecciona alguns membres de la classe a la qual prefixa, que no pas com un símbol de classe. En aquest sentit, tot i que acceptem que és un símbol de classe, és evident que li escauria més interpretar-lo com a símbol *electiu*, a la manera de *Mathematical Analysis*, que no pas com a símbol *literal*, a la manera de *Laws of Thought*. En qualsevol cas, el problema principal que planteja el símbol *v* és la incompatibilitat entre la seva definició com a símbol de classe sense restriccions -susceptible, doncs, de ser interpretat com la classe nul·la- i el seu import existencial. Boole assenyala, per exemple, a propòsit de les proposicions *particulars afirmatives*, que simbolitzarà a través de l'equació $vx = vy$, que "el símbol *v* no és arbitrari i, conseqüentment, no pot ser eliminat. Car *v* és representatiu d'*alguns*, que encara que podria incloure en el seu significat tots, no hi inclou *cap*".[2] En efecte, si mantinguéssim la possibilitat que el símbol *v* pogués representar *cap* -i per tant pogués ser substituït per 0- la seva eliminació en les proposicions del tipus $vx = vy$ duria a l'equació $0 = 0$ amb la qual cosa el mètode d'eliminació no gaudiria de la generalitat requerida. Però aquesta restricció *adhoc* no s'observa, per exemple, a l'hora d'eliminar *v* de la proposició $y = vx$. En aquest cas, en efecte, Boole substitueix de la forma habitual *v* per 1 i 0, obtenint per simplificació $y(1-x) = 0$ com expressió alternativa de les proposicions universals afirmatives (*Cf. infra*, § 5). Veiem, doncs, que tant en el cas de les proposicions particulars afirmatives com en el de les universals afirmatives, l'ocurrència del signe *v* en la seva formalització fa que Boole doni per suposat que els termes tenen import existencial, però mentre que en l'eliminació del signe *v* de les proposicions particulars afirmatives aquest import existencial es respecta -en el sentit que

1 *Ibid.*, 61.
2 *Ibid.*, 124.

Boole adverteix que no es pot substituir v per 0-, no s'esdevé el mateix amb les proposicions universals afirmatives. De fet, en la mesura que l'eliminació del signe v de les proposicions universals afirmatives dóna lloc a la forma $y(1-x)=0$, està clar que aquesta mena de proposicions no tenien per Boole import existencial. De forma anàloga, es manté aquesta diferència de criteri respecte de l'import existencial del símbol v en les proposicions particulars i universals afirmatives, quan es vol justificar les regles de conversió de la lògica tradicional.[1] És interessant observar també que a *Mathematical Analysis*, Boole introdueix el símbol v amb la mateixa finalitat que a *Laws of Thought*, això és, expressar els termes particulars, però la seva interpretació i utilització allí és encara més problemàtica. En efecte, en la primera obra, a l'hora d'expressar la proposició particular afirmativa, Boole assenyala que "Si alguns *Xs* són *Ys*, hi ha alguns termes comuns a les classes. Constituïm una classe separada V amb aquells termes, a la qual correspondrà un símbol electiu separat v, llavors

$$v = xy.$$

I com que v inclou tots els termes comuns a les classes X i Y, podem interpretar-lo independentment com Alguns *Xs* o Alguns *Ys*".[2] Boole opera, doncs, amb el símbol v com un símbol més de classe amb import existencial, però sense la restricció d'anar prefixat a un altre símbol de classe, com serà el cas de *Laws of Thought*. De fet, a *Mathematical Analysis*, els problemes d'interpretació del símbol v és plantegen immediatament després de la seva introducció, la qual cosa porta a Boole a la conclusió salomònica que "universalment en aquests casos, la diferència de forma implica una diferència d'interpretació respecte al símbol auxiliar v, i cada forma és interpretable per si mateixa. Més encara, aquestes diferències no introdueixen en el Càlcul una perplexitat innecessària. Es veurà a partir d'ara que elles donen una precisió i un caràcter definit [*definiteness*] a les seves conclusions, que d'una altra manera no es podria assolir".[3]

El darrer cas estudiat per Boole és el de les proposicions *universals negatives* com, per exemple, la proposició "Cap home és perfecte". Segons Boole, aquesta proposició és equivalent a la proposició "Tots els homes no són perfectes" o "Tots els homes són no perfectes" i, per tant, d'acord amb el que ha dit abans sobre els termes particulars i segons la regla d'expressió dels termes contraris, pot expressar la proposició anterior en la forma:

---

1 *Cf. ibid.*, 61, 63 i 229.
2 *Boole 1916*, 65.
3 *Ibid.*, 67.

$$y = v(1 - x),$$

on y representarà la classe "homes" i x la classe "éssers perfectes". En definitiva, amb el llenguatge simbòlic i les regles d'expressió introduïdes fins ara, Boole pot expressar equacionalment les quatre proposicions categòriques de la lògica tradicional tal com segueix:

$$X = vY \qquad \text{A}$$
$$X = v(1 - Y) \qquad \text{E}$$
$$vX = vY \qquad \text{I}$$
$$vX = v(1 - Y), \qquad \text{O}$$

on les expressions X, Y representen els diversos termes relacionats en la proposició, que "si estan fundades en una anàlisi suficientment acurada del significat dels "termes" de la proposició, satisfaran la llei fonamental de dualitat".[1] Remarquem, finalment, que substituint X per $X - 1$ en les equacions anteriors s'obtenen la resta de proposicions categòriques introduïdes per De Morgan.

4. L'expansió de les funcions lògiques

En les seccions anteriors hem estudiat les recerques, dutes a terme per Boole en els capítols II, III i IV de *Laws of Thought*, referents als signes del llenguatge de la Lògica, les lleis a les quals estan sotmesos i l'expressió a partir d'ells dels diferents tipus de proposicions categòriques. Però, tal com assenyala Boole en el capítol V, "aquestes recerques han estat preliminars en el sentit més estricte. Constitueixen, de fet, una introducció indispensable a un dels objectius principals d'aquest tractat: la construcció d'un sistema o mètode de la Lògica sobre la base d'un sumari exacte de les lleis fonamentals del pensament".[2] Abans de determinar la naturalesa d'aquest mètode, Boole assenyala una sèrie de condicions que són comunes a tota mena de raonament simbòlic, i a les qual s'haurà d'adaptar aquest mètode de la Lògica abans esmentat. Aquestes condicions son les següents:

1 *Boole 1854*, 65.
2 *Ibid.*, 66.

> 1r, Que s'assigni una interpretació fixa als símbols emprats en l'expressió de les dades i que les lleis de combinació d'aquests símbols estiguin correctament determinades a partir d'aquesta interpretació.
>
> 2n, Que el processos formals de solució o demostració sempre es duguin a terme d'acord amb les lleis anteriors sense considerar la qüestió de la interpretabilitat dels resultats particulars obtinguts.
>
> 3r, Que el resultat final sigui interpretable en la seva forma i que sigui, de fet, interpretat d'acord amb aquell sistema d'interpretació que s'ha emprat per a l'expressió de les dades.[1]

Segons Boole, el primer i el tercer principis no plantegen cap problema. La segona condició mereix, en canvi, alguna explicació de la seva part. Es basa en una llei general del pensament segons la qual el principi general s'expressa en un exemple particular. Així, assenyala Boole, "un sol exemple de raonament en el qual els símbols siguin emprats d'acord amb lleis fundades sobre la seva interpretació, però sense cap referència sostinguda a la interpretació, i en què la cadena de demostració ens condueixi, a través de passos intermedis que no siguin interpretables, a un resultat final interpretable, sembla que estableix no només la validesa de l'aplicació particular, sinó que ens fa conèixer també la llei general manifestada en ella".[2] Boole posa com exemple l'ús en els processos intermedis de Trigonometria del nombre complex $\sqrt{1}$, que no és interpretable com a nombre real, la qual cosa no afecta a la validesa dels processos de raonament o als seus resultats però, evidentment, n'hagués pogut donar d'altres. Per exemple, tal com assenyala Th. Hailperin en l'obra *Boole's Logic and Probability* (*1976*), "la resolució d'un problema algèbric per un nombre natural desconegut, la condició per a la qual suposa només nombres naturals, i a la qual hom aplica tot el poder algorísmic de l'àlgebra sense tenir en compte si les operacions tenen significat (en termes de nombres naturals) i en el decurs de la qual poden aparèixer fraccions pròpies o arrels; si en el resultat final es presenta la incògnita com un nombre natural, hom considera que la solució és correcta".[3] El principi anterior s'aplica en el mètode o sistema de la lògica de Boole en el següent sentit. Ja hem explicat en la secció anterior que els signes i les lleis de l'àlgebra aritmètica restringida al conjunt $\{0, 1\}$ coincideixen amb els d'una vertadera àlgebra de la lògica. Això permet incorporar al sistema de la lògica tots els processos de raonament de l'àlgebra ordinària com, per exemple, l'*eliminació* o la *reducció*,

1 *Ibid.*, 68.
2 *Ibid.*, 69.
3 *Hailperin 1976*, 68.

operant amb els símbols lògics com si dels símbols quantitatius abans esmentats es tractés. En el decurs d'aquests raonaments hom es trobarà sovint amb expressions no interpretables lògicament -fraccions, nombres sencers altres que 0 i 1, expressions com ara $1+x$, etc- però això no ens ha de preocupar, d'acord amb el principi abans esmentat, si els resultats finals són interpretables lògicament. El següent text de Boole resumeix perfectament aquest punt de vista:

> S'ha vist que tot sistema de proposicions podria expressar-se mitjançant equacions que continguin els símbols x, y, z, els quals, sempre que la interpretació sigui possible, estan subjectes a lleis idèntiques en la forma a les lleis d'un sistema de símbols quantitatius susceptibles dels valors 0 i 1 (II. 15). Però com que els processos formals de raonament depenen només de les lleis dels símbols i no de la naturalesa de la seva interpretació, ens és permès tractar els símbols anteriors x, y, z, com si fossin símbols quantitatius del tipus abans descrit. *Podríem, de fet, deixar de banda la interpretació lògica dels símbols en l'equació donada, convertir-los en símbols quantitatius susceptibles només dels valors* 0 *i* 1*, dur a terme sobre ells tots els processos requerits de solució* i *tornar-los finalment la seva interpretació lògica.*[1]

Sense aquesta llibertat a l'hora d'operar amb els símbols $x, y, z, ...$ com si fossin símbols quantitatius no seria possible, segons Boole, bastir un mètode general en Lògica. Tanmateix, tal com ha assenyalat Hailperin, des d'un punt de vista modern, "la correcció del procediment citat per Boole es justifica apel·lant, no a un principi de la ment, sinó a la immersió dels nombres naturals en els reals o, en l'exemple trigonomètric, dels nombres reals en els complexos".[2] Per un altre costat, el mètode aquí exposat no seria de gaire utilitat si, un cop restaurada als símbols la seva significació lògica, les equacions finals resultants no fossin interpretables lògicament. La pregunta que sorgeix és, doncs, si hi ha un mètode que possibiliti presentar les equacions finals de manera que siguin sempre interpretables lògicament. La resposta de Boole és que, efectivament, "existeix [...] un mètode general de reducció de les equacions a una forma tal [...] que podríem caracteritzar com un procés de *desenvolupament*".[3] Els capítols V i VI de *Laws of Thought* estan dedicats respectivament a l'exposició formal d'aquest mètode i a la seva interpretació. Seguint, doncs, l'ordre

---

1 *Boole 1854*, 69-70.
2 *Hailperin 1976*, 68.
3 *Boole 1854*, 70.

d'exposició de Boole, estudiarem en els paràgrafs següents aquestes qüestions i deixarem per a la secció següent l'explicació dels processos d'*eliminació* i *reducció*.

En primer lloc, cal assenyalar que el procés de desenvolupament és pròpiament un procés de desenvolupament de funcions. Per una *funció* Boole entén una expressió algèbrica les variables de la qual representen símbols lògics o símbols quantitatius susceptibles només dels valors 0 i 1. Els símbols lògics són els que havia anomenat prèviament símbols literals o símbols de classe. Aquest símbols satisfan les mateixes lleis formals que els nombres 0 i 1 -en especial, la llei de dualitat- i només es distingeixen d'aquests per la seva interpretació. Així, $f(x)$ representarà una funció qualsevol d'una variable com, per exemple, x, $1-x$ o $\frac{1+x}{1-x}$ i $f(x,y)$ representarà una funció qualsevol de dues variables com $x+y$, $x-2y$ o $\frac{x+y}{x-2y}$. En qualsevol de les funcions anteriors, podem substituir les seves variables pels seus valors quantitatius 0 o 1. Així, per exemple, $f(0)$ i $f(y)$ indicaran respectivament el resultat de substituir x per 0 i per 1 en una funció qualsevol $f(x)$. Anàlogament, $f(1,1)$ representarà el resultat de substituir x i y per 1 en una funció qualsevol $f(x,y)$, $f(1,0)$ representarà el resultat de substituir x per 1 i y per 0, etc. Cal fer un parell d'observacions importants respecte a la naturalesa de les expressions algebraiques que Boole anomena funcions. Notem, en primer lloc, que Boole s'ocupa exclusivament de *funcions lògiques* -és a dir, funcions amb variables que representen símbols lògics, encara que puguem substituir-les quan creguem convenient pels valors quantitatius admesos o interpretar-les quantitativament quan l'expressió no sigui interpretable lògicament- i, per tant, les variables seran sempre de la primera potència. En segon lloc, cal notar la necessària aparició de fraccions en el sistema de la Lògica de Boole. En efecte, l'adopció dels processos de raonament de l'àlgebra comuna fa que l'operació de divisió sorgeixi necessàriament com operació inversa a la de multiplicació. Però aquella, contràriament a aquesta, no té una interpretació lògica en el sistema de la Lògica de Boole. Degut a això, totes les fraccions s'han de desenvolupar -sense que estigui permès simplificar- per poder ser interpretades lògicament.

Segons Boole, "qualsevol funció $f(x)$ on x és un símbol lògic o un símbol quantitatiu susceptible només dels valors 0 i 1 es diu *desenvolupada* quan es redueix a la forma $ax+b(1-x)$, essent a i b determinats de tal manera que facin el resultat equivalent a la funció a partir de la qual es va derivar"[1]. Suposem, en efecte, que $f(x)=ax+b(1-x)$; llavors, per $x=1$, tenim:

[1] *Ibid.*, 72.

$$f(1) = a,$$

i, per $x = 0$, tenim:

$$f(0) = b.$$

Així, els valors de a i b ja estan determinats i l'equació obtinguda en substituir-los en la primera equació, a saber:

$$f(x) = f(1)x + f(0)(1 - x), \qquad (1)$$

és el desenvolupament buscat -donat que l'anterior equació és vertadera per $x = 0$ i $x = 1$. Amb l'argument anterior Boole dóna per demostrada a *Laws of Thought* la *llei de desenvolupament* per a funcions d'una variable, a saber, $f(x) = ax + b(1 - x)$ per a tota funció $f(x)$. És interessant remarcar que a *Mathematical Analysis* Boole havia demostrat la llei de desenvolupament a partir del teorema de Taylor-McLaurin; però ara considera que "aquesta demostració, en acceptar que $f(x)$ es pot desenvolupar en una sèrie de potències ascendents de x és menys general que la que apareix en el text".[1] Cal notar, en efecte, que en la demostració de l'obra de 1847 a partir del teorema de Taylor-McLaurin, Boole empra les igualtats $x^3 = x$, $x^4 = x$, etc, que en l'obra de 1854 considera que "no són interpretables lògicament i completament estranyes a l'àmbit del raonament general".[2] En aquest sentit, val la pena esmentar també que, a banda de la demostració anterior, Boole justifica a *Laws of Thought* la llei de desenvolupament per a funcions d'una sola variable a partir de consideracions estrictament lògiques. Així, Boole assenyala que si $f(x)$ és una funció lògica, llavors designarà una certa classe definida en termes de la propietat x, ara bé, una classe d'aquesta mena podrà expressar-se també com la suma dels elements que tenen la propietat x i els que no la tenen, que designarem per $1 - x$. Com que, a més, podem suposar, sense pèrdua de generalitat, que els que tenen la propietat x tenen també una altra propietat u i que, els que no tenen la propietat x, tenen també una altra propietat v, podem representar equivalentment la classe designada per $f(x)$ per l'expressió $ux + v(1 - x)$.[3]

---

[1] *Ibid.*, 73 n.
[2] *Ibid.*, 50 n.
[3] *Cf. ibid.*, 70-71.

A partir de la llei anterior de desenvolupament per a funcions d'una variable, Boole demostra que tota funció $f(x,y)$ de dues variables es pot desenvolupar i determina la seva expansió. En efecte, per (1), el desenvolupament de $f(x,y)$ en funció de x serà:

$$f(x,y) = f(1,y) + f(0,y)(1-x) = f(1,y)x + f(0,y)(1-x),$$

i desenvolupant $f(1,y)$ i $f(0,y)$ en funció de y tindrem respectivament que:

$$f(1,y) = f(1,1)y + f(1,0)(1-y) \qquad\qquad f(0,y) = f(0,1)y + f(0,0)(1-y)$$

i, per tant:

$$f(x,y) = f(1,1)xy + f(1,0)x(1-y) + f(0,1)(1-x)y + f(0,0)(1-x)(1-y),$$

que constitueix el desenvolupament cercat. Podem observar a partir dels exemples anteriors que tota expansió està formada per dos tipus diferents d'expressions. Els *constituents* -x i $1-x$ en la expansió de $f(x)$; xy, $x(1-x)$, $(1-x)y$ i$(1-x)(1-y)$ en l'expansió de $f(x,y)$- i els *coeficients* -$f(0)$ i $f(1)$ per a $f(x)$; $f(1,1)$,$f(1,0)$,$f(0,1)$ i $f(0,0)$ per a $f(x,y)$-, els arguments dels quals depenen dels factors dels constituents als quals es prefixen. D'acord amb l'anterior, Boole enuncia la següent regla general per determinar l'*expansió* o *desenvolupament* d'una funció amb un nombre qualsevol de variables:

> Primer: *Per expandir qualsevol funció dels símbols* x,y,z. Formi's una sèrie de constituents de la manera següent: Sigui el primer constituent el producte dels símbols; canviï's en aquest producte qualsevol símbol z per $1-z$ per obtenir el segon constituent. Llavors en aquests dos, canviï's qualsevol altre símbol y per $1-y$ per formar dos constituent més. A continuació, en els quatre constituents així obtinguts canviï's qualsevol altre símbol x per $1-x$ per formar quatre nous constituents, i així successivament fins haver exhaurit tots els canvis possibles.
>
> Segon: *Per trobar el coeficient de qualsevol constituent.* Si aquest constituent conté x com a factor, canviï's en la funció original x per 1, però si conté $1-x$ com a factor canviï's en la funció original x per 0. Apliqui's la mateixa regla en referència als símbols $y,z,$etc. El valor final calculat de la funció així transformada serà el coeficient cercat.

La suma dels constituents, multiplicat cadascun d'ells pel seu coeficient respectiu, serà l'expansió cercada.[1]

Els *constituents* de qualsevol expansió satisfan una sèrie de propietats formals que determinen la seva interpretació. Aquestes propietats vénen expressades en la proposició següent:

Tot constituent individual t d'una expansió satisfà la llei de dualitat, l'expressió de la qual és

$$t(1-t)=0$$

El producte de dos constituents distints d'una expansió és igual a 0*, i la suma de tots els constituents és igual a* 1.[2]

En efecte: (*i*) tot factor d'un constituent t qualsevol és de la forma x o $1-x$, els quals satisfan la llei de dualitat i, per tant, t satisfarà també la llei de dualitat, *i.e.* $t(1-t)=0$; (*ii*) en cada dos constituents d'una expansió qualsevol, hi haurà en un d'ells un factor de la forma x i en l'altre un factor de la forma $1-x$ i, per tant, en multiplicar-se ambdós constituents s'anul·laran; (*iii*) es constata directament en l'expansió d'una funció en termes de qualsevol nombre de variables, que la suma de tots els constituents és igual a 1. Però aquesta última propietat es pot demostrar més generalment desenvolupant 1 a partir de qualsevol nombre de símbols lògics, donat que qualsevol funció es pot desenvolupar en referència a símbols que no conté, calculant els coeficients a partir de la funció donada i determinant els constituents respecte als símbol lògics en referència als quals es vol desenvolupar la funció. De la proposició anterior se segueix, doncs, que "els constituents de qualsevol expansió representen classes, aquestes classes són distintes mútuament degut a la possessió de qualitats contràries, i totes juntes formen l'univers del discurs".[3] Una vegada determinada la interpretació dels constituents, resta per determinar la dels coeficients. Ara bé, com que el valor d'aquests depèn de la funció a desenvolupar i el problema de la interpretabilitat de les funcions lògiques es redueix en darrer terme al de la interpretabilitat de les *equacions lògiques*, Boole aborda directament aquest problema. Per exemple, en el cas de la funció $x-y$ ens trobem que la seva expansió és igual a l'expressió:

1 *Ibid.*, 75-76.
2 *Ibid.*, 78.
3 *Ibid.*, 82.

$$x(1-y)-y(1-x),$$

que no es interpretable directament. Però, encara que "l'expansió no sigui interpretable immediatament, ens condueix sempre de seguida a resultats interpretables".[1] En aquest cas, per exemple, igualant l'expansió a 0, podrem resoldre l'equació resultant en les dues següents:

$$x(1-y)=0 \quad \text{i} \quad y(1-x)=0,$$

que són interpretables lògicament. I, en general, assenyala Boole, "encara que les *funcions* no necessàriament arribin a ser interpretables per desenvolupament, les *equacions* són sempre reductibles per aquest procés a formes interpretables".[2] A fi de cercar la major claredat possible en l'exposició, Boole divideix les equacions en tres tipus diferents, encara que a efectes d'interpretabilitat, els dos primers es poden reduir al darrer. En primer lloc, Boole considera les equacions de la forma $V=0$, en el supòsit que els símbols lògics de V apareguin en *combinacions no fraccionàries*. Suposant, per una major simplicitat, que V només conté les variables x, y i substituint V per la seva expansió tindrem la següent equació:

$$axy+bx(1-y)+c(1-x)y+d(1-x)(1-y)=0.$$

Suposem ara que un coeficient qualsevol, posem per cas a, no s'iguala a 0, i multipliquem llavors l'anterior equació pel constituent al qual està unit aquest coeficient, a saber, xy. Aleshores, donat que el producte de dos constituents diferents sempre s'anul·la, tindrem l'equació:

$$axy=0,$$

i com que, per hipòtesi, $a \neq 0$, tindrem que:

$$xy=0.$$

---

1 *Ibid.*, 77.

2 *Ibid.*, 78.

En canvi, si el coeficient a fos igual a 0, el terme axy no hauria aparegut en el desenvolupament anterior, i no haguéssim pogut deduir l'equació $xy = 0$. En definitiva, Boole conclou que per interpretar una equació de la forma $V = 0$, cal desenvolupar la funció V i igualar a 0 tot els constituents el coeficient dels quals no s'anul·la, constituint la denegació conjunta de l'existència de les classes representades per aquests constituents la interpretació cercada.

El segon tipus d'equacions estudiades són les de la forma $V = 1$, la interpretació de les quals es dedueix fàcilment, segons Boole, a partir de l'argument anterior. Car si en l'expansió de V, el producte dels constituents amb coeficients que no s'anul·len és igual a 0, llavors la suma dels constituents amb coeficients que s'anul·len serà igual a 1 -donat que la suma total dels constituents de qualsevol expansió és sempre 1. Per tant, la suma de les classes representades per aquests constituents constituirà l'univers dels discurs i ens donarà, doncs, la interpretació requerida per V. Però l'argument anterior, en igualar a 0 els constituents amb coeficients que s'anul·len, depèn del fet que $V = 0$ i, per tant, només justifica que les equacions d'aquesta forma també poden interpretar-se com l'afirmació de la disjunció de les classes representades pels constituents que s'anul·len. Així, per exemple, expandint la funció $x + y$ (1), tenim l'equació:

$$x + y = 2xy + x(1 - y) + y(1 - x) + 0(1 - x)(1 - y) \qquad (2)$$

i, d'acord amb el que s'ha dit abans, l'equació $x + y = 0$ es podrà interpretar com la denegació conjunta de les classes $xy, x(1 - y), y(1 - x)$, això és, posant:

$$xy = 0,\ x(1 - y) = 0,\ y(1 - x) = 0,$$

o bé a partir de l'afirmació que la classe $(1 - x)(1 - y)$ constitueix l'univers, això és, posant:

$$(1 - x)(1 - y) = 1.$$

Però si apliquéssim els resultats anteriors directament a l'equació $x + y = 1$ (3), obtindríem els resultats contraris als desitjats. Una interpretació correcta de (3) requerirà, tal com veurem de seguida, igualar a 1 la suma de tots els constituents de (2) que tenen com a coeficient la unitat i igualar *separadament* a 0 l'expressió xy, donat que el seu coeficient no satisfà la llei de dualitat.

El tercer tipus d'equacions analitzades és el més general i, de fet, els dos tipus anteriors poden reduir-se a aquest tipus. En els casos precedents les equacions eren del tipus $V = 0$ i $V = 1$ respectivament; les equacions que ara es volen interpretar són de la forma $V = w$, on w és un símbol lògic qualsevol i V és una funció del símbols lògics x, y, z, etc. El problema plantejat és equivalent, en paraules de Boole, al següent *problema de la màxima generalitat en Lògica*: "Donada una equació lògica qualsevol connectant els símbols x, y, z, w, es requereix una expressió interpretable per a la relació de la classe representada per w amb les classes representades pels altres símbols x, y, z, etc."[1] Ara bé, com que l'equació lògica anterior és de primer grau, sempre podrem trobar la solució buscada per w. En efecte, igualant a 0 l'equació anterior i desenvolupant-la en funció de w, tenim:

$$Ew + E'(1 - w) = 0,$$

on E i E' no inclouen w i, per tant:

$$w = \frac{E'}{E' - E}. \tag{1}$$

Tenint cura de no cancel·lar els factors comuns del numerador i denominador a no ser que siguin constants numèriques distintes de 0, desenvolupant el segon membre de l'equació anterior en funció de *x, y, z,* etc, i interpretant de forma adient aquest desenvolupament, haurem resolt el problema plantejat. Ara bé, en desenvolupar l'expressió anterior trobem que els coeficients de l'expansió correspondran a una de les següents classes: 1, 0, $\frac{0}{0}$ i aquells que no obeeixen la *llei de dualitat,* que apareixen usualment en la forma $\frac{1}{0}$. La interpretació del primer i segon tipus de coeficient no planteja cap dificultat: El símbol 1, com a coeficient d'un terme en un desenvolupament, indica que s'ha d'agafar la totalitat de la classe representada pel constituent al qual es prefixa; el coeficient 0 indica que no s'ha d'agafar cap membre de la classe representada pel seu constituent. La interpretació del tercer i quart tipus mereix, en canvi, alguna explicació. Segons Boole, la interpretació del símbol $\frac{0}{0}$ no s'ha d'establir sota l'analogia de l'aritmètica, sinó experimentalment. Considerem, per exemple, la

[1] *Ibid.*, 87.

proposició “Tots els homes són mortals” i intentem definir la classe “mortals” en funció de “homes”. Com ja sabem, la proposició anterior la podem expressar, sense l’ajut del símbol v, mitjançant l’equació:

$$y(1-x)=0,$$

d’on es dedueix fàcilment l’equació $x=\frac{y}{y}$ i, desenvolupant, tindrem l’equació:

$$x=y+\frac{0}{0}(1-y),$$

que Boole interpreta com “els mortals són tots els homes més una resta d’homes que són no homes”, de manera que la premissa “els homes no mortals no existeixen” restarà confirmada tant si interpretem l’expressió $\frac{0}{0}(1-y)$ com *tots*, *alguns* o *cap* dels “no homes”.[1] A partir de l’exemple anterior, Boole deduirà que “l’expressió $\frac{0}{0}$ indica aquí que s’han d’agafar *tots*, *alguns*, o *cap* [membre] de la classe a l’expressió de la qual es prefixa”[2] i com que considera que el principi contingut en l’argument anterior és perfectament general, conclou que “podríem anomenar pròpiament $\frac{0}{0}$ un símbol de classe indefinida i podríem, si fos convenient, substituir-lo per un símbol simple v, subjecte a la llei fonamental $v(1-v)=0$”.[3] Malgrat tot, la identificació plena de les dues expressions planteja alguns problemes donat que, com ja hem vist abans, el símbol v no admet sempre la interpretació *cap* i que els arguments de Boole a favor que $\frac{0}{0}$ satisfà la llei de la dualitat no són massa convincents.[4]

Per determinar la interpretació del quart tipus de coeficients, Boole demostra mitjançant un argument molt semblant a l’utilitzat per determinar la interpretació de les equacions de la forma $V=0$, que tots aquells constituents amb coeficients que no satisfan la llei de dualitat, s’han d’igualar separadament a 0.[5] Segons Boole, “la forma usual sota la qual apareixen aquests coeficients és $\frac{1}{0}$. Aquest és el símbol algebraic de l’infinit. I quant més

---

1 *Cf. ibid.*, 89-90.

2 *Ibid.*, 90.

3 *Ibid.*, 90.

4 Boole assenyala que “el símbol $\frac{0}{0}$ [...] no desobeeix necessàriament la llei que estem considerant aquí, car admet indiferentment els valor numèrics 0 i 1” (*Ibid.*, 91-92), però no justifica en cap moment aquesta afirmació.

5 *Cf. ibid.*, 90-91.

s'apropa un nombre qualsevol a l'infinit (si se'm permet l'expressió), més s'allunya de satisfer la llei fonamental abans referida".[1] Boole justifica, doncs, que $\frac{1}{0}$ i la resta de coeficients diferents de 0, 1 i $\frac{0}{0}$ no satisfan la llei de dualitat en base a la interpretació aritmètica d'aquestes expressions. Però, precisament en base a aquesta interpretació, la inclusió de $\frac{1}{0}$ en aquest grup sembla més estranya donat que, com és ben sabut:

$$\left(\frac{1}{0}\right)^2 = \left(\frac{1^2}{0^2}\right) = \frac{1}{0}.$$

En definitiva, desenvolupant el segon membre de (1) -i posant $\frac{1}{0}$ com a símbol per a qualsevol coeficient del quart tipus, tenim l'equació:

$$w = A + 0B + \frac{0}{0}C + \frac{1}{0}D,$$

que constituirà la forma general de solució d'aquell *problema de la màxima generalitat* abans esmentat. Ara bé, pels criteris d'interpretació considerats abans, podem resoldre l'equació anterior en les dues següents:

$$w = A + vC \tag{3}$$

$$D = 0, \tag{4}$$

on v és un símbol de classe indefinit car, tal com afirma Boole: "La interpretació de (3) mostra quins elements entren o podrien entrar en la composició de w, la classe de coses de la qual es requereix la definició; i la interpretació de (4) mostra quines relacions existeixen entre els elements del problema original, en perfecta independència de w".[2] Més exactament, (3) expressa que la classe w està formada per la totalitat de la classe A i una part indeterminada de la classe C, mentre que (4) expressa que la classe D és buida.

---

1 *Ibid.*, 91.
2 *Ibid.*, 92.

5. L'eliminació i la reducció

L'*eliminació* i la *reducció* constitueixen, junt al desenvolupament, els mètodes fonamentals gràcies als quals, el sistema de la Lògica de Boole esdevé un càlcul efectiu de classes. En les conclusions de molts dels raonaments comuns i, en especial, quan hi ha més d'una premissa, no hi apareixen alguns dels termes que eren a les premisses -un clar exemple d'això són els sil·logismes. L'*eliminació* dóna raó precisament d'aquest fet de la forma més general, donat que permet eliminar en un argument un nombre qualsevol de símbols de classe d'una premissa qualsevol que hom no vol que apareguin a les conclusions. La següent *proposició* mostra com s'ha de dur a terme aquest procés:

> *Si* $f(x) = 0$ *és una equació lògica qualsevol que conté el símbol lògic x, amb o sense altres símbols de classe, llavors l'equació*
>
> $$f(1)f(0) = 0$$
>
> *serà vertadera, independentment de la interpretació de x; i serà el resultat complet de l'eliminació de x a partir de l'equació anterior* [...] *Anàlogament, el resultat complet de l'eliminació de qualsevol símbol de classe x, y, etc, d'una equació qualsevol de la forma* $V = 0$*, s'obtindrà expandint completament el primer membre de l'equació en els constituents dels símbols donats, multiplicant junts tots els coeficients d'aquells constituent i igualant el producte a* 0.[1]

Suposem, per exemple, que hom hagi formalitzat la proposició "Tots els homes són mortals" mitjançant l'equació $y = vx$ i suposem que es demana eliminar v de l'equació anterior. Hom posarà llavors l'equació anterior en la forma $y - vx = 0$ i substituirà en ella successivament v per 1 i 0, obtenint respectivament les equacions $y - x = 0$ i $y = 0$. Multiplicant llavors membre a membre aquestes dues equacions, tot tenint en compte la llei de dualitat, hom obté $y - yx = 0$ o, el que és el mateix, $y(1 - x) = 0$, que interpretarà com "Els homes no mortal no existeixen". Boole demostra la primera part de la proposició anterior de tres maneres diferents. Així, per exemple, desenvolupant el primer membre de $f(x) = 0$ es té que:

$$f(1)x + f(0)(1 - x) = 0,$$

1 *Ibid.*, 101.

d'on resulta que:

$$x = \frac{f(0)}{f(0) - f(1)}$$

i

$$1 - x = -\frac{f(1)}{f(0) - f(1)},$$

i substituint el segon membre de les equacions anteriors en l'equació fonamental $x(1 - x) = 0$ es té que:

$$-\frac{f(0)f(1)}{(f(0) - f(1))^2} = 0,$$

d'on s'obté finalment que $f(1)f(0) = 0$. Boole no demostra el cas general sinó que, com en el cas de la llei de desenvolupament, mostra com s'ha de procedir en el cas de dues variables i, com que aquest procediment és general, dóna per acabat el problema. Considerem, doncs, una equació de la forma $f(x, y) = 0$, eliminant y d'acord amb el resultat anterior es té que:

$$f(x, 1)f(x, 0) = 0,$$

i eliminant a continuació x, això és, substituint successivament x per 1 i per 0 i multiplicant els resultats conjuntament, s'obté:

$$f(1, 1)f(1, 0)f(0, 1)f(0, 0) = 0,$$

que expressarà el resultat de l'eliminació de x i y. I com que els quatre factors del primer membre de l'equació anterior són precisament els coeficients de l'expansió de $f(x, y)$, Boole dóna per demostrada la segona part de la proposició. Cal esmentar, a més, que donat que qualsevol funció $V = w$ pot reduir-se per transposició a una equació de la forma $V' = 0$, el procediment descrit en la proposició anterior és perfectament general.

Finalment, mitjançant la *reducció* hom pot reduir un sistema d'equacions qualsevol a una única equació equivalent a ell, a la qual es podran aplicar llavors els mètodes d'interpretació -*desenvolupament*- i *eliminació* explicats fins aquí. Per a la determinació d'aquest mètode cal notar, en primer lloc, que donat un sistema qualsevol d'equacions $V_1 = 0, V_2 = 0, ...,$ si tots els coeficients del desenvolupament de $V_1, V_2, ...$ són positius, llavors l'equació $V_1 + V_2 + ... = 0$ serà equivalent al sistema d'equacions anteriors considerades en conjunt. Observem, en efecte, que podem escriure un terme qualsevol del desenvolupament de l'equació anterior en la forma $(A + B + ...)t$, on t representarà un constituent determinat i$A, B, ...$ els seus coeficients a $V_1, V_2, ...$ respectivament. Ara bé, aquest coeficient serà igual a 0 si, i només si, tots els coeficients respectius de les funcions anteriors són iguals a 0 i, per tant, en el desenvolupament de l'equació $V_1 + V_2 + ... = 0$, un constituent qualsevol t s'haurà d'igualar separadament a 0 si, i només si, se'l ha d'igualar també a 0 en cada una de les equacions$V_1 = 0, V_2 = 0, ...$ (*Cf. supra*, § 4). D'aquí, la següent *proposició*:

> *Si equacions qualssevol $V_1 = 0$, $V_2 = 0$, etc, són de tal mena que el desenvolupament del seu primer membre consta només de constituents amb coeficients positius, llavors aquestes equacions poden ser combinades en una sola equació equivalent per addició.*[1]

En canvi, si algun dels coeficients del desenvolupament de $V_1, V_2, ...$ és negatiu, podria passar que, en el desenvolupament de $V_1 + V_2 + ... = 0$, algun dels coeficients fos igual a 0 sense que ho fossin els coeficients respectius de $V_1, V_2, ...$ -per la cancel·lació a través de la suma de termes positius i negatius. Però, per evitar aquest problema, és suficient observar que el desenvolupament de qualsevol equació $V_1 = 0, V_2 = 0, ...$, en ser elevat al quadrat conservarà els mateixos constituents i els seus coeficients seran tots ells positius, per la qual cosa la interpretació de $V_1^2 + V_2^2 + ... = 0$ serà equivalent a la interpretació combinada del sistema anterior. Boole pot enunciar així la *proposició* següent:

> *Si $V_1 = 0$, $V_2 = 0$, etc, representa un sistema qualsevol d'equacions, els termes de les quals han estat portats per transposició al primer costat, llavors la interpretació combinada del sistema estarà continguda en l'equació simple*
>
> $$V_1^2 + V_2^2 + ... = 0,$$
>
> *formada sumant junts els quadrats de les equacions donades.*[2]

1 *Ibid.*, 120.

2 *Ibid.*, 121.

En els capítols IX i X de *Laws of Thought*, Boole introdueix alguns *mètodes d'abreujamen*t i *perfeccionament*, evidentment útils si tenim en compte la complexitat dels processos estudiats fins ara. Així, d'acord amb la proposició I del capítol IX, en les equacions de la forma $V = 0$, on V representa una suma de termes de classe -és a dir, termes subjectes a la llei de dualitat- amb coeficient positiu, *"podem eliminar qualsevol terme que contingui un altre terme com a factor i canviar tot coeficient positiu per la unitat"*.[1] En efecte, ja hem vist en la secció anterior, que la interpretació de les equacions de la forma $V = 0$, depèn dels factors del constituents del seu desenvolupament i no dels coeficients dels termes que la formen. Així, per exemple, si la funció té dues variables, x, y, i x, xy són dos termes que apareixen en V, com que l'expansió de x en termes de x, y és

$$xy + (1 - y),$$

i l'expansió de $x + xy$ és

$$2xy + x(1 - y),$$

i ambdues expressions, a l'hora de ser interpretades, duen al mateix resultat, a saber:

$$xy = 0 \text{ i } x(1 - y) = 0,$$

hom pot, en definitiva, substituir l'agregat $x + xy$ pel terme simple x. Per idèntiques raons, es pot reemplaçar tot coeficient positiu per la unitat. Així, per exemple, es pot reemplaçar $2x$ per x, car ambdós termes duen al mateix resultat en ser interpretats, a saber, a l'equació $x = 0$. Anàlogament, la proposició II del mateix capítol enuncia que en el procés d'eliminació, amb la finalitat d'abreujar la multiplicació de factors quan aquests constin només de termes de classe positius, *"és permès eliminar d'ambdós factors qualsevol terme comú, o d'un dels factors qualsevol terme que sigui divisible per un terme en l'altre factor; sempre amb la condició que el terme eliminat sigui afegit al producte dels factors resultants"*.[2] Car, en efecte, si hom representa els factors per $x + P$ i $x + Q$, on P i Q representen sumes de qualssevol termes positius, tenim per la proposició I que:

[1] *Ibid.*, 130
[2] *Ibid.*, 131.

$$(x+P)(x+Q)=x+PQ$$

$$(x+P)(xy+Q)=xy+(x+P)Q,$$

la qual cosa demostra els dos casos enunciats en la proposició. Finalment, en base a la proposició I del capítol IX i del resultats assolits en el capítol VI referents a la interpretació de les equacions de la forma $V=0$, Boole demostra en la proposició I del capítol X que qualsevol equació lògica es pot reduir a una equació de la forma $V=0$, on V satisfà la llei de dualitat, *i.e.* $V(1-V)=0$, "*portant tots els termes de l'equació al primer costat, expandint aquest membre, i transformant en el resultat final tots els coeficients que no s'anul·len en la unitat, llevat d'aquells que ja tenen aquest valor*".[1] I, en aquestes condicions, Boole demostra fàcilment en la proposició II del mateix capítol que, en el desenvolupament de qualsevol símbol de classe t respecte als altres símbols de V, "*els coeficients de l'expansió només poden assumir les formes* $1, 0, \frac{0}{0}, \frac{1}{0}$",[2] la qual cosa confirma teòricament un resultat que ja havia obtingut experimentalment en desenvolupar les equacions lògiques del tipus $V=w$ per tal de determinar la seva interpretació (*Cf. supra*, § 4).

En el capítol XV s'apliquen els mètodes explicats fins aquí a la "lògica aristotèlica i les seves extensions modernes",[3] és a dir, a l'extensió de la sil·logística tradicional que s'obté en afegir-li els nous tipus de proposicions categòriques que sorgeixen en introduir els termes contraris de De Morgan (*Cf. supra*, § 3). Com és ben sabut, els processos de raonament considerats per la lògica tradicional en relació a aquest sistema de proposicions són de dos tipus: el *sil·logisme* i la *conversió*. Així, l'objectiu de Boole en aquest capítol serà "mostrar com aquests processos de sil·logisme i conversió poden dur-se a terme de la manera més general a partir dels principis del present tractat i, veient-los així en relació a un sistema de lògica, les bases del qual, segons crec, s'han fonamentat en les lleis últimes del pensament, intentar determinar el seu vertader lloc i el seu caràcter essencial".[4] Pel que fa als diferents tipus d'inferència sil·logística, Boole demostra que se segueixen fàcilment del seu sistema de la lògica, considerant a tal efecte els dos sistemes d'equacions següents:

---

1 *Ibid.*, 151.
2 *Ibid.*, 155.
3 *Ibid.*, 226.
4 *Ibid.*, 228.

$$vx = v'y \qquad\qquad vx = v'y$$
$$wz = w'y \qquad\qquad wz = w'(1-y).$$

En les equacions anteriors, x i z representen els *extrems*, mentre que y representa el terme mitjà, termes que apareixen en les premisses de qualsevol figura sil·logística. En concret, el primer sistema representa el cas en què el terme mitja té la mateixa *qualitat* en ambdues premisses, mentre que el segon representa el cas en què el terme mitjà apareix amb una qualitat diferent en cada una de les premisses. Segons Boole, totes les varietats relatives a la *qualitat* dels termes de classe que figuren en les premisses i que són representades per les diferents figures sil·logístiques, s'obtenen en assignar a les variables x, y, z en els sistemes d'equacions anteriors una interpretació adequada, mentre que les varietats relatives a la *quantitat* dels termes que apareixen a les premisses, s'obtenen en interpretar adequadament els paràmetres v, v', w, w'. En definitiva, per demostrar que els diferents tipus d'inferència sil·logística se segueixen dels seu mètodes el que fa Boole és, després d'eliminar el terme mitjà y, resoldre els sistemes anteriors per x i $1-x$ i vx. Tal com ha assenyalat Hailperin, "en cada cas, Boole obté la solució general en termes de z i $1-z$ i els paràmetres v, v', w, w'. Imposant la condició que z i $z-1$ poden aparèixer junts i que v i v' (o w i w') poden valer tots dos 1, obté les diferents regles sil·logístiques mitjançant una especificació apropiada dels paràmetres".[1] Pel que fa als diferents tipus de *conversió* considerats per la sil·logística tradicional -que segons Boole, poden reduir-se a la *conversió per negació*, la *conversió simple* i la simple *transposició* de termes -sense alterar la qualitat-, Boole demostra que se segueixen fàcilment a partir dels procediments de càlcul establerts en el seu mètode. Per exemple, ja hem vist al començament d'aquesta secció, que, gràcies al procés d'eliminació, la proposició "Tots els homes són mortal" es podia posar en la forma $y(1-x)=0$, que s'interpreta com "Els homes no mortals no existeixen". Ara bé, d'aquí se segueix immediatament que $1-x=\frac{0}{y}$, i desenvolupant aquesta equació s'obté que $1-x=\frac{0}{0}(1-y)$, que s'interpreta com "Els no mortals no són homes". Aquest és un exemple del que els lògics tradicionals anomenen *conversió per negació*. En definitiva, la demostració dels diferents processos de raonament emprats en la lògica aristotèlica a partir del seu sistema de la lògica, duu Boole a destacar la generalitat del seu mètode enfront de la particularitat d'aquella i el fet que no totes les inferències han de ser necessàriament sil·logístiques. Com veurem més

[1] *Hailperin 1976*, 80.

endavant, Peirce no estarà d'acord amb la possibilitat de reduir les diferents formes d'inferències que pressuposa la lògica aristotèlica als mètodes de raonament emprats per Boole i tindrà una visió radicalment diferent del lloc que corresponia a la lògica aristotèlica en el context de la lògica deductiva, la qual cosa el durà a criticar obertament les conclusions a què arribà Boole en relació a la importància d'aquella (*Cf. infra*, cap. II, § 2).

6. La Teoria de les Proposicions Secundàries

En els capítols XII i XIII de *Laws of Thought*, un vegada exposats tots els processos de raonament propis del seu sistema de la Lògica, Boole torna a emprendre l'estudi de les proposicions secundàries que només havia encetat en el capítol IV, posposant-lo per a un capítol posterior (*Cf. supra*, § 3). Car, segons Boole, "la Teoria de les Proposicions Secundàries és mereixedora d'un estudi atent, tant en raó de les seves aplicacions variades, com per aquella analogia estreta i harmoniosa, a la qual ja ens hem referit, que té amb la teoria de les Proposicions Primàries".[1] Respecte a les aplicacions de la Teoria, Boole destaca que és precisament a partir de proposicions secundàries com s'expressen habitualment els raonaments de la vida quotidiana i els discursos dels moralistes i els metafísics i, de fet, en els capítols XIII i XIV de *Laws of Thought*, Boole aplica el seu mètode a l'anàlisi d'alguns arguments de l'obra de Clarke i Spinoza. Però l'aplicació fonamental de la teoria de proposicions secundàries es troba, sens dubte, en el desenvolupament de la Teoria de Probabilitats, que ocupa els capítols XVI-XXI de *Laws of Thought*. Respecte a la seva analogia amb la Teoria de les Proposicions Primàries, cal recordar que en l'expressió d'ambdós tipus de proposicions s'empren els mateixos símbols i subjectes a les mateixes lleis i que només una diferència de interpretació els separa (*Cf. supra*, § 3).

Recapitulant el que havia dit en el capítol IV, Boole defineix les proposicions secundàries com "aquelles que tenen a veure o es refereixen a Proposicions considerades com a vertaderes o falses"[2] i en distingeix dos tipus: Aquelles que afirmen la veritat o falsedat d'una proposició primària -com, per exemple, "És veritat que el sol brilla"- i aquelles que expressen una relació entre proposicions. D'aquest últim tipus, Boole destaca les proposicions *condicionals* com, per exemple, "Si el sol brilla, el dia serà bo" o les *disjuntives*

[1] *Boole 1854*, 161.
[2] *Ibid.*, 160.

com “O el sol brilla o haurem de posposar l’empresa”.[1] Així, si en les proposicions primàries s’expressava una relació entre coses, en les proposicions secundàries s’expressa una relació entre proposicions o, més exactament, una relació de coexistència entre la veritat o falsedat de les proposicions. D’aquesta manera, el significat lògic dels diferents tipus de proposicions secundàries és sempre el mateix, a saber: “La proposició X és vertadera”, “La proposició X és falsa”, “O la proposició *X* és vertadera o la proposició *Y* és vertadera”, “Si la proposició *X* és vertadera, la proposició *Y* és vertadera”, “Les proposicions *X* i *Y* són totes dues vertaderes”, etc.[2]

Certament, la inclusió d’ambdós tipus de proposicions secundàries en un mateix càlcul causa sens dubte estranyesa en el lector d’avui en dia car, d’acord amb Tarski, hom considera les proposicions del darrer tipus com expressions *en* el llenguatge, mentre que les primeres, en la mesura que són afirmacions sobre el llenguatge, hom les considera expressions del *metallenguatge*. Però, tal com veurem, la seva consideració conjunta en un mateix càlcul és perfectament coherent amb la naturalesa d’aquest. D’altra banda, de l’anàlisi del segon tipus de proposicions no s’ha de deduir que Boole defineixi les connectives -condicional, disjunció, etc- com a funcions de veritat o que desenvolupi el seu càlcul com a sistema de valors de veritat. En preguntar-se, per exemple, pel significat de la proposició condicional esmentada fa un moment, Boole afirma que “un significat indubtable d’aquesta proposició és que el *temps* en què la proposició *X* és vertadera, és *temps* en que la proposició *Y* és vertadera. Aquesta és només una relació de coexistència i pot o no exhaurir el significat de la proposició, però és una relació continguda realment a l’enunciat de la proposició i, encara més, és suficient per a tots els propòsits de la inferència lògica”.[3] La relació expressada per les proposicions secundàries d’aquesta mena no es referirà, doncs, a valors de veritat -vertader i fals-, sinó als intervals de temps -classes d’instants de temps- en què les proposicions elementals són vertaderes. Des d’aquest punt de vista, en efecte, Boole enuncia la següent *proposició* fonamental:

> *Per establir un sistema de notació per a l’expressió de les Proposicions Secundàries i mostrar que els símbols que inclou estan subjectes a les mateixes lleis*

---

1 Boole considera el que podríem anomenar proposicions *conjuntives* a través de l’exemple “No és veritat alhora que “El sol brilla” i que “El viatge serà ajornat””, la qual cosa sembla suggerir que les considerava com un cas particular del primer tipus de proposicions secundàries. Però en exemples posteriors les posa al costat de les condicionals i disjuntives i les formula de la manera habitual.

2 *Cf. ibid.*, 163.

3 *Ibid.*, 163.

> *de combinació que els símbols corresponents emprats en l'expressió de les Proposicions Primàries.*
>
> Emprem les lletres majúscules X, Y, Z, per denotar les proposicions elementals respecte a les quals volem fer alguna afirmació referent a la seva veritat o falsedat o entre les quals cerquem expressar alguna relació en la forma d'una proposició secundària. I emprem les lletres minúscules corresponents x, y, z, enteses com a representatives d'operacions mentals en el sentit següent: Suposem que x representa un acte de la ment mitjançant el qual fixem la nostra atenció en la porció de temps en què la proposició X és vertadera; i sigui el seu significat, quan és afirmada, que x *denota* el temps en què la proposició X és vertadera. Més encara, emprem els signes connectors $+, -, =$, etc, en el sentit següent: suposem que $x+y$ denota l'agregat d'aquelles porcions de temps en les quals les proposicions X i Y són respectivament vertaderes, estant aquests temps separats absolutament l'un de l'altre. De forma semblant, suposem que $x-y$ denota la resta de temps que queda quan llevem d'aquella porció de temps en què X és vertadera, aquella porció inclosa en ella (per hipòtesi) en què Y és vertadera. Suposem també que $x=y$ denota que el temps en què la proposició X és vertadera és idèntic al temps en què la proposició Y és vertadera. Anomenarem al terme x el *símbol representatiu* de la proposició X, etc.[1]

Així doncs, d'acord amb l'anterior, els símbols x, y, z, representaran les classes d'instants de temps en què X, Y, Z, són vertaderes receptivament. I, conseqüentment, els signes $+, -, =$ representaran les operacions i relació habituals entre classes. Ara bé, si volem que els signes x, y, z, representin classes, no necessàriament coextenses amb la classe buida o la classe universal, hem de considerar que X, Y, Z, no tenen necessàriament un valor de veritat determinat, sinó que representen enunciats que són falsos o vertaders en funció de la variable temps. Per tant, emprant la terminologia actual, podríem interpretar apropiadament la proposició anterior, considerant x, y, z, *com els rangs d'arguments que satisfan* les *funcions proposicionals de temps* $X(t), Y(t), Z(t)$, on X, Y, Z, representen els enunciats sobre els quals volem afirmar o negar la seva veritat i t la variable temps.[2]

---

[1] *Ibid.,* 164-65. Notem que els símbols x, y, z, representen proposicions elementals de forma anàloga a com els símbols *literals* o *electius* representaven classes, identificant-se de nou l'acte mental -*en el qual fixem la nostra atenció en la porció de temps per la qual la proposició X és vertadera*- i el resultat d'aquest -*el temps durant el qual la proposició X és vertadera.*

[2] Entenem el terme *funció proposicional* de la forma habitual, això és, com una funció el rang de valors de la qual són valors de veritat. Una funció proposicional es *satisfeta* per un argument -o arguments- si el seu valor per aquest argument -o arguments- és *vertader*. En el nivell present, podem considerar que tota funció proposicional d'una variable determina una *classe*, a saber, aquella formada pels arguments que satisfan la funció proposicional.

A partir de la interpretació fixada per la proposició anterior, Boole determinarà les lleis de combinació dels símbols, que seran idèntiques a les lleis de combinació dels signes amb els quals s'expressaven les proposicions primàries. Aquestes lleis, entre les quals Boole destaca la *llei fonamental de dualitat*, són totes satisfetes pel 0 i el 1. Això porta a Boole a preguntar-se si aquests símbols admeten una interpretació en el sistema actual i, si és així, quina és aquesta. La resposta és òbviament la següent:

> 1r. Que en l'expressió de les proposicions secundàries 0 representarà *no-res* amb referència a l'element temps.
>
> 2n. Que en el mateix sistema, 1 representarà l'univers o la totalitat del temps al qual se suposa que el discurs es refereix d'alguna manera.[1]

Un cop establert un sistema de notació per expressar les proposicions secundàries, Boole centrarà la seva atenció en les regles que s'hauran de seguir per a l'expressió dels seus termes i dels seus diferents tipus. L'expressió del termes es determinarà de forma completament anàloga, si bé en base al sistema d'interpretació actual, a com es determinava l'expressió dels termes de les proposicions primàries (*Cf. supra*, § 3). Més interessant és, potser, l'expressió dels diferents tipus de proposicions secundàries que abans havíem esmentat. Totes les proposicions que afirmen la veritat o falsedat d'una proposició primària són de la forma "La Proposició X és vertadera" o "La Proposició X és falsa". En el primer cas, com que el temps en què X és vertadera s'expressa per x i l'extensió del temps al qual es refereix el nostre discurs s'expressa per 1, tindrem que

$$x = 1$$

és l' expressió de la proposició requerida. En el segon cas, com que no hi ha porció de temps -en l'univers temporal al qual es refereix el nostre discurs- en què la proposició X sigui vertadera, tindrem que

$$x = 0$$

1 *Boole 1854*, 166.

expressarà la proposició requerida. Notem que les proposicions anteriors representen aquells casos extrems en què el valor de la funció proposicional $X(t)$ és sempre *vertader* i sempre *fals*. Si Boole hagués reduït les funcions proposicionals a aquests casos extrems, la teoria de les proposicions secundàries hauria esdevingut un càlcul proposicional. Però, en basar el seu càlcul de proposicions secundàries en el càlcul de classes es fa necessària l'admissió de funcions proposicionals sense restriccions, o si més no, de les classes que elles determinen. Aquesta és la raó fonamental per la qual s'ha d'interpretar la teoria de les proposicions secundàries com un càlcul de funcions proposicionals, o com un càlcul de predicats monàdics sense quantificar, però no es pot interpretar pròpiament com un càlcul de proposicions.

Respecte a les proposicions que expressen relacions de coexistència entre la veritat o falsedat de proposicions primàries, destaquem el següent text on es determina l'expressió de les proposicions *disjuntives* i les *condicionals*:

> *Per expressar la Proposició disjuntiva "O la Proposició X és vertadera o la Proposició Y és vertadera", estant implicat amb això que les proposicions esmentades són mútuament exclusives, és a dir, només una d'elles és vertadera.* El temps en què o bé la proposició X és vertadera o bé la proposició Y és vertadera, però no ambdues, es representa per l'expressió $x(1-y)+y(1-y)$. D'aquí tenim:
>
> $$x(1-y)+y(1-y)=1$$
>
> per l'equació requerida [...]
>
> *Per expressar la Proposició condicional "Si la proposició Y és vertadera, la proposició X és vertadera".* Com que, sempre que la proposició Y és vertadera, la proposició X és vertadera, és necessari i suficient expressar aquí que el temps en què la proposició Y és vertadera és temps en què la proposició X és vertadera; és a dir, que és una porció indefinida del temps total en què la proposició X és vertadera. Ara bé, el temps en què la proposició Y és vertadera és y i el temps total en què la proposició X és vertadera és x. Sigui v un símbol de temps indefinit, llavors vx representarà una porció indefinida del temps total x, D'acord amb això, tindrem
>
> $$y=vx$$
>
> com expressió de la proposició donada.[1]

Per la seva banda, les proposicions *conjuntives*, és a dir, les proposicions del tipus: *"Les proposicions X i Y son totes dues vertaderes"*, s'expressaran mitjançant l'equació:

[1] *Ibid.*, 169-70.

$$xy = 1.$$

Boole considera també les proposicions condicionals en què l'antecedent o el conseqüent -o tots dos- són disjuncions, per a l'expressió de les quals li caldrà expressar primer les disjuncions en la forma habitual, adjuntar el símbol v al conseqüent i igualar els termes així obtinguts. Finalment, Boole considera també un cas particular que es presentarà sovint en els capítols següents de l'obra, aquell en què alguns termes particulars d'un dels termes de l'equació estigui afectat pel símbol v. L'exemple considerat és l'expressió:

$$y = xz + vx(1 - z),$$

que s'ha d'interpretar mitjançant els dos enunciats següents:

1r. Si Y és vertadera, o X i Y són vertaderes alhora o X és vertadera i Z falsa.
2n. Si X i Z són totes dues vertaderes, Y és vertadera.

Boole anomena al segon enunciat la interpretació inversa i és possible perquè existeix un terme en el segon membre amb coeficient igual a la unitat. Notem al respecte que, en el càlcul de classes, l'equació:

$$y = P + vQ,$$

on P i Q són expressions algèbriques que representen un terme particular qualsevol de la proposició, és equivalent al sistema:

$$y = v(P + Q)$$
$$P = vy,$$

i, per tant, la regla d'interpretació *proposicional* abans esmentada es correspon amb un resultat que podria establir-se sense massa dificultat en el càlcul de classes.[1]

Finalment, en el capítol XII de *Laws of Thought* es determinen els mètodes o processos de raonament aplicables a la resolució de problemes relatius a proposicions

---

1 *Hailperin 1976*, 118-19.

secundàries i es donen alguns exemples de la seva aplicació. Ara bé, com que els signes i les seves lleis de combinació són els mateixos tant en l'expressió de les proposicions primàries com de les secundàries, els processos de raonament seran també els mateixos. Així doncs, els mètodes de *desenvolupament*, *eliminació* i *reducció* seran també els mètodes del càlcul de les proposicions secundàries i només la interpretació final dels resultats obtinguts el distingirà del càlcul de les proposicions primàries.

Remarquem, per acabar, que Boole introdueix les proposicions secundàries a *Laws of Thought* d'una forma diferent a com les havia introduïdes a *Mathematical Analysis*. En aquesta obra, en efecte, Boole introdueix les proposicions hipotètiques o secundàries de la següent manera:

> El que hem de considerar ara no són objectes i classes d'objectes, sinó la veritat de les proposicions, a saber, d'aquelles proposicions elementals que comprenen els termes de les nostres premisses hipotètiques.
>
> Als termes X, Y, Z, representatius de proposicions, podem assignar-los els símbols electius x, y, z, en el sentit següent.
>
> L'univers hipotètic, 1, abraçarà tots els casos i conjuntures concebibles de circumstàncies.
>
> El símbol electiu x, assignat a qualsevol subjecte que representi aquests casos, seleccionarà aquells en què la proposició X és vertadera, i de forma semblant per Y i Z.
>
> Si ens confinem a la consideració d'una proposició X i deixem de banda qualsevol altra consideració, llavors només són concebibles dos casos, a saber, primer, que la proposició donada és vertadera i, segon, que és falsa. Com que aquests casos exhaureixen l'univers de la proposició, i com que el primer està determinat pel símbol electiu x, el segon ho estarà pel símbol $1-x$.
>
> Però si admetem altres consideracions, cada un d'aquests casos es podrà resoldre en altres, individualment menys extensos, el nombre dels quals dependrà del nombre de consideracions alienes admeses. D'aquesta manera, si associem les proposicions X i Y, el nombre total de casos concebibles és el que mostra l'esquema següent:

Casos	Expressió electiva
1r X vertadera, Y vertadera	xy
2n X vertadera, Y falsa	$x(1-y)$

3r X falsa, Y vertadera $(1-x)y$

4t X falsa, Y falsa $(1-x)(1-y)$. [1]

Veiem, doncs, que Boole defineix a *Mathematical Analysis* les proposicions secundàries a partir del que anomena "casos o conjuntures de circumstàncies" que, en la pràctica són equivalents al que avui en dia anomenem possibles *valors de veritat* d'una proposició i, per tant, la seva definició avança en bona mesura la definició moderna de les proposicions com a funcions de veritat. És interessant remarcar també l'afirmació del text anterior segons la qual l'únic que interessa a la teoria de les proposicions secundàries és "la veritat de les proposicions" i que, en aquest sentit, "només són concebibles dos casos, a saber, primer, que la proposició donada és vertadera i, segon, que és falsa". Això sembla, en efecte, un senyal inequívoc que Boole estaria pensant en una interpretació de la teoria de les proposicions secundàries en termes del que avui en dia anomenem càlcul proposicional bivalent. S'ha de dir, però, que la interpretació que el mateix Boole fa del que anomena "casos o conjuntures de circumstàncies" i la seva relació amb les proposicions no és del tot clara, car la mateixa definició en el text anterior del paper del símbol electiu x ("seleccionarà aquells [casos] en què la proposició X és vertadera"), sembla indicar que Boole no entenia sempre els "casos o conjuntures de circumstàncies" com els possibles valors de veritat que hom pot assignar a una proposició, sinó més aviat com els "estats de coses possibles" en què aquella proposició és vertadera. A més, el fet que com a resultat de l'aplicació dels seus mètodes algèbrics, els símbols electius puguin prendre valors diferents a 0 i 1, contradiu clarament una possible interpretació de la lògica hipotètica de Boole com un càlcul proposicional bivalent. De fet, l'ambigüitat abans esmentada pel que fa al significat precís de la relació entre els "casos o conjuntures de circumstàncies" i les proposicions és ben palesa també quan Boole introdueix els diferents tipus de proposicions. Així, mentre que les proposicions *disjuntives* es defineixen d'una forma semblant a com les definiríem avui en dia mitjançant taules de veritat, les proposicions *condicionals* es defineixen de forma semblant a com després es definiran a *Laws of Thought*. Segons Boole, en efecte, "la proposició "Si X, llavors Y" implica que tots els casos en què X és vertadera, són casos en què Y és vertadera",[2] la qual cosa mostra que en aquest cas els "casos o conjuntures de circumstàncies" juguen un paper anàleg al que jugaran "els instants de temps" a *Laws of Thought* i que, almenys en aquest cas, Boole entenia els símbols X, Y, Z, com els enunciats

1 *Boole 1916*, 89.

2 *Ibid.*, 93-94.

sobre els quals volem afirmar o negar la seva veritat depenent dels “casos o conjuntures de circumstàncies”, és a dir, com a funcions proposicionals que tenen com arguments variables que representen aquests “casos o conjuntures de circumstàncies”, i els símbols x, y, z, com les classes constituïdes per aquells “casos o conjuntures de circumstàncies” en què X, Y, Z, són vertaderes. En definitiva, doncs, de forma molt semblant a com els entendrà a *Laws of Thought*.

7. La interpretació filosòfica de *Laws of Thought*

Després de la publicació de *Laws of Thought*, Boole publicà només articles sobre la Teoria de Probabilitats. Tanmateix, continuà escrivint sobre Lògica i, encara que podem suposar que no considerava prou satisfactori el grau d’elaboració de les seves reflexions per a que fossin publicades, aquestes constitueixen una font d’informació inestimable per conèixer el que ell mateix anomenà en alguna ocasió la “interpretació filosòfica” dels mètodes i processos de raonament emprats a *Laws of Thought*. En aquest sentit, destaquen particularment l’estudi de les condicions d’interpretabilitat de les distintes expressions que contenen operacions lògiques i la interpretació lògica del procés de desenvolupament, que Boole duu a terme en els manuscrits “On the Mathematical Theory of Logic and on the Philosophical Interpretation of its Methods and Processes” i “Logic and Reasoning”, escrits en els anys immediatament posteriors a la publicació de *Laws of Thought* i que, com ja hem dit, estan recollits a “*George Boole’s Collected Logical Works*”.

Segons assenyala Boole en el primer dels manuscrits anteriors, “les operacions intel·lectuals connectades amb la facultat de Concepció imposen en certs casos condicions sobre els conceptes d’altra forma arbitraris que estan sotmesos a elles. I d’aquí que les formes del llenguatge, que no és sinó l’expressió externa del pensament, imposin condicions d’interpretabilitat sobre els símbols que connecten”.[1] Les condicions d’interpretabilitat de les expressions de qualsevol llenguatge simbòlic es poden determinar a partir de les seves lleis formals i, per això, la concordança entre l’àlgebra de la lògica i l’àlgebra numèrica del 0 i el 1 “s’estén no només a les lleis formal d’operació entre els sistemes comparats, sinó també a les condicions formals d’interpretabilitat de les expressions formades per aquestes operacions

[1] *Ibid.*, 233.

[...] El fonament d'aquesta concordança es mostrarà que consisteix en la comunitat de les lleis formals i, més especialment, de la llei distintiva $xx = x$".[1] Com és dedueixen, doncs, les condicions formals d'interpretabilitat de les operacions de l'àlgebra desenvolupada per Boole a partir de la llei de dualitat? Hem vist abans que tota equació lògica és podia reduir a una equació de la forma $V = 0$, on V satisfà la llei de la dualitat, és a dir, $V(1 - V) = 0$ o $VV = V$ (1) (*Cf. supra*, § 5). Boole continua:

> Primer de tot, doncs, suposem que V representa la combinació $x + y$, on x i y obeeixen la mateixa llei [...] Ara, escrivint $x + y$ per V, (1) esdevé
>
> $$(x+y)(x+y) = x+y.$$
>
> Realitzant l'operació indicada en el primer membre, i substituint en el resultat xx per x i yy per y, tenim
>
> $$x + xy + yx + y = x + y,$$
>
> i d'aquí
>
> $$xy + yx = 0,$$
>
> una equació que en qualsevol sistema es pot satisfer només suposant
>
> $$xy = 0,$$
>
> donat que en Lògica l'única classe, i en l'Àlgebra dual l'únic nombre, que en ser afegida a si mateixa produeix No-res, és No-res. D'aquí que l'equació $xy = 0$ sigui la condició d'interpretabilitat de l'operació de sumar x i y en qualsevol sistema, i és una condició expressada formalment [...] Si apliquem la mateixa anàlisi a l'expressió $x - y$ [...] arribarem a la condició formal d'interpretabilitat
>
> $$y(1-x) = 0$$
>
> [...] Aplicant la mateixa anàlisi a l'expressió xy, formada per Composició, trobem que no hi ha cap condició d'interpretabilitat implicada. Si apliquem un principi semblant a l'anàlisi de l'expressió $\frac{x}{y}$, formada per Abstracció, hem d'observar que, com que l'Abstracció només és intel·ligible en referència a la Composició, l'expressió $\frac{x}{y}$ significa només una classe que per Composició amb y dóna x. Representem aquesta classe per w. Llavors
>
> $$x = yw.$$
>
> Si componem ara ambdós membres amb la classe $(1 - y)$, d'acord amb la condició $y(1 - y) = 0$, tenim
>
> $$x(1-y) = 0.$$[2]

[1] *Ibid*., 20.

[2] *Ibid*., 21-22. Notem que ara la divisió s'interpreta directament com l'operació intel·lectual d'abstracció. En canvi, a *Laws of Thought* Boole considerava que només era interpretable a partir del

Les diferents expressions formals deduïdes a partir de cada una de les operacions representen les condicions d'interpretabilitat d'aquestes operacions, ensems en el sistema de la Lògica i en el de l'Àlgebra Dual. Així, per exemple, $xy = 0$ expressa en el sistema de la Lògica la condició segons la qual $x + y$ és interpretable només quan x i y representen classes disjuntes i, en el sistema de l'Àlgebra Dual, la condició segons la qual aquesta expressió és interpretable només quan x i y representin valors numèrics que en ser multiplicats s'anul·lin -s'exclou, per tant, el cas en què x i y siguin iguals a 1. I, de forma anàloga, les altres dues expressions formals determinen les condicions d'interpretabilitat lògica o numèrica de les operacions a partir de les quals han estat deduïdes -subtracció i divisió. Tanmateix, assenyala Boole, "la deducció de cadascuna de les tres condicions es realitza més fàcilment, i, en l'últim cas, més directament, pel procés de desenvolupament [...] un procés basat fonamentalment en aquella llei peculiar del pensament que forma la base les deduccions prèvies",[1] això és, la *llei de dualitat*. L'explicació d'això la trobem en el context més ampli de la resposta a una qüestió de la màxima importància, a saber, ¿Quin és l'import lògic del procés de desenvolupament i, en general, dels processos de raonament emprats per Boole a *Mathematical Analysis* i *Laws of Thought*? Com ja hem dit manta vegada, una de les principals preocupacions de Boole a partir de la publicació de *Laws of Thought* fou donar raó de l'import lògic dels processos de raonament emprats en el seu sistema de la Lògica que, en aquesta obra, s'havien justificat quasi exclusivament a partir de l'analogia amb els processos de l'àlgebra numèrica del 0 i el 1. Es tracta, en definitiva, de justificar la possibilitat d'un desenvolupament autònom de la Lògica. En aquest sentit, Boole escriu a "Logic and Reasoning" el següent:

> Imagino que hi ha poques persones familiaritzades amb l'obra [*Laws of Thought*] que no hagin pensat, com jo mateix, que a despit de quan curioses i exactes siguin aquestes analogies formals entre la Ciència de la Lògica i la de l'Àlgebra tal com ha estat limitada abans [*als nombres 0 i 1*], seria desitjable que la primera ciència fos desenvolupada independentment [...] Estic disposat a admetre francament que quan vaig escriure aquella obra em trobava excessivament sota el domini d'idees matemàtiques [...] D'ençà la publicació del tractat abans esmentat, la meva atenció s'ha dirigit sovint a la qüestió: Quin és l'import *lògic* dels processos allí emprats?

procés de desenvolupament. Recordem, en aquest sentit, que en aquesta obra la divisió no s'introdueix com una operació del sistema de la lògica, encara que apareix naturalment en els processos de raonament com l'operació inversa del producte.

[1] *Ibid.*, 22.

Deixant de banda les analogies, matemàtiques i d'altra mena, quina doctrina dels processos intel·lectuals resta amagada sota les formes mateixes?[1]

El mateix Boole dóna resposta a aquesta qüestió en el manuscrit "On the Mathematical Theory of Logic" a partir del següent exemple:

> Suposem que en la proposició "Els homes són animals racionals" es requereix trobar explícitament una definició d'"éssers racionals" en termes d'"homes" i "animals". Si representem el concepte "home" per *x*, "éssers racionals" per *y* i "animals" per *z*, tenim l'equació
>
> $$x = yz. \qquad (1)$$
>
> D'aquí
>
> $$y = \frac{x}{z} \qquad (2)$$
>
> i desenvolupant el segon membre,
>
> $$y = 1zx + 0z(1-x) + \frac{1}{0}(1-z)x + \frac{0}{0}(1-z)(1-x) \qquad (3).$$ [2]

Ja hem estudiat la interpretació de les dues classes d'elements que apareixen en qualsevol desenvolupament com ara (3), a saber, els constituents i els coeficients (*Cf. supra*, § 4), però Boole afegeix ara alguns elements d'indubtable interès. Així, respecte als constituents de (3) assenyala que "són independents de la manera en què *z* i *x* entren en l'equació original (1). La definició explícita del concepte lògic *y* en termes dels conceptes lògics *x* i *z*, sigui quina sigui la relació entre aquests conceptes, ha d'incloure en el seu darrer estadi de resolució aquests elements, no perquè els conceptes *x*, *y*, *z* siguin lògics, sinó en virtut de la llei del pensament $x(1-x) = 0$".[3] Notem, en efecte, que si a (3) suprimim els coeficients, tenim la següent forma general:

$$y = zx + z(1-x) + (1-z)x + (1-z)(1-x).$$

Ara bé, aquesta forma general és una *proposició necessària* en el sentit que *y*, en tant que definit en termes de *y* i *z,* pertany *necessàriament* a una de les quatre classes alternatives expressades pels constituents i, per tant, l'equació anterior pot ser formulada "abans de

---

1 *Ibid*., 211-212.
2 *Ibid.,* 242-43.
3 *Ibid*., 243.

qualsevol coneixement del significat dels termes, o a qualsevol informació continguda en les premisses".[1] I aquesta proposició necessària es deriva de la llei de dualitat en el sentit que el seu segon membre no és més que l'expressió d'aquella llei respecte al termes z, x. Segons Boole, "els coeficients, en canvi, depenen de la premissa",[2] donat que s'obtenen substituint a $\frac{x}{z}$ ambdues variables per 0 i 1 indistintament i, aquesta funció depèn de la forma en què aquests símbol eren presents a la premissa $x = yz$. Els coeficients, en definitiva, "mostren sota quines categories lògiques els diversos termes de la proposició necessària han de ser pensats en connexió amb les premisses".[3] En efecte, tal com escriu Boole a "Logic and Reasoning", "les classes alternatives [*els constituents*] que en el predicat de la proposició necessària no modificada estaven totes elles incloses a la categoria de l'indefinit, són cadascuna d'elles determinades [*pels coeficients* 1, $\frac{0}{0}$, 0 i $\frac{1}{0}$] sota alguna de les quatre categories següents: 1a. L'universal [...] 2a. L'indefinit [...] 3a. El no existent [...] 4a. L'impossible [...]".[4] Els coeficients es determinen, com ja hem dit, gràcies al procés de substitució, que a *Laws of Thought* es justifica per l'analogia de l'àlgebra de la lògica amb l'àlgebra numèrica del 0 i el 1. Ara bé, aquesta justificació és inadequada si es pretén desenvolupar autònomament la Ciència de la Lògica. Són igualment inadequades les argumentacions adduïdes en aquella obra respecte a la interpretació lògica dels coeficients -i, per tant, també respecte a la forma com aquests modifiquen la quantitat lògica dels constituents. En els escrits posteriors a *Laws of Thought*, Boole demostrarà com és possible la determinació dels coeficients i la seva interpretació lògica, "deixant de banda les analogies, matemàtiques i d'altra mena". Suposem que, en l'exemple anterior, volem desenvolupar y en funció de z i x, però que no sabem com aquests símbols es presenten en la premissa. Malgrat tot, podem posar:

$$y = Azx + Bz(1-x) + C(1-z)x + D(1-z)(1-x),$$

on tots els constituents són a la categoria de l'*indefinit*, és a dir, no tenen encara una categoria lògica determinada. I, substituint y per $\frac{x}{z}$ tenim:

$$\frac{x}{z} = Azx + Bz(1-x) + C(1-z)x + D(1-z)(1-x).$$

---

1 *Ibid.*, 241.
2 *Ibid.*, 243.
3 *Ibid.*, 243.
4 *Ibid.*, 220.

Ara, si agafem $x = 1$ i $z = 1$, tenim $\frac{x}{z} = Azx$ i $A = 1$ i, per tant, $\frac{x}{z} = 1zx$. Ara bé, en l'expressió $1zx$, 1 determina universalment la quantitat lògica de zx, que abans romania indefinida. Per tant, el desenvolupament anterior indica que zx ha de ser considerada *universalment* en relació a $\frac{x}{z}$, és a dir, que tots els seus elements estan continguts en la classe denotada per $\frac{x}{z}$. En segon lloc, si agafem $x = 1$ i $z = 0$, llavors tenim $B = \frac{1}{0}$. Ara bé, és impossible pensar una classe que composta amb 0 doni 1 i, per tant, l'equació $\frac{x}{z} = \frac{1}{0}z(1-x)$ indica que només es pot determinar $\frac{x}{z}$ com $z(1-x)$ sota la categoria de l'*impossible*, és a dir, és inconcebible que cap membre d'aquesta classe pugui pertànyer a la classe denotada per $\frac{x}{z}$. Agafant $x = 0$ i $z = 1$, tenim $C = 0$ i, per tant, $\frac{x}{z} = 0(1-z)x$, és a dir, $(1-z)x$ ha de ser pensada com a *no existent* en relació a $\frac{x}{z}$ o, dit d'una altra manera, $\frac{x}{z}$ es determinada com $(1-z)x$ sota aquesta circumstància -la no existència d'aquesta classe. Finalment, agafant $x = 0$ i $z = 0$, tenim que$D = \frac{0}{0}$. I com que qualsevol classe que componem amb 0 dóna 0, tenim que $\frac{x}{z} = \frac{0}{0}(1-z)(1-x)$ indica que $\frac{x}{z}$ es determinada com $(1-z)(1-x)$, essent la quantitat lògica d'aquesta classe *indefinida*, és a dir, $\frac{x}{z}$ conté "cap" "alguns" o "tots" els elements d'aquesta classe.

Ara podem entendre també una mica millor perquè Boole afirmava que les condicions d'interpretabilitat de les distintes operacions poden determinar-se més fàcilment -i, en el cas de la divisió més directament- a través del seu desenvolupament. El desenvolupament de $\frac{x}{z}$ ha mostrat, en efecte, que la classe que composta amb z dóna x és impossible de determinar com $(1-z)x$, és a dir, que $\frac{x}{z}$ és ininterpretable quan $x = 1$ i $z = 0$. Les condicions d'interpretabilitat de l'addició i la subtracció, en canvi, no es dedueixen directament del seu desenvolupament. En efecte, si desenvolupem $z + x$ i $z - x$, tenim:

$$z + x = 2zx + 1z(1-x) + 1(1-z)x + 0(1-z)(1-x)$$

$$z - x = 0zx + 1z(1-x) + (-1)(1-z)x + 0(1-z)(1-x).$$

Però, d'acord amb el que s'ha dit abans, com que els constituents amb coeficients que no satisfan la llei de dualitat, han de ser igualats separadament a 0 (*Cf. supra*, § 4), tenim:

$$zx = 0$$
$$(1-z)x = 0,$$

que expressen respectivament les condicions d'interpretabilitat de $z+x$ i $z-x$.

8. Boole i els seus successors

Poc després de la publicació de *Laws of Thought*, el càlcul lògic de Boole fou sotmès a una profunda crítica i revisió, sobretot per W. S. Jevons i Ch. S. Peirce. Aquests autors, encara que consideraven que l'obra de Boole havia marcat un abans i un després en la història de la lògica, foren molt crítics amb alguns aspectes crucials de l'obra de Boole i contribuïren de forma decisiva a transformar l'àlgebra lògica de Boole i donar-li la seva presentació clàssica que tots coneixem avui en dia. De fet, a finals del segle XIX, d'entre els lògics més destacats, només J. Venn seguia fidel a l'àlgebra lògica de Boole pròpiament dita. Com que la influència de Boole en els primers escrits de Peirce i la revisió que aquest autor farà de la seva lògica s'estudien en el proper capítol, aquí serà suficient que ens fem ressò breument de la revisió crítica a què Jevons sotmeté el càlcul lògic de Boole. La primera edició de l'obra més important de Jevons: *Pure Logic or the Logic of Quality apart from Quantity* (*1890*) aparegué tan sols deu anys després de la publicació de *Laws of Thought*. En ella, Jevons afirma que el seu sistema està "basat en el del professor Boole", però afegeix que, a diferència del que s'esdevenia en el sistema de Boole, el seu sistema empra només "processos d'un significat i força autoevidents". En el darrer capítol de *Pure Logic*, el mateix Jevons resumí les seves crítiques al sistema de Boole en el següent text, que dóna alhora una idea acurada de les novetats introduïdes per aquest autor respecte el sistema de Boole:

> Entre les diverses objeccions que faria al sistema de Boole, *considerat com a purament lògic en el seu propòsit*, n'hi ha quatre de principals en les quals centraré la meva atenció:
>
> *Primera Objecció*
>
> *Els símbols de Boole són essencialment diferents dels noms o símbols del discurs comú -la seva lògica no és la lògica del pensament comú.*
>
> El professor Boole empra el símbol + per unir termes, en el ben entès que siguin contraris lògic [...] Això ho qüestiono totalment. En l'ús ordinari d'aquestes conjuncions, no unim necessàriament només contraris lògics [...] No hi ha condició lògica de contrarietat en absolut [...]

Segona Objecció

No hi ha operacions tals com l'addició i la subtracció en la Lògica Pura [...] Els axiomes de l'addició i la subtracció només són vàlids sota una condició lògica, que certament no és aplicable al pensament o al llenguatge, que cada dues unitats siguin alternatives lògiques contràries [...]

Tercera Objecció

La meva tercera objecció al sistema del professor Boole és que és inconsistent amb la llei autoevident del pensament, la llei d'Unitat (A + A = A).

Quarta Objecció

La darrer objecció que presentaré ara contra el sistema del Professor Boole és que *els símbols* 1/1, 0/0, 0/1, 1/0 *no tenen per si mateixos cap significat lògic, i només tenen un significat derivat d'algun mètode de raonament no contingut en el sistema simbòlic.*[1]

Veiem, doncs, que Jevons critica a Boole, en primer lloc, que els símbols emprats per ell no són els del "discurs comú" i, en particular, el seu ús restringit del símbol per a la suma o addició per unir només contraris lògics, és a dir, classes disjuntes. En segon lloc, Jevons opina, en contra de Boole, que no hi ha a la lògica operacions anàlogues a l'addició o subtracció aritmètiques -és a dir, amb propietats anàlogues a aquestes com, per exemple, el fet que siguin aplicables només a classes disjuntes. En tercer lloc, Jevons crítica a Boole que el seu sistema sigui inconsistent amb la llei $x + x = x$, és a dir, amb la llei de *tautologia* o *idempotència*, que Jevons anomena principi d'*unitat*. Finalment, Jevons critica la no interpretabilitat lògica dels coeficients 1, $\frac{0}{0}$, 0 i $\frac{1}{0}$. De fet, el sistema de Jevons permet prescindir, encara que en el text anterior no se'n faci cap referència, no només de les operacions d'addició i subtracció booleanes, sinó també de l'operació de divisió. Boole, en una carta de 1863, respongué a les objeccions anteriors de Jevons que la llei $x + x = x$ era falsa i que Jevons s'equivocava en intentar interpretar expressions com $x + x$ en comptes d'equacions com ara $x + x = 0$, afirmant en aquest sentit que "l'equació $x + x = 0$ és equivalent a l'equació $x = 0$; però l'expressió $x + x$ no és equivalent a l'expressió x. El seu principi d'*unitat* no és aplicable a les expressions".[2] En definitiva, en el seu intent de fer més "lògics" o "naturals" els processos de raonament emprats per Boole, Jevons substituí la suma booleana per l'addició lògica, formulà la llei d'idempotència o tautologia respecte aquesta

[1] *Jevons 1890*, 68-75.

[2] *Citat a Hailperin 1976*, 85.

operació -que ell anomenava llei d'*unitat*- i prescindí de les operacions inverses: la subtracció i la divisió. L'addició lògica fou introduïda per primera vegada per A. De Morgan en l'article "On the Syllogism II; and on Logic in General" (*1850*) amb el nom d'*agregació*.[1] Tal com veurem en el capítol següent, Ch. S. Peirce introduí independentment dels autors esmentats l'addició lògica en un parell d'articles de 1867, encara que només prescindí totalment de la suma booleana i les operacions inverses a partir de 1880.

1 *De Morgan 1850*, 185.

CAPÍTOL II

Peirce i l'ampliació d'horitzons de la lògica

1. La lògica com a branca de la semiòtica

Potser allò que distingeix més clarament la lògica de Peirce de la de la resta d'autors del corrent algèbric (Boole, Jevons, Venn o Schröder) sigui la perspectiva semiòtica des de la qual el primer va entendre la lògica i que el va dur en els seus escrits de maduresa a identificar la lògica amb la *semiòtica* -teoria de les *representacions* o *signes*. La lògica o semiòtica de Peirce, d'una altra banda, està íntimament relacionada amb la seva teoria de les categories, la qual constituïa, segons el parer del mateix autor, "la meva contribució principal a la filosofia".[1] L'estreta connexió entre la teoria de les categories i la lògica es remunta a Aristòtil, el pare de la lògica occidental, el qual entengué les categories com els diferents *tipus de predicats* o *classes de predicació* que podien donar-se en una proposició.[2] Aquesta connexió és ben palesa també en Kant, qui va entendre les categories com els conceptes fonamentals del nostre coneixement i deduí la taula de les categories a partir de la taula de judicis reconeguts per la lògica tradicional, influint decisivament en aquest respecte en Peirce. Segons aquest autor, en efecte:

> La llista de categories [...] és una taula de conceptes derivats de l'anàlisi lògica del pensament i que es considera aplicable a l'ésser. Aquesta descripció no s'aplica simplement a la llista publicada per mi mateix el 1867 i que aquí em proposo amplificar, sinó també a les categories d'Aristòtil i a les de Kant. Aquestes últimes han estat més o menys modificades per diferents crítics, com Renouvier i, encara més

---

1 Carta a Mario Calderoni, citada a W1 xxvi. Com és habitual, les referències a *Writings of Charles S. Peirce: A Chronological Edition* (*Peirce 1982-*) es faran amb la lletra W seguida del volum pertinent i la pàgina, mentre que les referències a *Collected Papers of Charles Sanders Peirce* (*Peirce 1931-1958*) es faran posant les majúscules CP seguides del volum i el paràgraf.

2 *Cf. Cat* 4, 1b 25-2a 4 (*Aristóteles 1982*, 33-34) i *Top.* I.9, 103b 20-25 (*Aristóteles 1988*, 103) respectivament.

profundament per Hegel. La meva pròpia llista sorgeix originàriament de l'estudi de la taula de Kant.[1]

Tal com explica el text anterior, Peirce s'havia inspirat en Aristòtil i Kant en considerar la llista de categories com "una taula de conceptes derivats de l'anàlisi lògica del pensament". D'aquests autors, Peirce havia après efectivament que la metafísica "descansa directament sobre la teoria de la lògica"[2] i que "els conceptes comuns no són sinó objectivitzacions de formes lògiques".[3] Segons Peirce, Kant havia definit correctament la lògica com "la ciència de la forma pura del pensament" i havia comprès la importància d'una "anàlisi lògica dels productes del pensament" per una deducció correcta de la taula de categories. Amb tot, Kant no havia estat capaç de produir-ne una que fos satisfactòria, degut a les mancances de la seva anàlisi lògica dels diferents tipus de judicis i perquè no havia estat capaç de copsar "totes les diferències de formes elementals i significatives que existeixen entre els signes de tota mena".[4] Segons Peirce:

> Per dur a terme pròpiament el mètode de Kant es requeriria, primer de tot, la invenció d'un llenguatge totalment exacte, sistemàtic i analític, en el qual tot el raonament pugui ser expressat i reduït a regles formals; i, segon, l'anàlisi dels signes d'aquell llenguatge per tal de fer una taula de les seves varietats.[5]

Aquestes dues tasques corresponen respectivament a la *Crítica* i a la *Gramàtica Especulativa*, dues de les tres branques en què Peirce dividirà més endavant la lògica general o semiòtica.[6] Pel que fa a la *Crítica* o lògica *strictu sensu*, el programa peircià de construir un llenguatge o càlcul lògic "en el qual tot el raonament pugui ser expressat i reduït a regles formals" pren com a punt de partida l'obra de Boole, el qual havia pretès precisament "expressar en el llenguatge simbòlic d'un càlcul" les lleis del pensament. Amb tot, després d'uns primers intents reformadors del sistema de Boole, publicats en un parell d'articles de 1867: "On an Improvement in Boole's Calculus of Logic" (*1867$_a$*) i "Upon the Logic of mathematics" (*Peirce 1867$_d$*), Peirce se n'adonarà de la insuficiència del sistema de Boole per

1 CP 1.300.
2 CP 2.121.
3 CP 3.404.
4 CP 1.561.
5 Citat per *Hookway 1985*, 85.
6 L'altra branca, tal com veurem després, és la *Retòrica especulativa*.

expressar els diferents tipus de judicis i raonaments, la qual cosa el durà a estendre l'àlgebra lògica de Boole amb la introducció dels termes relatius en el seu important article "Description of a Notation for the Logic of Relatives, Resulting from an Amplification of the Conceptions of Boole's Calculus of Logic" (*1870*). Així, Peirce introduirà juntament amb els *termes absoluts* ja considerats per Boole, els *termes relatius simples* i els *termes conjugatius*. Això és important perquè, tal com reconeixerà Peirce més endavant:

> L'estudi aprofundit de la lògica de relatius confirma les conclusions a les quals havia arribat abans d'endinsar-me en aquell estudi [de les categories], car mostra que els termes lògics són o bé mònades, o díades o políades, i que aquests últims no introdueixen cap element radicalment diferent d'aquells que podem trobar en les tríades.[1]

Ara bé, si bé el desenvolupament de la lògica de relatius oferia als ulls de Peirce una confirmació empírica de la necessitat de distingir tres tipus de termes lògics, la qual pressuposaria alhora tres tipus de conceptes o categories diferents, no n'oferia pas una confirmació teòrica. Per això, calia demostrar efectivament que tots els termes lògics són reductibles a *mònades*, *díades* i *tríades*, essent aquestes irreductibles entre si. Aquesta és la famosa *tesi de reducció*, que Peirce enunciarà en forma de conjectura en l'article de 1870 abans esmentat i intentarà demostrar en els anys posteriors, primer a través de procediments algèbrics i després a través dels seus gràfics. Així doncs, l'interès peircià en aquesta tesi és clarament un interès de tipus metafísic, car Peirce veia la seva demostració com l'única manera de confirmar definitivament la necessitat de tres categories diferents i irreductibles entre si.

