Lògica i fonaments: 1850-1920

Un estudi comparatiu de les contribucions del corrent algèbric i logicista a la lògica contemporània

Departament de Lògica, Història i Filosofia de la Ciència
Programa: Lògica Matemàtica. Bienni: 1987-89
Per optar al títol de doctor en Filosofia

Lògica i fonaments: 1850-1920

Un estudi comparatiu de les contribucions del corrent algèbric i logicista a la lògica contemporània

Tesi doctoral presentada per
Joan Roselló Moya
Dirigida per
Josep Pla i Carrera

TERCERA PART

El desenvolupament de la lògica matemàtica en el període 1900-1920

CAPÍTOL VII

Löwenheim, Skolem i el naixement de la teoria de models

1. Löwenheim i la tradició algèbrica

L'objectiu principal d'aquest capítol és analitzar la influència de Schröder en el desenvolupament de la lògica de L. Löwenheim i de Th. Skolem i, en particular, estudiar amb un cert detall la demostració de l'anomenat avui en dia teorema de Löwenheim-Skolem en el marc de la lògica de relatius de Schröder. Amb això volem mostrar l'existència d'una línia o programa de recerca iniciat per Boole, que Peirce i Schröder van ampliar i sistematitzar, i a la qual Löwenheim i, fins cert punt, Skolem, van contribuir d'una forma molt notable, fins al punt de reorganitzar-la completament i plantejar en el seu marc alguns dels problemes més importants de la lògica contemporània. En aquesta secció farem un breu recorregut per l'obra de Löwenheim que mostrarà la influència de l'obra de Schröder en la de Löwenheim, mentre que en les tres seccions següents farem una anàlisi detallada del llenguatge de la lògica de relatius a partir del qual Löwenheim enuncia els seus teoremes i estudiarem la demostració de Löwenheim del teorema de Löwenheim-Skolem. En la secció cinquena estudiarem els primers escrits de Skolem i la influència en ells de la línia de recerca de Schröder i Löwenheim. En la secció sisena estudiarem la demostració de Skolem del teorema de Löwenheim-Skolem. Finalment, en la darrer secció estudiarem la relació entre els índexs progressius de Löwenheim i les funcions de Skolem o, més genèricament, entre el procediment emprat per Schröder i Löwenheim per obtenir la forma normal i el procediment emprat per Skolem -anomenat avui en dia *skolemització*. Tot això ens permetrà fer una valoració de les innovacions introduïdes per Löwenheim i Skolem en el programa de recerca schröderià i de les seves contribucions al desenvolupament de la lògica contemporània i la concepció model-teorètica dominant avui en dia.

Pel que fa a Löwenheim (1878-1957), el conegut historiador de la lògica Christian Thiel, ha assenyalat en l'article "Leopold Löwenheim: Life, work, and early influence" (*1977*) que:

> No sabem exactament com Löwenheim va arribar a ocupar-se de l'àlgebra de la lògica, encara que tenim la nota autobiogràfica de Löwenheim afirmant que es va "familiaritzar amb el càlcul de la lògica a través de ressenyes i dels llibres de Schröder". En qualsevol cas, això va ser suficient per involucrar Löwenheim tan profundament en la matèria com per reorganitzar-la, estendre-la en diferents direccions, descobrir el seu "teorema de desenvolupament" i els seus resultats ben coneguts sobre la satisfactibilitat de les fórmules de la lògica de primer ordre amb igualtat, sobre la decidibilitat del seu fragment monàdic, i la reducció del problema de decisió al de la lògica de primer ordre amb només predicats binaris.[1]

Les dades biogràfiques conegudes de Löwenheim no ajuden gaire, certament, a l'hora de mostrar els vincles d'aquest autor amb la tradició algèbrica. Potser l'únic indicador en aquest sentit és que Löwenheim mantingué correspondència amb A. Korselt i E. Müller, que són juntament amb J. Lüroth, els autors més representatius de l'escola schröderiana, amb els quals discutí l'article de 1910 abans de la seva publicació. Però Löwenheim també mantingué correspondència en aquella època amb Zermelo i Frege (1908-10), els quals no poden adscriure's evidentment a la tradició algèbrica. Per contra, les dades bibliogràfiques no ofereixen cap dubte al respecte. De fet, tal com ha assenyalat Thiel, Löwenheim "dedicà tots els seus articles publicats i resums -en el sentit d'*autoressenyes*- i la majoria de les seves ressenyes i noticies [...] a l'àlgebra de la lògica".[2] Pel que fa als articles, el seu títol és prou indicatiu quasi sempre de la filiació de la problemàtica tractada en ells amb la del mateix Schröder. El primer article publicat per Löwenheim aparegué el 1908 i es titula "Über das Auflösungsproblem im logischen Klassenkalkul" ["Sobre el problema de la resolubilitat en el càlcul lògic de classes"]. Tal com indica el seu títol, en aquest article Löwenheim continua les recerques de Schröder i Müller sobre la resolubilitat de les equacions en el càlcul de classes. A tal efecte, Löwenheim enuncia el seu conegut "teorema general de desenvolupament" que Müller recull en el paràgraf 127 de l'*Abriss der Algebra der Logik* de Schröder. El segon article és de 1910 i es titula "Über die Auflösung von Gleichungen im logischen Gebietekalkul" ["Sobre la resolució d'equacions en el càlcul lògic de dominis"]. Thiel el descriu així:

---

[1] *Thiel 1977*, 237. Pràcticament, tota la informació relativa als aspecte biogràfics i bibliogràfics de Löwenheim esmentada en aquest paràgraf està manllevada d'aquest article, que juntament amb un parell d'articles més del mateix autor citats a la Bibliografia, constitueixen la única font fidedigna d'accés a la vida i obra de Löwenheim que nosaltres coneixem -deixant de banda, és clar, tot el que s'ha escrit sobre el famós article de 1915 de Löwenheim.

[2] *Ibid*., 236.

> Es pressuposa que es coneix l'*Abriss* de Schröder. Fent ús de l'obra d'autors anteriors, incloent-hi Jevons i Johnson, s'expliquen tres mètodes per a la solució d'equacions en el càlcul de dominis. Alguns teoremes de Korselt i Müller sobre sistemes disjuntius (*i.e.* disjunts i complementaris) es posen en connexió i es formula i demostra una forma més general del teorema de desenvolupament. Els teoremes 14' i 14'' afirmen que, amb l'ajut del teorema de desenvolupament, es poden demostrar no només fórmules del càlcul, sinó també metateoremes sobre deductibilitat i satisfactibilitat -una característica que més tard Löwenheim destacarà sovint com un avantatge del sistema de l'àlgebra de la lògica de Peirce-Schröder sobre els seus competidors.[1]

El tercer article es de 1913 i es titula "Über Transformationen im Gebietekalkül" ["Sobre transformacions en el càlcul de dominis"]. En ell Löwenheim estén el càlcul de relatius de Peirce i Schröder a un càlcul de matrius de dominis, fent ús del resultat del primer segons el qual tot relatiu pot representar-se com una matriu quadrada de zeros i uns. Segons Thiel, "Löwenheim enuncia que totes les fórmules vàlides en aquest càlcul de Peirce-Schröder continuant sent vàlides per dominis *arbitraris* en comptes de 1 i 0, donat que gràcies al teorema de verificació, la validesa d'una equivalència o implicació en $x_1, ..., x_n$ és