La deducció de les categories és un tema central de la filosofia de Peirce d'ençà els seus primer escrits. En aquests escrits, datats a finals de la dècada dels 50, Peirce derivarà les categories dels pronoms personals i les anomenarà conseqüentment *I*, *It* i *Thou*.[2] Però l'escrit més important de Peirce dedicat al tema de les categories és "On a New List of Categories" (*1867*$_c$), si bé la major part de les idees allí exposades ja havien estat formulades en les lliçons [*Lectures*] impartides en el *Lowell Institute* la tardor de 1866, titulades originalment

1 CP 1.293.

2 Peirce dirà que aquestes tres categories es corresponen amb els tres moments de la dialèctica hegeliana (tesi, antítesi i síntesi) i amb les tres categories implícites en cada una de les quatres triades amb què Kant presenta la seva taula de categories. S'ha remarcar, a més, que aquesta triada es pot considerar un reflex a nivell filosòfic de la conversió religiosa de Peirce de l'Unitarisme al Trinitarisme. Més informació al respecte a W1 xxx-xxxii.

"The Logic of Science; or, Induction and Hypothesis", però més conegudes com *Lowell Lectures*. [1] El punt de partida de l'article "On a New List of Categories" és marcadament kantià, tal com reconeix el propi Peirce:

> Aquest article es basa en una teoria ja establerta, segons la qual la funció dels conceptes [categories] es reduir la multiplicitat d'impressions sensòries a una unitat i la validesa d'un concepte consisteix en la impossibilitat de reduir el contingut de la consciència a unitat sense la seva introducció [...] La unitat a la qual l'enteniment redueix les impressions és la unitat d'una proposició. Aquesta unitat consisteix en la connexió del predicat amb el subjecte.[2]

Així doncs, per deduir la taula de categories serà suficient descobrir els conceptes universals presents d'alguna manera en una proposició del tipus subjecte-còpula-predicat. Els dos primers conceptes o categories són la *substància* i l'*ésser*, denotats respectivament pel subjecte i la còpula. La tercera categoria és la *qualitat*, denotada pel predicat. Ara bé, aquesta categoria pressuposa dues noves categories o conceptes: la de *relació* i la de *representació*. Tenim així la següent "llista nova de les categories":

ÉSSER
Qualitat (referència a un fonament)
Relació (referència a un correlat)
Representació (referència a un interpretant)
SUBSTÀNCIA.[3]

Amb tot, Peirce insisteix, tant en les *Lowell Lectures* de 1866 com en l'article "On a New List of Categories", que *ésser* i *substància* no tenen contingut o *connotació* i, per tant, només les categories de *qualitat*, *relació* i *representació* tindran una aplicabilitat pràctica. Així, ens els escrits posteriors a 1890, en els quals Peirce reprèn amb força el tema de les categories, les categories de *substància* i *ésser* seran esborrades de la llista de categories, en la qual hi figuraran només les categories de FIRTNESS, SECONDNESS i THIRDNESS, nom amb el qual d'ençà llavors Peirce denotarà les categories de *qualitat*, *relació* i *representació*. Així doncs, per veure la influència de la teoria de categories peirciana en la

1 I, en particular, en la *Lecture IX* (W1 471-488).
2 W2 49 (CP 1.545, 548).
3 W2 54 (CP 1.555). Vegeu també W1 473.

seva concepció semiòtica de la lògica, caldrà clarificar primer de tot la naturalesa de les categories de qualitat, relació i representació, tal com aquestes són introduïdes en els primers escrits del nostre autor abans esmentats. Tal com dèiem abans, Peirce parteix per a la seva deducció de les categories del supòsit que la funció de les categories és reduir la multiplicitat d'impressions a la unitat d'una proposició. D'acord amb Peirce, tota proposició és reductible a la forma "A és B" i consisteix, per tant, en la connexió del predicat amb el subjecte a través de la còpula. Aquesta connexió expressa, per la seva banda, l'atribució d'una *qualitat* a una substància. Peirce entén per *qualitat* la *referència a un fonament* [*ground*] o concepte abstracte i és gràcies a aquesta que el predicat pot referir-se mediatament a un objecte individual. Així, per exemple, quan Peirce escriu a "On a New List of Categories" que "la mateixa cosa és significada per "l'estufa és negra" i per "hi ha negror en l'estufa"",[1] el que vol dir és que "negre" es refereix a "l'estufa" en la mesura que aquesta encarna la negror. Així doncs, "negre" es refereix, en primer lloc, al concepte abstracte "negror", que constitueix la seva significació i en base a aquesta significació, en segon lloc, a l'estufa particular. La qualitat o referència a un fonament és, doncs, la primera categoria. Ara bé, quan hom assigna una qualitat a un objecte i forma així una proposició, el que fa en realitat és una "petita teoria" per explicar, interpretar, la sensació rebuda:

> Miro una estufa negra. Hi ha una sensació directa de negror. Però si jutjo que l'estufa és negra, estic comparant aquesta experiència amb experiències prèvies. Estic comparant la sensació amb una idea coneguda derivada d'objectes negres familiars. Quan em dic a mi mateix que l'estufa és negra, estic fent una petita teoria per donar raó de la seva aparença.[2]

Ara bé, comparar significa referir una cosa, el *relatum* o fonament -en el nostre cas, la negror de l'estufa- a un o més *correlats* -per exemple, la negror del carbó, d'un corb o d'un teixit. Així doncs, la *relació* o *referència a un correlat* és la segona categoria. Finalment, "tota comparació requereix també, juntament amb la cosa relacionada, el fonament, i el correlat, *una representació mediata que representi que el relatum és una representació del mateix correlat que aquesta mateixa representació mediata representa*".[3] Peirce anomena a aquesta representació mediata l'*interpretant*, "perquè compleix la funció d'un intèrpret, el

---

1 W2 52 (CP 1.551).
2 Citat a *Hookway 1985*, 92.
3 W2 53 (CP 1.553).

qual diu que un estranger diu la mateixa cosa que ell diu".[1] Així doncs, la *representació* o *referència a un interpretant* és la tercera categoria. Podríem resumir així la teoria peirciana de les categories dient que la síntesi de la multiplicitat d'impressions que l'enteniment duu a terme en la proposició requereix: 1. La categoria de *qualitat* o referència a un fonament; 2. La categoria de *relació* o referència a un correlat, 3. La categoria de *representació* o referència a un interpretant. La tercera categoria té com a condició necessària la segona categoria, que té a la vegada com a condició necessària la primera categoria, de manera que la categoria de representació implica no només la referència a un interpretant, sinó també la referència a un correlat i a un fonament. Aquesta categoria té, doncs, un caràcter triàdic i, per mor d'això, Peirce l'anomenarà més endavant *thirdness*. Anàlogament, la categoria de relació implica no solament la referència a un correlat, sinó també a un fonament i té, doncs, un caràcter diàdic, per la qual cosa Peirce l'anomenarà *secondness*. Finalment, la categoria de qualitat implica només una referència a un fonament i Peirce l'anomenarà consegüentment *firtness*.

Una vegada explicada la teoria de les categories de Peirce en la seva primera versió dels anys 1866-67, podem ja explicar la seva concepció semiòtica de la lògica a partir de la mateixa font d'on ella brolla i que no és altra que la teoria de categories. De les tres categories peircianes, qualitat, relació i representació, només la tercera representa una novetat respecte a la taula de categories aristotèlica i kantiana.[2] Ara bé, tal com explicarem a continuació, aquesta última categoria juga un paper central en la concepció semiòtica de la lògica mantinguda per Peirce al llarg de la seva vida, encara que les diferents classificacions semiòtiques que trobem en la seva obra siguin sempre fruit de l'aplicació de les tres categories -no podia ser d'una altra manera, tenint en compte que la tercera categoria pressuposa les altres dues. A la resta d'aquesta secció estudiarem la manera en què Peirce definí la lògica en els seus primers escrits, particularment en les lliçons impartides a la universitat de Harvard en la primavera de 1865, titulades originalment "On the Logic of Science", però més conegudes com *Harvard Lectures*. Això ens oferirà l'ocasió ideal per introduir alguna de les *tricotomies* -tríades de categories semiòtiques- més conegudes de Peirce i estudiar com les dedueix a partir de la seva teoria de les categories. En una primera aproximació, Peirce defineix la lògica com "la ciència de les representacions en general"[3] i, per tant, identifica la lògica amb la semiòtica. Amb tot, continua Peirce, aquesta definició "és

---

1 W2 54 (CP 1.553).

2 Notem, en efecte, que qualitat i relació constitueixen les capçaleres de dues de les quatre tríades de categories kantianes.

3 W1 169.

massa àmplia, car la lògica no tracta de tots els tipus de representació”.[1] D'acord amb la teoria de categories peirciana, una *representació* o *representamen* pot considerar-se: 1. tal com (*quale*) és en si mateixa, és a dir, en relació al *fonament* que fa que sigui un objecte d'aquesta mena -una representació; 2. en relació al seu *objecte* o correlat; 3. en relació al seu *interpretant*. Doncs bé, el punt de vista que interessa a Peirce és el segon, perquè a la lògica l'interessa principalment la veritat i, en particular, un tipus de veritat que consisteix en “la concordança d'una representació amb el seu objecte”,[2] això és, la “veritat lògica”. Ara bé, en relació a llur objecte o correlat i aplicant de nou les categories de qualitat, relació i representació, tenim tres classes de representacions:

> 1. Aquelles la relació de les quals amb els seus objectes és una mera comunitat en alguna qualitat i aquestes representacions podrien anomenar-se *Semblances* [*Likeness*].
>
> 2. Aquelles la relació de les quals amb els seus objectes consisteix en una correspondència real, i aquestes podrien anomenar-se *Índexs* o *Signes*.
>
> 3. Aquelles el fonament de la relació de les quals amb els seus objectes és un caràcter imputat, que són el mateix que els *signes generals*, i aquestes podrien anomenar-se *Símbols*.[3]

Tenint en compte que Peirce empra en aquests primers escrits els terme *representació* o *representamen* amb el mateix significat amb que després emprarà el terme *signe* i els termes *semblança -o còpia-* i *signe* amb el mateix significat amb què després emprarà els termes *icona* i *índex* respectivament, veiem clarament que la classificació anterior és equivalent a la coneguda classificació de l'article “On the Algebra of Logic: A Contribution to the Philosophy of Notation” (*1885*) dels *signes* en *icones*, *índexs* i *símbols*. Aquesta és la més important de les múltiples classificacions semiòtiques fetes per Peirce i més endavant tornarem a ella per explicar la concepció madura de Peirce sobre la naturalesa de la lògica. De moment és interessant remarcar que Peirce obté la triple divisió de les representacions en *semblances*, *índexs* i *símbols* a partir dels diferents tipus de relació que aquelles tenen amb el seu objecte. Tal com hem vist, si aquesta relació consisteix en “una mera comunitat en alguna qualitat”, és a dir, si allò que fa que quelcom sigui una representació és el fet que comparteix

1 W1 169.
2 W1 170.
3 W2 56 (CP 1.558).

amb allò representat un cert caràcter o qualitat, llavors aquesta representació serà una *icona*. Per exemple, el plànol a través del qual representem un pis, o el diagrama a través del qual representem un argument són *icones*. Si la relació entre la representació i l'objecte representat consisteix en una "correspondència real" de caràcter purament referencial, llavors la representació serà un *índex*. Per exemple, un penell o un nom propi són índexs que indiquen respectivament la direcció del vent o una persona determinada. Finalment, si el fonament de la relació d'una representació amb el seu objecte és un "caràcter imputat" de forma arbitrària o convencional a aquesta representació, en base al qual aquesta representa el seu objecte, llavors aquesta representació serà un *símbol*. Per exemple, una bandera blava a la platja significa que hom s'hi pot banyar. Ara bé, l'ús de la bandera blava no explota cap caràcter o propietat compartida amb el mar ni tampoc té una correspondència real amb un determinat estat de la mar. El que fa que la bandera blava signifiqui la seguretat de la platja és l'existència d'una pràctica generalitzada d'emprar una bandera blava amb aquesta finalitat. De la mateixa naturalesa són els termes generals o noms comuns emprats en lògica o en el llenguatge corrent. Doncs bé, segons afirma Peirce en els seus primers escrits, la lògica només s'ocupa d'aquesta mena de *signes generals* i, per tant, només els *símbols* són d'interès per al lògic.[1] Així doncs, una segona aproximació a la definició de lògica seria definir-la com "la ciència dels símbols en general",[2] però aquesta definició encara li sembla a Peirce massa àmplia:

> Aquesta, en efecte, podria constituir la definició d'una certa ciència, que seria una branca de la Semiòtica, la ciència general de les representacions i podria anomenar-se Simbolística i de la qual la lògica en seria una espècie. Però la lògica només considera els símbols des d'un punt de vista particular.[3]

D'acord amb la teoria de categories peirciana, en efecte, els símbols també poden considerar-se en relació al seu fonament, al seu objecte o correlat i al seu interpretant. Així, si considerem els símbols en la mesura que es refereixen a un objecte o correlat i apliquem de nou les tres categories peircianes, tenim la següent classificació dels símbols:

---

[1] Com veurem més endavant, Peirce sostindrà a partir de 1885 que el desenvolupament d'un sistema de notació o àlgebra lògica adequat per al desenvolupament de la lògica deductiva requereix tots tres tipus de signes: icones, índexs i símbols (*Cf. infra*, § 9).

[2] W1 174.

[3] W1 174.

Símbol

- *Terme*, pensat per referir-se a un fonament -l'objecte del qual és formalment un Quale.
- *Proposició*, pensat per referir-se a un correlat -l'objecte del qual és formalment un Relatum.
- *Argument*, pensat per referir-se a un intepretant -l'objecte del qual és formalment una Representació.[1]

Segons Peirce, els termes "no són sinó sumes de marques", les quals són "representacions que denoten sense connotar",[2] això és, índexs o signes. De forma paradigmàtica, un terme és un nom comú, el qual es considera llavors com una suma de noms propis. Les proposicions, com ja sabem, estan constituïdes per dos termes, el subjecte i el predicat i, a més, la còpula a través de la qual s'uneixen aquests termes. Naturalment, els objectes o correlats als quals fan referència les proposicions són el Vertader i el Fals. D'una altra banda, "el terme "argument" denota un conjunt de premisses",[3] això és, "un sil·logisme *minus* la conclusió, car la conclusió d'un sil·logisme no és part de l'argument, sinó l'assentiment, l'interpretant".[4] En aquest sentit, doncs, "les premisses constitueixen una representació de la conclusió"[5] o interpretant, el qual és alhora una representació d'aquestes premisses en la mesura que aquestes representen el seu objecte -el Vertader i el Fals. Doncs bé, Peirce sosté en els seus primers escrits que la lògica s'ocupa d'aquests tres tipus de símbols o, més exactament, "de les condicions que permeten als símbols en general referir-se a objectes".[6] Així doncs, si la simbolística constitueix una de les tres parts en què es divideix la semiòtica, la lògica constituirà una de les tres parts en què es divideix la simbolística i, de fet, Peirce la defineix sovint en els seus primers escrits com *simbolística objectiva*. Així doncs, la lògica és només una branca de la semiòtica, tal com mostra el següent esquema de classificació de les ciències de 1865:

1 W1 478.
2 W1 308.
3 W2 23 (CP 2.461).
4 W1 478.
5 W2 58 (CP 1.559).
6 W1 175.

Ciències

Ciència Formal | Semiòtica | Ciència Positiva

Ciència de les còpies | Simbolística | Ciència dels Signes

Gramàtica | Retòrica | Lògica.[1]

En l'article "On a New List of Categories", Peirce defineix de forma anàloga la lògica a com ho havia fet en les *Harvard Lectures* i assenyala també que, en aquest sentit, forma part del següent *trivium* de ciències:

> La primera tractaria de les condicions formals a través de les quals els símbols tenen significat, això és, de la referència dels símbols en general als seus fonaments o caràcters imputats, i aquesta ciència podria anomenar-se gramàtica formal; la segona, la lògica, tractaria de les condicions formals de la veritat dels símbols; i la tercera, tractaria de les condicions formals de la força dels símbols, o de la seva força per apel·lar a la ment, això és, de la seva referència en general als interpretants, i aquesta ciència podria anomenar-se retòrica formal. [2]

Aquesta divisió de la Simbolística en Gramàtica Formal, Lògica i Retòrica Formal és un avenç de la seva ulterior i més habitual divisió de la Semiòtica en Gramàtica Especulativa, Crítica o Lògica i Retòrica Especulativa o Metodèutica.[3] Segons afirmarà Peirce més endavant, la Gramàtica Especulativa és l'estudi de les "condicions generals en què els signes són signes"[4] i, per tant, estudia les condicions necessàries i suficients que fan que els signes

---

[1] W1 304.

[2] W2 57 (CP 1.559).

[3] Vegeu, per exemple: CP 1.91, 2.93, 2.229 i 4.370. En aquests i altres escrits, Peirce distingirà entre la lògica "en sentit ampli", la qual identificarà amb la semiòtica, i la lògica "en sentit estricte", que identificarà amb la Crítica. Aquesta definició de la lògica "en sentit ampli" com a semiòtica, que substitueix l'antiga definició com a simbolística, és conseqüència de la presa de consciència per part de Peirce que el desenvolupament de la lògica formal no només requereix els símbols, sinó també els índexs i les icones.

[4] CP 1.444.

representin quelcom i classifica els diferents tipus de signes. La Crítica, segons Peirce, "és la ciència de les condicions necessàries per a l'obtenció de la veritat"[1] i, per tant, "estudia les parts constituents dels arguments i produeix una classificació dels arguments".[2] Finalment, la Retòrica Especulativa, "és l'estudi de les condicions necessàries de la transmissió de significat a través dels signes d'una ment a una altra i d'un estat mental a un altre"[3] i sembla estudiar, doncs, la relació que es dóna entre els signes i els seus interpretants. Així doncs, la concepció peirciana sobre la naturalesa de la lògica que predomina d'ençà els seus primers escrits és la d'una ciència que estudia i classifica els diferents tipus d'arguments o raonaments emprats en la ciència, és a dir, la d'una *ciència classificatòria*.[4] En aquest sentit, la definició de la lògica com a simbolística general que hem vist abans, o la seva posterior identificació amb la semiòtica, constituiria una mena de propedèutica per introduir el veritable objecte d'estudi de la lògica o crítica, això és, la classificació dels arguments. La conseqüència immediata d'això és evidentment que dels tres tipus de símbols abans esmentats, Peirce s'ocupa quasi exclusivament dels *arguments* i s'ocuparà només dels *termes* i *proposicions* en la mesura que entrin en aquells. La classificació dels arguments s'obté òbviament a partir de la teoria de categories. Així, podem dir a grans trets que l'aplicació de les categories de qualitat, relació i representació dóna lloc a la distinció entre raonament *hipotètic*, *inductiu* i *deductiu*, els quals Peirce identificarà amb la segona, tercera i primera figura respectivament de la sil·logística aristotèlica. La novetat de la triada peirciana rau naturalment en el raonament hipotètic, car ningú abans d'ell havia distingit el raonament hipotètic de l'inductiu. Segons Peirce, la ciència empra aquests dos tipus de raonament, l'hipotètic i l'inductiu, mentre que les matemàtiques empren només el raonament deductiu, el qual Peirce dividirà més endavant en raonament *corol·làric* [*corollarial*] i *teorèmic* [*theorematic*].

---

1 CP 1.445.
2 CP 2.205.
3 CP. 1.445.
4 W1 359.

2. La influència de Boole en els primers escrits lògics de Peirce

A gener de 1867 Peirce fou escollit membre de l'*American Academy of Arts and Sciences*, a la qual adreçà el març, abril, maig, setembre i novembre d'aquell mateix any els següents articles sobre lògica: "On an Improvement in Boole's Calculus of Logic", "On the Natural Cassification of Arguments" (*1867*$_b$), "On a new List of Categories", "Upon the Logic of Mathematics" i "Upon Logical Comprehension and Extension" (*Peirce 1867*$_e$). En la secció anterior hem explicat la teoria de les categories peirciana a partir fonamentalment de les *Lowell Lectures* de 1866 i de l'article "On a new List of Categories" de maig de 1867, així com la concepció semiòtica de la lògica que Peirce deriva de l'anterior teoria i que defensa en les *Harvard Lectures* de 1865. En aquesta secció estudiarem l'anàlisi crítica que Peirce fa en les lliçons de Harvard i del Lowell Institute de l'àlgebra de la lògica de Boole, mentre que en la secció següent estudiarem les modificacions que aquest autor proposarà en els articles "On an Improvement in Boole's Calculus of Logic" i "Upon the Logic of Mathematics" de març i setembre de 1867 per tal de millorar-la.

En les lliçons 3 i 6 de Harvard, Peirce exposa els trets essencials de l'àlgebra lògica de Boole, tot mostrant una gran admiració per la seva obra. Així, la sisena lliçó comença amb el següent paràgraf laudatori:

> Potser la concepció més extraordinària de la lògica que mai s'hagi realitzat amb èxit sigui la del professor Boole de Dublin. El seu llibre es titula *Una investigació de les lleis del pensament, en la qual es fonamenten les teories matemàtiques de la lògica i de la probabilitat.* Està destinat a marcar una gran època en lògica, car conté una concepció de la lògica que, des del punt de vista de la seva fertilitat, rivalitzarà amb l'*Organon* d'Aristòtil.[1]

Un dels grans mèrits de Boole, assenyala Peirce, és haver estat capaç de desenvolupar un sistema de notació efectiu per al càlcul lògic. Naturalment, Boole no fou el primer en intentar simbolitzar els processos de raonament lògic, però el sistema de notació booleà és clarament superior al dels seus predecessors. Aquests es divideixen en dos grups: aquells en què s'empren *símbols geomètrics*, com és el cas dels cercles d'Euler, els quals degut a la seva naturalesa permeten expressar fàcilment les lleis de la lògica, i aquells en què s'empren

[1] W1 224.

símbols literals, com és el cas del sistema de notació de Ploucquet i Hamilton. Ara bé, continua Peirce:

> La notació que Boole inventà combina les excel·lències de totes dues classes de símbols. Car, com les notacions literals, és abstracta i s'ocupa de les mateixes lleis de la lògica i, com les notacions geomètriques, subratlla l'harmonia entre la lògica i les matemàtiques, la qual cosa fa que hom pugi pensar més fàcilment en la primera. A més d'això, posseeix per si mateixa una excel·lència peculiar, car aporta sobre les matemàtiques una nova llum provinent de la lògica i facilita immensament la solució de difícils qüestions de probabilitat.[1]

Amb tot, adverteix Peirce:

> Estic molt lluny de dir que el sistema és una perfecta representació de la lògica; ans al contrari, remarcaré immenses mancances en la seva notació que foren totalment obviades pel seu autor i mostraran que només una part molt petita de tots els judicis pot expressar-se d'aquesta manera. Però llavors hom ha de recordar que el mètode és encara en la seva infància i que, fins i tot ara, il·lumina tants de punts foscos, que el seu valor és incalculable.[2]

En les *Harvard Lectures*, Peirce assenyala concretament que les proposicions condicionals i particulars no poden expressar-se correctament en el sistema de Boole. Pel que fa a les primeres, assenyala Peirce:

> L'autor intentà expressar-les de la següent manera. Agafem el judici "Si hi ha vent de l'est, el baròmetre puja". Ell diria: suposem que a expressa "hi ha vent de l'est" i que b expressa "el baròmetre puja"; llavors $a = ab$ significarà "Si hi ha vent de l'est, el baròmetre puja". Però, en primer lloc, això altera el significat del signe d'igualtat i pertany, per tant, a un sistema inconsistent amb aquell en què Boole expressa les proposicions categòriques. En segon lloc, destrueix la possibilitat d'expressar les proposicions problemàtiques, excepte per lletres simples.[3]

---

1 W1 225.
2 W1 225.
3 W1 229.

Deixant de banda aquesta segona objecció, hem de dir que la primera està infundada: no és cert que la formalització per part de Boole de les proposicions secundàries -i, en particular, de les condicionals- en forma equacional faci que el signe d'igualtat s'hagi d'interpretar de forma diferent en el si de les proposicions primàries i secundàries, amb la qual cosa la seva lògica categòrica i la hipotètica serien mútuament inconsistents. Com ja sabem, en efecte, en considerar les proposicions secundàries com funcions proposicionals del temps, Boole podia basar la lògica proposicional en la lògica de classes i, en particular, interpretar el signe d'igualtat com la relació d'identitat entre instants de temps. En qualsevol cas, la crítica anterior mostra la insatisfacció evident de Peirce amb la formalització dels enunciats condicionals en forma d'equacions, per a la justificació de la qual Peirce aportarà més endavant raons de més pes, que nosaltres estudiarem ben aviat. Pel que fa a les proposicions particulars, Peirce observa el següent:

> El professor Boole dóna com expressió de la particular negativa Algun *X* no és *Y*
>
> $$vx = v(1-y),$$
>
> on *v* denota la classe indefinida *algun*. Però l'absurditat d'això és evident pel fet que per transposició obtenim
>
> $$vy = v(1-x)$$
>
> o Algun *Y* és no *X*. Però no se segueix a partir d'Algun *X* és no *Y* que Algun *Y* és no *X*. Aquesta expressió és, per tant, incorrecta.[1]

Així doncs, segons Peirce, (*i*) en el sistema de Boole, a partir de la proposició "Algun *X* no és *Y*", podem inferir la proposició "Algun *Y* no és *X*", donat que de $vx = v(1-y)$ se segueix que $vx = v - vy$ i d'aquí tenim, per transposició, que $vy = v - vx$, *i.e.* $vy = v(1-x)$, però (*ii*) aquesta inferència no és vàlida i, per tant, (*iii*) l'expressió de les proposicions particulars ha de ser incorrecta. Peirce té tota la raó en afirmar la primera tesi, però només té raó a mitges en afirmar la segona, car la inferència anterior és vàlida si tenim en compte la interpretació lògica que Boole fa de $vx = v(1-y)$. Car de $vx = v(1-y) = v - vy$ se segueix, per transposició, que $vx + vy = v$ i, per tant, donat que el signe + representa la diferència simètrica, *v* representarà a $vx = v(1-y)$ un subconjunt de *x* que no té elements en *y*, amb la qual cosa s'exclourà de la interpretació d'aquesta última equació el cas en què tots els *Y*s siguin *X*s. Ara bé, és aquest cas precisament el que fa que la inferència de la proposició

[1] W1 230-31.

"Alguns *Y*s no són *X*s" a partir de la proposició "Alguns *X*s no són *Y*s" no sigui vàlida en el sistema de Boole. Així doncs, aquesta inferència és vàlida en el sistema de Boole, però amb el *proviso* que la interpretació de $vx = v(1-y)$ com "Alguns *Y*s no són *X*" exclou el cas en què tots els *Y*s són *X*s. La proposició "Tots els *Y*s són *X*s" és expressable en el sistema de Boole per $y = vx$, per la qual cosa la restricció de la interpretació de $vx = v(1-y)$ abans explicada no suposa cap pèrdua en el poder deductiu de l'àlgebra de Boole. Ara bé, el fet que el significat de $vx = v(1-y)$ no inclogui el cas en què tots els *Y*s són *X*s fa que, tal com assenyala Peirce, aquesta equació no sigui una expressió correcta de la proposició "Algun *X* és no *Y*".

D'una altra banda, tal com hem explicat en la primera secció del capítol anterior, l'expressió en el sistema de Boole dels diferents tipus de proposicions categòriques en forma equacional és possible gràcies a la quantificació del predicat proposada per Hamilton i De Morgan i a l'ús del símbol de classse indefinida *v*. Ara bé, en les *Lowell Lectures* de 1866, Peirce critica l'anàlisi dels diferents tipus de proposicions categòriques dut a terme per Hamilton i De Morgan, perquè aquests autors "consideren la còpula *és* com un signe d'igualtat, mentre que jo segueixo la gran majoria dels lògics fent d'ella un signe de predicació, això és, d'atribució o subsumpció".[1] Veiem, doncs, que Peirce mostra d'ençà el seus primers escrits una clara insatisfacció amb la formalització dels diferents tipus de proposicions com equacions duta a terme per Boole en base a la quantificació del predicat proposada per Hamilton i De Morgan, essencialment perquè aquesta simbolització no reflecteix de forma adient la veritable estructura lògica dels diferents tipus de proposicions -categòriques o hipotètiques- i, en particular, la naturalesa lògica de la relació que es dóna entre els seus components, ja siguin termes o proposicions; en definitiva, perquè no ofereix una *anàlisi* adient dels diferents tipus de proposicions. Aquesta crítica pressuposa alhora l'anàlisi dels diferents tipus de proposicions en subjecte, còpula i predicat i la seva conseqüent reducció a la forma canònica "*A* és *B*". Tal com explicarà Peirce més endavant, la majoria dels lògics medievals distingiren les proposicions *categòriques* (universals, particulars, afirmatives i negatives) de les *hipotètiques* (condicionals, copulatives i disjuntives) i "ensenyaren que les parts principals de les proposicions categòriques són el subjecte i el predicat, però que hi ha també una *Còpula* que els uneix".[2] Peirce no acceptà mai la distinció entre proposicions categòriques i hipotètiques proposada pels lògics medievals i defensada després per Kant i la majoria dels lògics alemanys posteriors a ell i afirmà que les

1 W1 483.
2 CP 4.41.

proposicions universal afirmatives i les condicionals responen a una mateixa forma lògica; en canvi, acceptà de bon principi l'anàlisi de les proposicions categòriques en termes de subjecte, predicat i *còpula*, el qual estendrà també a les proposicions condicionals. Aquesta reducció dels diferents tipus de proposicions a la forma "*A* és *B*" és ben palesa ja en l'article de 1867 "On the Natural Cassification of Arguments" abans esmentat, en el qual Peirce redueix no només les proposicions categòriques i condicionals a aquesta forma, sinó també les proposicions relacionals.[1] Però l'exposició més clara sobre el sentit de la reducció dels diferents tipus de proposicions a aquesta forma lògica la trobem en una sèrie de manuscrits escrits entre 1872 i 1873 per al que havia de ser el primer llibre de lògica del nostre autor.[2] En aquests manuscrits, Peirce afirma que "qualsevol tipus de proposició pot expressar-se en la forma general "*A* és *B*"".[3] Així, per exemple, observa Peirce, "*A* estima *B*" pot posar-se en la forma "qualsevol cosa denotada pel terme *A* és denotada també per "amant de *B*" i la proposició "Si llampega, tronarà" pot posar-se en la forma "qualsevol cosa denotada pel terme "l'estat de coses en què llampega", també és denotada pel terme "l'estat de coses en què trona".[4] Així doncs, tant les proposicions relacionals com les condicionals poden reduir-se a les universals afirmatives, les quals poden reduir-se en darrer terme a la forma estàndard "*A* és *B*". Per exemple, assenyala Peirce, "quan diem "Tot home és un animal" diem que home està inclòs en animal com un cas especial seu"[5] i, per tant, podem reduir la proposició anterior a la forma "home és mortal". En la línia del que ja havia afirmat en les *Lowell Lectures* de 1866 i seguint l'anàlisi dels lògics medievals, Peirce considera que aquestes proposicions estan compostes de dos termes, subjecte, predicat i la *còpula*, la paraula "és", mitjançant la qual el subjecte se subsumeix en el predicat com un cas especial seu i que Peirce representa d'ençà l'article "Notation for the Logic of Relatives" de 1870 amb el signe $-\!\!<$. Doncs bé, és precisament aquesta reducció dels diferents tipus de proposicions a la forma "*A* és *B*" el que duu Peirce a afirmar que la simbolització per part de Boole dels diferents tipus de proposicions -categòriques i hipotètiques- en base al signe d'igualtat no reflecteix la seva veritable estructura lògica, en la mesura que aquest signe no expressa de forma adient la relació de subsumpció o atribució que es dóna entre el subjecte i el predicat

[1] Vegeu també, pel que fa a la reducció de les proposicions categòriques : CP 2.476 i 478, W2 26 i 27; pel que fa a la reducció de les condicionals: W2 42, n.7 (CP 2.506, n.1); i, finalment, pel que fa a la reducció de les relacionals: W2 42-3 (CP 2.507).

[2] *Cf.* W3 14-108.

[3] W3 90.

[4] W3 85.

[5] W3 96.

d'una proposició del tipus "*A* és *B*", forma general a la qual es poden reduir tant les proposicions categòriques com les hipotètiques.

Tal com acabem d'explicar, en els primers escrits de Peirce la *còpula* expressava la relació de *subsumpció* que es dóna entre els dos termes d'una proposició del tipus "*A* és *B*" i com que, tot comptat i debatut, Peirce interpretava els termes extensionalment, la *còpula* expressava la relació d'*inclusió* entre classes. Aquesta és la que podríem anomenar *interpretació lògica* de la *còpula* i no hi ha dubte que si Peirce escollí la *còpula* com a signe de relació fonamental a partir del qual desenvoluparà posteriorment tant la lògica no relativa com la relativa, fou degut a que aquest signe en la seva interpretació lògica permetia una millor anàlisi dels diferents tipus de proposicions. Ara bé, segons assenyalarà Peirce en els manuscrits de 1872-73 esmentats abans, les operacions i relacions fonamentals a partir de les quals hom desenvolupa el càlcul lògic s'han de definir a través de les seves *propietats formals* i no pas a partir de propietats relatives a una interpretació concreta d'aquests signes:

> La còpula expressa una certa relació entre els dos termes que formen el subjecte i el predicat d'una proposició. Nosaltres hem definit aquesta relació en termes de les propietats dels signes [*i.e.* de la seva interpretació lògica], però per als propòsits de la lògica formal és més útil definir-la en termes de les seves propietats formals.[1]

Tal com veurem després, aquesta és precisament la perspectiva a partir de la qual Peirce havia desenvolupat el seu article de 1870 sobre la lògica de relatius, en el qual introdueix la *còpula* per primera vegada com a relació primitiva a partir de la qual es desenvolupa el càlcul o àlgebra. La perspectiva de l'article "Notation for the Logic of Relatives" és efectivament purament algèbrica, en el sentit que Peirce defineix primer de tot els signes d'operació i relació a través de les propietats formals que satisfan i només després mostra com aquests signes poden emprar-se en contextos lògics. En particular, Peirce defineix en aquest article la relació "inclusió en" o *còpula* com una relació transitiva (*Cf. infra*, § 4). En canvi, en els manuscrits de 1872-73, la defineix com una relació que satisfà les tres propietats formals següents:

> La primera és que qualsevol cosa està en aquesta relació amb si mateixa [...]
> La segona propietat formal de la còpula és que si qualsevol terme *A* està en aquesta

1 W3 97.

> relació amb un segon terme *B* que està en la mateixa relació amb un terme *C*, llavors el primer terme *A* està en aquesta relació amb el terme *C*. Si *A* és *B* i si *B* és *C*, llavors *A* és *C*. La tercera propietat formal de la còpula és que si dos termes estan en aquesta relació recíprocament l'un amb l'altre, llavors no hi ha distinció entre les coses que signifiquen. Si *A* és *B* i *B* és *A*, llavors no s'ha de fer cap distinció entre *A* i *B*.[1]

Així doncs, Peirce defineix la *còpula* com una relació que satisfa les propietats *reflexiva*, *transitiva* i *antisimètrica*, és a dir, com un ordre parcial. Ara bé, Peirce no dubta en afirmar que, des d'un punt de vista lògic, la propietat més important és la transitivitat:

> D'aquests tres caràcters de la còpula, el segon, *i.e.* el seu caràcter transitiu, és el més important des del punt de vista de la lògica formal. Car se segueix immediatament d'aquest que és un bon raonament inferir a partir de les premisses *A* és *B* i *B* és *C*, la conclusió que *A* és *C*. Aquesta mena de raonament s'anomena el sil·logisme simple i, en la mesura que el caràcter transitiu de la còpula és l'únic en virtut del qual una proposició depèn de les altres, se segueix que tot el raonament pot reduir-se a la forma d'un sil·logisme, per molt importants que puguin ser les diferències entre un tipus de raonament i un altre i independentment dels altres principis que algunes inferències puguin pressuposar.[2]

Veiem, doncs, que Peirce destaca com a propietat fonamental de la còpula la seva transitivitat perquè en ella es fonamenta la validesa de *Barbara* -el *sil·logisme simple* que diu en el text-, forma a la qual poden reduir-se els diferents tipus de raonaments o arguments, encara que aquesta reducció pressuposi alguns principis diferents d'aquells en els quals es basa la validesa de *Barbara*, a saber, el "dictum de omni et nullo" aristotèlic. Podríem desglossar la tesi anterior en les tres tesis següents: (*i*) La validesa de *Barbara*, forma que tipifica particularment el raonament deductiu es fonamenta en el *dictum* aristotèlic o, el que és el mateix, en la transitivitat de la *còpula*, car afirmar la validesa del *dictum* és el mateix que afirmar la transitivitat de la *còpula*; (*ii*) tot raonament és de tipus sil·logístic: el raonament *deductiu* es correspon amb la primera figura, l'*hipotètic* amb la segona, l'*inductiu* amb la tercera; (*iii*) tots els *modes* de la segona i tercera figura són reductibles a l'únic mode perfecte de la primera figura, *Bàrbara*, però aquesta reducció requereix formes de raonament

1 W3 97.
2 W3 97.

no reductibles a aquest mode.[1] Peirce es fa ressò molt sovint de les tesis anteriors,[2] la qual cosa mostra que l'elecció de la *còpula* com la relació lògica fonamental es deu no només a que aquesta relació permet una millor anàlisi dels diferents tipus de proposicions, sinó també a que és una relació les propietats formals de la qual permeten una millor anàlisi dels diferents tipus de inferències que no pas la relació d'igualtat i que, per tant, hauria de permetre el desenvolupament d'un sistema de notació o àlgebra lògica més adient, que no pas l'àlgebra lògica de Boole, per tal d'assolir l'objectiu fonamental de la lògica formal que no és altre, segons Peirce, que la classificació dels arguments. Quant a això, és interessant destacar que Boole i Peirce tenien una visió radicalment diferent del lloc que corresponia a la sil·logística aristotèlica i als principis en els quals suposadament es basava aquesta -particularment el *dictum de omni et nullo* -en el context de la lògica deductiva. Com ja sabem, Boole havia mostrat a *Laws of Thought* que els procediments bàsics de la lògica tradicional -la *conversió* i el *sil·logisme*- eren reductibles als mètodes algèbrics proposats per ell en aquella obra. En particular, Boole havia unificat totes les varietats que poden presentar les premisses dels diferents tipus de sil·logismes en un parell de sistemes d'equacions, a partir dels quals hom podia obtenir per eliminació les mateixes conclusions que obtenia mitjançant els diferents tipus d'inferència sil·logística (*Cf. supra*, cap. I, § 5). Això permetia als ulls de Boole, "resoldre la qüestió de saber si el sil·logisme és veritablement el tipus fonamental de raonament -si l'estudi de les seves lleis és coextensiu amb el de la lògica deductiva en general".[3] Segons Boole, en efecte, "donat que el sil·logisme és una forma d'eliminació, la qüestió plantejada equival evidentment a les dues següents: 1. Pot reduir-se tota eliminació al sil·logisme? 2. Pot considerar-se legítimament que el raonament deductiu no consisteix sinó en eliminació?"[4] Naturalment, la resposta donada per Boole a totes dues preguntes és negativa. D'acord amb ell, l'error de considerar el sil·logisme com el veritable *cànon* del raonament deductiu "sembla raure, en bona mesura, en la disposició a considerar com a *primeres* totes les veritats lògiques que presenten un caràcter de simplicitat i d'evidència intuïtiva, sense examinar la relació que mantenen amb les altres veritats de la

---

1 En concret, Peirce va demostrar en una *separata* de les seves *Lowell Lectures*, titulada "Memoranda Concerning the Aristotelean Syllogism" (W1 505-514), que "cap sil·logisme de la segona o tercera figura pot ser reduït a la primera, sense donar per suposada una inferència que només pot expressar-se sil·logísticament en aquella figura a partir de la qual s'ha reduït" (W1 509). M. H. Fisch ha anomenat a aquest resultat de Peirce "el seu primer descobriment important en lògica" (W1 xxxv).

2 Vegeu, per exemple: CP 2.591-92, 2.710 i 3.184, 3.379, 3.383-384, 3.408 i 3.525.

3 *Boole 1854*, 238-39.

4 *Ibid*., 239-40.

Ciència del Raonament o amb els mètodes generals de l'Art del Raonament. El *dictum de omni et nullo* d'Aristòtil és un principi evident en si mateix, però no es troba entre les lleis últimes de la facultat de raonament a les quals es poden reduir totes les altres lleis, per molt simples i evidents que puguin ser, que podrien reduir-se a aquelles seguint l'ordre rigorós que exigeix el desenvolupament científic [...] Des d'aquest punt de vista, Leibniz em sembla haver jutjat correctament la qüestió en assignar al "principi de contradicció" un lloc fonamental en lògica; nosaltres ja hem vist, en efecte, les conseqüències de la llei del pensament de la qual aquest principi n'és l'expressió axiomàtica".[1] A les antípodes de Boole, Peirce havia considerat inicialment que "tota la lògica no relativa era derivable dels principis de l'antiga sil·logística aristotèlica"[2] i mantingué sempre que "la validesa del sil·logisme no es pot deduir dels principis d'identitat, contradicció i terç exclòs".[3] Peirce insisteix sovint en aquesta darrera tesi basant-se en el fet que la validesa de *Barbara* no descansa en el principi d'identitat, sinó en el *dictum* aristotèlic. Això no volia dir evidentment que els principis d'identitat, contradicció i terç exclòs no fossin importants per a Peirce car, per exemple, en l'article "On The Algebra of Logic" (*1880*) demostra la validesa dels modes afirmatius emprant com axiomes no només el principi del sil·logisme, sinó també el principi d'identitat, i els modes negatius a partir del principi de no contradicció i el de terç exclòs. En realitat, la insistència en què la validesa dels diferents modes sil·logístics no descansa en els principis d'identitat, contradicció i terç exclòs s'ha d'entendre fonamentalment, d'una banda, com una crítica a Boole, car el mateix Peirce havia demostrat en les *Harvard Lectures* que aquests eren els principis en els quals es basava el sistema de la lògica de Boole i, d'una altra, com una afirmació de la conveniència de desenvolupar l'àlgebra lògica a partir de la còpula d'inclusió en comptes de la d'igualtat. Tal com hem vist abans, aquesta conveniència es basa no tan sols en el fet que aquest signe ofereix una millor anàlisi dels diferents tipus de proposicions, sinó també dels diferents tipus d'inferència sil·logística. I la raó d'això últim és, tal com acabem d'explicar, que els diferents tipus d'inferència sil·logística poden reduir-se a *Barbara*, la validesa del qual descansa en el *dictum* aristotèlic o, el que és el mateix, en la transitivitat de la còpula.

1 *Ibid*., 240. Boole es refereix naturalment a la *llei de dualitat*.
2 W5 173, n. 3 (CP 3.384, n.1).
3 *Ibid*., n. 2. Vegeu també CP 2.593-600 i 3.407-12.

3. Les modificacions introduïdes per Peirce en el Càlcul Lògic de Boole

En els articles de 1867 “On an Improvement in Boole’s Calculus of Logic” i “Upon the Logic of Mathematics” citats en la secció primera, Peirce presentarà una versió modificada del sistema de Boole. En el primer d’aquests articles, l’autor “es proposa, primer, exhibir el sistema de Boole en forma modificada i, segon, examinar les diferències entre aquesta forma i la donada pel mateix Boole”.[1] Peirce exposarà de forma completa i sistemàtica aquesta nova versió del càlcul lògic de Boole en el segon dels articles abans esmentats. Com veurem en les pàgines següents, la novetat principal introduïda per Peirce en aquests articles en el càlcul lògic de Boole són respectivament la introducció de l’addició lògica o disjunció inclusiva i la supressió de les operacions inverses -la resta i la divisió. En canvi, tot i el criticisme adreçat a Boole en les *Harvard Lectures* i les *Lowell Lectures* dels anys anteriors, Peirce desenvoluparà el càlcul lògic a partir de la relació d’igualtat, tal i com havia fet el mateix Boole.

El càlcul lògic de Boole es desenvolupa, com ja sabem, en base a la relació d’identitat entre classes i a quatre operacions: la suma, el producte, la resta i la divisió. Un dels trets característics d’aquest càlcul és que la suma o addició només està definida per classes disjuntes, la qual cosa permet que Boole introdueixi la resta o subtracció com l’operació estrictament inversa a ella i que ambdues operacions preservin totes les propietats de les operacions aritmètiques respectives.[2] Per contra, el producte booleà és equivalent a la intersecció de classes i és, per tant, una operació de tipus estrictament lògic, que presenta una clara assimetria amb el producte aritmètic.[3] I el mateix es pot dir evidentment de la divisió, encara que, en aquest cas, la interpretació lògica no és del tot clara. Doncs bé, tal com veurem a continuació, Peirce completa en els dos articles de 1867 esmentats abans el sistema lògic de Boole afegint-li, d’una banda, l’addició i substracció lògiques i, d’una altra, el

[1] W2 12 (CP 3.1).

[2] Remarquem, en efecte, que si a i b representen classes disjuntes, es té que $Card(a+b) = Card(a) + Card(b)$ i $Card(a-b) = Card(a) - Card(b)$, la qual cosa mostra que la suma i la resta booleanes són del mateix tipus que la suma i la resta aritmètiques i que només difereixen d’elles quant a la seva interpretació.

[3] Notem efectivament que l’equació $Card(ab) = Card(a)Card(b)$ no se satisfà excepte en el cas que a i b valguin 0 i 1, valors als quals s’haurà de limitar llavors la interpretació aritmètica de l’àlgebra booleana.

producte i la divisió aritmètiques, de manera que cada operació es desdoblarà en dues operacions: l'operació lògica i l'aritmètica.[1] El sistema resultant és el següent:

La *identitat* entre classes es defineix de la forma habitual i es representa amb el signe "$\underset{,}{=}$". Així, assenyala Peirce, "$a \underset{,}{=} b$ significarà que a i b denoten la mateixa classe -la mateixa col·lecció d'individus".[2] Aquesta és l'única relació lògica que Peirce, seguint Boole, considerarà en l'article "On an Improvement in Boole's Calculus of Logic" i, per tant, les lleis formals que satisfacin les distintes operacions lògiques s'expressaran com a *identitats*. L'*addició lògica* es defineix com la suma no exclusiva de classes. Així, si a i b denoten dues classes qualssevol, $a \underset{,}{+} b$ denotarà "tots els individus continguts en a i b conjuntament",[3] és a dir, $a \underset{,}{+} b$ representarà la classe formada pels individus que pertanyen a a i no pertanyen a b, els individus que pertanyen a b i no pertanyen a a i el individus que pertanyen a a i b. Per la seva banda, l'addició aritmètica es defineix com la suma exclusiva de classes. Seguint Boole, Peirce afirmarà a "Upon the Logic of Mathematics" que la interpretabilitat lògica de $a+b$ està subjecta a la condició que a i b representin classes disjuntes.[4] Així doncs, l'addició aritmètica coincideix amb la suma booleana i, com aquesta, quan és interpretable coincideix amb l'addició lògica, això és:[5]

$$\text{Si cap } a \text{ és } b \qquad a \underset{,}{+} b \underset{,}{=} a+b. \tag{1}$$

A partir de la definició de l'addició lògica es dedueixen fàcilment les següents propietats:[6]

$$a \underset{,}{+} a \underset{,}{=} a \tag{2}$$

$$a \underset{,}{+} b \underset{,}{=} b \underset{,}{+} a \tag{3}$$

$$(a \underset{,}{+} b) \underset{,}{+} c \underset{,}{=} a \underset{,}{+} (b \underset{,}{+} c). \tag{4}$$

---

1 Les operacions lògiques es distingiran notacionalment de les operacions aritmètiques respectives per l'afegitó d'una coma sota el signe a través del qual es representin aquestes últimes operacions.

2 W2 12 (CP 3.2).

3 W2 12 (CP 3.3).

4 Segons Peirce: "si a i b són classes que tenen alguna part en comú, $a+b$ no és una classe" (W2 60 (CP 3.21)).

5 W2 13 (CP 3.3).

6 W2 13 (CP 3.3).

La primera de les lleis anteriors és vàlida només per l'addició lògica, mentre que les altres dues són vàlides indistintament per l'addició lògica i l'addició aritmètica. L'adopció de la llei d'*idempotència* o *tautologia* (2), és un dels trets distintius del sistema de la lògica de Peirce en relació al de Boole. Com ja sabem, en efecte, Boole acceptà la llei d'idempotència o tautologia del producte, que ell anomena a *Laws of Thought* la llei de *dualitat* i que considerava la llei fonamental del seu càlcul lògic. En canvi, degut a la definició de la suma només per a classes disjuntes, rebutjà explícitament la llei anàloga per aquesta operació (*Cf. supra*, cap. I, § 8). El *producte lògic* es defineix de la forma habitual i es representa mitjançant el signe ",". Així, assenyala Peirce, si a i b representen dues classes qualssevol, a,b denotarà "els individus continguts alhora en les classes a i b".[1] El producte lògic coincideix, doncs, amb el producte booleà i satisfà conseqüentment les mateixes lleis, a saber:[2]

$$a,a \underset{,}{=} a \tag{5}$$

$$a,b \underset{,}{=} b,a \tag{6}$$

$$(a,b),c \underset{,}{=} a,(b,c). \tag{7}$$

Tenim, per tant, que tant el producte com l'addició lògiques satisfan les lleis d'*idempotència* o *tautologia*, *commutativa* i *associativa*, propietats reticulars ben conegudes. Peirce no demostra cap de les lleis o propietats anteriors perquè considera que es dedueixen immediatament de les definicions dels diferents signes lògics o, el que és el mateix, a partir de la seva interpretació com a signes que representen classes i operacions entre classes. L'addició i el producte lògics satisfan també les *lleis distributives* següents:[3]

$$(a \underset{,}{+} b),c \underset{,}{=} a,c \underset{,}{+} b,c \tag{8}$$

$$a,b \underset{,}{+} c \underset{,}{=} (a \underset{,}{+} c),(b \underset{,}{+} c). \tag{9}$$

Tal com explicarà Peirce en l'article "On the Algebra of Logic" de 1880, "la primera d'aquestes [equacions], donada per Boole per la seva addició, va ser retenida per Jevons en

---

[1] W2 13 (CP 3.4).
[2] W2 13 (CP 3.4).
[3] W2 13 (CP 3.4).

canviar l'addició. La segona va ser donada per primera vegada per mi (1867)".[1] Aquesta segona llei representa, en definitiva, l'altre tret distintiu que presenta el sistema lògic de Peirce respecte al de Boole. Com és ben sabut, efecte, la segona llei distributiva no és vàlida quan el signe + s'interpreta com la suma booleana i, per tant, no és vàlida en el sistema de la lògica de Boole, però esdevé vàlida tan bon punt interpretem el signe + com l'addició lògica. A diferència del que s'esdevenia amb les lleis anteriors, Peirce demostra les lleis distributives, donat que aquestes lleis ja no semblen deduir-se immediatament a partir de la definició de suma i producte lògics. La demostració peirciana d'aquestes lleis consisteix a mostrar que els dos costats de cada una de les equacions seleccionen la mateixa regió de l'univers, la qual cosa es pot il·lustrar fàcilment mitjançant els diagrames de Venn, i no val la pena reproduir-la aquí.[2] En qualsevol cas, s'ha de tenir en compte que aquesta demostració de les lleis distributives depèn directament de la interpretació lògica dels signes literals i d'operació en el marc del càlcul de classes, per la qual cosa resta encara obert el problema d'una demostració rigorosa d'aquestes lleis a nivell formal, és a dir, a partir de les lleis a partir de les quals es defineixi algèbricament el càlcul. Tal com veurem més endavant, un dels objectius principals de l'article "On the Algebra of Logic" de 1880, és la demostració de les diferents lleis enunciades en l'article de 1867 que estem comentant, incloses les lleis distributives, a partir d'unes *definicions* que representen les propietats formals de les diferents operacions respecte a una nova relació, la relació d'inclusió, i que constitueixen els principis que formen la base del seu càlcul de termes no relatius (*Cf. infra*, § 6).[3]

Passem ara a considerar les operacions inverses. La *subtracció lògica* es representa mitjançant el signe " $\underset{,}{-}$ " i, segons Peirce, haurà de ser definida de manera que compleixi la condició:

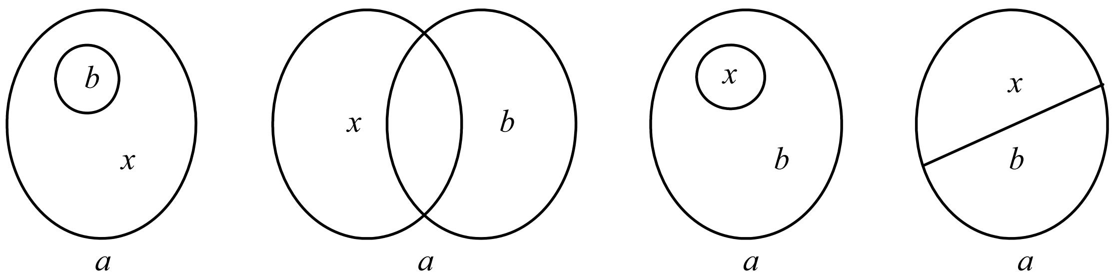
$$\text{Si } b \underset{,}{+} x \underset{,}{=} a \quad x \underset{,}{=} a \underset{,}{-} b. \tag{10}$$

[1] W4 184, n. 20 (CP 3.200, n. 3). Més exactament, Boole enuncià a *Laws of Thought* la llei: $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$, donat que la seva dual: $a + (b \times c) = (a + b) \times (a + c)$, no és vàlida en l'àlgebra lògica de Boole, per les raons que s'expliquen a continuació en el text. A partir d'aquestes dues lleis s'obtenen, per substitució i commutativitat, les lleis distributives enunciades per Peirce en els articles de 1867 i 1880.

[2] Peirce demostra aquestes lleis a W2 13-14 (CP 3.4).

[3] En qualsevol cas, tal com explicarem allí, la demostració de les dues lleis distributives va ser publicada per primera vegada en l'article d'E. V. Huntington "Sets of independent postulates for the algebra of logic" (*1904*).

Aquí s'ha d'observar, assenyala Peirce, que "x no està completament determinada. Podria variar de a a a menys b. Aquest mínim podríem denotar-lo per $a - b$. S'ha d'observar també que si l'esfera de b resta el més mínim fora de l'abast de la de a, l'expressió $a -_{,} b$ no és interpretable".[1] En efecte, donades dues classes qualssevol b i x, *si* $a =_{,} b +_{,} x$, tenim quatre casos possibles que podem representar gràficament com segueix:



El primer diagrama representa el cas en què tot b és x. Si $b +_{,} x =_{,} a$, llavors $x = a$. Aquest diagrama representa, doncs, el cas en què $a -_{,} b$ pren el seu valor màxim, *i.e.* $a -_{,} b =_{,} a$. El darrer diagrama representa el cas en què cap b és x. Si $b +_{,} x =_{,} a$, llavors $x =_{,} a - b$ pren el seu valor mínim que es representarà per $a - b$. El signe " $-$" en l'expressió anterior representa l'operació inversa a l'addició aritmètica, a saber, la *subtracció aritmètica*, que coincideix amb la resta booleana. Aquest diagrama representa, doncs, el cas en què $a -_{,} b$ pren el seu valor mínim, *i.e.* $a -_{,} b =_{,} a - b$. Veiem, doncs, que en aquests dos casos el valor de x resta unívocament determinat a partir de $b +_{,} x =_{,} a$, tan bon punt hom coneix els valors de b i a, i que aquest s'obté sumant a $a - b$ un bocí de a, b. Així, en el primer cas tenim que $x =_{,} a, \bar{b} +_{,} 1, a, b$ i en el segon cas tenim que $x =_{,} a, \bar{b} +_{,} 0, a, b$. Per contra, en els casos representats pel segon i tercer diagrames, *i.e.* en els casos en què algun x és b i tot b és x, el valor de x no resta unívocament determinat a partir de $b +_{,} x =_{,} a$, encara que els valors de a i b siguin coneguts prèviament. Evidentment, també es té com abans que $a -_{,} b$ és idèntic a $a - b$ més un bocí de $a - b$, però aquest tros roman ara completament indeterminat, *i.e.* $x =_{,} a, \bar{b} + v, a, b$.[2] Tenint en compte, doncs, que el primer i darrer diagrames representen els

---

[1] W2 14 (CP 3.5).

[2] En el tercer cas es té que $a, \bar{b} =_{,} 0$ i, per tant, $x = v, a, b$. Notem també que en aquest cas, com que $x \subseteq b$, si $b +_{,} x =_{,} a$, llavors $b =_{,} a$. Però d'aquí no se segueix que $a -_{,} b =_{,} 0$ i, per tant,

casos límits d'aquests dos casos i que Peirce considera que $x \underset{,}{=} a \underset{,}{-} b$ només és interpretable quan b està inclosa en a, podem concloure, en definitiva, que la classe $x \underset{,}{=} a \underset{,}{-} b$ serà idèntica a la classe obtinguda sumant a $a-b$ una part indeterminada de a,b sota la condició que b estigui inclòs en a. O, tal com ho expressa Peirce:

$$a \underset{,}{-} b \underset{,}{=} v,a,b + a,\bar{b} + (0 \underset{,}{-} 1),\bar{a},b, \qquad (11)$$

on (*i*) v és el mateix signe emprat per Boole per indicar una classe indeterminada i, per tant, v,a,b representa una porció indeterminada de a,b, (*ii*) $a,\bar{b} \underset{,}{=} a-b$ i (*iii*) $(0 \underset{,}{-} 1)$ és un símbol ininterpretable, de manera que $(0 \underset{,}{-} 1),\bar{a},b$ expressa la condició que cap b sigui *no-a*, és a dir, que b estigui inclosa en a.[1] L'altra operació inversa, a saber, la *divisió lògica* es representa pel signe " ; " i la seva definició haurà de complir la condició:

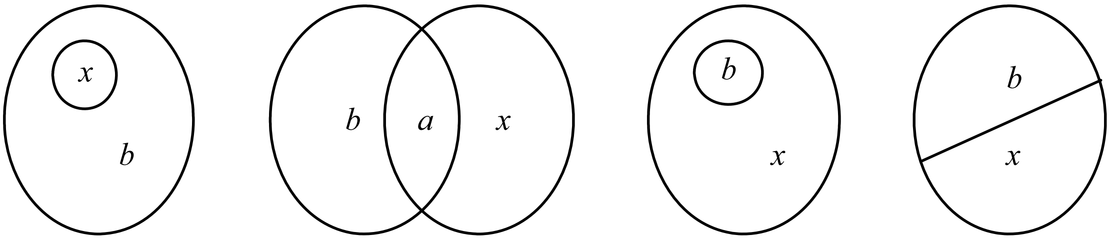
$$\text{Si } b,x \underset{,}{=} a \qquad x \underset{,}{=} a;b. \qquad (13)$$

Però, assenyala Peirce, "*x* no està completament determinada per aquesta condició. Variarà de a a $a+\bar{b}$ i no serà interpretable si a no està continguda completament en b".[2] Aquest màxim o límit superior de $a;b$ es representarà per $a:b$. En efecte, si b i x són dues classes qualssevol i $b,x \underset{,}{=} a$ tenim com abans quatre casos possibles, que podem representar gràficament com segueix:

$a \underset{,}{-} b \underset{,}{=} a-b$. Car $1 \underset{,}{+} x \underset{,}{=} 1$ és vàlida per tot x i, en particular, per $x \underset{,}{=} 1$, d'on es té que $1 \underset{,}{=} 1 \underset{,}{-} 1$ i, per tant, $1 \underset{,}{-} 1 \neq 0$. Un raonament anàleg mostra que en el primer cas, de $b \underset{,}{+} x \underset{,}{=} a$ i $x \underset{,}{=} a$ no se segueix que $b \underset{,}{=} 0$.

[1] La idea de Peirce és que si $\bar{a},b \underset{,}{=} 0$, *i.e.* si b està inclosa en a, llavors $(0-1),\bar{a},b \underset{,}{=} 0$ i, per tant, $a \underset{,}{-} b$ serà interpretable; però, en cas contrari, $(0-1),\bar{a},b$ no serà eliminable i, per tant, $a \underset{,}{-} b$ no serà interpretable.

[2] W2 14-15 (CP 3.6).



$a = x$ $\qquad$ $a = b$ $\qquad$ $a = 0$

El primer diagrama representa el cas en què tot x és b. Si $b, x \underset{,}{=} a$ es té aleshores que $x \underset{,}{=} a$. Aquest diagrama representa, doncs, el cas en què $a; b$ pren el seu valor mínim. El quart diagrama representa el cas en què cap x és b. Si $b, x \underset{,}{=} a$ es té llavors que $a \underset{,}{=} 0$ i, per tant, que $x \underset{,}{=} 0; b \underset{,}{=} \bar{b}$. Aquest diagrama representa, doncs, el cas en què $a; b$ pot prendre el seu valor màxim, que Peirce representa per $a : b$. Així doncs, en aquests dos casos el valor de x resta unívocament determinat a partir de $b, x \underset{,}{=} a$ i pot obtenir-se sumant a a, b una porció de $\bar{a}, \bar{b}$, car en el primer cas tenim que $x \underset{,}{=} a, b$ i en el segon que $x \underset{,}{=} \bar{a}, \bar{b}$. En canvi, en els casos representats pel segon i tercer diagrames, és a dir, en els casos en què algun x és b i tot x és b, el valor de x no resta unívocament determinat a partir de $b, x \underset{,}{=} a$ i pot obtenir-se sumant a a, b una porció indeterminada de $\bar{a}, \bar{b}$, *i.e.* $a; b \underset{,}{=} a, b + v, \bar{a}, \bar{b}$.[1] Tenint en compte, doncs, que els casos representats pel primer i el darrer diagrames representen els casos límits d'aquests dos casos i que, segons Peirce, $a; b$ només és interpretable en els casos en què b està inclosa en a, tenim que:

$$a; b \underset{,}{=} a, b + v, \bar{a}, \bar{b} + (1; 0)a, \bar{b}, \tag{14}$$

on $(1; 0)$ serà un signe ininterpretable a no ser que $a, \bar{b} \underset{,}{=} 0$, això és, que cap a sigui *no-b* o, el que és el mateix, que a estigui inclosa en b.

A partir de les operacions inverses anteriors, Peirce defineix el *zero* i la *unitat* de la següent manera:

$$0 \underset{,}{=} x \underset{,}{-} x \underset{,}{=} x - x, \tag{12}$$

[1] En el tercer cas, com que b està inclòs en x, llavors $b, x \underset{,}{=} b$ i donat que, per hipòtesi, $b, x \underset{,}{=} a, b \underset{,}{=} a$, tenim que $x \underset{,}{=} 1$, és a dir, 1 és l'element neutre per al producte lògic.

és a dir, 0 és el mínim que resulta de subtreure una classe a si mateixa, i

$$1 \underset{,}{=} x; x \underset{,}{=} x : x.\text{[1]} \tag{15}$$

Gràcies a les operacions inverses, Peirce pot definir també el complementari de x, operació d'especial importància en el càlcul lògic de Boole. En efecte, donat que $a : b \underset{,}{=} a \underset{,}{+} b$, tenim llavors que $0 : x \underset{,}{=} 0 \underset{,}{+} x \underset{,}{=} \bar{x}$, *i.e.*

$$\bar{x} \underset{,}{=} 1 - x \underset{,}{=} 0 : x, \tag{16}$$

d'on es dedueixen fàcilment el *principi de no contradicció* i la *llei del terç exclòs*:

$$x,(1-x) \underset{,}{=} 0 \qquad\qquad x \underset{,}{+} (1-x) \underset{,}{=} 1. \tag{17}$$

Peirce proposa també en el mateix article "On an Improvement in Boole's Calculus of Logic" una segona interpretació del sistema lògic que acabem d'exposar, que millora notablement, segons Peirce, l'aplicació del sistema de Boole a la teoria de probabilitats. Deixant de banda aquest segon sistema interpretatiu, podem dir que la principal diferència entre el sistema de la lògica de Boole i el sistema lògic presentat en aquest article, rau en la introducció de les operacions d'addició i subtracció lògiques. Boole efectivament no utilitzà en el seu sistema de la lògica la suma i resta lògiques, sinó les operacions anomenades a partir d'ell suma i resta booleanes. Com ja hem explicat abans, la suma lògica fou introduïda per primera vegada per A. De Morgan en l'article "On the Syllogism II; and on Logic in General" de 1850 amb el nom d'*agregació*, mentre que W. S. Jevons substituí en la seva obra *Pure Logic* de 1864 la suma booleana per l'agregació de De Morgan, formulà la llei d'idempotència o tautologia respecte aquesta operació -que ell anomenava llei d'*unitat*- i prescindí de les operacions inverses: la subtracció i la divisió (*Cf. supra*, cap. I, § 8). En l'article de 1867 abans esmentat, independentment dels autors esmentats, Peirce introduí la suma lògica però, a diferència de Jevons, no prescindí de la suma booleana ni de les operacions inverses. De fet, Peirce seguirà emprant tant la suma booleana com les operacions

[1] Remarquem que, donat que $0 \underset{,}{=} x \underset{,}{-} x$, llavors $0 \underset{,}{+} x \underset{,}{=} x$, és a dir, el resultat de sumar 0 a una classe és la mateixa classe. Anàlogament, donat que $1 \underset{,}{=} x;x$, llavors $x,1 \underset{,}{=} x$, això és, el resultat de multiplicar una classe per 1 és la mateixa classe.

inverses al llarg de l'article "Notation for the Logic of Relatives" de 1870 i només prescindirà totalment d'elles a partir de l'article "On the Algebra of Logic" de 1880.[1] D'acord amb Peirce, "els avantatges obtinguts per la seva introducció són tres, a saber, donen unitat al sistema; abreugen enormement la tasca de treballar amb ell; i ens permeten expressar les proposicions particulars".[2] *Donen unitat al sistema* perquè, tal com ja hem vist, permeten establir un perfecte paral·lelisme entre les lleis que satisfan l'addició i el producte lògic. Com és sabut, aquest avantatge serà reconegut i explotat sistemàticament per Schröder en disposar en columnes paral·leles els teoremes relatius a l'addició i el producte lògic.[3] *Abreugen* o simplifiquen en certa manera el càlcul perquè permeten interpretar directament les expressions del tipus $x + x$ o $x = x + xy$. Com ja sabem, en efecte, aquestes expressions no són interpretables en el sistema de Boole i, tanmateix, apareixen a vegades com a resultat dels processos de raonament emprats en ell, per la qual cosa hom es veu obligat a reduir-les a expressions interpretables lògicament amb la consegüent pèrdua de temps. D'una altra banda, els mètodes booleans de resolució s'estenen fàcilment a les funcions que contenen les noves operacions introduïdes per Peirce, amb la qual cosa la introducció d'aquestes operacions no complica gens ni mica el càlcul lògic de Boole. Efectivament, qualsevol funció lògica pot desenvolupar-se d'acord amb les lleis de desenvolupament de Boole:

$$f(x) = f(1)x + f(0)(1 - x),$$

$$f(x, y) = f(1, 1)xy + f(1, 0)x(1 - y) + f(0, 1)(1 - x)y + f(0, 0)(1 - x)(1 - y),$$

etc, representant els *termes* d'aquest desenvolupament classes disjuntes, amb la qual cosa la diferència entre la suma booleana i la suma lògica desapareix. Així doncs, qualsevol funció en què figurin l'addició o subtracció lògiques es podrà interpretar sempre i quan els *coeficients* del seu desenvolupament siguin interpretables. En el cas d'una expressió del tipus $x \underset{,}{+} y$, aquest coeficients són $(1 \underset{,}{+} 1)$, $(1 \underset{,}{+} 0)$, $(0 \underset{,}{+} 1)$ i $(0 \underset{,}{+} 0)$ que, d'acord amb la definició

[1] Sobre la suposada substitució de la suma booleana per l'addició lògica per part de Peirce en l'article de 1867 que estem comentant, ell mateix escriurà que "el present autor, no havent vist ni els escrits de De Morgan ni els de Jevons sobre el tema, va recomanar de nou el mateix canvi ("On an Improvement in Boole's Calculus of Logic", 1867), i va mostrar el balanç perfecte existent entre les dues operacions" (W4 182, n. 17 (CP 3.199, n. 2)). Però, la realitat és que Peirce no explicita en cap moment la necessitat d'aquest canvi i només l'introdueix a partir de l'article de 1880 esmentat.

[2] W2 21 (CP 3.18).

[3] *Cf. Der Operationskreis des Logikkalkuls* (*Schröder1877*) i el primer volum de *Vorlesungen über die Algebra der Logik* (*Schröder 1890*), en particular, la cinquena lliçó (pp. 254-281).

d’addició lògica, valdran respectivament 1, 1, 1, i 0. En el cas d’una expressió del tipus $x \underset{,}{-} y$ els coeficients seran $(1 \underset{,}{-} 1)$, $(1 \underset{,}{-} 0)$, $(0 \underset{,}{-} 1)$ i $(0 \underset{,}{-} 0)$ que, d’acord amb la definició de subtracció lògica, valdran respectivament *v*, 1, $(0 \underset{,}{-} 1)$ i 0. En cada cas, doncs, els coeficients seran interpretables i llavors la funció desenvolupada ho serà també. Finalment, assenyalava Peirce, la introducció de les operacions d’addició i subtracció lògiques, *permeten expressar les proposicions particulars*. Peirce proposa a tal efecte simbolitzar “algun *a*” per $a \underset{,}{-} i, a$, on *i* representa “una classe determinada només pel fet que algun individu de la classe *a* cau sota ella”,[1] però no especifica com s’haurien de representar exactament les proposicions particulars, tot limitant-se a observar que “Boole no pot expressar pròpiament algun *a*”.[2] Com ja sabem, Peirce ja havia criticat en les *Harvard Lectures* de 1865 la forma en què Boole simbolitzava les proposicions particulars i, en particular, l’ús a tal efecte del símbol de classe indefinida *v*. Més endavant, en el seu conegut article de 1870 sobre la lògica de relatius, Peirce rebutjarà de nou la formalització booleana de les proposicions particulars en base al mateix argument emprat en les *Harvard Lectures* i afegirà que aquesta expressió no és adequada per expressar l’import existencial d’aquesta mena de proposicions (*Cf. infra*, § 4). Com hem dit fa un moment, Peirce no especifica en l’article “On an Improvement in Boole’s Calculus of Logic” de quina forma s’haurien de representar les proposicions particulars, però està clar que la formalització d’“algun *a*” proposada per Peirce a tal efecte, no només no expressa millor que la forma booleana corresponent l’existència d’algun *a*, sinó que a més, en la mesura que s’empra l’operació de subtracció lògica, fa un ús implícit del símbol especial de Boole *v*. Degut probablement a això i potser als problemes que sembla plantejar la formalització de les proposicions particulars a partir de la simbolització proposada per “algun *a*”, Peirce explorarà en unes notes de 1868 noves vies per expressar les proposicions particulars que avancen part de les innovacions introduïdes en l’article de 1870.

En l’article “Upon the Logic of Mathematics” de setembre de 1867, Peirce escriu que, tal com havia mostrat en l’article de Març del mateix any, el càlcul lògic de Boole “inclou vuit operacions, a saber, l’Addició Lògica, l’Addició Aritmètica, la Multiplicació Lògica, la Multiplicació Aritmètica, i els processos inversos a aquests”.[3] La novetat d’aquest article és precisament la introducció dins del mateix càlcul lògic del producte aritmètic. Així, assenyala Peirce, el producte aritmètic “*ab* representa un succés quan *a* i *b* son successos només si

[1] W2 21 (CP 3.18).
[2] W2 21 (CP 3.18).
[3] W2 60 (CP 3.21).

aquest successos són independents l'un respecte de l'altre, i en aquest cas $ab \underset{,}{=} a, b$".[1] I Peirce entén que a i b són successos independents si són sumatoris de termes (*i. e.* $a \underset{,}{=} \Sigma A$ i $b \underset{,}{=} \Sigma B$), cadascun dels elements dels quals és diferent (*i.e.* Cap *Am* és *An* i Cap *Bm* és *Bn*), de manera que existeix una classe no buida x constituïda per totes les parelles els elements de les quals pertanyen a a i b respectivament (*i. e.* $x \underset{,}{=} \Sigma(A, B)$ i Algun *Am* és *Bn*).[2] La definició de Peirce és una mica confusa, però sembla identificar correctament els elements de *ab* amb les combinacions possibles d'elements de a i b. A més, aquesta definició té interès des de dos punt de vista diferents: D'una banda, constitueix juntament amb la definició de l'addició aritmètica, un intent clar per part de Peirce de definir operacions aritmètiques en termes estrictament lògic. D'una altra banda, en ella trobem per primera vegada l'ús del signe Σ per denotar la suma lògica dels termes d'una classe, ús que durà a la llarga a la interpretació d'aquest signe com el quantificador existencial. En definitiva, Peirce completa en aquest article el sistema de Boole afegint-hi, per un costat, l'addició i la subtracció lògiques i, per un altre, el producte i la divisió aritmètiques.[3] De totes maneres, un cop demostrats alguns teoremes interessants respecte a les quatre operacions directes, estudiant-se en cada cas si els teoremes en qüestió són satisfets només per les operacions lògiques o aritmètiques o per ambdues, Peirce declara un tant sorprenentment que "com que les operacions inverses no tenen cap interès lògic peculiar, aquí les passarem per alt".[4] I en l'article de 1870 sobre la lògica de relatius, referint-se al fet que Jevons prescindís de les operacions inverses, assenyala que "ell pot reemplaçar la subtracció per la multiplicació, gràcies al principi de contradicció, i reemplaçar la divisió per l'addició, gràcies al principi del terç exclòs".[5] Peirce mostra al respecte que si hom té

$$x \underset{,}{+} m = a, \tag{1}$$

---

1 W2 60 (CP 3.21).

2 W2 60 (CP 3.21).

3 Car la suma i la resta booleanes són, en definitiva, operacions importades de l'aritmètica i definides com operacions entre classes de manera que conservin totes les propietats de les operacions aritmètiques respectives. El producte booleà és, en canvi, una operació estríctament de tipus lògic i presenta una clara asimetria amb el producte aritmètic. I el mateix cal dir de l'operació divisió. Així doncs, Peirce completa el sistema de Boole afegint-hi dues operacions de tipus lògic i dues de tipus aritmètic, de manera que cada operació queda desdoblada en dues: l'operació lògica i l'aritmètica.

4 W2 67 (CP 3.41).

5 W2 387 (CP 3.90).

multiplicant cada costat per $\bar{m}$ i donat que $m, \bar{m} = 0$, pot concloure que $x, \bar{m} = a, \bar{m}$ (1)'. I a partir de

$$a, x = m, \tag{2}$$

sumant a cada costat $\bar{a}$, per la propietat distributiva de la suma respecte al producte i $a + \bar{a} = 1$, hom conclou que $x \underset{,}{+} \bar{a} = m \underset{,}{+} \bar{a}$ (2)'.[1] Però cal objectar, d'una banda, que x queda determinada per l'equació (1)' només en el cas que x i m representin classes disjuntes, car en aquestes circumstàncies poden substituir $a \underset{,}{-} m$ (*i.e.* $a - m$) per $a, \bar{m}$ i, de l'altra, que x no queda determinada per l'equació (2)' en el cas que $m; a = m, a$, és a dir, en el cas en què $m = x$, donat que només podem substituir $m; a$ per $m \underset{,}{+} \bar{a}$ en el cas que $m; a$ prengui el seu valor màxim. En qualsevol cas, tal com dèiem abans, Peirce seguirà emprant les operacions inverses al llarg de l'article "Notation for the Logic of Relatives" de 1870 i només prescindirà totalment d'elles a partir de l'article "On the Algebra of Logic" de 1880, en el qual encetarà una nova aproximació a la lògica no relativa molt allunyada dels intents reformadors del sistema de la lògica de Boole estudiats fins ara.

4. L'extensió del càlcul lògic de Boole: la lògica de relatius de 1870

La història de la lògica de relacions es remunta a Aristòtil, el qual considerà per primera vegada les relacions com a tema de recerca lògica i les inclogué dins les seves *categories*. Però la història moderna de la lògica de relacions comença amb l'article d'A. De Morgan "On the Syllogism IV, and on the Logic of Relations" (*1860*), car és en aquest article on, per primera vegada, es fa de la lògica de relacions una branca de la lògica i es duu a terme un estudi sistemàtic de les propietats de les relacions i les operacions entre elles.[2] Com ja sabem, Peirce publicà l'any 1870 un article sobre el mateix tema titulat *in extenso*: "Description of a Notation for the Logic of Relatives, Resulting from an Amplification of

[1] *Cf.* W2 387-88 (CP 3.90).

[2] De Morgan obre aquest article amb la següent declaració de principis: "En el meu segon i tercer articles sobre lògica, vaig insistir en què el sil·logisme ordinari era un cas, i només un cas, de la composició de relacions. En aquest quart article aprofundiré el tema de les relacions, com una branca de la lògica" (*De Morgan 1966*, 208).

Boole's Calculus of Logic" (*1870*) El mateix Peirce destacarà alguns anys més tard la importància històrica d'aquest article en els termes següents:

> L'any 1870 vaig fer una contribució a aquesta disciplina [la lògica] que cap especialista pot negar que és el treball més important que mai s'ha realitzat sobre el tema amb l'excepció del treball original de Boole.[1]

Tal com indica el seu títol, l'objectiu fonamental de l'article de 1870 és presentar un sistema de notació algèbrica que estengui el sistema de Boole i el faci aplicable no només a l'estudi dels termes absoluts (classes), sinó també a l'estudi del termes relatius (relacions) iniciat uns anys abans per De Morgan. Peirce ho explica en el paràgraf amb el qual s'obre aquest article en el termes següents:

> Els termes relatius reben normalment un lleuger tractament a les obres sobre lògica; l'única investigació remarcable sobre les lleis formals que els governen es troba en un valuós article escrit per De Morgan en el desè volum de les *Cambridge Philosophical Transactions* [...] [Però,] aquest sistema deixa encara una mica per desitjar. A més, l'àlgebra lògica de Boole té, a mesura que es desenvolupa, una bellesa tan singular, que és interessant investigar si no podria estendre's sobre tot el domini de la lògica formal, en comptes de restringir-se a aquella part més simple i menys útil d'aquesta disciplina, la lògica dels termes absoluts, que quan ell [Boole] va escriure, era l'única lògica formal coneguda. L'objectiu d'aquest article és mostrar que es pot donar una resposta afirmativa a aquesta qüestió. Crec que no hi ha dubte que un *càlcul*, o art de realitzar inferències, basat en la notació que ara descriuré, és perfectament possible i, fins i tot, útil en la pràctica en alguns casos difícils i, particularment, en la *recerca* lògica.[2]

En la mesura que Peirce concep el seu sistema com una extensió del sistema de Boole, el sistema de Peirce serà també un *sistema de notació algèbrica* o, com diu Peirce sovint un *àlgebra lògica*. De fet, Peirce reconeix de bon començament que el seu propòsit és construir un sistema de notació a partir dels signes d'operació i relació habituals en àlgebra, de manera que hom pugui aplicar a l'estudi de la lògica relativa i no relativa tots els mètodes i tècniques pròpies d'aquella ciència. L'objectiu és, doncs, construir *analògicament* la lògica

1 CP 3.45. Nota a peu de pàgina afegida pels editors i pertanyent a les *Lowell Lectures* de 1903.
2 W2 359-60 (CP 3.45).

a partir de l'àlgebra. En aquest sentit, assenyala Peirce, que "és un motiu addicional per tal d'emprar un signe matemàtic per denotar una certa operació o relació [lògica], que la idea general d'aquesta operació o relació s'assembli a la de l'operació o relació [algèbrica] significada habitualment pel mateix signe".[1] Aquest *principi d'analogia* és precisament el que guiarà Peirce "en estendre l'ús dels vells símbols a noves disciplines" donant lloc així a "noves i més àmplies definicions d'aquests símbols".[2] Entre aquestes destaca especialment la introducció de la relació anomenada *inclusió en* o *ésser tan petit com*, la qual es defineix com una relació *transitiva*, això és, com una relació que satisfà:

Si	$x \prec y$
i	$y \prec z$,
llavors	$x \prec z$. [3]

Les raons adduïdes per Peirce a favor de la utilització d'aquest signe en lloc del signe $\leq$ són que aquest últim "no es pot escriure ràpidament i que sembla representar la relació que expressa com si estigués composta de dues altres que en realitat són complicacions d'aquesta [...] Ara, tota *igualtat* és *inclusió en*, però el recíproc no és vertader, d'aquí que *inclusió en* sigui un concepte més extens que el d'*igualtat* i, llavors, més simple lògicament. Sota el mateix principi, *inclusió en* és també més simple que *ésser més petit que*".[4] Conseqüentment, Peirce definirà en l'article "Notation for the Logic of Relatives" les relacions d'*igualtat* i *ésser menor que -ésser més petit que-* a partir de la relació *ésser tan petit com* o *inclusió en*:

> La *igualtat* és la conjunció d'*ésser tan petit com* i la seva conversa. Dir que $x = y$ és dir que $x \prec y$ i $y \prec x$.
>
> *Ésser menor que* és *ésser tan petit com* amb l'exclusió de la seva conversa. Dir que $x < y$ és dir que $x \prec y$ i que no és veritat que $y \prec x$.[5]

Peirce defineix a continuació les diferents operacions que després s'aplicaran als termes relatius i no relatius a partir de les seves propietats formals característiques. Peirce

---

[1] W2 363 (CP 3.61).
[2] *Cf.* W2 360 (CP 3.46).
[3] *Cf.* W2 360 (CP 3.47).
[4] W2 360, n.1 (CP 3.47, n. 1). Les itàliques són nostres.
[5] W2 360 (CP 3.48-49). En el text de Peirce, *ésser tan petit com* no està escrit amb itàliques.

distingeix de nou entre operacions invertibles i no invertibles, de forma anàloga a com en els articles de març i setembre de 1867 havia distingit entre operacions aritmètiques i lògiques,[1] encara que la distinció de l'article de 1870 no es correspon exactament amb la dels articles de 1867 perquè, entre d'altres coses, les operacions ara són aplicables alhora als termes absoluts i relatius. En qualsevol cas, aquesta distinció durà Peirce a afegir, com ja havia fet en els articles de 1867, a les quatre operacions emprades per Boole -la suma i la resta booleanes o invertibles i el producte i la divisió lògiques o no invertibles- quatre noves operacions: la suma i la resta no invertibles i el producte i la divisió invertibles. Juntament amb aquestes operacions, Peirce introduirà una nova operació, l'exponenciació o *involució*, que en el cas de *Laws of Thought* només era interpretable lògicament quan l'exponent era menor o igual a 2. La caracterització algèbrica d'aquest signes d'operació és com segueix:

L'*addició* es defineix com una operació associativa i commutativa, és a dir, com una operació que satisfà les equacions:

$$(x \underset{,}{+} y) \underset{,}{+} z = x \underset{,}{+} (y \underset{,}{+} z)$$
$$x \underset{,}{+} y = y \underset{,}{+} x,$$

L'addició invertible satisfarà també les dues equacions anteriors i, a més, la condició:

$$\begin{array}{ll} \text{Si} & x + y = z \\ \text{i} & x + y' = z, \\ \multicolumn{2}{l}{\text{llavors } y = y'.} \end{array}$$

La *multiplicació* es defineix com una operació "doblement distributiva respecte a l'addició" i "quasi invariablement" associativa, és a dir, com una operació que satisfà les equacions següents:

$$x(y \underset{,}{+} z) = xy \underset{,}{+} xz$$
$$(x \underset{,}{+} y)z = xz \underset{,}{+} yz$$
$$(xy)z = x(yz).$$

[1] Més exactament, Peirce anomena ara *invertibles* i *no invertibles* a les operacions directes -suma i producte- de tipus aritmètic i lògic respectivament, i *determinatives* i *no determinatives* a llurs inverses -resta i divisió- corresponents.

En canvi, assenyala Peirce, aquesta operació “no és generalment commutativa”, per la qual cosa proposa representar la multiplicació commutativa mitjançant una coma.[1] Per la seva part, la multiplicació invertible satisfà també la següent condició:

$$\begin{array}{ll} \text{Si} & x.y = z \\ \text{i} & x.y' = z, \\ \multicolumn{2}{l}{\text{llavors } y = y'.} \end{array}$$

Finalment, la *involució* es defineix com una operació que satisfà les equacions següents:

$$(x^y)^z = x^{(yz)}$$
$$x^{y \underset{,}{+} z} = x^y , x^z$$
$$(x \underset{,}{+} y)^z = x^z \underset{,}{+} \Sigma_p \, x^{z-p} , y^p \underset{,}{+} y^z.$$[2]

Peirce introdueix de forma anàloga les operacions inverses. Així, la *subtracció* no determinativa satisfà:

$$(x \underset{,}{-} y) \underset{,}{+} y = x,$$

mentre que la subtracció determinativa satisfà:

$$(x - y) + y = x$$
$$(x + y) - y = x.$$

Com que la *divisió* és l’operació inversa a la multiplicació i hi ha tres tipus de signes per aquesta operació, Peirce es veu obligat a introduir també tres signes diferents per a la divisió, que defineix respectivament de la següent manera:

$$(x : y)y = x$$
$$x\frac{y}{x} = x$$

1 El producte lògic és commutatiu, però el producte relatiu no.
2 Aquesta última equació expressa el teorema del binomi.

$$(x; y), y = x.$$

Finalment, la involució té dues operacions inverses, l'*evolució* i el *logaritme* que es defineixen de la següent manera:

$$(\sqrt{y})^x = y$$
$$x^{\log_x y} = y.$$

Segons Peirce, les lleis o condicions anteriors a través de les quals s'han introduït els signes de relació i operació "han de considerar-se imperatives. Però, junt amb elles, hi ha unes altres característiques que seria molt desitjable que les relacions i operacions posseïssin, si els hem d'aplicar els signes habituals de l'àlgebra".[1] Així, per exemple, tal com observa Peirce a "Notation for the Logic of Relatives":

> És quasi essencial per a l'aplicabilitat dels signes per l'addició i multiplicació, que siguin possibles un *zero* i una *unitat*. Per un *zero* entenc un terme tal que
>
> $$x \underset{,}{+} 0 = x,$$
>
> sigui quin sigui el significat de *x*; i per una *unitat* un terme per al qual la fórmula general corresponent
>
> $$x\mathit{1} = x$$
>
> es compleixi. D'una altra banda, no hi hauria d'haver cap terme a tal que $a^x = x$, independentment del valor de x. Serà també un motiu poderós per a l'adopció d'una notació algèbrica, si altres fórmules que es compleixen en aritmètica, com ara
>
> $$x^2, y^2 = (x, y)^2$$
> $$\mathit{1}x = x$$
> $$x^{\mathit{1}} = x$$
> $$x0 = 0,$$
>
> segueixen complint-se; si, per exemple, la concepció d'una diferencial és possible, i el teorema de Taylor es compleix, i G o $(1+i)^{\frac{1}{i}}$ juguen un paper important en el sistema, si hi ha un terme amb les propietats de Ͽ, o si propietats similars a aquelles de l'espai poguessin d'una altra manera treure's a la llum per la notació, o si hi

[1] W2 363 (CP 3.61).

hagués una expressió absurda que tingués les propietats i usos de ב o l'arrel quadrada d'un nombre negatiu.[1]

Veiem, doncs, que a banda de la novetat que suposa en relació al sistema de Boole i a les modificacions, introduïdes en aquest sistema pel mateix Peirce en els articles de 1867, la introducció del signe $-\!\!<$ -que s'interpretarà lògicament com la relació d'inclusió entre classes-, els trets més remarcables del sistema de notació o àlgebra lògica presentat per Peirce a 1870 són potser el fet que en ell no es distingeixi entre operacions absolutes i relatives i la introducció de tota una sèrie de nous símbols d'operació -logaritmes, derivades, nombres complexos, … - que fan preveure que, com ha assenyalat gràficament un especialista, "la lògica de relatius [de Peirce] és una extensió de la lògica de Boole poc més o menys en la mateixa mesura que un viatge espacial és una extensió del caminar".[2] La no distinció entre operacions lògiques i relatives és conseqüència alhora de la perspectiva algèbrica adoptada en aquest article i del fet que Peirce intentés desenvolupar un sistema de notació que fos aplicable ensems a l'estudi de la lògica relativa i no relativa, car això durà Peirce a definir les diferents operacions a través de les seves propietats formals i a distingir-les només ulteriorment segons els diferents tipus de termes -absoluts o relatius- als quals s'apliquin. Ja sabem, en efecte, que el sistema de notació proposat per Peirce és un sistema de notació algèbric i que, per definir els diferents signes algèbrics d'operació i relació, Peirce s'ha guiat per un *principi d'analogia* segons el qual els diferents signes han d'expressar en l'àlgebra lògica la mateixa idea general que expressaven en l'àlgebra aritmètica i, per tant, hauran de respondre a aquesta idea o concepció general independentment de si s'apliquen als termes absoluts o relatius.[3] Podríem dir, en suma, que el propòsit de Peirce no és tant estendre l'àlgebra lògica de Boole amb nous símbols d'operació per als termes relatius, com el de construir, a partir del llenguatge de l'àlgebra, un sistema de notació que sigui aplicable alhora a l'estudi de la lògica relativa i no relativa, això és, una àlgebra lògica amb variables de dos

---

1 W2 364 (CP 3.61). "El símbol G representa la base dels logaritmes neperians, el símbol ᘓ representa π i ב representa l'arrel quadrada d'un [nombre] negatiu a l'obra de Benjamin Peirce *Linear Associative Algebras*" (CP 3.61, nota dels editors). Per raons tipogràfiques, els símbols emprats per nosaltres no coincideixen exactament amb els símbols emprats originalment per C. S. Peirce.

2 *Van Evra 1997*, 148.

3 Com veurem després, per exemple, la idea que ha de reflectir la multiplicació és, segons Peirce, la d'*aplicació d'una relació*, perquè aquesta és la idea que expressa originàriament la multiplicació aritmètica. Això el durà a una curiosa interpretació de l'operació de multiplicació quan aquesta s'aplica als termes absoluts.

tipus, segons que el seu rang siguin els termes absoluts o relatius, les fórmules de la qual seran interpretables llavors en termes de la lògica de classes o relacions o, fins i tot, de totes dues alhora, perquè, tal com veurem després, Peirce barreja sovint ambdós tipus de variable en una mateixa expressió.

Una vegada definits els diferents signes de relació i operació a través de les lleis formals que satisfan, Peirce explica l'aplicació d'aquests signes a l'estudi de la lògica de relatius. A tal efecte, Peirce especifica primer de tot quins són els símbols propis del llenguatge de la lògica de relatius, a saber, els anomenats *termes generals* o *lògics* i els *termes individuals*:

> Els termes lògics poden ser de tres classes. La primera inclou aquells [termes] la forma lògica dels quals pressuposa només la idea d'una qualitat i que representen, per tant, una cosa simplement com "un --- ". [Aquests termes] consideren un objecte tal *com* (*quale*) és en si mateix; per exemple, com a cavall, arbre o home. Aquests són els *termes absoluts*. La segona classe inclou els termes la forma lògica dels quals pressuposa la idea de relació i requereixen l'addició d'un altre terme per completar la denotació [...] [Aquests termes] consideren un objecte com relacionat amb un altre, això és, com a relatiu, [per exemple,] com a pare de, amant de o criat de. Aquests són els *termes relatius simples*. La tercera classe inclou els termes la forma lògica dels quals pressuposa la idea de posar coses en relació i requereixen l'addició de més d'un terme per completar la denotació [...] [Aquests termes] consideren un objecte com a terme mitjà o tercer entre dos altres, això és, com a conjugatiu, [per exemple] com donant de --- a ---, o comprador de --- a --- per ----. Aquests [termes] podrien anomenar-se *termes conjugatius*.[1]

Peirce denota els *termes absoluts* mitjançant les lletres llatines a, b, c, d, ..., els *termes relatius simples* mitjançant les itàliques *a*, *b*, *c*, *d*, … i els *termes conjugatius* mitjançant unes lletres especials del tipus *a*, *b*, *c*, *d*, … -nosaltres els denotarem mitjançant itàliques, com els termes relatius simples. Finalment, els *termes individuals* són aquells termes que denoten un individu o objecte individual com ara els termes "El segon Felip de Macedònia" o "Juli Cèsar". Peirce denotarà els termes individuals mitjançant lletres majúscules, per accentuar així la seva diferència amb els termes generals o lògics. Peirce empra sovint l'expressió *terme relatiu* per referir-se als termes *relatius simples* i als *conjugatius*, per diferenciar-los

[1] W2 364-65 (CP 3.63).

així dels termes *absoluts*. Però, què entén Peirce per un terme relatiu? Tal com acabem de veure, Peirce caracteritza els termes relatius com termes *incomplets*, en el sentit que són termes que requereixen l'addició d'un o dos termes -segons siguin termes relatius simples o conjugatius- per completar la seva denotació. Així doncs, de la mateixa manera que, des d'un punt de vista actual, podem veure les constants de predicat i relació modernes com les expressions lingüístiques obtingudes a partir de determinades *frases verbals* substituint algun dels seus noms per espais en blanc, podríem veure llavors els termes relatius com les expressions lingüístiques que s'obtenen a partir de les *frases nominals* corresponents. Així, per exemple, a partir de les frases verbals *Adam estima a Eva* i *Sofia dóna sang a la Creu Roja* hom obtindria les relacions " --- estima a --- " i " --- dóna --- a --- ", mentre que de les frases nominals corresponents *Adam és l'amant d'Eva* i *Sofia és una donant de sang a la Creu Roja* hom obtindria els termes relatius "amant de --- " o "donant de --- a --- ".[1] Naturalment, el motiu principal que dugué Peirce a considerar les frases nominals en comptes de les frases verbals corresponents com a punt de partida de la seva anàlisi i, en definitiva, a entendre els termes relatius de la manera que acabem d'explicar fou la tesi, mantinguda per Peirce des de 1865 fins 1885 aproximadament, segons la qual *tots* els enunciats, inclosos els relacionals, són reductibles a la forma *subjecte-còpula-predicat* (*Cf. supra*, § 3). Remarquem finalment que la triple divisió dels termes lògics abans esmentada és conseqüència directa de la important *tesi de reducció*, que Peirce enuncia en l'article "Notation for the Logic of Relatives" a través de la següent conjectura:

> Un terme relatiu no pot reduir-se possiblement a cap combinació de termes absoluts, ni tampoc pot un terme conjugatiu reduir-se a cap combinació de relatius simples; però un [terme] conjugatiu que tingui més de dos correlats sempre pot reduir-se a una combinació de conjugatius de dos correlats.[2]

Podríem dividir la tesi o conjectura anterior en dues parts, una negativa i l'altra positiva. La negativa diu que els termes relatius simples no poden, en general, reduir-se a termes absoluts i que els termes conjugatius -en els quals s'inclouen aquells que tenen dos o més correlats- no poden, en general, reduir-se a termes relatius simples o termes absoluts. La

[1] En realitat, Peirce només deixa els espais en blanc en el cas dels termes conjugatius i en lloc de, per exemple, "amant de --- ", posa simplement "amant". Però, tal com hem vist abans, Peirce caracteritza també els relatius simples com termes incomplets i, per tant, la caracterització anterior ens sembla completament justificada.

[2] W2 425 (CP 3.144).

part positiva diu que tots els termes conjugatius amb més de dos correlats poden reduir-se a una combinació de conjugatius de dos correlats. D'aquí que, en definitiva, desenvolupament efectiu de la lògica de relatius només requereixi tres tipus de termes: els termes absoluts, els termes relatius simples i el termes conjugatius -amb dos correlats.

Una vegada especificat el llenguatge -la sintaxi- de la lògica de relatius, Peirce especificarà la interpretació -semàntica- que farà possible l'aplicació d'aquell llenguatge a l'estudi de la lògica de relatius. A tal efecte, Peirce comença definint l'*univers del discurs* com un conjunt no buit i arbitrari d'individus a partir del qual s'interpretaran els símbols propis i els signes algèbrics de relació i operació:

> Proposo emprar el terme "univers" per denotar només aquella classe d'individus *sobre* els quals s'entén que versa tot el discurs. Per tant, en aquest sentit, com en el de De Morgan, l'univers és diferent en diferents ocasions.[1]

La idea d'univers del discurs és una idea bàsica de la teoria de models contemporània, l'origen de la qual es remunta, com ja sabem, a un article de De Morgan de 1846 (*Cf. supra*, cap. I, § 1), encara que el terme "univers del discurs" apareixerà per primera vegada a *Laws of Thought* de Boole.[2] Tal com acabem de veure, Peirce distingeix clarament entre sintaxi i semàntica i, de fet, podríem dir que l'enfocament de Peirce és essencialment model-teorètic, si més no en el sentit que el nostre autor és ben conscient, en desenvolupar el càlcul de relatius, que els seus raonaments són sobre un model del llenguatge abans explicitat. Ara bé, com interpreta Peirce en aquest model els símbols propis del llenguatge de la lògica de relatius? Evidentment, els termes individuals denotaran els individus pertanyents a l'univers d'aquest model. El problema rau en determinar com s'han d'interpretar els termes relatius, perquè Peirce no especifica en cap moment quina és la denotació d'aquests termes. Això és degut segurament a que Peirce devia considerar que la caracterització dels termes lògics abans explicitada era no només una caracterització sintàctica, sinó també una caracterització semàntica d'aquesta mena de termes. Recordem, en efecte, que per caracteritzar els diferents tipus de termes lògics, Peirce apel·lava no només a la seva *forma lògica*, sinó també a la *idea* que aquesta forma lògica *pressuposava*. Així, assenyala Peirce, la forma lògica dels termes absoluts pressuposa la idea d'una *qualitat*, la dels termes relatius simples la idea de *relació*, etc. Això potser sembli una forma molt ingènua i genèrica de caracteritzar semànticament els

---

1 W2 366 (CP 3.65).

2 *Boole 1854*, 42.

termes, però és molt semblant a la que havia emprat Boole. Recordem, en efecte, que per aquest autor els *símbols literals* -l'equivalent als termes absoluts de Peirce- i els *signes algèbrics* representen idees i concepcions de la nostra ment -per exemple: la idea d'una qualitat o atribut- i les operacions entre elles, però que això no és incompatible amb una interpretació extensional d'aquests símbols literals com a classes -per exemple: la classe dels objectes posseïdors d'una determinada qualitat- i de les operacions entre ells com operacions entre classes (*Cf. supra*, cap. I, § 2). Tal com veurem, Peirce adoptarà també aquesta perspectiva extensional al llarg del seu article de 1870, la qual cosa el durà a interpretar els termes absoluts com classes d'individus, els termes relatius com relacions o, el que és el mateix, classes de parells ordenats, ternes, etc, i, finalment, els signes algèbrics de relació i operació com relacions i operacions entre classes i/o relacions. S'ha de dir, amb tot, que no hi ha un acord unànime entre els estudiosos de l'obra de Peirce en relació a com s'han d'interpretar els termes relatius a l'article que estem estudiant. Alguns autors han sostingut que els termes relatius representen no ja relacions, sinó classes d'individus d'un tipus especial -a saber, classes que inclouen relacions en la seva definició, això és, dominis de relacions.[1] La tesi peirciana segons la qual tots els enunciats són de la forma subjecte-còpula-predicat i la conseqüent caracterització dels termes relatius a partir de frases nominals suggereix, en efecte, que els termes relatius representen no pas relacions, sinó classes definides relacionalment, això és, dominis de relacions. Així, per exemple, s representaria la classe dels "servents", la definició de la qual inclouria la relació "ésser servent de", sl representaria la classe dels "servents d'un amant", la definició de la qual inclouria les relacions "ésser servent de" i "ésser amant de", etc. Ara bé, des del nostre punt de vista, aquesta interpretació presenta alguns inconvenients que la fan insostenible. En primer lloc, alguna de les lleis bàsiques enunciades per Peirce en el seu article de 1870 no són vàlides en aquesta interpretació. Per exemple, C. I. Lewis interpreta la fórmula

$$\text{Si } l \prec s, \text{ aleshores } l^w \prec s^w,$$

[1] *Cf. Lewis, 1918*, *Brink 1978* i *Martin 1978*. C. I. Lewis ha observat, per exemple, que "Peirce, com De Morgan, empra els seus relatius com si denotessin ambiguament o bé la mateixa relació o bé les coses que tenen la relació -o bé relacions o termes relatius". (*Lewis 1918*, 95). Així, per exemple, el terme relatiu *a* denotarà o bé la relació "agent de" o el nom de classe "agent". En qualsevol cas, al llarg de la seva exposició de l'article de Peirce de 1870 sobre la lògica de relatius, Lewis identifica els termes relatius amb noms de classes (*Cf. ibid*., 85-90).

a través de l'enunciat: "si tots els amants són servents, llavors un amant de totes les dones és un servent de totes les dones". Però si aquesta fos la interpretació correcta, aleshores la llei anterior seria falsa perquè, encara que tot els amants siguin servents, pot ser que un individu estimi totes les dones i no sigui servent seu. De fet, Peirce no hagués interpretat l'antecedent del condicional anterior de la manera indicada per Lewis, sinó com "un amant de qualsevol cosa és un servent d'aquesta cosa" i, per tant, de forma essencialment anàloga a com avui en dia interpretaríem la inclusió entre dues relacions. En segon lloc, encara que els exemples de termes relatius i l'explicació d'algunes operacions entre ells sembla suggerir que els termes relatius representen classes -per exemple: Peirce explica la *involució endarrera* dient que l_s denota "qualsevol cosa que és un amant, sigui com sigui que és un amant, d'un servent, la qual cosa suggereix que l_s i s denoten classes d'individus-, el cert és que l'explicació peirciana de l'operació de relatiu més important requereix que els termes relatius representin efectivament relacions. Aquest és el cas, en efecte, de la *multiplicació relativa*, la qual s'interpreta lògicament en termes de l'operació *aplicació d'una relació*, que és una operació binària la definició de la qual pressuposa l'existència d'algun element que estigui en les relacions indicades pel primer i segon terme relatiu que són multiplicats com a segon i primer correlat respectivament. Finalment, cal remarcar que si bé és cert que la noció de terme relatiu, tal com ha estat introduïda per Peirce al començament de l'article de 1870 i nosaltres hem explicat abans, no es correspon exactament amb la noció moderna de relació, veurem més endavant que al final d'aquest article Peirce defineix els termes relatius com la suma lògica dels relatius individuals -parells ordenats, ternes, etc- i, per tant, identifica els termes relatius amb les *relacions en extensió* -com dirà Russell més endavant-, la qual cosa el permetrà encetar, per primera vegada a la història, un *desenvolupament matricial* de la lògica de relatius.

Una vegada explicada la naturalesa dels diferents tipus de *termes lògics* -absoluts i relatius-, Peirce explica com s'han d'interpretar els signes algèbrics de relació i operació per tal de poder-se aplicar a aquests termes, això és, la interpretació lògica de les relacions d'igualtat i inclusió i de les operacions d'addició, multiplicació i involució. Com ja sabem, el criteri general és que aquestes relacions i operacions s'han d'aplicar indistintament als termes absoluts i relatius i que la idea general a la qual responguin cada una d'aquestes operacions sigui única i mantingui un cert vincle analògic amb la relació o operació aritmètica originària. A més, cal que aquests signes satisfacin, en la seva interpretació lògica, les condicions *imperatives* o *absolutes* abans explicitades. El problema és, doncs, trobar per a cada signe de relació i operació una interpretació general i unificadora que compleixi tots els requisits anteriors. Els signes de relació no plantegen cap dificultat, car les interpretacions lògiques habituals en termes de la relació d'identitat o inclusió entre classes són aplicables alhora als termes absoluts i relatius, satisfan la propietat transitiva i "tenen la virtut supererogatòria de ser pràcticament idèntiques al significats habituals [en matemàtiques]. La *igualtat*, de fet, no és altra cosa que la identitat de dos nombres; els nombres iguals són aquells que són predicables de les mateixes col·leccions, de la mateixa manera que els termes idèntics són aquells que són predicables de les mateixes classes".[1] I el mateix es pot dir evidentment en referència a la relació *ésser menor que o ésser més petit que* entre nombres i la relació homònima entre termes, car, tal com assenyala Peirce, "escriure $5 < 7$ és dir que 5 és una part de 7, de la mateixa manera que escriure $f < m$ és dir que els francesos són part dels homes".[2] D'aquí se segueix immediatament, segons Peirce, la interpretació de $-\!\!<$ o, el que és el mateix, $\leq$, com la relació d'inclusió entre classes.

Si, tal com acabem de veure, Peirce no troba cap dificultat especial per especificar una interpretació lògica dels signes algèbrics de relació que satisfaci els requisits abans esmentats, no s'esdevé el mateix amb els signes d'operació. Pel que fa al signe d'addició, com ja sabem, Peirce distingeix entre l'addició invertible i l'addició no invertible, que representa a través dels signes $+$ i $+_{,}$ respectivament. Totes dues operacions satisfan les condicions absolutes -és a dir, són commutatives i associatives-, són aplicables indistintament als termes absoluts i relatius i, assenyala Peirce, "la idea de *prendre junts* pressuposada en aquests processos és força anàloga a la de la suma; per exemple, la suma de 2 i 5 és el nombre d'una col·lecció que consisteix en una col·lecció de dos i una col·lecció de cinc [membres]".[3] Ara bé, aquesta analogia només és completa en el cas que els termes siguin disjunts, això és, en el cas que l'addició booleana i lògica coincideixin i, per tant, com reconeix Peirce immediatament, només en aquest cas podem substituir els termes per nombres. De fet, encara que Peirce mostra una clara predilecció per l'addició lògica enfront de l'addició booleana com operació bàsica a partir de la qual desenvolupar la lògica de relatius, el fet que només aquesta última permeti la plena aplicabilitat dels mètodes propis de l'àlgebra a l'estudi de la lògica, farà que Peirce no prescindeixi totalment d'aquesta operació. Remarquem finalment que, donat que Peirce interpreta els signes $+$ i $+_{,}$ com l'addició

1 W2 367 (CP 3.66).
2 W2 367 (CP 3.66).
3 W2 369 (CP 3.67).

booleana i lògica respectivament, es limita a introduir aquestes dues operacions absolutes com operacions bàsiques a partir de les quals desenvolupar el càlcul de relatius. Com veurem més endavant, l'operació relativa corresponent, la *suma relativa*, serà introduïda per Peirce, per primera vegada en la història, en l'article "The Logic of Relatives" (*1883_b*).

Per a l'operació de *multiplicació*, Peirce adoptarà com a idea bàsica "l'*aplicació d'una relació*, de manera que, per exemple, *lw* denotarà qualsevol cosa que és amant d'una dona".[1] Podem entendre fàcilment l'operació *aplicació d'una relació* a través de la qual Peirce interpreta la multiplicació dels termes absoluts i relatius a partir dels mateixos exemples emprats per ell en l'article de 1870. Així, en l'exemple que acabem d'esmentar, *l*w representa l'aplicació del terme relatiu "amant de --- " al terme absolut "dona", *i.e.* el terme absolut "amant d'una dona"; si, en lloc d'aquest últim terme considerem el terme relatiu "servent de --- " i el denotem per *s*, aleshores *ls* representarà l'aplicació del terme relatiu "amant de --- " sobre el terme relatiu "servent de --- ", *i.e.* el terme relatiu "amant d'un servent de --- "; anàlogament, *ls*w representarà l'aplicació del terme relatiu "amant d'un servent de --- " sobre el terme absolut "dona", *i.e.* el terme absolut "amant d'un servent d'una dona", etc. Tal com acabem de veure, l'operació *aplicació d'una relació* coincideix, des d'un punt de vista sintàctic, amb l'operació d'omplir cada un dels espais en blanc d'un terme relatiu amb un altre terme, relatiu o absolut, i és una generalització de l'operació *composició de relacions* de A. De Morgan, que aquest autor havia introduït per primera vegada en el seu article de 1860 en els termes següents:

> Quan el predicat és ell mateix el subjecte d'una relació, hi pot haver una composició: així, si *X*..*L*(*MY*), si *X* és un dels *L*s d'un dels *M*s de *Y*, podríem pensar en *X* com un "*L* de *M*" de *Y* i expressar-ho per *X*..(*LM*)*Y* o, simplement, per *X*..*LMY*.[2]

La diferència fonamental entre ambdues operacions rau en què, mentre que l'operació de De Morgan s'aplica només entre relacions, l'operació de Peirce s'aplica també entre relacions i classes i que, tal com observa el mateix Peirce, en introduir l'operació de composició, De Morgan "no sembla haver tingut en el cap la [idea de] multiplicació".[3] Considerada com una multiplicació algèbrica, l'operació d'aplicació d'una relació, quan s'aplica entre termes relatius simples o absoluts que no figuren en un terme conjugatiu, és

[1] W2 369 (CP 3.68).
[2] *De Morgan 1966*, 221.
[3] W2 369 (CP 3.68).

una operació associativa i no commutativa. Aquesta era una qüestió important per a Peirce, donat el seu interès en connectar el seu treball sobre la lògica de relatius amb el del seu pare, Benjamin Peirce, sobre les *àlgebres lineals associatives*. Així, en una carta adreçada al seu pare el 9 de Juny de 1878, Peirce escriu:

> Em penso que el que segueix possiblement tingui algun interès per vostè amb connexió amb les seves àlgebres. He estat aplicant el càlcul de Boole a la lògica dels termes relatius i en fer-ho, he trobat (entre d'altres operacions) una multiplicació associativa i no commutativa. És com segueix: Si *k* denota assassí, *w* dona i *m* home, llavors
>
> *kwm* denota la classe d'assassins de dones d'homes.[1]

Podem concloure, doncs, que en la mesura que Peirce interpreta la multiplicació com l'operació d'*aplicació d'una relació* i els termes absoluts i relatius com a classes i relacions respectivament, la multiplicació de Peirce representarà la composició d'una relació amb una relació o amb una classe. En particular, donat que l'*aplicació d'una relació* sobre una relació coincideix amb la composició de relacions de De Morgan i aquesta operació amb el que avui en dia anomenem producte relatiu, podem concloure que la multiplicació de relatius simples s'ha d'interpretar com l'operació que Peirce anomenarà a partir de l'article "The Logic of Relatives" de 1883, i a partir d'ell la gran majoria dels lògics contemporanis, el *producte relatiu*. Peirce no pot definir en l'article de 1870 aquesta operació simbòlicament, perquè encara no ha desenvolupat una notació capaç d'expressar correctament la idea de quantificació existencial que pressuposa la definició de producte relatiu, però Peirce ja dóna en aquest article els primers passos en aquesta direcció en introduir els signes Σ' i Π' per indicar la suma i el producte lògic i definir extensionalment els termes absoluts i relatius com la suma lògica d'individus i parells ordenats respectivament. El pas decisiu el donarà Peirce en l'article de 1883 abans esmentat amb la introducció dels *subíndexs* i dels *coeficients numèrics*, els quals permetran interpretar els signes Σ i Π, ja no com a sumes i productes, sinó com el quantificador existencial i universal respectivament.

Com ja sabem, d'una altra banda, un dels requisits que haurà de satisfer l'operació de multiplicació així definida és que guardi una certa analogia amb la multiplicació aritmètica. Doncs bé, segons Peirce, la multiplicació aritmètica es basa en la idea de "prendre un factor relativament a un altre (així escrivim 3×2 per [representar] una tripleta *de* parells i $D\varphi$ per la

[1] Citat a W2 xlvi.

derivada de φ",[1] idea anàloga a l'aplicació d'una relació a partir de la qual s'interpreta lògicament l'operació de multiplicació. Un altre dels requisits que ha de satisfer l'operació *aplicació d'una relació* és que sigui aplicable ensems als termes absoluts i relatius, en el sentit que no només la multiplicació de termes relatius sigui interpretable a partir d'aquesta operació, sinó que també ho sigui la multiplicació dels termes absoluts. Ara bé, això sembla en principi contradictori amb la mateixa idea de l'operació *aplicació d'una relació* car, tal com ja hem explicat, perquè un terme sigui aplicable a un altre terme, ha de tenir algun espai en blanc i, per tant, ha de ser un terme relatiu. Semblaria, doncs, que els termes absoluts, en la mesura que no tenen cap espai en blanc, no poden aplicar-se a cap altre terme, encara que a ells els puguem aplicar evidentment qualsevol terme relatiu. Per solucionar aquest problema Peirce introduirà una operació unària, indicada per una *coma* situada just darrera de la lletra que simbolitza el terme al qual s'aplica aquesta operació, la qual en ser aplicada a un terme d'aritat *n* -*i.e.* amb *n* espais en blanc- donarà com a resultat un terme d'aritat $n+1$. En particular, aquesta operació permetrà transformar els termes absoluts en termes relatius simples i, per tant, estendre el rang d'aplicació de l'operació *aplicació d'una relació* també als termes absoluts. Així, per exemple, el resultat d'aplicar l'operació *coma* al terme absolut "home" donarà com a resultat el terme relatiu "home que és --- ", de manera que si simbolitzem "home" per m i "negre" per b, llavors m,b representarà l'aplicació del terme relatiu *m*, sobre el terme absolut *b*, és a dir, "home que és negre". Anàlogament, si representem com abans el terme relatiu "amant de ---" per *l*, llavors *l*, representarà el terme relatiu "amant de --- que és --- " i *l*,*s*w representarà el terme relatiu "amant d'una dona que és el servent d'aquesta dona", és a dir, "amant i servent d'una dona".[2] Finalment, si apliquem l'operació *coma* al terme relatiu simple "idèntic amb --- ", obtindrem el terme conjugatiu "idèntic amb --- i amb --- ", anomenat habitualment en la literatura sobre Peirce el *terme de teridentitat* [*teridentity term*]. Veiem, doncs, que Peirce interpreta la *multiplicació commutativa* a través de l'operació *coma* i l'operació *aplicació d'una relació*, la combinació de les quals és equivalent al *producte lògic*. D'aquí que, tot comptat i debatut, Peirce interpreti la multiplicació commutativa, aplicable ensems als termes absoluts i relatius, com el producte lògic de classes i relacions -no debades Peirce representa a l'article de 1870 la multiplicació commutativa a través d'una coma, signe a través del qual havia representat el producte lògic en els articles "On an Improvement in Boole's Calculus of Logic" i "Upon the Logic of Mathematics" de 1867 comentats en la secció anterior. Hem argumentat abans que

[1] W2 363 (CP 3.61).
[2] W2 372-73 (CP 3.73).

l'operació aplicació d'una relació, entesa com una multiplicació algèbrica, era una operació associativa i no commutativa. Però, al començament de la nostra exposició havíem vist que Peirce caracteritzava la multiplicació com una operació que és "quasi invariablement associativa" i que, en canvi, "no és generalment commutativa". Aquestes precaucions alhora de caracteritzar algèbricament la multiplicació com una operació associativa i no commutativa són conseqüència del fet que l'operació *aplicació d'una relació* a través de la quals s'interpreta la multiplicació: (*i*) és commutativa quan s'aplica en combinació amb l'operació coma, (*ii*) no és associativa quan s'aplica entre termes absoluts i/o relatius simples que ocorrin en el context de termes conjugatius. Pel que fa a (*i*) notem, en efecte, que en la mesura que Peirce interpreta generalment l'operació *aplicació d'una relació* com la composició d'una relació amb una relació o amb una classe, l'*aplicació d'una relació* serà una operació no commutativa; l'operació *aplicació d'una relació* serà només commutativa quan aparegui després de l'operació *coma* perquè, com ja sabem, Peirce interpreta la combinació d'aquestes dues operacions com el producte lògic de classes i relacions, que és una operació commutativa. Pel que fa a (*ii*), donat que l'associativitat del producte lògic i del producte relatiu és un fet prou conegut, semblaria que l'operació aplicació d'una relació hauria de ser sempre associativa. Però, com hem vist fa un moment, Peirce considerava que l'operació *aplicació d'una relació* només és associativa en determinats casos, a saber, aquells en què els termes als quals s'aplica aquesta operació no figuren en un terme conjugatiu. Per veure la diferència que hi ha pel que fa a l'associativitat entre l'operació aplicació d'una relació quan aquesta s'aplica entre termes que ocorren en el context d'un terme conjugatiu o fora d'aquest context, recorrerem al llenguatge de la lògica de primer ordre, el qual ens permetrà simbolitzar els diferents tipus de termes lògics considerats per Peirce i, en definitiva, capturar de la millor manera possible el significat de l'operació *aplicació d'una relació*. En primer lloc, donat que els termes absoluts i relatius representen classes i relacions, podríem representar els termes "amant", "dona" i "servent" a través de les fórmules obertesLxy, Wz i Syz.[1] En segon lloc, donat que l'operació *aplicació d'una relació* coincideix amb el producte relatiu i aquesta és una operació binària la definició de la qual afirma l'existència d'algun element que estigui en la relació indicada pel primer i segon terme relatiu com a segon i primer correlat, podríem representar el terme "amant d'un servent" per $\exists y(Lxy \wedge Syz)$ i el terme "servent d'una dona" per $\exists z(Syz \wedge Wz)$. Per veure que l'operació aplicació d'una relació és associativa quan s'aplica entre termes relatius simples

[1] Més exactament, Lxy representa "x és l'amant de y", Wz representa "z és una dona" i Syz representa "y és el servent d'una dona".

-en combinació possiblement amb algun terme absolut- serà suficient comprovar que els termes “(amant d’un servent) d’una dona” i “amant (d’un servent d’una dona)” són expressables a través de fórmules de la lògica de primer ordre lògicament equivalents. Tal com acabem de veure, “amant d’un servent” és representable per $\exists y(Lxy \wedge Syz)$, per la qual cosa “(amant d’un servent) d’una dona” serà representable per $\exists y[\exists z((Lxy \wedge Syz) \wedge Wz)]$(1). D’una altra banda, com que “servent d’una dona” és representable per $\exists z(Syz \wedge Wz)$, “amant (d’un servent d’una dona)” serà representable per $\exists y[Lxy \wedge \exists z(Syz \wedge Wz)]$ (2). Ara bé, les fórmules (1) i (2) són lògicament equivalents en primer ordre, per la qual cosa podem concloure, emprant la simbologia pròpia de Peirce, que (ls)w= l(sw) i, en general, que l’operació aplicació d’una relació és associativa quan s’aplica entre termes relatius simples -i possiblement algun terme absolut- que no figuren en el context de termes conjugatius. El problema sorgeix quan aquests termes figuren en termes conjugatius. Donat un terme conjugatiu com ara “donant a --- de ---”, hom també pot omplir els espais en blanc amb termes absoluts o relatius simples com ara “amo de --- ” o “cavall” i, per tant, veure un terme com ara “donant a un amo d’un cavall” com el resultat de la multiplicació de tres termes,[1] i preguntar-se llavors si aquesta operació és associativa, és a dir, si els termes “(donant a un amo) d’un cavall” i “donant a (un amo d’un cavall)” són equivalents. Per respondre aquesta pregunta simbolitzarem “donant a --- de --- ” per $Gxtu$, “amo de --- ” per Ovw i “cavall” per Hs. Així, el terme “(donant a un amo) d’un cavall” es representaria per $\exists z[\exists y(Gxyz \wedge Oyw) \wedge Hz]$ o, el que és el mateix,$\exists y \exists z[Gxyz \wedge Oyw \wedge Hz]$ (1), mentre que el terme “donant a (un amo d’un cavall)” es representaria per $\exists y[Gxyu \wedge \exists z(Oyz \wedge Hz)]$ o, el que és el mateix, $\exists y \exists z[Gxyu \wedge Oyz \wedge Hz]$ (2). La diferència entre (1) i (2) és prou clara: En (1) s’especifica el que el donant dóna (un cavall), però no el que l’amo posseeix, mentre que a (2) s’especifica el que posseeix l’amo, però no el que dóna el donant. Hem de concloure, doncs, que l’operació *aplicació d’una relació* no és associativa en contextos com l’anterior i, tal com diu Peirce, que “el principi associatiu, d’una manera o altra, ha de ser abandonat en aquest punt”.[2] Una manera de solucionar el problema anterior seria adoptar la convenció que quan un terme es multiplicat per dos termes relatius, llavors el mateix individu està en les dues relacions.[3] Així, seguint amb l’exemple anterior, “donant a un amo d’un cavall”, s’hauria d’interpretar com “donant d’un cavall a un amo d’aquell cavall”, en símbols

[1] Notem, en efecte, que el terme “donant a un amo d’un cavall” es pot obtenir com a resultat de l’aplicació del terme “donant a --- de --- ” sobre els termes “amo de --- ” i “cavall”.

[2] W2 371 (CP 3.69).

[3] W2 371 (CP 3.69).

$\exists y \exists z(Gxyz \wedge Oyz \wedge Hz)$. Ara bé, aquest terme relatiu no es pot obtenir com a resultat d'aplicar l'operació *aplicació d'una relació*, tal com aquesta havia estat introduïda originàriament -notem, en efecte, que en l'operació aplicació d'una relació s'identifiquen dues variables i, després, es quantifica existencialment sobre elles en una conjunció, mentre que per obtenir el resultat anterior cal identificar tres variables i després quantificar existencialment sobre elles en la manera indicada. De resultes d'això, Peirce cercarà una notació que permeti generalitzar l'operació *aplicació d'una relació* en el sentit que sigui capaç d'expressar de forma no ambigua qualsevol combinació d'un nombre finit de termes relatius de qualsevol aritat, això és, que permeti expressar de forma no ambigua les variables que s'han d'identificar en una combinació de dos o més termes relatius qualssevol. Els dos sistemes de notació proposats per Peirce a tal efecte es basen en la utilització de *nombres subjacents* i *marques de referència* com a índexs de diferents tipus dels termes relatius. Podem passar per alt els detalls d'aquesta notació i resumir els trets més rellevants de la discussió anterior sobre l'operació aplicació d'una relació a través de la qual Peirce interpreta lògicament l'operació algèbrica de multiplicació. Tal com hem vist, l'operació *aplicació d'una relació* s'introdueix originàriament com una operació que s'aplica entre termes relatius simples i absoluts i s'ha d'interpretar com la operació de composició d'una relació amb una relació o amb una classe, és a dir, com el *producte relatiu*, que és una operació associativa i no commutativa. La cosa es comença a complicar quan Peirce intenta interpretar també la multiplicació commutativa a través de l'operació *aplicació d'una relació* i sobretot quan aparèixen en escena els termes conjugatius. En efecte, el fet que els termes conjugatius puguin *aplicar-se* a termes relatius simples i absoluts genera diversos problemes -principalment, la violació del principi associatiu- que duen Peirce a intentar generalitzar l'operació *aplicació d'una relació*, tal com aquesta havia estat introduïda originàriament, de diverses maneres. Nosaltres no hem estudiat aquests intents de generalització de l'operació aplicació d'una relació, però val la pena esmentar que aquesta generalització té interès perquè avança un fet bàsic per entendre la *tesi de reducció* que, com ja sabem, Peirce enuncia en l'article de 1870 en forma de conjectura. Si, com hem fet al llarg de la nostra discussió, interpretem els termes relatius com relacions, llavors podem reformular les dues parts en què havíem desglossat la tesi de reducció en els termes següents: (*i*) les relacions d'aritat 2 no poden, en general, ser reduïdes a relacions d'aritat 1; les relacions d'aritat ≥ 3 no poden, en general, reduir-se a relacions d'aritat 1 o 2 i (*ii)* tota relació d'aritat > 3 pot reduir-se a relacions d'aritat 3. Doncs bé, el *rationale* per la tesi (*i*) rau simplement en el fet que hom no pot assolir una relació d'aritat ≥ 3 a partir de relacions d'aritat 1 o 2 perquè si generalitzem l'operació aplicació d'una relació a termes de qualsevol aritat, llavors l'aplicació d'un terme *m*-àdic a un altre terme *n*-àdic ens donarà com a resultat un terme $(m + n - 2)$-àdic i, per tant, l'aplicació d'un terme d'aritat 2 sobre un terme d'aritat 1 ens donarà com a resultat un terme d'aritat 1 i l'aplicació d'un terme d'aritat 2 sobre un terme d'aritat 2 ens donarà de bell nou un terme d'aritat 2. La demostració de la tesi (*ii*) requereix la noció d'abstracció hipostàtica (*hypostatic abstraction*) amb la qual es "demostra" que amb l'operació *aplicació d'una relació* i el terme conjugatiu "és idèntic amb --- i --- " hom pot traduir tota formula de la lògica de primer ordre amb identitat a la lògica de relatius.[1]

Una vegada explicada la interpretació lògica de les operacions d'addició i multiplicació, resta només explicar la interpretació lògica de l'operació anomenada per Peirce *involució* o *involució ordinària*. Doncs bé, d'acord amb Peirce, "x^y denotarà qualsevol cosa que sigui un x per a cada [objecte] individual de y",[2] de manera que l'ús d'una lletra com a exponent tindrà l'efecte de quantificar universalment aquella lletra. Així, per exemple, s^l denotarà un servent de tot amant i l^w denotarà un amant de tota dona. Naturalment, les condicions absolutes de l'operació d'involució se satisfan en aquesta interpretació. En efecte, d'acord amb el que acabem de dir:

> $(s^l)^{\mathrm{w}}$ denotarà qualsevol cosa que estigui amb cada dona en la relació de servent de cada amant d'elles; i $s^{(l\mathrm{w})}$ denotarà qualsevol cosa que sigui un servent de cada cosa que sigui amant d'una dona. Així que
>
> $$(s^l)^{\mathrm{w}} = s^{(l\mathrm{w})}.$$
>
> Un servent de tot home i dona serà denotat per $s^{\mathrm{m}\underset{,}{+}\mathrm{w}}$ i $s^{\mathrm{m}}, s^{\mathrm{w}}$ denotarà un servent de tot home que és un servent de tota dona. Així que
>
> $$s^{m\underset{,}{+}w} = s^m, s^w.$$
>
> Allò que és emperador o conqueridor de cada francès serà denotat per $(e \underset{,}{+} c)^{\mathrm{f}}$ i $e^{\mathrm{f}} \underset{,}{+} \Sigma_p\, e^{\mathrm{f}-p}, c^p \underset{,}{+} c^{\mathrm{f}}$ denotarà qualsevol cosa que és emperador de cada francès o emperador d'algun francès i conqueridor de tota la resta, o conqueridor de tot francès. Conseqüentment,
>
> $$(e \underset{,}{+} c)^{\mathrm{f}} = e^{\mathrm{f}} \underset{,}{+} \Sigma_p\, e^{\mathrm{f}-p}, c^p \underset{,}{+} c^{\mathrm{f}}.$$ [3]

---

1 Naturalment, això contradiu un resultat ben conegut de Korselt (*Cf. supra*, cap. VIII, § 1).

2 W2 377 (CP 3.77).

3 W2 377 (CP 3.77).

L'expressió $\Sigma_p e^{f-p}, c^p$ en aquesta última fórmula significa literalment "emperador de tot francès no-p i conqueridor de tot p". Així, donada la hipòtesi que la classe dels *p*s està inclosa en la dels *f*s, Peirce pot interpretar $\Sigma_p e^{f-p}, c^p$ com "emperador d'algun francès i conqueridor de tota la resta". Veiem, doncs, que encara que Peirce empra al llarg de l'article de 1870 el signe Σ per designar la suma lògica dels individus que cauen sota una classe, tal i com ja havia fet en l'article "Upon the Logic of Mathematics" de 1867, aquest signe és utilitzat aquí per designar una expressió quantificada, és a dir, com un quantificador existencial.

Abans havíem vist que en la presentació dels diferents signes algèbrics de relació i operació, Peirce esmentava com a condició *sine qua non* per a l'aplicabilitat de l'addició i la multiplicació l'existència d'un *zero* i una *unitat*, *i.e.* de dos elements distingits que satisfacin

$$x \mathbin{+\!\!,} 0 = x$$

$$x1 = x.$$

Per aquest motiu, en explicar l'aplicabilitat d'aquestes operacions a la lògica, Peirce introdueix el zero i la unitat com l'element neutre i identitat per la addició i la multiplicació respectivament a partir de les equacions anteriors. Ara bé, com que l'addició s'interpreta com l'addició lògica i, en canvi, la multiplicació es correspon essencialment amb el producte relatiu, el *zero* representarà el terme absolut *no res* [*nothing*], és a dir, *la classe nul·la o buida*, mentre que *la unitat* representarà el terme relatiu "idèntic amb --- ", això és, *la relació d'identitat*. Que aquests dos termes constitueixen l'element neutre i identitat per a l'addició lògica i el producte relatiu és prou clar. En aquest darrer cas, notem simplement que l'aplicació d'un terme relatiu *Rxy* sobre el terme relatiu "idèntic amb ---" que representarem per *Iyy* dóna com a resultat el terme $\exists z[Rxz \wedge Izy]$, és a dir, $\exists z[Rxz \wedge z = y]$, que és lògicament equivalent a *Rxy*. Junt amb la *classe nul·la* i la *relació d'identitat*, Peirce també introduirà en l'article de 1870 com element distingit la *classe universa*l, que denotarà per 1. En canvi, no prendrà en consideració ni les *relacions universal* i *nul·la* ni tampoc la *relació de diversitat*. Això és degut, d'una banda, al fet ja esmentat que el *zero* i la *unitat* s'introdueixen com l'element neutre i identitat de l'addició i la multiplicació, les quals s'interpreten com una operació absoluta i relativa respectivament i, d'una altra banda, a la mateixa idiosincràsia de l'article de 1870 que, com ja hem explicat abans, pretén desenvolupar més aviat una àlgebra lògica que sigui aplicable ensems al càlcul de classes i relacions, que no pas un àlgebra de relatius o relacions pròpiament dita. En qualsevol cas, en el conegut article "The Logic of Relatives" de 1883 Peirce atorgarà a les relacions distingides abans esmentades la importància que els correspon (*Cf. infra*, § 8).

Hem vist al llarg de la nostra exposició de l'article de 1870 sobre la lògica de relatius que el propòsit inicial de Peirce en aquest article era estendre el sistema de Boole per fer-lo aplicable a l'estudi de la lògica de relacions de De Morgan, però que en comptes d'estendre l'àlgebra de classes de Boole amb nous símbols d'operació per als termes relatius, el que fa Peirce en realitat és construir una mena d'àlgebra bivalorada aplicable ensems als termes absoluts -classes- i relatius -relacions. Tal com hem vist fins ara, Peirce considera en la presentació del seu sistema algèbric tres operacions: l'addició, la multiplicació i la involució, les quals en aplicar-se als termes absoluts i relatius donen lloc a dues operacions absolutes: l'addició i el producte lògic i dues relatives: el producte relatiu i la involució. De totes maneres, en exposar les lleis fonamentals del càlcul de classes, Peirce introdueix una nova operació absoluta, el *complement*, i en exposar les lleis fonamentals del càlcul de relatius, introdueix dues noves operacions de relatiu, la *conversió* i la *involució endarrera* (*backwards involution*). Peirce denota l'operació de conversió mitjançant la lletra majúscula *K*, de manera que, per exemple "si *s* és "servent de", llavors *Ks* serà "senyor o senyora de"",[1] però les lleis d'aquesta operació no seran formulades fins l'article de 1883 abans esmentat. L'operació anomenada en l'article de 1870 *involució endarrera* i en l'article "On the Algebra of logic" de 1880 *involució regressiva* (*regressive involution*), es representa afegint un subíndex a un terme relatiu. Així, per exemple, s_l representarà "servent només d'amants" i l_w representarà "amant només de dones". En definitiva, si limitem la nostra atenció solament a les operacions interpretables lògicament, podem distingir en el sí del sistema de notació de Peirce una *subestructura booleana* que inclouria les relacions d'*igualtat* i *inclusió* i les operacions lògiques: *complement*, *addició* i *producte*; i una extensió seva que inclouria les operacions relatives: *multiplicació*, *involució ordinària*, *involució endarrera* i *conversa*. Així doncs, les principals novetats o modificacions que presenta l'àlgebra lògica presentada per Peirce en l'article "Notation for the Logic of Relatives" enfront de l'àlgebra de classes de Boole són, descomptant naturalment les operacions de relatiu, la introducció de la relació d'inclusió i l'ús de l'operació d'addició en el sentit inclusiu, que cal retrotreure tanmateix als articles de 1867 estudiats en la secció anterior. En qualsevol cas, totes aquestes innovacions són ja presents en l'article d'A. De Morgan "On the Syllogism, no. IV, and of the logic of relations"

[1] W2 400 (CP 3.111).

de 1860. Podríem resumir el sistema de notació presentat per De Morgan en aquest article de la següent manera (on $X..LY$ significa "X és un dels Ls de Y" i $X.LY$ significa "X no és un L de Y"):

$L\,))\,M$	Tot L d'un Z és un M d'aquell Z (*inclusió* relacional)
$L \mid\mid M$	$L\,))\,M$ i $M\,))\,L$ (*equivalència* relacional)
$X..L^{-1}Y$	X és un dels Ls de X (*conversa*)
$X..lY$	X no és un dels Ls de Y (*contrària*)
$X..LMY$	X és un dels Ls d'un dels Ms de Y (*composició*)
$X..LM'Y$	X és un L de tot M de Y (*quantitat inherent*)
$X..L \bullet MY$	X és un L només de Ms de Y (*quantitat inherent*).

Veiem, doncs, que les relacions i operacions introduïdes per De Morgan en el seu article de 1860 són exactament les mateixes que Peirce considerarà en l'article de 1870, encara que en el cas de De Morgan les operacions i relacions s'apliquen només a relacions, mentre que en el cas de Peirce s'apliquen indistintament a classes i relacions. Notem, en efecte, que De Morgan considera dues relacions, la *inclusió* i l'*equivalència*, que es corresponen amb les relacions d'*inclusió* i *igualtat* de Peirce, dues operacions unàries: la *contrària* i la *conversa* d'una relació, que es corresponen amb el *complement* i la *conversa* de Peirce, i tres operacions binàries: la *composició* de relacions, que es correspon amb la *multiplicació relativa* de Peirce i les dues operacions anomenades per De Morgan de *quantitat inherent*, que es corresponen respectivament amb la *involució ordinària* i *endarrera* de Peirce. Remarquem també que encara que De Morgan afirma no veure la necessitat d'emprar "relacions que són agregats d'altres relacions, com ara X és o bé un dels Ls de Y, o un dels Ls, o tots dos",[1] hom ha de considerar la referència de De Morgan a aquesta operació d'*agregació* com un clar precedent de la introducció per part de Peirce de l'addició lògica.

En l'article de 1870, les lleis fonamentals del càlcul de relatius s'exposen en la secció titulada "General Method of working with this Notation". Aquesta secció comença amb una comparació de les dificultats dels mètodes propis d'una àlgebra per a la lògica de relatius enfront de l'àlgebra lògica de Boole. Com observa Peirce, Boole considera només les quatre operacions bàsiques següents: l'addició invertible, la multiplicació commutativa i les operacions inverses respectives. Per tant, continua Peirce, Boole "només ha d'expandir les

[1] *De Morgan 1966*, 221.

expressions en què hi figura una divisió [...] per tal de desfer-se de totes les operacions no determinatives i poder emprar així els mètodes habituals en àlgebra, els quals són, a més, simplificats en gran mesura pel fet que $x, x = x$".[1] Com ja sabem, els mètodes propis de l'àlgebra lògica de Boole es veuran encara més simplificats per les modificacions introduïdes per Jevons: la substitució de l'addició determinativa per l'addició no determinativa i la supressió de les operacions inverses. Ara bé, adverteix Peirce:

> És obvi que qualsevol àlgebra per a la lògica de relatius ha de ser de llarg més complicada. En aquesta que jo proposo, treballem amb els desavantatges que la multiplicació no és generalment commutativa, que les operacions inverses són normalment no determinatives i que les equacions trascendentals i, fins i tot, equacions com ara
>
> $$a^{b^x} = c^{d^{e^x}} + f^x + x,$$
>
> on els exponents són de tercer o quart grau, són extremadament habituals. És obvi, doncs, que aquesta àlgebra no és ni de bon tros manejable com l'àlgebra aritmètica comuna.[2]

¿Quin és, doncs, el mètode general per treballar amb el sistema de notació proposat per Peirce que ha de permetre demostrar les lleis fonamentals del càlcul de relatius? És tracta, és clar, d'un mètode de demostració basat en els mètodes de demostració habituals en matemàtiques. Ara bé, segons Peirce:

> La demostració del tipus anomenat matemàtic es basa en suposicions de casos particulars. El geòmetra dibuixa una figura; l'algebrista suposa que una lletra significa una quantitat simple que compleix les condicions requerides. Però encara que el matemàtic suposa un cas individual, la seva hipòtesi és perfectament general, perquè no considera cap caràcter [particular] del cas individual, sinó només aquells que pertanyen a tot cas d'aquesta mena. L'avantatge d'aquest procediment rau en el fet que les lleis de la lògica dels termes individuals són més simples que aquelles que fan referència als termes generals, perquè els [termes] individuals són o bé idèntics o bé mútuament inclusius i no poden intersecar-se o subordinar-se amb un altre [terme] com s'esdevé amb les classes [...] Podem assolir [doncs] tots els avantatges que se suposa que el matemàtic deriva de la intuïció fent simplement hipòtesis generals

[1] W2 387 (CP 3.89).
[2] W2 388 (CP 3.90).

> sobres casos individuals [...] [Ara bé,] hi ha en la lògica de relatius tres tipus de termes que suposen hipòtesis generals sobres casos individuals. Els primer són els termes *individuals*, que denoten només individus; els segons són aquells relatius els correlats dels quals són individus: anomeno a aquests *relatius infinitesimals;* els tercers són els relatius *individuals infinitesimals,* i a aquests els anomeno relatius *elementals*.[1]

Així doncs, les demostracions de la lògica de relatius s'han de dur a terme a partir de la consideració d'objectes individuals, tal com s'esdevé en la resta de branques de les matemàtiques. Aquest detall, a primera vista irrellevant, suposa un trencament epistemològic fonamental amb l'obra dels lògics del corrent algèbric anteriors a Peirce com ara Boole i Jevons i influirà de forma decisiva en el desenvolupament ulterior de la lògica de relatius, perquè, tal com veurem més endavant, tant en l'obra de Peirce com en la de Schröder, si bé la formulació de les lleis fonamentals de la lògica de relatius es realitzen en termes de classes o relacions, les demostracions es fan sempre apel·lant als objectes individuals que pertanyen a aquestes classes i relacions. Aquest fet té una gran importància per al desenvolupament de la lògica contemporània perquè farà que es desenvolupi en el si de la lògica de relatius un llenguatge que coincideix essencialment amb la lògica de primer ordre. Més concretament, aquesta consideració dels objectes individuals o elements farà essencial la introducció dels signes Σ i Π com a sumes i productes d'elements de l'univers del discurs sota consideració i, a la llarga, a la seva interpretació com quantificadors. Tal com veurem en les seccions següents, això durà al naixement de la teoria de la quantificació moderna en l'obra de Peirce, de forma completament independent de l'obra de Frege. D'una altra banda, tal com vèiem en el text anterior, Peirce considera tres tipus de termes que fan referència a casos individuals: els *termes individuals*, els *relatius infinitesimals* i els *relatius elementals*. Aquesta classificació dóna lloc a tres subseccions de la secció que estem comentant. En la primera subsecció sobre els termes individuals és on es demostren la majoria de les lleis relatives a la *multiplicació* i la *involució*. En la segona subsecció sobre els relatius infinitesimals, Peirce introdueix la *conversa* i la *involució endarrera* i aplica a l'estudi d'aquests termes relatius operacions i tècniques matemàtiques tan elaborades com la diferenciació, logaritmes, equacions transcendentals, etc. Finalment, en la tercera subsecció sobre els relatius elementals, Peirce enceta el que podríem anomenar *desenvolupament matricial* de la lògica de relatius i aplica aquest mètode de representació a l'estudi de les *àlgebres associatives* de

[1] W2 389-91 (CP 3.92-95).

son pare Benjamin Peirce. En les pàgines següents estudiarem els aspectes més rellevants per a la comprensió de la lògica de relatius peirciana de cada una de les subseccions anteriors.

Les dues fórmules fonamentals referides als individuals i de les quals depenen la majoria de les demostracions de la primera subsecció són les dues següents -recordem que els elements es denoten amb majúscules:

$$\text{Si } x > 0 \quad x = X' \underset{,}{+} X'' \underset{,}{+} X''' \underset{,}{+} \text{etc.} \tag{95}$$

$$y^X = yX.[1] \tag{96}$$

Com exemple de les demostracions a partir d'instàncies particulars podem fer-nos ressò de la demostració de $s^{\mathrm{w}} \prec s\mathrm{w}$, per $w > 0$. Notem, en efecte, que per (95):

$$s\mathrm{w} = s(\mathrm{W}' \underset{,}{+} \mathrm{W}'' \underset{,}{+} \mathrm{W}''' \underset{,}{+} \text{etc.}) = s\mathrm{W}' \underset{,}{+} s\mathrm{W}'' \underset{,}{+} s\mathrm{W}''' \underset{,}{+} \text{etc.}$$

$$s^{\mathrm{w}} = s^{(\mathrm{W}' \underset{,}{+} \mathrm{W}'' \underset{,}{+} \mathrm{W}''' \underset{,}{+} \text{etc.})} = s^{\mathrm{W}'}, s^{\mathrm{W}''}, s^{\mathrm{W}'''}, \text{etc.}$$

A partir d'aquesta última equació s'obté, per (96), que:

$$s^{\mathrm{w}} = (s\mathrm{W}'), (s\mathrm{W}''), (s\mathrm{W}'''), \text{etc},$$

per tant, donat que $\Pi' \prec \Sigma'$ (101),[2] es pot concloure que:

$$s^{\mathrm{w}} \prec s\mathrm{w}. \tag{102}$$

A partir de (102), Peirce dedueix també altres inclusions com ara:

$$(ls)^{\mathrm{w}} \prec ls\mathrm{w} \tag{103}$$

$$ls^{\mathrm{w}} \prec (ls)^{\mathrm{w}} \tag{105}$$

---

[1] W2 392 (CP 3.96). La numeració emprada a partir d'ara i mentre no s'especifiqui el contrari és la mateixa que la de l'article de Peirce.

[2] Aquests operadors denoten respectivament el producte i l'addició lògica. Peirce dedueix aquesta fórmula a partir de $\varphi(x) = (\varphi 1 + 1 - x), (\varphi 0 + x)$ (31). Notem que d'ella se segueix, en efecte, que$x + y = (x, y) + y$ i, per tant, que x, y està inclòs en $x + y$.

$$l^{s^{\mathrm{w}}} \prec ls^{\mathrm{w}} \tag{106}$$

$$l^{s}\mathrm{w} \prec l^{s^{\mathrm{w}}} \tag{107}$$

$$l^{s\mathrm{w}} \prec l^{s}\mathrm{w}. \tag{108}$$

Hom té, doncs, la següent cadena d'inclusions:

$$l^{s\mathrm{w}} \prec l^{s}\mathrm{w} \prec l^{s^{\mathrm{w}}} \prec ls^{\mathrm{w}} \prec (ls)^{\mathrm{w}} \prec ls\mathrm{w}.$$

A aquestes inclusions hom podria afegir-hi les següents, que Peirce ha enunciat prèviament:

$$\text{si } l \prec s, \text{ llavors } l^{\mathrm{w}} \prec s^{\mathrm{w}} \tag{93}$$

$$\text{si } s \prec b, \text{ llavors } l^{b} \prec l^{s}. \tag{92}$$

I també les igualtats següents:

$$(s^{l})^{\mathrm{w}} = s^{(l\mathrm{w})} \tag{10}$$

$$l^{s+\!\!,\,\mathrm{w}} = l^{s}, l^{\mathrm{w}} \tag{11}$$

$$(l, s)^{w} = l^{\mathrm{w}}, s^{\mathrm{w}}. \tag{13}$$

Peirce introdueix finalment un quart terme b i resumeix totes les inclusions possibles en un diagrama que ocupa quasi bé una pàgina sencera i no reproduirem aquí. A la vista d'això, Peirce conclou que li sembla que "els avantatges de la notació algèbrica comencen ja a ser perceptibles, encara que la seva potència s'ha mostrat fins ara de forma molt imperfecta",[1] tot convidant el lector incrèdul a formular les inclusions anteriors de forma precisa en llenguatge corrent perquè així pugui convèncer-se d'una vegada per totes de la utilitat de la notació algèbrica proposada en aquest article.

Tal com hem dit abans, en la subsecció sobre relatius infinitesimals, Peirce aplica a l'estudi d'aquests termes relatius tota una sèrie d'operacions i tècniques típiques del càlcul infinitesimal com ara logaritmes, derivades, equacions transcendentals, etc. El problema és que Peirce no especifica en la majoria dels casos quina és la interpretació lògica de les

1 W2 395 (CP 3.99).

operacions i tècniques emprades i, de fet, cap d'elles sembla tenir un interès especial des d'un punt de vista lògic, per la qual cosa passarem per alt els llargs i complexos desenvolupaments matemàtics a que dóna lloc l'aplicació d'aquestes tècniques pròpies del càlcul infinitesimal a l'estudi de la lògica de relatius. En la subsecció sobre els relatius infinitesimals, Peirce introdueix les operacions de *conversió* i d'*involució endarrera* i enuncia les lleis fonamentals d'aquesta última. En primer lloc, assenyala Peirce, de la mateixa manera que per la involució tenim que:

$$l^s = 1 - (1 - l)s, \qquad (124)$$

tenim ara per la involució endarrera que:

$$l_s = 1 - l(1 - s). \qquad (125)$$

De fet, assenyala Peirce, "totes les lleis d'aquesta [operació], llevat d'una, són les mateixes que les de la involució ordinària, i l'única excepció és del tipus d'aquelles que es diu que confirmen la regla. És que mentre que amb la involució ordinària tenim que:

$$(l^s)^{\mathrm{w}} = l^{(s\mathrm{w})},$$

amb la involució endarrera tenim que:

$${}^{l}({}^{s}\mathrm{w}) = {}^{(ls)}\,\mathrm{w}\text{''}.\text{[1]} \qquad (126)$$

La resta de lleis fonamentals relatives a la involució endarrera són efectivament anàlogues a les de la involució ordinària, a saber:

$${}^{l+s}\mathrm{w} = {}^{l}\,\mathrm{w} + {}^{s}\,\mathrm{w} \qquad (127)$$

$${}^{l}(\mathrm{f},\mathrm{u}) = {}^{l}\,\mathrm{f},{}^{l}\mathrm{u} \qquad (128)$$

$${}^{l}(\mathrm{u} \underset{,}{+} \mathrm{f}) = {}^{l}\,\mathrm{u} \underset{,}{+} \Sigma_p {}^{l-p}\mathrm{u},{}^{p}\mathrm{f} \underset{,}{+} {}^{l}\,\mathrm{f} \qquad (129)$$

$${}^{l}(s^{\mathrm{w}}) = ({}^{l}s)^{\mathrm{w}}.\text{[2]} \qquad (130)$$

[1] W2 401-2 (CP 3.113).

[2] Aquesta última llei combina les dues involucions.

Hom té també, com en el cas de la involució ordinària, les dues fórmules següents:

$$\text{Si } s \prec b, \text{ llavors } {}^{l}s \prec {}^{l}b \tag{143}$$

$$\text{Si } l \prec s, \text{ llavors } {}^{s}\mathrm{w} \prec {}^{l}\mathrm{w}. \tag{144}$$

A partir d'elles, assenyala Peirce, hom pot provar fàcilment les fórmules següents:

$$^{ls}\mathrm{w} \prec {}^{(l^s)}\mathrm{w} \tag{145}$$

$$l^{s}\mathrm{w} \prec {}^{ls}\mathrm{w} \tag{146}$$

$$^{l}s\mathrm{w} \prec {}^{l}(s\mathrm{w}). \tag{147}$$

La tercera i última subsecció dedicada a l'estudi dels *relatius elementals* és d'un gran interès, perquè enceta una línia de recerca que durà Peirce a realitzar importants contribucions tant en el camp de la lògica com en el de les matemàtiques i perquè en ella es palesen millor que en cap altre lloc com veia el nostre autor la relació entre ambdues ciències. Peirce comença aquesta subsecció explicitant què entén per un *relatiu elemental*:

> Per un relatiu elemental entenc un [relatiu] que significa una relació que existeix només entre parells mútuament exclusius (o, en el cas d'un terme conjugatiu, ternes, o quaternes, etc) d'individus.[1]

Així doncs, un *relatiu elemental* o, com dirà Peirce a partir de l'article "On the Algebra of Logic" de 1880, un *relatiu individual*, no és més que un parell ordenat denotat per A:B -o una terna A:B:C, o quaterna A:B:C:D, etc- on A, B, C, D, etc, pertanyen a l'univers del discurs o domini d'individus denotat per 1. D'aquí que, segons Peirce, "puguem concebre tot relatiu com una suma lògica de relatius elementals".[2] Aquesta concepció extensional dels termes relatius permet Peirce encetar, per primera vegada en la història, un desenvolupament matricial de la lògica de relatius. A tal efecte notem primer de tot que per a cada univers de n elements, hi ha n^m relatius elementals, on m representa el nombre d'individus dels relatius

---

1 W2 408 (CP 3.121).

2 W2 408 (CP 3.121).

elementals considerats. Així doncs, hi haurà n^2 relatius simples per un univers finit de n elements. Tal com assenyala Peirce:

> Els relatius elementals simples estan connectats en sistemes de quatre. Car si considerem que A:B denota el relatiu elemental que multiplicat per B dóna A, llavors, en la mesura que aquesta relació és elemental, tenim els quatre relatius elementals
>
> A:A   A:B   B:A   B:B
>
> Un exemple d'un sistema d'aquesta mena és col·lega:mestre:alumne:company.[1]

Això és, si considerem un univers de dos elements, *i.e.* $1 = \{u,v\}$, on u denota un mestre i v denota un alumne, llavors tenim els relatius elementals següents: c =u:u (col·lega de), t =u:v (mestre de), p =v:u (alumne de) i s =v:v (company de). Tal com assenyala Peirce, "la multiplicació dels relatius elementals d'un mateix sistema segueix una llei molt simple", que en termes moderns podríem escriure de la següent manera:

$$(u_i : u_j) * (u_k : u_l) = \left\{ \begin{array}{c} (u_i : u_l), \text{ si } j = k \\ 0, \text{ si } j \neq k \end{array} \right\}. \qquad (155)$$

Això ens dóna, continua Peirce, "la següent taula de multiplicar [156], on el multiplicador és al costat de la taula, el multiplicand a dalt i el producte es troba al mig":[2]

	c	*t*	*p*	*s*
c	*c*	*t*	0	0
t	0	0	*c*	*t*
p	*p*	*s*	0	0
s	0	0	*p*	*s*

Anàlogament, si hom considera un univers de tres elements, *i.e.* $1 = \{u_1, u_2, u_3\}$, hom té el següent sistema de relatius elementals:

$$(u_1 : u_1) = i \qquad (u_1 : u_2) = j \qquad (u_1 : u_3) = k$$
$$(u_2 : u_1) = l \qquad (u_2 : u_2) = m \qquad (u_2 : u_3) = n$$

[1] W2 408-9 (CP 3.123).
[2] W2 410 (CP 3.126).

$$(u_3 : u_1) = o \qquad (u_3 : u_2) = p \qquad (u_3 : u_3) = q,$$

la taula de multiplicar del qual és, per (155), la següent taula (157):

	i	*j*	*k*	*l*	*m*	*n*	*o*	*p*	*q*
i	*i*	*j*	*k*	0	0	0	0	0	0
j	0	0	0	*i*	*j*	*k*	0	0	0
k	0	0	0	0	0	0	*i*	*j*	*k*
l	*l*	*m*	*n*	0	0	0	0	0	0
m	0	0	0	*l*	*m*	*n*	0	0	0
n	0	0	0	0	0	0	*l*	*m*	*n*
o	*o*	*p*	*q*	0	0	0	0	0	0
p	0	0	0	*o*	*p*	*q*	0	0	0
q	0	0	0	0	0	0	*o*	*p*	*q*

Aquestes taules, com reconeix el mateix Peirce, "han estat copiades de la monografia del Professor Peirce sobre Àlgebres Lineals Associatives".[1] Com és ben sabut, en efecte, el pare de Charles S. Peirce, l'il·lustre matemàtic Benjamin Peirce, havia realitzat en la seva coneguda obra *Linear Associative Algebras* de 1870 un estudi comparatiu i purament formal dels diferents tipus d'àlgebres lineals associatives, duent així l'àlgebra a un nivell d'abstracció i generalització desconegut fins aleshores. Entre aquestes àlgebres hi havia, per exemple, l'àlgebra dels *nombres complexos*, la dels *quaternions* de Hamilton o la dels *nonion*s de Sylvester. Els quaternions, per exemple, són nombres de la forma $xi + yj + zk + wl$, on els coeficients x, y, z, w representen nombres reals o complexos i les unitats i, j, k, l obeeixen la taula de multiplicar següent:

	i	*j*	*k*	*l*
i	*i*	*j*	0	0
j	0	0	*i*	*j*
k	*k*	*l*	0	0
l	0	0	*k*	*l*

Aquesta taula de multiplicar és idèntica a la taula (156), de la mateixa manera que la taula dels nonions és idèntica a la taula (157). Aquestes i altres coincidències semblants

1 W2 413 (CP 3.130).

dugueren Peirce a conjecturar en el seu article de 1870 que totes les àlgebres associatives que apareixen a la memòria del seu pare són expressables com a sistemes de relatius elementals amb la llei de multiplicació esmentada més amunt i, per tant, són representables a través de matrius. De fet, Peirce demostrarà en una breu nota de 1875[1] i en un apèndix de 1881 escrit a propòsit d'una reedició de l'obra de son pare,[2] l'important teorema segons el qual "tota àlgebra associativa de dimensió n és representable per una matriu de dimensió $n+1$", emprant a tal efecte una tècnica que ha esdevingut estàndard en la teoria de la representació moderna. Aquest resultat culmina d'alguna manera la tasca, engegada per Peirce a 1870 i desenrotllada al llarg de tota una sèrie de notes i articles escrits entre 1870 i 1882, tendents a demostrar les relacions existents entre la lògica de relatius i les àlgebres lineals i, en definitiva, les aplicacions matemàtiques de la lògica de relatius.[3] Tal com acabem de veure, la connexió entre l'àlgebra de relacions i les àlgebres lineals associatives s'estableix amb la notació habitual de la teoria de matrius. La noció de matriu, així com els elements bàsics de la teoria de matrius, fou introduïda per A. Cayley en l'obra *Memoir on Matrices* de 1858, i aplicada per primera vegada a la lògica de relacions per Peirce en l'article de 1870 sobre la lògica de relatius, si bé en aquella època Peirce no coneixia encara l'obra de Cayley. Aquesta primera representació matricial de la lògica de relacions tindrà continuïtat en alguns dels articles més importants de Peirce, particularment en els articles "On the Algebra of Logic" de 1880, "A Brief Description of the Algebra of Relatives" (*1882*) i "The Logic of Relatives" de 1883, així com també en la *magnum opus* d'E. Schröder *Vorlesungen über die Algebra der Logik* i, més modernament, en l'article "Matrix Development of the Calculus of Relations" d'I. Copilowish i en l'obra d'A. Stern *Matrix Logic*. De fet, el desenvolupament matricial de la lògica de relacions encetat per Peirce en l'article de 1870 té no només un indubtable

1 W3 177 (CP 3.150).

2 W4 320-21 (CP 3.294).

3 Entre aquestes notes i articles cal destacar els següents: "On the Application of Logical Analysis to Multiple Algebra" (W3 177-9 (CP 3.150-51)), "Linear Associative Algebra: Improvement in the Classification of Vids" (W3 161-63), "Notes on the Fundamentals of Algebras" (W3 187-88), "Sketch of the Theory of Non-Associative Multiplication" (W3 198-201); les notes i apèndixs a *Linear Associative Algebras* de B. Peirce, particularment [Note on the Algebra g_4] (W4 312-13), [Note on the Class of Algebras 242^3] (W4 313-8), "On the Relative Form of the Algebras" (W4 319-22 (CP 3.289-96)), "On the Algebras in which Division is Unambiguos" (CP 3.297-305, W4 322-7), "Brief Description of the Algebra of Relatives" (W4 328-33 (CP 306-22)), "On the Relative Form of Quaternions" (W4 334-5 (CP 3.323)). Remarquem finalment els dos textos següents corresponents a dues lliçons impartides en el si de la *John Hopkins University* els anys 1882 i 1883 respectivament: "On a Class of Multiple Algebras" (W4 383-88 (CP 3.324-27)) i "A Communication from Mr. Peirce" (W4 467-72 (CP 3.646-48: "On Nonions")).

interès intrínsec, sinó també importants conseqüències pel que fa a l'evolució de la lògica de Peirce, de les quals ens ocuparem detingudament en el proper capítol.

Una vegada explicats els trets essencials de l'article "Notation for the Logic of Relatives" de 1870, ja només resta extreure'n unes conclusions pertinents que ens permetin, entre d'altres coses, comprendre l'origen de l'interès peircià en la lògica de relatius per tal de poder contextualitzar de forma adient aquest article en l'*iter* intel·lectual del nostre autor. En aquest sentit, és interessant notar que, a prop del final de l'article de 1870, Peirce assenyala que "allò que en primera instància em dugué a cercar la present extensió de la notació lògica de Boole fou la consideració que en l'estat en què ell deixà la seva àlgebra, ni les proposicions hipotètiques ni les proposicions particulars podien expressar-se adequadament".[1] Així doncs, foren els problemes que plantejava l'expressió de les proposicions hipotètiques i particulars en el marc de la lògica booleana els que dugueren Peirce a desenvolupar la seva lògica de relatius. Ara bé, quins eren als ulls de Peirce exactament aquests problemes? Tal com hem vist en les seccions anteriors, Peirce havia criticat en les *Harvard Lectures* de 1865 la forma en què Boole expressava les proposicions hipotètiques i particulars i en l'article "On an Improvement in Boole's Calculus of Logic" de 1867 havia justificat la introducció de l'addició i la subtracció lògiques en base a que permetia expressar de forma adequada les proposicions particulars. Però en una notes de 1868 referides a aquest darrer article el mateix Peirce reconeix que "el tipus d'expressió proposat [allí] per a les proposicions particulars és feble. El que és necessita realment és quelcom molt més fonamental".[2] I afegeix tot seguit que, de llavors ençà, se li ha acudit "una altra idea" per expressar aquesta mena de proposicions, consistent a emprar l'operació d'*exponenciació*, la interpretació de la qual requerirà, en definitiva, la introducció dels termes relatius. En efecte, d'acord amb Peirce, "si w denota *savi* i s denota *Salomó*, llavors l'expressió w^s no pot interpretar-se per (18) [la llei de desenvolupament de Boole] o qualsevol altre principi del càlcul lògic de Boole. Però podria emprar-se aleshores per denotar *més savi que Salomó*. D'aquesta manera, els termes relatius s'introduirien en el domini del càlcul".[3] Amb tot, afegeix Peirce poc després, "Salomó és un singular. Posem que m denota home. Llavors w^m denotarà *més savi que tot home* o *més savi que algun home* [...] Ara, si adoptem simplement la fórmula $w^{(a \,+\!\!,\, b)} = w^a, w^b$, tot imitant la fórmula corresponent de

[1] W2 421 (CP 3.138).
[2] W2 88.
[3] W2 88-89.

l'àlgebra, aleshores w^m serà *més savi que tot home*".[1] Si, d'una altra banda, posem que 0 representa el terme relatiu *no* o *altre que* -*i.e.* la relació de diversitat-, llavors hom pot expressar *més savi que algun home* per $0^{((0^w)^m)}$. Així doncs, emprant l'àlgebra com a guia, Peirce ha trobat la manera d'expressar dos enunciats quantificacionals que contenen les nocions de *tot* i *algun* respectivament. Més encara, donat que l'equació $0^x = 0$ és vertadera si, i només si, $x \neq 0$, *i.e.* si existeix *algun* x, i que l'equació $0^x = 1$ és vertadera si, i només si, $x = 0$, *i.e.* si no existeix *cap* x, Peirce ha trobat també una manera fàcil d'expressar el quantificador existencial i la seva negació. De fet, tal com veurem d'aquí a un moment, el terme relatiu *zero* i l'operació de exponenciació o involució constitueixen els elements claus per a la nova formulació de les proposicions categòriques i hipotètiques formulada per Peirce en l'article de 1870 sobre la lògica de relatius. En aquest article, Peirce criticarà de nou la forma en què Boole expressava les proposicions hipotètiques o condicionals i particulars. La crítica a l'expressió booleana de les proposicions hipotètiques no sembla gaire encertada i la passarem per alt. La crítica a l'expressió booleana de les proposicions particulars és més interessant, encara que Peirce empra essencialment els mateixos arguments que ja havia utilitzat en les *Harvard Lectures* de 1865 i les notes de 1868. A tal efecte, Peirce recorda primer de tot que Boole expressava les proposicions particulars de la manera següent:

Alguns *Y*s són *X*s: $v, y = v, x$

Alguns *Y*s no són *X*s: $v, y = v, (1 - x)$.

I afegeix tot seguit: "aquí la lletra *v* s'empra, diu Boole, per un "símbol de classe indefinida". Això suposa una manca de comprensió radical de la naturalesa d'una proposició particular. Car dir que alguns *Y*s són *X*s no és el mateix que dir que una espècie lògica dels *Y*s són *X*s".[2] En efecte, el que cal per expressar acuradament la proposició anterior és un mitjà que permeti expressar l'*existència* d'algun *y*. Ara bé, el símbol electiu *v* emprat per Boole no és capaç de complir aquesta funció. Car si *v* denota un subconjunt qualsevol, llavors res no assegura la seva existència i aleshores l'equació $v, y = v, x$ podria no tenir cap significat. Si, d'una altra banda, *v* denota un subconjunt concret, "llavors és necessari suposar també que existeix i, a més, que *algun v és y*. En definitiva, és necessari assumir en referència a ell [el símbol *v*] la veritat d'una proposició que, essent ella mateixa particular, presenta la dificultat

[1] W2 89. Altres fórmules que donen suport a aquesta interpretació són evidentment $(s^l)^w = s^{(l,w)}$ i $(s, l)^w = s^w, l^w$, destacades en l'article de 1870 com equacions vàlides relatives a la involució.

[2] W2 422 (CP 3.138).

original en relació a la seva expressió simbòlica".[1] D'una altra banda, continua Peirce, com que de $v, y = v, (1 - x)$ se segueix que $v, y = v - v, x$ i d'aquí tenim que $v, x = v - vy = v(1 - y)$, resulta que en el sistema de Boole podem inferir a partir de la proposició "Alguns *Y*s no són *X*s" la proposició "Alguns *X*s no són *Y*s", però aquesta inferència no és vàlida.[2] Tot comptat i debatut, "el que es requereix per tal d'expressar analíticament les proposicions hipotètiques i particulars és un terme relatiu que denoti "cas de l'existència de --- ", o "el que existeix només si hi ha qualsevol --- "; o també "cas de la no existència de --- " o "el que existeix només si no hi ha --- "".[3] Aquest terme, tal com ja sabem gràcies a l'anàlisi que hem fet abans de les notes de 1868, és el *zero*, que "podria ser interpretat com denotant "allò que existeix si, i només si, no hi ha --- ".[4] Amb l'ajut d'aquest terme relatiu, en efecte, Peirce expressa en l'article de 1870 els quatre tipus de proposicions categòriques que havia distingit la lògica tradicional de la següent manera:

Tot *a* és *b*	$\mathrm{a}, (1 - \mathrm{b}) = 0$
Algun *a* no és *b*	$0^{\mathrm{a},(1-\mathrm{b})} = 0$
Cap *a* no és *b*	$\mathrm{a},\mathrm{b} = 0$
Algun *a* és *b*	$0^{\mathrm{a},\mathrm{b}} = 0$.[5]

De forma anàloga, les proposicions hipotètiques o condicionals es poden simbolitzar amb l'ajut del *zero* i la involució ordinària posant:

$$0^{1-x} \prec 0^{1-y},$$

però, tenint en compte que 0^{1-x} és equivalent a ${}^{1}x$, que es pot interpretar llavors com "allò que existeix si, i només si, no hi res altre que *x*", Peirce prefereix simbolitzar la proposició "Si *x*, llavors *y*" posant:

$${}^{1}x \prec {}^{1}y.$$

1 W2 422 (CP 3.138).
2 Cf. W2 422 (CP 3.138).
3 W2 423 (CP 3.139).
4 W2 423 (CP 3.139).
5 W2 424 (CP 3.141).

Veiem, doncs, que l'exponencial permet Peirce expressar la negació de les proposicions universal afirmativa i negativa en forma d'equacions, tal com s'esdevenia en el sistema de Boole, peró amb la notable millora que suposa poder expressar les proposicions particulars sense necessitat d'apel·lar al símbol *v*. I el mateix s'esdevé amb les proposicions hipotètiques. En definitiva, la lògica de relatius oferia a Peirce una interpretació plausible per a l'extensió de l'àlgebra de Boole necessària per expressar de forma adient les proposicions categòriques i hipotètiques en forma d'equacions o inclusions. Amb tot, l'expressió de les proposicions categòriques en forma equacional no podia satisfer plenament Peirce, donada la crítica adreçada en les *Harvard Lectures* a la simbolització de la còpula mitjançant el signe d'igualtat i, en definitiva, dels diferents tipus de proposicions en forma d'equacions. Segurament per mor d'això, Peirce s'inclinarà una mica més endavant per la simbolització de la còpula a través del signe $-\!\!<$ i, en definitiva, dels diferents tipus de proposicions com inclusions. Notem, a tal efecte, que la inclusió entre termes absoluts o relatius està implícitament quantificada i, per tant, Peirce pot representar les proposicions universals afirmatives del tipus "Tot *a* és *b*" per:

$$\mathrm{a} -\!\!< \mathrm{b}.$$

El problema és evidentment com representar les proposicions particulars. La manera més fàcil és òbviament posar

$$0 < \mathrm{a}, \mathrm{b},$$ [1]

però aquesta expressió conté implícitament una negació proposicional -la negació d'una inclusió, car $0 < \mathrm{a},\mathrm{b}$ és equivalent a $0 -\!\!< \mathrm{a},\mathrm{b}$ i $\mathrm{a},\mathrm{b} =\!\!< 0$, amb la qual cosa Peirce s'allunya, fins i tot, de l'ideal d'expressar totes les proposicions en forma d'equacions o inclusions. Però, en l'article de 1870, Peirce arribarà finalment al seu objectiu d'expressar també les proposicions particulars com inclusions a través de les següents consideracions:

> Si prenem separadament en un terme qualsevol com ara "home" (m) els seus individus M', M'', M''', etc, llavors
>
> $$\mathrm{M}' \underset{,}{+} \mathrm{M}'' \underset{,}{+} \mathrm{M}''' \underset{,}{+} \mathrm{etc}$$

[1] W2 425 (CP 3.143).

significa “algun home”. Això podria escriure’s de forma molt natural com

‘m’

i això ens dóna una forma millor d’escriure una proposició particular; car

‘x’ $-\!\!<$ y

sembla una manera més senzilla d’escriure “Algun X és Y” que no pas

$0^{x,y} = 0$.[1]

L’interès d’aquest text rau en què pressuposa una lectura estrictament proposicional de l’expressió $\mathrm{M}' \underset{,}{+} \mathrm{M}'' \underset{,}{+} \mathrm{M}''' \underset{,}{+}$ etc, això és, una interpretació de $\underset{,}{+}$ com la disjunció inclusiva de termes individuals. És aquesta lectura, com veurem més endavant, la que durà Peirce en l’article “The Logic of Relatives” de 1883 a interpretar el signe Σ, emprat originàriament per designar la suma lògica dels termes o relatius individuals que constitueixen una classe o relació, com el quantificador existencial i, en definitiva, a expressar les proposicions particulars a través d’aquest signe.

Per un altre costat, no hi ha dubte que en l’origen de la lògica de relatius de 1870, a banda del problema de l’expressió de les proposicions particulars i hipotètiques, hi ha el problema, íntimament relacionat amb aquest, de la justificació de molts raonaments que no s’adeqüen al cànon sil·logístic i que no poden formular-se en el sistema de Boole. Així, en les notes de 1868 esmentades abans, tot just després d’introduir el zero i l’exponencial per expressar les proposicions particulars, Peirce demostra com aquesta notació algèbrica pot emprar-se per justificar la validesa del següent raonament, el qual De Morgan havia manifestat repetidament que no podia demostrar-se sil·logísticament:

Tot home és un animal

$\therefore$ Tot cap d’un home és el cap d’un animal.

En efecte, si m representa “home” i a “animal”, llavors “Tot home és un animal” pot representar-se per $m \underset{,}{=} m,a$. Per tant, si h denota “cap”, tenim que:

$$(0^h)^m \underset{,}{=} (0^h)^{m,a} \underset{,}{=} (0^h)^a \underset{,}{+} (0^h)^m$$

i, doncs,

[1] W2 428 (CP 3.146).

$$(0^{0^h})^m \underset{,}{=} 0^{(0^h)^a \underset{,}{+} (0^h)^m} \underset{,}{=} 0^{(0^h)^a}, 0^{(0^h)^m},$$

això és, “Tot cap d’un animal és el cap d’un home”, resultat que, segons Peirce, “no pot ser obtingut per cap de les formes ordinàries de la lògica o a través del càlcul de Boole”.[1] Anàlogament, a “Notation for the Logic of Relatives”, tot just després d’haver simbolitzat les proposicions categòriques i hipotètiques en la manera abans explicada, Peirce planteja el següent problema: “Donades les premisses, “tot cavall és negre” i “tot cavall és un animal”, trobar la conclusió”.[2] Per resoldre aquest problema, Peirce simbolitza primer de tot les premisses anteriors per:

$$h \prec b,$$
$$h \prec a,$$

d’on obté que $h \prec a, b$ i, d’aquí, $0^{a,b} \prec 0^h$. Per tant, si $h > 0$, llavors $0^{a,b} = 0$, això és, “Si hi ha algun cavall, llavors alguns animals són negres”. Peirce conclou llavors que, al seu parer, “seria difícil obtenir aquesta conclusió, sense modificar el mètode de Boole”.[3] Podem concloure, doncs, que en l’origen de la lògica de relatius de 1870 hi ha no només l’intent de abordar el problema de com expressar les proposicions particulars i hipotètiques d’una forma més apropiada que en el sistema de Boole, sinó també el de com justificar determinades inferències que no s’adeqüen al cànon sil·logístic i no poden validar-se tampoc en aquell sistema.

En les pàgines anteriors ens hem limitat a considerar els problemes que plantejava als ulls de Peirce l’expressió en el marc de la lògica booleana de les proposicions particulars i hipotètiques. Aquests enunciats, com la resta dels enunciats de la lògica categòrica i hipotètica tradicionals, són expressables emprant una petita part de la lògica quantificacional moderna, a saber, la lògica de predicats monàdics. Ara bé, la lògica de relatius permet expressar una àmplia varietat d’enunciats quantificacionals que cauen fora de l’abast de la lògica de predicats monàdics i que només són expressables en el marc de la lògica de predicats poliàdica, això és, la lògica de primer ordre o lògica quantificacional moderna. Havíem vist abans que De Morgan considerava tres operacions binàries en la seva lògica de

1 W2 90.
2 W2 224 (CP 3.142).
3 W2 225 (CP 3.142).

relacions, a saber, la composició de relacions, simbolitzada per $X..LMY$ (X és un dels Ls d'un dels Ms de Y) i les dues operacions de *quantitat inherent* simbolitzades per $X..LM'Y$ (X és un L de tot M de Y) i $X..L \bullet MY$ (X és un L només de Ms de Y). De Morgan anomena LM' i $L \bullet M$ signes de *quantitat inherent* i a les relacions compostes denotades per aquests signes *relacions quantificades*, perquè "una quantitat *universal* és una part inherent de la relació composta, en la mesura que pertany a la noció de la mateixa relació".[1] Notem, en efecte, que hom pot definir les dues relacions anteriors en termes de la lògica quantificacional moderna de la manera següent:

$$X..LM'Y \equiv \forall z(Mzy \rightarrow Lxz)$$
$$X..L \bullet MY \equiv \forall z(Lxz \rightarrow Mzy).$$

Veiem, doncs, que aquestes operacions entre relacions -que es corresponen amb les dues involucions de Peirce- pressuposen la idea de quantificació universal, de la mateixa manera que la composició de relacions -la multiplicació relativa de Peirce- pressuposa la idea de *quantificació existencial*, car hom té en aquest cas la següent definició:

$$X..LMY \equiv \exists z(Lxz \wedge Mzy).$$

Aquest import universal o existencial de les operacions de relatiu, juntament amb les quatre constants relacionals que representen les relacions universal, nul·la, d'identitat i diversitat, permet expressar una àmplia varietat d'enunciats que contenen una quantificació múltiple en el marc de la lògica de relatius peirciana. Per exemple, els enunciats doblement quantificats que comencen amb un quantificador universal són tots ells expressables en la lògica de relatius peirciana, car:

$$\bar{l} \prec l \equiv \forall x \forall y lxy$$
$$\overline{KL} \prec Kl \equiv \forall y \forall x lxy$$
$$1 \prec l; Kl \equiv \forall x \exists y lxy$$
$$1 \prec Kl; l \equiv \forall y \exists x lxy.$$

1 *De Morgan 1966*, 221.

Hom no pot, en canvi, expressar en el marc de la lògica de relatius els enunciats doblement quantificats que comencen amb un quantificador existencial, per la senzilla raó que aquests són negacions d'enunciats que comencen amb un quantificador universal com els anteriors, però com ja sabem, la lògica de relatius de Peirce no té negació proposicional. Podem concloure, doncs, que l'expressió de les proposicions particulars o enunciats existencials, tant si es tracta d'enunciats que contenen un sola quantificació o una quantificació múltiple,[1] constitueix l'escull més important en l'intent peircià per expressar els diferents tipus d'enunciats en el marc de la lògica de relatius.

5. La sil·logística: L'àlgebra de la còpula de 1880

L'any 1880 Peirce envià a *The American Journal of Mathematics* un important article titulat "On The Algebra of Logic" (*1880*) el qual podríem descriure com el seu primer intent seriós d'establir una àlgebra de la lògica que fos adequada per a la representació del raonament deductiu i que permetés demostrar que tota la lògica no relativa podia deduir-se a partir dels principis de la sil·logística. L'article en qüestió es divideix en tres capítols. El primer capítol es titula "La sil·logística" i, en el seu darrer paràgraf, exposa un *càlcul*, anomenat per Peirce *àlgebra de la còpula*, que malgrat estar encara molt lligat a la sil·logística tradicional, avança en bona mesura els trets essencials de la lògica deductiva de l'article "On the Algebra of Logic: A Contribution to the Philosophy of Notation" (*1885*), que estudiarem més endavant. En el segon capítol, Peirce exposa "La lògica dels termes no relatius", en la qual es pressuposen els principis de l'àlgebra de la còpula exposada en el capítol anterior. Finalment, el tercer capítol està dedicat a "La lògica de relatius". En aquesta secció completarem primer l'estudi de les idees filosòfiques que portaren a Peirce a considerar la relació representada per la *còpula* com la relació lògica fonamental i que l'havien portat a la introducció efectiva d'aquesta relació en el marc de la lògica de relatius en el seu article "Notation for the Logic of Relatives" de 1870 (*Cf. supra*, § 4) i analitzarem després com en sorgeix d'elles l'*àlgebra de la còpula* de l'article de 1880. En la secció següent estudiarem la lògica dels termes no relatius, fent-nos ressò especialment dels problemes plantejats per la demostració de les lleis distributives. Finalment, en la secció

[1] Això és, independentment de si pertanyen al que avui en dia anomenen la lògica de predicats monàdica o poliàdica.

vuitena, dedicada a l'estudi de l'article "The Logic of Relatives" de 1883, farem les referències necessàries a la lògica de relatius de l'article de 1880.

Hem explicat abans que la conveniència de desenvolupar l'àlgebra lògica a partir de la còpula d'inclusió en comptes de la d'igualtat es basava no només en el fet que aquest signe ofereix una millor anàlisi dels diferents tipus de proposicions, sinó també dels diferents tipus d'inferència sil·logística. I la raó d'això darrer era que, segons el parer de Peirce, els diferents tipus d'inferència sil·logística poden reduir-se a *Barbara*, la validesa del qual descansa en el *dictum* aristotèlic o, el que és el mateix, en la transitivitat de la còpula (*Cf. supra*, § 2). Hi ha, amb tot, una altra raó que explica perquè la *còpula* permet una millor anàlisi de les inferències i, en definitiva, perquè Peirce preferí la *còpula* en comptes de la relació d'igualtat com a relació lògica fonamental. Com ja hem dit alguna vegada, l'objectiu principal de la lògica és per a Peirce l'anàlisi i classificació del raonament humà, no pas la construcció d'un càlcul. Consegüentment, una de les propietats bàsiques d'un sistema de notació o àlgebra lògica haurà de ser la seva capacitat analítica, això és, la seva capacitat per descompondre una inferència en les seves part components últimes i exhibir-la en les categories més generals possibles. Aquesta concepció de l'àlgebra de la lògica és conseqüència, d'una altra banda, de la concepció general de la lògica com a *semiòtica*, que duu Peirce a anul·lar -o, si més no, a considerar mancada d'interès des d'un punt de vista lògic- la distinció habitual entre els *termes*, les *proposicions* i els *arguments*, car l'anàlisi semiòtica de la seva estructura com a signes revela que els termes són proposicions implícites[1] i que una proposició és alhora un argument privat de la seva força assertiva.[2] D'aquesta manera, l'essència de la lògica esdevé l'estudi dels arguments -no debades, com ja sabem, Peirce identificava la lògica formal amb la *crítica*- i la relació fonamental serà la *inferència* o *il·lació*,[3] essent la *inclusió* i la *implicació* relacions derivades. En qualsevol cas, tal com explicarem a continuació, l'anàlisi lògica dels arguments o inferències i la reflexió sobre la veritable naturalesa dels enunciats categòrics i hipotètics duran Peirce a identificar les relacions d'il·lació i inclusió amb la d'implicació i a interpretar la còpula essencialment a través d'aquesta relació. Així, en el primer capítol de l'article "On the Algebra of Logic" de 1880, dedicat, com ja sabem, a la sil·logística, Peirce assenyala que "el tipus general d'inferència és

1 Vegeu, per exemple: CP 2.341, 4.48 i 4.56.
2 Vegeu, per exemple: CP 2.344 i 2.346.
3 Vegeu, per exemple: CP 2.444, n. 1.

$$P$$
$$\therefore C$$

on $\therefore$ és el signe d'il·lació" i que "el pas de la premissa (o conjunt de premisses) P a la conclusió C té lloc d'acord amb un hàbit o regla activa en nosaltres" que "podria ser formulat en una proposició [...] Aquesta proposició s'anomena el *principi conductor* [*leading principle*] de la classe d'inferències la validesa de les quals implica".[1] Peirce afegeix llavors que:

> La lògica suposa no només extreure inferències, sinó també sotmetre-les a crítica i, per tant, no només requerim la forma $P \therefore C$ per expressar un argument, sinó també la forma $P_i \prec C_i$ per expressar la veritat del seu principi conductor. Aquí P_i denota una premissa qualsevol de la seva classe, C_i la conclusió corresponent. El símbol $\prec$ és la còpula i significa fonamentalment que tot estat de coses en què una proposició de la classe P_i és vertadera, és un estat de coses en què les corresponents proposicions de la classe C_i són vertaderes.[2]

Peirce posa sovint com a exemple de principi conductor el *dictum de omni et nullo*, en el qual, com ja sabem, es basa la validesa de les inferències del tipus:

$$x \prec y, y \prec z$$
$$\therefore x \prec z$$

i, per tant, podríem representar-lo formalment amb la següent fórmula:

$$\{x \prec y, y \prec z\} \prec (x \prec z),$$

la qual expressarà llavors que tot estat de coses en què les proposicions $x \prec y$ i $y \prec z$ són vertaderes, és també un estat de coses en què la proposició $x \prec z$ serà vertadera.[3] En

1 W4 165 (CP 3.162-164).

2 W4 166 (CP 3.165).

3 En la fórmula anterior, la tercera ocurrència de la còpula representa la relació d'implicació, mentre que les altres ocurrències representen la relació d'inclusió.

definitiva, l'anàlisi (meta)lògica de la inferència duta a terme per Peirce el duu a considerar, més enllà de la *il·lació* o *ergo*, que expressa la relació lògica fonamental, la relació d'*implicació*, que expressa el principi gràcies al qual una classe d'inferències és vàlida i es representa mitjançant la còpula. D'una altra banda, notablement influït per la teoria medieval dels *consequentiae*, Peirce reduirà les *inferències* o *arguments* als enunciats *condicionals*, la qual cosa el durà també a reduir en la pràctica la relació *d'il·lació* a la d'*implicació*,[1] que representarà mitjançant la *còpula*. Segons Peirce, en efecte:

> La proposició categòrica "Tot home és mortal", no és sinó una modificació de la proposició hipotètica "Si humanitat, llavors mortalitat", i donat que la noció veritablement primera de la qual sorgeix la lògica és que una proposició se segueix d'una altra, jo sostinc que "Si A, llavors B" hauria de considerar-se la forma bàsica de judici [...] Dir que una inferència és correcta, és dir que si la premissa és vertadera, la conclusió també és vertadera; o que tot estat possible de coses en què les premisses serien vertaderes, està inclòs en l'estat possible de coses en què la conclusió seria vertadera. Això ens duu a la còpula d'inclusió.[2]

Veiem, doncs, que Peirce no només redueix els arguments als enunciats condicionals, sinó que també redueix a aquesta forma bàsica els enunciats categòrics. De fet, ambdues tesis són conseqüència de la tesi, que Peirce ha mantingut d'ençà els seus primers escrits, segons la qual els enunciats categòrics i condicionals responen a una mateixa forma lògica, la forma "*A* és *B*" (*Cf. supra*, § 2). Segons Peirce, en efecte, va ser "la confirmació de la doctrina segons la qual pels propòsits del sil·logisme ordinari, les proposicions categòriques i les proposicions condicionals, que Kant i els seus ignorants seguidors anomenen hipotètiques, són una mateixa", la que el va portar a "veure que la relació entre subjecte i predicat o antecedent i consegüent és essencialment la mateixa que entre premissa i conclusió"[3] i a unificar la seva representació mitjançant la *còpula*. Totes aquests idees són presents també en l'article "On the Algebra of Logic" de 1880, tal com ho mostra el següent text:

---

1 Tal com assenyala el mateix Peirce: "Scotus (Duns, per suposat, car Scotus Erigena no era un escolàstic) i els darrers escolàstics s'ocuparen habitualment, no del sil·logisme, sinó d'una forma d'inferència anomenada conseqüència. La conseqüència té només una premissa expressa, anomenada l'*antecedent*, la seva conclusió s'anomena el *conseqüent*, i la proposició que afirma que en cas que l'antecedent sigui vertader, el conseqüent és vertader, s'anomena *conseqüència*" (CP 4.45).

2 CP 2.710. Vegeu també CP 2.335.

3 CP 4.3.

> Les formes $A -\!\!< B$, o A implica B, i $A \overline{-\!\!<} B$ o A no implica B, abracen tant les proposicions hipotètiques com les categòriques. Així, dir que tots els homes són mortals, és el mateix que dir que dir que si qualsevol home posseeix un caràcter qualsevol, llavors un mortal posseeix aquell caràcter. Dir "Si A, llavors B" és òbviament el mateix que dir que de A se segueix B, lògicament o extralògicament. Identificant d'aquesta manera la relació expressada per la còpula amb la d'il·lació, identifiquem la proposició amb la inferència, i el terme amb la proposició. Aquesta identificació, per mitjà de la qual tot el que és vertader del terme, proposició o inferència se sap a la vegada que és vertader de tot tres, és un dels més importants enginys del raonament, que hem assolit començant amb una consideració sobre la gènesi de la lògica.[1]

En la segona secció i en les pàgines anteriors, hem vist les idees filosòfiques que portaren Peirce, d'ençà l'article de 1880, a desenvolupar la lògica relativa i no relativa a partir de la còpula, amb la qual cosa la lògica de Peirce deixarà de ser a partir d'aquesta data una lògica de tipus equacional com la de Boole, Jevons o Venn i esdevindrà una lògica basada en la còpula. Tal com hem explicat en els paràgrafs anteriors, Peirce interpretava en els seus primer escrits aquest signe com la relació d'inclusió entre termes, però l'anàlisi semiòtica de termes, proposicions i arguments el dugué a identificar la relació d'inclusió, implicació i il·lació, considerant aquesta darrer com la relació fonamental des d'un punt de vista lògic. Ara bé, l'estudi de les inferències o arguments i la reflexió sobre la naturalesa de les proposicions categòriques i hipotètiques duran Peirce, d'una banda, a l'identificació de les inferències o arguments amb els enunciats condicionals i, d'una altra, a la reducció a aquests darrers dels enunciats categòrics o, el que és el mateix, a la identificació de la il·lació i inclusió amb la implicació. Això permet a Peirce unificar sota la còpula la representació de les tres relacions anteriors i, al mateix temps, destacar sovint la implicació com la seva interpretació bàsica. Això, juntament amb la tesi segons la qual tota la lògica no relativa pot deduir-se dels principis de la sil·logística, durà Peirce en l'article "On the Algebra of Logic" de 1880 a desenvolupar a partir de la *còpula* un àlgebra lògica, anomenada precisament *àlgebra de la còpula*, les lleis de la qual expressaran els principis a partir dels quals derivarà, primer, la sil·logística tradicional i, després, la lògica no relativa. En aquest sentit, l'àlgebra de la còpula suposa el primer intent per part de Peirce de fornir un sistema de notació o àlgebra lògica que doni raó dels procediments deductius que constitueixen la base a partir de

---

1 W4 170 (CP 3.175).

la qual es construeix tot l'edifici de la lògica o, com ell en diu, la *teoria de la deducció*. Es tracta, doncs, d'un clar precedent del sistema deductiu presentat per Peirce en l'important i conegut article "On the Algebra of Logic" de 1885. En aquest article, en efecte, Peirce considera també que la implicació és "el mode fonamental i primari de relació entre dues proposicions"[1] i procedeix consegüentment a presentar la teoria deductiva basant-se exclusivament en aquesta relació i la negació. Peirce entén en l'article de 1885 la implicació de forma anàloga a com l'entenia en l'article de 1880, és a dir, com una noció que pressuposa la qualificació sobre un rang de possibles estats de coses o, el que és el mateix, sobre un rang de possibilitats. Però, tant en l'article de 1880 com en el de 1885, Peirce desenvolupa la lògica no relativa a partir d'un significat restringit de la implicació, obtingut en reduir el rang de possibilitats a la seva expressió mínima, a saber, l'estat actual de coses. Així, si bé Peirce assenyala en l'article de 1880 que "la forma $P_i \prec C_i$ implica, o bé, 1, que és impossible que una premissa de la classe P_i sigui vertadera, o, 2, que tot estat de coses en què P_i és vertadera és un estat de coses en què la corresponent C_i és vertadera",[2] acaba limitant l'univers de possibilitats a l'actual, "considerant només allò que realment ocorre, de manera que tot allò que no ocorre es considera impossible".[3] El sentit d'aquesta reducció s'exposa encara més clarament en l'article de 1885, on la *còpula* s'introdueix directament a partir de les proposicions hipotètiques. Ara bé, segons Peirce:

> La peculiaritat d'una proposició hipotètica és que va més enllà de l'estat de coses actual i declara que passaria si les coses fossin diferents de com són ara o de com podrien ser. La utilitat d'això és que ens posa en possessió d'una regla, això és, que "si A és vertadera, B és vertadera", de manera que si en el futur aprenem quelcom del que som ara ignorants, llavors, en virtut d'aquesta regla, trobarem que sabem alguna cosa més, a saber, que B és vertadera. No hi ha cap dubte que el Possible, en el seu significat primari, és allò que, pel que sabem, podria ser vertader, allò la falsedat del qual desconeixem. El propòsit queda servit, doncs, si a través del rang de possibilitat, en tot estat de coses en què A és vertadera, B també és vertadera. Una proposició hipotètica podria, doncs, ser falsada per un simple estat de coses, però només un en què A és vertadera mentre que B és falsa. Els estats de coses en què A és falsa, així com aquells en què B és vertadera, no poden falsar-la.[4]

1 W5 169 (CP 3.373).
2 W4 166 (CP 3.165).
3 W4 170 (CP 3.174).
4 W5 169-70 (CP 3.374).

Amb tot, assenyala Peirce immediatament després:

> El rang de possibilitat, en un cas es considera més àmpliament, en un altre més estretament; en el cas present es limita a l'estat actual de coses. Aquí, llavors, la proposició
>
> $$a \prec b$$
>
> és vertadera, si *a* és falsa o si *b* és vertadera, però és falsa, si *a* és vertadera mentre que *b* es falsa.[1]

Peirce reconeixerà en diverses ocasions l'origen d'aquesta distinció entre les dues possibles maneres d'entendre la implicació que esmenta en els articles sobre l'àlgebra de la lògica de 1880 i 1885 en la disputa entre Diodor i Filó sobre la naturalesa de les proposicions condicionals o hipotètiques. I, en l'article "The Regenerated Logic" (*1896*) anomenarà, seguint Duns Scot, *consequentia simplex de inesse* al condicional filònic i *condicional ordinari diodorià* o, simplement, *condicional ordinari*, al condicional diodorià. Tot i l'elecció del condicional filonià en els articles de 1880 i 1885 com a relació primitiva a partir de la qual desenvolupa la lògica no relativa i que Peirce es declari sovint un filonià, ell mateix considera també que no s'ha fet mai justícia al punt de vista diodorià i que una correcta explicitació d'aquest punt de vista el faria preferible al punt de vista filonià. L'intent per part del mateix Peirce d'explicitar la forma lògica del condicional diodorià el durà, en primera instància, a apel·lar a la seva àlgebra general de la lògica i a identificar-lo amb el que avui en dia anomenem implicació formal i, més endavant, a emfatitzar el caràcter estrictament modal d'aquests enunciats. Això el durà a un desenvolupament pioner de la lògica modal a través de diferents sistemes gràfics. Malauradament, aquests temes queden fora de l'abast del nostre treball i no podem sinó deixar-los per a un estudi posterior.

Un cop fetes les precisions anteriors sobre la interpretació peirciana de la *còpula*, podem centrar-no ja en l'estudi de l'*àlgebra de la còpula* de 1880. Una de les peculiaritats de l'*àlgebra de la còpula* és que en ella Peirce distingeix encara a nivell notacional entre la *còpula* i l'*ergo*, encara que, segons Peirce, l'àlgebra sorgeix de la identificació de la relació expressada per la *còpula* i la *il·lació*. Això fa que la majoria de les fórmules es puguin interpretar indistintament com implicacions o regles d'inferència i que, en aquest últim cas, algunes de les ocurrències de la còpula s'hagin d'interpretar com la relació d'inferència i

[1] W5 170 (CP 3.375).

d'altres com la relació d'implicació. Amb tot, s'ha de tenir en compte també que, donat que l'objectiu de l'àlgebra de la còpula és fornir un càlcul o àlgebra a partir del qual hom pugui deduir tant la sil·logística tradicional com la lògica no relativa, la còpula s'haurà d'interpretar sovint també com la relació d'inclusió. Això fa que, tal com veurem després, en la deducció de les diferents figures sil·logístiques hi apareguin fórmules mixtes, en les quals hi figuren barrejades variables proposicionals i de classe i on les diferents ocurrències de $-\!\!<$ s'han d'interpretar de forma diferent. En qualsevol cas, això no sembla preocupar gaire a Peirce, donat que, com ja sabem, Peirce no només identificà les relacions implicació i il·lació, sinó que també identificà amb elles la relació d'inclusió.

D'acord amb Peirce, en efecte, "de la identitat de la relació expressada per la còpula amb la d'il·lació, sorgeix una àlgebra. En primer lloc, això ens dóna

$$x -\!\!< x \tag{1}$$

[...] En segon lloc, aquesta identificació mostra que les dues inferències

$$\begin{array}{lcl} x & & \\ y & \text{i} & x \\ \therefore z & & \therefore y -\!\!< z \end{array} \tag{2}$$

tenen la mateixa validesa. D'aquí tenim:

$$\{x -\!\!< (y -\!\!< z)\} = \{y -\!\!< (x -\!\!< z)\}. \tag{3}$$

A partir de (1) tenim

$$(x -\!\!< y) -\!\!< (x -\!\!< y),$$

d'aquí, per (2),

$$\begin{array}{cc} x -\!\!< y & x \\ \multicolumn{2}{c}{\therefore y} \end{array} \tag{4}$$

és una inferència vàlida".[1] En les fórmules anteriors les variables x, y, z semblen representar proposicions. Així, d'acord amb la identificació entre la relació expressada per la còpula i la il·lació abans esmentada, la fórmula (1) que Peirce anomena el *principi d'identitat* es pot interpretar indiferentment com:

1. La inferència $x \therefore x$, on x és una proposició,

2. La fórmula $x \rightarrow x$, on x és una proposició.

S'ha de dir, amb tot, que donat que Peirce utilitza també el principi d'identitat en la lògica dels termes no relatius, aquest principi es podrà interpretar allí també com:

3. La fórmula $x \subseteq x$, on x representa una classe.

Mitjançant (2) i els comentaris que l'acompanyen, Peirce sembla introduir les dues regles d'inferència següents:

$$\frac{x,y \therefore z}{x \therefore y \prec z} \qquad\qquad \frac{x \therefore y \prec z}{x,y \therefore z},$$

les quals es poden interpretar respectivament com regles d'introducció i eliminació de la còpula en el consegüent i donen raó de la *propietat de la deducció*. Tal com hem vist, Peirce dedueix immediatament a partir de (2) les fórmules (3) i (4). Podem anomenar (3) el *principi de transposició* el qual, d'acord amb la definició d'igualtat de l'article "Notation for the Logic of Relatives" de 1870 esmentada en la secció anterior, és equivalent a la conjunció de la fórmula:

$$\{x \prec (y \prec z)\} \prec \{y \prec (x \prec z)\} \qquad (3)'$$

i la seva conversa -de fet, donat que x, y, z són variables qualssevol, podem substituir (3) per (3)' sense pèrdua de generalitat. Notem, a més, que en la deducció de (3) a partir de (2) se

[1] W4 173 (CP 182-83).

suposa que el conjunt de premisses no està ordenat, suposició que és extensible a totes les inferències que es duen a terme, és a dir, se suposa que:

$$\frac{x,y \therefore z}{y,x \therefore z}$$

Tenint en compte, doncs, la identificació de la relació expressada per la còpula amb la il·lació, la regla d'eliminació de la còpula i la regla anterior, hom pot construir la següent demostració de (3)' -el recíproc es demostra de forma anàloga:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{x \therefore y \prec z}{x,y \therefore z}}{y,x \therefore z}}{y \therefore x \prec z}$$

Tal com hem vist, per a la demostració de la fórmula (4), la qual expressa la regla d'inferència de *modus ponens*, Peirce substitueix en la fórmula (1) la variable x per la fórmula $x \prec y$, obtenint així la fórmula:

$$(x \prec y) \prec (x \prec y),$$

que és equivalent, per la identificació de la *còpula* amb l'*ergo*, a:

$$(x \prec y) \therefore (x \prec y),$$

per tant, si en la regla d'eliminació de la còpula substituïm x per $x \prec y$, y per x i z per y, hom obté immediatament que:

$$x \prec y, x \therefore y.$$

Peirce fa també altres substitucions d'aquesta mena més endavant i, en un moment donat, afirma que "és innecessari remarcar que hom pot substituir qualssevol lletres per x, y, z",[1] la qual cosa es podria considerar com un enunciat informal de la regla de substitució. La introducció d'aquesta regla és necessària estrictament parlant, donat que Peirce empra variables en la formulació dels axiomes del càlcul, sobretot si interpretem l'àlgebra de la còpula com un sistema logístic o deductiu, en el qual hi hauria una clara separació entre els axiomes del càlcul i les regles d'inferència. Però, tal com hem vist, el càlcul presentat per Peirce s'assembla més a un càlcul de deducció natural, on les regles s'introdueixen com a part del càlcul i on les diferents regles semblen interpretar-se com esquemes de fórmules, la qual cosa fa supèrflua la introducció de la regla de substitució -però no, evidentment, l'ús de metavariables.

Segons Peirce, "per (4), si x i $x \prec y$ són vertaderes, y és vertadera; i si y i $y \prec z$ són vertaderes, z és vertadera. D'aquí la inferència

$$\begin{array}{ccc} x & x \prec y & y \prec z \\ & \therefore z & \end{array}$$

és vàlida. Pel principi (2) això és el mateix que dir que

$$\begin{array}{cc} x \prec y & y \prec z \\ \multicolumn{2}{c}{\therefore x \prec z} \end{array} \tag{5}$$

és una inferència vàlida".[2] Però, en la deducció de la primera forma d'inferència, Peirce utilitza implícitament la següent regla:

$$\frac{X \therefore y \quad Y, y \therefore z}{X, Y \therefore z},$$

és a dir, una regla d'*eliminació o tall* que, tal com veurem després, s'empra implícitament també en altres demostracions. Notem, d'altra banda, que (5) és equivalent a:

---

1 W4 174 (CP 3.185).

2 W4 173-74 (CP 3.184).

$$(x \prec y) \prec \{(y \prec z) \prec (x \prec z)\}, \qquad (5)'$$

que junt amb (3)' i (1) constitueixen en ordre invers les *icones* (1), (2) i (3) de la lògica deductiva de l'article de 1885 sobre l'àlgebra de la lògica que estudiarem més endavant (*Cf. infra*, § 9). A partir de (5) i (2), substituint de forma adequada, Peirce obté les dues formes d'inferència immediata següents:[1]

$$\mathrm{S} \prec \mathrm{P} \therefore (x \prec \mathrm{S}) \prec (x \prec \mathrm{P}) \qquad (6)$$

$$\mathrm{S} \prec \mathrm{P} \therefore (\mathrm{P} \prec x) \prec (\mathrm{S} \prec x). \qquad (7)$$

I a partir de (5), (6), (7), i l'ús implícit de la regla de *tall* abans esmentada, obté les següents formes d'inferència:[2]

$$\mathrm{M} \prec \mathrm{P}, (\mathrm{S} \prec \mathrm{P}) \prec x \therefore (\mathrm{S} \prec \mathrm{M}) \prec x \qquad (8)$$

$$\mathrm{S} \prec \mathrm{M}, (\mathrm{S} \prec \mathrm{P}) \prec x \therefore (\mathrm{M} \prec \mathrm{P}) \prec x \qquad (9)$$

$$\mathrm{M} \prec \mathrm{P}, x \prec (\mathrm{S} \prec \mathrm{M}) \therefore x \prec (\mathrm{S} \prec \mathrm{P}) \qquad (10)$$

$$\mathrm{S} \prec \mathrm{M}, x \prec (\mathrm{M} \prec \mathrm{P}) \therefore x \prec (\mathrm{S} \prec \mathrm{P}). \qquad (11)$$

En totes les fórmules anteriors, les lletres M, S i P representen variables de classe i la lletra *x*, almenys a (8)-(11), representa una variable proposicional. D'acord amb Peirce, a (7) podríem anomenar-la l'inferència de *contraposició* i (8)-(11) representen diversos modes sil·logístics. Així, per exemple, (8) representa el *sil·logisme menor indirecte*, una instància del qual és la següent inferència:

Tots els homes són mortals,
Si Enoch i Elijah són mortals, la Bíblia s'equivoca;
∴ Si Enoch i Elijah són homes, la Bíblia s'equivoca.

Totes les formes d'inferència de l'àlgebra de la còpula enunciades fins ara, llevat de (2), es poden transformar en fórmules del càlcul d'enunciats. En aquest sentit, és interessant

---

1 W4 174 (CP 3.185).

2 W4 175 (CP 3.187-89).

assenyalar, tal com ha fet P. Thibaud en la seva obra *La Logique de Charles Sanders Peirce: de l'algebre aux graphes* (*1975*), que el sistema format per les fórmules (1), (3) i (6) considerades com axiomes del càlcul d'enunciats, és a dir, pels axiomes:

$$x \rightarrow x$$
$$\{x \rightarrow (y \rightarrow z)\} \rightarrow \{y \rightarrow (x \rightarrow z)\}$$
$$(y \rightarrow z) \rightarrow \{(x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z)\},$$

i les regles d'inferència de *modus ponens* (4) i de *substitució*, constitueixen el sistema BCI de Meredith, a partir del qual podem deduir immediatament (7)-(11) quan són interpretades proposicionalment.[1] A partir de (10) i (11), Peirce dedueix les fórmules (12) i (13), les quals representen *modes* sil·logístics en què la segona premissa i la conclusió són particulars. Però la seva deducció, com assenyala Peirce, es basa en principis d'interpretació que requereixen ensems ser demostrats i, per tant, no les enunciarem aquí. D'altra banda, si a (8) i (9) considerem que *x* representa "allò que no s'esdevé", es té per definició

$$\{(\mathrm{S} \prec \mathrm{P}) \prec x\} = (\mathrm{S} \overline{\prec} \mathrm{P}),$$

d'on Peirce dedueix immediatament:[2]

$$\mathrm{M} \prec \mathrm{P}, \mathrm{S} \overline{\prec} P \therefore S \overline{\prec} \mathrm{M} \qquad (14)$$
$$\mathrm{S} \prec \mathrm{M}, \mathrm{S} \overline{\prec} P \therefore M \overline{\prec} \mathrm{P}. \qquad (15)$$

Peirce estén aquesta manera d'entendre la negació als casos en que aquesta afecta ja no a la còpula, sinó a les variables. Així, $\bar{A}$ és equivalent a $A \prec x$, d'on, per (7), es té immediatament que:[3]

$$\mathrm{S} \prec \mathrm{P} \therefore \bar{P} \prec \bar{S}. \qquad (16)$$

1 *Cf. Thibaud 1982*, 38.
2 W4 176 (CP 3.191).
3 W4 177 (CP 3.192).

En definitiva, segons Peirce, la primera propietat de la negació és que tot terme $\bar{x}$ és equivalent a $x \prec f$, on f representa "allò que no s'esdevé", és a dir, una constant que podem interpretar com el *fals* o la *falsedat*. Però, continua Peirce, "la negació té dues altres propietats que encara no s'han tingut en compte. Aquestes són

$$x \prec \bar{\bar{x}}, \tag{17}$$

o x és no no-X, anomenat *principi de contradicció*; i

$$\bar{\bar{x}} \prec x, \tag{18}$$

o allò que és no no-X és x, anomenat *principi del terç exclòs*".[1] Notem que, encara que Peirce considera (17) com un axioma, es pot deduir, substituint a (1) i (3) x per $x \prec f$, y per x i z per f i aplicant la regla de *modus ponens* (4). Finalment, assenyala Peirce, a partir de (17) i (16), (18) i (16) i (17), (18) i (16), hom obté respectivament:[2]

$$\mathrm{S} \prec \bar{P} \therefore P \prec \bar{S} \tag{19}$$

$$\bar{S} \prec \mathrm{P} \therefore \bar{P} \prec \mathrm{S} \tag{20}$$

$$\bar{S} \prec \bar{P} \therefore P \prec \mathrm{S}, \tag{21}$$

però la deducció de cada una de les inferències anteriors requereix a més (5) i la regla de *tall*. Hem vist, doncs, que la consideració d'una constant que s'interpreta com el fals, permet a Peirce introduir la negació a partir de la còpula i demostrar les propietats característiques d'aquella connectiva. Però és important destacar que aquest mètode per a l'introducció de la negació no és uniforme ni al llarg de l'obra de Peirce ni en aquest mateix article, car una mica més endavant Peirce escriu que $\bar{A}$ és equivalent a $A \prec x$, on x s'interpreta com una variable que denota un element qualsevol. Això obre una segona via per a la introducció de la negació que, tal com veurem, és la que seguirà Peirce en la presentació que farà de la lògica deductiva en l'article "On the Algebra of Logic" de 1885.

---

1 W4 174 (CP 3.192).

2 W4 177 (CP 3.193).

Abans hem destacat les similituds del fragment implicatiu de l'*àlgebra de la còpula* amb el sistema *BCI* de Meredith, però és evident que la formalització de la lògica deductiva que Peirce duu a terme a l'*àlgebra de la còpula* està més a prop d'un sistema de deducció natural, que no pas d'un sistema deductiu o logístic. En aquest sentit, una reconstrucció aproximada de l'*àlgebra de la còpula*, més fidel a l'esperit i la lletra de l'article de Peirce, seria a través d'un *càlcul de seqüents* que tingués com a *seqüents bàsics* les fórmules:

$$x \prec x \qquad\qquad x \prec \bar{\bar{x}},$$

on $\bar{x}$ és equivalent a $x \prec f$ i f denota una constant falsa i, com a formes d'inferència, els esquemes:

$$\textit{Ded} \qquad \frac{x,y \therefore z}{x \therefore y \prec z} \qquad\qquad \frac{x \therefore y \prec z}{x,y \therefore z}$$

$$\textit{Tall} \qquad \frac{X \therefore y \quad Y,y \therefore z}{X, Y \therefore z}$$

En aquest sentit, el concepte de derivació o prova implícit en l'*àlgebra de la còpula* seria anàleg al del *càlcul LK* de Gentzen, amb la particularitat que en la primera es podrien utilitzar com a *seqüents inicials*, a més del *seqüents bàsics*, qualssevol dels seqüents ja provats.[1] En qualsevol cas, aquesta reconstrucció de l'àlgebra de la còpula és estrictament aproximativa i només pretén ressaltar la semblança del càlcul deductiu presentat per Peirce en l'article "On the Algebra of Logic" de 1880 amb els sistemes de deducció natural. Remarquem, en concret, que la definició de la negació a partir d'una constant falsa és problemàtica, perquè, tal com dèiem abans, aquesta no és l'única manera en què Peirce introdueix la negació en l'article de 1880. Com veurem més endavant, és possible donar raó d'aquesta segona manera d'interpretar la negació a través de la introducció d'una regla d'introducció de la negació i reconstruir el sistema lògic presentat per Peirce en l'article "On the Algebra of Logic" de 1885, que és molt semblant al presentat en l'article homònim de 1880, en termes del càlcul de seqüents (*Cf. infra*, § 9).

[1] *Cf. Szabo 1969*, 81-85.

6. La Lògica dels termes no relatius de 1880

Com hem explicat en la secció anterior, en la segona part de l'article "On the Algebra of Logic" de 1880, Peirce desenvolupa l'anomenada lògica dels termes no relatius, la qual constitueix, sens dubte, la contribució més important d'aquest autor a l'àlgebra booleana de la lògica. El llenguatge de la lògica dels termes no relatius està constituït per un conjunt de termes no relatius: *a, b, c ... x, y, z ...* , dos termes destacats: ∞ i 0, tres operacions: l'*addició*, la *multiplicació* i la *negació* i una relació lògica fonamental representada per la *còpula*.[1] Cada un d'aquests termes, operacions i relació s'introdueixen a partir d'unes propietats característiques, que Peirce anomena *definicions*. Tenim així les definicions següents:

$$x \prec \infty \qquad\qquad 0 \prec x \qquad\qquad (1)$$

per a qualsevol x.

$$\text{Si } a \prec x \text{ i } b \prec x, \qquad\qquad \text{Si } x \prec a \text{ i } x \prec b, \quad (2)$$

$$\text{llavors } a+b \prec x; \qquad\qquad \text{llavors } x \prec a\times b;$$

i recíprocament:

$$\text{Si } a+b \prec x, \qquad\qquad \text{si } x \prec a\times b, \qquad (3)$$

$$\text{llavors } a \prec x \text{ i } b \prec x. \qquad\qquad \text{llavors } x \prec a \text{ i } x \prec b.$$

Els símbols 0 i ∞ equivalen, d'acord amb Peirce, al 0 i el 1 de Boole, però Peirce no dedueix (1) a partir d'aquesta interpretació, sinó de la seva consideració com a termes de

[1] En general, aquests signes es poden interpretar en el marc de la lògica de classes de la forma habitual. Però, s'ha de tenir en compte que els signes que representen operacions i relacions només es poden interpretar proposicionalment quan figuren entre fórmules; en canvi, els termes representen sempre classes, amb la sola excepció de la definició 1.

segona intenció o modals, que denoten respectivament *El possible* i *L'impossible*. Així, (1) es pot interpretar en el càlcul de classes com: "Qualsevol classe està inclosa en 1" i "0 està inclosa en qualsevol classe" i proposicionalment com "Allò possible és implicat per qualssevol proposició" i "Allò impossible implica qualssevol proposició". A partir de les definicions anteriors i els resultats assolits en l'*àlgebra de la còpula*, encara que sovint no els cita, Peirce demostra alguns teoremes nous i n'enuncia alguns introduïts prèviament per Boole, Jevons, Schröder o ell mateix. Els teoremes fonamentals, enumerats com en l'article de Peirce i amb les referències que pertoquin quan no es tracti de teoremes originals d'aquest article, són els següents:[1]

$$a \prec a+b \qquad a\times b \prec a \qquad \text{(CP 3.81 i 91) (4)}$$

$$b \prec a+b \qquad a\times b \prec b. \qquad \text{(CP 3.200)}$$

Peirce assenyala que (4) s'obté substituint x per $a+b$ i $a\times b$ a (3), però és evident que es necessiten també (1) i (4) de l'àlgebra de la còpula. Si a (2) substituïm x per a i b tenim anàlogament:

$$x+x \prec x, \qquad x \prec x\times x,$$

i substituint també x per a i b a (4) tenim:

$$x \prec x+x, \qquad x\times x \prec x,$$

per tant, per la definició d'igualtat de 1870, tenim les *lleis de tautologia* o *idempotència*:

$$x = x+x \qquad x\times x = x. \qquad \text{(Boole, Jevons) (5)}$$

Anàlogament, per (4) i (2), obtenim:

$$b+a \prec a+b \qquad a\times b \prec b\times a,$$

[1] Per a una exposició resumida d'aquests teoremes, vegeu *Thibaud 1982*, 21-25.

i, intercanviant a i b obtenim el recíproc. D'on tenim les *lleis commutatives*:

$$a+b=b+a \qquad a\times b=b\times a \qquad \text{(Boole, Jevons)(6)}$$

Successives aplicacions de (4) i (2) permeten també demostrar les *lleis associatives*:

$$(a+b)+c=a+(b+c) \qquad a\times(b\times c)=(a\times b)\times c \text{(Boole,Jevons)(7)}$$

Peirce enuncia a continuació les dues *lleis distributives*:

$$(a+b)\times c=(a\times c)+(b\times c) \qquad (a\times b)+c=(a+c)\times(b+c). \quad (8)$$

Com ja sabem, aquestes dues lleis havien estat introduïdes per Peirce en l'article "On an Improvement in Boole's Calculus of Logic" de 1867 i demostrades com equacions del càlcul de classes. En l'article de 1880 que estem comentat, Peirce afirma que les dues equacions anteriors "es proven fàcilment a partir de (4) i (2), però la prova és massa tediosa per donar-la".[1] El fet és que Schröder, en llegir l'article intentà demostrar la inclusió:

$$a\times(b+c) \prec (a\times b)+(a\times c) \qquad (1)'$$

i la seva dual:

$$(a+b)\times(a+c) \prec a+(b\times c), \qquad (2)'$$

i es va veure incapaç de fer-ho.[2] Això el dugué a presentar l'any 1883 un article a la *British Association for the Advancement of Science* en el qual afirmava la impossibilitat de provar la llei distributiva a partir dels principis (1)-(3) enunciats per Peirce en la lògica dels termes no relatius de l'article de 1880. Schröder va publicar la seva demostració de la independència de les dues inclusions anteriors en la lliçó sisena del primer volum de *Vorlesungen über die Algebra der Logik* (*1890*) i a adoptar una versió més feble de la primera inclusió ("Prinzip

1 W4 184 (CP 3.200).

2 Les inclusions anteriors, juntament amb les seves inclusions recíproques, donen lloc a les igualtats $a\times(b+c)=(a\times b)+(a\times c)$ i $a+(b\times c)=(a+b)\times(a+c)$, que constitueixen una formulació de les lleis distributives equivalent a la que dóna Peirce (*Cf. supra*, § 3).

III_x") com axioma a partir del qual deduí les dues lleis distributives (*Cf. infra*, cap. III, § 4). La publicació de l'article de Schröder de 1883 va fer que Peirce intentés reconstruir de nou la demostració de la primera inclusió i, com que no en fou capaç, va considerar que s'havia equivocat i que les lleis distributives eren indemostrables a partir de les principis anteriors. Però bastants anys després, mentre regirava entre els seus papers, va trobar la prova que havia realitzat per l'article de 1880 i la va enviar a E. V. Huntington per a que la publiqués. Huntington, que llavors estava escrivint l'article "Sets of Independent Postulates for the Algebra of Logic" (*1904*), va incloure en aquest article la prova de Peirce en el segon conjunt de postulats -"quasi al peu de la lletra", segons les seves pròpies paraules- i va reproduir part de la carta que Peirce li havia enviat. Aquesta era, doncs, la primera vegada que es publicava una demostració d'aquest principi distributiu.[1] El segon conjunt de postulats de Huntington axiomatitza el sistema (K, $\varolessthan$) on K és una classe qualsevol i el signe $\varolessthan$ representa una relació diàdica en aquesta classe (*Cf. infra*, cap. III, § 4). Entre els seus postulats o axiomes destaca especialment el següent postulat:

9. si $a \varolessthan \bar{b}$ és fals, llavors hi ha un element $x \neq \wedge$ tal que $x \varolessthan a$ i $x \varolessthan b$,

per a la introducció del qual, el mateix Huntington reconeix estar "especialment en deute amb el senyor C. S. Peirce, qui amablement m'ha comunicat la prova de la segona part de la llei distributiva (22a, b) sobre la base d'aquest postulat".[2] Respecte a l'origen del postulat 9, Huntington argumenta que "El senyor Peirce empra el símbol $-\!\!<$ on jo he emprat $\varolessthan$, i en un sentit lleugerament diferent, de manera que pot afirmar que el principi anomenat aquí postulat 9 "se segueix de la definició de $P_i \,\overline{-\!\!<}\, C_i$ de la pàgina 18"".[3] D'acord amb aquesta definició, "la forma $P_i \,\overline{-\!\!<}\, C_i$ implica *dues coses*, 1, que una premissa de la classe P_i és possible, *i*, 2, que entre els possibles casos en què P_i és vertadera n'hi ha un en què la

[1] La part de la carta reproduïda per Huntington no conté la prova de Peirce i és probable que Peirce enviés la prova en una carta diferent a la que Huntington reprodueix parcialment en el seu article. En qualsevol cas, en la universitat de Harvard es conserven diferents esbossos de la demostració que Peirce va enviar a Huntington, el més concloent del quals es reproduït en l'article de Houser: "Peirce and the Law of Distribution" (*1991*) (*Cf. Drucker 1991*, 29-31, n. 59). La demostració que Huntington -i després Lewis a "A Survey of Symbolic Logic" (*Lewis 1918*, 128-129)- ofereixen de les lleis distributives és molt semblant a la demostració de Peirce que trobem en l'article anterior.

[2] *Huntington 1904*, 291.

[3] *Ibid.*, 300n.

corresponent C_i no és vertadera".[1] En la definició anterior, la forma $P_i \mathrel{\overline{\prec}} C_i$ s'entén com una proposició hipotètica i la *còpula* com representativa de la relació d'il·lació o implicació, però com ja sabem Peirce identificava les proposicions hipotètiques i les categòriques i les relacions d'il·lació i implicació amb la d'inclusió. Ara bé, ja hem vist abans que una proposició com $P_i \prec C_i$ quan s'interpreta com una proposició categòrica significa que qualsevol individu i de l'univers del discurs considerat, o i no està inclòs en la classe denotada per P o i està inclòs en C; negar això, és a dir, afirmar $P_i \mathrel{\overline{\prec}} C_i$ significarà llavors que existeix un i tal que i està inclòs en P i no està inclòs en C. Així doncs, de la definició anterior, se segueix immediatament el següent:

Lema 1: Si $a \mathrel{\overline{\prec}} b$, llavors existeix un element $x \neq 0$ tal que $x \prec a$ i $x \prec \bar{b}$.

Aquest resultat és el que, de fet, empra Huntington en la seva demostració, donat que el postulat 9 s'utilitza sempre junt amb el teorema 18 ("si $\bar{a} = b$, llavors $a = \bar{b}$"), la qual cosa dóna com a resultat el lema anterior. Basant-nos en la demostració de Huntington podem veure que, efectivament, el principi distributiu (1)' -i, a partir d'ell les dues lleis distributives- se segueix de les definicions i teoremes de l'àlgebra de la còpula i la lògica no relativa de l'article de Peirce de 1880. Per demostrar aquest principi, cal demostrar prèviament el següent:[2]

Lema 2: $(a+b)c \prec a+bc$.

Demostració: Suposem que aquesta inclusió és falsa. Llavors pel *lema 1* existeix $x \neq 0$ tal que:

$$x \prec (a+b)c \qquad 1$$

i

$$x \prec \overline{a+bc}.$$

[1] W4 166 (CP 3.165).

[2] Al llarg de la demostració de les lleis distributives denotarem els producte lògic mitjançant la juxtaposició de les lletres o fórmules a les quals aquell s'apliqui. La numeració amb asterisc fa referència als axiomes i teoremes enunciats en l'àlgebra de la còpula.

Per (19)* , tenim que:

$$a + bc \prec \bar{x}. \qquad 2$$

Per 1 i (3), tenim que:

$$x \prec c \qquad 3$$

i

$$x \prec a + b. \qquad 4$$

Per 2, (3), (19)* i doble negació (que se segueix immediatament de (17)* i (18)* per la definició d'igualtat de "Notation for the Logic of Relatives" de 1870) tenim que:

$$x \prec \bar{a} \qquad 5$$

i

$$x \prec \overline{bc}. \qquad 6$$

Ara bé, de 3 i 6 se segueix que $x \mathrel{\overline{\prec}} b$, car si $x \prec b$ i $x \prec c$, llavors tindríem per (2) que $x \prec bc$, i per 6, (2) i el teorema (23), que es demostra més endavant, tindríem aleshores que $x \prec 0$, en contra de la hipòtesi. Finalment, si $x \mathrel{\overline{\prec}} b$, pel lema 1, existeix un $y \neq 0$ tal que:

$$y \prec x \qquad 7$$

i $y \prec \bar{b}$, és a dir, per (19)*:

$$b \prec \bar{y}. \qquad 8$$

Per 5, 7 i (5)*, (19)* i doble negació, tenim que:

$$a \prec \bar{y}. \qquad 9$$

Per 8, 9, (2), (19)* i (6) tenim que:

$$y \prec \overline{b+a}, \qquad 10$$

però per 7, 4, (5)* i (6) tenim que:

$$y \prec b+a, \qquad 11$$

d'on raonant com abans tenim que $y \prec 0$, contràriament a l'hipòtesi inicial sobre y. Ara ja podem provar el següent principi distributiu, que establirem com a:

Lema 3: $(a+b)c \prec ac+bc$.

Demostració: Pel *lema 2* i (6):

$$(a+b)c \prec bc+a \qquad 12$$

Per (4), 12 i (2):

$$(a+b)c \prec (bc+a)c. \qquad 13$$

Per 13, el *lema 2* (substituint a per bc i b per a) i (5)* :

$$(a+b)c \prec bc+ac \qquad 14$$

i d'aquí obtenim finalment per (6):

$$(a+b)c \prec ac+bc.$$

Recíprocament, tenim el següent:

Lema 4: $ac+bc \prec (a+b)c$.

Demostració: Es demostra trivialment a partir de (2), (4) i (5)*.

Tenim finalment els dos teoremes següents que expressen les dues lleis distributives enunciades per Peirce (8):

Teorema 1: $(a+b)c = ac+bc$.

Demostració: Pels lemes 3 i 4 i la definició d'igualtat de l'article de 1870.

Teorema 2: $ab+c = (a+c)(b+c)$

Demostració: Igual que el teorema anterior, intercanviant cada inclusió per la seva recíproca, $+$ i $\times$ i 0 i 1.

Tal com dèiem abans, Schröder publicà la seva demostració de la independència dels principis distributius (1)' i (2)' a partir de les definicions (1)-(3) de la lògica no relativa de Peirce en el primer volum d'*Algebra der Logik*. Donada aquesta base, efectivament, les lleis distributives no poden demostrar-se i, per tant, o bé els principis anteriors han de postular-se com a principis independents dels anteriors o bé han de demostrar-se a partir d'alguna altra hipòtesi més feble -com per exemple, el principi III_x de Schröder abans esmentat. Ara bé, és evident que les definicions (1)-(3) no constitueïen als ulls de Peirce una base suficient per al desenvolupament de la lògica no relativa, tal i com ens ho mostra la demostració anterior de les lleis distributives i d'altres teoremes de la lògica no relativa. En tots aquests casos, en efecte, Peirce recorre als principis enunciats en l'*àlgebra de la còpula*, per la qual cosa hom hauria d'afegir aquests principis a les definicions (1)-(3) abans esmentades per tal de explicitar quina seria una base suficient per al desenvolupament de la lògica no relativa i la demostració de les lleis distributives. Aquí no ens hem preocupat d'explicitar quina seria la base mínima que requereix la demostració d'aquestes lleis, ni tampoc d'explicitar altres demostracions menys "tedioses" de les lleis distributives que la comunicada per Peirce a Huntington i reproduïda per aquest en el marc del segon conjunt de postulats del seu article "Sets of Independent Postulates for the Algebra of Logic" de 1904. Aquests problemes ja han estat estudiats per N. Houser en l'article "Peirce and the Law of Distribution" abans esmentat i seria impossible fer-nos-en ressò aquí d'una manera concisa. Remarquem, en qualsevol cas, que en el capítol següent estudiarem la demostració de Schröder de la independència de les lleis distributives a partir de (1)-(3), la qual cosa ens durà ocupar-nos de nou del que podríem anomenar *problema de la distributivitat* (*Cf. infra*, cap. III, § 4).

Altres teoremes d'interès demostrats per Peirce en l'article "On the Algebra of Logic" de 1880 són els següents:

$$(a+b)+c=(a+c)+(b+c) \qquad (a\times b)\times c=(a\times c)(b\times c), \qquad (9)$$

que es demostra a partir de successives aplicacions de (5), (6) i (7).

$$a+(a\times b)=a \qquad a\times(a+b)=a, \qquad \text{(Grassmann,Schröder)(10)}$$

que se segueix a partir de (4), (1)* i (2). Tenim també:

$$(a+b \prec a)=(b \prec a\times b). \qquad \text{(Grassmann, Schröder)(11)}$$

D'acord amb Peirce, la demostració de (11) se segueix de:

$$(i)\ (a+b \prec a) \prec (b \prec a) \qquad \text{i} \qquad b \prec (a\times b) \prec (b \prec a)$$

$$(ii)\ b \prec b \qquad \text{i} \qquad a \prec a,$$

que s'obtenen per substitució a partir de (3) i (1)* respectivament. Certament, de $a+b \prec a$ i (*i*) se segueix per (4)* que $b \prec a$ i, per (*ii*) i (2), tenim que $b \prec a\times b$. I, anàlogament, a partir de $b \prec a\times b$ es dedueix que $a+b \prec a$. Notem, doncs, que el signe = representa la deducció o inferència recíproca de les fórmules que són a cada un dels seus costats. De fet, tots els teoremes d'aquí en endavant, llevat de (16), (17) i (23)-(30), són fórmules que contenen connectives que en alguna de les seves ocurrències s'han d'interpretar proposicionalment. Tenim així:

$$(i)\ (a \prec b) \times (x \prec y) \prec (a + x \prec b + y) \qquad \text{(Peirce, 1870) (12)}$$

$$(ii)\ (\mathrm{a} \prec b) \times (x \prec y) \prec (a \times x \prec b \times y),$$

que es demostren fàcilment a partir de (4), (5)* i (2). Tenim també:

$$a \prec (b + x) \times (a \times x \prec b) = (a \prec b). \qquad \text{(Grassmann[1]) (13)}$$

Notem, en efecte, que de les dues inclusions $a \prec b + x$ i $a \prec a$ se segueix, per (2), la inclusió $a \prec a \times (b + x)$, que és equivalent, per (8), a:

$$(i)\ a \prec (a \times b) + (a \times x),$$

i, d'altra banda, a partir de $a \times x \prec b$ i $a \times b \prec b$ (4) tenim que:

$$(ii)\ (a \times b) + (a \times x) \prec b.^2$$

Per tant, per (*i*), (*ii*) i (5)* tenim que $a \prec b$. Recíprocament, si $a \prec b$, llavors, per (4) i (5)* tenim que $a \prec (b + x)$ i $(a \times x) \prec b$. Per (2) i (3) i la definició d'igualtat tenim immediatament que:

$$(a + b \prec c) = (a \prec c) \times (b \prec c) \qquad (14)$$

$$(c \prec a \times b) = (c \prec a) \times (c \prec b).$$

[1] Segons Peirce, es tracta d'una generalització d'un teorema de Grassmann que "en enunciar-lo, uneix erròniament les dues primeres proposicions per + en lloc de ×". W4 184 (CP 3. 200).

[2] D'acord amb Peirce, (*i*) i (*ii*) se seguirien de les hipòtesis considerades a partir de (12), (5) i (8).

Les dues proposicions següents són també originals de l'article de Peirce de 1880:

$$(c \prec a+b) = \Sigma\{(p \prec a)\times(q \prec b)\}, \qquad \text{on } p+q=c. \quad (15)$$

$$(a\times b \prec c) = \Sigma\{(a \prec p)\times(b \prec q)\}, \text{ on } p\times q = c.$$

En efecte, per (4) i (2) tenim, d'una banda, que $(a\times c)+(b\times c) \prec c$. D'una altra banda, de $c \prec a+b$ i $c \prec c$, per (2) i (8) tenim que $c \prec (a\times c)+(b\times c)$. Per tant:

$$(i)\ (c \prec a+b) \prec (a\times c)+(b\times c) = c.$$

I, anàlogament:

$$(ii)\ (a\times b \prec c) \prec (a\times c)+(b\times c) = c.$$

Ara bé, si agafem, d'una banda, $a\times c = p$ i $b\times c = q$ i, de l'altra, $a+c=p$ i $b+c=q$ tenim, per (4), que:

$$(c \prec a+b) \prec (p \prec a)\times(q \prec b), \qquad \text{on } p+q=c.$$

$$(a\times b \prec c) \prec (a \prec p)\times(b \prec q), \qquad \text{on } p\times q = c,$$

i, per (2), obtenim finalment el resultat desitjat, car el recíproc és immediat per (12) i (2). Els dos teoremes següents expressen propietats ben conegudes del 0 i el 1. En efecte, per (4), (1) i (1)* i (2) tenim:

$$x+0=x \qquad\qquad x = x\times\infty. \qquad (16)$$

I, per (4) i (1):

$$x+\infty=\infty \qquad\qquad 0 = x\times 0. \qquad (17)$$

Els següents teoremes enunciats per Peirce a "On the Algebra of Logic" expressen propietats referents a la negació, que es defineix a partir de les tres propietats ja estudiades en la secció anterior -és a dir, la definició de $\bar{x}$ com $x \prec f$ i els principis de terç exclòs i no contradicció ((17)* i (18)*). Segons Peirce, en efecte, "a partir de la primera [*propietat*] tenim que si

$$\begin{array}{cc} c & a \\ & \therefore b \end{array}$$

és vàlida, llavors

$$\begin{array}{cc} c & \bar{b} \\ & \therefore \bar{a} \end{array}$$

és vàlida. O

$$(c \times a \prec b) \prec (c \times \bar{b} \prec \bar{a}) \qquad (18)$$

També, que si

$$\begin{array}{c} b \\ \therefore c \text{ o } a \end{array}$$

és vàlida, llavors

$$\begin{array}{c} \bar{a} \\ \therefore c \text{ o } \bar{b} \end{array}$$

és vàlida; o

$$(b \prec c + a) \prec (\bar{a} \prec c + \bar{b})\text{".}^{1} \qquad (19)$$

1 W4 185-86 (CP 3.201).

En efecte, si a i b són de la forma $a \prec x$ i $b \prec x$, llavors de $c \times a \prec b$ se segueix per (2)*, (16)* i de nou (2)* que $c \times \bar{b} \prec \bar{a}$. Per la deducció de (19) s'ha de tenir en compte, d'una banda, l'equivalència de les inferències:

$$\begin{array}{lcl} x \text{ i } y & \text{i} & x \\ \therefore z & & \therefore y \text{ o } z \end{array}$$

i, de l'altra, de les inferències:

$$\begin{array}{lcl} x & \text{i} & x \text{ i } \bar{y} \\ \therefore y \text{ o } z & & \therefore z, \end{array}$$

que són enunciades explícitament per Peirce al començament de la lògica dels termes no relatius. Peirce no les demostra i les considera ja estudiades en l'*àlgebra de la còpula*. De fet, des d'un punt de vista proposicional, la primera de les equivalències anteriors és equivalent a la propietat de la deducció, tenint en compte que $y \prec z$ és equivalent a $\bar{y} + z$ quan la còpula s'interpreta com el condicional filònic. D'altra banda, $x \times \bar{y} \therefore z$ és equivalent, d'acord amb l'equivalència anterior, a $x \therefore \bar{\bar{y}} + z$, que per (17)* i (18)* és equivalent a $x \therefore y + z$. A partir de les dues equivalències anteriors i la commutativitat de la conjunció i la disjunció es demostra fàcilment (19). Segons Peirce: "combinant (18) i (19), tenim:

$$(a \times b \prec c + d) \prec (a \times \bar{d} \prec c + \bar{b}). \qquad (20)$$

Pels principis de contradicció i terç exclòs, això dóna

$$(a \times \bar{d} \prec c + \bar{b}) \prec (a \times b \prec c + d)\text{''}.[1] \qquad (21)$$

Però la demostració de (20) i (21) que proposa Peirce suposa les lleis de De Morgan, que encara no s'han demostrat. De fet, (20) i (21) se segueixen immediatament de les dues equivalències a partir de les quals es deduïa (19). Així tenim finalment el teorema:

---

[1] W4 186 (CP 3.201).

$$(a \times b \prec c + d) = (a \times \bar{d} \prec c + \bar{b}) \tag{22}$$

que, d'acord amb Peirce, "conté l'essència de la negació".[1] Si a (22) posem, d'una banda, $a = d, b = \infty$ i $c = 0$ i, de l'altra, $a = \infty, d = 0$ i $b = c$ tenim, a partir de (1), la definició d'igualtat de 1870, (1)* i (4)*, que:

$$a \times \bar{a} = 0 \qquad \text{i} \qquad a + \bar{a} = \infty \tag{23}$$

encara que la demostració de la primera de les equacions anteriors requereix, a més, $\bar{\infty} = 0$, que no s'ha introduït ni s'ha demostrat abans. Els següents teoremes demostrats per Peirce ((24)-(29)) són interessants des del punt de vista del desenvolupament de les funcions lògiques, però podem passar-los per alt. Veurem, en canvi, alguns teoremes que es deriven fonamentalment de l'important teorema (22). Tenim, en primer lloc, les anomenades *lleis de De Morgan*:

$$\overline{a \times b} = \bar{a} + \bar{b} \qquad \overline{a + b} = \bar{a} \times \bar{b}. \tag{30}$$

En efecte, per (23), tenim:

$$(a \times b) \times (\overline{a \times b}) \prec 0 \qquad \infty \prec (a + b) + (\overline{a + b}),$$

que per (7), (6) i (22) són equivalents a:

$$b \times (\overline{a \times b}) \prec \bar{a} \qquad \bar{a} \prec b + (\overline{a + b})$$

i, novament, per (22), són equivalents a:

$$\overline{a \times b} \prec \bar{a} + \bar{b} \qquad \bar{a} \times \bar{b} \prec \overline{a + b}.$$

D'altra banda, per (4) i (22), tenim directament:

---

1 W4 186 (CP 3.201).

$$\bar{a} \prec \overline{a \times b} \qquad\qquad \overline{a+b} \prec \bar{a}$$

$$\bar{b} \prec \overline{a \times b} \qquad\qquad \overline{a+b} \prec \bar{b},$$

d’on, per (2), obtenim:

$$\bar{a}+\bar{b} \prec \overline{a \times b} \qquad\qquad \overline{a+b} \prec \bar{a} \times \bar{b},$$

que donen per acabada la demostració. Finalment, assenyala Peirce, aplicant (22) sobre (11), (12), (13), (14), (15) i (22) mateix obtenim respectivament els següents teoremes:

$$(b \overline{\prec}\ a \times b) = (a+b \overline{\prec}\ a) \tag{31}$$

$$(a+x \overline{\prec}\ b+y) \prec (a \overline{\prec}\ b)+(x \overline{\prec}\ y)$$

$$(a \times x \overline{\prec}\ b \times y) \prec (a \overline{\prec}\ b)+(x \overline{\prec}\ y) \tag{32}$$

$$(a \overline{\prec}\ b) = (a \overline{\prec}\ b+x)+(a \times x \overline{\prec}\ b) \tag{33}$$

$$(a+b \overline{\prec}\ c) = (a \overline{\prec}\ c)+(b \overline{\prec}\ c)$$

$$(c \overline{\prec}\ a \times b) = (c \overline{\prec}\ a)+(c \overline{\prec}\ b) \tag{34}$$

$$(c \overline{\prec}\ a+b) = \Pi\{(p \overline{\prec}\ a)+(q \overline{\prec}\ b)\}, \quad \text{on } p+q=c.$$

$$(a \times b \overline{\prec}\ c) = \Pi\{(a \overline{\prec}\ p)+(b \overline{\prec}\ q)\}, \quad \text{on } p \times q=c. \tag{35}$$

$$(a \times b \overline{\prec}\ c+d) = (a \times \bar{d} \overline{\prec}\ c+\bar{b}). \tag{36}$$

Segons Peirce, en efecte, tenint en compte que $a \prec b$ és equivalent a $\bar{a}+b$ i $a \overline{\prec}\ b$ és equivalent a $a \times \bar{b}$ tenim, per (22) i (30), que:

$$[(a \prec b) = (c \prec d)] = [(c \overline{\prec} d) = (a \overline{\prec} b)],$$

que dóna raó de tots els resultats anteriors.

7. L'axiomatització de l'aritmètica de 1881

Al llarg de l'obra de Peirce trobem nombroses temptatives d'axiomatització de l'aritmètica, la qual cosa mostra que trobar un conjunt d'axiomes a partir del qual hom pugui deduir tots els teoremes de la teoria de nombres era un problema important per a Peirce.[1] El primer intent, que nosaltres sapiguem, el trobem en l'article "Upon the Logic of Mathematics" de 1867, el sistema lògic del qual hem estudiat en la segona secció. Aquest article s'obre precisament amb les paraules següents:

> L'objecte del present article és mostrar que hi ha determinades proposicions generals a partir de les quals les veritats de les matemàtiques se segueixen sil·logísticament, i que aquestes proposicions poden considerar-se com a definicions dels objectes sota la consideració del matemàtic que no inclouen cap supòsit relatiu a l'experiència o a la intuïció.[2]

Amb tot, l'article de Peirce més conegut al respecte és "On the Logic of Number" (*1881*), car en ell es publica per primera vegada en la història un sistema d'axiomes que caracteritza categòricament el sistema dels nombres naturals. Aquest article s'obre amb un paràgraf molt semblant al de l'article de 1867, però que paga la pena també reproduir íntegrament:

> Ningú pot posar en dubte les proposicions elementals relatives als nombres i, aquelles que no són manifestament vertaderes a primera vista, ho esdevenen gràcies a les demostracions habituals. Però encara que veiem que *són* vertaderes, no veiem fàcilment *perquè* són vertaderes; així, un lògic anglès de renom ha plantejat la qüestió

[1] P. Shields cita en l'article "Peirce's Axiomatization of Arithmetic" (*1997*), deu sistemes diferents d'axiomes tan sols en els volums 3 i 4 de *Collected Papers*: 3.20ss., 3.253, 3.562 A-I; 4.110, 4.160ss., 4.188, 4.335, 4.336, 4.341, 4.606 i 4.664 ss. (*Cf. Houser*, *Roberts* i *Van Evra (eds.) 1997*, 52, n. 15).

[2] W2 59-60 (CP 3.20).

> de si són vertaderes en totes les parts de l'univers. L'objectiu d'aquest article és mostrar que són conseqüències estrictament sil·logístiques d'unes poques proposicions fonamentals. La qüestió de l'origen lògic d'aquestes últimes, que jo considero definicions, requeriria una discussió separada.[1]

Abans que res, aquest text és interessant perquè confirma alguna de les tesis peircianes sobre la naturalesa de la lògica i les matemàtiques i llur interrelació. Com veurem de seguida, Peirce havia seguit el seu pare en definir les matemàtiques com "la ciència que treu conclusions necessàries", en el sentit que tracta exclusivament amb estats de coses hipotètics dels quals n'extreu llavors conclusions necessàries, per contraposició a la lògica que ell defineix com "la ciència de treure conclusions necessàries" i que té, doncs, un caràcter normatiu. Aquest punt de vista peircià sobre la naturalesa de les matemàtiques és tot just el contrari de J. S. Mill, el "lògic anglès de renom" al qual es refereix el text anterior. En efecte, tal com ha assenyalat Ph. Kitcher en l'article "Mill, Mathematics and the Naturalist Tradition" (*1998*):

> En el fons del tractament de Mill de l'aritmètica i la geometria hi ha un intent seriós per entendre aquestes com a ciències que versen sobre les propietats físiques de les coses quotidianes i el nostre coneixement matemàtic com fonamentat en les nostres interaccions perceptuals amb el món físic. Això el duu a formular punts de vista sobre les matemàtiques que semblen molt allunyats de la pràctica contemporània dels matemàtics, que refusen la "certesa espacial" de les matemàtiques i afirmen llur "independència de l'experiència".[2]

Aquesta filosofia de la matemàtica dugué a Mill, en definitiva, a convertir-se en el centre dels atacs dels matemàtics i filòsofs com ara Frege o Peirce. Com pretén respondre Peirce a la qüestió plantejada per Mill relativa a la naturalesa de les proposicions matemàtiques, esmentada en el text reproduït més amunt? Mostrant que, tal com diu Peirce allí, aquestes proposicions "són conseqüències estrictament sil·logístiques d'unes poques proposicions fonamentals". Naturalment, Peirce estava al corrent de l'aritmetització de l'anàlisi endegada per alguns il·lustres matemàtics de l'època i, per tant, considerava segurament que aquesta demostració s'estendria *ipso facto* a totes les matemàtiques. Per "conseqüències estrictament sil·logístiques", Peirce vol dir exactament conclusions que es

[1] W4 299 (CP 3.252).
[2] *Skorupski 1998*, 58-59.

demostren a partir de les premisses a través d'un raonament o inferència de tipus deductiu i que, per tant, se segueixen *necessàriament* d'aquelles premisses. Com que a començaments de la dècada dels 80 Peirce ja era conscient que les formes d'inferència de tipus deductiu excedien de llarg les formes de tipus sil·logístic, es veurà obligat "a fer ús de la lògica de relatius, la formes de la qual no són, en sentit estricte, reductibles al sil·logisme ordinari, encara que són de la mateixa natura"[1] en les seves demostracions. Veiem, doncs, que l'objectiu principal de Peirce en l'article de 1881 és mostrar la correcció de la definició de matemàtiques donada pel seu pare i refutar així la concepció empirista de Mill. Ara bé, de cap de les maneres s'ha de confondre aquest objectiu amb el dels logicistes, com ara Frege o Russell o, fins i tot, Dedekind, de reduir les matemàtiques a la lògica perquè, com ja hem explicat abans, això suposaria anar en contra de la definició de matemàtiques donada per B. Peirce, a partir de la qual son fill dibuixarà la seva distinció entre lògica i matemàtiques. El mateix Peirce ho explicarà alguns anys més endavant amb les paraules següents:

> El matemàtic filòsof Dr. Richard Dedekind, sosté que les matemàtiques són una branca de la lògica. Això no resulta de la definició del meu pare, que diu, no que les matemàtiques són la ciència de *treure* conclusions necessàries -aquesta seria la lògica deductiva-, sinó que és la ciència que *treu* conclusions necessàries.[2]

Les matemàtiques i la lògica són ciències diferents i la primera és independent de la segona en el sentit que la lògica no pot fornir un fonament a les matemàtiques. La lògica, en canvi, pot fer una anàlisi crítica i avaluativa dels raonaments emprats per les matemàtiques i, en particular, demostrar que les formes d'inferència emprades en aquesta ciència són aquelles reconegudes per la lògica com a formes d'inferència deductives correctes -o, com es diu sovint, lògicament vàlides- i, per tant, que les seves conclusions són necessàries. Ara bé, si les formes d'inferència emprades en matemàtiques són de tipus estrictament lògic i les "poques proposicions fonamentals" a partir de les quals se segueixen lògicament la resta de proposicions són també de naturalesa lògica -en el sentit que els símbols no lògics que apareixen en elles són definibles en termes lògics-, llavors la tesi logicista segons la qual les matemàtiques són reductibles a la lògica sembla indefugible. Segurament per això Peirce assenyala, en el text citat a la pàgina 159, que "la qüestió de l'origen lògic" de les proposicions fonamentals abans esmentades "requeriria una discussió separada", discussió

1 W4 299 (CP 3.252).
2 CP 4.239.

que tanmateix Peirce mai no abordà. En resum: L'article "The Logic of Number" de 1881 és un article de lògica, tal com indica el mateix títol, l'objectiu del qual és demostra que totes les proposicions de les matemàtiques poden deduir-se lògicament a partir d'unes poques premisses. Però d'aquí no se segueix, per les raons ja explicades, que Peirce tingués una concepció logicista de les matemàtiques o que entengués l'assoliment dels objectius plantejats en aquest article com part d'un programa reduccionista de les matemàtiques.

Un cop fets els aclariments anteriors, podem passar ja a l'anàlisi tècnica de "The Logic of Number". En aquest article, Peirce exposa la seva axiomatització de l'aritmètica d'una forma completament sistemàtica, enunciant primer les proposicions fonamentals o axiomes de l'aritmètica, després les definicions pertinents i, finalment, demostrant alguns teoremes rellevants. Peirce no enuncia les proposicions fonamentals o axiomes de l'aritmètica com a tals, sinó que dóna una sèrie de definicions prèvies i després afirma que els nombres naturals satisfan aquestes definicions. En primer lloc, doncs, Peirce defineix un *sistema quantitatiu* com un sistema d'objectes o elements amb una relació *transitiva*, *antisimètrica* i *reflexiva*, això és, el que avui en dia anomenaríem un *conjunt parcialment ordenat*.[1] En el paràgraf següent, titulat *Simple Quantity*, Peirce defineix un *sistema quantitatiu simple* com un sistema en el qual la relació que ordena el conjunt és *transitiva*, *antisimètrica*, *reflexiva* i, a més, *connecta* tots els elements del sistema, això és, constitueix el que avui en dia diríem un *conjunt totalment* o *linealment ordenat*.[2] En el mateix paràgraf, Peirce defineix un *sistema quantitatiu simple i discret* com un *sistema quantitatiu simple* en el qual tot element, llevat del mínim, té un immediat predecessor.[3] En el paràgraf següent, titulat *Discret Quantity*, Peirce defineix un *sistema quantitatiu simple, discret i semifitat* com un *sistema sistema quantitatiu simple i discret* amb element mínim, però no màxim.[4] En el mateix paràgraf, Peirce defineix un *sistema quantitatiu simple, discret, semifitat i infinit* com un *sistema quantitatiu simple, discret i semifitat* en el qual el *principi d'inducció*, o com diu sovint Peirce, la *inferència fermatiana*, és vàlid.[5] Finalment, en un curt paràgraf titulat *Semi-infinite Quantity*, Peirce defineix els *nombres naturals -ordinary numbers-* com un *sistema quantitatiu simple, discret i semiinfinit* -això és semifitat i infinit.[6] Així doncs, segons Peirce, el nombres naturals estarien definits o caracteritzats pels següents axiomes -on *N* és

1 W4 299-300 (CP 3.253).
2 W4 300 (CP 3.254).
3 W4 300 (CP 3.256).
4 W4 300-301 (CP 3.257).
5 W4 301 (CP 3.258).
6 W4 301 (CP 3.260).

un conjunt qualsevol, *R* una relació en *N* i les definicions de mínim, màxim i predecessor són les habituals:

1. *N* està parcialment ordenat per *R*
2. *N* està connectat per *R*.
3. *N* està tancat respecte a predecessors.
4. *N* té mínim, però no té màxim.
5. El principi d'inducció és vàlid en *N*.

Una vegada definit el sistema dels nombres naturals, Peirce enceta un paràgraf titulat *Definitions*, on defineix el "1" com l'element mínim del sistema de nombres[1] i les operacions d'addició i multiplicació.[2] De fet, tal com han assenyalat Fraenkel i Bar-Hillel en la seva coneguda obra *Foundations of Set Theory* (*1958*) es tracta d'un dels primers exemples coneguts de definició per recursió.[3] Evidentment, la definició de la suma pel cas $n = 1$ dóna de forma immediata la definició de l'operació "successor", la qual és la conversa de l'operació "predecessor" a la qual fa referència el tercer axioma. A continuació, en un paràgraf titulat *Theorems*, Peirce demostra per inducció les propietats associativa, commutativa i distributiva per aquestes operacions.[4] Amb això Peirce acaba l'estudi del sistema dels nombres naturals i en el paràgraf següent, titulat *Discrete Simple Quantity Infinite in both directions*, Peirce estudia els nombres sencers, els qual caracteritza com un *sistema quantitatiu simple, discret i no fitat*, és a dir, com un sistema sense màxim ni mínim.[5]

Si comparem la presentació que fa Peirce dels nombres naturals en el seu article de 1881 amb l'axiomatització de l'aritmètica duta a terme posteriorment per Dedekind en el seu llibre *Was sind und was sollen die Zahlen?* (*1888*) o per Peano a *Arithmetices principia nova methode exposita* (*1889*) (*Cf. infra*, cap. IV, § 7 i § 9 respectivament), deixant de banda el major formalisme d'aquestes últimes, la diferència més notable sigui potser que mentre que Peirce tria com a primitiva una relació transitiva, Dedekind i Peano triaran com a primitiva una relació no transitiva, l'aplicació successor. En qualsevol cas, tal com hem vist, Peirce defineix implícitament la relació successor en definir recursívament la suma, mentre que Dedekind definirà la relació transitiva "més gran o igual que" a partir de la noció de cadena

1 W4 301 (CP 3.261).
2 W4 301 (CP 3.262-63).
3 *Cf. Fraenkel i Bar-Hillel 1958*, 293.
4 W4 301-04 (CP 3.265-71).
5 W4 304-06 (CP 3.272-79).

d'un element -o Frege a partir de la noció equivalent de l'*ancestral feble* d'una funció (*Cf. infra*, cap. V, § 3). De fet, tal com ha demostrat Shields en l'article abans esmentat, donades aquestes definicions, "el sistema d'axiomes de Peirce de 1881 és equivalent als postulats de Peano",[1] el qual tal com explicarem més endavant és equivalent al de Dedekind, "la qual cosa significa que l'article de 1881 conté el que és probablement el primer sistema satisfactori d'axiomes per als nombres naturals de la història".[2] Aquest fet per si sol, sobretot si tenim en compte que "On the Logic of Number" fou publicat quasi bé una dècada abans que les obres de Dedekind i Peano abans esmentades, mostra la importància d'aquest article per a la història de les matemàtiques. Però, tal com explicarem a continuació, l'article de Peirce ofereix encara algunes altres contribucions rellevants en aquest sentit.

En el darrer paràgraf de l'article "On the Logic of Number", titulat *Limited Discrete Simple Quantity*, Peirce defineix primerament el que anomena una *correspondència simple* o, com diríem avui en dia, una correspondència bijectiva o biunívoca. Peirce expressa aquesta definició en termes de la seva lògica de relatius de la següent manera:

$$c\,\breve{c} \prec 1 \qquad\qquad \breve{c}\,c \prec 1,$$

on c és una relació unívoca i $\breve{c}$ és la conversa de c.[3] A continuació, Peirce defineix el concepte d'enumerabilitat [*counting*] d'una classe a partir de l'existència d'una correspondència biunívoca entre aquesta classe i els nombres naturals, i el nombre cardinal d'una classe [*the number of the count of a class*] com el nombre màxim en l'enumeració d'aquella classe -cas que aquest nombre existeixi, això és, en cas que aquesta enumeració sigui finita.[4] Aquesta definició constitueix el primer exemple conegut, si més no per nosaltres, de la definició del cardinal d'una classe a partir de l'existència d'una correspondència biunívoca d'aquella classe amb un segment inicial dels nombres naturals -que és la definició més estesa avui en dia dels nombres cardinals. De fet, tal com veurem més endavant, Dedekind definirà el nombre cardinal d'una classe de forma anàloga en el seu famós *Was sind und was sollen die Zahlen?* de 1888 (*Cf. infra*, cap. IV, § 8). De la definició anterior, se segueix immediatament que una classe és finita si existeix una correspondència biunívoca d'aquesta classe amb un segment inicial dels nombres naturals, la qual cosa ofereix

1 *Houser*, *Roberts* i *Van Evra (eds.) 1997*, 47.
2 *Ibid*., 48.
3 W4 306 (CP 3.280).
4 W4 306 (CP 3.281).

una caracterització també de les classes infinites -una classe és infinita si no és finita. Però el cert que Peirce no enuncia explícitament aquesta definició de classe o conjunt finit, la qual cosa si que farà Dedekind en l'obra abans esmentada. En canvi, al final de l'article de 1881, Peirce enuncia una definició de conjunt finit de tipus completament diferent a l'anterior:

> Si tot *S* és un *P*, i si els *P*s són un conjunt finit [*a finite lot*] l'enumeració dels quals arriba a un nombre tan petit com el nombre de *S*s, llavors tot *P* és un *S*. Car si, en contar els *P*s, comencem amb els *S*s (que són una part seva), i havent contat tots els *S*s arribem al nombre *n*, llavors no restarà cap *P* que no sigui un *S*. Car si n'hi hagués algun, el nombre de *P*s seria més gran que *n*. A partir d'aquí deduïm la validesa del següent mode d'inferència:
>
> Tot texà mata un texà
> Ningú no és mort sinó per una persona
> Per tant, tot texà és mort per un texà,
>
> suposant que els texans són un conjunt finit. Car, per la primera premissa, tot texà mort per un texà és un texà que mata un texà. Per la segona premissa, els texans morts per texans són tants com els texans que maten texans. D'aquí concloem que tot texà que mata un texà és un texà mort per un texà, o, per la primera premissa, tot texà és mort per un texà.[1]

En definitiva, per a Peirce un conjunt finit és aquell en què un sil·logisme com l'anterior, anomenat per De Morgan *sil·logisme de quantitat transposada* [*syllogism of transposed quantity*], és sempre vàlid i, per tant, un conjunt infinit serà aquell en què algun sil·logisme com l'anterior no és vàlid. Aquesta definició, a diferència de l'anterior, que pressuposa l'existència d'una correspondència biunívoca del conjunt en qüestió amb un segment inicial dels nombres naturals, és una definició purament cardinal de conjunt o sistema finit, en el sentit que no inclou cap referència als nombres naturals.[2] El mateix Peirce

1 W4 309 (CP 3.288).

2 És interessant remarcar que, en el primer paràgraf del text anterior, Peirce sembla deduir la definició de conjunt finit en termes del sil·logisme de quantitat transposada a partir de la definició de conjunt finit en termes de la seva equipotència amb un segment inicial del naturals, que, tal com hem dit abans, roman implícita en la seva definició del nombre cardinal d'una classe. Tal com explicarem després, la definició de Peirce de conjunt finit en termes del sil·logisme de quantitat transposada és equivalent a la definició que després popularitzarà Dedekind i, per tant, és habitual referir-se als conjunts que satisfan la propietat enunciada per la definició dedekindiana com *finits de Dedekind*, distingint-los així dels que satisfan la propietat de ser equipotents amb un segment inicial del naturals, enunciada també per Dedekind, que s'anomenen *finits* a seques. Així doncs, la demostració de Peirce en el primer paràgraf del text anterior és equivalent a la demostració que tot conjunt finit és finit de Dedekind -la demostració del recíproc, com és ben sabut, requereix l'axioma d'elecció.

repetirà aquesta definició en el seu conegut article "On the Algebra of Logic" de 1885, si bé exposada d'una forma considerablement més clara i recolzant-se a tal efecte en la notació de la lògica de relatius introduïda en aquest article.[1] Aquesta definició és també l'origen de la polèmica mantinguda amb Dedekind sobre la prioritat de la definició de conjunt finit o infinit, que dugué Peirce a escriure una carta a l'editor de la revista *Science* el 1900, que li fou publicada aquell mateix any, reclamant la prioritat de la seva definició. De forma semblant, en un article inèdit de 1905, Peirce escriurà que:

> Pel que fa a Dedekind, el seu petit llibre *Was sind und was sollen die Zahlen?* és excel·lent i d'allò més enginyós. Però no demostra cap teorema difícil que jo no hagi demostrat o publicat abans, i el meu article li fou enviat. La seva definició d'una col·lecció infinita no és altra que la meva definició de col·lecció finita capgirada.[2]

Aquesta polèmica dugué també Schröder a escriure l'article "Über zwei Definitionen der Endlichkeit und G. Cantor'sche Sätze" (*1898$_a$*), en el qual demostrà l'equivalència de la definició de Peirce i la definició de Dedekind, la qual consisteix a dir que un conjunt és infinit si és semblant a una part pròpia seva -altrament, és un conjunt finit (*Cf. infra*, cap. IV, § 5). Per veure l'equivalència de les dues definicions n'hi ha prou en tenir en compte que de la definició de Peirce se segueix immediatament que "dir que un conjunt d'objectes és finit és el mateix que dir que si recorrem la classe passant d'un individu a un altre, llavors necessàriament tornarem a passar per un individu per el qual ja hem passat; això és, si tot individu del conjunt està en una relació injectiva [one-to-one] amb un individu del conjunt, llavors amb cada individu del conjunt n'hi ha un que està en aquesta relació".[3] En definitiva, d'acord amb la definició de Peirce, un conjunt és infinit si hi ha una aplicació injectiva d'aquest conjunt en si mateix que no és exhaustiva, és a dir, si hi ha algun element del conjunt que queda fora de l'abast d'aquesta aplicació, la qual cosa és equivalent a dir que un conjunt és infinit si hi ha una bijecció d'aquest conjunt en un conjunt inclòs estrictament en ell.

---

1 W5 188-89 (CP 3.402)

2 CP 4.331. Peirce es refereix naturalment a l'article "On the Logic of Number" de 1881.

3 W5 189 (CP 3.402).

8. L'àlgebra de relacions de 1883

En una breu nota històrica sobre els orígens de la lògica de relatius escrita pel mateix Peirce per a l'edició de 1911 del *Dictionary of Philosophy and Psychology*, el nostre autor assenyala que:

> Els relatius han estat reconeguts, d'ençà Aristòtil, com un tema de la lògica. La primera llavor de la doctrina moderna apareix en una remarca trivial de *Robert Leslie Ellis*. *De Morgan* va fer el primer treball sistemàtic en la seva quarta memòria sobre el sil·logisme el 1860 (Cambridge Philosophical Transactions, X. 331-358), en la qual feu un esbós de la teoria de les relacions diàdiques. C. S. Peirce, el 1870, va estendre l'àlgebra de Boole per tal d'aplicar-la a aquelles i, després de molts intents, produí una àlgebra general de la lògica satisfactòria, junt amb un altra àlgebra adaptada especialment a les relacions diàdiques (*Studies in Logic*, by members of The John Hopkins University, 1883, Note B, 187-203). Schröder desenvolupà aquesta darrer d'una forma sistemàtica (la qual cosa subratlla el seu defecte manifest d'incloure cents de teoremes merament formals sense cap significació i, algun d'ells, prou difícils) en el tercer volum de la seva *Exacte Logik* (1885). El treball de Schröder conté moltes altres coses de gran valor.[1]

L'obra *Studies in Logic*, editada per Peirce, conté articles d'alguns dels estudiants més destacats -C.L. Franklin, A. Marquand, … - que s'havien matriculat en els cursos sobre lògica donats per Peirce a la *John Hopkins University* en el període 1879-82 i el mateix Peirce hi contribuí amb un article "A Theory of Probable Inference" i dues notes: "Note A: On a Limited Universe of Marks" (*1883_a*) i "Note B: The Logic of Relatives" (*1883_b*). Tal com assenyala el text anterior, és en el darrer article on trobem l'exposició més elaborada de l'*àlgebra de relacions diàdiques* peirciana, però també on exposa per primera vegada la seva *àlgebra general de la lògica*, la qual desenvolupà sistemàticament en el seu important article "On the Algebra of Logic" de 1885. En aquesta secció estudiarem la presentació que Peirce fa de l'àlgebra de relacions en l'article "The Logic of Relatives" de 1883 sobre la lògica de relatius, per tal de poder-la comparar amb la presentació que n'havia fet en l'article de "Notation for the Logic of Relatives" de 1870 i fer-nos una idea de la forma final que adquirí

[1] CP 3.643.

la *lògica algèbrica de relacions* peirciana, però també les raons que dugueren Peirce a abandonar aquesta i a postular la nova àlgebra general de la lògica o *lògica quantificacional*, el desenvolupament de la qual estudiarem en la secció següent a partir de l'article "On the Algebra of Logic" de 1885. Però, primer de tot, cal fer algunes observacions sobre la lògica dels termes relatius de l'article "On the Algebra of Logic" de 1880, article que hem estudiat abans només per les seves contribucions a la lògica deductiva i la lògica dels termes no relatius (*Cf. supra*, §§ 5 i 6). Com ja sabem, una de les tesis bàsiques de l'article "Notation for the Logic of Relatives" de 1870 és la tesi segons la qual un terme absolut o relatiu és equivalent a la suma lògica dels noms dels individuals o relatius elementals continguts en la classe o relació indicada pel terme general en qüestió (*Cf. supra*, §4). Ja hem vist, per exemple, que tant en aquest article com en l'article "Upon the logic of mathematics" de 1867, Peirce emprava el signe Σ per tal de representar un terme general com la suma lògica de termes individuals. Doncs bé, en l'article "On the Algebra of Logic" de 1880, Peirce emprarà el mateix signe per representar simbòlicament un relatiu general com la suma lògica de relatius individuals. Així, per exemple, representarà el terme relatiu *l* ("amant de") posant:[1]

$$l = \Sigma(\mathrm{A{:}B})$$

Però, Peirce assenyala també en el mateix article que "tot terme [general] podria concebre's com una suma lògica ilimitada d'individus"[2] i, per extensió, que "tot relatiu general" podria concebre's també com "una suma lògica de relatius individuals", els quals "podrien arranjar-se en un quadre infinit":[3]

A:A	A:B	A:C	A:D	A:E	etc.
B:A	B:B	B:C	B:D	B:E	etc.
C:A	C:B	C:C	C:D	C:E	etc.
D:A	D:B	D:C	D:D	D:E	etc.
E:A	E:B	E:C	E:D	E:E	etc.
etc.	etc.	etc.	etc.	etc.	

1 W4 197 (CP 3.223).
2 W4 197 (CP 3.217).
3 W4 197 (CP 3.220).

Aquesta concepció dels termes i relatius generals com la suma lògica de *tots* els termes o relatius individuals de l'univers del discurs, fa que la definició inicial de relatiu general en la forma abans esmentada

$$l = \Sigma(\mathrm{A}:\mathrm{B})$$

esdevingui incorrecta, pel simple fet que no permet distingir un relatiu general d'un altre. Això fa que, en el mateix article de 1880, Peirce introdueixi subíndexs per tal de discriminar els relatius generals entre si. Així, per exemple, posa:

$$l = \Sigma_i(\mathrm{L}_i : \mathrm{M}_i) \qquad\qquad b = \Sigma_j(\mathrm{B}_j : \mathrm{C}_j),$$

on l i b representen relatius generals els quals es defineixen a través de sumes de relatius individuals, cada un d'ells identificat pels subíndexs $i,j(1 \leq i,j \leq n)$. En la fórmula anterior els subíndexs permeten indicar els termes individuals que entraran en la suma lògica i, per tant, semblen actuar d'una forma molt similar a com ho fan les variables en la lògica quantificacional moderna, però s'ha de tenir en compte que, en realitat, els individus són denotats per les lletres majúscules L, M, B, C ..., no pas pels subíndexs, la funció dels quals és distingir les diferents parelles d'individus entre si. En qualsevol cas, tal com explicarem ben aviat, la reinterpretació del signe Σ i dels subíndexs en els articles "The Logic of Relatives" de 1883 i "On the Algebra of Logic" de 1885 és el que obrirà el pas cap el desenvolupament de la lògica quantificacional de Peirce.

Una vegada fetes les precisions anteriors, podem començar ja la nostra anàlisi de l'article "The Logic of Relatives" de 1883. Aquest article comença amb la distinció entre *relatiu individual* i *relatiu general*, que es correspon essencialment amb la distinció homònima de l'article "On the Algebra of Logic" de 1880, encara que la formalització de la definició de relatiu general incorpora ara, a més del signe Σ per indicar la suma lògica de relatius individuals, l'ús de *subíndexs* i *coeficients numèrics*, que cal retrotreure a l'article "A Brief Description of the Algebra of Relatives" (*1882*). Així, després de mostrar, tal com ja havia fet a 1880, que tots els relatius individuals pertanyents a l'univers discurs poden arranjar-se en una matriu infinita, Peirce assenyala que:

Un relatiu general podria concebre's com la suma lògica d'un cert nombre de relatius individuals d'aquesta mena. Posem que *l* denota "amant", llavors podríem escriure

$$l = \Sigma_i\, \Sigma_j (l)_{ij} (I : J),$$

on $(l)_{ij}$ és un coeficient numèric, el valor del qual és 1 en cas que *I* sigui un amant de *J*, i 0 en el cas contrari, i on les sumes han de referir-se a tots el individus en l'univers.[1]

En l'expressió anterior, *l* representa el terme relatiu que cal expressar com la suma de relatius individuals; *I*, *J* denoten ambiguament qualssevol termes individuals pertanyents a l'univers del discurs i, per tant, $(I{:}J)$ denota un relatiu individual qualsevol pertanyent al producte cartesià de l'univers per si mateix; $(l)_{ij}$ és un coeficient que modifica $(I{:}J)$ anul·lant un valor particular seu o deixant-lo igual. Finalment, els subíndexs de Σ i del coeficient indiquen quin valor del coeficient s'ha d'agafar amb cada $(I{:}J)$ en la suma, que es representada per Σ. En definitiva, l'ús de subíndexs i coeficients permet Peirce expressar un terme relatiu qualsevol com la suma lògica de *tots* els relatius individuals en l'univers del discurs, cada terme modificat per un coeficient, l'efecte del qual es fer que el terme en qüestió pertanyi o no a la suma. Una vegada explicat en què consisteix un relatiu general, Peirce considerarà diverses operacions entre ells i enunciarà les lleis que satisfan aquestes operacions. Primer de tot, Peirce introdueix dues operacions unàries, el *complement* i la *conversa*, en els termes següents:

Tot relatiu té un negatiu (com qualsevol altre terme) que podria representar-se dibuixant una línia recta damunt del signe per aquell mateix relatiu: El negatiu d'un relatiu inclou tot parell que aquest darrer exclou, i *viceversa*. Tot relatiu té un *convers*, que s'obté invertint l'ordre dels membres del parell. Així, el convers d'"amant" és "amat". El convers podria representar-se dibuixant una línia corbada damunt del signe per al relatiu, així: $\breve{l}$. És defineix per l'equació:

$$(\breve{l})_{ij} = (l)_{ji}.$$[2]

Peirce enuncia a continuació les lleis següents relatives a aquestes operacions:[3]

1 W4 454 (CP 3.328).

2 W4 454 (CP 3.330).

3 *Cf.* W4 454 (CP 3.330). La numeració seguida correspon a la de l'article de R. Maddux: "The Origin of Relation Algebras in the Development and Axiomatization of the Calculus of Relations" (*1991*), en el qual ens hem basat per dur a terme l'anàlisi tècnica de l'article de Peirce. Igual que

1. $\bar{\bar{l}} = l$

2. $\breve{\breve{l}} = l$

3. $\bar{\breve{l}} = \breve{\bar{l}}$

4. $(l \prec b) = (\bar{b} \prec \bar{l})$

5. $(l \prec b) = (\breve{l} \prec \breve{b})$

Com ja sabem, el complement és una operació lògica, mentre que la conversa és una operació de relatiu. A continuació, Peirce introduirà dues noves operacions lògiques i dues més de relatiu. Les operacions lògiques són introduïdes per Peirce en els termes següents:

> El termes relatius poden ser agregats i compostos com els altres. Emprant + per al signe d'agregació i la coma per al signe de composició lògica (la multiplicació de Boole, que aquí anomenarem multiplicació no relativa o interna) tenim les definicions:
>
> $$(l + b)_{ij} = (l)_{ij} + (b)_{ij}$$
> $$(l, b)_{ij} = (l)_{ij} \times (b)_{ij}.$$ [1]

Peirce enuncia després les lleis principals de l'agregació i composició lògiques, això és, de la *suma* i el *producte* lògics, les quals Peirce ja havia enunciat en l'article "On the Algebra of Logic" de 1880, i afegeix que "les fórmules subsidiàries no cal donar-les, essent com són les mateixes que en la lògica no relativa".[2] Peirce introdueix llavors les operacions respectives de relatiu en els termes següents:

> Arribem ara a la combinació de relatius. D'aquestes en denotarem dues mitjançant símbols especials; a saber, escriurem
>
> *lb* per amant d'un benefactor
>
> i
>
> *l* † *b* per amant de res altre que benefactor.

s'esdevé en aquest article, només enumerarem les fórmules enunciades per Peirce pertanyents a l'àlgebra de relacions pròpiament dita -amb l'excepció de les fórmules (1) i (4) relatives al complement.

[1] W4 454 (CP 3.331).

[2] W4 455 (CP 3.331).

La primera s'anomena una combinació particular, perquè implica l'*existència* de quelcom *amat per* el seu referent i un *benefactor de* el seu correlat. La segona combinació es diu que és *universal*, perquè implica la *no-existència* de res altre llevat d'allò que és amat pel seu referent o un benefactor del seu correlat. La combinació *lb* s'anomena el producte relatiu, $l \dagger b$ una suma relativa [...] Aquestes dues operacions es defineixen mitjançant les equacions:

$$(lb)_{ij} = \Sigma_x (l)_{ix}(b)_{xj}$$
$$(l \dagger b)_{ij} = \Pi_x \{(l)_{ix} + (b)_{xj}\}.$$[1]

Les lleis enunciades per Peirce referides a la *suma relativa* i el *producte relatiu* són les següents:[2]

6. Si $l \prec s$, llavors $lb \prec sb$

7. Si $l \prec s$, llavors $l \dagger b \prec s \dagger b$

8. Si $b \prec s$, llavors $lb \prec ls$

9. Si $b \prec s$, llavors $l \dagger b \prec l \dagger s$

10. $l \dagger (b \dagger s) = (l \dagger b) \dagger s$

11. $l(bs) = (lb)s$

12. $l(b \dagger s) \prec lb \dagger s$

13. $(l \dagger b)s \prec l \dagger bs$

14. $ls + bs \prec (l + b)s$

15. $l, b \dagger s \prec (l \dagger s), (b \dagger s)$

16. $(l + b)s \prec ls + bs$

17. $(l \dagger s), (b \dagger s) \prec l, b \dagger s$

18. $(l, b)s = \Pi_p \{l(s, p) + b(s, \bar{p})\}$

1 W4 455 (CP 3.332-33).

2 Cf. W4 455-56 (CP 3.332-37).

19. $l(b,s) = \Pi_p\{(l,p)b + (l,\bar{p})s\}$

20. $(l+b) \dagger s = \Sigma_p\{[l \dagger (s+p)], [b \dagger (s+\bar{p}]\}$

21. $l \dagger (b+s) = \Sigma_p\{[(l+p) \dagger b], [(l+\bar{p}) \dagger s]\}$

22. $\overline{l \dagger b} = \bar{l}\bar{b}$

23. $\overline{lb} = \bar{l} \dagger \bar{b}$

24. $\smile{l \dagger b} = \breve{b} \dagger \breve{l}$

25. $\breve{lb} = \breve{b}\breve{l}$

Finalment, Peirce introdueix quatre termes relatius d'especial importància:

> Hi ha només un relatiu que fa que tot objecte es correspongui amb si mateix i amb tots els altres. És l'agregat de tots els parells i es denota per ∞. Es tradueix en el llenguatge corrent per "coexistent amb". El seu negatiu és 0. Hi ha només un relatiu que fa que tot objecte es correspongui amb si mateix i amb cap altre. És
>
> $$(A:A)+(B:B)+(C:C)+\text{etc};$$
>
> És denota per 1 i en llenguatge corrent és "idèntic amb". El seu negatiu, denotat per n és "altre que" o "no".[1]

Així doncs, Peirce distingeix quatre termes relatius que denoten respectivament les quatre relacions següents: la *relació universal*, això és, la relació formada per tots els parells ordenats d'elements pertanyents a l'univers del discurs; la *relació nul·la* o *buida*, el complementari de la relació universal; la *relació d'identitat*, això és, la relació formada per tots els parells ordenats, la primera i segona component del qual són idèntiques i, finalment, la *relació de diversitat*, el complementari de la relació d'identitat. En comptes dels símbols ∞, 0, 1 i n emprats per Peirce per denotar les relacions anteriors, nosaltres utilitzarem els símbols 1, 0, 1' i 0' que, tal com veurem en el capítol següent, són els símbols emprats per Schröder. Les lleis enunciades per Peirce referides a aquestes quatre *relacions distingides* són les següents:[2]

---

[1] W4 457 (CP 3.339).

[2] W4 457-58 (CP 3.341).

$$26.\ x \dagger 1 = 1 = 1 \dagger x$$

$$27.\ x0 = 0 = 0x$$

$$28.\ x \dagger 0' = x = 0' \dagger x$$

$$29.\ x1' = x = 1'x$$

$$30.\ 1' \prec l \dagger \breve{\bar{l}}$$

$$31.\ l\breve{\bar{l}} \prec 0'.$$

Pel que fa a l'"àlgebra de relacions diàdiques" que acaba d'exposar, Peirce observa el següent:

> La lògica de relatius és altament multiforme; es caracteritza per innumerables inferències immediates i per vàries conclusions diferents a partir del mateix conjunt de premisses [...] L'efecte d'aquestes peculiaritats és que aquesta àlgebra no pot subjectar-se a regles estrictes i ràpides com les del càlcul booleà i que tot el que es pot fer aquí és donar una idea general de com treballar amb ella.[1]

Com exemple d'inferència immediata, Peirce posa la inferència de $\forall x \exists y F(x,y)$ a partir de $\exists y \forall x F(x,y)$,[2] i com exemple del fet que, a partir d'un mateix conjunt de premisses, puguin derivar-se diferents conclusions, Peirce posa la inferència, a partir de les premisses:

"Tot home és un amant d'un animal"

i

"Tota dona és un amant d'un no-animal",

de les dues conclusions següents:

---

[1] W4 458 (CP 3.341).

[2] Peirce ho expressa amb la notació del seu deixeble O. Mitchell, que explicarem més endavant.

"Tot home és un amant de quelcom que està amb cada dona en la relació de no ser l'única cosa estimada per ella"

i

"Tota dona és un amant de quelcom que està amb cada home en la relació de no ser l'única cosa estimada per ell".

Aquests exemples són interessants perquè mostren que Peirce veia la lògica de relatius essencialment com un mitjà per representar raonaments que inclouen enunciats quantificats existencialment o universalment. Ja hem explicat abans que havia estat precisament el problema de com expressar de forma adient les proposicions particulars i hipotètiques o condicionals -i Peirce considerava que les proposicions condicionals i universal afirmativa responen a una mateixa forma lògica-, el que havia dut Peirce a estendre l'àlgebra de Boole amb els termes relatius i noves operacions de relatiu (*Cf. supra*, § 4). De fet, una vegada considerats els exemples anteriors, Peirce demostra com poden expressar-se en el marc de la lògica de relatius que acaba d'exposar els diferents tipus d'enunciats quantificacionals que el seu deixeble O. H. Mitchell havia distingit en l'article "On a New Algebra of Logic" (*1883*), amb què aquest autor havia contribuït a l'obra *Studies in Logic* abans esmentada i al qual ara ens referirem breument. L'article de Mitchell comença classificant les proposicions en primàries i secundàries, tal com havia fet Boole. Les primeres fan referència a l'univers dels termes de classe U, de manera que si a i b són dos termes de classe contraris entre si, llavors:

$$a + b = U$$
$$ab = 0.$$

Les segones fan referència, en canvi, a l'univers de relació o "estat possible de coses"∞, de forma que si α i β són dos termes proposicionals contradictoris entre si, llavors:

$$\alpha + \beta = \infty$$
$$\alpha\beta = 0.$$

Una proposició primària podria fer referència a *tots* o *alguns* elements de l'univers de termes de classe i llavors tenim les proposicions *universal* i *particular* de la la lògica tradicional. Tal com ho explica Mitchell:

> Sigui F un polinomi lògic que inclogui termes de classe i els seus negatius, això és, qualsevol suma (producte) de productes (agregats) d'aquests termes. Llavors les següents són respectivament les formes de les proposicions universal i particular:
>
> Tot U és F, denotada aquí per F_1
>
> Algun U és F, denotada per F_u.[1]

Podríem dir, doncs, que Mitchell associa a cada terme F de l'àlgebra de classes dues formes proposicionals: F_1 i F_u, tals que F_1 és vertadera si, i només si, la classe denotada per F és la classe universal i F_u és vertadera si, i només si, la classe denotada per F no és la classe buida, de manera que F_1 i F_u són equivalents als enunciats de la lògica de primer ordre $\exists xFx$ i $\forall xFx$ respectivament. Una de les aplicacions fonamentals d'aquesta notació és que permet expressar les quatre formes proposicionals de la lògica aristotèlica de la següent manera:

$$(\bar{a}+\bar{b})_1 = \text{Tot } U \text{ és } \bar{a}+\bar{b} = \text{Cap } a \text{ és } b$$
$$(ab)_u = \text{Algun } U \text{ és } ab = \text{Algun } a \text{ és } b$$
$$(\bar{a}+b)_1 = \text{Tot } U \text{ és } \bar{a}+b = \text{Tot } a \text{ és } b$$
$$(a\bar{b})_u = \text{Algun } U \text{ és } a\bar{b} = \text{Algun } a \text{ és no } b.$$[2]

El mèrit principal de la notació de Mitchell és que separa nítidament l'expressió quantificada -denotada pels subíndexs 1 i *u*- de l'expressió booleana -denotada pels *predicats* F, G, ...-, car això li permetrà considerar separadament l'aplicació de les operacions booleanes habituals -complement, addició i producte- als subíndexs, als predicats i a les mateixes formes proposicionals F_1 i F_u i estudiar conseqüentment les lleis que governen l'aplicació d'aquestes operacions als uns i als altres. Entre aquestes, Mitchell destaca primer de tot les dues lleis següents que relacionen F_1 i F_u :

$$F_1 + F_u = \infty \qquad (1)$$

[1] *Peirce 1883 (ed.)*, 74.

[2] *Ibid.*, 75.

$$F_1\overline{F}_u = 0 \qquad (2)$$

i, per tant, $\overline{(F_1)} = \overline{F}_u$ (3) o, en notació moderna: $\neg\forall xFx \leftrightarrow \exists x\neg Fx$. A més, F_1 i F_u satisfan cada una d'elles:

$$F_1\overline{F}_1 = 0 \qquad (4)$$

$$F_u + \overline{F}_u = \infty. \qquad (5)$$

Pel que fa a les lleis relatives als subíndexs, Mitchell enuncia les dues lleis següents:

$$F_\varepsilon G_{\varepsilon'} \prec (FG)_{\varepsilon\varepsilon'} \qquad F_\varepsilon + G_\varepsilon \prec (F+G)_{\varepsilon+\varepsilon'},$$

on ε i ε' poden prendre els valors 1 i u, els quals satisfan les lleis següents:

$$\begin{array}{ll} 1+1=1 & 1.1=1 \\ 1+u=u+1=u & 1.u=u.1=u \\ u+u=u & u.u=\text{indefinit.} \end{array}$$

A partir de les lleis relatives als subíndexs i les lleis de l'àlgebra booleana, Mitchell dedueix les següents lleis relatives a la quantificació múltiple:

$$\begin{array}{ll} F_1G_1 = (FG)_1 & F_u + G_u \prec (F+G)_u \\ F_1G_u \prec (FG)_u & F_u + G_1 \prec (F+G)_u \\ F_uG_u \prec \infty & F_1 + G_1 \prec (F+G)_1. \end{array}$$

En la segona part del seu article, Mitchell estudia les proposicions de dues dimensions, anomenades així perquè fan referència a dos universos: l'univers dels termes de classe U i l'univers temporal V. Mitchell introdueix aquest sistema de proposicions de la següent manera:

Posem que U representi, com abans, l'univers de termes de classes i que V representi l'univers de temps. Sigui F una funció polinòmica dels termes de classe a, b, etc. Considerem llavors el següent sistema de sis proposicions:

F_{uv}, que significa "alguna part de U, durant alguna part de V, és F"

F_{u1}, que significa "alguna part de U, durant cada part de V, és F"

F_{1v}, que significa "cada part de U, durant alguna part de V, és F"

$F_{u'1}$, que significa "la mateixa part de U, durant cada part de V, és F"

$F_{1v'}$, que significa "cada part de U, durant la mateixa part de V, és F"

F_{11}, que significa "cada part de U, durant cada part de V, és F".[1]

En les proposicions anteriors, els subíndexs u i v funcionen com a quantificadors existencials i 1 ho fa com a quantificador universal. Si el 1 apareix com a subíndex, aleshores la quantificació universal es llegeix primer, excepte quan precedeix a u' o v' -és a dir, l'ocurrència de u' o v' fa que s'inverteixi l'ordre de quantificació. S'interpretem que el rang dels subíndexs u, v i 1 és únicament i exclusiva l'univers dels termes de classes U, llavors tenim les equivalències següents:

$$F_{uv} = \exists u \exists v F(u,v)$$
$$F_{u1} = \forall u \exists v F(u,v)$$
$$F_{1v} = \forall u \exists v F(u,v)$$
$$F_{u'1} = \exists u \forall v F(u,v)$$
$$F_{1v'} = \exists v \forall u F(u,v)$$
$$F_{11} = \forall u \forall v F(u,v)$$

Veiem així que el sistema de notació de Mitchell permet expressar els anteriors enunciats quantificacionals de la lògica de predicats monàdica i diàdica. Però l'àlgebra de relacions o lògica de relatius de 1883 també és capaç d'expressar aquests mateixos enunciats, tal i com mostra Peirce amb la següent taula d'equivalències -on f és un relatiu general:[2]

$$F_{11} = 0 \dagger f \dagger 0$$
$$F_{1v} = 0 \dagger f 1$$
$$F_{u1} = 1 \dagger f \dagger 0$$

1 *Ibid.*, 87.

2 W4 463 (CP 3.351).

$$F_{1v'} = (0 \dagger f)1$$
$$F_{u'1} = 1(f \dagger 0)$$
$$F_{uv} = 1 \dagger 1.$$

Per veure que aquestes equivalències són correctes comprovem, per exemple, la segona d'elles. Notem, en efecte, que $h(0 \dagger f1)k \leftrightarrow \forall i \exists j(i,j) \in f \wedge (j,k) \in 1 \leftrightarrow \forall i \exists j(i,j) \in f$ i això és precisament el que diu F_{1v}. Veiem, doncs, que Peirce ha aconseguit finalment el seu objectiu de representar mitjançant la lògica de relatius els diferents tipus d'enunciats de la lògica quantificacional monàdica i diàdica i, per extensió, de tots els raonaments que empren aquesta mena d'enunciats. Amb tot, Peirce mostra tot seguit el disgust que li produeix aquesta representació, la qual cosa el duu a trencar de sobte l'exposició de l'*àlgebra de relacions diàdiques* o lògica algèbrica de relacions i a encetar el desenvolupament de l'*àlgebra general de la lògica* o lògica quantificacional. Segons Peirce, en efecte:

> Quan les operacions relatives i no relatives apareixen juntes, les regles del càlcul esdevenen bastant complicades. En aquests casos, així com en aquells que inclouen relacions *plurals* (que es donen entre tres o més objectes) sovint és avantatjós recórrer als coeficients numèrics [...] Una proposició qualsevol és equivalent a dir que algun complex d'agregats i productes d'aquesta mena de coeficients numèrics és més gran que zero. Així,
>
> $$\Sigma_i \Sigma_j l_{ij} > 0$$
>
> significa que algú és l'amant d'algú i
>
> $$\Pi_i \Sigma_j l_{ij} > 0$$
>
> significa que tothom és l'amant d'algú. Amb tot, en escriure la desigualtat, ometrem de forma natural el > 0 amb el qual totes acaben, de manera que les dues proposicions anteriors apareixeran ara com
>
> $$\Sigma_i \Sigma_j l_{ij} \qquad \Pi_i \Sigma_j l_{ij}.$$ [1]

Tal com observa Peirce en el text anterior, les dues primeres expressions li han estat suggerides per l'ús dels coeficients numèrics en la definició dels relatius generals com a sumatoris de parells ordenats. Ja hem explicat, en efecte, que Peirce comença definint un relatiu general *l* a través de l'equació:

[1] W4 464 (CP 3.351).

$$l = \Sigma_i \Sigma_j (l)_{ij} (I : J),$$

però que suprimeix ben aviat l'expressió $(I : J)$ per representar les parelles d'individus de l'univers del discurs que entren en el sumatori i, per tant, defineix els termes relatius com sumatoris dels coeficients numèrics l_{ij}. Per expressar els enunciats existencials, Peirce simplement afegirà l'expressió > 0, de manera que, per exemple, $\Sigma_i \Sigma_j l_{ij} > 0$ significarà, segons Peirce, "existeix algú que és amant d'algú". La idea de Peirce és senzilla: si la suma dels coeficients numèrics l_{ij} és 0, això vol dir que no hi ha cap parella d'individus $(I : J)$ que pertanyi al relatiu general l; si, en canvi, la suma dels coeficients numèrics és més gran que zero, això vol dir que hi ha, com a mínim, una parella d'individus $(I : J)$ que pertany al relatiu general l i, per tant, que algú és l'amant d'algú. Peirce assenyala finalment que podem suprimir l'expressió > 0 per tal d'abreujar. La idea és que si hom afirma una proposició, llavors se sobreentén que el seu valor és "més gran que zero" i, per tant, hom pot suprimir aquesta expressió. Evidentment, l'expressió $\Sigma_i \Sigma_j l_{ij}$ suggereix naturalment una lectura de l_{ij}, ja no com un coeficient numèric, sinó com una constant de predicat o relació en la qual les variables i,j figuren com a subíndexs i, consegüentment, una lectura de Σ_i i Σ_j, ja no pas com a sumatoris dels parells ordenats que pertanyen a la relació, sinó com a quantificadors existencials sobre cada una de les variables de la constant de relació. Com veurem més endavant, aquesta és precisament la interpretació a la qual Peirce arribarà en el seu famós article "On the Algebra of Logic" de 1885, però abans d'estudiar el desenvolupament en aquest article de la lògica quantificacional, convé que ens preguntem perquè Peirce abandonà en l'article "The Logic of Relatives" de 1883 que estem comentant l'àlgebra de relacions en favor d'aquesta. Tal com hem vist abans, Peirce fa referència en dues ocasions en l'article de 1883 a la complicació de les regles de l'àlgebra de relacions, sobretot quan les operacions relatives i no relatives apareixen juntes. Aquestes apreciacions contrasten significativament amb les relatives a la simplicitat de les regles de la lògica quantificacional. Segons Peirce, en efecte:

> Quan tenim un cert nombre de premisses expressades d'aquesta manera, la conclusió es dedueix ràpidament emprant les senzilles regles que segueixen. En primer lloc, tenim
>
> $$\Sigma_i \Pi_j \prec \Pi_j \Sigma_i.$$
>
> En segon lloc, tenim les fórmules

$$\{\Pi_i\, \varphi(i)\}\{\Pi_j\, \psi(j)\} = \Pi_i\{\varphi(i).\psi(i)\}$$
$$\{\Pi_i\, \varphi(i)\}\{\Sigma_j\, \psi(j)\} \prec \Sigma_i\{\varphi(i).\psi(i)\}.$$

> En tercer lloc, donat que els coeficients numèrics són o bé zero o la unitat, el càlcul booleà els és aplicable.[1]

La primera regla diu que a partir de $\exists y \forall x \varphi(x, y)$ hom pot deduir $\forall y \exists x \varphi(x, y)$. Aquesta inferència podria expressar-se en el marc de l'àlgebra de relacions posant $(0 \dagger f)1 \prec 0 \dagger (f1)$. Aquesta fórmula és una instància de la fórmula 13 enunciada més amunt, la importància de la qual ja havia destacada pel propi Peirce en el seu moment. Es tracta, d'una altra banda, de la inferència que Peirce havia posat com exemple de les múltiples inferències immediates que caracteritzen l'àlgebra de relacions i que fan que aquesta "no pugui subjectar-se a regles estrictes i ràpides com les del càlcul booleà" (ja citat, p. 174). Les dues fórmules incloses en la segona regla ja havien estat enunciades per Mitchell i la tercera regla diu simplement que l'expressió booleana d'un enunciat quantificacional pot ser manipulada d'acord amb les regles del càlcul de Boole, la qual cosa ja havia estat observada també per Mitchell. Tal com veurem més endavant, el mètode presentat per Peirce en l'article "On the Algebra of Logic" de 1885 és més complet i sistemàtic, però essencialment les seves regles estan encaminades a conseguir posar en forma normal qualsevol enunciat quantificacional, de manera que tots els quantificadors figurin al començament de l'enunciat i l'expressió booleana al final de la mateixa (*Cf. infra*, § 10). Tant els quantificadors com la part booleana estaran sotmesos a determinades regles de manipulació -les mateixes regles de l'àlgebra de Boole en el cas de la part booleana- i les operacions de relatiu hauran desaparegut definitivament. Aquesta simplicitat dels mètodes propis de l'àlgebra general de la lògica o lògica quantificacional enfront dels de l'àlgebra de relacions per tal de resoldre els problemes lògics serà novament subratllada per Peirce en l'article "The Logic of Relatives" (*1897*):

> A més de l'algebra que acabo de descriure [l'àlgebra de relacions diàdiques] n'he inventat una altra que em sembla molt més valuosa [...] En aquesta àlgebra cada proposició consisteix de dues parts, els seus quantificadors i la seva part booleana. La part booleana consisteix en un cert nombre de relatius units per una agregació i multiplicació no relatives. No es requereix cap operació de relatiu (encara que poden ser introduïdes si es vol) [...] A l'esquerra de la part booleana s'escriuen els quantificadors. Cada un d'aquests és un Π o Σ amb un dels índexs escrit de forma

[1] W4 465 (CP 3.355).

subjacent a ell, per tal d'indicar que en la part booleana s'ha d'imaginar que cada objecte de l'univers se substitueix successivament per aquell índex i que es pren el producte no relatiu (si el quantificador és Π) o l'agregat (si el quantificador és Σ) [...] Aquesta àlgebra, que no té sinó dues operacions, és, segons el meu parer, l'instrument més convenient per a l'estudi dels problemes lògics [...] encara que [...] no excloc disposar jo mateix de l'àlgebra de relatius diàdics en els casos més simples en què és fàcilment manejable.[1]

En definitiva, la multitud de regles de l'àlgebra de relacions feia que aquesta aparegués als ulls de Peirce com extremadament complicada i poc útil per enfrontar-se als problemes de la lògica deductiva, tot just al contrari de l'àlgebra general de la lògica que Peirce trobava, degut a la simplicitat dels seus mètodes, més adient per enfrontar-se als problemes esmentats. Ara bé, juntament amb aquests avantatges de tipus deductiu que presentava la lògica quantificacional enfront de l'àlgebra de relacions, cal esmentar també el que podríem anomenar avantatges de tipus expressiu. Ja hem vist abans que Peirce esmentava en l'article de 1883 sobre la lògica de relatius que en aquells casos "que inclouen relacions plurals (que es donen entre tres o més objecte) sovint és avantatjós recórrer als coeficients numèrics" (ja citat). Com ja sabem, en efecte, Peirce havia intentat en l'article "Notation for the Logic of Relatives" de 1870 estendre l'àlgebra de Boole no només als termes relatius simples, sinó també als termes conjugatius o, com diu ara, als relatius plurals. Amb tot, Peirce no havia reeixit en el seu intent, donades les complicacions que suposava l'extensió als termes conjugatius de les operacions de relatiu. Ja havíem vist, per exemple, les dificultats que li plantejava l'extensió del producte relatiu als termes conjugatius, entre les quals destacava especialment la no associativitat d'aquesta operació en ser aplicada a aquesta mena de termes (*Cf. supra*, § 4). Així mateix, en l'article "Brief Description of the Algebra of Relatives" de 1882, Peirce assenyalarà també que "corresponent a l'operació de fer la conversa d'un relatiu dual, hi ha cinc operacions sobre els relatius triples. Es defineixen com segueix:

$$(Ix)_{ijk} = (x)_{ijk},\ (Jx)_{ijk} = (x)_{ikj},\ (Kx)_{ijk} = (x)_{kji},\ (Lx)_{ijk} = (x)_{jki},\ (Mx)_{ijk} = (x)_{kij}\text{''}^{2}$$

[1] CP 3.499-502.
[2] W4 332 (CP 3.317).

Aquesta mena de complicacions dificulten naturalment la construcció d'un sistema algèbric les lleis del qual puguin donar raó d'una forma uniforme i sistemàtica de les propietats de les operacions entre termes relatius de diferent aritat. A banda d'això, la introducció dels termes relatius conjugatius augmenta de forma considerable la possibilitat de construir enunciats quantificacionals en què un o més quantificadors es refereixin de forma múltiple a un mateix individu, això és, del que s'anomena habitualment *referència múltiple* d'un quantificador. Ja hem vist, per exemple, les dificultats que plantejava a Peirce l'expressió de l'enunciat "donant d'un cavall a un amo d'aquell cavall" en el marc de l'àlgebra de relacions presentada en l'article de 1870 (*Cf. supra* § 4). En canvi, la majoria d'exemples dels articles "The Logic of Relatives" de 1883 i "On the Algebra of Logic" de 1885 són d'enunciats en què hi figuren termes relatius simples i, particularment, termes conjugatius i en els quals hi ha una referència múltiple dels quantificadors sobre alguns dels seus índexs. Així, en l'article de 1883, Peirce posa el següent exemple:

> Posem que α denota el relatiu triple "acusador a --- de --- " i ε el relatiu triple "exculpador a --- de --- ". Llavors,
>
> $$\Sigma_i \Pi_j \Sigma_k (\alpha)_{ijk} (\varepsilon)_{jki}$$
>
> significa que pot trobar-se un individu *y* tal que si prenem un individu qualsevol *j*, sempre serà possible seleccionar un tercer individu *k*, tal que *i* és un acusador a *j* de *k*, i *j* un exculpador a *k* de *i*.[1]

És significatiu també que alguns dels exemples emprats en els articles de 1883 i 1885 abans esmentats per demostrar la capacitat expressiva de l'àlgebra general de la lògica siguin enunciats en l'expressió booleana dels quals hi apareixen termes relatius de diferents aritat -termes absoluts, relatius simples o conjugatius, en la terminologia de l'article de 1870-,[2] car això mostra la importància que Peirce atorgava al fet que l'àlgebra general de la lògica fos capaç d'expressar uniformement enunciats quantificacionals en què es combinen predicats de diferent aritat. Aquest fet, juntament amb el fet que les operacions de relatiu també són expressables en termes de l'àlgebra de la lògica, havien de constituir als ulls de Peirce signes evidents no solament de la potència expressiva, sinó també del caràcter sistemàtic i uniforme, de l'àlgebra general de la lògica.

---

1 W4 465 (CP 3.353).

2 *Cf.* W4 464-65, W5 180-81 (CP 3.352, 3.394).

9. La lògica deductiva de 1885

L'article "On the Algebra of Logic" de 1880 acaba amb l'epígraf "To be continued ..." i, tal com demostren els manuscrits escrits en el període 1880-84, publicats en el volums 4 i 5 de *Writings of Charles S. Peirce: A Chronological Edition* (*Peirce1982-*), aquest autor treballà al llarg de tot aquest període en una segona part d'aquell article. Amb tot, tal com s'assenyala en la introducció del cinquè volum de l'edició cronològica dels escrits de Peirce, a finals de 1884 Peirce "ja estava preparat per relegar tota referència a l'escrit anterior a un nota a peu de pàgina en el que havia de ser la seva obra més influent en lògica".[1] Aquest obra és l'article "On the Algebra of Logic. A Contribution to the Philosophy of Notation" (*1885*), aparegut també a la revista *American Journal of Mathematics* el febrer de 1885. No hi ha dubte, en efecte, que aquest article de 1885 és el treball més important en lògica de Peirce, car en ell hi podem trobar: l'afirmació explícita que les proposicions només poden ser vertaderes o falses, la definició semàntica de les operacions lògiques fonamentals, el desenvolupament d'un càlcul deductiu i d'un mètode per decidir la validesa de les fórmules i la correcció dels arguments, l'intent de desenvolupar el càlcul proposicional a partir d'una única operació, la introducció dels quantificadors en el sentit modern i de la forma normal prenexa, una distinció clara entre la lògica de primer i segon ordre i la definició en el marc d'aquesta última d'algunes nocions bàsiques de les matemàtiques. L'article en qüestió està dividit en quatre paràgrafs o capítols. El primer es titula "Tres tipus de signes" i en ell Peirce explica la seva filosofia de la notació o semiòtica; el segon capítol es titula "Lògica no relativa", però, tal com veurem, està molt més relacionat amb l'*àlgebra de la còpula* de 1880 que no pas amb la lògica no relativa exposada allí. En el tercer i quart capítol, Peirce exposa la seva "àlgebra general de la lògica" o lògica quantificacional. En concret, el tercer capítol es titula "Lògica de relatius de primera intenció" i en ell exposa la lògica de primer ordre, mentre que el quart capítol es titula "Lògica de relatius de segona intenció" i en ell exposa la lògica de segon ordre. En aquesta secció estudiarem els dos primers capítol de l'article de Peirce i en les dues següents explicarem el tercer i quart capítol respectivament.

En el primer capítol d'"On the Algebra of Logic" de 1885, Peirce enuncia la tesi segons la qual un "sistema perfecte de notació lògica",[2] això és, "un àlgebra adequada per al

---

1 W5, xxvii.

2 W5 163 (CP 3.363).

tractament de tots els problemes de la lògica deductiva"[1] ha d'emprar els tres tipus de signes següents: *símbols*, *índexs* i *icones*.[2] Aquesta tesi suposa una notable novetat respecte a la tesi mantinguda en els seus primers escrits, segons la qual només els *símbols* són d'interès per a la lògica, i durà evidentment a una redefinició de la naturalesa mateixa de la lògica. Així doncs, per entendre correctament l'àlgebra lògica de 1885, cal explicar prèviament la *filosofia de la notació* -és a dir, la semiòtica o teoria dels signes- a partir de la qual introdueix els diferents tipus de signes necessaris per al desenvolupament d'aquella. D'acord amb Peirce, un signe es caracteritza per estar "en una relació conjunta entre la cosa denotada i la ment".[3] Si aquesta relació *no* és *degenerada*, el signe està relacionat amb el seu objecte només com a conseqüència d'una associació mental i depèn d'un hàbit. A aquesta mena de signes Peirce els anomena *símbols* o *senyals* [*tokens*]. Els *símbols* representen sempre de forma genèrica els elements als qual es refereix el nostre discurs i són, en general, convencionals o arbitraris. D'aquesta mena són, per exemple, els noms comuns del llenguatge quotidià o les lletres de l'àlgebra aplicada. Si la triple relació entre objecte, signe i ment és *degenerada*, consistirà en una simple combinació de, com a mínim, dues de les tres relacions duals següents: signe-objecte, signe-ment i objecte-ment. D'aquestes tres relacions, sempre s'ha de donar la primera perquè "si el signe no estigués relacionat amb el seu objecte excepte per la ment pensant en ells separadament, no compliria en absolut la funció d'un signe".[4] Doncs bé, si la relació signe-objecte no descansa en una associació mental, hi ha d'haver una relació directa, una connexió real entre el signe i l'objecte independent de la ment. Quan això s'esdevé el signe s'anomena un *índex*. Els *índexs* denoten o *indiquen* els diferents elements als quals es refereix el nostre discurs. D'aquesta mena són els pronoms relatius o demostratius del llenguatge quotidià o les lletres x, y, z, etc, que apareixen en les fórmules generals de l'àlgebra i que són com espais en blanc que cal omplir amb símbols, és a dir, són índexs de símbols. Però la relació entre signe i objecte pot consistir també en una mera versemblança entre ells. Una *icona* és precisament "un signe que representa quelcom simplement perquè s'hi assembla".[5] Les *icones* són, d'acord amb Peirce, necessàries per a l'expressió dels processos de raonament que es donen en les diverses ciències, en la mesura que raonar significa essencialment descobrir noves relacions a partir d'altres relacions ja

1 W5 165 (CP 3.364).
2 *Cf.* W5 163 (CP 3.363).
3 W5 162 (CP 3.360).
4 W5 163 (CP 3.361).
5 W5 163 (CP 3.362).

conegudes i aquest fet s'ha de mostrar en una *icona* o diagrama, "les relacions entre les parts del qual mostraran una completa analogia amb aquelles [relacions] entre les parts d'allò que constitueix l'objecte del raonament".[1] Així, en la lògica deductiva les *icones* representaran "els diferents tipus d'inferència necessària",[2] els quals representen analògicament el diferents tipus de raonament dels quals donen raó. Un altre exemple de la utilització d'*icones* és el del raonament algèbric, en el qual hom manipula fórmules guiat per unes fórmules generals -les lleis commutativa, distributiva, etc- que "són patrons als quals tenim el dret d'imitar en el nostre procedir, i són les *icones par excellence* de l'àlgebra".[3] Segons Peirce, tots els signes utilitzats per desenvolupar l'àlgebra lògica de l'article de 1885 pertanyen a una de les categories anteriors. Així, els signes que representen determinades proposicions i la *còpula*, únic signe de relació considerat, són els *símbols* de l'àlgebra lògica. La juxtaposició de lletres a una i altra banda del signe d'operació i els parèntesis, en la mesura que indiquen la connexió de símbols, compleixen la funció d'*índexs*. També les lletres x, y, z, etc, emprades en les fórmules generals són *índexs* de símbols i les lletres α, β, etc, "que són índexs de no importa quins símbols, emprades per expressar la negació".[4] Finalment, les fórmules generals mateixes són *icones* o "exemplars de procediments algèbrics", és a dir, les formes d'inferència de l'àlgebra lògica. Remarquem, doncs, que en l'article "On the Algebra of Logic" de 1885 resta per especificar sota quina categoria de signes cauen els quantificadors i els subíndexs, que són els signes específics de la lògica de primer i segon ordre. Tal com veurem més endavant, això durà Peirce a introduir una nova anàlisi de les proposicions i a elaborar el que anomena *interpretació pragmàtica* dels seus components (*Cf. infra*, §§ 13 i 14).

Una vegada exposats els trets essencials de la filosofia de la notació peirciana, podem centrar-nos ja en el desenvolupament de la lògica no relativa. Peirce afirma, en primer lloc, que:

> D'acord amb la lògica ordinària, una proposició és o bé vertadera o bé falsa, i no es reconeix cap distinció ulterior. Aquesta és la concepció descriptiva, com diuen els geòmetres; la concepció mètrica seria que tota proposició és més o menys falsa, i

[1] W5 164 (CP 3.363).
[2] W5 165 (CP 3.364).
[3] W5 165 (CP 3.363).
[4] W5 174 (CP 3.385). Tal com veurem més endavant, de la interpretació d'aquests índexs en depèn en bona mesura la interpretació de la lògica deductiva de 1885.

que aquesta és una qüestió de quantitat [*amount*]. En el moment present nosaltres adoptem el primer punt de vista.[1]

Partint, a més, de la hipòtesi que podem representar totes les proposicions mitjançant *quantitats* i considerant **v** i **f** com a dos valors constants, llavors **v** serà el valor de la quantitat que representa una proposició si aquesta és vertadera i **f** el valor de la quantitat si la proposició és falsa. Així, assenyala Peirce, "si x és una proposició, el fet que x és o bé vertadera o bé falsa s'escriu

$$(x - \mathbf{f})(\mathbf{v} - x) = 0$$

Així,

$$(x - \mathbf{f})(\mathbf{v} - y) = 0$$

significarà que x és falsa o y és vertadera. Això podríem dir que és el mateix que "si x és vertadera, y és vertadera"".[2] Notem, en efecte, que si en les dues equacions anteriors substituïm **v** per 1 i **f** per 0 tenim

$$x(1 - x) = 0$$

i

$$x(1 - y) = 0.$$

D'acord amb la interpretació booleana de les equacions anteriors -que sembla la correcta pel context i perquè no se'n especifica altra-, en el marc de la teoria de les

---

1 W5 166 (CP 3.365). Ara bé, l'adopció d'aquest punt de vista no permet afirmar que Peirce el considerés com el "correcte" en detriment de l'altre punt de vista. De fet, Peirce mostra en més d'un indret la seva afecció a la concepció mètrica abans esmentada i no hi ha dubte que aquest interès està íntimament relacionat amb el desenvolupament de les matrius trivalents, que estudiarem més endavant. Probablement, Peirce adoptà en aquest i altres articles la concepció mètrica enfront de la descriptiva simplement perquè considerava que facilitava el desenvolupament formal de la lògica -de forma semblant al que s'esdevé amb l'adopció del condicional filònic enfront de l'ordinari o diodorià (*Cf. supra*, § 5).

2 W5 166 (CP 3.366).

proposicions secundàries, la primera equació "expressa l'axioma "Una proposició no pot ser a la vegada falsa i vertadera"",[1] és a dir, la llei de dualitat o el principi de contradicció. Però per les lleis de De Morgan i doble negació, aquesta proposició és equivalent a "x és falsa o x és vertadera" -és a dir, el principi de terç exclòs. D'una altra banda, com ja sabem, la segona equació és emprada pel mateix Boole per expressar les proposicions condicionals. En qualsevol cas, tal com assenyala Peirce:

> Aquesta notació mostra un defecte en el sentit que expressa les proposicions de dues maneres diferents, en la forma de quantitats i en la forma d'equacions; i les quantitats són de dues classes, a saber, aquelles que han de ser iguals a **f** o **v** i aquelles que són iguals a *zero*. Per evitar això, renunciarem a l'ús d'equacions i no operarem amb altres operacions que aquelles que puguin donar lloc a qualssevol valors diferents que **f** i **v**.[2]

D'acord amb Peirce, per al desenvolupament de la lògica no relativa només seran necessàries dues operacions: la *negació* i el *condicional*. Segons Peirce, en efecte:

> D'operacions sobre variables simples només en necessitarem una. Car només hi ha dues coses que es puguin dir sobre una sola proposició per si mateixa; que és vertadera i que és falsa,
>
> $$x = \mathbf{v} \quad \text{i} \quad x = \mathbf{f}.$$
>
> La primera equació s'expressa per la mateixa lletra x, la segona per una funció ϕ qualssevol que satisfaci les condicions
>
> $$\phi\mathbf{v} = \mathbf{f} \qquad \phi\mathbf{f} = \mathbf{v}.$$
>
> La solució més senzilla d'aquestes equacions és
>
> $$\phi x = \mathbf{f}+\mathbf{v}-x.$$[3]

Pel que fa al condicional, Peirce escriu que:

> Ja he mostrat en un altre lloc que el mode fonamental i primari de relació entre dues proposicions és aquell que hem expressat mitjançant la fórmula
>
> $$\mathbf{v}-\frac{(x-\mathbf{f})(\mathbf{v}-y)}{\mathbf{v}-\mathbf{f}}.$$

---

[1] *Boole 1854*, 184.

[2] W5 167 (CP 3.368).

[3] W5 167 (CP 3.369). Notem que la darrer equació és equivalent a $\phi x = \mathbf{v}-x$.

Escriurem això

$$x \prec y,$$

que també és equivalent a

$$(x - \mathbf{f})(\mathbf{v} - y) = 0.$$[1]

Però d'acord amb el que s'ha dit abans, encara que Peirce no ho esmenti, aquesta última expressió és imperfecte, donat que en ella hi figuren *quantitats* de dues classes. En canvi, l'equació

$$\varphi xy = \mathbf{v} - \frac{(x - \mathbf{f})(\mathbf{v} - y)}{\mathbf{v} - \mathbf{f}}$$

és equivalent a $\varphi xy = \mathbf{v} - x(1 - y)$, la qual té l'avantatge de poder-se interpretar directament -donat que no hi ha cap fracció- i de no incloure altres valors que **v** i **f**. Sigui com sigui, un cop determinada la semàntica de les operacions fonamentals -negació i condicional- mitjançant les equacions ja estudiades, Peirce introdueix les diferents *icones* mitjançant les quals es vol formalitzar la deducció lògica. Com hem explicat abans, les tres primeres *icones* són les fórmules (1), (3)' i (5)' que hem destacat en la nostra anàlisi de l'article "On the Algebra of Logic" de 1880 (*Cf. supra*, § 5), però és interessant veure com Peirce les introdueix de nou en l'article de 1885. Peirce introdueix les dues primeres icones de la següent manera:

> La *primera icona* de l'àlgebra està continguda a la fórmula d'identitat
>
> $$x \prec x. \qquad (1)$$
>
> Aquesta fórmula no justifica per ella mateixa cap transformació, cap inferència [...]
>
> La *segona icona* està continguda a la regla segons la qual diversos antecedents d'una *consequentia* poden ser transposats; això és, que de
>
> $$x \prec (y \prec z)$$
>
> podem passar a
>
> $$y \prec (x \prec z).$$
>
> Això s'enuncia en la fórmula

[1] W5 169 (CP 3.373). Peirce es refereix segurament a la primera part de l'article "On the Algebra of Logic" de 1880.

$$\{(x \prec (y \prec z)\} \prec \{y \prec (x \prec z)\}.$$[1] (2)

Com podem observar, doncs, Peirce introdueix les dues primeres *icones* de forma molt semblant a com havia introduït en l'article de 1880 les fórmules (1) i (2). Segons Peirce, substituint a la primera *icona* x per $x \prec y$, hom obté per (2) la fórmula:

$$x \prec \{(x \prec y) \prec y\}, \qquad (6)$$

la qual representa, segons Peirce, "el modus ponens de la inferència hipotètica i és la forma més rudimentària de raonament".[2] Notem, doncs, que per deduir la fórmula (6) en la manera que sembla indicar Peirce es requereixen les *regles* de *substitució* i *modus ponens* i, per tant, no hem d'entendre la fórmula en qüestió com una regla del càlcul, sinó com una fórmula demostrada en ell. A partir de les dues primeres *icones* Peirce dedueix també la fórmula

$$x \prec (y \prec x), \qquad (7)$$

però la derivació és incorrecte, car el raonament de Peirce és el següent: "Dir que $(x \prec x)$ és generalment vertadera és dir que ho és en tot estat de coses, diguem en aquell en què y és vertadera. Així, podem escriure

$$y \prec (x \prec x)$$

i llavors per transposició dels antecedents,

$$x \prec (y \prec x),$$

o de x podem inferir $y \prec x$".[3] Veiem, doncs, que en la deducció de (7), Peirce utilitza la regla segons la qual, quan a és vertadera, podem escriure $x \prec a$ per qualsevol x, però la fórmula (7) expressa precisament aquesta regla! De fet, veurem ben aviat que Peirce dóna per

1 W5 170-71 (CP 3.376-77).
2 W5 171 (CP 3.377).
3 W5 171 (CP 3.378).

suposada aquesta regla i introdueix la quarta *icona* com una regla semblant a aquesta. Hom podria, doncs, considerar la fórmula (7) com un nova *icona*, però, tal com explicarem després, les *icones* proposades per Peirce constitueixen una base suficient per al càlcul proposicional clàssic i, per tant, l'afegit d'aquesta icona seria superflu. La *tercera icona* s'enuncia mitjançant la fórmula

$$(x \prec y) \prec \{(y \prec z) \prec (x \prec z)\} \qquad (3)$$

Segons Peirce, a partir de (7) i $(y \prec x) \prec z$ se segueix per (3) la fórmula $x \prec z$. Tenim, per tant:

$$\{(y \prec x) \prec z\} \prec (x \prec z). \qquad (8)$$

Mitjançant les tres primeres *icones* hom pot deduir les fórmules fonamentals que expressen els trets característics del signe d'operació $\prec$. Per deduir les fórmules mitjançant les quals s'expressen els trets característics de la negació, s'introdueixen dues noves *icones*. Segons Peirce, en efecte, "hem d'ampliar ara la notació per introduir la negació. Ja hem vist que si a és vertadera, podem escriure $x \prec a$, qualsevol que sigui x. Sigui b tal que podem escriure $b \prec x$ qualsevol que sigui x. Llavors b és falsa. Tenim aquí una quarta *icona* que dóna un sentit nou a diverses fórmules".[1] A. N. Prior identifica aquesta quarta *icona* amb l'axioma

$$\perp \prec y \qquad (4)'$$

on $\perp$ és una constant que denota el fals i afirma que Peirce "en la seva teoria de la negació, està emprant alhora el fet que allò que es fals implica qualsevol cosa ("Sigui b tal que podem escriure $b \prec x$ qualsevol que sigui x. Llavors b és fals") i la definició de la negació com la implicació d'allò que és fals",[2] però, com explicarem després, aquesta interpretació no sembla la més correcta. Finalment, assenyala Peirce:

---

1 W5 172 (CP 3.381).

2 *Prior 1958*, 136.

Es requereix una cinquena icona pel principi del terç exclòs i altres proposicions relacionades amb ell. Una de les fórmules més simples d'aquesta mena és

$$\{(x \prec y) \prec x\} \prec x. \qquad (5)$$

Aquesta fórmula a penes és axiomàtica [...]

De la fórmula que acabem de donar obtenim de seguida

$$\{x \prec y) \prec a) \prec x, \qquad (5)'$$

on a s'utilitza en un sentit tal que $(x \prec y) \prec a$ significa que de $(x \prec y)$ se'n segueix qualsevol proposició. Així entesa, la fórmula enuncia el principi de terç exclòs, a saber, que de la falsedat de la negació de x se'n segueix la veritat de x.[1]

La cinquena *icona* és l'anomenada avui en dia *llei de Peirce* i els comentaris que segueixen la introducció d'aquesta *icona* semblen un esquema de la demostració del principi de terç exclòs a partir d'ella. Però la naturalesa de la cinquena *icona* i la reconstrucció d'aquesta prova és difícil degut a la parquedat de Peirce. A. N. Prior considera la fórmula (5) com la cinquena icona o axioma i interpreta a com una constant que denota el fals. I a partir de (5) demostra (5)', tal com sembla suggerir Peirce, d'on se segueix immediatament el principi de terç exclòs. En efecte, aplicant *modus ponens* sobre (2) i (3) (substituint de forma adient) tenim

$$(y \prec z) \prec \{(x \prec y) \prec (x \prec z)\}. \qquad (13)$$

Per (13) -substituint x per $x \prec y$, y per $\perp$ i z per x-, (4) i *modus ponens* tenim

$$((x \prec y) \prec \perp) \prec ((x \prec y) \prec x). \qquad (14)$$

Per (3) -substituint x per $(x \prec y) \prec \perp$, y per $(x \prec y) \prec x$ i z per x-, (14) i *modus ponens* tenim

$$\{((x \prec y) \prec x) \prec x\} \prec \{((x \prec y) \prec \perp) \prec x\}, \qquad (15)$$

---

[1] W5 173-74 (CP 3.384).

que junt amb (5) ens dóna per *modus ponens* (5)', i substituint aquí y per $\perp$ obtenim finalment

$$\bar{\bar{x}} \prec x. \qquad (16)$$

D'acord amb un resultat de Wajsberg, les fórmules (3), (4)', (5) i (7) junt amb les regles de *substitució* i *modus ponens* són suficients per derivar el càlcul proposicional clàssic. Això permetria considerar que (1), (2), (3), (4)' i (5) són suficients en aquest sentit, si no fos perquè la demostració de (7) a partir de (1) i (2) que duu a terme Peirce és, tal com ja hem vist, incorrecte. En qualsevol cas, els axiomes anteriors constitueixen una base suficient per al càlcul proposicional clàssic donat que, tal com explica A. N. Prior, d'acord amb un resultat menys conegut de Wajsberg, (3), (4)', (5) i (6) junt amb les regles de *substitució* i *modus ponens* són suficients per demostrar totes les fórmules vàlides del càlcul proposicional clàssic i que, segons Prior, Peirce demostra (6) a partir de (1), (2) per *substitució* i *modus ponens*. A. N. Prior ha demostrat també que els axiomes (2), (3), (4) i (5) són independents l'un respecte a l'altre però que, en canvi, l'axioma (1) no ho és. Considerem a tal efecte les següent matrius per a la còpula

		(2)	(3)	(4)	(5)
x	y	$\prec$	$\prec$	$\prec$	$\prec$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1
0	2	1	1	2	1
1	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1
1	2	1	1	2	2
2	0	0	1	0	0
2	1	0	1	1	1
2	2	1	1	1	1

on 1 és l'element designat. Tenim llavors que les matrius amb els nombres (2), (3), (4) i (5) a dalt, fan falsos aquests axiomes si assignem a les seves variables els següents valors de veritat: $x = 0$, $y = 2$, $z = 2$ a (2); $x = 1$, $y = 2$, $z = 0$ a (3); $y = 2$ a (4) i $x = 2$, $y = 0$ a (5). Per contra, cada una d'aquestes matrius fa sempre vertaders la resta d'axiomes, amb la qual cosa

queda provada la seva independència mútua. En canvi, (1) no és independent de la resta, donat que a partir de (2), per *modus ponens* aplicat sobre si mateix, obtenim

$$y \prec \{(x \prec (y \prec z)) \prec (x \prec z)\},$$

i, d'acord amb un resultat de Łukasiewicz, a partir de (3), (5) i qualsevol altra fórmula de la forma $x \prec (\alpha \prec \beta)$ com l'anterior, se segueixen tots els teoremes del càlcul purament implicatiu i, per tant, també (1).

Fins ara hem seguit de forma acrítica el que podríem anomenar la interpretació clàssica de la lògica no relativa presentada per Peirce en el seu article de 1885, que consisteix fonamentalment a interpretar-la com un sistema deductiu o logístic, amb els seus axiomes i regles d'inferència perfectament distingits. Ara bé, aquesta interpretació no és, des del nostre punt de vista, la que reflecteix de forma més fidedigna l'esperit ni la lletra de l'article de Peirce. En primer lloc, perquè interpreta les *icones* com axiomes del càlcul. Ara bé, tal com hem vist abans, Peirce no entenia les *icones* com axiomes, sinó com esquemes o diagrames que representen "els diferents tipus d'inferència necessària" i, per tant, sembla més indicat identificar-los amb esquemes que representen regles d'inferència. A més, el fet d'interpretar les *icones* com axiomes fa que sigui necessari afegir a les *icones* enunciades explícitament per Peirce, les regles de *substitució* i *modus ponens*. Peirce no enuncia mai la regla de *substitució* com a tal regla i, de fet, la seva comprensió de les *icones* com esquemes o diagrames que representen les diferents formes d'inferència mediata o immediata fa innecessari l'enunciat d'aquesta regla. Pel que fa al *modus ponens*, tant en l'article "On the Algebra of Logic" de 1880 com en l'article homònim de 1885, Peirce el dedueix a partir de les dues primeres icones i, per tant, no el podia considerar una *icona* o una regla d'inferència primitiva. En realitat, el fet que a l'article de 1885 l'obtingui i l'enunciï com un teorema més del càlcul és prou significatiu del fet que cal entendre les *icones* i les *fórmules* en general com representants de formes d'inferència i que, en definitiva, no és aplicable als sistemes deductius presentats per Peirce en els articles de 1880 i 1885 la distinció habitual entre axiomes, regles i teoremes. De fet, donada la gran semblança entre els textos dels articles de 1880 i 1885 i el fet que en aquest darrer article Peirce interpreti efectivament la fórmula (6) com la regla de *modus ponens*, fa pensar que Peirce interpretava també en aquest article les icones (1) i (2) de forma anàloga a com havia interpretat en l'article de 1880 les fórmules corresponents i que pensava en una demostració de (6) anàloga a la de 1880. D'una altra banda, des del nostre punt de vista, la interpretació que fa Prior de la quarta i cinquena *icones* i, en general, de la forma com Peirce entén la negació és essencialment errònia i no resisteix l'anàlisi textual de l'article de 1885. Pel que fa a la quarta *icona*, la interpretació que en fa Prior és errònia perquè Peirce en ambdós articles no entén la negació com la implicació d'una constant falsa, sinó com la implicació d'una proposició qualsevol, que ara denota amb els índexs α, β, etc, de manera que, donada una proposició x qualsevol, $\bar{x}$ és equivalent a $x \prec \alpha$ (recordem que Peirce ha introduït prèviament les lletres α, β, etc, com "índexs de no importa quins símbols, emprades per expressar la negació"). En segon lloc, i íntimament relacionat amb l'anterior, perquè Peirce utilitza aquesta icona per donar una nova interpretació a fórmules ja demostrades, que assoleix substituint en aquestes fórmules les subfórmules que són implicacions del tipus $b \prec x$, on x és una proposició qualsevol, per $\bar{b}$. En aquest sentit, la quarta icona s'ha d'interpretar més aviat com una regla que explicita el procediment utilitzat en els articles de 1880 i 1885 per introduir la negació, que no pas com un axioma pròpiament dit. Gràcies a la quarta icona, en efecte, Peirce reinterpreta la fórmula (2) com:

$$(x \prec \bar{y}) \prec (y \prec \bar{x}), \qquad (9)$$

la fórmula (6) com:

$$x \prec \bar{\bar{x}}, \qquad (10)$$

és a dir, el *principi de contradicció*. I la fórmula (3) com:

$$(x \prec y) \prec (\bar{y} \prec \bar{x}) \qquad (11)$$

i també, assenyala Peirce, com el *modus tollens* que podem expressar mitjançant la fórmula

$$\{(x \prec y) \prec \bar{y}\} \prec \bar{x},^{1} \qquad (12)$$

encara que, per deduir aquesta fórmula de l'anterior, necessitaríem una regla com ara (2) de 1880 que expressés la propietat de deducció, però Peirce no introdueix explícitament en

[1] Cf. W4 172-73 (CP 3.381-383).

aquest article cap regla d'aquesta mena. D'acord amb tot l'anterior, sembla més adient reformular la quarta *icona* com la regla R^n_{Min}, proposada a tal efecte per E. Żarnecka-Biały en l'article "Negation in Ch. S. Peirce's Propositional Logic" (*1973*):

> Sigui *Subf* $\{a, x_i \prec y\}$ un conjunt de subfórmules de la fórmula a tal que: *i*) totes elles -tenint $x_1 \ldots x_i$ respectivament com antecedents- tenen el mateix conseqüent y; *ii*) no hi ha altres ocurrències de y en a, excepte com a conseqüents a les implicacions $x_1 \prec y, \ldots, x_i \prec y$.
>
> Sigui $a\,(x_i \prec y\,/\,\bar{x}_i)$ el resultat de reemplaçar en a tota implicació de la classe *Subf* $\{a, xi \prec y\}$ $(i \in \{1, \ldots, i\})$ per la fórmula $\bar{x}_i$. La regla R^n_{Min} pot formular-se ara en la forma:
>
> R^n_{Min} Si $\therefore$ a, llavors $\therefore$ $a(x_i \prec y\,/\,\bar{x}_i)$.[1]

El mateix s'esdevé amb la cinquena icona. Una perspectiva que permet evitar considerar a com una constant falsa és donar entrada a una segona regla per a la introducció de la negació, considerant (5)' i els comentaris que l'acompanyen com una explicació d'aquesta regla. Aquest és el punt de vista de Żarnecka-Biały, que opta per introduir la regla R^n_{Cl} que permet demostrar el principi de terç exclòs a partir de la cinquena icona. Segons aquesta autora, en efecte:

> La regla R^n_{Cl} es formularà com una regla relacionada amb una de les regles de Gentzen per a l'eliminació dels signe d'implicació:
>
> R^n_{Cl} *Si* $\therefore$ $(x \prec y) \prec z$, *llavors* $\bar{x} \prec z$,
>
> la qual ha estat reconstruïda en base a les consideracions generals de Peirce sobre la implicació […] i en base a l'anàlisi de la seva demostració de $\bar{\bar{x}} \prec x$.[2]

Notem efectivament que, aplicant la regla anterior sobre (5) tenim la *consequentia mirabilis*, això és, "si la negació de *x* implica *x*, llavors *x*", i aplicant-la de nou tenim el principi de *terç exclòs*. Tenint en compte el que acabem de dir, Żarnecka-Biały reconstrueix la lògica deductiva de l'article de 1885 en base als axiomes A1 i A2 -les icones (1) i (5)

---

1 *Żarnecka-Biały 1973*, 99.
2 *Ibid.*, 100.

respectivament, donat que les icones (2) i (3) són superflus si el concepte de prova es defineix de forma estandard- i les regles *Ded*, R^n_{Min} i R^n_{Cl}, justificant la introducció de la regla de deducció -*Ded*- a partir del fet que Peirce utilitza aquesta regla en diferents fragments de la seva obra lògica i, tal com hem vist, també en l'article de 1885. A partir d'això conclou el següent:

> 1. El conjunt de conseqüències de *Ded*, A1 i R^n_{Min} és equivalent al càlcul minimal Min^{cn} de Johansson.
> 2. El conjunt de conseqüències de *Ded*, A1, R^n_{Min} i R^n_{Cl} és equivalent al càlcul intuïcionista Int^{Cn}amb implicació i negació.
> 3. El conjunt de conseqüències de *Ded*, A1, A2, R^n_{Min} i R^n_{Cl} és equivalent al càlcul clàssic Cl^{Cn} amb la implicació i la negació.
>
> En aquest sentit, la construcció de Peirce del càlcul proposicional anticipa idees modernes de com separar *PH* [*el càlcul implicatiu positiu en el sentit de Hilbert, axiomatitzat a 1885 mitjançant els tres primers axiomes*] i Min^{Cn} de Cl^c [*el càlcul implicatiu positiu plus el cinquè axioma, és a dir, el fragment implicatiu del càlcul proposicional clàssic*] i Cl^{Cn} i suggereix també un mètode simple per obtenir Int^{Cn} a partir de Min^{Cn}.[1]

En l'article "On the Algebra of Logic" de 1885, Peirce proposa també un procediment per decidir la validesa d'una fórmula o la correcció d'un argument que coincideix essencialment amb el procediment de decisió emprat en el mètode matricial o per taules de veritat desenvolupat sobretot a partir de Łuckasiewicz, Post i Wittgenstein a la dècada dels vint.[2] Ja hem vist al començament d'aquesta secció que Peirce interpreta la proposició $x \prec y$ com "x és falsa o y és vertadera", és a dir, com aquella proposició que és vertadera quan x és falsa -independentment del valor de y- o quan y és vertadera -independentment del valor de x. Tenim així la següent definició del condicional: "Una proposició de la forma $x \prec y$ és vertadera si $x = \mathbf{f}$ o $y = \mathbf{v}$. És falsa només si $y = \mathbf{f}$ i $x = \mathbf{v}$".[3] Abans també hem vist que la negació es definia com una funció ϕ tal que $\phi\mathbf{v}= \mathbf{f}$ i $\phi\mathbf{f}= \mathbf{v}$. Ambdues operacions estan

---

1 *Ibid.*, 100.

2 El mateix procediment fou utilitzat informalment per Frege en la *Begriffschrift* de 1879 -és a dir, sis anys abans que Peirce- per decidir la validesa d'algunes fórmules en les quals intervenien el condicional i la negació, però en l'obra de Frege no hi ha una formulació explícita del mètode seguit, al contrari del que s'esdevé en l'article de Peirce. D'una altra banda, sembla ser que Peirce no arribà mai a conèixer l'obra de Frege.

3 W5 175 (CP 3.387).

definides, doncs, com a funcions de veritat o, si més no, a partir del que podríem anomenar les seves condicions de veritat. A partir d’aquí, Peirce pot enunciar el següent mètode de decisió: “Per trobar si una fórmula és necessàriament vàlida substituirem les lletres per **f** i **v** i veurem si es pot suposar que és falsa per qualsevol d’aquestes assignacions de valors”.[1] Peirce il·lustra aquest procediment mostrant que la tercera icona, a saber, la fórmula

$$(x \prec y) \prec \{(y \prec z) \prec (x \prec z)\}$$

és una fórmula necessàriament vàlida -és a dir, una tautologia. Car “per fer això fals hem d’agafar

$$(x \prec y) = \mathbf{v}$$
$$\{(y \prec z) \prec (x \prec z)\} = \mathbf{f}$$

Això últim dóna

$$(y \prec z) = \mathbf{v}, (x \prec z) = \mathbf{f}, x = \mathbf{v}, z = \mathbf{f}.$$

Substituint aquests valors a

$$(x \prec y) = \mathbf{v} \qquad (y \prec z) = \mathbf{v}$$

tenim

$$(\mathbf{v} \prec y) = \mathbf{v} \qquad (y \prec \mathbf{f}) = \mathbf{v},$$

que no poden ser satisfetes alhora”.[2] Aquest procediment l’utilitza Peirce en un altre exemple. Considerem, en efecte, les següents premisses:

a. Qualsevol persona amb la que em casi serà bonica o honrada.

---

1 W5 175 (CP 3.387).

2 W5 175 (CP 3.387).

b. Aquella persona amb qui em casi serà una dona.

c. Tota dona bonica no es pot escollir com esposa.

d. Tota dona honrada no es pot escollir com esposa.

I suposem que se'ns demana la conclusió. Siguin llavors:

m, qualsevol persona amb la que em casi,

b, bonica,

p, honrada,

w, dona,

i, no es pot escollir com esposa,

I sigui x la conclusió. Aleshores, assenyala Peirce,

$$[m \prec ((b \prec \mathbf{f}) \prec p)] \prec [(m \prec w) \prec ((w \prec (b \prec i)) \prec ((w \prec (p \prec i)) \prec x))]$$

és necessàriament vertadera. Ara be, continua Peirce, "si suposem $m = \mathbf{v}$, la proposició només podrà ser falsa posant $w = \mathbf{v}$ i b o $p = \mathbf{v}$. En aquest cas, la proposició només pot ser falsa posant $i = \mathbf{v}$. Per tant, x només pot ser falsa posant $m = \mathbf{v}$, $i = \mathbf{f}$, això és, si $x = (m \prec i)$ la proposició és necessàriament vertadera".[1] Deixant de banda els aspectes concrets d'aquest exemple, sembla clar que Peirce parteix del dos supòsits següents: En primer lloc, que donat un conjunt de proposicions $x_1, x_2, ..., x_n, y$, direm que (la conclusió) y se segueix necessàriament de (les premisses) $x_1, x_2, ..., x_n$ si, i només si

$$x_1 \prec (x_2 \prec (...(x_{n-1} \prec x_n)...) \prec y)$$

és necessàriament vertadera, és a dir, si qualsevol assignació de valors que fan vertaderes les premisses també fan vertadera la conclusió. En aquest sentit, l'exemple anterior il·lustra el procediment per decidir la correcció d'un argument emprat en el mètode matricial. En segon lloc, si y és desconeguda, podem concloure per la transitivitat de la còpula que $y = x_1 \prec x_n$ i, per tant, deduir la conclusió requerida.

[1] W5 176 (CP 3.388).

10. La lògica quantificacional de 1885: la lògica de primer ordre

La lògica relativa de 1885 es divideix en dues parts: la lògica relativa de primera intenció i la lògica relativa de segona intenció, que coincideixen essencialment amb la lògica quantificacional de primer i segon ordre respectivament. La secció sobre la lògica relativa de primera intenció s'obre amb la següent anàlisi crítica de l'àlgebra de Boole:

> L'àlgebra de Boole permet un llenguatge mitjançant el qual podem expressar qualsevol cosa que pugui ser dita sense parlar de més d'un individu a la vegada. És cert que pot afirmar que determinats caràcters pertanyen a una classe sencera, però només aquells caràcters que pertanyen a cada individu separadament. La lògica de relatius considera enunciats que inclouen dos i més individus alhora.[1]

El text anterior potser no és del tot clar, però els exemples que el segueixen mostren clarament que Peirce es refereix a la incapacitat de l'àlgebra de Boole per parlar d'individus que tenen propietats diferents o que estan en determinades relacions entre ells. En canvi, gràcies als índexs, "la lògica de relatius considera enunciats en els quals hi figuren dos o més individus a la vegada"[2] com ara $x_i y_j$, que significa que els individus *i* i *j* tenen respectivament les propietats *x* i *y*, o z_{ij}, que significa que els individus *i* i *j* estan en la relació *z*. En altres paraules, el llenguatge de l'àlgebra de Boole permet expressar que els individus d'una classe d'individus tenen una determinada *propietat*, però és incapaç de parlar de les *propietats* dels individus d'una classe separadament o de les *relacions* en les quals estan aquestes individus. Per això ens cal la lògica de relatius. De fet, com ja sabem, fins i tot l'expressió en el marc de l'àlgebra de la lògica de Boole dels enunciats categòrics de la lògica aristotèlica -els enunciats quantificacionals de la lògica monàdica- ja planteja als ulls de Peirce unes dificultats irresolubles -recordem a tal efecte la crítica de Peirce a l'expressió booleana de les proposicions particulars (*Cf. supra*, § 2). Segons Peirce, tot el mèrit d'haver introduït les expressions quantificades *algun* i *tot* en l'àlgebra lògica de Boole i en la lògica de relatius correspondria al seu deixeble O.H. Mitchell:

---

1 W5 177 (CP 3.392).

2 W5 177 (CP 3.392).

> Tots els intents per introduir aquesta distinció [entre *algun* i *tot*] en l'àlgebra booleana havien estat en major o menor grau un fracàs total fins que Mitchell va mostrar com s'havia de fer [...] Mitchell té també una extensió molt interessant i instructiva de la seva notació per *algun* i *tot* per a un univers de dues dimensions, això és, per a la lògica de relatius.[1]

Tal com hem vist abans, en efecte, Mitchell havia introduït un sistema de notació que permetia expressar determinats enunciats quantificacionals de la lògica monàdica i diàdica en el marc de l'àlgebra booleana, que consistia essencialment en l'afegitó de subíndexs als polinomis lògics de l'àlgebra booleana per tal de quantificar-los existencialment o universal (*Cf. supra*, § 8). Ara bé, s'ha de tenir en compte que aquests polinomis són combinacions booleanes dels termes de classe de l'àlgebra de Boole i no pas de funcions proposicionals, per la qual cosa els subíndexs s'han d'entendre com a operadors que seleccionen *alguns* o *tots* els elements de l'univers del discurs, però no com a operadors que lliguin les variables d'aquelles funcions proposicionals. Així doncs, el que calia per assolir quelcom semblant a la teoria de la quantificació moderna, era substituir els termes de classe per símbols de predicat i relació i concebre els quantificadors com operadors sobre els arguments d'aquelles. I per això calia introduir signes específics per al quantificador existencial i universal i afegir índexs o variables tant als quantificadors com als símbols de predicats i relació. L'avantatge principal que s'aconsegueix amb aquesta doble ocurrència dels índexs o variables és que permet emprar el mateix índex o variable diverses vegades en l'expressió booleana i lligar totes aquestes ocurrències mitjançant un sol quantificador, això és, el que havíem anomenat abans la *referència múltiple* dels quantificadors. Això és important perquè, tal com ja hem explicat, la introducció de termes relatius o relacions requereix sovint que un quantificador faci una referència múltiple a un mateix objecte de l'univers dels discurs (*Cf. supra*, § 8). Doncs bé, això queda fora de l'abast del sistema de notació de Mitchell i, en canvi, és expressable a l'àlgebra general de la lògica peirciana amb tota naturalitat. Considerem el mateix exemple esmentat per Peirce en els articles "The Logic of Relatives" de 1883 i "On the Algebra of Logic" de 1885, a saber, sigui l'enunciat "tothom estima algú que el beneficia". Si estenem el sistema de notació de Mitchell als termes relatius, podríem intentar expressar l'enunciat anterior posant $(lb)_{1u}$ o $l_{1u}b_{u1}$, però és evident que cap d'aquestes expressions aconsegueix el resultat desitjat, car la primera d'elles diu exactament "tothom estima i beneficia algú", mentre que la segona diu "tothom estima algú i algú beneficia tothom" -però no que sigui el

[1] W5 178-80 (CP 3.393).

mateix *algú* el que és estimat per tothom i beneficia a tothom. En canvi, en l'àlgebra general de la lògica peirciana, l'enunciat en qüestió s'expressa posant

$$\Pi_i \Sigma_j l_{ij} b_{ji}.$$

Podem dir, en definitiva, que si bé és cert que Mitchell va estar el primer en introduir la quantificació en l'àlgebra lògica de Boole i que el seu sistema de notació té el mèrit de separar els quantificadors de l'expressió boolena, no és menys cert que correspon només a Peirce el mèrit d'haver introduït els elements essencials de la teoria quantificacional moderna: els *termes relatius*, que es corresponen amb els anomenats avui en dia símbols de predicat o relació; els *índexs*, que es corresponen amb les variables individuals modernes i s'afegeixen als quantificadors i als símbols de predicat i relació i, finalment, els signes Σ i Π que denoten respectivament el quantificador existencial i universal i s'entenen com operadors sobre les variables que lliguen els arguments dels símbols de predicat i relació. Sigui com sigui, una vegada feta l'anàlisi crítica de l'àlgebra de Boole i rendit homenatge al seu deixeble Mitchell per haver introduït la quantificació en l'àlgebra lògica de Boole, Peirce presenta el seu propi sistema de notació per expressar els enunciats quantificacional i explica com s'han d'entendre els elements que intervenen en la seva expressió:

> Aquí, per tal de fer que la notació sigui tan icònica com sigui possible, emprarem Σ per *algun*, suggerint una suma, i Π per *tot*, suggerint un producte. Així, $\Sigma_i x_i$ significa que x és vertadera d'algun dels individus denotats per i o
>
> $$\Sigma_i x_i = x_i + x_j + x_k + \text{etc.}$$
>
> De forma anàloga, $\Pi_i x_i$ significa que x és vertadera de tots aquests individus, o
>
> $$\Pi_i x_i = x_i x_j x_k, \text{ etc.}$$
>
> Si x és una relació simple, $\Pi_i \Pi_j x_{ij}$ significa que cada i està en aquesta relació amb cada j, $\Sigma_i \Pi_j x_{ij}$ que algun i està en aquesta relació amb cada j, $\Pi_j \Sigma_i x_{ij}$ que a cada j algun o altre i està en aquesta relació, $\Sigma_i \Sigma_j x_{ij}$ que algun i està en aquesta relació amb algun j. S'ha de remarcar que $\Sigma_i x_i$ i $\Pi_i x_i$ són només semblant a una suma i un producte, no són estrictament d'aquesta naturalesa, perquè els individus de l'univers podrien ser innumerables.[1]

[1] W5 180 (CP 3.393). En aquest text, *innumerable* significa segurament *infinit*, no pas *no numerable*, donat que aquest és el significat amb que Peirce empra aquesta paraula en un article de 1882 en un context molt semblant (W4 328 (CP 3.306)). Naturalment, *suma* i *producte* signifiquen *suma* i *producte lògics*, és a dir, la *disjunció* i *conjunció* modernes.

La novetat principal que presenta el text anterior en relació a l'article "The Logic of Relatives" de 1883 pel que fa a la interpretació dels enunciats quantificacionals és que ara Peirce ja no interpreta x_{ij}o x_i com a coeficients numèrics, sinó com el que avui en dia anomenaríem fórmules atòmiques, en les quals x és un símbol de relació i *i,j* són índexs, l'equivalent de les variables individuals modernes. De forma anàloga, Peirce tampoc ja no interpreta els operadors Σ i Π com a sumes o productes lògics, sinó de la mateixa manera que avui en dia interpretem el quantificador existencial i universal, això és, com denotant *algun* o *tots* els individus de l'univers del discurs. Quant això, és important remarcar que la interpretació semàntica que Peirce fa dels enunciats quantificacionals $\Sigma_i x_i$ i $\Pi_i x_i$, a saber, "*x* és vertadera d'algun dels individus denotats per *i*" i "*x* és vertadera de tots aquests individus" respectivament, pressuposa la idea que una fórmula atòmica amb una variable lliure com ara x_i, no és vertadera o falsa, però que esdevé vertadera o falsa en assignar un valor a aquesta variable, i que el valor de veritat dels enunciats quantificacionals $\Sigma_i x_i$ i $\Pi_i x_i$ resta definit en funció dels objectes que satisfan o fan vertadera la fórmula atòmica x_i, car hom té efectivament que $\Sigma_i x_i$ -respectivament $\Pi_i x_i$- és vertader si, i només si, *hi ha com a mínim un objecte* -respectivament, *tot objecte*- de l'univers del discurs que satisfà la fórmula atòmica x_i . Si a aquesta idea peirciana segons la qual la veritat dels enunciats $\Sigma_i x_i$ i $\Pi_i x_i$ s'ha de definir en funció de la satisfacció de la fórmula atòmica x_i, li afegim una altra idea peirciana segons la qual el rang de valors de les variables o, el que és el mateix, l'univers del discurs, no és fix sinó que pot ser diferent en cada ocasió, resulta que en Peirce ja trobem els elements essencials de la idea bàsica i informal que subjau a la *definició model-teorètica moderna de veritat en una estructura dels enunciats quantificacionals*. Una altra qüestió important que cal remarcar respecte al text que estem comentant és el fet que Peirce consideri inicialment la interpretació dels enunciats quantificacionals que acabem d'explicar com una interpretació de les equivalències $\Sigma_i x_i = x_i + x_j + x_k +$ etc i $\Pi_i x_i = x_i x_j x_k$, etc i, per tant, consideri $\Sigma_i x_i$ i $\Pi_i x_i$ com equivalents *de facto* a una suma i producte lògics, encara que després afirmi que aquesta identificació no és exacte perquè en els casos en què l'univers és infinit, hom hauria d'identificar $\Sigma_i x_i$i $\Pi_i x_i$ amb una disjunció o conjunció infinites, l'existència de les quals Peirce sembla rebutjar per analogia amb el que s'esdevé amb la suma i el producte algèbrics. S'ha de dir, amb tot, que la identificació del quantificador existencial i universal amb una disjunció i conjunció infinites és correcta sempre i quan en el llenguatge hi hagi com a mínim una constant individual per a cada individu de l'univers del discurs,[1] és a dir, sempre i quan

[1] *Cf. Moore 1980*, 98.

l'univers del discurs estigui especificat. Com veurem en el proper capítol, Schröder definirà en el segon volum de la seva obra *Vorlesungen über die Algebra der Logik* el quantificador existencial i universal semànticament i sintàctica, de forma anàloga a com hem vist que havia fet Peirce en l'article de 1885, però considerarà que ambdues definicions dels quantificadors són igualment vàlides i, de fet, intentarà justificar la seva equivalència (*Cf. infra*, cap. III, § 5). Löwenheim treballà de ple en la tradició lògico-algèbrica de Schröder (*Cf. infra*, cap. VII, § 1) i seguint aquest autor, distingirà entre *Relativsausdrücke*, expressions en què el rang dels quantificadors són relacions, i *Zahlaüsdrücke*, expressions en què el rang dels quantificadors són individus (*Cf. infra*, cap. VII, § 2). Com veurem més endavant, encara que Löwenheim prohibeix explícitament desenvolupar els quantificadors universal i existencial d'aquestes últimes expressions com productes i sumes infinites de termes, emprarà en almenys una ocasió un expansió d'aquesta mena per demostrar el seu conegut teorema sobre la satisfactibilitat de les *Zahlaüsdrücke* o expressions de primer ordre (*Cf. infra*, cap. VII, § 2). Per un altre costat, la primera part de la demostració de Löwenheim d'aquest teorema consisteix a demostrar que tota fórmula de primer ordre és pot transformar en una fórmula universal equivalent a ella a efectes de satisfactibilitat i, tal com explicarem més endavant, les expansions permeten transformar el problema de la satisfactibilitat de les fórmules universals en un problema resoluble en dominis de cardinalitat finita (*Cf. infra*, cap. VII, § 3). Així doncs, la definició "sintàctica" dels quantificadors existencial i universal com disjuncions i conjuncions infinites, enunciada inicialment per Peirce en l'article "On the Algebra of Logic" de 1885 i represa després per Schröder a *Vorlesungen über die Algebra der Logik*, juga un paper bàsic en la demostració per part de Löwenheim d'un dels resultats més importants de la teoria de models contemporània.

Una vegada introduïda en l'article de 1885 la notació per als enunciats quantificacionals i explicat el seu significat, Peirce dóna alguns exemples elementals de traducció d'enunciats del llenguatge corrent en la notació presentada de manera que hom pugui fer-se una idea del poder expressiu d'aquesta. Aquests exemples són, si fa no fa, els mateixos que Peirce havia donat en l'article "The Logic of Relatives" de 1883 i com allí, la traducció resultant és sempre un enunciat escrit en forma normal prenexa.[1] De fet, després d'aquests exemples, Peirce exposa un mètode general d'eliminació, que recull les tres *senzilles regles* de 1883 i està dividit en set etapes, la primera de les qual es precisament que

[1] És a dir, amb tots els quantificadors al davant de la part booleana i amb aquesta part escrita com una disjunció de conjuncions o una conjunció de disjuncions de fórmules bàsiques -les fórmules atòmiques i les seves negacions.

“les diferents premisses, haguent-se escrit amb índexs diferents (el mateix índex no s’ha d’emprar en dues proposicions), s’han d’escriure juntes, i tots els Πs i Σs s’han de posar a l’esquerra”.[1] Aquesta primera etapa consisteix, doncs, a ajuntar les premisses i posar-les en forma prenexa. Això es pot fer, assenyala Peirce, gràcies a les equivalències següents:[2]

$$\Pi_i\, x_i .\, \Pi_j\, x_j = \Pi_i\, \Pi_j\, x_i x_j$$
$$\Sigma_i\, x_i .\, \Pi_j\, x_j = \Sigma_i\, \Pi_j\, x_i x_j$$
$$\Sigma_i\, x_i .\, \Sigma_j\, x_j = \Sigma_i\, \Sigma_j\, x_i x_j .$$

S’ha de dir, amb tot, que aquestes equivalències no són suficients per posar una fórmula qualsevol de primer ordre en forma prenexa. Per això calen les lleis de De Morgan aplicades als quantificadors, les lleis relatives al canvi de variable i a la quantificació vàcua i les lleis distributives següents, on φ, ψ representen fórmules qualssevol de primer ordre:

$$\forall x\varphi \wedge \forall x\psi \equiv \forall x(\varphi \wedge \psi)$$
$$\exists x\varphi \vee \exists x\psi \equiv \exists x(\varphi \vee \psi)$$
$$\forall x\varphi \vee \psi \equiv \forall x(\varphi \vee \psi), \text{ si } x \text{ no està lliure en } \psi$$
$$\exists x\varphi \wedge \psi \equiv \exists x(\varphi \wedge \psi), \text{ si } x \text{ no està lliure en } \psi .$$

Peirce no esmenta cap d’aquestes lleis, encara que en coneixia alguna d’elles, ja fos perquè ja havien estat formulades pel seu deixeble Mitchell -com és el cas d’una de les dues lleis de De Morgan i la segona de les lleis distributives esmentades més amunt- o perquè ell mateix les empra o esmenta en algun altre indret -com és el cas de les lleis relatives a la quantificació vàcua. En qualsevol cas, està clar que Peirce no podia formular les lleis de la quantificació en els termes precisos en què ho fem avui en dia perquè no defineix recursivament la noció de fórmula de primer ordre i, per tant, es veu obligat a expressar les lleis de la quantificació a partir de fórmules en la part booleana de les quals hi figuren fórmules atòmiques o combinacions atòmiques d’aquestes, però no fórmules qualssevol $\varphi, \psi, \ldots$ de primer ordre. En la segona etapa, assenyala Peirce “sense trastocar l’ordre dels índexs de cap premissa, els Πs i els Σs es poden moure correlativament, i en la mesura que

---

[1] W5 182 (CP 3.396).

[2] *Cf.* W5 182 (CP 3.396).

sigui possible, els Σs hauran de traslladar-se a l'esquerra dels Πs".[1] Hom pot emprar a tal efecte, continua Peirce, les següents regles de permutació dels quantificadors:[2]

$$\Pi_i \Pi_j x_{ij} = \Pi_j \Pi_i x_{ij}$$
$$\Sigma_i \Sigma_j x_{ij} = \Sigma_j \Sigma_i x_{ij}$$
$$\Sigma_i \Pi_j x_i y_j = \Pi_j \Sigma_i x_i y_j.$$

En canvi, tal com assenyala Peirce, l'equivalència:

$$\Sigma_i \Pi_j x_{ij} = \Pi_j \Sigma_i x_{ij}$$

no és vàlida, perquè encara que $\Sigma_i \Pi_j x_{ij}$ implica lògicament $\Pi_j \Sigma_i x_{ij}$, el recíproc no és cert i, "per tant, farem bé en començar posant els Σs a l'esquerra en la mesura del possible, perquè en una fase més avançada de la feina podran ser traslladats a la dreta, però no a l'esquerra".[3] Com veurem més endavant, Schröder, que reconeixerà en diversos indrets la influència de Peirce en la seva obra,[4] descobrirà un mètode de desenvolupament que el permetrà traslladar sempre un signe Π a l'esquerra d'un signe Σ i viceversa (*Cf. infra*, cap. III, § 10). Aquest mètode serà emprat per Löwenheim, que treballà en el càlcul de relatius de Schröder (*Cf. infra*, cap. VII, § 1), per demostrar el 1915 el conegut teorema de Löwenheim-Skolem. Aquesta demostració comença efectivament amb la prova que tota expressió de primer ordre (*Zahlausdrück*) pot transformar-se en una expressió en forma normal en què tots els quantificadors existencials precedeixen els universal, per a la qual cosa Löwenheim emprarà el desenvolupament schröderià de productes i sumes (*Cf. infra*, cap. VII, § 3). Amb tot, tal com assenyalarà Skolem cinc anys més tard, "aquest procediment és una mica enrevessat i fa que hom hagi d'introduir símbols d'individus com a subíndexs per als coeficients de relatiu".[5] Conseqüentment, Skolem reconstruirà la primera part de la demostració de Löwenheim oferint una demostració més simple en la qual introduirà les funcions que duen el seu nom i que el permetran transformar tota fórmula de la forma $\forall x \exists y \varphi(x, y)$ en una fórmula lògicament equivalent a ella de la forma $\exists f \forall x \varphi(x, fx)$ (*Cf. infra*, cap. VII, § 6). Podem

1 W5 182 (CP 3.396).
2 W5 182 (CP 3.396).
3 W5 182 (CP 3.396).
4 Vegeu, per exemple, *Schröder 1895*, 4.
5 *Skolem 1970*, 103 (*Van Heijenoort 1967*, 254).

afirmar, doncs, que la segona etapa del mètode d'eliminació de Peirce duu a través de l'obra de Schröder i Löwenheim al descobriment efectiu de les formes normals de Skolem i del procés de skolemització (*Cf. infra*, cap. VII, § 7). La tercera etapa "engloba una varietat de processos" a través dels quals hom pot "manipular la part booleana de l'expressió".[1] Entre aquests, Peirce destaca la fórmula general d'eliminació:

$$a_{ijk\text{ etc.}}\bar{a}_{xyz\text{ etc.}} \;\prec\; \bar{1}_{ix} + \bar{1}_{jy} + \bar{1}_{kz\text{ etc.}}$$

i la seva conversa:

$$\bar{1}_{ix}\bar{1}_{jy}\bar{1}_{kz\text{ etc.}} \;\prec\; a_{ijk\text{ etc.}} + \bar{a}_{xyz\text{ etc.}},$$

d'on es dedueixen fàcilment les lleis de contradicció i del terç exclòs. Peirce destaca també les fórmules distributives, d'on es dedueixen juntament amb les fórmules anteriors un gran nombre de fórmules d'interès pel que fa a la manipulació de la part booleana. La quarta etapa torna a fer referència a la part quantificant o *quantificador* -expressió introduïda aquí per primera vegada en la història. Aquesta etapa efectivament "consisteix a fer que els índexs facin referència a la mateixa col·lecció d'objectes, en la mesura que això sigui útil"[2] i, per això, a la majoria dels casos serà convenient reemplaçar l'índex d'un Π o Σ per un de més extensió. Així, continua Peirce, "si tenim "tots els gossos són animals i tots els animals són vertebrats" escrits així:

$$\Pi_d\, a_d \qquad\qquad \Pi_\alpha\, v_\alpha,$$

on a i α signifiquen totes dues animal, serà convenient reemplaçar el darrer índex per i, que representarà un objecte qualsevol, i escriure la proposició en la forma:

$$\Pi_i(\bar{a}_i + v_i)\text{''}.^3$$

---

1 W5 183 (CP 3.396).
2 W5 183 (CP 3.396).
3 W5 183 (CP 3.396).

Així doncs, el propòsit d'aquesta quarta etapa és incloure en la part booleana totes les condicions a les quals estiguin subjectes inicialment les variables, de manera que el rang de les variables emprades sigui de la màxima extensió i, a ser possible, el mateix univers del discurs. Tal com veurem en capítols posteriors, Frege i Russell posaran molt d'èmfasi en l'ús de variables no restringides, però aquest èmfasi té un significat molt diferent de l'expressat per Peirce en la quarta etapa, car mentre que per aquest darrer l'univers de discurs pot ser diferent en cada ocasió i, per tant, l'ús de variables no restringides és simplement una qüestió de conveniència, per Frege i Russell, l'univers està fixat per endavant d'una vegada per totes, de manera que l'ús de variables no restringides és un condició necessària per a la concepció de la lògica com un llenguatge universal, la qual està indissolublement unida al seu logicisme. La cinquena i sisena etapes consisteixen de nou en manipulacions de la part booleana dels enunciats quantificacionals. La cinquena etapa "consisteix a multiplicar tota la part booleana per la modificació de si mateixa produïda en substituir l'índex de qualsevol Π per qualsevol altre índex que estigui a la seva dreta en el quantificador. Així, en comptes de

$$\Sigma_i \, \Pi_j \, l_{ij},$$

podem escriure

$$\Sigma_i \, \Pi_j \, l_{ij} l_{ii}\text{''.}$$ [1]

És a dir, aquesta cinquena etapa expressa la regla d'inferència segons la qual de:

$$\exists x \forall y Pxy$$

podem passar a:

$$\exists x \forall y (Pxy \wedge Pxx),$$

la qual és una regla d'inferència vàlida. La sisena regla "consisteix en la remanipulació de la part booleana i per això cal, primer, afegir a qualsevol part qualsevol terme que vulguem; segon, treure de qualsevol part qualsevol factor que vulguem; i, tercer, observar que:

---

1 W5 183-84 (CP 3.396).

$$x\bar{x} = \mathbf{f} \qquad\qquad x + \bar{x} = \mathbf{v},$$

de manera que

$$x\bar{x}y + z = z \qquad\qquad (x + \bar{x} + y)z = z\text{”.}$$ [1]

Així doncs, aquesta etapa expressa, primer, una regla d'introducció de la disjunció; segon, una regla d'eliminació de la conjunció i, tercer, una regla d'eliminació de les formules $x\bar{x}$ i $x + \bar{x}$ respecte de la disjunció i la conjunció -propietats reticulars ben conegudes del 0 i el 1. La setena i última regla consisteix a “eliminar els Πs i Σs en els quantificadors els índexs dels quals no apareguin en la part booleana”.[2] D'acord amb Peirce, les tres últimes regles permeten inferir $\Sigma_i\, l_{ii}$ a partir de $\Sigma_i\, \Pi_j\, l_{ij}$, és a dir, demostrar la inferència de $\exists xPxx$ a partir de $\exists x\forall yPxy$ és vàlida. Notem, en efecte, que d'acord amb la cinquena etapa és suficient veure que la inferència de $\exists xPxx$ a partir de $\exists x\forall y(Pxy \wedge Pxx)$ és vàlida. Ara, per la sisena etapa podem eliminar la conjunció en la formula anterior i inferir que $\exists x\forall yPxx$ i, a partir d'aquesta fórmula, podem inferir finalment per la setena etapa que $\exists xPxx$.

Una vegada exposades les etapes en què es divideix l'anomenat *mètode general d'eliminació* proposat en aquest article, Peirce posa un parell d'exemples de com treballar amb ell. El primer exemple és el següent:

> De les premisses $\Sigma_i\, a_i b_i$ i $\Pi_j(\bar{b}_j + c_j)$, eliminar b. Escrivim primer
>
> $$\Sigma_i\, \Pi_j\, a_i b_i(\bar{b}_j + c_j).$$
>
> El procés distributiu dóna
>
> $$\Sigma_i\, \Pi_j\, a_i(b_i\bar{b}_j + b_i c_j).$$
>
> Però sempre tenim dret a eliminar un factor o a insertar un terme additiu. Tenim així
>
> $$\Sigma_i\, \Pi_j\, a_i(b_i\bar{b}_j + c_j).$$
>
> Per la tercera etapa podem, si volem, insertar n_{ij} per $b_i\bar{b}_j$ En cada cas, identifiquem j amb i i obtenim la conclusió
>
> $$\Sigma_i\, a_i c_i.$$ [3]

1 W5 184 (CP 3.396).
2 W5 184 (CP 3.396).
3 W5 184 (CP 3.397).

En llenguatge modern tindríem la següent deducció, figurant a la dreta l'etapa o regla emprada en pas:

1. - $\exists x(Px \wedge Qx)$
2. -$\forall y(\neg Qy \vee Ry)$
3. $\exists x\forall y[(Px \wedge Qx) \wedge (\neg Qy \vee Ry)]$, per 1.
4. $\exists x\forall y[Px \wedge ((Qx \wedge \neg Qy) \vee (Qx \wedge Ry))]$, per 3.2.
5. $\exists x\forall y[Px \wedge ((Qx \wedge \neg Qy) \vee Ry)]$, per 6.2
6. $\exists x\forall y[Px \wedge ((Qx \wedge \neg Qy) \vee Rx)]$, per identificació de la y amb la x.
7. $\exists x\forall y(Px \wedge Rx)$, per 6.3.
8. $\exists x(Px \wedge Rx)$, per 7.

És interessant observar que, en la deducció anterior, Peirce empra una regla d'identificació de les variables que no havia esmentat abans, car amb aquesta regla, la inferència de $\exists xPxx$ a partir de $\exists x\forall yPxy$, abans esmentada com exemple d'aplicació de les tres últimes regles, seria immediata a partir de la setena regla. De fet, la combinació d'aquestes dues regles és equivalent a l'aplicació successiva de les regles d'eliminació del quantificador existencial i universal i la regla d'introducció del quantificador existencial, tal com coneixem avui en dia aquestes regles. Peirce mai no emprà o formulà explícitament les regles d'eliminació i introducció dels quantificadors en sentit modern, per la qual cosa es veié obligat, tal com hem vist en la deducció anterior, a emprar regles alternatives i a aplicar les regles relatives a la part booleana en el mateix context dels enunciats quantificacionals en els quals aquestes apareixen originàriament. Sigui com sigui, és evident que el mètode general d'eliminació proposat per Peirce en l'article "On the Algebra of Logic" de 1885 constitueix l'intent més audaç d'aquest autor de definir un conjunt de regles d'inferència per a la lògica de primer ordre, car d'ençà llavors Peirce només tornarà a exposar el seu mètode d'eliminació en l'article "Regenerated Logic" de 1897, on es limita a exposar de nou les regles exposades en l'article de 1885. Per acabar la nostra exposició, és interessant remarcar també que aquest conjunt de regles de deducció no és ni pretén ser un conjunt *suficient* de regles d'inferència per a la lògica de primer ordre i, sobretot, que al llarg de l'exposició de Peirce no trobem cap definició formal o informal de què és una deducció. Certament, Peirce va crear un llenguatge per a la lògica de primer ordre molt similar al que coneixem avui en dia i va especificar també algunes de les seves regles d'inferència més importants, però, en no definir recursivament el concepte de fórmula de primer ordre ni especificar el concepte de deducció lògica, ni el seu llenguatge pot ser considerat un llenguatge formal ni, en general, la seva presentació de la lògica de primer ordre pot considerar-se com un sistema deductiu. Per contra, tal com veurem més endavant, Frege serà el primer en definir, en la seva obra *Begriffschrift* de 1879, el concepte de fórmula i especificar la noció de demostració, per la qual cosa el sistema lògic allí exposat serà el primer sistema deductiu o formal de lògica presentat al llarg de la història.

11. La lògica quantificacional de 1885: la lògica de segon ordre

Una vegada exposada la lògica de relatius de primera intenció, Peirce s'ocupa de la lògica de relatius de segona intenció. La distinció entre conceptes i relacions de primera intenció (*intentio prima*) i segona intenció (*intentio secunda*) és d'origen escolàstic i el mateix Peirce l'explicarà en els termes següents:

> *Primeres intencions* són aquells conceptes que es deriven de comparar percepcions, com ara els conceptes habituals de classes, relacions, etc. *Segones intencions* són aquells que es formen observant i comparant primeres intencions. Així, el concepte "classe" es forma observant i comparant conceptes de classe i altres objectes [...] De relatius de segona intenció, n'hi ha quatre que són prominents -la identitat, l'alteritat, la coexistència i la incompossibilitat.[1]

Així doncs, la lògica de segona intenció comprèn essencialment l'estudi de les relacions anteriors, però també de la relació d'*inherència* entre subjecte i predicat -que, tal com explicarem més endavant, Peirce identifica amb la relació de pertinença entre individu i classe- car tal com afirma Peirce en l'article "The Essence of Reasoning" (*1893*), "com a part d'aquesta doctrina general de la inherència, hi ha una doctrina especial de les propietats de les relacions".[2] Podríem dir, en definitiva, que la lògica de relatius de segona intenció es correspon amb el que avui en dia anomenem lògica de segon ordre i que, en el seu marc, Peirce hi exposa una teoria de classes o relacions. L'exposició que fa Peirce de la lògica de segona intenció en l'article "On the Algebra of Logic" de 1885 comença amb la definició del

[1] CP 2.548.
[2] CP 4.81.

terme de segona intenció 1, això és, la relació d'*identitat*. D'acord amb Peirce, "dir que [dues] coses són idèntiques és dir que tot predicat és vertader o fals de totes dues"[1] i, per tant, Peirce defineix la relació d'identitat en els termes següents:

$$1_{ij} = \Pi_k(q_{ki}q_{kj} + \bar{q}_{ki}\bar{q}_{kj}), \qquad (1)$$

on q "significa la relació d'una qualitat, caràcter, fet o predicat amb el seu subjecte"[2] i, per tant, $q_{ki}q_{kj}$ significarà que i i j tenen la propietat o qualitat k. En definitiva, q expressa la relació d'*inherència* que es dóna entre subjecte i predicat, la qual és als ulls de Peirce un terme relatiu de segona intenció. Evidentment, la definició anterior mostra que el terme relatiu 1 és un terme de segona intenció, donat que en ella es quantifica sobre una propietat o qualitat i, per tant, aquest terme relatiu s'obté "observant i comparant" termes relatius de primera intenció. Des d'un punt de vista modern, la definició de Peirce és equivalent a la següent sentència:

$$x = y \equiv \forall P(Px \leftrightarrow Py),$$

la qual s'anomena *llei de Leibniz*, en honor del filòsof i matemàtic G. W. Leibniz, qui va estar el primer en proposar-la com a definició de la identitat, i, tal com veurem en el capítol dedicat a Frege, també serà adoptada per aquest autor com a definició de la relació d'identitat entre individus.[3] Peirce observa també en relació a la definició de la relació d'identitat donada abans que a hom li "podria semblar redundant introduir la idea d'una qualitat per expressar la identitat, però canviarà d'impressió en adonar-se que $q_{ki}q_{kj}$ significa simplement que i i j són tots dos dins de la classe o col·lecció k".[4] De fet, continua Peirce, hom podria prescindir del símbol q i emprar els mateixos signes emprats per denotar els termes relatius de primera intenció com a índexs o variables de tipus conjuntista i quantificar sobre ells. Hom tindria llavors la següent definició de la relació d'identitat:[5]

1 W5 185 (CP 3.398).

2 W5 185 (CP 3.398).

3 La *llei de Leibniz* comprèn, d'una banda, el *principi d'indiscernibilitat dels idèntics* (el qual s'obté llegint l'equivalència anterior d'esquerra a dreta) i el *principi d'identitat dels indiscernibles* (que s'obté llegint l'equivalència anterior de dreta a esquerra). A *Begriffschrift*, Frege introdueix com un axioma específic de la lògica quantificacional el primer principi (*Cf. infra*, cap. IV, § 2).

4 W5 185 (CP 3.398).

5 W5 185 (CP 3.398).

$$1_{ij} = \Pi_x(x_i x_j + \bar{x}_i \bar{x}_j),$$

és a dir, en notació actual:

$$y = z \equiv \forall x(y \in x \leftrightarrow z \in x).$$

Sigui com sigui, Peirce preferirà seguir emprant el signe q, el qual s'interpretava originàriament com la relació d'inherència entre subjecte i predicat, però que d'ara en endavant interpretarà com la relació de *pertinença* d'un individu respecte a una classe. Això no ens ha d'estranyar perquè, tal com dèiem abans, Peirce identifica ambdues relacions, però és evident que aquesta identificació requereix el *principi de comprehensió*. Evidentment, des d'un punt de vista modern, la relació d'inherència o pertinença no se sol considerar una relació de segon ordre, però en la mesura que per Peirce aquesta relació només juga un paper auxiliar per definir les relacions de segona intenció, la definició de les quals requereixen sempre en darrer terme la quantificació sobre propietats o conjunts, podríem dir que la lògica de segona intenció peirciana es correspon essencialment amb la lògica de segon ordre moderna.

Una vegada definida la relació d'identitat, Peirce expressarà a través de diverses *icones* les propietats del símbol q, interpretat com la relació de pertinença. Així, segons Peirce, la *novena icona* expressa que "tot individu pot ser considerat com una classe. Això s'escriu

$$\Pi_i \Sigma_k \Pi_j \, q_{ki}(\bar{q}_{kj} + 1_{ij})\text{''}.$$[1]

En notació moderna, la sentència anterior s'escriu:

$$\forall x \exists y \forall z(x \in y \wedge z \in y \rightarrow x = y),$$

i expressa que per tot individu existeix una classe que conté aquest individu com a únic element, de manera que la novena icona expressa efectivament el principi d'existència d'una classe unitària per a cada individu. La *desena icona* expressa que "donades dues classes

[1] W5 186 (CP 3.399).

qualssevol, n'hi ha una tercera que inclou tot el que la primera exclou i exclou tot el que la primera inclou. Això es,

$$\Pi_l \Sigma_k \Pi_i(q_{li}\bar{q}_{ki} + q_{li}q_{ki})\text{''}.^{1}$$

i, en notació moderna:

$$\forall x \exists y \forall z(x \in y \leftrightarrow x \notin z),$$

que és el principi d'existència del complement d'una classe. L'*onzena icona* expressa que "donades dues classes qualssevol, n'hi ha una tercera que inclou tot el que l'una o l'altra inclouen i exclou tot el que totes dues exclouen. Això és,

$$\Pi_l \Pi_m \Sigma_k \Pi_i(q_{li}q_{ki} + q_{mi}q_{ki} + \bar{q}_{li}\bar{q}_{mi}\bar{q}_{ki})\text{''},^{2}$$

és a dir,

$$\forall x \forall y \exists z \forall t(t \in z \leftrightarrow (t \in x \vee t \in y)),$$

que és el principi d'existència de la unió lògica de dues classes. La *dotzena icona* expressa que "donades dues classes qualssevol, hi ha una classe que inclou la totalitat de la primera i tot individu de la segona que podria no estar inclòs en la primera, i res més".[3] Aquesta icona expressa, doncs, el mateix principi que l'anterior, donat que $Z = X \cup (Y - X) = X \cup Y$ i, per tant, no paga la pena escriure-la formalment.

Una vegada estudiades les propietats de les classes, Peirce vol fer el mateix amb les relacions. A tal efecte, introdueix un nou símbol r que significarà "la relació conjunta d'una relació simple, del seu referent i el seu correlat. Això és, $r_{j\alpha i}$ significarà que i està en la relació α amb j".[4] Però, en comptes d'estudiar les propietats del símbol r tal com havia fet amb el símbol q, el que fa és Peirce és mostrar com aquest símbol "ens permet expressar que

1 W5 186 (CP 3.399).
2 W5 186 (CP 3.399).
3 W5 186 (CP 3.399).
4 W5 187 (CP 3.401).

el nombre d'una classe és, com a mínim, tan gran com el d'una altra".[1] D'acord amb Peirce, hi ha diverses maneres d'expressar que el *cardinal* d'una classe és igual o més gran que el d'una altra; però "la millor d'expressar aquesta proposició és fer ús de la lletra c com a signe [*token*] d'una correspondència biunívoca. És a dir, c estarà definida per les tres fórmules

$$\Pi_a \, \Pi_u \, \Pi_v \, \Pi_w(\bar{c}_a + \bar{r}_{uav} + \bar{r}_{uaw} + 1_{vw})$$
$$\Pi_a \, \Pi_u \, \Pi_v \, \Pi_w(\bar{c}_a + \bar{r}_{uaw} + \bar{r}_{vaw} + 1_{uv})$$
$$\Pi_a \, \Sigma_u \, \Sigma_v \, \Sigma_w(c_a + r_{uav} r_{uaw} \bar{1}_{vw} + r_{uaw} r_{vaw} \bar{1}_{uv})\text{''.}$$[2]

La primera fórmula diu que si les imatges de u són u i w llavors $v = w$; la segona fórmula diu que si u i v tenen la mateixa imatge w, llavors $u = v$; la tercera fórmula resumeix les dues condicions anteriors i expressa, per tant, que r és una correspondència biunívoca. Fent ús, doncs, del símbol c que acaba de definir, Peirce expressa la proposició abans considerada posant:[3]

$$\Sigma_a \, \Pi_i \, \Sigma_j \, c_a(\bar{a}_i + b_j r_{jai}),$$

és a dir, el nombre cardinal d'una classe a és com a mínim tan gran com el d'una classe b si, i només si, hi ha una correspondència biunívoca a tal que, per a tot $i \in a$, existeix un $j \in b$, tal que j està en una correspondència biunívoca amb i. És interessant remarcar que d'aquí se segueix immediatament que dues classes tenen el mateix nombre cardinal si hi ha una correspondència biunívoca entre els elements de les dues classes, fet que constitueix el punt de partida de la definició de Frege i Russell del cardinal d'una classe com la classe de totes les classes semblants o equipotents entre elles. Per acabar, també és interessant remarcar que el fet que tant els principis de la teoria de classes abans estudiats, com la definició de correspondència biunívoca o la proposició que expressa que el cardinal d'una classe és més gran o igual que el d'una altra, s'expressin en el context de la lògica de relatius de segona intenció, indica clarament la preferència de Peirce per la lògica de segon ordre alhora d'introduir i estudiar les propietats de les relacions i nocions matemàtiques: pertinença, equipotència, cardinalitat, etc. Tal com veurem en propers capítols, aquesta preferència serà compartida també per Frege i Russell, els quals faran un ús preeminent de la lògica de segon

[1] W5 187 (CP 3.401).
[2] W5 188 (CP 3.401).
[3] W5 188 (CP 3.401).

ordre a l'hora de definir lògicament els conceptes de les matemàtiques. És segurament aquesta preeminència concedida a la lògica de segona intenció en l'anàlisi de les nocions matemàtiques, el que durà Peirce a afirmar en un manuscrit de 1893 que:

> La Lògica de segona intenció o, com jo també l'anomeno, la Lògica Objectiva, constitueix amb diferència la part més extensa de la lògica formal. És també la part més bella i interessant i, pel que fa a la seva significació profunda és incomparablement superior.[1]

Això fa plànyer, encara més, que Peirce no desenvolupés d'una forma més exhaustiva aquesta lògica en el marc de les seves recerques lògico-algèbriques. L'article "On the Algebra of Logic" de 1885 acaba amb la definició de conjunt finit a partir del sil·logisme de quantitat transposada de De Morgan, de la qual ja ens hem ocupat abans (*Cf. supra*, § 7).

12. L'àlgebra dicotòmica, la reducció a una operació única i les matrius trivalents

Com ja sabem, Peirce havia definit en l'article "On the Algebra of Logic" de 1885 les connectives primitives -el condicional i la negació- com a funcions de veritat i havia proposat un procediment per decidir la validesa d'una fórmula o la correcció d'un argument que coincideix essencialment amb el procediment via matrius o taules de veritat habitual avui en dia, el qual fou popularitzat per les contribucions de Łuckasiewicz, Post i Wittgenstein en els anys vint i trenta (*Cf. supra*, § 9). Aquest mètode matricial, aplicat per primera vegada en l'article de 1885, troba la seva continuació en l'article titulat "The Simplest Mathematics" (*Peirce 1902$_b$*), que havia de constituir el capítol 3 de l'obra *Minute Logic*, la qual no va arribar mai a la impremta. En aquest article, Peirce posa les bases per al desenvolupament del càlcul proposicional com una *àlgebra dicotòmica* o *sistema de valors*, la qual, tal com assenyala Peirce, parteix de la més simple hipòtesi de la qual poden partir les matemàtiques, a saber, que "només hi ha dos objectes, que podrien denotar-se per **v** i **f**".[2] Peirce anomenarà *valors* a **v** i **f** i *quantitats* a aquells objectes de l'univers, el valor dels quals és desconegut,

[1] CP 4.80.
[2] CP 4.250.

però que, en determinats casos, hom pot arribar a conèixer. Tota *quantitat* és idèntica o està lligada a un dels dos valors, **v** o **f** -encara que potser hom no sàpiga quin d'ells-, però no a ambdós. Aquest és el tret essencial de l'àlgebra dicotòmica, és a dir, la condició d'aplicabilitat d'una àlgebra tal.[1] Si una determinada quantitat, per exemple x, té el valor **v**, Peirce la representarà per $\underline{x}$, i si té el valor **f**, la representarà per $\bar{x}$. El problema que sorgeix aleshores es determinar les possibles afirmacions o enunciats respecte el valor d'una determinada quantitat o d'una combinació determinada de valors assignats a diferents quantitats. Per això Peirce es basa en un conegut resultat segons el qual les possibles combinacions o formes de connexió entre un conjunt de m objectes d'un conjunt i un altre amb n objectes és igual a n^m. Segons Peirce:

> Una afirmació sobre el valor d'una quantitat, o bé admet com a possible, o bé exclou, cada un dels valors **v** i **f**. Així, **v** i **f** formen el conjunt dels m objectes cadascun d'ells connectat amb només un dels n objectes, *admissió* i *exclusió*. Hi ha, doncs, n^m, o 2^2, o 4, possibles afirmacions diferents sobre el valor de qualsevol quantitat, x. A saber, una afirmació serà aquella sense sentit, en tant que admet cada un dels valors. Es representa per la lletra x. Una altra afirmació violarà la hipòtesi de la dicotomia, en excloure ambdós valors. Podria representar-se per $\underline{\bar{x}}$. De les dues restants, una admetrà **v** i exclourà **f**, a saber, $\underline{x}$; l'altra admetrà **f** i exclourà **v**, a saber, $\bar{x}$.[2]

És a dir, si posem **v** = vertader i **f** = fals, a = admissió i e = exclusió, llavors tenim les possibilitats següents:

$$1.\ \mathbf{v}a,\ \mathbf{f}a;\quad 2.\ \mathbf{v}e,\ \mathbf{f}e;\quad 3.\ \mathbf{v}a,\ \mathbf{f}e;\quad 4.\ \mathbf{v}e,\ \mathbf{f}a;$$

on, per exemple, la primera possibilitat indica que x s'admet com a vertadera i com a falsa. Notem que si posem, d'una banda, $\mathbf{v} = 1$ i $\mathbf{f} = 0$ i, de l'altra, $a = 1$ i $e = 0$, tenim llavors que podem representar les quatre possibilitats anteriors mitjançant les següents taules de veritat:

---

1 *Cf.* CP 4.251.

2 CP 4.260.

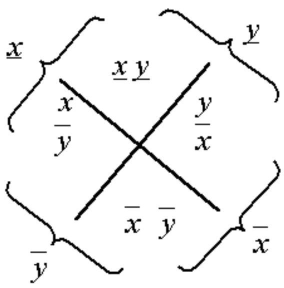
x	
1	1
0	1

x	
1	0
0	0

x	
1	1
0	0

x	
1	0
0	1

o, anàlogament, com les funcions $(1,1)x$, $(0,0)x$, $(1,0)x$ i $(0,1)x$, on $(u,v)x$ representa la funció que té com a valor u quan $x=1$ i v quan $x=0$. Això mostra clarament que les quatre possibilitats considerades per Peirce representen les quatre possibles funcions de veritat d'un argument. Així, per exemple, la quarta possibilitat considerada per Peirce, això és, **v***e*, **f***a* representa la funció de veritat $(0,1)x$, això és, la funció de x que és falsa quan x és vertadera i vertadera quan x és falsa, és a dir, la negació de x, que Peirce representa per $\bar{x}$. Una vegada considerades les possibles afirmacions respecte els valors d'una quantitat, Peirce considera el cas de les possibles afirmacions sobre els valors de dues quantitats x i y. Segons Peirce:

> Aquí hi ha dues quantitats, cada una de les quals té només un dels dos valors; així doncs, hi ha 2^2, o 4, possibilitats, tal com es mostra en aquest diagrama:
>
> Damunt de la línia obliqua ascendent cap a la dreta, hi ha els casos en què x
>
> 
>
>
> és **v**; sota d'ella, aquells en què x és **f**. Damunt de la línia obliqua descendent cap a la dreta, hi ha els casos en què y es **v**; sota d'ella, aquells en que y és **f**. Ara bé, en cada afirmació possible, cada una d'aquestes possibilitats és o bé admesa o bé exclosa, però no ambdues coses. Així, m serà 2^2, mentre que n serà 2; i hi haurà n^m, o 2^4 , o 16, possibles afirmacions.[1]

Si, com havíem fet abans, representem per $(u,v,w,z)xy$ la funció de x i y que té el valor u per $x=1$ i $y=1$, v per $x=1$ i $y=0$, w per $x=0$ i $y=1$ i z per $x=0$ i $y=0$, les 16 afirmacions a les qual es refereix Peirce, es poden escriure com:

$$(1,1,1,1)xy,\ (1,1,1,0)xy,\ (1,1,0,1)xy,\ (1,1,0,0)xy,$$

[1] CP 4.261.

$$(1,0,1,1)xy,\ (1,0,1,0)xy,\ (1,0,0,1)xy,\ (1,0,0,0)xy,$$

$$(0,1,1,1)xy,\ (0,1,1,0)xy,\ (0,1,0,1)xy,\ (0,1,0,0)xy,$$

$$(0,0,1,1)xy,\ (0,0,1,0)xy,\ (0,0,0,1)xy,\ (0,0,0,0)xy,$$

que representen les 16 possibles funcions de veritat de dos arguments. Així, per exemple, la funció $(1,1,1,0)xy$ és vertadera quan x i y són falses, quan x és vertadera i y falsa i quan x és falsa i y vertadera i és falsa quan x i y són falses. Així, $(1,1,1,0)xy$ és la funció $x \vee y$, $(1,1,0,1)xy$ és la funció $x \mathrel{-\!\!<} y$ i $(1,0,0,0)xy$ és $x \wedge y$.

Finalment, assenyala Peirce, "per a tres quantitats, hi ha 2^3, o 8, conjunts de valors possibles, i conseqüentment 2^8, o 256, formes diferents de proposicions".[1] Arribat a aquest punt, Peirce es planteja com expressar les proposicions amb tres quantitats mitjançant els signes que ha emprat per expressar les proposicions amb dues quantitats, donat que no s'ha adoptat encara cap signe per a la composició de proposicions. Doncs bé, segons Peirce, "el remei per aquest estat de coses rau simplement en donar els valors **v** i **f** a les proposicions; això és, en admetre-les dins l'univers de les quantitats".[2] La primera conseqüència d'això és que hom haurà d'identificar o bé el valor de $\bar{x}$ amb el de x o be identificar-hi el de $\underline{x}$. Peirce adopta naturalment aquest últim punt de vista, amb la qual cosa es té, d'una banda, que $x \equiv \underline{x} \equiv \underline{\underline{x}} \equiv \ldots$ i, de l'altra, que $x \equiv \bar{\bar{x}} \equiv \ldots$ D'aquesta manera hom indicarà amb el *vinculum* (l'operació __) o el seu equivalent, els parèntesis, que allò que està subratllat o és dins dels parèntesis és una *quantitat* i, per tant, ambdós signes podran ser utilitzats per a la composició de proposicions. Per exemple, assenyala Peirce, si "$x \curlywedge y$ significa que x té el valor **f** i y té el valor **f**, llavors $(x \curlywedge y) \curlywedge z$ o $\underline{x \curlywedge y} \curlywedge z$ significarà que z és falsa, però que l'enunciat segons el qual x i y són ambdós **f** és ell mateix **f**, això és, és *fal*s".[3] Aquest exemple és interessant perquè introdueix el signe $\curlywedge$, que podem anomenar *no-disjunció*, a partir del qual Peirce defineix la resta d'operacions. Segons Peirce, en efecte, "amb aquests dos signes, el vinculum (amb els seus equivalents, parèntesis, cometes, claudàtors, etc) i el signe $\curlywedge$ [...] es poden expressar tots els enunciats sobre els valors de quantitats.[4] Així tenim, per exemple, que:

1 CP 4.262.
2 CP 4.263.
3 CP 4.264.
4 CP 4.264. En la formalització de les definicions anteriors hem prescindit del *vinculum* i ens hem servit només dels parèntesis.

$$x \text{ és } (x \curlywedge x) \curlywedge (x \curlywedge x),$$

$$\bar{x} \text{ és } (x \curlywedge x),$$

$$x \vee y \text{ és } (x \curlywedge y) \curlywedge (x \curlywedge y),$$

$$x \cdot y \text{ és } (x \curlywedge x) \curlywedge (y \curlywedge y),$$

$$x \equiv y \text{ és } (x \curlywedge (y \curlywedge y)) \curlywedge ((x \curlywedge x) \curlywedge y).$$[1]

I és igualment possible, afirma Peirce, expressar a partir d'aquesta operació totes les proposicions referents a dues o més quantitats. Finalment, Peirce afirma que també es possible expressar qualsevol proposició a partir del *vinculum* i el signe $\overline{\curlywedge}$, que expressa la incompatibilitat entre proposicions, és a dir, la seva *no-conjunció*. Per això, demostra la interdefinibilitat d'ambdues operacions de la següent manera:

$$\text{Com que } x \curlywedge y \equiv \bar{x} \cdot \bar{y}$$

$$\text{i } x \,\overline{\curlywedge}\, y \equiv \bar{x} \vee \bar{y},$$

$$\text{donat que } \bar{x} \cdot \bar{y} \equiv -[-(\bar{x} \vee \bar{x}) \vee -(\bar{y} \vee \bar{y})],$$

$$\text{ha de ser veritat que x } \curlywedge\ y \equiv ((x \,\overline{\curlywedge}\, x) \,\overline{\curlywedge}\, (y \,\overline{\curlywedge}\, y)) \,\overline{\curlywedge}\, ((x \,\overline{\curlywedge}\, x) \,\overline{\curlywedge}\, (y \,\overline{\curlywedge}\, y)).$$

$$\text{I donat que } \bar{x} \vee \bar{y} \equiv -[-(\bar{x} \cdot \bar{x}) \cdot -(\bar{y} \cdot \bar{y})],$$

$$\text{ha de ser veritat que } x \,\overline{\curlywedge}\, y \equiv ((x \curlywedge x) \curlywedge (y \curlywedge y)) \curlywedge ((x \curlywedge x) \curlywedge (y \curlywedge y)).$$[2]

A partir dels textos anteriors, no hi ha dubte que Peirce va ser el primer que va veure la possibilitat de desenvolupar el càlcul proposicional a partir d'una única connectiva. Destaquem, en efecte, que la *no-disjunció* i la *no-conjunció* són, cadascuna d'elles, les úniques connectives d'aritat menor o igual a 2 que constitueixen un sistema complet de connectives per al càlcul proposicional. Malauradament, Peirce no va acabar mai la seva obra *Minute Logic* i aquests textos no van aparèixer fins l'any 1933 en que van aparèixer el tercer i quart volum de *Collected Papers of Charles Sanders Peirce* (*Peirce 1931-1958*). Per aquest motiu, tal com ha assenyalat Church en la seva coneguda obra *Introduction to Mathematical Logic* (*1956*):

---

[1] CP 4.264.

[2] CP 4.265, nota dels editors al peu de la pàgina 216. Com abans, hem prescindit del *vinculum* i hem emprat el signe d'equivalència en comptes del signe d'igualtat emprat originàriament per Peirce.

> La primera publicació de l'observació que el càlcul proposicional podria basar-se en una sola connectiva primitiva fou realitzada per H. M. Sheffer en un article a *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 14 (1913), pp. 481-488 [...]
>
> Sheffer empra el signe de disjunció, ∨, invertit, com a signe de no-disjunció i introdueix la no-conjunció només en una nota a peu de pàgina sense emprar cap signe especial per a ella. La línia vertical, anomenada després la barra de Sheffer, fou emprada per Sheffer només en connexió amb l'àlgebra booleana; la seva utilització com a signe de la no-conjunció fou introduït per J. G. P. Nicod en un article que conté el seu axioma únic per al càlcul proposicional (*Cf. Proceedings for the Cambridge Philosophical Society*, vol. 19 (1917-1920), pp. 32-41).[1]

Peirce no només fou el primer que aplicà el mètode matricial per construir la lògica proposicional bivalent sinó que, tal com han mostrat M. Fisch i A. Turquette en un important article titulat "Peirce's Triadic Logic" (*1966*), fou també el primer en utilitzar aquest mètode per desenvolupar la lògica proposicional trivalent. En efecte, en aquest article Fisch i Turquette publicaren per primera vegada unes notes inèdites de Peirce, en les qual aquest autor defineix mitjançant matrius trivalents -és a dir, matrius en les que es consideren tres valors de veritat *V*, *L* i *F* diferents- quatre operacions unàries i sis operacions binàries. Així, per les primeres tenim les següents matrius:

x	$\bar{x}$	$\overset{0}{\bar{x}}$	$\grave{x}$	$\acute{x}$
V	F	L	F	L
L	L	L	V	F
F	V	L	L	V

Tal com han assenyalat Fisch i Turquette, aquestes matrius han estat emprades posteriorment per altres lògics que han treballat en el camp de les lògiques multivalorades per definir les seves operacions unàries. Així, $\bar{x}$ coincideix amb la negació *Nx* de Łukasiewicz, $\overset{0}{\bar{x}}$ es correspon amb la funció *tertium* d'Słupecki i, finalment, $\grave{x}$ i $\acute{x}$ amb les negacions $\sim_3^2 x$ i $\sim_3 x$ respectivament de Post.[2] Les operacions binàries es defineixen mitjançant les següents matrius:

---

1 *Church 1956*, 133-34, n. 207.

2 *Cf. Fisch i Turquette 1966*, 76.

Φ	V	L	F
V	V	V	V
L	V	L	F
F	V	F	F

Θ	V	L	F
V	V	V	V
L	V	L	L
F	V	L	F

Ψ	V	L	F
V	V	V	F
L	V	L	F
F	F	F	F

Ξ	V	L	F
V	V	L	F
L	L	L	F
F	F	F	F

Ω	V	L	F
V	V	L	F
L	L	L	L
F	F	L	F

Υ	V	L	F
V	V	L	V
L	L	L	L
F	V	L	F

Notem, seguint Fisch i Turquette que els operadors Θ i Ξ, Φ i Ψ i Υ i Ω són duals entre si respecte a $\overline{}$. L'operador Θ es correspon a la disjunció $\vee_3$ de Post i $\{\Theta, \cdot\}$ és un conjunt adequat de connectives, és a dir, tots els operadors definibles mitjançant matrius trivalents poden definir-se a partir d'aquest conjunt. D'altra banda, els operadors Φ i Ψ es corresponen respectivament amb la disjunció i conjunció de Sobocinski. Finalment, l'operador Ω es correspon amb l'operació $\cap$ de Bocvar o amb la conjunció feble de Kleene i, per tant, Υ es correspon a la disjunció feble del mateix autor.[1] Notem també que $\langle T_3, \Theta, \Xi \rangle\,(2,2)$ on $T_3 = \{V, L, F\}$ és un reticle distributiu, mentre que $\langle T_3, \Phi, \Psi \rangle\,(2,2)$ i $\langle T_3, \Upsilon, \Omega \rangle\,(2,2)$ no són reticles, donat que no satisfan la llei d'absorció. Veiem doncs, que les matrius anteriors serveixen per definir una sèrie d'operacions a partir de les quals es pugui desenvolupar la lògica trivalent -o triàdica, com l'anomena Peirce. Però, com caracteritza Peirce aquesta lògica? És a dir, quines són les motivacions filosòfiques per desenvolupar-la? Respondre aquests interrogants ens durà, tal com veurem de seguida, a aportar una mica de llum sobre la interpretació dels valors V, L i F i els diversos operadors i, en definitiva, sobre la naturalesa de la lògica triàdica. Segons Peirce:

> La Lògica Triàdica és aquella lògica que, encara que no rebutja enterament el principi de Terç Exclòs, tanmateix reconeix que tota proposició, *S* és *P*, és o bé vertadera, o falsa, o bé *S* té un mode d'ésser inferior, de manera que no pot ser

[1] *Cf. ibid.*, 76.

determinadament P ni determinadament no P, sinó que és en el límit entre P i no P. Naturalment, en referència al principi de contradicció, continua essent vertader que l'estat de coses representat per la proposició no pot ser V i F, verum atque falsum i ha de ser $V\psi F$ si per F entenem $L\psi F$ (L significa el límit, és a dir, que S no és susceptible de la determinació P o de la determinació F).[1]

Però, a què es refereix Peirce quan escriu que la lògica triàdica rebutja, encara que no enterament, el principi de terç exclòs i, en canvi, està subjecta al principi de contradicció? Siguin ψ i $\bullet$ dos operadors definits mitjançant matrius trivalents, encara sense determinar, que interpretem intuïtivament com una disjunció i una conjunció respectivament. Aleshores, segons Peirce, s'ha de complir, d'una banda, $V\psi L \psi F = V$ i $V\psi F \neq V$ -excepte en el cas que $F = F\psi L$ o $V = V\psi L$- i, de l'altra, $V \bullet F = F$. Si posem, $F = F\psi L$ i $V = V\psi L$ tindrem, per dualitat respecte a $\overline{}$, que $V = V \bullet L$ i $F = F \bullet L$, de manera que el significat de L quedarà reduït a la seva expressió mínima (*i.e.* $L = L\psi L = L \bullet L$). I aquesta assignació de valors als operadors ψ i $\bullet$ és correspon precisament amb els valors assignats als operadors Φ i Ψ estudiats abans. Però també podem ampliar el significat de L, conservant $V = V\psi L$, però posant $L = L\psi F$; llavors, per dualitat, $F = F \bullet L$ i $L = L \bullet V$, resultant així que aquesta assignació de valors als operadors ψ i $\bullet$ coincideix amb la dels operadors Φ i Ξ respectivament. En qualsevol cas tenim, com Peirce volia, que

$$V\psi F = (V\psi L)\psi F = V\psi (L\psi F) = V.$$

En el text citat més amunt, Peirce afirmava que la lògica triàdica reconeix que "tota proposició, S és P, és o bé vertadera, o falsa, o bé S té un mode d'ésser inferior, de manera que no pot ser determinadament P ni determinadament no P". Sembla, doncs, coherent identificar L amb l'indeterminat i contextualitzar la lògica triàdica en l'anàlisi filosòfica que en les mateixes dates Peirce dugué a terme sobre aquest concepte i, en general, sobre les diferents modalitats. Així, per exemple, en un manuscrit de 1908, Peirce distingeix tres modalitats: *Potencialitat* que defineix com "l'absència de Determinació (en el sentit ampli usual), no d'una mena merament negativa, sinó una capacitat positiva de ser Si o ser No; no ignorància, sinó un mode d'ésser." *Actualitat* que es defineix com "l'Acte que determina el

[1] *Ibid.*, 75. Òbviament, per una lectura correcta del text, en la darrer línia hem de substituir F per no-P.

merament possible” i, finalment, *Necessitat*, que és defineix com el “recolzament de l’Actualitat per la raó”.[1] En aquest sentit, tal com assenyalen Fisch i Turquette:

> La lògica triàdica pot interpretar-se com una lògica modal, que es proposa per fer front a les indeterminacions resultants d’aquell mode d’ésser que Peirce ha anomenat “Potencialitat” i “Possibilitat real”. Sota aquesta interpretació, la lògica diàdica esdevé un cas límit de la lògica modal triàdica, com a resultat d’eliminar la indeterminació i ésser determinat enterament per l’“Actualitat”.[2]

És interessant destacar també com, en el text abans citat, Peirce defineix la modalitat de “Potencialitat” com una capacitat positiva, un mode d’ésser irreductible a la modalitat de Actualitat. En aquest sentit, Peirce afirma en una carta a Williams James de 1909 que “des de fa temps, me n’he adonat que és un defecte seriós en la lògica existent que no tingui en compte el *límit* entre dos reialmes. No dic que el Principi de Terç Exclòs sigui del tot *fals*; però *dic* que en qualsevol camp del pensament hi ha un terreny intermedi entre l’*afirmació positiva* i la *negació positiva* que és tant Real com ell”.[3]

13. Proposicions, *rhemes* i índexs

En aquesta secció i la següent ens farem ressò de la interpretació pragmàtica de les proposicions desenvolupada per Peirce a la dècada dels 90 i a la primera dècada del segle XX. Aquesta interpretació durà Peirce a introduir nous conceptes semiòtics -com ara el de *rhema* o *precepte*- que el permetran donar raó de la naturalesa de les proposicions a partir de la forma lògica d’aquestes revelada per l’“àlgebra general de la lògica” o lògica quantificacional desenvolupada en els articles “The Logic of Relatives” de 1883 i “On the Algebra of Logic” de 1885. Tal com el mateix Peirce escriví a Lady Welby, en una carta de 12 d’Octubre de 1904, “una *proposició* [...] no és una asserció, sinó que és un signe *capaç* de ser asserit”.[4] L’argument de Peirce a favor d’aquesta distinció entre proposició i asserció és que “una i la mateixa proposició pot ser afirmada, negada, jutjada, dubtada, examinada

---

1 *Cf. ibid.*, 78.
2 *Ibid.*, 79.
3 *Ibid.*, 81.
4 Citat a *DiLeo 1997* (*Houser*, *Roberts i Van Evra (eds.) 1997*, 578).

interiorment, posada com una pregunta, desitjada, demanada, ordenada efectivament, ensenyada o simplement expressada, i no esdevé per això una proposició diferent”.[1] Amb tot, assegura Peirce, “l’ús normal d’una proposició és afirmar-la, i les seves propietats lògiques principals estan relacionades amb allò que resulta [de considerar-la] en referència a la seva afirmació”.[2] Segons Peirce, una asserció o afirmació és “un acte d’un emissor [*utterer*] d’una proposició a un intèrpret i consisteix, en primer lloc, en l’exercici deliberat, en expressar la proposició, d’una força que té com objectiu determinar una creença en la ment de l’intèrpret”.[3] Remarquem, doncs, que la distinció peirciana entre proposició i asserció pressuposa la distinció, corrent avui en dia, entre *contingut* i *força* d’una oració o frase[4] i que tota asserció pressuposa l’existència d’un *emissor* i un *intèrpret* -o *locutor* i *oient*. La pregunta és ¿com pot l’afirmació d’una proposició tenir aquesta mena de força que, segons Peirce, la caracteritza? La resposta de Peirce és que, en segon lloc, “una asserció consisteix en la provisió d’evidència per part del locutor a l’oient que el locutor creu quelcom”[5] i, per tant, una asserció “és una temptativa per fer que la persona a la qual ens adrecem pensi d’una manera determinada”,[6] és a dir, cregui allò que nosaltres afirmem. Ara bé, donat que un emissor pot no ser sincer, la pregunta és llavors ¿perquè l’oient ha de creure’s allò que el seu interlocutor afirma? La resposta de Peirce és que, en darrer terme, “l’acte d’asserció suposa que, una vegada formulada la proposició, la persona ha realitzat un acte que l’exposa a les sancions de la llei social (o, en qualsevol cas, a aquelles de la llei moral) en cas que [aquella proposició] no fos vertadera, a no ser que tingués una excusa definida i suficient”.[7] Aquesta última caracterització de l’asserció com un acte en el qual hom afirma una proposició i assumeix una certa responsabilitat envers la seva afirmació és la que juga un paper més rellevant en l’anàlisi peirciana dels diferents tipus d’enunciats característic de la dècada dels 90 i de la primera dècada del nostre segle i, en particular, dels enunciats quantificacionals.

A partir dels anys 90 Peirce ja no analitza les proposicions en subjecte, còpula i predicat, sinó simplement en subjecte -o subjectes- i predicat o *rhema*, en el qual inclou la

---

1 NE 4 248. Les majúscules NE fan referència a *The New Elements of Mathematics* (*Peirce1976*) i van seguides, de la forma habitual, del volum i la pàgina pertinents.

2 NE 4 248.

3 NE 4 249.

4 En termes moderns, en efecte, diem que una oració té un *contingut* -la *proposició* expressada per ella- i una *força* -assertòrica, interrogativa, exclamativa, etc. Vegeu, per exemple: *Dummett 1973*, cap. 10 i *Taylor 1998*, 129-30.

5 CP 2.335.

6 Citat a *Hilpinen 1982*, 183.

7 CP 2.315, *Cf.* NE 4 249.

còpula. La noció de *rhema* és introduïda per Peirce per primera vegada l'any 1892, en connexió amb la noció de relatiu. Segons Peirce, en efecte, un *rhema* "només es diferencia d'un *terme* relatiu pel fet de conservar la "còpula" o signe d'asserció".[1] Peirce sembla haver-se inspirat per arribar a aquest concepte en la formulació química, car assenyala que "un rhema és quelcom força anàleg a un àtom químic o a un radical amb enllaços no saturats" i assimila els *rhemes* no relatius i relatius amb radicals monovalents i multivalents respectivament. Com exemples de *rhemes*, Peirce posa " --- és mortal" o " --- estima --- ", els quals constitueixen respectivament un rhema monàdic o *mònada* i un rhema diàdic o *díada*. Una bona explicació de la noció peirciana de *rhema* l'ofereix el següent text de 1903:

> Si esborrem parts d'una proposició per tal de deixar espais en blanc en el seu lloc, i si aquests espais en blanc són de tal mena que si cada un d'ells s'omple amb un nom propi el resultat és una proposició, llavors la forma amb espais en blanc de la proposició obtinguda inicialment per les parts esborrades s'anomena un *rhema*. Depenent de si el nombre d'espais en blanc en un rhema és 0, 1, 2, 3, etc, podria anomenar-se un *medad* (de *μηδέν*, no res), *mònada*, *díada*, *tríada*, etc.[2]

Així doncs, tota proposició estarà constituïda per un subjecte -o subjectes- i un predicat, de tal manera que "un nom propi o terme que ompli l'espai en blanc d'un rhema, és un *subjecte* de la proposició en què ocorre" i el "*rhema*, considerat com a part de la proposició, és el seu *predicat*".[3] Ara bé, quina és la funció semiòtica de *subjecte* i *predicat*? Segons Peirce, el predicat "excita quelcom semblant a una imatge o somni en la ment de l'intèrpret", mentre que el subjecte "serveix per identificar quelcom que el predicat representa".[4] Així doncs, el subjecte és un signe la funció del qual és dirigir l'atenció de l'intèrpret cap un cert objecte o objectes i és, per tant, un *índex*, mentre que el predicat és un signe la funció del qual és representar una qualitat -que la proposició representa com una qualitat de l'objecte o objectes en qüestió- i és, per tant, una *icona*.[5] En el *Syllabus* de 1902, Peirce distingeix entre tres tipus de signes que poden figurar com a subjectes d'una proposició:

---

1 CP 3.420.
2 CP 2.272.
3 Citat a *DiLeo 1997* (*Houser*, *Roberts i Van Evra (eds.) 1997*, 580).
4 *Cf.* 2.312.
5 Citat a *Hilpinen 1982*, 183.

> Tot subjecte d'una proposició, si no és un Índex (com les condicions ambientals dels interlocutors, o quelcom que atreu l'atenció en aquest ambient, com ara el dit amb què el locutor assenyala quelcom) o un Subíndex (com ara un nom propi, un pronom personal o demostratiu), ha de ser un *Precepte*, o Símbol, el qual no només descriu a l'intèrpret què s'ha de fer -per part seva, dels altres o de tots plegats- per tal d'obtenir un Índex d'un individu (ja sigui una unitat o un conjunt d'unitats) del qual la proposició es representada com a vertadera, sinó que també assigna una designació a aquell individu o, si és un conjunt, a cada unitat del conjunt.[1]

D'acord amb Peirce, la relació que es dóna entre un subíndex i el seu objecte és la mateixa que es dóna entre un índex genuí i el seu objecte, això és, una "correspondència real",[2] car els subíndexs tenen, com els mateixos índexs, la funció de "cridar l'atenció de l'oient per a que faci ús del seu poder d'observació i estableix així una connexió real entre la seva ment i l'objecte".[3] La diferència entre un índex genuí i un subíndex rau en el fet que "un Índex genuí i el seu objecte han de ser [objectes] individuals existents (ja siguin coses o fets)",[4] mentre que un subíndex no és un objecte individual. Així, assenyala Peirce, "un nom propi, un demostratiu personal, un pronom relatiu o les lletres afegides a un diagrama, denoten el que denoten degut a una connexió real amb el seu objecte, però cap d'ells és un índex, donat que no és un [objecte] individual".[5] Si, tal com acabem de veure, Peirce posa en algun indret tant els pronoms personals i demostratius com els noms propis i pronoms relatius com exemples de subíndexs, en altres indrets considera els primers com exemples d'índexs genuïns i els segons com a exemples d'índexs degenerats.[6] Tal com acabem de dir, la relació que es dóna entre un índex genuí i el seu objecte és una "correspondència real" o, com també en diu Peirce, una "relació existencial", [7] en el sentit que l'índex es refereix directament a l'objecte representat, el qual té una existència real; en canvi, la relació que es dóna entre un índex degenerat i el seu objecte és una relació de "referència", això és una relació en la qual "encara que [els índexs degenerats] podrien referir-se, accidentalment o indirecta, a les coses existents, es refereixen directament, i només cal que es refereixin, a les imatges mentals que

---

1 CP 2.330.
2 CP 2.284-87.
3 CP 2.287.
4 CP 2. 283.
5 CP 2.284.
6 CP 2.305.
7 CP 2. 283.

les paraules prèviament han creat".[1] Per això, Peirce dirà també que els índexs degenerats tenen una "icona com a part constituent seva" o, fins i tot, que la seva funció és servir com a icones d'índexs genuïns. En definitiva, Peirce considera els noms propis i els pronoms relatius com a índexs, però els inclou dins la categoria dels subíndexs o índexs degenerats. Pel que fa als primers, Peirce escriu que:

> Un nom propi, quan hom se'l troba per primera vegada, està connectat existencialment amb alguna percepció o algun altre [tipus de] coneixement individual de l'[objecte] individual que anomena. És *llavors*, i només llavors, un Índex genuí. La propera vegada que hom es troba amb ell, hom el considera com una Icona d'aquell Índex.[2]

Així doncs, un nom propi funciona com un índex genuí si és la primera vegada que l'intèrpret es troba amb ell, car llavors i només llavors el nom propi dirigeix l'atenció de l'intèrpret cap a l'objecte anomenat com si d'un pronom personal o demostratiu es tractés, això és, indicant-lo directament i en connexió real amb ell. Després d'aquesta primera vegada, el nom propi funciona com un índex degenerat, això és, es refereix a l'objecte anomenat indirectament, a través de les imatges mentals que el contacte habitual amb aquest nom han creat en l'intèrpret. Segons Peirce, en efecte, "una vegada adquirida una sòlida familiaritat amb ell [el nom propi], esdevé un Símbol, l'interpretant del qual el representa com una Icona d'un Índex de l'Individu anomenat".[3] L'argument anterior a favor del diferent rol semàntic que poden jugar els noms propis i la seva conseqüent classificació semiòtica com a índexs genuïns o degenerats, pressuposa d'alguna manera les dues tesis següents: 1. Els noms propis són substituts imperfectes o degenerats dels pronoms personals i demostratius, al contrari de com tradicionalment s'ha pensat; 2. El rol semàntic dels pronoms personals i demostratius és denotar un individu *indicant-lo* o assenyalant-lo, mentre que els noms propis el denoten *anomenant-lo*. Tal com ho explica Peirce:

> No hi ha raó per dir que *jo*, *tu*, *aquell*, *aquest*, estan en lloc dels noms, car indiquen les coses de la manera més directa possible. És impossible expressar allò a què una asserció fa referència llevat que ho fem per mitjà d'un índex. Un pronom és un índex. Un nom, d'una altra costat, no *indica* l'objecte que denota; i quan hom

[1] CP 2. 305.
[2] CP 2. 329.
[3] CP 2.329.

> empra un nom per mostrar de què està parlant, compta amb l'experiència de l'oient per compensar la incapacitat del nom per fer allò que el pronom fa tot d'una. Així doncs, un nom és un substitut imperfecte d'un pronom [...] Allen i Greenough diuen, "els pronoms indiquen alguna persona o cosa sense anomenar-la o descriure-la". Això és correcte -correcte i estimulant; només que sembla millor dir el que fan; no simplement el que no fan.[1]

A banda de les dues tesis abans esmentades, el text anterior introdueix dues tesis més de gran importància. La primera és que "és impossible expressar allò a què una asserció fa referència llevat que ho fem per mitjà d'un índex", car d'ella depèn la tesi peirciana segons la qual el subjecte o subjectes d'una proposició han de ser índexs. Amb tot, com que dins de la categoria dels índexs o, el que és el mateix, dels signes que poden figurar com a subjectes d'una proposició, Peirce inclou també el *preceptes* o *quantificadors*, serà millor abordar la tesi anterior una vegada hàgim explicat la caracterització peirciana dels quantificadors *qua* índexs. L'altra tesi important del text anterior és que "els pronoms indiquen alguna persona o cosa sense anomenar-la o descriure-la" i, per tant, que *indicar, anomenar* i *descriure* són termes que denoten funcions semàntiques diferents. Que *indicar* i *anomenar* representen, per a Peirce, funcions semàntiques diferents, es dedueix fàcilment de la tesi abans esmentada segons la qual *anomenar* és una *forma indirecta* d'*indicar* un objecte. Que *indicar* i *descriure* representen funcions semàntiques diferents sembla també prou clar car, encara que Peirce no atorga cap importància especial a les descripcions definides -termes singulars que poden figurar com a subjectes d'una proposició i la funció dels quals és designar un objecte a través d'una descripció-, hi ha una certa evidència textual que hauria inclòs aquesta mena d'expressions dins la categoria dels *preceptes*, la funció dels quals és, com ja sabem, descriure a l'intèrpret què ha de fer per obtenir un índex dels individus per als quals la proposició és vertadera. Així doncs, la funció de les descripcions definides és diferent de la dels pronoms personals i demostratius o, el que és el mateix, *descriure* i *indicar* són funcions semàntiques diferents. Però, és distinta també la funció semàntica de les descripcions definides de la dels noms propis, és a dir, constitueixen *anomenar* i *descriure* funcions semàntiques diferents? Aquesta pregunta té interès donada l'analogia que hom podria establir entre la caracterització semàntica que fa Peirce dels noms propis com a índexs degenerats -és a dir, com a termes que es refereixen a l'objecte anomenat indirectament, a través de les imatges mentals que l'intèrpret associa amb aquest nom- i la caracterització fregeana o

[1] CP 2.287 n.

russelliana, habitual en la filosofia del llenguatge contemporània, de les descripcions definides com a termes singulars que designen indirectament, això és, a través d'una condició o condicions que satisfà únicament l'objecte designat. Hom podria, en efecte, deduir de la caracterització peirciana dels noms propis que cada nom propi significa un conjunt definit de propietats o condicions que permeten a l'emissor designar l'objecte anomenat com l'únic objecte que satisfà aquesta condició i a l'intèrpret identificar-lo com el mateix objecte. És veritat que, segons Peirce, els noms propis permeten a l'intèrpret identificar l'objecte anomenat pel fet que aquell associa amb aquest nom certs caràcters o qualitats, però, tal com indica el mateix Peirce:

> [D'aquí] no se segueix, i gairebé mai podria ser cert, que el nom *signifiqui* certs caràcters definitoris, que el facin aplicable a qualsevol cosa que posseeixi aquests caràcters i a res més [...] no hi ha cap conjunt *definit* de caràcters que el nom signifiqui i que el facin preferible a qualsevol altre conjunt de caràcters igualment concloents. Si hi hagués qualsevol caràcter que poguéssim dir que un nom propi significa essencialment, aquest seria la continuïtat de la història del seu objecte.[1]

Sembla clar, doncs, que no podem considerar els noms propis, a la manera de Russell, com descripcions definides disfressades. Aquesta opinió es veu reforçada a mes per la tesi peirciana segons la qual els noms propis, *qua* índexs, no tenen *significat*:

> *Significat* [*meaning*] és l'associació d'una paraula amb imatges, la seva capacitat d'excitar un somni. Un índex no té res a veure amb significats.[2]

Això és, encara que un nom propi pugui despertar un conjunt d'imatges en l'intèrpret que el permetin identificar l'objecte anomenat, aquestes imatges no constitueixen o formen part del nom propi, perquè això suposaria l'existència d'un conjunt definit de caràcters associats al nom, compartits per l'emissor i l'intèrpret i gràcies als quals aquest últim podria interpretar que el nom en qüestió designa un objecte individual concret. Però, tal com hem vist, els noms propis poden complir aquesta funció -i, de fet, així ho fan generalment-, encara que l'emissor i l'intèrpret associïn amb ells conjunts de caràcters diferents. En resum, els noms propis compleixen la seva funció de cridar l'atenció de l'intèrpret sobre un objecte

---

1 Citat a *DiLeo 1997* (*Houser*, *Roberts i Van Evra (eds.) 1997*, 590).

2 CP 4.56.

determinat -això és, la seva funció d'índexs- gràcies al fet que *l'intèrpret associa amb ells* un conjunt de caràcters que el permeten identificar aquell objecte -per això són índexs degenerats-, però els noms propis *no tenen associats amb ells* un conjunt definit de propietats gràcies al qual l'intèrpret identifiqui l'objecte anomenat. Això és, els noms propis no tenen significat.

14. Peirce i la teoria de jocs moderna

Una vegada explicada la interpretació pragmàtica dels índexs i subíndexs o, si preferim dir-ho així, dels índexs genuïns i degenerats, categories dins les quals cal incloure els pronoms personals i demostratius i els noms propis respectivament, hem d'explicar ara la interpretació pragmàtica de l'altra mena de signes que poden figurar com a subjectes d'una proposició, a saber, els *preceptes*, categoria dins la qual s'inclouen els *quantificadors*.[1] D'acord amb Peirce, un *precepte* no indica un objecte singular determinat, sinó que "descriu com l'oient ha d'actuar per tal de fer-se amb l'ocasió de l'experiència a la qual l'asserció fa referència",[2] això és, "informen a l'oient com ha de triar un dels objectes referits".[3] Per això, Peirce anomena també *selectius* als preceptes o quantificadors. Segons Peirce, la lògica només requereix dos tipus de selectius o quantificadors, "el quantificador *universal*, que permet que qualsevol objecte de l'univers, no importa quin, sigui triat [per l'intèrpret], i el quantificador *particular*, que prescriu que sigui triat un objecte apropiat".[4] Per exemple, en l'oració "Tot home mor", "Tot home" implica que l'intèrpret té llibertat per triar un home i considerar que la proposició li és aplicable. En la proposició "Antoni dóna un anell a Cleopatra" si l'intèrpret pregunta ¿quin anell?, la resposta és que l'article indefinit mostra que és un anell que podria haver estat mostrat a l'intèrpret si hagués estat al lloc; i que la proposició només és afirmada de l'anell apropiat".[5] Tal com ha assenyalat R. Hilpinen en l'article "On C. S. Peirce's Theory of Propositions: Peirce as a Precursor of Game-Theoretical Semantics" (*1982*):

---

1 CP 2.339.
2 CP 2.336.
3 CP 2.289.
4 CP 2.339.
5 CP 5.542.

> L'explicació peirciana del significat dels quantificadors es basa en la seva explicació de l'ús d'una proposició en una asserció i s'assembla a la interpretació moderna dels quantificadors en la teoria de jocs.[1]

Segons Peirce, en efecte, l'emissor i l'intèrpret tenen una actitud diferent respecte a la veritat de qualsevol proposició asserida pel primer, car l'emissor intenta defensar-la a tota costa en la mesura que està exposat a ser sancionat si la proposició afirmada per ell esdevé falsa, mentre que l'intèrpret intenta refutar-la en la mesura que "l'afirmació d'una proposició podria determinar un judici [d'assentiment] amb el mateix propòsit [l'afirmació de la proposició] en la ment de l'intèrpret i a càrrec seu".[2] En definitiva, tal com ho explica el mateix Peirce:

> L'emissor és essencialment un defensor de la seva proposició i desitja interpretar-la de tal manera que sigui defensable. L'intèrpret, en no estar-hi interessat de la mateixa manera i ser incapaç d'interpretar-la plenament sense considerar a quin extrem podria arribar, està en una actitud *relativament* hostil i cerca la interpretació menys defensable.[3]

Així, tal com ha observat Hilpinen, emissor i intèrpret es veuen immergits en una mena de *joc* on l'emissor *defensa* la proposició afirmada per ell i l'intèrpret l'*ataca*. Si la proposició afirmada per l'emissor és un enunciat existencial, llavors l'emissor *jugarà* primer i podrà triar un element que satisfaci l'enunciat en qüestió, mentre que si l'enunciat és universal, l'emissor "[permetrà] el seu oponent [l'intèrpret] fer l'elecció de l'objecte singular que el servirà d'exemple per refutar la proposició".[4] En el cas que la proposició afirmada per l'emissor sigui un enunciat quantificacional complex, cada quantificador existencial indicarà l'elecció per part de l'intèrpret d'un objecte singular i cada quantificador universal transferirà l'elecció a l'intèrpret. Peirce observa al respecte que:

> Sigui quin sigui dels dos que faci la seva elecció de l'objecte que ha de triar després que l'altre hagi fet la seva elecció, se suposa que sap quina era aquella elecció. Aquest és un avantatge per a la defensa o l'atac, segons quin sigui el cas.[5]

1 *Hilpinen 1982*, 185.
2 Citat a *Hilpinen 1982*, 185.
3 *Ibid.*, 185.
4 *Ibid.*, 185.
5 *Ibid.*, 186.

Tal com assenyala Hilpinen, “aquí Peirce assumeix que el joc semàntic que està descrivint és un joc amb informació perfecta; això equival a la hipòtesi que els quantificadors [...] estan sempre ordenats i no estan ramificats”.[1] En conclusió:

> Si la veritat d’una proposició es defineix com l’habilitat de l’emissor per defensar-la amb èxit davant de l’atac de l’intèrpret, tal com Peirce fa, aquesta anàlisi de les expressions quantificades dóna les condicions de veritat correctes per als enunciats quantificacionals i és essencialment similar a la interpretació de la moderna teoria de jocs dels quantificadors. Peirce no posseïa un concepte ben definit d’*estratègia*, però el seu concepte de *defensabilitat contra l’atac* és molt proper a la definició de veritat en teoria de jocs (un enunciat és vertader, si i només si, el seu emissor té una estratègia guanyadora en el joc associat amb ell).[2]

Tal com acabem de veure, Hilpinen demostra que Peirce havia formulat de forma bastant explícita el significat dels quantificadors en termes molt semblants a com ho fa la teoria de jocs contemporània. Hi ha tanmateix un altre aspecte de la concepció peirciana dels quantificadors que hem estudiat en les seccions anteriors que és inseparable de la seva interpretació en termes de la teoria de jocs i que val la pena remarcar. Tal com hem vist abans, en efecte, Peirce concep els quantificadors com a *selectius*, és a dir, com a signes a través dels quals s’indica la possibilitat de triar o especificar un objecte singular d’un tipus determinat. En aquest sentit, doncs, la noció peirciana dels quantificadors s’assembla molt a la concepció dels quantificadors com a *funcions selectives* que desenvoluparan en els anys vint Hilbert i Skolem. Hilbert, per exemple, que en l’article “Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik” (*1904*) havia definit, seguint Schröder, els quantificadors com conjuncions i disjuncions infinites, a “Die Grundlagen der Mathematik” (*1928*) definirà els quantificadors amb l’ajut del símbol ε que, tal com ell mateix reconeix, “juga el paper de la funció d’elecció”.[3] En aquest article, en efecte, Hilbert defineix els quantificadors universal i existencial posant (en notació actual) $\forall x\varphi x \equiv \varphi(\varepsilon(\neg\varphi x))$ i $\exists x\varphi x \equiv \varphi(\varepsilon(\varphi x))$, on $\varepsilon(\varphi x)$ denota un element seleccionat per ε entre aquells que satisfan φ, suposant que φ sigui satisfeta per algun element.[4] La interpretació dels quantificadors a través de funcions selectives havia estat

---

1 *Hilpinen 1982*, 186.

2 *Ibid.*, 186.

3 *Van Heijenoort 1967*, 466.

4 Si φ conté variables lliures, llavors $\varepsilon_x\varphi x$ representa una funció que selecciona un valor de x que satisfà φ, per qualsevol valor d’aquelles variables lliures (*Cf. Ibid.*, 466).

explotat també per Skolem uns anys abans per demostrar el teorema de Löwenheim-Skolem. Com ja sabem, en efecte, per tal d'evitar els dobles subíndexs emprats per Löwenheim en la demostració del seu famós teorema, Skolem introduirà les anomenades avui en dia *funcions de Skolem*, les quals permeten transformar tota fórmula de primer ordre ϕ en forma prenexa en una fórmula de segon ordre equivalent a ella de la forma $\exists\vec{f}\hat{\phi}$, on $\hat{\phi}$ és una fórmula universal -*i.e*. de la forma $\forall\vec{x}\psi$, on ψ no té quantificadors (*Cf. supra*, § 10). Així, per exemple, emprant les funcions de Skolem obtenim a partir de la fórmula $\forall x\exists y\psi(x,y)$ la fórmula lògicament equivalent a ella $\exists f\forall x\psi(x,fx)$. D'aquesta manera, les funcions de Skolem permeten reformular el requeriment expressat per la *dependència quantificacional*, seleccionant per cada valor possible del quantificador universal un valor per al quantificador existencial que fa la proposició vertadera. Podem concloure, en definitiva, que tal com ha assenyalat Goldfarb, "la connexió entre els quantificadors i les funcions d'elecció o, més precisament, entre la dependència quantificacional i les funcions d'elecció, constitueix el cor de com els lògics clàssics de la dècada dels vint consideraren la naturalesa dels quantificadors".[1] Ara bé, tal com hem vist en els paràgrafs anteriors, aquesta forma de veure els quantificadors era també la de Peirce, si més no en el context de la seva interpretació pragmàtica dels quantificadors, per la qual cosa podem concloure que la interpretació de Peirce dels quantificadors com a selectius és un clar antecedent de la concepció dels quantificadors com a funcions selectives desenvolupada per Skolem i Hilbert en els anys vint. D'una altra banda, com es ben sabut, les funcions de Skolem estan íntimament lligades amb la interpretació dels enunciats quantificacionals en teoria de jocs, la qual Peirce havia avançat en la seva interpretació pragmàtica dels quantificadors. Com ja sabem, en efecte, d'acord amb la teoria de jocs, un enunciat és vertader si, i només si, l'emissor disposa d'una estratègia guanyadora en el joc associat amb aquell enunciat. Una *estratègia* per un jugador en un joc és un conjunt de regles que li diuen com hauria de jugar en funció de la jugada prèvia de l'altre jugador. L'estratègia és *guanyadora*, si el jugador guanya sempre que empra aquesta estratègia, independentment de com jugui l'altre jugador. En el cas d'una sentència ϕ en forma prenexa, una estratègia guanyadora per l'emissor en el joc associat amb aquesta sentència consisteix en un conjunt de regles, una per cada quantificador existencial de ϕ, que diuen a l'emissor quin element ha de triar en funció dels moviments de l'intèrpret. Per exemple, l'emissor tindrà una estratègia guanyadora en el joc associat amb la sentència:

---

[1] *Goldfarb 1979,* 357.

$$\forall x \exists y \forall z \exists w \psi(x, y, z, w),$$

si, i només si, el següent enunciat de segon ordre és vertader:

$$\exists f \exists g \forall x \forall z \psi(x, fx, z, gxz),$$

on f i g són funcions que expressen regles que ens diuen quin element l'emissor ha de triar una vegada coneguts els moviments de l'intèrpret per al quantificador universal. Així doncs, el segon enunciat diu en teoria de jocs que hi ha dues estratègies tals que, no importa quins valors l'intèrpret triï per x i z, constitueixen una estratègia guanyadora per a l'emissor. Podem concloure, doncs, que les anomenades funcions de Skolem permeten explicitar -en segon ordre- l'existència d'una estratègia guanyadora per a l'emissor amb el joc associat a una sentència de forma prenexa, la qual cosa equival a afirmar la seva veritat. De fet, tal com ha explicat Hintikka, que va estar el primer que va aplicar la teoria de jocs de Von Neumann a la interpretació semàntica dels enunciats de la lògica de primer ordre:

> L'ús de les funcions de Skolem pot interpretar-se en termes de la meva teoria de jocs i, recíprocament, aquesta semàntica pot veure's com una mena de sistematització i generalització de la noció de funció de Skolem.[1]

En resum: la interpretació pragmàtica dels quantificadors que Peirce desenvolupa a partir de la dècada dels 90 anticipa algunes idees claus de la semàntica de la teoria de jocs i, en particular, la seva interpretació com a selectius anticipa la seva interpretació com a funcions electives desenvolupada per Skolem i Hilbert en els anys vint. De fet, tal com explica Hintikka, la interpretació dels quantificadors en termes de la teoria de jocs i la seva interpretació com a funcions electives són dues cares de la mateixa moneda, la qual cosa mostra la coherència de la interpretació peirciana dels quantificadors.

---

[1] *Hintikka 1979*, 53.

CAPÍTOL III

Schröder i la sistematització de l'àlgebra de la lògica

1. Introducció

Ernst Schröder va néixer el 25 de Novembre de 1841 a la ciutat alemanya de Manheim i va morir el 1902. Va estudiar Física i Matemàtiques a les universitats de Heidelberg i Königsberg, on l'any 1864 va acabar els seus estudis universitaris. Els anys següents de la seva vida van transcórrer a Zürich on va fer classes en un institut politècnic fins el 1868. Aquell any es traslladà a Karlsruhe, on va fer classes fins 1870. De 1870 a 1874 va fer classes de Matemàtiques i Ciències de la Naturalesa en el *Pro -und Realgymnasium* de Baden-Baden. Durant aquells anys el seu esforç intel·lectual es va centrar en la preparació d'un llibre de text d'aritmètica i àlgebra per professors i estudiants que titularia precisament així, és a dir, *Lehrbuch der Arithmetik und Algebra für Lehrer und studierende*, del qual només arribaria a publicar-ne l'any 1873 el primer dels quatre volums previstos inicialment. J. Lüroth, amic personal de Schröder i un dels seus més importants deixebles, descriu així el primer i únic volum de *Lehrbuch der Arithmetik und Algebra*:

> Primer de tot, en ell [Schröder] tracta molt extensament i detallada del concepte de nombre i esmenta com a primer axioma en el qual es basen tots els nombres [*Zahlen*], que el [concepte de] nombre [*Anzahl*] és independent del procés de contar, de manera que quan hom compti de nou un conjunt, sempre obtindrà el mateix nombre, suposant que no s'hagi equivocat. Després segueix una discussió a fons sobre les operacions aritmètiques i, en particular sobre les directes i les inverses. Les operacions directes són examinades primer en base a una definició independent i, després, seguint essencialment a Grassmann, sota la hipòtesi d'una definició recursiva [*rekurrentes Bildungsgesetzes*] [...] En un apèndix es discuteix detalladament el càlcul amb els signes del producte i la suma i, en particular, s'estableixen les lleis de les quals, en intercanviar l'ordre de la suma en una suma múltiple, en resulta la modificació dels parèntesis. Però, en els capítols precedents, Schröder introdueix una novetat essencial, en la mesura que abandona la univocitat normalment postulada de

les operacions inverses i tracta detalladament les operacions amb expressions amb diversos significats. En fer això empra el signe de *subordinació* [*Unterordnungzeichen*] $\subset$ i el de *subsumpció* € [*Einordnungzeichen*], el qual en les seves posteriors publicacions sobre lògica jugarà un paper tan important.[1]

L'any 1874 Schröder va ser cridat per l'Escola Tècnica Superior de Darmstadt com a professor ordinari de matemàtiques i l'any 1876 per la Universitat de Karlsruhe, on va ensenyar Aritmètica, Trigonometria i Anàlisi. Durant la preparació de *Lehrbuch der Arithmetic un Algebra* i a través de la lectura de *Formenlehre* de Robert Grassmann, Schröder havia entrat en contacte amb la lògica. Aquest primer contacte el va dur a familiaritzar-se amb els treballs del lògics matemàtics anglesos i americans com ara Boole, De Morgan i Peirce, però també amb els lògics més metafísics, la major part d'ells alemanys, com ara Sigwart, Trendelenburg, Lotze, Überweg o Wundt. Això el va dur a publicar un petit llibre titulat *Operationskreis des Logikkalkuls* [*El cercle d'operacions del càlcul lògic*] (*1877*). Aquest llibret respon al requeriment expressat per Schröder a *Lehrbuch der Aritmetic und Algebra* d'expressar totes les operacions des d'un punt de vista extensional, això és, basant-se en l'extensió dels conceptes:

> Ell [Schröder] opera aquí amb classes de coses [*Klassen von Dingen*], és a dir, amb el conjunt [*Gesamheit*] de totes les coses, que tenen en comú unes característiques [*Merkmale*] donades. Dues classes a i b poden tenir individus en comú; el conjunt d'aquests individus es designarà per $a \cdot b$ o ab. En canvi, hom entendrà sota $a+b$ la classe de coses que pertanyen a a o b. En la mesura que hom es basa en els individus, hom pot demostrar les lleis del càlcul, que coincideixen amb les lleis habituals, però que resulten més fàcils de demostrar, donat que en lògica es té que $a+a=a$ i $a \cdot a=a$. El conjunt de coses que no pertanyen a a es designa amb $\bar{a}$. Aquest és el signe adoptat en escrits posteriors, abans Schröder escrivia a_1. Per aquesta negació valen les lleis $\overline{(a+b)}=\bar{a}\cdot\bar{b}$ i $\overline{(ab)}=\bar{a}+\bar{b}$. Aquestes poques fórmules són suficients per representar, en la forma d'un càlcul, una gran part de la lògica de l'extensió dels conceptes.[2]

La següent obra de Schröder és la seva *magnum opus Vorlesungen über die Algebra der Logik* (*Exakte Logik*) [*Lliçons d'àlgebra de la lògica* (*lògica exacta*)] (*1890-1905*) escrita

[1] *Schröder 1966 2*, VII.
[2] *Ibid.*, X.

en tres volums, en els quals s'estudia respectivament el càlcul idèntic o de dominis, el càlcul d'enunciats i el càlcul de relatius. En la introducció al primer volum d'*Algebra der Logik*, Schröder explica la gran dificultat que suposa bastir una teoria sobre la naturalesa del concepte [*Begriff*] i que pensa escapar a aquesta dificultat fonamentant la lògica en l'*extensió* [*Umfgang*] del concepte, en comptes de fer-ho en el seu *contingut* [*Inhalt*] o *intensió*. L'extensió d'un concepte està constituïda pels objectes o coses que tenen la propietat denotada per aquell concepte. El contingut d'un concepte està constituït per les notes característiques [*Merkmalen*] que tenen tots els objectes que cauen sota el concepte en qüestió:

> L'"extensió" del concepte "or" es compon de tot allò que és or; està constituïda per la *classe* [*Klasse*] de totes les substàncies o coses que s'han de definir com or. Anàlogament, [l'extensió del concepte "metall"] està constituïda per la classe de totes les coses o substàncies que s'han d'anomenar metalls; dit breument: la *classe* sencera dels *metalls* constitueix l'anomenada *extensió* del concepte "metall" [...] El "contingut" o l'essència del concepte metall es compon de totes aquelles *característiques* que són comunes a tots els metalls i que, *en conjunt*, *només* pertanyen a aquests. Hi pertanyen primerament totes aquelles propietats que comparteixen amb les substàncies materials i que són característiques d'elles, com ara: la propietat d'ocupar un espai físic, la propietat de ser pesant i de tenir una massa constant en estat d'inèrcia, etc. I, en segon lloc, hi pertanyen les característiques que distingeixen els metalls dels no metalls, per exemple, la propietat de ser un bon conductor de l'electricitat. [1]

El punt de partida de Schröder en la primera secció de la primera lliçó d'*Algebra der Logik,* dedicada a la relació de *subsumpció* [*Subsumtion*], és molt semblant al de Boole: es tracta de recercar les lleis del pensament a través del llenguatge, l'únic mitjà a través del qual podem accedir al pensament. Els pensaments s'expressen en judicis [*Urteile*], la contrapartida lingüística dels quals són les oracions o enunciats [*Sätze*]. En particular, els judicis categòrics es representen a través d'enunciats en els quals es vincula un subjecte i un predicat a través de la còpula "és". Aquesta copula pot representar o bé la identitat entre els conceptes denotats per subjecte i predicat o bé la subordinació entre ells, que Schröder denota respectivament per " $=$ " i " $\subset$ ". Així, per exemple, els enunciats

[1] *Schröder 1966 1*, 130.

L’or és un metall i La sal comuna és clorur sòdic,

és representaran respectivament per

or $\subset$ metall i sal comuna = clorur sòdic.

El significat d’aquests enunciats és, d’acord amb el punt de vista extensional abans explicat, que la classe denotada per “or” està inclosa en la denotada per “metall” i que les classes denotades per “sal comuna” i “clorur sòdic” són idèntiques. En qualsevol cas, com que la còpula “és” pot representar qualsevol de les dues relacions anteriors, la subordinació o la identitat, Schröder proposa representar generalment la “còpula” mitjançant el signe €, que es llegeix “subordinat o igual”. Així, Schröder expressarà generalment els judicis categòrics en la forma:

a € *b*,[1]

on *a* i *b* representen conceptes i € la relació de *subsumpció* [*Subsumption*] entre ells, *i.e.* el fet que el concepte denotat pel subjecte [*Subjektbegriff*] o bé està subordinat o bé és idèntic al concepte denotat pel predicat [*Prädikatbegriff*]. Tal com reconeix el mateix Schröder, Peirce havia introduït a l’article “Notation for the Logic of Relatives” de 1870 un signe amb un significat anàleg al seu signe de subsumpció, a saber, el signe $-\!\!<$, que Peirce havia anomenat precisament la *còpula* (*Cf. supra*, cap. II, § 4). Seguint Peirce, Schröder considera que el signe € expressa una relació més *simple* que els signes $\subset$ i =:

> La subsumpció
>
> 1) *a* € *b*
>
> diu menys que la subordinació i la igualtat, respectivament:
>
> 2) $a \subset b$ 3) $a = b$.
>
> La subsumpció deixa oberta, en efecte, la relació recíproca en què *b* està amb *a*. El contingut dels enunciats 2) i 3) es pot traduir en paraules a través de les dues frases següents:
>
> 2) Tots els *a* són *b*, però no tots els *b* són *a*

[1] *Cf. ibid.*, 132-33.

3) Tots els *a* són *b* i, al mateix temps, tots els *b* són *a*.[1]

Per aquestes raons, conclou Schröder:

> El signe de subsumpció € s'ha de considerar, en oposició als signes $\subset$ i =, *més primitiu* [*ursprunglichere*]. Per això, nosaltres bastirem també *sobre ell* l'edifici sencer de la primera i més extensa de les parts elementals de la lògica exacta.[2]

En qualsevol cas, les raons anteriors relatives a la simplicitat de la relació de subsumpció i l'adequació d'aquesta relació per a l'expressió dels *judicis universals afirmatius*, no semblen raons suficients per poder considerar aquesta relació com a fonamental o primitiva. Per això caldria demostrar, a més, que *tots* els judicis categòrics són expressables també com a subsumpcions.[3] Aquest problema és abordat en la segona secció de la primera lliçó, titulada precisament "Consideracions provisionals sobre la representabilitat dels judicis com subsumpcions". Les consideracions són, en efecte, preliminars, perquè Schröder encara no ha introduït els signes de la seva àlgebra lògica i, per tant, encara no pot expressar formalment els *enunciats negatius* o *particulars*, i ha de limitar-se a dir com aquesta podria assolir-se. En canvi, pel que fa als *enunciats singulars*, no és necessària cap notació addicional, car mitjançant

$$a \text{ € } b,$$

Schröder expressarà indistintament els judicis universals i singulars, això és, aquells en què "el subjecte *a* significa un individu".[4] Per això només li cal "considerar *un* individu com una classe, la qual conté només aquest individu", això és, identificar l'individu amb la classe que conté aquest individu com a únic element. Schröder argumenta la necessitat de considerar la *classe unitària* o singletó i la *classe buida* com a classes pròpiament dites en els termes següents:

---

[1] *Ibid*., 133-34.
[2] *Ibid*., 136.
[3] L'expressió dels judicis hipotètics, Schröder la deixa per al segon volum d'*Algebra der Logik*, dedicat al càlcul proposicional o d'enunciats [*Aussagenkalkul*].
[4] *Ibid*., 133.

> Per poc que cerquem en els centres escolars, ens podem trobar que una classe només té un alumne o, fins i tot, potser cap [...] Aquí hem de concebre la paraula "classe" en un significat tan *ampli*, que també pugui incloure el cas en què la classe només conté [*enthalt*] *un* individu [...] Fins i tot, més endavant inclourem dins les classes el "no res" com a cas d'una classe que no conté cap individu o classe buida.[1]

És important remarcar que, si hom identifica les classes amb les extensions dels conceptes, hom pot introduir la classe buida com l'extensió d'un concepte sota el qual no hi cau cap objecte. Ara bé, la introducció de la classe buida com una classe *pròpia* requereix, a més de la identificació anterior, un punt de vista *intensional* sobre l'origen i naturalesa de les classes, a saber, que el concepte sigui anterior a la classe i que tot concepte determini una classe, encara que sota aquest concepte no hi caigui cap objecte. Ja hem vist, d'una altra banda, que Schröder identificava explícitament les classes amb les extensions dels conceptes i, per tant, semblaria que la introducció en el paràgraf anterior de la classe buida estaria absolutament justificada. Ara bé, Schröder no adoptà en cap moment el punt de vista intensional que hem explicat fa un moment. De fet, quan Schröder es proposa aclarir els conceptes de *classe* i *individu*, adopta el punt de vista contrari. Segons Schröder, en efecte:

> *Estem en condicions de reunir (concebre junts) qualssevol objectes del pensament* qua *individus en una classe* [...] I, igualment, volem considerar *un* individu com una classe, la qual conté només aquest individu [...] També cada classe, que comprèn [*umfasst*] ella mateixa un conjunt d'individus, pot considerar-se de nou com un objecte del pensament i, per tant, com un "individu" (en sentit ampli, per exemple, "en relació" a una classe més alta). Amb tot, quan parlem d'un individu "en sentit absolut (estricte)", entenem per això un objecte del pensament, el nom del qual serà manipulat com un nom propi [*Eigenname*] i no com un nom comú [*Gemeinname*].[2]

Aquest text, en efecte, indica clarament que Schröder adopta un punt de vista *extensional* de les classes segons el qual els individus serien anteriors a les classes, les quals s'obtindrien a partir d'ells i no a partir de conceptes -com extensions seves. Des d'aquest punt de vista, tal com ha assenyalat Frege en l'article "Kritische Beleuchtung einiger Punkte in E. Schröders *Vorlesungen über die Algebra der Logik*" ["Examen crític d'alguns punts de

[1] *Ibid*., 147.
[2] *Ibid*., 148.

Vorlesungen über die Algebra der Logik d'E. Schröder"] (*1895*), una classe és una col·lecció o agregat d'individus i està constituïda a partir d'aquests de forma semblant a com un bosc està constituït per arbres i, per tant, la classe desapareixerà tan bon punt desapareguin els individus, de forma anàloga a com desapareix el bosc quan es cremen tots els seus arbres.[1] Ara bé, les conseqüències immediates d'aquest punt de vista són que la classe buida no pot existir i que el individu ha de coincidir amb la classe unitària. Pel que fa a la noció d'individu està clar que no és una noció absoluta, sinó relativa. En sentit ampli, un individu és, en definitiva, un element d'una classe i, per tant, pot ser un individu en sentit estricte -un objecte denotat per un nom propi-, una classe constituïda a partir d'aquests d'individus, una classe d'aquestes classes, etc. Així doncs, la noció schröderiana d'individu pressuposa clarament la idea d'una jerarquia de classes, que Schröder desenvoluparà en la lliçó quarta i nosaltres estudiarem més endavant. El problema és que la relació "ser element de" o, com diem habitualment, la relació de pertinença, és completament absent a nivell formal de l'obra de Schröder i, per tant, en la pràctica es troba supeditada a la relació de subsumpció o, com diem avui en dia, la relació d'inclusió. De fet, Schröder confon a nivell intuïtiu ambdues relacions, com ens ho mostren la identificació entre individu i classe unitària abans esmentada o l'ús del verb *enthalten*, que pot designar indistintament tant la relació de pertinença com la relació d'inclusió. D'aquí que, tal com explicarem més endavant, no puguem identificar plenament la jerarquia de classes de Schröder amb la jerarquia extensional de la teoria simple de tipus de Russell (*Cf. infra*, § 3).

2. El càlcul idèntic

En la tercera secció de la lliçó primera del primer volum d'*Algebra der Logik*, Schröder deixa de banda les consideracions filosòfiques sobre la relació de subsumpció o les nocions d'individu i classe i estableix el que anomena *càlcul idèntic amb dominis d'una multiplicitat* [*identischer Kalkul mit Gebieten einer Mannigfaltigkeit*] o, simplement, *càlcul idèntic*. La presentació d'aquest càlcul és com segueix:

[1] *Cf. Frege 1967*, 195.

Suposem que ens és donada una multiplicitat d'elements -potser la multiplicitat de punts de la superfície d'una pissarra (o la multiplicitat de superfícies d'un plec de fulls).

Aquesta multiplicitat la retenim en el nostre camp d'atenció i no ens interessem per les coses fora d'ella. La naturalesa d'aquesta multiplicitat, així com el tipus dels seus elements són fixats per endavant al nostre gust; [però] les consideracions han de ser generals i s'ha d'exigir que tinguin validesa per totes les multiplicitats concebibles amb qualsevulla elements [...]

Qualsevol reunió d'elements d'una multiplicitat l'anomeno un domini [*Gebiet*] d'aquesta última [...]

Les lletres *a*, *b*, *c*, … significaran d'ara en endavant aquests dominis [...]

Cada domini particular, que nosaltres entenem d'aquesta manera sota una lletra *a*, l'anomenarem un "valor" (valor, value) d'aquesta última.

Com a primera relació que pot existir entre dos dominis *a* i *b*, considerem en el càlcul idèntic la relació de subsumpció:

$$a \text{ € } b,$$

que expressa que el domini *a* (el "domini-subjecte") està subordinat al domini *b* (el "domini-predicat"), que *a* està contingut en *b* [...]

Tots els altres conceptes i relacions que hem d'introduir en el domini del càlcul idèntic es basteixen exclusivament a partir de relacions d'aquesta mena, a partir de "subsumpcions", de manera que podem dir que tot el càlcul, malgrat les ampliacions que més tard efectuarem i el seu abast aparentment més gran, descansa simplement en l'estudi de la subsumpció.[1]

D'acord amb Schröder, el model a seguir per tal de bastir el *càlcul idèntic* és la geometria d'Euclides: és a dir, es tracta de formalitzar el càlcul de manera que es pugui reconèixer fàcilment que, en les demostracions dutes a terme en el seu si, "només s'han aplicat els principis d'aquest mateix càlcul".[2] De fet, Schröder emprarà les lletres *a*, *b*, *c*, … més aviat com el que en la introducció havia anomenat *símbols de caràcter general*, és a dir, com a símbols que poden rebre interpretacions de diferent mena, que no pas com a símbols que representen específicament els dominis d'una multiplicitat, amb la qual cosa els axiomes del càlcul tindran la naturalesa de proposicions (subsumpcions o igualtats) *generalment vàlides* o *fórmule*s o, com dirà després, *proposicions analítiques* (*Cf. infra*, § 9). Així doncs, Schröder entén el seu càlcul d'una forma completament general o abstracta, de manera que,

[1] *Schröder 1966 1*, 157-59.
[2] *Ibid*., 159.

fins i tot, el *càlcul de dominis* pròpiament dit serà ja una interpretació del *càlcul idèntic*. Segons Schröder, en efecte:

> El conceptes i enunciats o fórmules del càlcul idèntic [...] admeten (principalment) aplicacions de diferent mena, les quals tan sols es distingeixen entre si a través del significat o interpretació de les lletres aplicades aquí com a símbols generals i, conforme a això, també dels signes de les operacions de combinació entre elles i de relació. En particular, sota les lletres podem entendre:
>
> *α*) *Dominis* d'una multiplicitat d'elements
>
> *β*) *Classes* o espècies d'individus; també, en especial, conceptes, considerats extensionalment.
>
> *γ*) *Conceptes* considerats segons el seu contingut, especialment també les representacions.
>
> *δ*) *Judicis*, afirmacions, enunciats ("statements").
>
> *ε*) *Inferències* ("inferences")
>
> *ζ*) equacions funcionals, algoritmes, càlculs, "*grups*" -breument: poc més o menys tot allò pensable mitjançant una interpretació adequada dels signes.[1]

D'acord amb Schröder, les interpretacions més importants del càlcul idèntic són *α*, *β* i *δ*, que donen lloc respectivament al *càlcul de dominis* [*Gebietekalkul*], al *càlcul de classes* [*Klassenkalkul*] i al *càlcul d'enunciats* [*Aussagenkalkul*]. Aquest darrer és exposat per Schröder en el segon volum d'*Algebra der Logik*, que nosaltres estudiarem en la secció cinquena. El càlcul de dominis i de classes constitueixen, en canvi, les interpretacions que són, en darrer terme, l'objecte d'estudi del primer volum d'aquesta obra. Segons Schröder, la interpretació fonamental és la primera, però donat que la naturalesa abstracta del càlcul de dominis podria fer perdre de vista al lector les aplicacions pràctiques del càlcul idèntic, Schröder proposa tenir també sempre present la interpretació d'aquest darrer com a càlcul de classes. Tal com hem vist abans, el càlcul de dominis s'obté a partir del càlcul idèntic en interpretar les lletres *a*, *b*, *c*, … com a dominis i la relació € com la relació "estar inclòs o ésser igual a" entre dominis, que Schröder anomena *subsumpció*. Schröder entén per domini "qualsevol reunió d'elements d'una multiplicitat", com ara "la multiplicitat de punts de la superfície d'una pissarra". En el càlcul no hi ha lletres que s'interpretin pròpiament com els elements de la multiplicitat en qüestió i és que, tal com ha assenyalat Frege, "ben mirat

[1] *Ibid*., 160.

l'expressió element no té aquí cap importància; car és igual si en l'exemple esmentat més amunt, considerem com a elements les àrees quadrades de què consta la superfície o els triangles en els quals aquestes àrees són dividits per les seves diagonals. Si prenem com a multiplicitat l'exercit alemany i com a domini seu un regiment d'infanteria, és igual si considerem com a elements els batallons, les companyies o els soldats individuals. Així doncs, és igual quines parts del tot siguin anomenades elements, en la mesura que qualsevol domini que considerem pugui estar constituït per ells".[1] D'una altra banda, segons Schröder, el càlcul de classes s'obté fàcilment a partir del càlcul de dominis interpretant els elements d'una multiplicitat com a individus i els dominis com a sistemes o classes.[2] Tal com hem dit fa un moment, Schröder entén per domini "qualsevol reunió d'elements d'una multiplicitat" i, per tant, la interpretació del càlcul de dominis en termes del càlcul de classes només serà possible s'interpretem les classes extensionalment com a col·leccions d'individus. D'una altra banda, en la mesura que en el càlcul de dominis hi apareix un sol tipus de variables, que Schröder interpreta com a dominis, i una sola relació que s'interpreta com la relació de subsumpció, que és equivalent a la relació moderna d'inclusió, en el càlcul de classes no hi haurà individus pròpiament dits ni cap altra relació que la d'inclusió. D'aquí que la interpretació del càlcul de dominis com a càlcul de classes requereixi, en darrer terme, identificar els individus amb les classes unitàries i la pertinença amb la inclusió, tal com veurem que fa Schröder. En definitiva, podríem dir que el càlcul idèntic és un càlcul de naturalesa abstracta, que es pot interpretar com un càlcul de dominis o de classes i que, tal com veurem immediatament, constitueix un clar precedent de la *teoria de reticles* moderna.[3]

En la segona lliçó, Schröder introdueix els dos principis sobre els quals descansa el càlcul idèntic, les definicions de la relació d'igualtat, del 0 i el 1 i els primers teoremes del càlcul. Els dos principis en qüestió són els següents:

PI $a \text{€} a$.

PII Si $a \text{€} b$ i $b \text{€} c$, llavors $a \text{€} c$.[4]

La interpretació d'aquests dos principis o "axiomes" en termes del càlcul de dominis o classes és òbvia. D'acord amb la lectura de la subsumpció com la còpula "és", PI és una

---

[1] *Frege 1967*, 194.

[2] *Cf. Schröder 1966 1*, 161.

[3] *Cf. Bernays 1975*, 610.

[4] *Schröder 1966 1*, 168 i 170 respectivament.

forma de la llei d'identitat i PII ho és de la regla d'inferència sil·logística coneguda com "dictum de omni et de nullo". El primer principi, assenyala Schröder, "té el caràcter d'una [subsumpció] generalment vàlida, d'una "fórmula"",[1] mentre que el segon principi expressa un esquema d'inferència generalment vàlid, "en la mesura que la inferència tindrà validesa, sigui quin sigui el significat que atribuïm a les lletres *a*, *b*, *c*".[2] És interessant remarcar que el concepte "generalment vàlid" [*allgemeingültig*], aplicat per Schröder a les fórmules i a les inferències, coincideix essencialment amb el conceptes moderns de "fórmula universalment vàlida" i "conseqüència lògica", el primer dels quals fou introduït d'una forma precisa, per primera vegada en la història, per Paul Bernays en la seva *Habilitationschrift* de 1918 (*Cf. infra*, cap. VIII, § 8). Més endavant explicarem el concepte de proposició generalment vàlida o formula (*Cf. infra*, § 9) i podrem comprovar el mestratge de Schröder en aplicar el concepte d'inferència generalment vàlida o *lògicament vàlida* i el seu contrari, el concepte d'inferència lògicament no vàlida, en la resolució d'un problema pràctic: la demostració de la independència de les lleis distributives (*Cf. infra*, § 4). D'una altra banda, el fet que PII s'entengui com una regla d'inferència -aplicable indistintament al càlcul de dominis o classes- és una clara influència de Peirce i expressa, a més, una característica essencial de l'àlgebra de la lògica de Boole, Peirce i Schröder, a saber, el fet que no hi hagi regles d'inferències en el sentit modern del terme, això és, regles expressades en el metallenguatge i que, per dir-ho així, restin fora del càlcul pròpiament dit.

Als dos principis anteriors, s'hi han d'afegir les definicions següents, les quals, donada la naturalesa abstracta del càlcul, s'han d'entendre també com axiomes. La primera definició és la d'igualtat:

(1) $a = b$ si, i només si, a € b i b € a.[3]

PI, PII i (1) equivalen a definir € com un ordre parcial sobre el conjunt de dominis d'una multiplicitat i, a partir d'ells, Schröder dedueix fàcilment que la igualtat és una relació d'equivalència, és a dir, una relació reflexiva, simètrica i transitiva. Schröder defineix a continuació dos dominis particulars, el 0 i el 1, a partir de les subsumpcions següents:

---

[1] *Ibid*., 168.
[2] *Ibid*., 172.
[3] *Ibid*., 184.

$$(2\times)\ 0 \in a \qquad | \qquad (2+)\ a \in 1.$$ [1]

Aquestes subsumpcions, tal com diu Schröder, són generalment vàlides i, per tant, diuen respectivament que 0 està contingut en qualsevol domini i que 1 conté qualsevol domini.[2] Schröder anomena a aquests elements distingits el "zero idèntic" i "l'u idèntic", per distingir-los així del zero i l'u aritmètics. Schröder explica la interpretació del 0 i el 1 en el càlcul de dominis i en el de classes de la següent manera:

> El 0 representa un domini buit, el qual no conté *cap* punt de la multiplicitat i quan parlem de classes, correspon al concepte "no res". Per contra, el 1 representa la multiplicitat sencera; així, en el nostre exemple preferit, tota la superfície de la pissarra. En cas que *a*, *b*, *c*, … representin classes, llavors 1 significarà la classe més extensa, aquella que comprèn totes les classes i individus sobre els quals es parla en la recerca.[3]

Remarquem que, tal com havíem esmentat abans, la interpretació del 0 com la classe buida és impossible des del punt de vista extensional a partir del qual Schröder defineix les classes, per la qual cosa Schröder ha d'apel·lar *in extremis* a la gènesi intensional del concepte de classe i, en particular, al concepte "no res". Això fa que, en darrer terme, els conceptes s'introdueixin furtivament en el càlcul de classes i, fins i tot, en el càlcul de dominis -donada també la naturalesa extensional d'aquest darrer. Més endavant discutirem en detall la interpretació del 0 i el 1 en el càlcul de classes, a propòsit de la crítica de la suposada identificació que, segons Schröder, fa Boole del 1 amb la classe universal o univers del discurs [*Universe of Discourse*, *Universum des Diskussionsfähigen*]. Schröder demostra les propietats següents del 0 i el 1:

(*i*) Si, per tot a, $0' \in a$ (respectivament $a \in 1'$), llavors $0' = 0$ (respectivament $1' = 1$)

(*ii*) $0 \in 1$

(*iii*) Si $a \in 0$ (respectivament $1 \in a$), llavors $a = 0$ (respectivament $1 = a$).[4]

---

[1] *Ibid*., 188. La ratlla vertical entre dues fórmules significa que aquestes fórmules són duals. El *principi de dualisme* s'explica en la secció quarta.

[2] *Cf. ibid*., 188.

[3] *Ibid*., 189.

[4] *Cf. ibid*., 189-90.

En la primera secció de la tercera lliçó, Schröder introdueix finalment el *producte* i la *suma idèntiques* a través de les definicions següents, que Peirce havia proposat, per primera vegada, en l'article "On the Algebra of Logic" de 1880 (*Cf. supra*, cap. II, § 5):

$(3\times)$ c € ab si, i només si, c € a i c € b | $(3+)$ $a+b$ € c si, i només si, a € c i b € c.[1]

Tal com assenyala Schröder, aquests enunciats tan sols defineixen el producte com a predicat i la suma com a subjecte, això és, a la dreta i esquerra respectivament d'una subsumpció. Amb tot, Schröder demostra que, donat que per PI:

ab € ab | $a+b$ € $a+b$,

és té, per les definicions $(3\times)$ i $(3+)$, el següent teorema :

$(6\times)$ ab € a, ab € b | $(6+)$ a € $a+b$, b € $a+b$.[2]

Aquestes dues condicions expressen el fet que el producte i la suma idèntics de dos elements a i b són respectivament una fita inferior i superior d'aquests dos elements. Però d'aquí no se segueix evidentment que ab i $a+b$ siguin necessàriament l'ínfim i el suprem de a i b. En altres paraules, de $(3\times)$ i $(3+)$ se segueixen les condicions necessàries $(6\times)$ i $(6+)$ que han de satisfer dues operacions $\times$, $+$ per poder identificar-se amb el producte i la suma idèntics de dos elements a, b, però no les condicions suficients, a saber: $a\times b=\inf\{a,b\}$ i $a+b=\sup\{a,b\}$. Això és important perquè, com és ben sabut, la condició necessària i suficient per a que un conjunt parcialment ordenat sigui un reticle és precisament que per tots dos elements a, b pertanyents a aquest conjunt, hi hagi en aquest conjunt un suprem i un ínfim per aquests elements. Tal com ha assenyalat Bernays, en efecte, Schröder "no arriba a veure clarament que a partir dels principis I i II (que caracteritzen el que s'anomena avui en dia un ordre parcial), fins i tot amb l'addició de 0 i 1, no és possible inferir l'existència d'un producte idèntic i una suma idèntica, la qual cosa caracteritza, de fet, un reticle".[3] Com veurem després, Schröder introduirà en la lliçó sisena un axioma específic a partir del qual demostrarà les lleis distributives i, en la lliçó setena, introduirà la negació a partir d'una

[1] *Ibid*., 196.
[2] *Ibid*., 199.
[3] *Bernays 1975*, 611.

definició que s'ha de considerar un postulat més del càlcul (*Cf. infra*, § 6). Així doncs, hom haurà d'afegir aquests dos nous axiomes o postulats als enunciats per Schröder en la segona i tercera lliçó d'*Algebra der Logik* , que nosaltres hem estudiat en aquesta secció.

3. La jerarquia de classes

La quarta lliçó del primer volum d'*Algebra der Logik* és particularment interessant perquè en ella Schröder discuteix la interpretació en termes de classes del càlcul idèntic. Això requereix evidentment interpretar les lletres *a*, *b*, *c*, … i els signes $\in, +, \times, 0, 1$ de la forma habitual en el càlcul de classes. El problema principal rau, com havíem dit abans, en la interpretació schröderiana del 1. Schröder, en efecte, exposa un argument que pretén demostrar que la interpretació booleana del 1 com a "univers del discurs" té un abast massa gran i porta, de fet, a contradiccions. L'argument de Schröder és clarament incorrecte, però és interessant reproduir-lo *in extenso* perquè, en la part negativa, mostra algunes de les confusions més habituals en l'obra de Schröder i, en la part positiva, el porta a albirar una jerarquia de classes que avança en certa mesura la jerarquia extensional de la teoria simple de tipus de Russell:

> El darrer exemple, el de la subsumpció $0 \in 1$, ha permès demostrar que, de fet, és inadmissible entendre per 1 una classe de tant abast i, per dir-ho així, tan oberta per tot arreu, com l'univers del discurs [*Universum des Diskussionsfähigen*] de Boole presentat més amunt. Si així fos, llavors 0 hauria d'estar inclòs en totes les classes que poden provenir de la multiplicitat 1, de manera que $0 \in a$ seria vàlida i llavors 0 seria subjecte de *qualsevol* predicat. Si entenem per *a* la classe de totes les classes de la multiplicitat que són iguals a 1 [i això certament està permès, en la mesura que puguem incloure en 1 tot allò pensable], llavors aquesta classe comprendrà *un* sol objecte, a saber: el mateix símbol 1, és a dir, la multiplicitat que constitueix el seu objecte, però, a més a més, també "no res" i, en conseqüència, 0. Ara bé, si 1 i 0 constitueixen així la classe d'aquells objectes que són idèntics a 1, aleshores hom hauria de reconèixer com a vàlida no només $1 = 1$, sinó també $1 = 0$. Car un predicat que convé a una classe (aquí seria el predicat "idènticament igual a 1") ha de convenir igualment, segons el principi II, a cada individu d'aquesta classe. En una multiplicitat

> d'aquesta mena, on $0 = 1$ fos vàlida, tota possibilitat de diferenciació entre dues classes estaria, d'entrada, exclosa i, per tant, en ella tot seria igual.[1]

Un argument que sembla desprendre's del text anterior és el següent: Primer de tot, Schröder explica que "la classe a de les classes de multiplicitat iguals a 1" conté un sol element, a saber, aquell denotat per 1, *i.e.* $a = \{x : x = 1\} = \{1\}$ i, per tant, $1 \in a$.[2] Ara bé, hom té també, per ($2\times$), $0 \in a$ i, per tant, $0 = 1$. Aquest argument és correcte en la mesura que identifiquem, tal com fa Schröder, l'element amb el singletó i la pertinença amb la inclusió, però deixa de ser-ho tan bon punt distingim adequadament entre ells, car llavors tenim (en notació moderna): $0 \subseteq \{1\}$, però $0 \notin \{1\}$ i, per tant, $0 \neq 1$. En qualsevol cas, l'argument de Schröder no és exactament l'anterior, sinó que sembla ser el següent: $0 \in 1$, $1 \in$ "igual a 1" i, per tant (pel principi II), $0 \in$ "igual a 1", *i.e.* $0 = 1$. De fet, aquest raonament és molt semblant a l'anterior, car l'extensió del predicat "igual a 1" és la classe $a = \{x : x = 1\} = \{1\}$ i $0 \in 1$ s'obté a partir de $0 \in a$ per ($2\times$). La única diferència és que Schröder empraria aquí $0 \in 1$, en comptes de $0 \in a$, com en l'argument anterior, la qual cosa li permet obtenir el resultat desitjat pel principi II, prèvia identificació de 1 i $\{1\}$. Tal com hem dit abans, aquest argument duu Schröder a abandonar la idea d'una totalitat irrestricta -que és com ell interpreta l'univers del discurs de Boole- i a concebre clarament, per primera vegada en la història, una jerarquia de classes. Segons Shchröder, en efecte:

> Aquestes reflexions mostren que la *interpretació universal del* 1 de Boole és certament *massa àmplia*.
>
> En el càlcul de dominis pròpiament dit, per exemple, en relació als dominis a d'una multiplicitat 1 de punts, tal com hem vist, la subsumpció $0 \in a$ resta vàlida sense cap restricció.
>
> Amb tot, cal que responem ara a la qüestió: en quina mesura les lleis del càlcul poden ser aplicades també a la multiplicitat constituïda per *totes les classes possibles d'objectes pensables qualssevol*. S'ha demostrat que és inadmissible deixar aquesta multiplicitat 1 completament indeterminada, totalment il·limitada o oberta, en la mesura que certes formulacions concebibles de la classe de predicats a s'han revelat ja inacceptables per ($2\times$). Com ha d'estar, doncs, constituïda, per tal que les

[1] *Schröder 1966 1*, 245.

[2] De fet, Schröder diu en el text que l'únic element de la classe a és "el símbol 1" i, per tant, confon clarament la classe universal amb el símbol que la denota.

regles del càlcul aplicables a ella i, en particular, la definició ($2 \times$) no puguin conduir de nou a contradicció?

Provaré de respondre aquesta difícil pregunta:

Primer de tot considerarem una multiplicitat de "coses" qualssevol -objectes del pensament en general- considerats com "elements" o "individus". Aquests podrien ser donats d'entrada (en la seva totalitat o parcialment), però també podrien ser només determinats conceptualment (una altra part o totalment) d'alguna manera. Car, tal com ja s'ha mostrat, no poden romandre completament indeterminats.

Per tal que els símbols 0 i 1 siguin aplicables segons les regles del càlcul en aquesta multiplicitat, ells mateixos han de satisfer certes exigències pel que fa a la manera com els seus elements han de ser donats o conceptualment determinats.

La primera exigència ja l'hem esmentat en la secció 7, sota el postulat ($1 +$): que els elements de la multiplicitat *puguin ser reunits*, siguin mútuament "*compatibles*". *Només en aquest cas designarem per* 1 *la multiplicitat* [...]

Si els elements de la multiplicitat són susceptibles de ser reunits, llavors hom pot formar en el seu si els "sistemes" o "dominis" que vulgui a partir dels seus elements; en altres paraules, extreure també, en virtut d'una aplicació distributiva, *classes* qualssevol d'individus.

En particular, aquests individus pertanyen ells mateixos a classes que, pel fet que es redueixen a *un* únic individu, poden anomenar-se classes "monàdiques" o "*singulars*".

Mitjançant aquest procés d'extracció lliure de classes a partir d'individus pertanyents a la multiplicitat considerada inicialment, sorgeix llavors, es crea (en general) una *nova* multiplicitat, de més abast encara, a saber, aquella constituïda pels dominis o classes de la precedent [...]

Hom podria designar aquesta nova multiplicitat com la "segona potència" de la precedent o, millor, com "la *primera* multiplicitat *deduïda* o *derivada*".

D'aquesta hom pot, una altra vegada, "deduir" eventualment una nova multiplicitat, de més abast encara, que hom podria designar com la multiplicitat derivada de la primera derivada, o com la *segona* multiplicitat *derivada* de la multiplicitat original. I així successivament.

Tal com resulta manifest de les reflexions precedents, la significació del 1 idèntic no s'ha d'estendre en cap cas de la primera a la segona multiplicitat, derivada d'ella i, menys encara, a multiplicitats d'ordre superior derivades de multiplicitats ja deduïdes.

> I, per tal que també la subsumpció (2 +) pugui continuar essent vàlida en la multiplicitat originària, és necessari (i suficient) *que entre els elements considerats com a individus d'aquesta multiplicitat, no hi figuri cap classe que pugui, per la seva part, comprendre com individus els elements d'aquesta mateixa multiplicitat* [...]
>
> Anomenaré "*pura*" una multiplicitat de l'espècie definida, en contradistinció a una multiplicitat "*mixta*", en la qual l'exigència precedent no se satisfà plenament, això és, una classe en què almenys alguns dels seus elements són ja classes, les quals contenen ja altres elements d'aquella com a individus.
>
> *Així doncs, perquè el càlcul idèntic pugui aplicar-se a una multiplicitat, aquesta ha de ser una multiplicitat pura d'elements compatibles.*
>
> El càlcul idèntic també és aplicable, d'altra banda, a la multiplicitat derivada d'una multiplicitat d'aquesta mena, amb la condició que la classe nul·la en aquesta multiplicitat es distingeixi de la classe nul·la de la multiplicitat originària. Evidentment, de forma anàloga, en la mesura que el 1 no és idèntic a una multiplicitat considerada com a totalitat, no coincidirà en una multiplicitat i un altra; en general, en la multiplicitat derivada, totes les expressions, operacions i signes de relació requeriran un significat nou i particular.[1]

Veiem, doncs, que Schröder planteja la seva jerarquia de multiplicitats com a resposta a les contradiccions que sorgeixen en interpretar 1 com "la multiplicitat constituïda per *totes les classes possibles d'objectes pensables qualssevol*." Tal com dèiem abans, en efecte, l'argument de Schröder és que si hom admet en l'univers del discurs tot allò pensable, llavors haurà d'admetre també el concepte de la classe d'aquelles classes que són idèntiques al mateix univers. Ara bé, com que la classe buida està inclosa, per definició, en tota classe, llavors també estarà inclosa en la classe anterior i, per tant, serà idèntica a l'univers. D'aquí que, conclou Schröder, "la *interpretació universal del* 1 de Boole és certament *massa àmplia*" i, per tant, s'hagin d'imposar certes restriccions a aquesta classe de manera que no sorgeixi de nou la contradicció abans esmentada. A tal efecte, Schröder construeix una jerarquia de multiplicitats de diferents nivells, essent el criteri fonamental que han de satisfer les multiplicitats de cada nivell "*que entre els elements considerats com a individus d'aquesta multiplicitat, no hi figuri cap classe que pugui, per la seva part, comprendre com individus els elements d'aquesta mateixa multiplicitat*". Més exactament, Schröder construeix la seva jerarquia de multiplicitats de la següent manera: Hom considerarà, primer de tot, la multiplicitat 1 no com una classe universal i absoluta o *Universum des Diskussionsfähigen*,

[1] *Ibid*., 246-48.

sinó com una classe composta de tots els elements d'un cert domini fixat per endavant, això és, com el que Schröder anomena un *Denkbereich* o *domini pensable*. Aquesta multiplicitat o domini és arbitrari, però, per tal que li sigui aplicable el càlcul idèntic ha de ser el que Schröder anomena una *multiplicitat pura*, és a dir, entre els seus elements no hi ha de figurar cap classe constituïda a partir dels elements d'aquesta multiplicitat. A partir d'aquesta multiplicitat pura, hom pot obtenir una altra multiplicitat derivada de la primera, els elements de la qual seran les subclasses de la primera i només elles. I així successivament. Hom obté així una jerarquia de multiplicitats pures que es pot estendre indefinidament i en cada nivell de la qual hom pot aplicar el càlcul idèntic, sempre i quan els signes d'aquest càlcul o àlgebra s'interpretin adequadament en cada nivell. Així, per exemple, donat que cada multiplicitat pura de la jerarquia constitueix un univers o domini pensable, hi haurà un nombre infinit de classes universals que es correspondran amb la interpretació del 1 en cada nivell: individus, classes d'individus, classes de classes d'individus, etc. En canvi, la interpretació de la classe buida sembla més complicada, si més no, si hem de fer cas de les observacions del propi Schröder. Schröder designa per 0 la classe buida associada amb la primera multiplicitat i per ◯ la classe buida corresponent a la segona multiplicitat. Segons ell, ◯ "no conté cap domini de la primera multiplicitat i, per tant, tampoc el domini buit", és a dir, 0 € ◯ no és vàlida.[1] Amb tot, continua Schröder, "el domini buit de la primera multiplicitat, en la mesura que és un "domini", és certament un individu legítim de la segona [multiplicitat]"[2] i, per tant, la segona multiplicitat conté com a individu 0 i com a domini (subclasse) ◯. Schröder no especifica en darrer terme com hauríem d'interpretar 0 i ◯, però no és difícil imaginar com ho podríem fer de manera que la seva interpretació fos compatible amb les observacions anteriors i que la jerarquia de multiplicitats de Schröder esdevingui una clara anticipació de la teoria simple de tipus de Russell. Segons Church, en efecte:

> La inexactitud de l'anticipació de la jerarquia simple de tipus falla només pel fet que Schröder considera una classe unitària idèntica amb l'element únic que conté [...] Però, de fet, la divergència respecte a una anticipació exacta de la teoria simple de tipus és més aparent que no pas real, significa que hom ha d'interpretar que el símbol 0 significa $\varnothing$ en l'àlgebra del primer domini, però significa $\{\varnothing\}$ en l'àlgebra del segon domini, i anàlogament en els altres casos.[3]

---

[1] *Ibid.*, 250.
[2] *Ibid.*, 250.
[3] *Church 1976$_a$*, 408.

Evidentment, la jerarquia de multiplicitats de Schröder pressuposa implícitament una distinció entre individu i classe o, el que és el mateix, entre pertinença i inclusió. En aquest sentit, podríem dir que la jerarquia de multiplicitats ve a suplir la mancança d'una distinció clara a nivell conceptual entre les nocions d'individu i classe o, el que és el mateix, entre les relacions de pertinença i d'inclusió. Deixant de banda, doncs, aquest defecte manifest de la lògica de Schröder, hom podria interpretar llavors la jerarquia de multiplicitats de Schröder com una jerarquia de classes i, per tant, com una clara anticipació de la teoria simple de tipus de Russell.[1] Amb tot, l'afirmació de Church segons la qual "la divergència respecte a una anticipació exacta de la teoria simple de tipus", deguda a les mancances que acabem d'esmentar, "és més aparent que no pas real" s'ha d'agafar amb certa precaució. Car per bastir una jerarquia de classes no n'hi ha prou en identificar correctament els elements que podem trobar a cada nivell de la jerarquia -com, de fet, fa Schröder-, sinó que també cal descriure de forma correcta la manera com estan relacionats els elements de cada nivell amb els del nivell immediatament superior. I, per això és bàsic distingir entre pertinença i inclusió, car el tret essencial d'una jerarquia d'aquesta mena és que a cada nivell hi *pertanyen* com elements les classes d'individus *incloses* en el nivell anterior i, per tant, la identificació schröderiana entre pertinença i inclusió no permet donar raó de la veritable naturalesa de la jerarquia de classes. Un altra qüestió d'un evident interès històric és la relació entre la demostració schröderiana que la classe universal de Boole és inconsistent i el descobriment, alguns anys més tard, de l'antinòmia del conjunt de tots els conjunts i altres de semblants. Evidentment, les paradoxes de la teoria de conjunts són posteriors a aquestes consideracions de Schröder, però és interessant remarcar fins quin punt la demostració per part de Schröder que "la multiplicitat constituïda per *totes les classes possibles d'objectes pensables qualssevol*" és inconsistent anticipa la constatació per part de Cantor que la hipòtesi de l'existència de "la col·lecció de tot allò pensable" postulada per Dedekind o, equivalentment, la del "conjunt de tots els conjunts" postulada per ell mateix, mena a contradiccions, les quals Cantor pensava resoldre en base a la distinció entre pluralitats consistents i inconsistents (*Cf. infra* cap. IV, § 5). De fet, una comunicació de Zermelo a Husserl (*Cf. Zermelo 1902*), arran d'una recensió d'aquest darrer al primer volum d'*Algebra der Logik* de Schröder (*Cf. Husserl 1891*), mostra clarament que hi ha una connexió directa entre la demostració de Schröder i una primera versió de la paradoxa de Russell (*Cf. infra*, cap. VI, § 7), descoberta per Zermelo

[1] Més exactament, la jerarquia de Schröder es correspondria amb la de Wiener, que, gràcies a la noció de parell ordenat, pot unificar les jerarquies de classes, relacions i funcions de Russell en una sola jerarquia extensional composada exclusivament d'individus i classes (*Cf. Wiener 1914*).

i notificada per aquest a Husserl. En aquesta comunicació, Zermelo afirma, en efecte, que la constatació de Schröder segons la qual l'univers de Boole és una classe inconsistent, és correcte, però la seva demostració d'aquest fet és incorrecte ("In der Sache, nicht in der Beweisführung, hat Schröder Recht").[1] Per justificar la seva afirmació, Zermelo procedeix llavors a demostrar que "un conjunt *M* que contingui tots els seus subconjunts m, m', … com elements, és inconsistent".[2] A tal efecte, Zermelo considera el conjunt M_0 de tots els subconjunts de *M* que no es contenen pas a si mateixos com elements i demostra que M_0 és conté i no es conté a si mateix com element. Naturalment, conclou Zermelo, el conjunt de tots els conjunts ("die Menge aller Mengen") és un conjunt que satisfà la definició del conjunt *M* i, per tant, és també inconsistent.[3] De fet, tal com afirma Zermelo al final de la seva comunicació, el conjunt *M* de tots els conjunts constitueix un exemple "d'un conjunt que es conté a si mateix com element"[4] i que, per tant, viola el requisit fonamental que Schröder havien de satisfer les multiplicitats de cada nivell de la jerarquia de multiplicitats.

4. Les lleis del càlcul idèntic. La independència de les lleis distributives

En la lliçó cinquena del primer volum d'*Algebra der Logik*, Schröder demostra les lleis més importants del càlcul idèntic. Així, per exemple, Schröder demostra les lleis que defineixen algèbricament un reticle -recordem que Schröder encara no ha introduït la negació:

Les lleis *commutatives*:

$(12\times)\ \ ab = ba$ | $(12+)\ \ a+b=b+a.$

Les lleis *associatives*:

$(13\times)\ \ a(bc)=(ab)c$ | $(13+)\ \ (a+b)+c=a+(b+c).$

[1] *Zermelo 1902*, 399.
[2] *Ibid.*, 399.
[3] *Cf. ibid.*, 399.
[4] *Ibid.*, 399.

Les lleis de *tautologia* o *idempotència*:

$(14\times)$ $aa = a$ | $(14+)$ $a + a = a$.

Les lleis d'*absorció*:

$(23\times)$ $a(a+b) = a$ | $(23+)$ $a + ab = a$.

Un altre teorema demostrat per Schröder és el següent:

(20) a € b si, i només si, $a = ab$ o $a + b = b$.

Aquest teorema és important des del punt de vista de la teoria de reticles, perquè permet passar de la definició algèbrica de reticle a la definició de reticle com a conjunt parcialment ordenat en el qual per a cada dos elements del conjunt hi ha un suprem i un ínfim en el conjunt. El pas de la definició de reticle a partir de la noció d'ordre a la definició algèbrica s'obté precisament definint les operacions $a+b$ i ab com el suprem i l'ínfim respectivament de a i b.[1] De totes maneres, tal com ja hem vist, Schröder no defineix així la suma i el producte, sinó que empra a tal efecte les definicions de Peirce $(3\times)$ i $(3+)$ que, tal com ja hem explicat, són insuficients per caracteritzar un reticle a partir de la noció d'ordre. Les darreres lleis demostrades en el capítol cinquè són les subsumpcions següents:

$(25\times)$ $ab + ac$ € $a(b+c)$ | $(25+)$ $a + bc$ € $(a+b)(a+c)$,

que constitueixen, juntament amb les subsumcions recíproques:

$(26\times)$ $a(b+c)$ € $ab + ac$ | $(26+)$ $(a+b)(a+c)$ € $a + bc$,

les dues lleis distributives. Schröder discuteix la "no demostrabilitat" o "independència" d'aquestes darrers subsumpcions a la sisena lliçó i la demostra en els apèndixs 4 i 5 del primer volum d'*Algebra der Logik*. Segons Schröder, la impossibilitat de demostrar les

[1] Una demostració de l'equivalència de les dues definicions de reticle es pot trobar a *Burris i Sankappanavar 1981*, 6-7.

subsumpcions anteriors a partir dels axiomes del càlcul idèntic només es pot provar a partir del mètode d'*exemplificació* [*Exemplification*], que ell mateix explica de la manera següent:

> Que un enunciat *A* no se segueix necessàriament d'un grup de definicions, axiomes i enunciats *B* pot demostrar-se, sens cap mena de dubte, si s'aconsegueix presentar un model [*Gebilde*] real o possible, el qual faci vertadera totes les definicions, axiomes i enunciats del grup *B* i, no obstant això, es pot demostrar que no satisfà [*erfüllt*] l'enunciat *A* -dit breument: si hom mostra que en algun lloc l'enunciat *B* pot ser vàlid, sense que *A* ho sigui. Llavors, en efecte, *A* no pot ser implicat per *B*.[1]

De fet, com exemple del seu mètode d'exemplificació, Schröder esmenta "els treballs de Beltrami, Cayley i Felix Klein a través dels qual s'ha dut a terme la no demostrabilitat de l'axioma d'Euclides a partir de la resta d'axiomes de la geometria euclidiana".[2] Més endavant ens referirem a aquests treballs (*Cf. infra*, cap. VIII, § 1). En qualsevol cas, el que és nou en el cas de Schröder és l'aplicació d'aquest mètode semàntic a la lògica. De fet, pel que nosaltres sabem, es tracta de la primera demostració de tipus semàntic de la independència d'una llei lògica i, segurament per això, Peano considerà en una recensió del primer volum d'*Algebra der Logik* la demostració de la independència lògica de les subsumcions $(26\times)$ i $(26+)$ "un notevolissimo risultato dovuto allo Schröder".[3] Els model fornit per Schröder en els apèndixs 4 i 5 per demostrar la independència de les lleis distributives $(26\times)$ i $(26+)$ és el que ell anomena "càlcul lògic amb "grups" d'equacions funcionals", que Bernays ha descrit de la següent manera:

> Hom comença amb una operació de producte no necessàriament commutativa que té un únic invers per l'esquerra i un únic invers per la dreta, de manera que hi ha dos tipus de divisió (denotades per $a:b$ i a/b). Les equacions entre expressions formades a partir de variables mitjançant les tres operacions (el producte i els dos tipus de divisió), en el ben entès que siguin vàlides per a tots els valors de les variables, s'anomenem *equacions funcionals*. Algunes d'aquestes equacions funcionals es consideren principis (primitius), per exemple, $a = c/(c:a)$. Llavors Schröder defineix un *algoritme* com un sistema d'equacions que és tancat respecte a inferències mitjançant aquests principis. Un reticle s'obté aleshores com segueix: Els

[1] *Schröder 1966 1*, 287.
[2] *Ibid*., 288.
[3] *Peano 1958*, vol II, 116, n. 2.

elements del reticle són algoritmes. El producte dels algoritmes *A*, *B* és el sistema de les equacions funcionals que tenen en comú i la seva suma és el sistema d'equacions funcionals que són derivables a partir de les de *A* i *B* mitjançant els principis. La subsumpció *a* € *b* expressa que l'algoritme *A* és una part de l'algoritme *B*.

Aquest model de la teoria de reticles és aplicat llavors per Schröder per demostra la independència de la llei distributiva, exhibint-se tres algoritmes A, B, C tals que $AB + AC$ és buit, però $A(B + C)$ no.[1]

Aquest model és una mica complicat i, en els anys immediatament posteriors a la publicació del primer volum d'*Algebra der Logik*, autors com Peano, Voigt, Korselt, Luroth i Dedekind presentaren models més senzills.[2] Un contraexemple prou conegut a la demostrabilitat de les lleis distributives anteriors a partir de les altres lleis que defineixen els reticles el forneix el conjunt dels subgrups normals de qualsevol grup *G*. Aquest conjunt, on $M \wedge N = M \cap N$ és la intersecció de M i N i $M \vee N = MN \neq M \cup N$ és el conjunt de productes xy amb $x \in M, y \in N$, forma un reticle modular.[3] Però aquest reticle no és, en general, distributiu. Per exemple, el grup quatre de Klein (els quatre parells ordenats formats pels numeros 1 i -1 amb la multiplicació habitual) és abelià i, per tant, tots els seus subgrups són normals. Conseqüentment, formen un reticle modular. Però aquest reticle no és distributiu, car la llei distributiva falla pels seus tres àtoms. Quina és, en general, la relació entre distributivitat i modularitat? Un *reticle modular* és un reticle que satisfà la llei de modularitat:

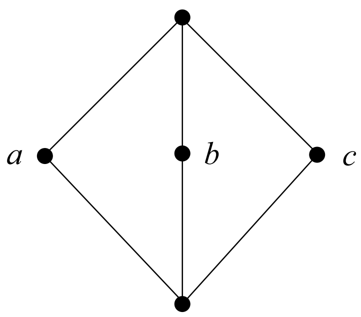
$$x \leq y \rightarrow x \vee (y \wedge z) = y \wedge (x \vee z).$$

Tot reticle distributiu és un reticle modular i, per tant, tots els reticles no modulars són no distributius. Car, donat que en tot reticle, $x \leq y$ implica que $x \vee y = y$, llavors substituint en la segona llei distributiva tindrem que $x \vee (y \wedge z) = y \wedge (x \vee z)$. El recíproc, en canvi, no és cert, és a dir, hi ha reticles modulars que no són reticles distributius. De fet, avui en dia sabem gràcies a un teorema de Birkhoff, que un reticle no es distributiu si, i només si, conté com a subreticles els reticles M_5 i N_5. Si representem aquests reticles de la forma habitual mitjançant els diagrames de Hasse corresponents:

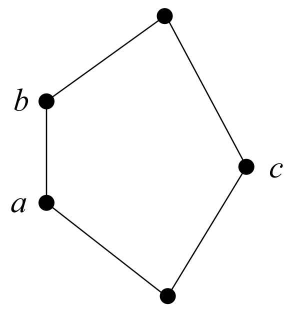
[1] *Bernays 1975*, 613-14.

[2] Les demostracions de Voigt, Korselt, Luroth, autors pertanyents al corrent algèbric, són discutides per Schröder en el segon volum d'*Algebra der Logik* (§ 50).

[3] *Cf. Birkhoff 1984*, 13.



M_5



N_5

llavors podem verificar fàcilment que aquests reticles no satisfan la segona llei distributiva $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$.[1]

En la mateixa lliçó sisena, Schröder proposa el següent principi o axioma:

Principi $\mathrm{III}_{\times}$: Si $bc = 0$, llavors $a(b + c)$ € $ab + ac$,

a partir del qual es poden demostrar les dues subsumcions ($26\times$) i ($26+$). Una altra alternativa considerada per Schröder és la introducció d'una forma més feble del principi anterior, a saber:

Principi $\mathrm{III}_{\times}^{0}$: a € $ab + ab_1$,

on a_1 representa la negació de a, que Schröder introdueix en la lliçó següent (7) a partir de la següent definició:

(6) aa_1 € 0 i 1 € $a + a_1$.

En la mateixa lliçó, una vegada introduïda la negació, Schröder enuncia el seu famós teorema o *principi de dualisme*:

> *A cada enunciat i a cada fórmula general del càlcul idèntic de dominis està permès intercanviar alhora, sense excepció, els signes de subordinació i superordinació, el* 0 *i el* 1*, així com els signes del producte i la suma* -com és obvi,

[1] *Cf. Burris i Sankappanavar 1981*, 11. M_5 és un reticle modular, però N_5 no satisfà tampoc la llei de modularitat.

amb les corresponents denominacions quan es tracti eventualment d'un text verbal, això és, subjecte i predicat, producte i suma, factor i sumand-, *i hom obtindrà així sempre de nou un enunciat vàlid, una fórmula correcta*, que generalment, si bé no necessàriament, serà diferent de l'original.[1]

Schröder explota aquest principi al llarg dels tres volums d'*Algebra der Logik*, en disposar els teoremes duals en columnes paral·leles separades per una barra vertical. Tal com observa Schröder en una nota a peu de pàgina, aquest principi no fa referència als signes d'igualtat i negació, els quals han de romandre inalterables al llarg del procés descrit en el teorema anterior. Això no ens ha d'estranyar, tenint que en compte que Schröder ha emprat aquest principi de forma sistemàtica prèviament a la introducció del signe de negació, tal com hem pogut comprovar en les seccions anteriors.

En definitiva, el sistema de postulats o axiomes que Schröder proposa per al càlcul idèntic esta constituït pels principis I, II i III$_{\times}$ i les definicions (1), $(2\times), (2+), (3\times), (3+)$ i (6). Aquest conjunt de postulats coincideix essencialment amb el segon conjunt de postulats de Huntington de l'article "Sets of Independent Postulates for the Algebra of Logic" de 1904. Com ja havíem dit, aquest conjunt axiomatitza el sistema (K, $\olessthan$), on K és una classe qualsevol i el signe $\olessthan$ representa una relació diàdica en aquesta classe, i està format per les següents proposicions fonamentals:

1. $a \olessthan a$.
2. Si $a \olessthan b$ i $b \olessthan a$, llavors $a = b$.
3. Si $a \olessthan b$ i $b \olessthan c$, llavors $a \olessthan c$.
4. Existeix un element $\wedge$ tal que $\wedge \olessthan a$ per tot element $a \neq \wedge$.
5. Existeix un element $\vee$ tal que $a \olessthan \vee$ per tot element $a \neq \vee$.
6. Si $a \neq b$, i ni $a \olessthan b$ ni $b \olessthan a$, hi ha un element s tal que:

   1. $a \olessthan s$; 2. $b \olessthan s$ i 3. Si $y \neq s$ i $a \olessthan y$ i $b \olessthan y$, llavors $s \olessthan y$.

7. Si $a \neq b$, i ni $a \olessthan b$ ni $b \olessthan a$, hi ha un element p tal que:

   1. $p \olessthan a$; 2. $p \olessthan b$ i 3. Si $x \neq p$ i $x \olessthan a$ i $x \olessthan b$, llavors $x \olessthan p$.

[1] *Schröder 1966 1*, 315-16.

8. Si els elements $\wedge$ i $\vee$ existeixen i són únics, llavors per tot element a hi ha un element $\bar{a}$ tal que:

1. Si $x \olessthan a$ i $x \olessthan \bar{a}$, llavors $x = \wedge$.
2. Si $a \olessthan y$ i $\bar{a} \olessthan y$, llavors $y = \vee$.

9. Si els postulats 1, 4, 5 i 7 es compleixen, i si $a \olessthan \bar{b}$ és fals, llavors hi ha un element $x \neq \wedge$ tal que $x \olessthan a$ i $x \olessthan b$.

10. Existeixen almenys dos elements, x i y, tals que $x \neq y$.

Els tres primers postulats de Huntington expressen respectivament la reflexivitat, antisimetria i transitivitat de la relació $\olessthan$. Els postulats 4, 5 expressen respectivament l'existència d'elements mínims i màxims, els postulats 6 i 7 expressen l'existència de suprem i ínfim per cada dos elements no comparables de *K,* el postulat 8 defineix les propietats fonamentals del complement o negació i el postulat 10 l'existència de, com a mínim, dos elements diferents en *K*. Com ja havíem explicat en el capítol anterior, el postulat 9 és introduït per Huntington per demostrar les lleis distributives i li fou suggerit per Peirce (*Cf. supra*, cap. III, § 6). A partir dels postulats anteriors es demostra fàcilment l'unicitat de $\wedge$ i $\vee$ i dels elements s i p dels postulats 6 i 7. D'aquesta manera, per cada dos elements $a, b \in K$ es defineixen de la forma habitual $a \oplus b$ i $a \otimes b$ com el suprem i l'ínfim de a i b. Tal com assenyala el mateix Huntington, els "postulats 1-10 són substancialment els mateixos que les proposicions fonamentals (anomenades de diverses maneres) d'*Algebra der Logik* de Schröder; excepte pel fet que el postulat 9 aquí reemplaça un postulat molt menys simple de Schröder al qual em referiré com 9_2".[1] El postulat 9_2 és el Principi $\mathrm{III}_\times$de Schröder, en la demostració de la independència del qual aquest autor aconseguí només, segons Huntington, "un èxit parcial", mentre que el principi $\mathrm{III}^0_\times$ de Schröder és el postulat 9_3 de Huntington. Respecte a aquests dos principis, que tal com ja hem vist abans, Schröder havia proposat com a possibles postulats alternatius per poder demostrar les lleis distributives, Huntington demostrarà en el seu conegut article de 1904 "Sets of Independent Postulates for the Algebra of Logic" que de cada un d'ells se segueix el següent postulat:

9_1: Si $bc = 0$, llavors b € c_1,

[1] *Huntington 1904*, 291.

d'on se segueix immediatament el postulat 9 del segon sistema de postulats de Huntington, a partir del qual aquest autor publicà la demostració de les lleis distributives que Peirce li havia comunicat per carta (*Cf. supra*, cap. III, § 6).

5. El càlcul d'enunciats

Com hem explicat en la segona secció, Schröder entén el càlcul d'enunciats com una aplicació o interpretació del càlcul idèntic i s'ocupa d'ell en el segon volum d'*Algebra der Logik*. La primera secció (28) de la primera lliçó (15) del segon volum està íntegrament dedicat a explicar com s'ha d'entendre això. Inicialment, la idea és prou clara: Es tracta de considerar, en comptes d'una multiplicitat de punts qualssevol, tal com s'esdevé en el càlcul idèntic, la multiplicitat d'instants o moments del passat, present i futur, que Schröder anomena la *multiplicitat de punts temporals* [*Zeitpunkten*] i considerar els enunciats com funcions proposicionals d'aquests instants temporals, la qual cosa el permetrà obtenir per abstracció els dominis o classes d'instants temporals durant els quals aquests enunciats són vertaders, de manera que les relacions i operacions del càlcul d'enunciats facin referència en darrer terme a aquests dominis o classes. En paraules de Schröder:

> Per tal de procedir directament del càlcul de dominis i classes estudiat fins ara al càlcul d'enunciats i també, en darrer terme, per tal d'instituir-lo i fonamentar-lo d'un sol cop, cal entendre sota les lletres *a*, *b*, *c*, … enunciats (afirmacions, judicis) qualssevol i convenir que, tan bon punt es calculi amb aquests símbols (tan bon punt com operem amb ells mitjançant la negació, multiplicació o addició o també quan es posin només subsumcions, igualtats, etc, entre ells), s'han d'interpretar com la durada de validesa (dels enunciats respectius), de manera que sota qualsevol enunciat *a* s'haurà d'entendre el temps (més exactament: el domini, la unió de punts temporals), durant els quals aquest enunciat és vertader, amb exclusió de tot punt temporal en el qual no és vertader.[1]

Com podem veure, Schröder segueix a Boole en considerar els enunciats funcions proposicionals del temps, per a la qual cosa introdueix la noció de durada de la validesa

[1] *Schröder 1966 2*, 17.

[*Gultigkeitdauer*] d'un enunciat o classe de moments durant els quals l'enunciat és vertader. En darrer terme, doncs, les lletres d'enunciat denotaran classes o dominis d'instants temporals [*Gebiete von Zeitpunkten*] i, per tant, les diferents operacions i relacions del càlcul d'enunciats denotaran operacions i relacions entre aquestes classes o dominis, això és, relacions de coexistència temporal entre els enunciats. En aquest context marcadament booleà, tant la interpretació dels diferents signes d'operació com la interpretació del 0 i el 1 serà completament anàloga a la que ja havia avançat Boole (*Cf. supra*, cap. I, § 6). L'única novetat que presenta el càlcul idèntic de Schröder en relació al càlcul lògic de Boole és, com ja sabem, la introducció del signe de subsumpció " €", el qual s'interpretarà en el càlcul d'enunciats de forma anàloga a com s'interpretava en el càlcul de dominis o classes. En el càlcul d'enunciats, en efecte, un enunciat del tipus *a* € *b* significarà que "el temps durant el qual l'enunciat *a* és vertader està comprès totalment en el temps durant el qual l'enunciat *b* és vertader, això és, sempre *quan* (sempre que, mentrestant, tan sovint com, tan bon punt com, en cas que) *a* val, també val *b*. D'aquí que sovint direm breument: "Si *a* val, val *b*", "*a* implica *b*", "de *a* se segueix *b*"".[1] Veiem, doncs, que Schröder interpreta aquest signe indistintament com el condicional i com la implicació lògica. En definitiva, el fet que hom pugui interpretar les lletres d'enunciat i els diferents signes d'operació i relació en termes del càlcul de dominis o classes, duu Schröder a la conclusió que "el càlcul d'enunciats pot ser representat com un tipus d'aplicació particular del càlcul de classes".[2] Això duu Schröder en la secció 29 de la mateixa lliçó a "repetir les definicions, principis i teoremes del càlcul de dominis, en la mesura que això ens servirà per fer una ràpida descripció del càlcul d'enunciats".[3] Com que, donada la naturalesa abstracta del càlcul idèntic, les definicions donades per Schröder poden considerar-se també axiomes o principis (*Cf. supra*, § 2), podríem resumir les definicions i principis enunciats per Schröder per al càlcul d'enunciats a través de la següent llista d'axiomes:

1. *a* € *a*
2. (*a* € *b*)(*b* € *c*) € (*a* € *c*)
3. (*a* € *b*)(*b* € *c*) = (*a* = *c*)
4. 0 € *a*
5. *a* € 1

[1] *Ibid*., 13.
[2] *Ibid*., 23.
[3] *Ibid*., 25.

6. $(c \text{ € } a)(c \text{ € } b) = (c \text{ € } ab)$

7. $(a \text{ € } c)(b \text{ € } c) = (a + b \text{ € } c)$

8. $(bc = 0) \text{ € } \{a(b + c) \text{ € } ab + ac\}$

9. $aa_1 \text{ € } 0$

10. $1 \text{ € } a + a_1$

Aquests axiomes són efectivament els mateixos que Schröder havia postulat per al càlcul idèntic: Els axiomes (1), (2) són els principis I, II del càlcul idèntic, l'axioma (3) és la definició (1), els axiomes (4), (5), (6) i (7) són respectivament les definicions $(2\times), (2+), (3\times), (3+)$, l'axioma (8) es el principi $\mathrm{III}_\times$ i, finalment, els axiomes (8) i (9) són la definició (6) (*Cf. supra*, § 2). Entre els teoremes enunciats per Schröder, que no demostra perquè ja havien estat demostrats en el primer volum d'*Algebra der Logik*, destacarem els dos següents:

$$(30\times)\ aa_1 = 0 \qquad | \qquad (30+)\ a + a_1 = 1,$$

que Schröder anomena respectivament el teorema o *principi de contradicció* i el de *terç exclòs*. Tal com acabem d'explicar, l'exposició que fa Schröder del càlcul d'enunciats en la secció 28 de la primera lliçó del segon volum d'*Algebra der Logik* respon completament a la tesi formulada en el primer volum d'aquesta obra segons la qual el càlcul d'enunciats no seria sinó una interpretació més, junt amb el càlcul de dominis i el càlcul de classes, del càlcul idèntic (*Cf. supra*, § 2). Tal com dèiem abans, per això és necessari identificar els enunciats amb funcions proposicionals de temps, amb la qual cosa un enunciat és vertader només durant un determinat interval de temps -amb l'excepció naturalment dels enunciats dels casos extrems en que un enunciat és igual a 1 o 0- i, per tant, no és sempre vertader o fals. Aquesta interpretació dels enunciats permet desenvolupar de forma natural la teoria de les proposicions secundàries a partir de la teoria de les proposicions primàries a la manera de Boole, tal i com Schröder fa en la mateixa secció 28, si bé en la secció següent Schröder proposa una nova interpretació de les proposicions secundàries que qüestiona, entre d'altres coses, aquesta interpretació dels enunciats secundaris. En qualsevol cas, en la segona lliçó (16) del segon volum d'*Algebra der Logik*, el nostre autor proposa bastir de forma autònoma el càlcul d'enunciats, entenent els enunciats, ja no com a funcions proposicionals de temps i, per tant, vertaders (o falsos) només durant determinats intervals temporals, sinó com enunciats que tenen el que ell anomena “un sentit completament determinat i constant”, és a dir, que són *sempre* vertaders o falsos.[1] El següent text és prou significatiu d’aquest *nou rumb* que prenen les recerques de Schröder:

> Com ens hem encarregat d’argumentar fundadament, el càlcul de classes sencer pot ser reduït a un mínim d’enunciats de naturalesa axiomàtica; car ha estat demostrat que descansa en un complex de “Principis”, Definicions i Postulats, els quals nosaltres hem reconegut, d’una banda, com indispensables i no pas susceptibles de ser reduïts o disminuïts i, d’una altra banda, com a completament suficients pel que fa a la fonamentació d’aquell.
>
> En relació al càlcul de classes es presenta, però, el càlcul d’enunciats com una aplicació particular. De totes les maneres, hom pot recórrer als principis bàsics del primer com a principis *vàlids* [*gültige*] també per al darrer.
>
> Tot i això, hom imprimirà un caràcter especial al càlcul d’enunciats -si més no, en la mesura que faci referència a enunciats amb un sentit fix- si afegeix a aquests principis bàsics, un nou requisit de tipus axiomàtic, que tingui com a conseqüència que cada lletra o símbol que representi un enunciat només pot tenir *un* dels *dos* significats 0 o 1 -de manera que el càlcul d’enunciats coincideix amb un càlcul de classes, el qual pressuposa que la multiplicitat 1 conté només, juntament amb el no-res, el 1 com a únic individu.[2]

Aquest axioma, que Schröder anomena, per les raons que acaba d’explicar, l’*axioma específic del càlcul d’enunciats*, és el següent:

11 $$(a = 1) = a.$$ [3]

A partir d’aquest axioma, en efecte, Schröder demostra una mica més endavant que:

$$(a = 1) + (a = 0) = 1,$$

és a dir, “un enunciat o bé és sempre vertader o és sempre fals”,[4] però per demostrar:

---

[1] *Cf. ibid.*, 63.
[2] *Ibid.* 52.
[3] *Ibid.*, 52.
[4] *Cf. ibid.*, 64-65.

$$(a = 1)(a = 0) = 0,$$

és a dir, "un enunciat no pot ser vertader i fals alhora",[1] Schröder introdueix un nou axioma:[2]

12 $$0 \neq 1.$$

En definitiva, tal com apunta el mateix Schröder en el text citat més amunt, aquests axiomes fan que el càlcul d'enunciats coincideixi amb el càlcul de classes restringit a 0 i 1. Això té com a conseqüència que alguns teoremes només tinguin validesa en el càlcul d'enunciats, però no en el càlcul de dominis o classes. Schröder cita com a exemples els teoremes:

$$(a \neq 0) = (a = 1)$$
$$(a \neq 1) = (a = 0),$$

els quals es demostren en el càlcul d'enunciats a partir de l'axioma 12 i que en el càlcul de dominis o classes no són vàlids. Segons Schröder:

> Hom infereix de nou de tot això, que mentre que les fórmules del càlcul de dominis poden ser interpretades de nou directament en el càlcul d'enunciats, el recíproc no és cert, car hi ha moltes fórmules del càlcul d'enunciats que no són vertaderes generalment en el càlcul de classes. El càlcul de dominis és més general, té més abast, que el càlcul d'enunciats, contenint en realitat a aquest darrer només com un cas *particular*. [3]

En suma, Schröder concep el càlcul d'enunciats, ja no com una aplicació o interpretació particular del càlcul de classes o dominis, sinó com un cas particular d'aquest, en el sentit que -com diríem avui en dia- tots els models del càlcul de classes són models del càlcul d'enunciats, però no a l'inrevés. En aquest sentit, doncs, el càlcul d'enunciats no pot reduir-se al càlcul de classes o dominis o, dit d'una altra manera, la lògica hipotètica no pot reduir-se a la categòrica. Això és interessant perquè, tal com hem vist en el capítol anterior,

[1] *Cf. ibid.*, 63-64.
[2] *Ibid.*, 64.
[3] *Ibid.*, 67.

Peirce havia defensat precisament el contrari en afirmar que els enunciats categòrics i hipotètics podien reduir-se a una mateixa forma lògica (*Cf. supra*, cap. II, § 2). De fet, Peirce tenia una opinió bastant negativa del segon volum d'*Algebra der Logik*, com ho mostra el següent text:

> En diferents passatges del primer volum del professor Schröder, l'autor promet que en la secció 28 amb la qual s'obre el següent volum mostraria clarament la diferència entre les [proposicions] categòriques i les hipotètiques [...] Però quan el segon volum va aparèixer, aquella secció em va semblar remarcablement fluixa, considerant la gran força i exactitud de pensament que és costum a l'autor.[1]

En aquest i altres indrets, Peirce critica també a Schröder la introducció de les proposicions hipotètiques a partir de la noció de temps. Peirce observa, en efecte, que en l'obra de Schröder "les proposicions hipotètiques, a diferència de les categòriques, pressuposen essencialment la idea de temps",[2] però afirma que "involucrar el temps" en l'anàlisi dels enunciats hipotètics "és una *ignoratio elenchi*".[3] Veiem, doncs, que Peirce critica a Schröder que no es capaç de distingir entre proposicions hipotètiques i categòriques i, al mateix temps, afirma que distingeix les primeres de les segones apel·lant a la noció de temps. Això pot semblar contradictori, però no sembla difícil interpretar el que realment vol dir Peirce. Hem vist, per exemple, que Schröder expressa a través de la mateixa forma lògica un enunciat categòric com ara "Tot or és metall" que un enunciat condicional com ara "Si a, llavors b", això és, a través de la forma a € b. De fet, la interpretació de Schröder de a € b en el càlcul d'enunciats és completament anàloga a la interpretació del mateix enunciat en el càlcul de classes o dominis, essent l'única diferència que, en el primer cas, Schröder recorre a classes d'instants temporals en comptes de classes o dominis d'individus. En això, com ja hem explicat abans, Schröder segueix de prop a Boole, el qual havia introduït les proposicions hipotètiques o secundàries com funcions proposicionals de temps. Tal com havíem explicat en el primer capítol, si Boole hagués reduït les funcions proposicionals a aquells casos extrems en què el valor d'una funció proposicional de temps és sempre *vertader* o sempre *fals*, llavors la seva teoria de les proposicions secundàries hauria esdevingut un càlcul proposicional. Però, en basar la teoria de proposicions secundàries en el càlcul de

[1] CP 2.350.
[2] CP 3.446.
[3] CP 3.446.

classes es fa necessària l'admissió de funcions proposicionals sense restriccions, o si més no, de les classes que elles determinen, per la qual cosa la seva teoria de proposicions secundàries no es pot interpretar pròpiament com un càlcul de proposicions. Com hem vist en aquesta secció, la introducció per part de Schröder dels enunciats com funcions proposicionals de temps a la manera de Boole, duu aquest autor a considerar inicialment el càlcul proposicional com una aplicació o interpretació particular del càlcul de classes o dominis -més exactament, caldria dir del càlcul idèntic- i a desenvolupar el primer a partir del segon en la secció 28 de la primera lliçó del segon volum d'*Algebra der Logik*. Això equival a una reducció *de facto* de les proposicions hipotètiques a les categòriques i, per tant, Peirce té raó quan afirma que Schröder no aclareix degudament la diferència entre les proposicions hipotètiques i categòriques en aquesta secció. Amb tot, Schröder abandona posteriorment aquest punt de vista i introdueix un parell d'axiomes que el que fan es restringir els enunciats als casos extrems en què són sempre vertaders o sempre falsos. Això fa evidentment que el càlcul d'enunciats no pugui reduir-se al càlcul de classes o dominis, fonamentalment perquè hi haurà alguns teoremes del càlcul d'enunciat que no seran vàlids en el càlcul de classes. Per exemple, tal com hem explicat abans, en el càlcul proposicional, hom té immediatament a partir de l'axioma 12 que si $A \neq 0$, llavors $A = 1$ (i viceversa); en canvi, aquesta inferència no és vàlida en el càlcul de classes, donat que, del fet que una classe sigui diferent de 0, no se segueix que sigui igual a 1. Tal com hem vist, Schröder era perfectament conscient d'aquest fet o, el que és el mateix, del fet que la lògica hipotètica no pot reduir-se a la lògica categòrica. Ara bé, d'aquí no se segueix que Schröder distingís adequadament entre enunciats categòrics i hipotètics, car Schröder no abandona en cap moment la interpretació temporal dels enunciats i, per tant, continua interpretant els enunciats hipotètics en el marc del càlcul de classes, encara que limiti ara aquestes classes als casos extrems representats per 0 i 1. Però, segons hem vist abans, això és per a Peirce una *ignoratio elenchi*, car "tota proposició és o bé vertadera o bé falsa, i allò que no és una proposició, quan es considera com una proposició, és, des del punt de vista filonià, vertader".[1] En definitiva, Peirce sembla criticar a Schröder que el fet d'introduir la noció de temps en la seva anàlisi dels enunciats hipotètics no el permet albirar un enfocament veritativo-funcional d'aquesta mena d'enunciats, que és precisament el punt de vista seguit per Peirce a partir de 1885 (*Cf. supra*, cap. II, § 9) i que ha esdevingut paradigmàtic de la lògica contemporània.

[1] CP 3.446.

Tal com dèiem abans, Schröder proposa en la secció 29 una nova interpretació de les proposicions secundàries que qüestiona, entre d'altres coses, la interpretació dels enunciats secundaris com a funcions proposicionals de temps que havia desenvolupat en la secció anterior. Després de la introducció en la secció 28 dels enunciats com a funcions proposicionals de temps i la conseqüent reducció del càlcul d'enunciats al càlcul de classes o dominis, semblaria que Schröder hauria d'interpretar els enunciats (definicions, axiomes i teoremes) anteriors de forma anàloga a com havia fet Boole en la seva teoria de les proposicions secundàries, és a dir, com enunciats referits a classes o dominis d'instants temporals i llurs relacions de coexistència temporal. Però, en comptes d'això, Schröder proposa interpretar els enunciats anteriors de manera que les lletres *a*, *b*, *c*, … s'interpretin de forma anàloga a com s'havien interpretat en el càlcul de dominis o classes, és a dir, com enunciats referits als dominis d'una multiplicitat o a "classes d'individus de qualsevol multiplicitat d'objectes del pensament".[1] Segons Schröder, en el càlcul de dominis o classes, "els enunciats, que hom pren originàriament en consideració, fan referència a aquests dominis o classes i s'han d'anomenar llavors primaris",[2] però en el càlcul d'enunciats:

> Tots els teoremes del càlcul de dominis afirmen quelcom *d*'aquestes enunciats primaris: sia la seva validesa incondicionada i general, sia la dependència parcial d'un d'aquests enunciats que s'ha presentat com a cert respecte d'altres que s'han presentat com a hipòtesis dels teoremes, sia també la dependència recíproca o equivalència de determinats enunciats primaris particulars o també de grups d'aquests.[3]

En definitiva, els enunciats del càlcul de dominis s'han d'interpretar en el càlcul d'enunciats com "enunciats sobre enunciats (primaris)" i, per tant, Schröder els anomenarà *enunciats secundaris*.[4] Evidentment, aquesta interpretació que proposa Schröder del càlcul d'enunciats és molt imprecisa i planteja alguns problemes importants com ara la relació amb la semàntica de tipus temporal amb què Schröder havia introduït en la secció anterior els enunciats secundaris o el fet que en un mateix enunciat les ocurrències d'un mateix signe s'hagin d'interpretar de forma diferent (de seguida veurem, per exemple, un enunciat en què Schröder interpreta una de les ocurrències del signe d'igualtat com el bicondicional -o potser

[1] *Schröder 1966 2*, 25.
[2] *Ibid*., 25.
[3] *Ibid*., 25.
[4] *Ibid*., 25.

l'equivalència lògica, car Schröder no sembla distingir entre l'un i l'altra-, mentre que interpreta l'altra com la relació d'igualtat entre dominis). Per un altre costat, una de les conseqüències fonamentals de la interpretació dels enunciats o proposicions secundàries proposada en el text anterior és que, a banda dels signes del càlcul de dominis o classes, "per a la interpretació exacta d'alguns teoremes necessitarem encara un parell de nous signes, que manllevem de les matemàtiques (i que, tal com mostrarem en el proper capítol, emprarem d'una forma completament anàloga), a saber, "el signe de la suma" Σ (Sigma) i el "el signe del producte" Π (Pi)".[1] Així, per exemple, les definicions a través de les quals Schröder introdueix el 0 el 1 en el càlcul idèntic:

$$(2\times)\ 0 \text{ € } a \qquad | \qquad (2+)\ a \text{ € } 1,$$

que es corresponen amb els axiomes (4) i (5) de la llista enunciada abans, s'haurien d'interpretar pròpiament en el càlcul d'enunciats a través dels enunciats:

$$\prod_a (x \text{ € } a) = (x = 0) \qquad | \qquad \prod_a (a \text{ € } x) = (x = 1),$$

el primer dels quals expressarà, per exemple, que "un domini x s'anomenarà 0 sempre quan i només quan, estigui inclòs en cada domini a, és a dir, quan per tot a, x € a".[2] Així doncs, Schröder interpretarà $\prod_x A$ com "l'enunciat A és "vàlid *per a cada domini x*"[3] de la multiplicitat 1", i $\sum_x A$ com "l'enunciat A és "vàlid per *almenys un x*"[4] de la multiplicitat 1". Aquesta és, en definitiva, la que podríem anomenar *interpretació proposicional* o *definició semàntica* dels signes Π i Σ com a quantificadors. Però, en la secció següent (30), Schröder es planteja el problema de com introduir també els signes Π i Σ en el càlcul idèntic, de manera que aquests signes puguin emprar-se allí de forma anàloga a com s'empren en matemàtiques -tal com hem vist que s'esdevé amb aquests signes quan són emprats en el càlcul d'enunciats. A tal efecte, Schröder introdueix les definicions següents:

$$:\sum_x f(x) = f(a) + f(b) + f(c) + f(d) + \ldots$$
$$\prod_x f(x) = f(a)f(b)f(c)f(d)\ \ldots,$$

[1] *Ibid*., 26.
[2] *Ibid*., 29.
[3] *Ibid*., 26.
[4] *Ibid*., 27.

on $f(x)$ és una funció qualsevol del càlcul idèntic i a, b, c, d, … representen dominis determinats d'una multiplicitat donada.[1] Aquesta definició dels signes Π i Σ en el càlcul idèntic duu Schröder a redefinir de forma anàloga aquests mateixos signes en el càlcul d'enunciats, la qual cosa dóna lloc al que anomenarem la *interpretació algèbrica* o *definició sintàctica* dels signes Π i Σ i a argumentar l'equivalència d'aquesta amb la interpretació proposicional o definició semàntica abans esmentada:

> Si ara F_x representa un enunciat referit al domini x, llavors l'enunciat
>
> $$\prod_{(x=a,b,c,\ldots)} F_x = F_a \cdot F_b \cdot F_c \cdot \ldots,$$
>
> com a producte idèntic d'enunciats, afirmarà d'acord amb la definició d'aquest, que els enunciats $F_a, F_b, F_c,$ ... són vertaders *alhora*, en altres paraules, que l'enunciat F_x és vàlid tant per $x = a$, com per $x = b, x = c$, etc. I el judici
>
> $$\prod_x F_x$$
>
> significarà -d'acord amb l'estipulació de més amunt- que l'enunciat F_x és vàlid per a cada domini x i, amb això, que és vàlid generalment en el càlcul de dominis.
>
> Per contra, l'enunciat
>
> $$\sum_{(x=a,b,c,\ldots)} F_x = F_a + F_b + F_c + \ldots$$
>
> com una suma idèntica d'enunciats expressarà o constatarà que aquesta darrer alternativa ha de valer: o bé el primer terme, o potser també el segon, etc, o també varis d'ells al mateix temps, potser també tots ells. *Poden* ser vertaders tots els termes, però només *cal* que *un* sigui vertader. I, d'acord amb això, el judici
>
> $$\sum_x F_x$$
>
> significarà simplement que l'enunciat F_x com a mínim és vàlid *per algun domini* x, potser per $x = 0$, potser per $x = 1$, … [2]

Tal com s'esdevenia amb la interpretació proposada per Schröder en la secció 29 del càlcul d'enunciats, la introducció dels signes Π i Σ en el càlcul d'enunciats és força problemàtica. No està del tot clar, per exemple, si aquests signes pertanyen al llenguatge del càlcul proposicional o, més aviat, al metallenguatge que empra Schröder per parlar de la semàntica de les fórmules del llenguatge proposicional, l'argument emprat per Schröder per justificar l'equivalència de les dues definicions dels quantificadors o enunciats quantificacionals és vàlid només pel cas finit, etc. Aquí no intentarem resoldre aquests

[1] *Ibid.*, 40.
[2] *Ibid.*, 41-42.

problemes, car el nostre objectiu era simplement fer-nos ressò de la introducció dels quantificadors en el càlcul proposicional, per tal de poder-la comparar després amb la introducció d'aquests quantificadors en el càlcul de relatius i, a tal efecte, l'explicació de la seva interpretació proposicional i algèbrica en el càlcul d'enunciats, és més que suficient per als nostres propòsits. Com ja sabem, d'una altra banda, l'origen d'aquesta doble interpretació dels quantificadors es troba en l'article "On the Algebra of Logic" de 1885 encara que, com hem vist, Peirce sembla rebutjar en darrer instància la definició dels quantificadors com conjuncions o disjuncions infinites per analogia amb el que s'esdevé en àlgebra (*Cf. supra*, cap. II, § 10). De fet, tal com veurem més endavant, Schröder no tan sols interpreta els quantificadors semànticament i sintàctica, sinó que en el càlcul de relatius sovint utilitza una interpretació o l'altra segons li convingui (*Cf. infra*, § 7).

6. L'àlgebra de relatius binaris. Domini i elements

El tercer volum d'*Algebra der Logik* es titula *Algebra und Logik der Relative*. Tal com indica el títol, la matèria desenvolupada en aquest volum té una doble naturalesa [*dopplenatur*] car, d'una banda, es pot entendre com una *àlgebra* o càlcul i, d'una altra, com una presentació de la *lògica* de relacions [*Logik der Beziehung*] o dels *termes relatius* [*Relative*]. En qualsevol cas, adverteix Schröder de bon començament, el punt de vista és purament algèbric, és a dir, l'objectiu principal del tercer volum d'*Algebra der Logik* és fornir un càlcul, amb les seves operacions i lleis o axiomes, i estudiar-ne les seves propietats principals, tal com havia fet en els volums anteriors amb el càlcul idèntic i el càlcul d'enunciats. En aquest sentit, doncs, les operacions i lleis de la *lògica* de relatius tindran simplement una funció heurística i motivadora en el desenvolupament de l'*àlgebra* de relatius. Tal com reconeix Schröder, els creadors de l'àlgebra de relatius han estat A. De Morgan i Ch. S. Peirce, essent aquest darrer el seu *Hauptförderer*. Segons Schröder, l'interès d'aquesta disciplina rau en les seves múltiples aplicacions, no només en el camp de la lògica, sinó també en altres camps de les matemàtiques als quals pertanyen conceptes tan importants com ara "finitud", "nombre cardinal", "funció" o "substitució". No ens ha d'estranyar, doncs, que Schröder dediqui dos capítols sencers (lliçons 9 i 12) del tercer volum *d'Algebra der Logik* a l'exposició de la teoria de cadenes de Dedekind i llurs conceptes fonamentals en el marc de l'àlgebra de relatius. En realitat, l'objectiu de Schröder no és desenvolupar l'àlgebra de relatius sencera, sinó només una part seva, si bé la més important, *l'àlgebra de relatius binaris* o, com en deia Peirce, *l'àlgebra de relacions diàdiques*. La presentació que fa Schröder d'aquesta àlgebra és una sistematització dels avenços realitzats per Peirce en aquesta direcció i no aporta cap novetat essencial respecte a la presentació que en fa aquest autor en l'article "The Logic of Relatives" (*Cf. supra*, cap. II, § 8). Amb tot, és interessant seguir el seu desenvolupament per part de Schröder per tal de veure el grau de refinament i perfecció que assolí l'àlgebra de relatius a mans d'aquest autor i perquè, en definitiva, l'exposició de Schröder constitueix el punt de partida de l'obra sencera de Löwenheim, dels primers escrits de Skolem i del desenvolupament que feu Tarski de l'àlgebra de relacions a partir dels anys quaranta del segle passat.

Schröder comença la seva exposició de l'àlgebra de relatius amb la introducció del domini pensable, anomenat ara *domini pensable de primer ordre* [*Denkbereich der ersten Ordnung*]:

> Considerem com a *donats*, determinats conceptualment d'alguna manera, els "elements" o individus
>
> $$A, B, C, D, E, \ldots$$
>
> d'una multiplicitat "corrent" ["gewönhliche"]. Aquests han de considerar-se sense excepció distints entre si i del no-res (del 0). Han de ser compatibles (consistents), de manera que el posar-ne un d'ells no impedeixi concebre'n un altre, i han d'excloure's mútuament (ser disjunts entre si), de manera que cap element pugui ser pensat com una classe que comprengui un altre element [...]
>
> La totalitat dels elements pensats la podem representar, en la mesura que unim els seus noms mitjançant el signe de la suma, com una "suma idèntica" (agregat lògic) i l'anomenem el *domini pensable originari* o *de primer ordre* 1^1 (llegit un elevat a un), de manera que es compleixi:
>
> $$1^1 = A + B + C + D + \ldots$$
>
> El domini pensable 1^1 ha d'incloure *més* d'*un* element. Aquest requisit és necessari per a la validesa de quasi tots els teoremes de la teoria.[1]

En definitiva, el domini de primer ordre 1^1 ha de ser el que en el primer volum *d'Algebra der Logik* anomenava una "multiplicitat pura d'elements compatibles", és a dir,

---

[1] *Schröder 1966 3*, 4-5.

una multiplicitat d'elements disjunts dos a dos i compatibles entre si. Però, ara, Schröder exigeix que aquesta multiplicitat tingui, com a mínim, dos elements. De fet, Schröder tenia les seves raons per imposar que el domini tingués dos elements (*Cf. infra*, § 8), encara que la seva afirmació segons la qual això seria necessari per a la validesa de la majoria de teoremes de l'àlgebra de relatius sigui incorrecta. D'una altra banda, tal com ja sabem, els elements o individus d'un domini pensable són els seus subconjunts unitaris, la qual cosa fa que el domini en qüestió pugui veure's com la suma lògica o unió d'aquests elements, *i.e.* $1^1 = A + B + C + D + \ldots$. En l'equació anterior, les majúscules llatines representen elements determinats [*bestimmte Elemente*] del domini però, tal com observa Schröder, "cal encara una altra categoria de signes com a noms de o per representar els elements indeterminats [*unbestimmte*] o generals [*allgemeine*]," [1] és a dir, "per representar *un qualsevol* dels elements A, B, C, D, … del nostre domini pensable 1^1". [2] Aquests signes són els *índexs* $h, i, j, k, l, \ldots$ que, tal com ja sabem, foren introduïts per Peirce per primera vegada en la història i juguen un paper anàleg al jugat per les variables en la teoria de la quantificació moderna (*Cf. supra*, cap. II, §§ 8 i 10). Així, per exemple, quan figuren com a subíndexs dels operadors Σ, Π - "als "Summations- und Produktationsvariablen"", en paraules de Schröder-, lliguen les ocurrències dels mateixos índexs que cauen en l'abast d'aquests signes i permeten representar la suma o producte d'elements qualssevol del domini, de manera que podem escriure $\Sigma_i\, i$ en comptes de $1^1 = A + B + C + D + \ldots$. Schröder anomenarà qualsevol suma idèntica d'elements de 1^1 un *terme absolut* (l'expressió és de Peirce), un *sistema* (l'expressió és de Dedekind), un *domini* o una *classe* (o *terme de classe*).

A partir del domini de primer ordre 1^1, Schröder introdueix les nocions de *parell ordenat* [*Elementepaar*] i *relatiu binari elemental* [*individuelle binäre Relative*], les quals li permetran introduir el *domini de segon ordre* 1^2 i els *termes relatius binaris* com a subconjunt seu. Segons Schröder, en efecte, "si agafem del nostre domini 1^1 dos elements qualssevol *i,j* en un cert ordre i, en aquest ordre, els posem junts en un parell, llavors mitjançant un doble punt podem representar això en la forma

$$i : j$$

[1] *Ibid.*, 6.
[2] *Ibid.*, 7.

-llegit: *i a j* … ".[1] Schröder anomena $i : j$ un "parell ordenat", on i representa l'*antecedent* o *referent* i j el *conseqüent* o *correlat*. L'explicació informal que dóna Schröder de parell ordenat és la mateixa que podríem donar avui en dia, encara que la noció no és exactament la mateixa car, com ja sabem, no cal oblidar que els elements o individus de Schröder coincideixen amb el que avui en dia anomenem classes unitàries. Evidentment, se segueix de l'explicació anterior que $i : j$ serà un parell ordenat diferent de $j : i$, tan bon punt i sigui diferent de j o, tal com ho posa Schröder, per tot i, j valen les equacions:

$$(i = j) = (i : j = j : i), \qquad\qquad (i \neq j) = (i : j \neq j : i).$$[2]

Com que i,j tenen com a valors elements qualssevol del domini 1^1, Schröder representarà tots els parells ordenats del domini de primer ordre en la *taula* [*Tafel*] o *matriu* següent:

$$\begin{array}{lllll} A : A, & A : B, & A : C, & A : D, & \dots \\ B : A, & B : B, & B : C, & B : D, & \dots \\ C : A, & C : B, & C : C, & C : D, & \dots \\ D : A, & D : B, & D : C, & D : D, & \dots, \end{array}$$

on cada un dels parells ordenats especificats en la taula anterior és el que Schröder anomena un "relatiu binari individual".[3] Doncs bé, segons Schröder, "la unió d'aquests relatius binaris individuals o parells ordenats constitueix un nou i específic domini pensable, el qual anomenarem "*domini pensable de segon ordre*" [*Denkbereich der zweite Ordnung*] i el representarem per 1^2(llegit: un elevat al quadrat), de manera que tenim:

$$\begin{aligned} 1^2 \; = \;& (A : A) + (A : B) + (A : C) + \dots \\ + \;& (B : A) + (B : B) + (B : C) + \dots \quad ". \\ + \;& (C : A) + (C : B) + (C : C) + \dots \\ + \;& \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$[4]

[1] *Ibid.*, 8-9.
[2] *Ibid.*, 9.
[3] *Ibid.*, 10.
[4] *Ibid.*, 10.

El domini de segon ordre 1^2 constitueix evidentment el domini dels relatius binaris i, per tant, el domini on es desenvoluparan totes les recerques posteriors, per la qual cosa Schröder el denotarà abreujadament per 1. Com abans, es té naturalment que $1 = \Sigma_i \Sigma_j(i : j)$ o, el que és el mateix, $1 = \Sigma_{ij}(i : j)$. D'acord amb Schröder, un relatiu binari és "una *suma idèntica* (un conjunt) de relatius binaris individuals qualssevol"[1] o, equivalentment, un *sistema* o *classe* de parells ordenats.[2] El mateix Schröder aclareix que entén "per una classe o suma idèntica de parells ordenats, la unió de tots aquells relatius individuals $i : j$ en que el referent i està *en una "relació" d'un tipus determinat* amb el correlat j".[3] En definitiva, les nocions de relatiu binari individual i de relatiu binari es corresponen exactament amb les nocions de relatiu (binari) individual i general de Peirce. A més, tal com hem vist, Schröder adopta el mateix punt de vista extensional per definir els relatius que Peirce i manlleva d'aquest la representació matricial dels relatius binaris (*Cf. supra*, cap. II, § 8).

7. Llenguatge i axiomes de l'àlgebra de relatius

La segona lliçó d'*Algebra und Logik der Relative* es titula *Els principis formals, en particular, els de l'àlgebra de relatius binaris* [*Die formalen Grundlagen, insbesondre zur Algebra der binären Relativ*] i, en ella, Schröder introdueix efectivament l'àlgebra de relatius binaris des d'un punt de vista estrictament formal. Com que un *relatiu binari* (una relació) no es altra cosa que un subconjunt del domini pensable de segon ordre, *i.e.* un subconjunt del producte cartesià dels elements d'un conjunt donat, per definir els relatius binaris a nivell formal, Schröder introduirà, seguint a Peirce, els anomenats *coeficients de relatiu*, la funció dels quals és seleccionar d'entre aquells parells ordenats o *constituents* del domini pensable 1, aquells que realment pertanyen al relatiu binari que es vol definir. En paraules de Schröder:

> Com a forma general de qualsevol relatiu es pot posar l'expressió
>
> $$a = \Sigma_{ij}\, a_{ij}(i : j)$$

[1] *Ibid.*, 13.
[2] *Cf. ibid.*, 13.
[3] *Ibid.*, 13.

-on a la suma Σ_{ij} els individus i i j són independents els uns dels altres i tenen com a rang (com a significat o "valor") tots els elements del domini pensable 1^1-, en la mesura que els *coeficients* a_{ij} (llegit: *a* sub *ij*), amb què els parells ordenats $i : j$ (com a *constituents* seus) apareixen afectats o "multiplicats", estiguin limitats al domini format pels valors 0 i 1, la qual cosa es pot expressar mitjançant la fórmula

$$(a_{ij} = 1) + (a_{ij} = 0) = 1.$$

El primer valor del coeficient garanteix, mitjançant el postulat

$$1(i : j) = 1.(i : j) = (i : j),$$

l'existència de $(i : j)$ com a component de la suma, mentre que el darrer valor del coeficient, mitjançant el postulat

$$0(i : j) = 0.(i : j) = 0,$$

té com a conseqüència l'*anul·lació* del parell ordenat $(i : j)$ com a component de la suma.[1]

Com podem veure, els coeficients de relatiu només poden prendre els valors 1 i 0, segons que els constituents al quals estan lligats pels subíndexs comuns pertanyin o no a la relació en qüestió. Ara bé, tal com assenyala Schröder una mica més endavant, els coeficients "sempre es poden interpretar també com enunciats i, en efecte, hom pot llegir

$$a_{ij} = (i \text{ és un } a \text{ de } j)\text{".}$$[2]

Tal com reconeix el mateix Schröder, aquesta observació és irrellevant per a l'*àlgebra de relatius* pròpiament dita, però és essencial per a la *lògica de relatius*, car permet precisament la interpretació de la primera en termes de la segona. La conseqüència fonamental d'aquesta segona interpretació dels coeficients de relatiu és que permet prescindir dels constituents en l'escriptura de les fórmules de l'àlgebra de relatiu (*Cf. supra*, cap. II, § 8). Així, per exemple, l'expressió general d'un relatiu binari a que, tal com veurem després, Schröder dóna a través de l'equació $a = \Sigma_{ij}\, a_{ij}(i : j)$ podria expressar-se a través de l'equació $a = \Sigma_{ij}\, a_{ij}$, que es llegirà: "a és igual a la suma dels i, j tals que "i és un a de j". En el cas anterior, i de totes les definicions que, tal com veurem més endavant, se segueixen com a corol·lari d'aquesta, el fet de prefixar el signe de la suma a un coeficient de relatiu com ara a_{ij} dóna lloc a una suma de parells ordenats d'elements del domini, però s'ha de tenir en compte

[1] *Ibid.*, 22-23.
[2] *Ibid.*, 27.

que quan els coeficients de relatius són interpretats proposicionalment i apareixen combinats mitjançant algunes de les operacions idèntiques o de relatiu, el fet de prefixar a aquests enunciats els signes Π i Σ obliga a interpretar aquests signes com a quantificadors -ja sigui sintàcticament, com a productes (conjuncions) o sumes (disjuncions) d'enunciats, o semànticament, a través de les especificacions habituals. Ben aviat veurem alguns exemples prou significatius d'això que estem dient.

Tal com assenyala Schröder, les operacions (idèntiques) i relacions entre els coeficients de relatiu, en la mesura que només poden prendre els valors 1 i 0, resten completament definides per les següents convencions [*Konventionen*], que constitueixen les quatre primeres estipulacions o postulats [*Festsetzungen*] de l'àlgebra de relatius:

(1) $$(a \text{ € } b)(b \text{ € } a) = (a = b)$$

(2) $$0 \text{ € } 0,\ 0 \text{ € } 1,\ 1 \text{ € } 1,\ 1 \not\text{€}\ 0$$

(3) $$\left\{ \begin{array}{c|c} 0.0 = 0.1 = 1.0 = 0 & 1+1 = 1+0 = 0+1 = 1 \\ 1.1 = 1 & 0+0 = 0 \end{array} \right.$$

(4) $$\bar{1} = 0 \qquad \bar{0} = 1.$$ [1]

Tal com observa el mateix Schröder:

> *Per un domini de valors que consta només dels dos símbols* 0 (*zero* idèntic) i 1 (*u* idèntic), amb les [estipulacions] anteriors, tot d'una resten definides completament les lleis de la inclusió i la no inclusió, de la igualtat i la desigualtat a les quals està subjecte un càlcul que té com a operacions fonamentals "les tres espècies *idèntiques*": *multiplicació*, *addició* i *negació*.[2]

Notem, en efecte, que la primera convenció o estipulació defineix la igualtat entre coeficients de relatiu, mentre que la resta defineixen les tres operacions idèntiques esmentades. En concret, tal com assenyala Schröder, "les quatre convencions (2) estipulen quines subsumpcions valen i quines no valen en aquell domini",[3] les vuit convencions següents (3), que ell anomena l'*abacus*, "defineixen completament per aquest domini el producte $a.b$ o ab i la suma $a+b$ entre dos valors a i b".[4] Finalment, les dues convencions (4)

[1] *Ibid*., 17.
[2] *Ibid*., 18.
[3] *Ibid*., 18.
[4] *Ibid*., 18.

"defineixen generalment la negació $\bar{a}$ ("*a*-barra" o "no-*a*") per cada valor d'aquell domini".[1] És interessant remarcar que, segons Schröder, els signes 0 i 1 s'han d'interpretar en un context proposicional com el Fals i el Vertader respectivament, per la qual cosa (3) i (4) expressaran les condicions de veritat a les quals estan subjectes el producte, la suma i la negació o, el que és el mateix, la seva taula de veritat. Segons Schröder, les estipulacions (2), (3) i (4) formen un sistema *lliure de contradiccions* [*widerspruchfreies*] i són *mútuament independents* [*von einander unabhangige*], donat que cada una d'elles defineix "nou símbol".[2] A més, continua Schröder:

> Les quinze estipulacions anteriors constitueixen la base, el fonament suficient d'un *càlcul de lletres* [*Buchstabenrechnung*], d'un "*càlcul*" ["*Kälkul*"], en el qual per cada *símbol de valor* [*Wertsymbol*] general o lletra -com *a*, *b*, *c*, … - s'ha de pressuposar que representa un qualsevol dels dos valors 0 i 1.[3]

Mitjançant aquest *càlcul de lletres*, hom pot procedir a la verificació [*Verifikation*] de cada un dels axiomes i teoremes del càlcul proposicional, "donat que per cada lletra només s'han de distingir dos casos, aquell en què significa 0 i aquell en què significa 1 i com que en una fórmula hi figuren com a molt 1, 2 o 3 lletres, hom ha d'efectuar només 2, $2^2 = 4$ o $2^3 = 8$ substitucions respectivament (de sistemes de valors 0 o 1 per les lletres), per *confirmar* [*bewahrheiten*] aquelles [fórmules] per a *tots els casos possibles*".[4] En definitiva, sembla clar que Schröder veu el càlcul de lletres com un procediment de decisió de la validesa de les fórmules de la lògica proposicional, essencialment anàleg al procediment de decisió introduït per Peirce en el seu article de 1885, que anticipa el procediment de decisió mitjançant taules de veritat habitual avui en dia (*Cf. supra*, cap. II, § 9). Segons Schröder, "les lleis formals, teoremes i fórmules d'aquest càlcul no són altres que les del "càlcul d'enunciats", el qual és un cas especial -encara que més ric- del càlcul idèntic".[5] En altres paraules, els coeficients de relatius -al qual s'aplica el càlcul de lletres- "pressuposa sempre el càlcul pur d'enunciats",[6] per la qual cosa està clar que l'àlgebra de relatius incorpora l'axiomatització del càlcul d'enunciats presentada en el segon volum d'*Algebra der Logik* i que els quatre (grups de)

---

[1] *Ibid*., 18.
[2] *Cf. ibid*., 19-20.
[3] *Ibid*., 20.
[4] *Ibid*., 21.
[5] *Ibid*., 21.
[6] *Ibid*., 23.

postulats o estipulacions del càlcul de lletres no pretenen oferir una axiomatització alternativa a aquell, sinó simplement, com ja s'ha dit, un procediment de decisió per verificar la validesa de les fórmules on hi figurin coeficients de relatiu.

D'acord amb Schröder, la definició general de relatiu binari introduïda prèviament:

$$(5) \qquad a = \Sigma_{ij}\, a_{ij}(i : j),$$ [1]

constitueix el cinquè postulat de l'àlgebra de relatius binaris i d'ell se segueixen com a corol·lari les següents equacions:

$$1 = \Sigma_{ij}\, 1_{ij}(i : j), \qquad 0 = \Sigma_{ij}\, 0_{ij}(i : j), \qquad 1' = \Sigma_{ij}\, 1'_{ij}(i : j), \qquad 0' = \Sigma_{ij}\, 0'_{ij}(i : j)$$

$$i = \Sigma_{hk}\, i_{hk}(h : k), \qquad i : j = \Sigma_{hk}(i : j)_{hk}(h : k),$$

$$ab = \Sigma_{ij}(ab)_{ij}(i : j), \qquad a + b = \Sigma_{ij}(a + b)_{ij}(i : j), \qquad \bar{a} = \Sigma_{ij}(\bar{a})_{ij}(i : j),$$

$$a \,;\, b = \Sigma_{ij}(a \,;\, b)_{ij}(i : j), \qquad a \dagger b = \Sigma_{ij}(a \dagger b)_{ij}(i : j), \qquad \breve{a} = \Sigma_{ij}(\breve{a})_{ij}(i : j).$$ [2]

En la primera fila, tenim la definició de quatre relatius distingits o, com en diu Schröder, *mòduls*: $1, 0, 1'$ i $0'$. Als dos primers, Schröder els anomena *mòduls idèntics* o *absoluts* i es corresponen amb el que avui en dia anomenem *relació universal* i *buida* respectivament. Als dos darrers, els anomena *mòduls relatius* i es corresponen amb la *relació d'identitat* i *diversitat* modernes respectivament. Aquests quatre relatius distingits ja havien estat introduïts per Peirce en l'article "The Logic of Relatives" de 1883 (*Cf. supra*, cap. II, § 8). En la segona fila, trobem la definició, *qua* relatius binaris, d'un individu o element -la qual cosa el permetrà després definir també una *classe* o *sistema* d'individus com a relatiu binari- i d'un parell ordenat. En la tercera i quarta files hi ha respectivament les definicions dels relatius binaris obtinguts en aplicar les tres *operacions idèntiques* (producte, suma i complement) i les dels relatius binaris obtinguts en aplicar les tres *operacions de relatiu* (producte relatiu, suma relativa i conversa) a partir de relatius binaris prèviament donats. Tal com observa el mateix Schröder, aquestes definicions se segueixen immediatament de la definició (5) que determina un relatiu en funció dels seus coeficients i que, per tant, permet

---

[1] *Ibid.*, 22.
[2] *Ibid.*, 24.

veure un relatiu binari com una suma de relatius individuals. Per tant, el que li cal ara a Schröder és definir els coeficients de relatiu que figuren en els sumatoris anteriors. Aquest és precisament l'objectiu dels dotze postulats següents:

(6)	$1_{ij} = 1$	|	$0_{ij} = 0$
(7)	$1'_{ij} = (i = j)$	|	$0'_{ij} = (i \neq j)$
(8)	$i_{hk} = 1'_{ih}$		
(9)	$(i : j)_{hk} = 1'_{ih} = 1'_{kj}$		
(10)	$(ab)_{ij} = a_{ij} b_{ij}$	|	$(a + b)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$
(11)	$(\bar{a})_{ij} = \overline{(a_{ij})}$		
(12)	$(a\,;b)_{ij} = \Sigma_h\, a_{ih}\, b_{hj}$	|	$(a \dagger b)_{ij} = \Pi_h(a_{ih} + b_{hj})$
(13)	$(\breve{a})_{ij} = a_{ji}$.[1]		

Així, en les dues primeres files, Schröder defineix els coeficients de relatiu dels quatre mòduls $1, 0, 1'$ i $0'$. Les dues primeres definicions es troben per primera vegada en els articles de Peirce "Brief Description of the Algebra of Relatives" de 1882 i "The Logic of Relatives" de 1883. En la tercera fila, Schröder defineix els coeficients de relatius dels sistemes o termes absoluts i dels termes relatius binaris. Tal com ell mateix reconeix, el postulat 8 ($i_{hk} = 1'_{ih}$) ja fou formulat per Peirce i "ens ensenya, primer de tot, a considerar i representar qualsevol individu o element *i* del domini pensable 1^1 com un relatiu binari. Després, i com a resultat de l'anterior, de quina manera es pot representar sempre un "terme absolut" -és a dir: un sistema o una classe [entès] com una suma idèntica d'elements o individus *i* del domini pensable 1^1- com un relatiu binari; i recíprocament, com s'han d'interpretar els relatius binaris en el domini originari, *i.e.* com s'ha d'interpretar 1^2 en 1^1".[2] Notem, en efecte, que d'acord amb (8) i la definició de *i* com a relatiu binari obtinguda com a corol·lari de (5), tenim que:

$$i = \Sigma_{hk}\, 1'_{ih}(h : k) = \Sigma_h\, \Sigma_k(i = h)(h : k) = \Sigma_h(h : i) = \Sigma_k(h : k) = \Sigma_k(i : k),$$

[1] *Ibid.*, 25 i 29.
[2] *Ibid.*, 27.

és a dir, i és la suma de tots els parells ordenats que tenen i com a primera component o *referent*. Pel que fa a (9) ($(i:j)_{hk} = 1'_{ih} = 1'_{kj}$), notem primer de tot que, d'acord amb la definició de $1'_{ij}$ (7), és equivalent a:

$$(i:j)_{hk} = (i = h)(k = j),$$

i pel corol·lari a (5) tenim que:

$$i:j = \Sigma_{hk}(i = h)(k = j)(h:k) = \Sigma_{ij}(i:j),$$

la qual cosa porta Schröder a afirmar "la licitud de veure el mateix parell ordenat $i:j$ com una suma ("*amb un sol component*, un monomi") de parells ordenats [...] i que ens hàgim pres la llibertat de citar o referir-nos també a aquest parell ordenat com un "*relatiu binari* elemental".[1] Finalment, en les quatre darrers files, els diferents postulats defineixen els coeficients del relatius obtinguts en aplicar les operacions idèntiques i relatives a relatius binaris prèviament donats. Així, en les dues primeres files, el postulat (10) defineix els coeficients de relatiu del *producte* i la *suma idèntiques* de relatius, mentre que el postulat (11) defineix els coeficients del *complement* o *negat* d'un relatiu. En les dues darrers files, el postulat (12) defineix els coeficients de relatiu del *producte relatiu* -la *composició* de relacions- i la *suma relativa*, mentre que el postulat (13) defineix els coeficients del *convers* d'un relatiu binari -la *conversa* d'una relació. Com ja sabem, tant les definicions dels coeficients de relatiu de les operacions idèntiques, com les del coeficients de relatiu de les operacions de relatiu les podem trobar ja en l'article de Peirce de 1883 abans esmentat (*Cf. supra*, cap. II, § 8).

La darrer llei de l'àlgebra de relatius pròpiament dita és la definició de la relació d'*inclusió* o *subsumpció* entre relatius binaris:

$$(14) \qquad (a \text{ €}\, b) = \Pi_{ij}(a_{ij} \text{ €}\, b_{ij}),$$

és a dir, "per dos relatius binaris a i b, direm que a està inclòs en b, a € b, si, i només si, per cada sufix $i\,j$, a_{ij} € b_{ij}".[2] Com a corol·lari es té evidentment que:

[1] *Ibid*., 28.
[2] *Ibid*., 32.

$$(a = b) = \Pi_{ij}(a_{ij} = b_{ij}).$$[1]

Tal com podem observar, en les dues equacions anteriors, el signe Π s'interpreta com el quantificador universal i els coeficients s'interpreten com enunciats. Aquesta interpretació proposicional dels signes Π i Σ és també la que requereix el postulat (12) a través del qual Schröder introdueix el producte i la suma relatives. Remarquem, amb tot, que mentre que en el postulat (14) el signe Π es pot interpretar també com un producte o conjunció -possiblement infinita- d'enunciats, aquesta interpretació no és possible en el postulat (12). Schröder no fa comentari especial al respecte perquè, com ja hem dit abans, per ell el càlcul de relatius pressuposa el càlcul d'enunciats i, per tant, l'ús que en ell es fa dels signes Π i Σ com a quantificadors. Tal com havíem vist en la secció anterior, en efecte, en el segon volum d'*Algebra der Logik* Schröder havia definit els signes Π i Σ proposicionalment i algèbricament i havia justificat l'equivalència d'ambdues definicions. En canvi, Schröder no enuncia en cap indret del segon volum d'*Algebra der Logik* les regles que regulen l'ús dels quantificadors de primer nivell (ordre). Amb tot, una especificació d'aquestes regles sembla del tot necessària, perquè, tal com acabem de dir, els postulats o axiomes més importants del càlcul de relatius el que fan és definir les operacions i relacions de l'àlgebra en termes dels seus coeficients, interpretats com enunciats, i els quantificadors de primer nivell. Doncs bé, tal com veurem a continuació, això és precisament el que fa Schröder en la segona lliçó d'*Algebra und Logik der Relative* que estem comentant, tot just després d'introduir els signes Π i Σ com a quantificadors de segon nivell (ordre) i en el marc d'una reflexió general sobre l'ús d'aquests signes en el càlcul proposicional.

Segons Schröder, en efecte, "finalment, entre les lleis fonamentals podrien contar-s'hi encara (la qual cosa inicialment no s'ha fet) les lleis que defineixen i regulen l'ús dels signes del producte i la suma Π i Σ".[2] Això farà que Schröder es vegi obligat a definir les expressions $\prod_u f(u)$ i $\sum_u f(u)$ com a relatius binaris i a justificar les regles d'ús d'aquests símbols des d'un punt de vista semàntic. L'explicació informal de les expressions $\prod_u f(u)$ i $\sum_u f(u)$ és la següent: u s'anomena la "variable del producte o la suma" i representa un *símbol de relatiu*, de manera que té com a *recorregut* o *valor* tots els relatius d'un domini particular (de segon ordre) prèviament donat. Aquest *domini de valors* [*Wertbereich*], Schröder l'anomena l'*abast* o *extensió* [*Erstreckung*] del producte Π o la suma Σ. L'expressió $f(u)$

[1] *Ibid.*, 33.
[2] *Ibid.*, 35.

representa "una funció qualsevol de u, *i.e.* una expressió construïda de certa manera a partir estrictament de les operacions del grup de les sis espècies de la nostra disciplina",[1] és a dir, de les tres operacions idèntiques i les tres relatives definides abans. En $f(u)$ hi poden figurar naturalment altres símbols de relatius binaris, a banda de u, que es representaran per les lletres minúscules $a, b, c, \ldots x, y, z$. Aquests símbols, entre els quals s'inclouen els quatre mòduls, tenen un significat constant i conseqüentment Schröder els anomena *paràmetres*. Això fa que la funció $f(u)$ representi, per cada valor de u, un relatiu binari i, per tant, estigui subjecte a les estipulacions (10)-(13) i, per (5), sigui definible a partir dels seus coeficients $\{f(u)\}_{ij}$. Hom pot definir, doncs, els símbols $\prod_u f(u)$ i $\sum_u f(u)$ com a relatius binaris a partir dels seus coeficients de la manera següent:

(15) $\{\prod_u f(u)\}_{ij} = \prod_u \{f(u)\}_{ij}$ | $\{\sum_u f(u)\}_{ij} = \sum_u \{f(u)\}_{ij}$

En qualsevol cas, tal com assenyala Schröder, per tal de justificar les expressions a la dreta de cada una de les definicions anteriors, és necessari encetar una "reflexió general" sobre els judicis universals i existencials, això és, "sobre el rol dels símbols Π i Σ en el càlcul d'enunciats".[2] Tal com veurem immediatament, aquesta reflexió el portarà a una definició semàntica del quantificador universal i existencial, a partir de la qual es justificaran les regles d'ús dels quantificadors en l'àlgebra de relatius, completament anàloga a la que havíem explicat en la secció anterior. Així, si escrivim les expressions quantificades del tipus $\prod_u \{f(u)\}_{ij}$ i $\sum_u \{f(u)\}_{ij}$ en la forma $\prod_u A_u$ i $\sum_u A_u$ respectivament, on A_u representa un "enunciat sobre u"[3] i u representa ara un símbol que denota un *objecte* qualsevol del domini, sense especificar-se si es tracta d'un domini de primer ordre o de segon ordre, llavors:

> El primer [símbol] representa que l'enunciat A_u és veritat *per cada* un d'aquests objectes u (en el domini de quantificació), mentre que el darrer símbol representa que l'enunciat A_u és veritat *per algun u* (en el domini de quantificació) i, per tant, que hi ha almenys un u en el domini de quantificació, per al qual A_u és veritat.

[1] *Ibid.*, 35.
[2] *Ibid.*, 36.
[3] Aquest canvi de notació està justificat perquè, tal com hem vist abans, els coeficients sempre es poden interpretar com enunciats.

Per tant, l'enunciat $\prod_u A_u$ tindrà el valor de veritat [*Wahrheitswert*] 1 sempre i només quan, per cada *u* pensat, $A_u = 1$; per contra, [tindrà] el valor 0 en cas que hi hagi almenys un *u* per al qual A_u no sigui veritat; on, per tant, $A_u = 0$.

L'enunciat $\sum_u A_u$ tindrà el valor de veritat 1 sempre que hi hagi un *u* per al qual $A_u = 1$; per contra, tindrà el valor 0 quan i només quan, no hi hagi cap *u* d'aquesta mena, és a dir, quan per cada *u* del domini d'extensió, A_u no sigui veritat, $A_u = 0$.[1]

Aquesta explicació semàntica dels quantificadors universal i existencial és completament anàloga a la que havíem estudiat en la secció anterior i a la que Peirce havia donat en el seu article de 1885 (*Cf. supra*, cap. II, § 10) i, per tant, no cal que ens hi aturem de nou. A partir d'ella, Schröder justifica els esquemes [*Schemata*] o principis [*Prinzipien*] que regulen l'ús dels quantificadors universal i existencial. Entre els esquemes o principis esmentats per Schröder cal destacar els següents:[2]

α) $\prod_u A_u \text{ € } A_v \text{ € } \sum_u A_u$ $\overline{\sum_u A_u} \text{ € } \overline{A_v} \text{ € } \overline{\prod_u A_u}$

β) $\prod_u A_u = A_v \prod_u A_u$ | $\sum_u A_u = A_v + \sum_u A_u$

γ) $\overline{\prod_u A_u} = \sum_u \overline{A_u}$ | $\overline{\sum_u A_u} = \prod_u \overline{A_u}$

δ) $\prod_u A_u = A$ $\sum_u A_u = A$

ε) $\prod_u (A \text{ € } B_u) = A \text{ € } \prod_u B_u$ | $\prod_u (A_u \text{ € } B) = (\sum_u A_u \text{ € } B)$

η) $\sum_u (A_u \text{ € } B) = (\prod_u A_u \text{ € } B)$ | $\sum_u (A \text{ € } B_u) = (A \text{ € } \sum_u B_u)$

ζ) $\prod_{u,v} (A_u \text{ € } B_v) = (\sum_u A_u \text{ € } \prod_v B_v)$

ϑ) $\sum_{u,v} (A_u \text{ € } B_v) = (\prod_u A_u \text{ € } \sum_v B_v)$

κ) $\prod_u (A_u \text{ € } B_u) \text{ € } \left\{ \begin{matrix} (\prod_u A_u \text{ € } \prod_u B_u) \\ (\sum_u A_u \text{ € } \sum_u B_u) \end{matrix} \right\} \text{ € } \sum_u (A_u \text{ € } B_u)$

λ) $A \sum_u B_u = \sum_u AB_u$ | $A + \prod_u B_u = \prod_u (A + B_u)$

μ) $\sum_u A_u \sum_v B_v = \sum_{u,v} A_u B_v$ | $\prod_u A_u + \prod_v B_v = \prod_{u,v} (A_u + B_v)$

ν) $A \prod_u B_u = \prod_u AB_u$ | $A + \sum_u B_u = \sum_u (A + B_u)$

ξ) $\prod_u A_u \prod_v B_v = \prod_{u,v} A_u B_v = \prod_u A_u B_u$ | $\sum_u A_u + \sum_v B_v = \sum_{u,v} (A_u + B_v) = \sum_u (A_u + B_u)$

---

[1] *Ibid.*, 36-37.

[2] *Ibid.*, 37-42.

$o)$ $$\sum_u \prod_v A_{uv} \in \prod_v \sum_u A_{uv}.$$

Els principis anterior són enunciats inicialment com esquemes que regulen l'ús dels quantificadors de primer i segon ordre, és a dir, tant la quantificació sobre individus com la quantificació de relatius. Amb tot, tal com observa Schröder, "nosaltres aplicarem els esquemes considerats predominantment, si no exclusivament, sobre objectes u, v, … , els quals no són relatius generals, sinó elements i, j, o "individus del primer domini pensable"".[1] De fet, tal com veurem en la secció següent, Schröder enunciarà després alguns d'aquests principis, interpretats com a esquemes relatius a la quantificació de segon ordre, com a teoremes del seu càlcul de relatius, posant especial èmfasi en els casos en què els anteriors esquemes no són vàlids quan els signes Π i Σ s'interpreten com quantificadors sobre relatius. Sembla clar, doncs, que Schröder entenia que la validesa dels esquemes d'enunciats [*Aussagenschemata*] anteriors s'ha de restringir al cas en què els signes Π i Σ s'interpreten com a quantificadors de primer ordre. Amb tot, és important recordar que aquests esquemes, en la mesura que s'interpreten com esquemes aplicables als quantificadors de primer nivell, no constitueixin pròpiament una part de la teoria d'aquest càlcul, a diferència del que s'esdevé amb les lleis que regulen l'ús dels quantificadors de segon nivell, que després demostrarà com a teoremes, sinó que formen part d'una mena de llenguatge auxiliar a través del qual es desenvolupa el càlcul de relatius. La llista anterior d'esquemes conté la majoria de veritats i equivalències lògiques relatives als quantificadors de primer nivell, només algunes de les quals foren ja enunciades per Peirce. Per veure això amb una mica més detall, escriurem a continuació una llista de les veritats i equivalències lògiques més importants i posarem entre parèntesi la lletra del esquema corresponent de Schröder en què apareixen aquelles:

1. $\forall x\varphi \to \varphi(\binom{x}{c})$, $\varphi(\binom{x}{c}) \to \exists x\varphi$ i $\forall x\varphi \to \exists x\varphi$, on φ és una fórmula amb, com a molt, la variable x lliure i c és una constant (α).

2. $\forall x(\varphi \to \psi) \to (\forall x\varphi \to \forall x\psi)$i $\forall x(\varphi \to \psi) \to (\exists x\varphi \to \exists x\psi)$,on φ, ψ són fórmules amb, com a molt, la variable x lliure (κ).

3. $\exists x\forall y\varphi \to \forall y\exists x\varphi$, on φ és una fórmula amb, com a molt, les variables x,y lliures (o).

4. (Lleis distributives) $\forall x\varphi \wedge \forall x\psi \equiv \forall x(\varphi \wedge \psi)$ i $\exists x\varphi \vee \exists x\psi \equiv \exists x(\varphi \vee \psi)$, on φ, ψ són fórmules qualssevol de primer ordre (ξ). Schröder no enuncia les altres lleis distributives

[1] *Ibid.*, 41.

$\forall x\varphi \vee \psi \equiv \forall x(\varphi \vee \psi)$ i $\exists x\varphi \wedge \psi \equiv \exists x(\varphi \wedge \psi)$, si x no està lliure en ψ, però aquestes lleis se segueixen fàcilment de les les altres lleis enunciades per Schröder i les equivalències de la lògica proposicional.

5. (Equivalència de quantificadors) $\neg\forall x\varphi \equiv \exists x\neg\varphi$ i $\neg\exists x\varphi \equiv \forall x\neg\varphi$, on φ és una formula qualsevol de primer ordre (γ). Schröder no enuncia les altres dues equivalències: $\exists x\varphi \equiv \neg\forall x\neg\varphi$ i $\forall x\varphi \equiv \neg\exists x\neg\varphi$, on φ és una formula qualsevol de primer ordre, que permeten definir cada un dels quantificadors a partir de l'altre, però no hi ha dubte que les coneixia.

6. (Quantificació vàcua) $\forall x\psi \equiv \psi$ i $\exists x\psi \equiv \psi$, on ψ és una formula qualsevol de primer ordre en què x no apareix lliure (δ).

7. $\forall x(\psi \to \varphi) \equiv \psi \to \forall x\varphi$ i $\forall x(\varphi \to \psi) \equiv \exists x\varphi \to \psi$, on φ, ψ són fórmules qualssevol de primer ordre i x no apareix lliure en ψ (ε).

8. $\exists x(\varphi \to \psi) \equiv \forall x\varphi \to \psi$ i $\exists x(\psi \to \varphi) \equiv \psi \to \exists x\varphi$, on φ, ψ són fórmules qualssevol de primer ordre i x no apareix lliure en ψ (η).

Aquestes lleis, juntament amb l'equivalència que justifica el canvi de variables i les equivalències de la lògica proposicional, són més que suficients per demostrar que tota formula de primer ordre és equivalent a una formula prenexa. Això és important tenir-ho en compte perquè, com veurem més endavant, la primera part de la demostració del teorema de Löwenheim-Skolem consisteix fonamentalment a posar una fórmula qualsevol de primer ordre en una certa forma normal, més exactament, en una formula prenexa del tipus $\Sigma\Pi F$ (*Cf. supra*, cap. VII, § 3). Remarquem, per acabar, que les regles μ), ξ) fan referència al que Schröder anomena sumes i productes múltiples [*mehrfachen* Summe und Produkt]. Des d'un punt de vista modern, també és d'aquesta mena la regla o) que, tal com observa Schröder, fou introduïda per Peirce per primera vegada. De fet, tal com assenyala el nostre autor, la llista anterior encara podria ser ampliada amb nous esquemes sobre sumes i productes múltiples. Això és el que farà Schröder en la lliçó tercera amb una nova llista d'esquemes que anomena ara "esquemes auxiliars del càlcul d'enunciats" ["Hülfsschemata des AussagenKalkuls"], els quals justificarà interpretant els signes Σ i Π com abreujaments de sumes i productes -possiblement infinits- d'enunciats i, en definitiva, extrapolant lleis del càlcul idèntic que són vàlides en el cas finit al cas infinit. Aquests esquemes expressen algunes regles relatives al que avui en dia anomenem *quantificació múltiple*, inclosa la *quantificació mixta*. En concret, Schröder enuncia i "demostra" les regles més importants a les quals estan subjectes les fórmules prenexes amb dos blocs quantificacionals, és a dir, fórmules del tipus $\sum_h\sum_k A$, $\prod_h\prod_k A$,

$\sum_h \prod_k A$ o $\prod_h \sum_k A$, les quals són particularment útils, tenint en compte que en les demostracions que es duen a terme en el càlcul de relatius es quantifica sobre els índexs dels coeficients de relatius *binaris* i, per tant, hi apareixen molt sovint combinacions d'aquesta mena. Així, per exemple, Schröder enuncia de nou l'esquema *o*), ara sota la forma:

$$\sum_h \prod_k A_{hk} \text{ € } \prod_k \sum_h A_{hk}.$$

Desenvolupant el subjecte i el predicat de la subsumpció anterior, Schröder obté la subsumpció:

$$\begin{gathered} a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}.. + a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}.. + a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}.. + .. \text{ €} \\ (a_{11} + a_{21} + a_{31}..)(a_{12} + a_{22} + a_{32}..)(a_{13} + a_{23} + a_{33}..)(a_{14} + a_{24} + a_{34}..) \ ... \end{gathered}$$

la qual, segons Schröder, "se segueix, no cal dir-ho, del teorema $(6+)$ del volum 1".[1] L'argument de Schröder és una mica difícil d'entendre, però està clar com podria ser un argument en la línia del que diu Schröder. Per $(6\times)$ i $(6+)$, en efecte, cada sumand a l'esquerra del signe de subsumpció està inclòs en cada un dels factors del producte a la dreta d'aquest signe i, per tant, per les definicions $(3+)$ i $(3\times)$ de la suma i el producte, la suma dels primers està inclosa en el producte dels segons (*Cf. supra*, § 2). En qualsevol cas, està clar que l'argument de Schröder es basa en el que abans hem anomenat interpretació sintàctica o algèbrica dels quantificadors i que extrapola injustificadament determinades lleis que són vàlides en el cas finit al cas infinit. La importància de la subsumpció anterior és evidentment que permet traslladar sempre un signe Π a l'esquerra d'un signe Σ. Schröder no fa aquí cap comentari sobre el procés invers, però, tal com veurem més endavant, Schröder introduirà un *mètode de desenvolupament* que el permetrà traslladar també un signe Σ a l'esquerra d'un signe Π (*Cf. infra*, § 10). De la resta d'esquemes enunciats per Schröder, alguns d'ells foren ja enunciats per Peirce (*Cf. supra*, cap. II, § 10) i, en qualsevol cas, no tenen la importància que els esquemes enunciats abans, de manera que no cal reproduir-los aquí de nou.

[1] *Ibid.*, 113.

8. Teoremes de l'àlgebra de relatius

Schröder demostra els teoremes principals de l'àlgebra de relatius en la tercera i quarta lliçó d'*Algebra und Logik der Relative*, encara que reconeix de bon començament que en conjunt "ja foren establerts per Peirce de forma bastant exhaustiva".[1] Tal com hem vist abans, l'àlgebra o càlcul de relatius consta de sis operacions fonamentals: tres operacions idèntiques i tres relatives, per la qual cosa els teoremes del càlcul de relatius inclouran tant els teoremes del càlcul idèntic pròpiament dit com els teoremes específics del càlcul de relatius, en els quals hi poden figurar indistintament operacions idèntiques i relatives o només relatives. Tal com hem explicat al final de la secció anterior, per demostrar aquests teoremes, Schröder fa un ús essencial dels quantificadors de primer nivell, per la qual cosa podríem dir que el llenguatge a partir del qual desenvolupa el càlcul o àlgebra de relatius inclou tant la quantificació sobre relatius, *i.e.* la quantificació de segon nivell, com la quantificació sobre individus o de primer nivell. De fet, Schröder parla en l'article "Über Pasigraphie, ihren gegenwärtigen Stand und die pasigrapische Bewegung in Italien" (*1898_b*) de la *lògica de relatius* com un llenguatge lògic que equivaldria essencialment a la lògica de primer i segon ordre -*plus* les operacions de relatiu- i diferencia implícitament entre *àlgebra* o *càlcul de relatius* -el *calculus ratiocinator*- i *lògica de relatius* -la *lingua characteristica*- en un sentit una mica diferent al d'*Algebra und Logik der Relative*, on el terme *lògica de relatius* fa referència fonamentalment a la interpretació lògica del càlcul o àlgebra de relatius. Aquest nou sentit donat a la distinció entre àlgebra i lògica de relatius és també, en bona mesura, el sentit en què Peirce havia entès en els articles "The Logic of Relatives" de 1883 i "On the Algebra of Logic" de 1885 la distinció entre l'*àlgebra de relacions diàdiques* i l'*àlgebra general de la lògica*, que comprèn la *lògica de relatius de primera i segona intenció* (*Cf. supra*, cap. II, § 8). Si tenim en compte aquesta diferència terminològica entre *àlgebra* o *càlcul* i *lògica* de relatius, llavors podríem dir que l'objectiu principal de Schröder a *Algebra und Logik der Relative* és estudiar el càlcul de relatius en el marc de la lògica de relatius. En canvi, tal com ja hem vist en el capítol anterior, si bé aquest també era l'objectiu inicial de Peirce fins 1883, a partir d'aquesta data el seu objectiu serà desenvolupar la lògica de relatius pròpiament dita, donada les dificultats de diferent tipus que presentava al seu parer l'àlgebra de relatius (*Cf. supra*, cap. II, § 8).

[1] *Ibid*., 76.

En la tercera lliçó d'*Algebra und Logik der Relative*, Schröder enuncia els teoremes principals relatius a les diferents relacions i operacions (idèntiques i relatives) del càlcul de relatius. Entre aquests teoremes cal esmentar, primer de tot, les següents lleis referides exclusivament a les relacions de *subsumpció* i *igualtat*:

$$(0) \qquad a € a, \qquad a = a, \qquad (a = b) = (b = a), \qquad (a € b)(b € a) € (a € c).$$

El primer grup de lleis fa referència a les quatre operacions binàries -la suma i el producte, idèntics i relatius. En primer lloc, Schröder enuncia el següent teorema:

$$(1) \qquad (a € b)(c € d) € (ac € bd)(a + c € b + d)(a \,;c €\ b \,;d)(a \dagger b € b \dagger d).$$

En segon lloc, Schröder enuncia les lleis relatives a les operacions idèntiques (o de primer nivell) següents:

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{c|c} ab = ba & a + b = b + a \\ a(bc) = (ab)c = abc & a + (b + c) = (a + b) + c = a + b + c \\ a(b + c) = ab + ac & a + bc = (a + b)(a + c) \\ (a + b) + c = ac + bc & ab + c = (a + c)(b + c) \\ (a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd & ab + cd = (a + c)(a + d)(b + c)(b + d) \end{array} \right.$$

Tal com veurem més endavant, totes aquestes lleis, llevat de les lleis commutatives, tenen una llei anàloga pertanyent en l'àlgebra de relatius pròpiament dita, la qual s'obté substituint alguna de les operacions idèntiques que figuren en les lleis anteriors per operacions de relatiu (o de segon nivell). Abans però, Schröder introdueix les següents lleis relatives a la suma i el producte idèntic:

$$(3) \qquad \begin{array}{c} aa = a \ \mid \ a + a = a \\ a(a + b) = a = a + ab \\ (ab = a) = (a € b) = (a + b = b) \\ (c € ab) = (c € a)(c € b) \ \mid \ (a + b € c) = (a € c)(b € c) \end{array}$$

Pel que fa a la suma i el producte relatius, Schröder enuncia les següents lleis:

(4) $$\begin{cases} a;(b+c) = a;b + a;c \\ a+b;c = a;b + b;c \end{cases} \quad \Bigg| \quad \begin{array}{l} a \dagger bc = (a \dagger b)(a \dagger c) \\ ab \dagger c = (a \dagger c)(b \dagger c) \end{array}$$

(5) $$\begin{cases} a;bc \text{€}\, a;b \cdot a;c \\ ab;c \text{ € } a;c \cdot b;c \end{cases} \quad \Bigg| \quad \begin{array}{l} a \dagger b + a \dagger c \text{ € } a \dagger (b+c) \\ a \dagger c + b \dagger c \text{ € } (a+b) \dagger c \end{array}$$

(6) $$a\,;(b\,;c) = (a\,;b);a\,;b\,;c \quad | \quad a \dagger (b \dagger c) = (a \dagger b) \dagger c = a \dagger b \dagger c$$

(7) $$a\,;(b \dagger c) \text{ € } a\,;b \dagger c \quad | \quad (a \dagger b)\,;c \text{ € } a \dagger b\,;c(a \dagger b)\,;c \text{ € } a \dagger b\,;c$$

Segons Schröder, d'aquí se segueixen, com a corol·lari, les següents lleis:

(A) $$\begin{cases} (a+b);(c+d) = a;c + a;d + b;c + b;d \\ ab;cd \text{ € } a;c \cdot a;d \cdot b;c \cdot b;d \\ a;(b \dagger c);d \text{ € } a;b \dagger c;d \end{cases} \quad \Bigg| \quad \begin{array}{c} ab \dagger cd = (a \dagger c)(a \dagger d)(b \dagger c)(b \dagger d) \\ a \dagger c + a \dagger d + b \dagger c + b \dagger d \text{ € } (a+b) \dagger (c+d) \\ (a \dagger b);(c \dagger d) \text{€} a \dagger b;c \dagger d \end{array}$$

Els teoremes (4)-(7) constitueixen, juntament amb el corol·lari A, els teoremes anàlegs al del grup (2) abans esmentats -si més no, en un cert sentit, car aquí és barregen operacions idèntiques i relatives. Així, per exemple, el primer teorema de (4) i el seu dual expressen que "la multiplicació relativa també es comporta distributivament respecte a l'addició, com també ho fa l'addició relativa respecte a la multiplicació",[1] mentre que el primer teorema de (6) i el seu dual expressen l'associativitat de la multiplicació i la suma relativa respectivament.

Un segon grup de teoremes fa referència a les operacions de *negació* i *conversió*. En primer lloc, Schröder enuncia les lleis següents:

(8) $$\bar{\bar{a}} = a, \qquad \bar{\breve{a}} = \breve{\bar{a}}, \qquad \breve{\breve{a}} = a.$$

En segon lloc, enuncia les conegudes lleis de De Morgan:

(9) $$\overline{ab} = \bar{a} + \bar{b} \qquad \overline{a+b} = \bar{a}\bar{b},$$

i les lleis anàlogues pel que fa a les operacions de relatiu:

[1] *Ibid.*, 80.

$$(10) \qquad \overline{a;b} = \bar{a} \dagger \bar{b} \qquad | \qquad \overline{a \dagger b} = \bar{a};\bar{b}.$$

De (8) i (10) se segueix el següent corol·lari:

$$(\mathrm{C}) \qquad \left\{ \begin{array}{c|c} ab = \overline{\bar{a} + \bar{b}} & a + b = \overline{\bar{a}\bar{b}} \\ a\,;b = \overline{\bar{a} \dagger \bar{b}} & a \dagger b = \overline{\bar{a}\,;\bar{b}} \end{array} \right. ,$$

que permet definir, gràcies a la negació, les operacions idèntiques i relatives entre elles. Les lleis (10) i (11) expressen les relacions fonamentals que hi ha entre la negació i la suma i el producte idèntics i relatius respectivament. Pel que fa a les relacions entre la conversió i aquestes mateixes operacions, Schröder enuncia les lleis següents:

$$(11) \qquad \breve{ab} = \breve{b}\breve{a} \qquad | \qquad \breve{a + b} = \breve{b} + \breve{a}$$

$$(12) \qquad \breve{a;b} = \breve{b};\breve{a} \qquad | \qquad \breve{a \dagger b} = \breve{b} \dagger \breve{a}.$$

De (8), (10) i (11) se segueix el següent corol·lari:

$$(\mathrm{D}) \qquad \left\{ \begin{array}{c|c} ba = \breve{\breve{a}\breve{b}} & b + a = \breve{\breve{a} + \breve{b}} \\ b\,;a = \breve{\breve{a}\,;\breve{b}} & b \dagger a = \breve{\breve{a} \dagger \breve{b}} \end{array} \right. ,$$

que no sembla de gaire utilitat. Les lleis següents expressen sota quines condicions es poden aplicar la negació i la conversió en una subsumpció:

$$(13) \qquad (a \text{ € } b) = (\bar{b} \text{ € } a) = (\breve{a} \text{ € } b) = (\breve{\bar{b}} \text{ € } \breve{\bar{a}}),$$

d'on se segueix immediatament el següent corol·lari, que expressa, segons Schröder, les condicions a les quals estan subjectes la negació i la conversió en relació a la igualtat:

$$(\mathrm{E}) \qquad (a = b) = (\bar{a} = \bar{b}) = (\breve{a} = \breve{b}) = (\breve{\bar{a}} = \breve{\bar{b}}) = (b = a) = (\bar{b} = \bar{a}) = (\breve{b} = \breve{a}) = (\breve{\bar{b}} = \breve{\bar{a}}).$$

Dins del segon grup de teoremes, cal incloure també els següents:

$$(14) \qquad \begin{cases} ab \in a;c+b;\bar{c} \\ ab \in c;a+\bar{c};b \end{cases} \quad \Bigg| \quad \begin{matrix} (a \dagger c)(b \dagger \bar{c}) \in a+b \\ (a \dagger c)(\bar{c} \dagger b) \in a+b \end{matrix}$$

$$(15) \qquad \begin{cases} a;b.(\bar{a} \dagger c) \in a;bc \\ a;c \cdot (b \dagger \bar{c}) \in ab;c \end{cases} \quad \Bigg| \quad \begin{matrix} a \dagger (b+c) \in a \dagger b+\bar{a};c \\ (a+b) \dagger c) \in a \dagger b+b;\bar{c} \end{matrix} .$$

I, finalment, el següent teorema de Peirce:

$$(16) \qquad (ab \in c) = (a \in c+\bar{b}) = (b \in \bar{a}+c) \qquad | \qquad (c \in a+b) = (c\bar{b} \in a) = (\bar{a}c \in b),$$

el qual, tal com explica Schröder, encara que pertany estrictament al càlcul idèntic, "també és vàlid per als nostres relatius i és molt important per a la seva teoria".[1] Finalment, entre els teoremes que Schröder considera les lleis bàsiques de l'àlgebra de relatius, l'autor esmenta "aquells que tenen validesa per al *producte* Π *i la suma* Σ (idèntics) *de relatius binaris*, ja sigui que hom consideri aquests signes definits de forma independent, tal com nosaltres hem fet en la conclusió de la secció 3 [...] ja sigui que hom els consideri abreujaments del resultat d'aplicar les diferents espècies d'operacions idèntiques sobre qualsevol nombre de termes",[2] és a dir, ja sigui que hom consideri aquests signes com quantificadors definits semànticament, tal com ell mateix ha fet en l'indret esmentat, ja sigui que hom els consideri definits sintàcticament com productes o sumes (possiblement infinites) de termes. Aquesta precisió de Schröder és del tot necessària perquè, tal com veurem immediatament, Schröder no solament considera en aquest apartat les lleis que regulen la quantificació sobre relatius, sinó també les lleis que resulten de generalitzar alguns dels teoremes anteriors, referents a l'aplicació de les operacions relatives sobre el producte i la suma idèntica, als signes Π i Σ entesos com a productes i sumes idèntiques de termes relatius. Tal com assenyala Schröder, la majoria dels teoremes relatius als quantificadors de segon nivell són anàlegs als esquemes relatius als quantificadors de primer nivell estudiats prèviament, "però l'analogia no és completa, donat que algun dels esquemes d'enunciats no tenen cap correlat pel que fa als relatius".[3] Així, per exemple, l'esquema d'enunciats (γ) té el següent correlat pel que fa a la quantificació sobre relatius:

---

[1] *Ibid.*, 95.
[2] *Ibid.*, 97.
[3] *Ibid.*, 97.

$$(19) \qquad \overline{\Pi a} = \Sigma \bar{a} \qquad | \qquad \overline{\Sigma a} = \Pi \bar{a}$$

En canvi, els esquemes η), ϑ) no tenen cap correlat com a teorema de l'àlgebra de relatius. Pel que fa al signes Π, Σ entesos com abreujament de productes i sumes de relatius, Schröder esmenta, per exemple, els següents teoremes, que guarden una analogia evident amb el teorema anterior:

$$(20) \qquad \left\{ \begin{array}{l|l} \breve{\Pi a} = \Pi \breve{a} & \breve{\Sigma a} = \Sigma \breve{a} \\ \breve{\overline{\Pi a}} = \Sigma \breve{\bar{a}} & \breve{\overline{\Sigma a}} = \Pi \breve{\bar{a}} \end{array} \right.$$

Anàlogament, els teoremes (5) i (6) i els dos primers teoremes del corol·lari A es poden generalitzar fàcilment. Així, per exemple, a partir del primer teorema de (5) i el seu dual, això és:

$$a ; (b + c) = a ; b + a ; c \qquad | \qquad a \dagger bc = (a \dagger b)(a \dagger c),$$

es té evidentment que:

$$a ; \sum_b b = \sum_b a ; b \qquad | \qquad a \dagger \prod_b b = \prod_b (a \dagger b).$$

Schröder esmenta un bon grapat més de teoremes relatius als signes Π, Σ, entesos de les dues maneres indicades, que no val la pena reproduir aquí.

En la quarta lliçó d'*Algebra und Logik der Relative*, Schröder enuncia els teoremes principals relatius als quatre *mòduls*:

$$(1) \qquad 1 \in a + \bar{a} \qquad | \qquad a\bar{a} \in 0,$$

d'on se segueix immediatament que:

$$1 \in \breve{a} + \breve{\bar{a}} \qquad | \qquad \breve{a}\breve{\bar{a}} \in 0.$$

Hom té també:

(2) $\quad 1' € a + \breve{\bar{a}} \quad | \quad a\,\breve{\bar{a}} € 0',$

d’on se segueix que:

$$1' € \bar{a} + \breve{a} \quad | \quad \bar{a}\,\breve{a} € 0'.$$

El teorema (1) té un anàleg de segon nivell, el qual fou enunciat ja per Peirce:

(3) $\quad 1' € a \dagger \bar{a} \quad | \quad a\,;\bar{a} € 0',$

d’on se segueix fàcilment el següent corol·lari:

$$1' € (a \dagger \breve{\bar{a}})(\breve{\bar{a}} \dagger a)(\bar{a} \dagger \breve{a})(\breve{a} \dagger \bar{a}) \quad | \quad a\,;\breve{\bar{a}} + \breve{\bar{a}}\,;a + \bar{a}\,;\breve{a} + \breve{a}\,;\bar{a} € 0'.$$

Schröder enuncia després quatre teoremes ben coneguts relatius als mòduls idèntics i a les operacions de primer nivell:

(4) $\quad (1 € a) = (1 = a) \quad | \quad (a € 0) = (a = 0)$

(5) $\quad (1 = ab) = (1 = a)(1 = b) \quad | \quad (a + b = 0) = (a = 0)(b = 0)$

(6) $\quad (1 € \bar{a} + b) = (a € b) = (a\bar{b} € 0)$

(7) $$\left\{ \begin{matrix} \{1 € (a + \bar{b})(\bar{a} + b)\} \\ 1 € ab + \bar{a}\bar{b} \end{matrix} \right\} = (a = b) = \left\{ \begin{matrix} (a\bar{b} + \bar{a}b \ € \ 0) \\ \{(a + b)(\bar{a} + \bar{b}) € 0 \end{matrix} \right\}.$$

D’entre els teoremes anteriors, només el teorema (6) té un teorema anàleg per cada un dels mòduls relatius 1’ i 0’, que Schröder enuncia més endavant (teoremes (20) i (22) respectivament). Segons Schröder, són particularment interessants els teoremes que expressen el resultat de combinar un relatiu general *a* amb un dels quatre mòduls mitjançant les quatres operacions de l’àlgebra de relatius. Hi ha evidentment 32 combinacions [*Modulnknüpfungen*] possibles, de les quals 16 són reductibles [*reduzibel*], ja sigui a *a* mateix o al mòdul en qüestió. Per a les operacions de primer nivell tenim, en efecte:

(8) $\quad 0.a = 0 = a.0 \quad | \quad 1 + a = 1 = a + 1$

(9) $\quad a.1 = a = 1.a \quad | \quad a + 0 = a = 0 + a.$

Per a les operacions de segon nivell, es té anàlogament:

(10) $0\,;a = 0 = a\,;0 \quad | \quad 1 \dagger a = 1 = a \dagger 1$

(11) $a\,;1' = a = 1'\,;a \quad | \quad a \dagger 0' = a = 0' \dagger a$

Els teoremes anteriors justifiquen que Schröder anomeni a 1 i 0 els mòduls de la multiplicació i l'addició idèntiques respectivament i a 1' i 0' els mòduls de la multiplicació i l'addició relatives respectivament.[1] Les setze combinacions irreductibles de mòduls [*irreduziblen Modulknüpfungen*] són les següents:[2]

$$(12) \qquad \left\{ \begin{array}{c} 1'a = a'1 \\ 0'a = a0' \end{array} \right. \left| \begin{array}{c} 0' + a = a + 0' \\ 1' + a = a + 1' \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{c} a\,;1, 1;a \\ a\,;0', 0';a \end{array} \right. \left| \begin{array}{c} a \dagger 0, 0 \dagger a \\ a \dagger 1', 1' \dagger a \end{array} \right.$$

Pel que fa a les dues operacions unàries aplicades sobre els mòduls hom té el següent teorema:

$$(13) \qquad \left\{ \begin{array}{c} 1 = \breve{1} = \overline{0} = \overline{\breve{0}} \\ 1' = \breve{1}' = \overline{0'} = \overline{\breve{0}'} \end{array} \right. \left| \begin{array}{c} 0 = \breve{0} = \overline{1} = \overline{\breve{1}} \\ 0' = \breve{0}' = \overline{1'} = \overline{\breve{1}'} \end{array} \right.$$

Schröder observa al respecte que "la conversió deixa cada mòdul igual, mentre que la negació d'un mòdul el transforma en el seu dual".[3] Pel que fa a les operacions idèntiques entre mòduls hom té primer de tot l'*abacus*:

$$(14) \qquad \left\{ \begin{array}{c} 0.0 = 0.1 = 1.0 = 0 \\ 1.1 = 1 \end{array} \right. \left| \begin{array}{c} 1 + 1 = 1 + 0 = 0 + 1 = 1 \\ 0 + 0 = 0 \end{array} \right.$$

---

[1] *Cf. ibid.*, 121.

[2] Schröder enuncia aquestes combinacions en la secció següent i amb una numeració diferent de la nostra (*Cf. Ibid.*, 130).

[3] *Ibid.*, 122.

on, tal com aclareix Schröder, 1 i 0 representen els mòduls idèntics i no valors de veritat com en el cas del tercer postulat del càlcul de relatius (*Cf. supra*, § 7). En el cas de les operacions relatives es té anàlogament:

$$(15) \qquad \begin{cases} 0\,;0 = 0\,;1 = 1\,;0 = 0 \\ 1\,;1 = 1 \end{cases} \Bigg| \begin{matrix} 1 \dagger 1 = 1 \dagger 0 = 0 \dagger 1 = 1 \\ 0 \dagger 0 = 0 \end{matrix}$$

Schröder enuncia també els teoremes que expressen el resultat d'aplicar les operacions idèntiques entre mòduls idèntics i relatius (16) i entre mòduls relatius (17), així com els teoremes que expressen el resultat d'aplicar les operacions relatives entre mòduls idèntics i relatius (18) i entre mòduls relatius (19).[1] Als teoremes (13)-(19), Schröder els anomena "l'*abacus* dels relatius binaris". Schröder remarca finalment que, "en la mesura que el domini pensable comprengui *més d'un* element, *els quatre mòduls* han de ser diferents l'un de l'altre",[2] la qual cosa explica el fet que en exposar el càlcul idèntic Schröder exigís que el domini pensable tingués com a mínim dos elements (*Cf. supra*, § 6).

9. Proposicions sintètiques i analítiques: L'*Auflösungproblem*

Els problemes principals estudiats per Schröder a *Algebra der Logik* són els problemes de l'*eliminació* i sobretot el de la *resolubilitat* de les subsumpcions o equacions del càlcul de dominis i de relatius -en el càlcul d'enunciats no cal, perquè ja hem vist que era una simple extensió del càlcul de dominis-, problemes dels quals ja se n'havia ocupat abastament Boole en la seva obra. Pel que fa al càlcul de dominis, els problemes de l'eliminació i la resolubilitat són introduïts d'una forma força elegant i general a partir d'una reflexió sobre els distints tipus de proposicions, en el capítol onze del primer volum d'*Algebra der Logik*, titulat *Spezielle und allgemeine, synthetische un analytische Propositionen: Relationen und Formeln* [*Proposicions especials i general, sintètiques i analítiques: Relacions i fórmules*]. Pel que fa al càlcul de relatius, aquests problemes són introduïts en el capítol cinquè del tercer volum d'*Algebra der Logik*, titulat precisament *Das Auflösungprobleme in der Algebra der binären Relative* [*El problema de la resolubilitat en*

[1] *Cf. ibid.*, 123.
[2] *Ibid.*, 125.

l'àlgebra de relatius binaris]. Schröder anomena proposicions a totes les afirmacions [*Behauptungen*] que fan referència al que ell anomena *relacions extensionals* [*Umfangsbeziehungen*], això és, relacions que es poden donar entre dominis, classes o extensions de conceptes i que es poden expressar a través d'igualtats, subsumpcions, subordinacions, desigualtats, etc. Les proposicions es divideixen, primer de tot, en singulars [*Spezielle*] i *generals* [*Allgemeine*]. Les proposicions singulars són aquelles en què a cada costat dels signes relacionals (igualtat, subsumpció, etc) hi ha "símbols de domini determinats o unívocs" ["bestimmte oder eindeutige Gebietesymbole"], mentre que les proposicions generals són aquelles en què hi figuren "símbols d'un caràcter indeterminat o general" ["von unbestimmtem oder allgemeinem Charakter"].[1] Així, mentre que les proposicions singulars tenen un *sentit completament determinat* i, per tant, són *vertaderes* [*richtige*] o *falses* [*falsche*], no s'esdevé el mateix amb les proposicions generals. De fet, tal com observa Schröder, "la resposta a la pregunta de si són vertaderes o falses dependrà de quin significat, valor o sistema de valors hom assigni als símbols que figurin en elles i als quals encara no els ha estat conferit un significat completament determinat (per la qual cosa aquests símbols apareixen com a "indeterminats", "variables" o eventualment com a "generals")".[2] En aquest sentit, les proposicions generals poden ser *analítiques* o *sintètiques*. Les primeres són, tal com diu Schröder, incondicionalment vertaderes [*unbedingt wahre*], mentre que les segones o bé són incondicionalment falses [*unbedingt falsche*] o absurdes [*absurde*] o bé són només condicionalment vertaderes o falses [*nur bedingt wahre oder falsche*].[3] En altres paraules, les proposicions analítiques són les proposicions *generalment vàlides*, mentre que les proposicions sintètiques o bé són *contradictòries* o absurdes [*absurde*] o bé són vàlides només per alguns valors de les seves variables i, per tant, són *resolubles* [*auflösbare*]. És per aquest darrer tipus de proposicions que Schröder planteja, doncs, el *problema de la resolubilitat* [*Auflosungproblem*] en relació al càlcul de dominis:

> Si la proposició sintètica general no és absurda, llavors hi ha valors o sistemes de valors, la substitució dels quals en la proposició (per als símbols de domini indeterminats que figuren en ella) té com a resultat que sorgeixi una proposició singular vertadera. D'aquests sistemes de valors que transformen una proposició general en una proposició singular vertadera, hom en diu que "satisfan"

[1] *Schröder 1966 1*, 435.
[2] *Ibid.*, 437.
[3] *Ibid.*, 445.

["*erfüllen*"], "acompleixen" ["*genügen*"] o "verifiquen" ["*bewahrheiten*"] la proposició. Hom els anomena també "arrels" ["*Würzeln*"] o parla també d'un "sistema d'arrels" d'aquesta proposició (igualtat, subsumpció, etc), en correspondència amb la manera habitual de parlar en matemàtiques de les equacions sintètiques.

Tan bon punt que pretenem, doncs, que la proposició sigui vàlida, se'ns presenta al davant la tasca de representar-nos per als seus símbols literals aquells dominis o classes que la "satisfan", en altres paraules, representar aquests símbols com un sistema d'arrels de la proposició. I per tal de fer això possible per a cadascú d'aquest símbols, aquestes arrels hauran de ser descrites mitjançant els dominis determinats o "donats" que ja figurin en la proposició, els anomenats "paràmetres", a través dels quals aquests dominis poden ser expressats, "calculats".

La realització d'aquesta tasca s'anomena la "solució" de la proposició.[1]

És a dir, resoldre una equació per a una o vàries incògnites consisteix, primer, a trobar el *resultant* de l'*eliminació* d'aquestes incògnites, és a dir, la condició de resolubilitat que han de satisfer els seus coeficients en funció dels paràmetres per tal de fer aquesta equació vertadera, i després, la forma general de la solució. Així, per exemple, donada una equació de la forma $ax + bx_1 = 0$, el resultant és $ab = 0$ i, si això s'acompleix, la solució és, per un u arbitrari $x = bu_1 + a_1u$. En el cas del càlcul de relatius, Schröder introdueix el tema de la solubilitat en l'ordre invers. És a dir, parteix de l'estudi de la resolubilitat de les equacions en general i defineix a partir d'ell els diferents tipus de proposicions. El text en el qual Schröder explica la naturalesa del problema de la resolubilitat en el càlcul de relatius per a una equació del tipus del tipus $f = 0$ el reproduïm *in extenso* a continuació:

Tot sistema de relatius ben especificats, que en ser substituït en cada símbol de relatiu indeterminat de l'equació, l'"acompleixen" o "satisfan", és a dir, la fan vertadera, s'anomena, com se sap, un sistema d'"*arrels*" de l'equació, i en la mesura que la qüestió recercada sigui el descobriment d'un sistema d'arrels, cada relatiu indeterminat s'anomenarà també una "incògnita" i se'ls designarà com "*les incògnites*". La provisió d'un sistema d'arrels s'anomena "una solució" ["*eine Auflösung*"] de l'equació i la provisió (i també la tasca de proveir) tots els sistemes d'arrels s'anomena la *solució general* (o completa) de l'equació.

[1] *Ibid*., 443.

Així doncs: amb l'equació anterior sorgeix l'obligació i es formula l'exigència de "resoldre-la" pel que fa als relatius indeterminats que figuren en ella com a "incògnites"; l'equació en qüestió ens planteja, doncs, un *problema*.

Aquí es poden presentar dos casos extrems:

D'una banda, el cas on *no hi hagi cap* sistema d'arrels. En aquest cas es planteja a través de l'equació una exigència que és *impossible* de satisfer, la tasca roman *irresoluble* i l'equació és *improcedent* [*unzulässig*] [...] En aquest cas direm, doncs, que "el resultat de l'eliminació" de totes les incògnites de l'equació o de qualssevol d'elles és l'absurd 0, és a dir, l'equació $1 = 0$ i anomenarem també a la mateixa equació $f = 0$ "*absurda*", designant-la igualment com una "*inconsistència*" ["*Inkonsitenz*"] (en el sentit més ampli de la paraula).

D'una altra banda es pot presentar el cas, on *cada* sistema de (tants) relatius (com incògnites hi hagi) és també un sistema d'arrels, és a dir, satisfà l'equació $f = 0$. En aquest cas anomenem l'equació "generalment vàlida", "*analítica*", "autoevident" o també una "identitat" o una *fórmula* (en qualsevol altra cas, per contra, l'anomenarem sintètica), direm també que les seves arrels romanen *indeterminades*, que són qualssevol o *arbitràries*. També direm que el "resultat" de l'eliminació de totes les seves incògnites (o de qualssevol d'elles) de l'equació és 1, o $0 = 0$ o també que l'equació no ofereix "*cap* resultat" [...]

En aquests dos casos extrems [...] no es presenta cap problema de solubilitat. Per contra, aquest problema es planteja en tots els altres casos i d'aquests ens en volem ocupar a partir d'ara a fons.

Per això hem de prendre com a base per a les ulteriors consideracions la següent hipòtesi: Hi ha en el domini dels relatius binaris almenys un sistema (eventualment també molts de sistemes) de valors, els quals en ser substituïts per les incògnites $x, y, z, ..., a, b, ...$ que figuren en l'equació, fan aquesta vertadera, però, en la mesura que l'equació ha de ser satisfeta, tampoc tots els valors d'aquestes lletres poden ser presos totalment a voluntat [...]

Si considerem llavors una de les incògnites -que podem anomenar x-, llavors en relació a la resta d'incògnites $y, z, ..., a, b, ...$ només es pot presentar un dels dos casos següents:

O bé aquestes darrers poden ser totes ells preses sense excepció, en la mesura que per cada sistema de valors, els quals poden ser presos a voluntat, hi ha un valor de x, el qual juntament amb ells constitueix "un sistema d'arrels" de l'equació $f = 0$. O bé aquest no és el cas.

En el primer (sub)cas direm que l'eliminació del l'incògnita x de l'equació $f = 0$ no ofereix cap resultant, o que "el resultant d'aquesta eliminació" és l'equació $0 = 0$, que totes les incògnites són "*eliminades*" juntament amb x de l'equació i que entre cada una de les incògnites restants no hi ha cap relació, essent aquests relatius *generals* i *indeterminats* ("paràmetres"). Per tant, com que, en realitat, podem donar a aquests darrers un sistema de valors arbitrari, la nostra tasca consistirà llavors simplement a proveir els valors corresponents per x, els quals juntament amb aquells constitueixen un sistema d'arrels, en altres paraules, en expressar la incògnita x mitjançant la resta d'incògnites. *En la mesura que s'ha demostrat que aquest és exactament el cas*, llavors tenim davant un problema de resolubilitat "*pur*", a saber, el de la resolubilitat de l'equació $f = 0$ a partir d'*una* incògnita x; reconeixerem llavors aquesta equació com a "resoluble *incondicionalment*" i podrem procedir tot seguit a la seva resolució.

En el segon (sub)cas hi ha determinats sistema de valors (com a mínim un), els quals *no* poden ser donats a les incògnites $y, z, ..., a, b, ...$, perquè no hi ha per ells cap valor de x que pugui representar juntament amb ells un sistema d'arrels. Tot enunciat que sigui presentat com inadmissible en referència a la veritat d'un sistema de valors $y, z, ..., a, b, ...$ és "exclòs" i és pot veure, doncs, com una "relació" entre aquestes incògnites, la qual si hom la vol representar de nou en la forma d'una equació pot fer-ho, perquè està condicionada per $f = 0$ (per a la satisfacció de la qual és imprescindible), però ara el nom de la incògnita x no es presentarà en ella i l'equació és designarà llavors com "un *resultant de l'eliminació* de x de l'equació $f = 0$.

Però l'equació conjunta, és a dir, l'enunciat conjunt de *tots* els resultants (de l'eliminació de x a partir de $f = 0$) ha d'expressar no només una condició *necessària*, sinó també una condició *suficient* per a la resolubilitat de l'equació $f = 0$ a partir de la incògnita x. Anomenem aquesta "el" "resultant" complet o "ple" de l'eliminació en qüestió. Aquesta exclou tots els sistemes de valors inadmissibles de la resta d'incògnites $y, z, ..., a, b, ...$. Cada un dels sistemes de valors per aquestes incògnites que acompleixen l'equació és un sistema "adequat", el qual junt amb determinats valors de x forneix un sistema d'arrels de l'equació $f = 0$ i pot ser caracteritzat també com una relació entre les incògnites llevat de la x, la qual esta condicionada per l'equació $f = 0$ i la satisfactibilitat de la qual garanteix la resolubilitat de l'equació $f = 0$ "per x".[1]

[1] *Schröder 1966 3*, 155-58.

Veiem, doncs, que, tal com s'esdevenia amb el càlcul de dominis, en el càlcul de relatius el problema de la resolubilitat d'una equació (o subsumpció) està indissolublement lligat amb el problema de l'eliminació. Per atacar el problema de la resolubilitat d'una equació (o subsumpció) per una incògnita (o un sistema d'incògnites) s'ha d'atacar abans el problema de l'eliminació d'aquestes incògnites que té com objectiu fornir els resultants d'aquesta eliminació. Podríem dir, doncs, que el problema de l'eliminació és presenta sempre com una tasca preliminar a resoldre per tal d'atacar el problema de trobar una solució a l'equació. En un ordre més general de coses, podríem dir que el tipus de qüestió que es planteja Schröder és la següent: donada una equació entre dues expressions del càlcul, quines són les *condicions generals* de resolubilitat d'aquesta equació? I, si és resoluble, quina és la forma general de la solució? Per tant, el tipus de problema que es planteja Schröder és eminentment de tipus algèbric, no pas de tipus semàntic, com podria dur-nos a pensar equivocadament una lectura superficial del plantejament del problema de la resolubilitat per part de Schröder.

10. El problema del canvi d'ordre dels quantificadors

Com hem vist abans, Schröder enuncia entre els esquemes o principis que regulen l'ús dels quantificadors la subsumpció $\sum_u \prod_v A_{uv} \in \prod_v \sum_u A_{uv}$, la qual li permet traslladar sempre un signe Π a l'esquerra d'un signe Σ (*Cf. supra*, § 2). En aquesta secció ens ocuparem del *mètode de desenvolupament* schröderià, que el permetrà traslladar també un signe Σ a l'esquerra d'un signe Π. Schröder s'ocupa del problema del canvi d'ordre dels quantificadors en la lliçó onzena del tercer volum d'*Algebra und Logik der Relative*, enmig d'una demostració relativa a sumes i productes de relatius i en un moment en què es requereix el canvi d'ordre dels quantificadors per poder continuar. Segons Schröder, en efecte:

> Si hom té un Σ_i davant un Π_m d'un terme general $f(i,m)$ i, per qualsevol motiu, desitja moure el [signe] Σ darrera del [signe] Π en una transformació equivalent, llavors això no és possible immediatament.[1]

[1] *Ibid.*, 513.

Schröder proposa llavors el següent esquema (39):

$$\Sigma_i \Pi_m f(i,m) = \Sigma_i \Pi_{m_\iota} f(i,m_\iota) = \Pi_\iota(\Pi_{m_i})\ \Sigma_\iota f(i,m_\iota)$$
$$\Pi_i \Sigma_m f(i,m) = \Pi_\iota \Sigma_{m_\iota} f(i,m_\iota) = \Pi_\iota(\Sigma_{m_\iota})\ \Pi_i f(i,m_\iota),$$

"a través del qual s'assoleix amb èxit la tasca d'haver de portar tots els Π davant dels Σ".[1] Per entendre l'esquema anterior, és necessari tenir en compte, primer de tot, que Π_ι no és pròpiament un quantificador, sinó un operador que, en ser aplicat a Π_{m_ι} o Σ_{m_ι}, dóna lloc a una successió de quantificadors universals o existencials respectivament. Naturalment, el nombre de quantificadors que figurin en la successió dependrà del rang de l'operador Π_ι i, per tant, del domini que constitueixi el rang d'aquest operador. Així, per exemple, si $\iota = 1, 2, 3, ...$, és a dir, si el domini és infinit numerable, llavors el significat dels "misteriosos operadors" $\Pi_\iota(\Pi_{m_i})$ i $\Pi_\iota(\Sigma_{m_\iota})$ vindrà donat per les igualtats següents:

$$\Pi_\iota(\Pi_{m_\iota}) = \Pi_{m_1} \Pi_{m_2} \Pi_{m_3} ...$$
$$\Pi_\iota(\Sigma_{m_\iota}) = \Sigma_{m_1} \Sigma_{m_2} \Sigma_{m_3} ...$$

En canvi, "quan ι ha de recórrer [...] un continu de valors, com ara el conjunt de punts d'una recta, llavors ja no es pot escriure el significat de $\Pi_\iota(\Pi_{m_i})$ [respectivament de $\Pi_\iota(\Sigma_{m_\iota})$] de forma explícita".[2] Això és així perquè, tal com hem dit fa un moment, $\Pi_\iota(\Pi_{m_i})$ i $\Pi_\iota(\Sigma_{m_\iota})$ representen successions de quantificadors i quan el domini de quantificació és numerable, llavors l'ordre dels nombres naturals permet escriure la successió corresponent, però quan el domini és no numerable, llavors no hi ha manera de fer això. L'únic que podem fer en aquest cas és, tal com assenyala Schröder, escriure els mateixos símbols $\Pi_\iota(\Pi_{m_i})$ i $\Pi_\iota(\Sigma_{m_\iota})$ i "pensar que per cada punt ι de la recta s'ha de substituir un Π_{m_i} [respectivament un Σ_{m_ι}]".[3] És a dir, quan ι té com a recorregut els punts de la recta i m_ι denota ambiguament els nombres reals, llavors s'ha de suposar que per cada element del domini hi ha un quantificador universal o existencial diferent. Per acabar d'entendre l'esquema (39) s'ha de tenir en compte també que, tal com assenyala Schröder, la ι (iota) que figura en els operadors anteriors "ha de variar en "paral·lel" a la i".[4] Vol dir això que, per exemple, en el cas infinit numerable on

[1] *Ibid.*, 514.
[2] *Ibid.*, 515.
[3] *Ibid.*, 515.
[4] *Ibid.*, 513.

$i_1, i_2, i_3, \ldots$ denoten els elements del domini, $m_1, m_2, m_3, \ldots$ seran els valors respectius de m i el recorregut de $\imath$ serà els mateixos nombres naturals. Així doncs, en aquest cas tenim que:

$$\Sigma_i \Pi_m f(i,m) = \Pi_{m_1} f(i_1, m_1) + \Pi_{m_2} f(i_2, m_2) + \Pi_{m_3} f(i_3, m_3) + \ldots \stackrel{*}{=}$$
$$\Pi_{m_1} \Pi_{m_2} \Pi_{m_3} \ldots \{f(i_1, m_1) + f(i_2, m_2) + f(i_3, m_3) + \ldots\}$$
$$\Pi_i \Sigma_m f(i,m) = \Sigma_{m_1} f(i_1, m_1) \Sigma_{m_2} f(i_2, m_2) \Sigma_{m_3} f(i_3, m_3) \ldots \stackrel{*}{=}$$
$$\Sigma_{m_1} \Sigma_{m_2} \Sigma_{m_3} \ldots f(i_1, m_1) f(i_2, m_2) f(i_3, m_3).$$

Evidentment, en el cas no numerable, les expansions anteriors no es poden escriure explícitament i l'únic que es pot fer és, per un i_λ qualsevol, escriure el sumand o factor corresponent de l'expansió en qüestió. Per demostrar l'esquema (39), Schröder distingeix els casos en què el domini és finit, infinit numerable i no numerable. Pel cas infinit numerable, només cal justificar les igualtats marcades amb un asterisc en els desenvolupaments anteriors i, segons Schröder, per això n'hi ha prou a observar que en els sumands (respectivament factors) anteriors o posteriors a un m_λ qualsevol, no hi apareix m_λ i, per tant, es pot aplicar l'esquema:

$$a + \Pi_m f(m) + b = \Pi_m \{a + f(m) + b\}$$
(respectivament $a . \Sigma_m f(m) . b = \Sigma_m \{a . f(m) . b\}$).[1]

Ara bé, és evident que l'esquema anterior només és pot aplicar per demostrar inductivament que podem posar un nombre finit qualsevol de quantificadors al començament de l'expressió, però no és pot aplicar en el cas d'un nombre infinit numerable de quantificadors com és el que aquí ens ocupa car, tal com dirà Löwenheim més endavant, "les regles per calcular sumes [i productes] infinits de proposicions han de demostrar-se".[2] (*Cf. infra*, cap. VII, § 1). En el cas finit, no hi ha evidentment cap problema car, tal com acabem de dir, l'argument anterior permet demostrar per inducció que, per tota successió finita de quantificadors, les igualtats marcades amb asterisc més amunt són vàlides. En el cas infinit no numerable, Schröder argumenta que, donat que cada terme d'un Σ (respectivament d'un Π) es pot representar com a sumand (respectivament factor) d'una suma (respectivament

[1] *Ibid.*, 515-16.
[2] Citat a *Thiel 1977*, 244.

producte) binària i que, en la mesura que el seu segon component és independent del primer i, per tant, pot ser denotat mitjançant una constant a, llavors pot aplicar-se l'esquema:

$$\Pi_m f(m) + a = \Pi_m \{f(m) + a\}$$
$$(\text{respectivament } \Sigma_m f(m).a = \Sigma_m \{f(m).a\}).$$ [1]

Schröder conclou llavors la demostració amb un etc, suposant així que cal aplicar l'esquema anterior a una suma o producte infinit no numerable de quantificadors. Veiem, doncs, que l'argument emprat per Schröder és anàleg a l'emprat en el cas infinit numerable, encara que l'esquema aplicat sigui una mica diferent, i, per tant, planteja d'entrada els mateixos problemes que plantejava aquell. Però en el cas infinit no numerable, a més, el problema es veu agreujat perquè no hi ha cap manera d'explicitar les fórmules que desenvolupen les expressions $\Sigma_i \Pi_m f(i, m)$ i $\Pi_i \Sigma_m f(i, m)$, amb la qual cosa l'argument de Schröder intenta demostrar l'equivalència de dues fórmules que, en realitat, no existeixen.[2] Hem de concloure, doncs, que l'argument de Schröder és, en general, incorrecte -només és correcte pel cas finit. Tal com veurem més endavant, el canvi d'ordre dels quantificadors juga un paper essencial en el procediment emprat per Löwenheim per obtenir, a partir d'una fórmula qualsevol de primer ordre, una altra fórmula en una certa forma normal, a partir de la qual Löwenheim demostra el seu famós teorema sobre la satisfactibilitat de les fórmules de primer ordre en l'article "Über Möglichkeiten im Relativkalkül" de 1915. Per dur a terme el canvi d'ordre dels quantificadors, Löwenheim emprarà una equació equivalent a la segona equació de l'esquema (39) de Schröder, però obviarà la seva demostració (*Cf. infra*, cap. VII, § 3). Veurem també més endavant que Skolem reconeixerà en la introducció del seu conegut article "Logisch-kombinatorische Untersuchungen über die Erfülbarkeit oder Beweisbarkeit mathematischer Sätze" de 1920, en el qual ofereix una nova demostració del teorema de Löwenheim, que un dels seus objectius és cercar una demostració alternativa a la de Löwenheim, que eviti el *mètode de desenvolupament* de Schröder -*i.e.* l'esquema (39)- emprat per Löwenheim per demostrar el seu teorema (*Cf. infra*, cap. VII, § 5).

[1] *Schröder 1966 3*, 516.
[2] *Cf. Badesa 1991*, 106-107.

11. La condensació

Donada una *funció proposicional* [*Aussagenfunktion*] x_{hk}, construïda a partir de coeficients de relatiu amb paràmetres $a, b, c, ...$ i els quantificadors de primer nivell Σ i Π, Schröder planteja el problema de *comprimir-la* [*verdichten*] o *condensar-la* [*condensiren*], això és, transformar-la en una expressió en la qual només hi apareguin "relatius constituïts a partir de $a, b, c, ...$ mitjançant les sis operacions de relatiu inclosos Σ, Π".[1] En altres paraules, *condensar* una fórmula en la qual hi figuren coeficients de relatiu i quantificació sobre individus significa transformar-la en una fórmula lògicament equivalent en la qual només hi figuren relatius, les sis operacions sobre relatius i quantificació sobre relatius. Per exemple, les fórmules que afirmen respectivament que el domini té, com a mínim, dos elements i tres elements, així com les seves negacions corresponents:

$$\Sigma_{ij}\, 0'_{ij} = 1 \qquad \Sigma_{ijk}\, 0'_{ijk} = 1 \qquad \Sigma_{ij}\, 0'_{ij} = 0 \qquad \Sigma_{ijk}\, 0'_{ijk} = 0,$$

es poden condensar mitjançant les fórmules següents:

$$1\,;0'\,;1 \qquad [1\,;0'(0'\,;0')\,;1] \qquad 0' = 0 \qquad 0'(0'\,;0') = 0.$$ [2]

Segons Schröder, una "compressió" o contracció d'aquesta mena sempre es pot realitzar mitjançant una utilització adequada de les fórmules següents:

$$(34) \qquad a_{ii} = (1'a\,;1)_{ij}, \qquad a_{jj} = (1\,;a1')_{ij}$$

$$(35) \qquad a_{ik} = (\breve{i}\,;a)_{hk}, \qquad a_{hj} = (a\,;j)_{hk}$$

$$(36) \qquad a_{ij} = (\breve{i}\,;a\,;j)_{hk}.$$ [3]

La demostració d'aquest darrer teorema és com segueix:

---

[1] *Ibid*., 551.

[2] Aquests exemples foren comunicats per Korselt a Löwenheim i són citats per aquest darrer a *Löwenheim 1915*, 233 (*Cf. infra*, cap. VII, § 2).

[3] *Schröder 1966 3*, 422-23.

$$(\breve{i}\,;a\,;j)_{hk} = \Sigma_{lm}\, i_{lh} a_{lm} j_{mk} = \Sigma_{lm}\, 1'_{il} a_{lm} 1'_{jm} = \Sigma_{lm} (i = l) a_{lm} (j = m) = a_{ij}.$$

Segons Schröder, el teorema (36) és el més general dels tres anteriors car "per cada coeficient de relatiu ens permet transformar un sufix donat *ij* en qualsevol altra *hk* que desitgem".[1] De fet, donat que $\breve{i}\,;a\,;j = 1\,;\breve{i}\,;a\,;j\,;1$, que és un relatiu distingit i, per tant, només pot prendre els valors 1 i 0 independentment dels valors dels sufixos *ij* del coeficient general, podem prescindir d'aquest darrer i posar directament:

$$a_{ij} = \breve{i}\,;a\,;j,$$

equació gràcies a la qual "tot *coeficient* de relatiu es pot veure i representar com un *relatiu binari*".[2] Schröder empra habitualment aquesta equació o, equivalentment, el teorema (36) per dur a terme la condensació. Ara bé, se segueix de la demostració de (36) que la possibilitat de condensar una fórmula depèn en darrer terme del postulat $i_{kj} = 1'_{ik}$ (8), formulat per primera vegada per Peirce, el qual permet interpretar els elements del domini 1^1 com a relatius binaris. D'aquí, doncs, la importància que Schröder atorga a aquest axioma en postular els axiomes a partir dels quals demostrarà tots els teoremes de l'àlgebra de relatius (*Cf. supra*, § 7). Amb tot, donat el significat de l'axioma anterior, cal preguntar-se amb Löwenheim fins quin punt el fet d'emprar el teorema (36) per tal de dur a terme la condensació no converteix aquesta "en un assumpte trivial" i "mancat d'interès".[3] Car, en darrer terme, amb el postulat de Peirce la condensació sempre és pot dur a terme, però fa que el valor d'una expressió condensable depengui de la cardinalitat del domini 1^1, amb la qual cosa allò que fa interessant la condensació, a saber, que el valor d'una expressió condensable sigui independent de la cardinalitat del domini quan aquest té més de dos elements, deixa de ser vàlid.[4] Com és ben sabut, Löwenheim es fa ressò en l'article "Über Möglichkeiten im Relativkalkül" de 1915 del resultat de Korselt, segons el qual la fórmula que afirma que el domini té, com a mínim, quatre elements, i la seva negació:

$$\Sigma_{hijk}\, 0'_{hijk} = 1 \qquad\qquad \Sigma_{hijk}\, 0'_{hijk} = 0,$$

[1] *Ibid*., 423.
[2] *Ibid*., 423.
[3] *Cf. Löwenheim 1915*, 234-35.
[4] *Cf. ibid*., 235, n. 3 (nota del editor).

no són condensables. Semblaria, doncs, que la tesi schröderiana segons la qual tota expressió en la qual hi figuren coeficients de relatiu i quantificació sobre individus es pot transformar en una fórmula lògicament equivalent en la qual només hi figuren relatius, les sis operacions sobre relatius i quantificació sobre relatius és falsa. Ara bé, s'ha de tenir en compte que Löwenheim no entenia per condensació exactament el mateix que Schröder. En concret, segons Löwenheim, en la fórmula condensada no hi podia aparèixer quantificació de cap tipus, tampoc sobre relatius i rebutjà explícitament el postulat de Peirce que permet considerar els individus del domini com a relatius (*Cf. infra*, cap. VIII, § 1). Això fa que Löwenheim i, suposadament, Korselt, veiessin la condensació com un procés més específic que no pas com el veia Schröder i, per tant, podria ser perfectament plausible que la tesi de Schröder fos vertadera, d'acord amb el concepte que aquest tenia de condensació i les lleis que ell postulà per al càlcul de relatiu i, en canvi, fos falsa en relació al concepte de condensació i les lleis del càlcul de relatius acceptats per Löwenheim.

Tal com hem vist en les seccions anteriors, l'objectiu principal de Schröder a *Algebra und Logik der Relative* és el desenvolupament de l'àlgebra o càlcul de relatius binaris. El càlcul de relatius pròpiament dit només conté, des del punt de vista schroderià, les variables o constants de relatiu, els quatre mòduls, les sis operacions sobre relatius -tres idèntiques i tres relatives- i quantificació sobre relatius. Amb tot, tal com hem vist abans, Schröder desenvolupa el càlcul de relatius a partir de la definició general de relatiu binari $a = \Sigma_{ij}\, a_{ij}(i:j)$, que constitueix el cinquè postulat de l'àlgebra de relatius binaris, a partir de la qual es defineixen els quatre mòduls i les diferents operacions, tant idèntiques com relatives, de l'àlgebra (*Cf. supra*, § 6). Així, els coeficients de relatiu i la quantificació sobre aquests coeficients, o el que és el mateix, sobre els elements del domini de primer ordre, juguen un paper bàsic en la major part de les demostracions dels teoremes de l'àlgebra de relatius. Per això, tal com havíem explicat, podríem dir que l'objectiu d'*Algebra und Logik der Relative* és estudiar o desenvolupar l'àlgebra de relatius en el sentit abans especificat en el marc del que allí hem anomenat la *lògica de relatius*, és a dir, d'un llenguatge lògic que incorpora al llenguatge pròpiament dit del càlcul de relatius, les variables individuals i la quantificació de primer ordre (*Cf. supra*, § 8). Així doncs, afirmar que tota fórmula amb coeficients de relatius i quantificació de primer nivell es pot transformar en una fórmula lògicament equivalent en la qual apareguin només relatius i quantificació de segon nivell és el mateix que afirmar que tota fórmula de la lògica de relatius es pot transformar en una fórmula del càlcul de relatius. D'aquí que la rellevància del procés de *condensació* depengui, en darrer terme, de la importància o vàlua que Schröder atorgui al càlcul de relatius. Ara bé, com ja hem vist en les seccions precedents, Schröder tenia en una gran estima el càlcul o àlgebra de relatius i dedicà la major part del seu esforç intel·lectual al desenvolupament d'aquesta. Però, d'on prové aquest interès de Schröder en el càlcul de relatius? Tal com veurem en la secció següent, Schröder considerava que la matemàtica era una branca de la lògica i que tots els seus conceptes podien expressar-se en termes d'un pocs conceptes bàsics pertanyents al càlcul o àlgebra de relatius. D'aquí, en definitiva, la gran importància concedida per Schröder a aquesta disciplina.

12. La reducció de les matemàtiques a la lògica: La *pasigrafia*

Segons Schröder, tota disciplina científica no és altra cosa que un sistema de conceptes [*Begriffsystem*]. Ara bé, cal distingir clarament entre aquells conceptes que són definibles a partir d'altres conceptes als quals els primers estan subordinats, i aquells conceptes que no són definibles a partir d'altres conceptes i que, per tant, tenen l'extensió més amplia. Aquests conceptes, que no són definibles però que són pressuposats, en darrer terme, en la definició de tots els altres conceptes, són anomenats per Schröder *conceptes primitius* [*Urbegriffe*] o *fonamentals* [*Grundbegriffe*] i també *categories* [*Kategorien*]. Aquests conceptes, segons Schröder, han de ser coneguts prèviament a la construcció de tot llenguatge científic a través del qual s'expressi un sistema de conceptes i han de constituir, per dir-ho així, els pressupòsits del mateix llenguatge.[1] Per tant, l'ideal o objectiu que ha de perseguir una "lingua characteristica" dels conceptes o *conceptografia* [*Begriffschrift*] ha de ser "construir de forma sistemàtica tots els conceptes a partir del nombre més petit possible de *conceptes primitius* o *fonamentals*, mitjançant el nombre més petit possible d'*operacions fonamentals* [*Grundoperationen*] ben determinades".[2] Aquest és precisament l'objectiu de la *pasigrafia* [*Pasigraphie*], que en una ponència presentada per Schröder l'any 1897 davant del primer *Congrés Internacional de Matemàtics* a Zürich, titulada "Über Pasigraphie, ihrer gegenwärtigen Stand un die pasigraphische Bewegung in Italien" ["Sobre la pasigrafia, el seu estat present i el moviment pasigràfic a Itàlia"] (*1898*$_b$), l'autor descriu així:

---

[1] *Cf. Schröder 1966 3*, 92.
[2] *Ibid.*, 93. Vegeu també *Frege 1972*, 219.

> L'objectiu d'aquesta nova disciplina és nogensmenys: la determinació definitiva d'una llengua universal, que estigui completament lliure de les peculiaritats nacionals i sigui capaç de fornir a través de la seva construcció els fonaments de la vertadera, això és, de l'exacta filosofia.[1]

Evidentment, tal com assenyala Schröder, l'objectiu de la pasigrafia, que no és altra que la construcció d'una *lingua characteristica* o *characteristica universalis*, en el sentit de Leibniz, que abasti la totalitat del pensament humà, encara no ha estat realitzat ni pot ser assolit d'una vegada per totes, "però sempre hi ha l'esperança, encara que sigui remota, que fent el llenguatge científic existent més precís, o desenvolupant un llenguatge particular d'aquesta mena, puguem assolir un fonament ferm a partir del qual algun dia pugui ser possible escapar de la confusió de les controvèrsies filosòfiques, terminològiques i de sistemes, el conflicte i desacord entre els quals s'ha d'atribuir principalment (com, de fet, és pot veure generalment) a la manca de determinació dels conceptes bàsics".[2] De fet, segons Schröder, "les parts més importants i desenvolupades fins al moment són aquelles que fan referència als conceptes fonamentals de les matemàtiques pures i, en particular, de la lògica, l'aritmètica i la geometria".[3] Per tant, l'objectiu de Schröder serà acabar de desenvolupar, segons l'ideal pasigràfic, aquestes disciplines que conformen la matemàtica pura. Ara bé, s'ha de tenir en compte que Schröder és del parer que "la matemàtica pura [és] una branca de la lògica general".[4] Segons ell, si més no en el cas de l'aritmètica:

> Aquesta opinió troba justificació en el fet que, des del punt de vista de la pasigrafia, hom pot prescindir de totes les categories particulars de l'aritmètica, de tots els seus conceptes primitius, en ser suficients els de la lògica general per tal de construir la totalitat del seus conceptes (com ara els de multiplicitat, nombre, finitud, límit, funció, aplicació, suma, etc). I el mateix s'esdevé amb els principis de la lògica general, de manera que [l'aritmètica] no necessita per a les seves demostracions cap axioma [específic]. [5]

[1] *Schröder 1898$_b$*, 147.
[2] *Frege 1972*, 219.
[3] *Schröder 1898$_b$*, 147.
[4] *Ibid.*, 149.
[5] *Ibid.*, 149.

Així doncs, l'objectiu principal de Schröder, per tal de desenvolupar pasigràficament l'aritmètica, serà especificar quins són els conceptes fonamentals de la lògica als quals es poden reduir tots els conceptes de la lògica general i l'aritmètica, les lleis a les quals aquests conceptes estan subjectes i, finalment, expressar els diferents conceptes fonamentals de l'aritmètica en termes dels conceptes fonamentals de la lògica. En particular, segons Schröder, tots els conceptes fonamentals de la lògica i l'aritmètica es poden reduir a les cinc categories següents:[1]

$$\left| \begin{array}{c} = \\ 1' \end{array} \right| \begin{array}{c} \cdot \\ \Pi \end{array} \left| \begin{array}{c} - \\ \ \end{array} \right| \begin{array}{c} \smile \\ \ \end{array} \left| \begin{array}{c} ; \\ \ \end{array} \right|,$$

és a dir, la *igualtat*, el *producte idèntic*, la *negació*, la *conversió* i el *producte relatiu*. Segons el nostre autor, en efecte:

> Aquestes cinc categories amb els seus set signes són suficients en el fons per tal d'expressar [*einkleiden*] els conceptes essencials de la lògica i l'aritmètica.[2]

Per tal de demostrar això, Schröder dóna primer de tot les definicions pasigràfiques de la resta de conceptes de la lògica general a partir dels set signes de les categories anteriors i, després, la definició dels conceptes fonamentals de l'aritmètica a partir dels conceptes o signes de la lògica general. Les definicions de la resta de signes de la lògica a partir dels set anteriors són les següents:[3]

1. $0 = a.\bar{a}$
2. $1 = \bar{0}$
3. $0' = \bar{1}'$
4. $a + b = \overline{\bar{a}.\bar{b}}$
5. $\Sigma\, a = \overline{\Pi\, \bar{a}}$
6. $a \dagger b = \overline{\bar{a}\, ; \bar{b}}$
7. $(a \in b) = (a = a.b)$

[1] *Ibid.*, 150.
[2] *Ibid.*, 151.
[3] *Ibid.*, 152.

8. $(a \not\text{€}\, b) = \overline{a \text{ € } b}$

9. $a \,\mathrm{C}\, b = (a \text{ € } b).(b \text{ € } a)$

10. $(a \neq b) = \overline{a = b}$

11. $a \not\mathrm{C}\, b = \overline{a \,\mathrm{C}\, b}$.

Evidentment, les lleis a les quals estan subjectes els conceptes i operacions fonamentals a partir dels quals Schröder ha definit la resta de conceptes de la lògica, no són altres que les del *càlcul* o *àlgebra de relatius*, que inclou com a parts seves el càlcul de classes i el càlcul d'enunciats:

> El *calculus ratiocinator*, a les lleis del qual estan subjectes les nostres categories i operacions fonamentals, no és cap altre que l'"*àlgebra de relatius*" de Peirce, una disciplina que corona l'edifici de l'"àlgebra de la lògica" i que comprèn com a parts completament subordinades tant el càlcul d'enunciats com el càlcul de classes. Poc més o menys, tot pot ser considerat sota el punt de vista d'un relatiu binari i, com tal, ser representat. També els enunciats es poden veure com a relatius binaris i les classes, conjunts o conceptes absoluts també es poden representar així.[1]

Finalment, pel que fa a l'expressió o representació dels conceptes fonamentals de l'aritmètica en termes dels conceptes, primitius o no, de l'àlgebra de relatius, cal destacar les següent definicions:[2]

(1). *a* és una classe, conjunt, sistema, etc.

$\mathrm{Kl}.a = 0 \dagger \breve{\bar{a}} \dagger a \dagger 0$

(2). *a* no té cap element

$(\mathrm{num.}\ a = \dot{0}) = 0 \dagger \bar{a} \dagger 0$

(3). *a* és un element (*a* té un element)

$(\mathrm{num.}\ a = \dot{1}) = \breve{a}\,;(1' \dagger \bar{a})$

(4). *a* és un parell (*a* té dos elements)

$(\mathrm{num.}\ a = \dot{2}) = \breve{a}\,;0'(1' \dagger (\bar{a} + 1'))\};a$

(5). *a* és equipotent amb *b*

---

[1] *Ibid.*, 155.

[2] *Ibid.*, 155-56. La notació corresponent al *definiens* de les definicions 1 i 6-10 no és de Schröder, sinó de Peano (1) i nostra (6-10).

$(a \sim b) = \sum_{z} (z\,;\breve{z} + \breve{z}\,;z \text{ € } 1')(b = z\,;a)(a = \breve{z};b)$

(6). El conjunt *a* és finit

$\text{Fin } a = \prod_{z} (z\,;\breve{z} + \breve{z}\,;z \text{ € } 1')(a \text{ € } \breve{z}\,;a) \text{ € } (a \text{ € } z\,;a)$

(7). El conjunt *a* és infinit

$\text{Inf } a = \sum_{z} (z\,;\breve{z} + \breve{z}\,;z \text{ € } 1')(\breve{z}\,;a \text{ C } a \text{ € } \breve{z}\,;z\,;a)$

(8). *f* és una funció

$\text{Fun } f = (f\,;\breve{f} \text{ € } 1' \text{ € } \breve{f}\,;f)$

(9). El conjunt *a* està simplement ordenat pel principi *x*

$x \text{ ord } a = 0'a\,\breve{a}\breve{\bar{a}}.$

Com podem observar, en les definicions (1)-(4) i (9), el *definiendum* és un relatiu binari, mentre que en les definicions (5)-(7) és una quantificació sobre relatius, és a dir, un enunciat quantificacional de segon ordre. L'ítem (5) dóna la definició pasigràfica d'*equipotència* de Cantor: dos conjunts *a* i *b* són equipotents si, i només si, hi ha una aplicació biunívoca entre *a* i *b*, això és, si hi ha un relatiu *z* que aplica bijectivament els elements de *a* i *b*. L'ítem (6) és la definició pasigràfica de finitud de Peirce (*Cf. supra*, cap. II, § 7), mentre que (7) és la definició d'infinitud de Dedekind (*Cf. infra*, cap. IV, § 5). L'elecció de les definicions de Peirce i Dedekind de finitud i infinitud respectivament no és gratuïta, puix que el mateix Schröder havia demostrat en l'article "Über zwei Definitionen der Endlichkeit und G. Cantorsche Sätze" ["Sobre dues definicions de finitud i els teoremes de G. Cantor"] (*1898$_a$*) l'equivalència de les definicions d'infinitud de Peirce i Dedekind i, per tant, que les definicions (6) i (7) són una la negació de l'altra (*Cf. supra*, cap. II, § 7).

13. Schröder i les àlgebres de relacions

L'obra de Schröder i, en particular, les recerques sobre l'àlgebra i la lògica de relatius que duu a terme en el tercer volum d'*Algebra der Logik*, han donat lloc a dues línies de recerca de fonamental importància en la lògica contemporània: la lògica algèbrica de relacions i la teoria de models. Com que, de la influència de Schröder, a través de Löwenheim i Skolem, en la gènesi i desenvolupament de la teoria de models ens en ocuparem amb un cert detall en el capítol VII, aquí farem una breu ressenya històrica de la influència de Schröder en la gènesi i desenvolupament a partir dels anys 40 de l'anomenada *teoria de les àlgebres de relacions*. Per això ens servirem fonamentalment dels articles de R. D. Maddux: "The Origin of Relation Algebras in the Development and Axiomatization of the Calculus of Relations" (*1991*) i de l'article seminal de Tarski "On the Calculus of Relations" (*1941*). En aquest darrer article, Tarski fa la següent valoració del paper i de les contribucions de De Morgan, Peirce i Schröder a la gènesi, desenvolupament i sistematització del càlcul o àlgebra de relacions:

> Els orígens de la teoria contemporània de les relacions cal cercar-lo en en els escrits d'A. de Morgan, qui va dur a terme una àmplia recerca en aquest camp en la dècada dels 50 del segle dinou. De Morgan s'adonà clarament de la manca d'adequació de la lògica tradicional per a l'expressió i justificació, no tan sols dels arguments més complicats de les matemàtiques i les ciències en general, sinó també dels arguments més senzills que s'empren en la vida quotidiana, com ho mostra el seu aforisme que tota la lògica d'Aristòtil no ens permet, a partir del fet que un cavall és un animal, concloure que el cap d'un cavall és el cap d'un animal. En el seu esforç per trencar els lligams amb la lògica tradicional i estendre els límits de la recerca lògica, dirigí la seva atenció al concepte general de relació i reconegué plenament el seu significat. No obstant això, De Morgan no pot considerar-se el creador de la teoria moderna de les relacions, donat que no posseïa les eines adequades per tractar la matèria en què estava interessant i sembla que fou incapaç de desenvolupar aquestes eines. Les seves recerques sobre les relacions manifesten una manca de claredat i rigor que justifiquen potser l'oblit en el qual caigueren en el anys següents.
>
> El títol de creador de la teoria de les relacions està reservat per C. S. Peirce. En diferents articles publicats entre 1870 i 1882, Peirce introduí i precisà tots els conceptes fonamentals de la teoria de relacions i formulà i establí les seves lleis fonamentals; més encara, inicià la discussió de problemes més profunds en aquest camp. En particular, les seves recerques mostraren clarament que una gran part de la teoria de relacions pot presentar-se com un càlcul que formalment s'assembla molt al càlcul de classes desenvolupat per G. Boole i W. S. Jevons, però que el supera de llarg pel que fa a la seva riquesa expressiva i és, per tant, incomparablement més interessant des d'un punt de vista deductiu.
>
> El treball de Peirce fou continuat i ampliat d'una forma molt minuciosa i sistemàtica per E. Schröder. La seva obra *Algebra und Logik der Relative*, que aparegué el 1895 com a tercer volum de *Vorlesungen über die Algebra der Logik*, constitueix fins el moment l'únic report exhaustiu sobre el càlcul de relacions. Al

mateix temps, aquest llibre conté un grapat de problemes sense resoldre i sembla indicar la direcció per a futures recerques.[1]

El nostre estudi ofereix, al nostre parer, una sobrada contrastació empírica de la validesa de les afirmacions realitzades per Tarski en el text anterior en relació al paper jugat per De Morgan (*Cf. supra*, cap. II, § 2), Peirce (*Cf. supra*, cap. II, § 2 i § 8) i Schröder (*Cf. supra*, § 7 i § 8) en la gènesi i desenvolupament del càlcul de relacions. Tarski explica després les raons de l'abandó del programa de recerca de Peirce i Schröder en els termes següents:

> És doncs, bastant curiós que Peirce i Schröder no tinguessin molts de seguidors. És veritat que Whitehead i Russell inclogueren a *Principia Mathematica* la teoria de relacions en la lògica, fent d'aquesta teoria una part central del seu sistema lògic i introduïren molts de conceptes nous i importants relatius a la noció de relació. La major part d'aquests conceptes no pertanyen, tanmateix, a la teoria de relacions pròpiament dita, sinó que estableixen més aviat relacions entre aquesta teoria i altres parts de la lògica: *Principia Mathematica* només va contribuir una mica al desenvolupament intrínsec de la teoria de relacions com a disciplina deductiva independent. En general, s'ha de dir que, encara que la importància de la teoria de relacions està universalment reconeguda avui en dia, aquesta teoria, especialment el càlcul de relacions, està ara en el mateix estat de desenvolupament que fa quaranta-cinc anys.[2]

Aquest fet, reconeix Tarski, fou una de les principals raons del seu interès en la teoria de relacions (binàries) i, més en concret, en el càlcul de relacions. Amb tot, tal com explica el mateix autor, per tal de bastir el càlcul de relacions hom pot seguir dos mètodes diferents. El *primer mètode*, que seria el seguit per Peirce i Schröder, consistiria a "bastir el càlcul de relacions com a part d'una teoria lògica més amplia que es correspondria aproximadament amb el càlcul funcional restringit"[3] de Hilbert i Ackermann, és a dir, amb la lògica de primer ordre. Aquest mètode dóna lloc al que Tarski anomena la *teoria* (*elemental*) *de relacions*. Amb tot, continua Tarski, "si estem interessats no ja en tota la teoria de relacions, sinó simplement en el càlcul de relacions, llavors hem d'admetre que aquest mètode té certs

---

[1] *Tarski 1941*, 73-74.
[2] *Ibid.*, 74.
[3] *Ibid.*, 74.

defectes des del punt de vista de la simplicitat i l'elegància. Car obtenim el càlcul de relacions d'una forma molt indirecta i, en demostrar els teoremes d'aquest càlcul, ens veiem forçats a emprar conceptes i enunciats externs al mateix càlcul".[1] Tarski proposa llavors un *segon mètode* que consisteix essencialment a restringir el llenguatge emprat per bastir el càlcul de relacions al llenguatge específic d'aquest -és a dir, prescindint essencialment de les variables individuals i els quantificadors- i a seleccionar alguns dels teoremes demostrats mitjançant el primer mètode que hom postularà com axiomes del càlcul de relacions. És a dir, es tracta de bastir el càlcul de relacions com una disciplina autònoma i independent de la lògica de primer ordre o qualsevol altra teoria més àmplia. Els axiomes proposats per Tarski a tal efecte són, a més dels axiomes específics del càlcul d'enunciats, els següents:

I. $(x = y \wedge x = z) \rightarrow y = z$

II. $x = y \rightarrow (x + z = y + z \wedge x \cdot z = y \cdot z)$

III. $x + y = y + x \wedge x \cdot y = y \cdot x$

IV. $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z \wedge (x \cdot y) + z = (x + z) \cdot (y + z)$

V. $x + 0 = x \wedge x \cdot 1 = x$

VI. $x + \overline{x} = 1 \wedge x \cdot \overline{x} = 0$

VII. $\neg(1 = 0)$

VIII. $\breve{\breve{x}} = x$

IX. $(x ; y)^{\smile} = \breve{y} ; \breve{x}$

X. $x ; (y ; z) = (x ; y) ; z$

XI. $x ; 1' = x$

XII. $x ; 1 = 1 \vee 1 ; \overline{x} = 1$

XIII. $(x ; y) \cdot \breve{z} = 0 \rightarrow (y ; z) \cdot \breve{x} = 0$

XIV. $0' = \overline{1'}$

XV. $x \dagger y = \overline{\overline{x} ; \overline{y}}$.[2]

Veiem, doncs, que els axiomes postulats per Tarski per al càlcul de relacions pertanyen a tres grups diferents. El primer grup, com ja hem dit, està constituït pels axiomes del càlcul d'enunciats i, tal com afirma Tarski, hom pot agafar "qualsevol sistema d'axiomes per al càlcul d'enunciats que contingui com a termes primitius totes les connectives

[1] *Ibid.*, 74.
[2] *Ibid.*, 76-77.

sentencials prèviament enumerades”,[1] és a dir, les connectives que figuren en els axiomes anteriors. Evidentment, per tal de dur a terme les demostracions, hom ha d’afegir a aquests axiomes les regles de *modus ponens* i substitució. El segon grup d’axiomes està format pels axiomes I-VII de la llista anterior i, tal com reconeix Tarski, “és degut essencialment a Huntington”.[2] Aquest grup d’axiomes està constituït pels axiomes propis del càlcul de classes, és a dir, pels axiomes que caracteritzen les operacions i mòduls absoluts o idèntics. El tercer grup d’axiomes (VIII-XV) està constituït pels axiomes específics del càlcul de relacions, és a dir, per aquells axiomes que caracteritzen les operacions i conceptes relatius. En concret, tal com assenyala Tarski, “els primers quatre axiomes fan referència exclusivament als símbols “1”, “ $\smile$” i “ ;”, els dos següents estableixen algunes connexions entre els conceptes absoluts i relatius, i els dos darrers podrien considerar-se definicions dels símbols “0” i “†””.[3] Tal com ha observat Maddux, la majoria dels axiomes anteriors foren demostrats com a teoremes per De Morgan, Peirce o Schröder.[4] En concret, l’axioma VIII de Tarski és el teorema 2 enunciat per Peirce en l’article “The Logic of Relatives” de 1883, l’axioma IX és el teorema 25, l’axioma X és el teorema 11 i l’axioma XI està inclòs en el teorema 29 (*Cf. supra*, cap. II, § 8). L’axioma XII correspon al següent teorema de De Morgan:

$$x\,;y \leq z \rightarrow \breve{x}\,;\bar{z} \leq \bar{y} \wedge \bar{z}\,;\breve{y} \leq \bar{x},$$[5]

el qual fou generalitzat de diverses maneres per Schröder.[6] Finalment, l’axioma XIV forma part del teorema 13 enunciat en la quarta lliçó d’*Algebra und Logik der Relative* de Schröder i l’axioma XV forma part del corol·lari C de la tercera lliçó de la mateixa obra (*Cf. supra*, § 8). Segons Maddux, hi ha de totes maneres una diferència fonamental entre, d’una banda, la metodologia de De Morgan, Peirce i Schröder i, d’una altra, la de Tarski:

> De Morgan, Peirce i Schröder estaven particularment interessats a deduir fórmules complicades a partir d’altres més simples, però no estaven particularment interessats en una aproximació axiomàtica al càlcul de relacions.

---

[1] *Ibid*., 77-78.
[2] *Ibid*., 78, n. 3.
[3] *Ibid*., 78.
[4] *Cf. Maddux 1991*, 439.
[5] *Cf. De Morgan 1966*, 224.
[6] *Cf. Schröder 1966 3*, 242 i ss.

> Tarski tenia una visió diferent, car l'any 1941 va proposar una axiomatització del fragment del càlcul de relacions consistent en totes les combinacions booleanes d'equacions [...] Aquest segon mètode va donar lloc a la teoria de les àlgebres de relacions.[1]

Tarski proposa en l'article "On the Calculus of Relations" de 1941 una reformulació del càlcul de relacions com una teoria de les àlgebres abstractes

$$\langle A, +, \cdot, -, 0, 1, ;, \dagger, \smile, 1', 0\rangle,$$

anomenades *àlgebres de relacions*, de forma anàloga a com el càlcul de classes pot reformular-se com la teoria de les àlgebres de Boole. Per això, Tarski formula els axiomes que ha de satisfer tota àlgebra d'aquesta mena, de manera que qualsevol àlgebra que satisfaci aquests axiomes serà un àlgebra de relacions. En qualsevol cas, la visió que ofereix Maddux dels autors de la tradició algèbrica en el text anterior no sembla del tot encertada, si més no pel que fa Schröder. Tal com hem vist en aquest capítol, en efecte, Schröder *axiomatitza* el càlcul de relacions, si bé els seus axiomes fan un essencial de les variables individuals i els quantificadors, de manera que el càlcul de relacions s'obté com a subproducte del que Tarski anomena la teoria de relacions i, per tant, d'una "forma molt indirecta". De fet, els axiomes emprats per Tarski per axiomatitzar el càlcul de relacions pròpiament dit en el marc de la teoria de relacions -és a dir, deixant de banda els axiomes i regles d'inferènc📚 propis de la lògica de primer ordre- són essencialment els mateixos que els axiomes postulats per Schröder a tal efecte, això és, els axiomes continguts en els postulats (6)-(14) de la lliçó segona d'*Algebra und Logik der Relative* (*Cf. supra*, § 7). Per un altra costat, la influència de Schröder és també prou clara en la majoria de les qüestions i resultats de tipus model-teorètic que Tarski planteja o enuncia en l'article de 1941. Així, per exemple, el primer resultat metalògic de l'article de Tarski sobre el càlcul de relacions, tal com el mateix autor reconeix, fou demostrat ja per Schröder. És tracta del teorema que enuncia que tota combinació booleana d'equacions -de fet, tota sentència del càlcul de relacions de Tarski- és equivalent a una equació simple i, en darrer terme, a una equació de la forma "$x = 1$".[2] Entre les qüestions model-teorètiques plantejades per Tarski n'hi ha almenys un parell en les quals la influència de Schröder és manifesta. La primera qüestió la podríem formular així: Ja sabem que els

[1] *Maddux 1991*, 438-39.
[2] *Cf. Tarski 1941*, 86 (*Schröder 1966 3*, 153 i ss.)

axiomes de Tarski per al càlcul de relacions són enunciats vertaders, perquè tots ells són teoremes de la teoria elemental de relacions. Podem, però, demostrar la seva veritat d'una forma intuïtiva i independent, això és, sense apel·lar als axiomes de la teoria de relacions? Tarski respon afirmativament a aquesta qüestió fornint un model geomètric en el qual se satisfan tots aquests axiomes. Doncs bé, aquest model és el de la "geometria analítica del pla" [”analytische Geometrie der Ebene”], en el qual Schröder havia interpretat en la secció tercera de la lliçó segona d'*Algebra und Logik der Relatives* totes les constants no lògiques del càlcul de relatius -les relacions de subsumpció i igualtat, les operacions idèntiques i relatives i els quatre mòduls-, per tal de fornir una *evidència geomètrica* o intuïtiva de tots els axiomes i teoremes del càlcul de relatius.[1] Un altra qüestió on podem trobar una clara influència de Schröder i la seva escola és la següent (en paraules de Tarski):

> El següent problema fa referència al lligam entre la teoria elemental de relacions -o, el que és pràcticament el mateix, el càlcul funcional restringit- i el càlcul de relacions. Donat que el càlcul de relacions és tan sols una part pròpia de la teoria de relacions, sorgeix el problema de si tota sentència formulada en la teoria elemental de relacions i referida essencialment a les propietats de les relacions (*i.e.* que contingui només variables relacionals com a variables lliures) pot transformar-se en una sentència equivalent del càlcul de relacions. D'una forma menys exacta, aquest problema pot posar-se també de la següent manera: És veritat que tota propietat de relacions, relació entre relacions, operació entre relacions, etc, que pot definir-se en el càlcul funcional restringit, pot expressar-se també en el càlcul de relacions? Ha estat demostrat per Korselt que la resposta a aquesta qüestió és negativa. Amb tot, la seva prova depèn essencialment de que hom admeti dominis finits d'individus amb diferents nombres d'elements. Jo he mostrat que el resultat segueix sent vàlid per dominis infinits d'elements.[2]

Tarski es refereix al teorema 1 de l'article de Löwenheim "Über Möglichkeiten im Relativkalkül" de 1915, en el qual s'enuncia el resultat de Korselt segons el qual hi ha equacions de primer ordre com ara

$$\sum_{h,i,j,k} 0'_{hijk} = 0 \text{ o } 1,$$

[1] *Cf. Schröder 1966 3*, 53 i ss. Tarski reconeix el seu deute amb Schröder en una nota al peu de la pàgina 78.
[2] *Tarski 1941*, 89.

que no són *condensables*, *i.e.* que no són expressables en el càlcul de relatius (*Cf. infra*, cap. VII, § 1). Ara bé, aquestes equacions són vàlides respectivament només quan el domini té com a màxim tres elements i quan el domini té, com a mínim, quatre elements. El que fa Tarski llavors és estendre aquest resultat de Korselt, considerant sentències que són vàlides en qualsevol domini infinit i que, tanmateix, no són expressables en el càlcul de relacions. Per exemple:

$$\prod_x \prod_y \prod_z \sum_u (xRu \wedge yRu \wedge zRu)$$

o

$$\sum_x \sum_y \sum_z \sum_u (xRy \wedge xRz \wedge xRu \wedge yRz \wedge yRu \wedge zRu).$$[1]

Així doncs, el problema de la condensació de Schröder ha portat, a través de Korselt i Löwenheim, a la generalització dels exemples que havia fornit Korselt per demostrar que la condensació no és sempre possible. A tal efecte, Tarski considera les sentències de primer ordre anteriors, les quals no són tampoc expressables en el càlcul de relacions. El component model-teorètic del resultat anterior rau en el fet que Tarski apel·la a determinades sentències de primer ordre que són satisfactibles en qualssevol domini de cardinalitat infinita i, de fet, en això rau també la *generalitat* del resultat de Tarski en relació al de Korselt.

[1] *Ibid.*, 89.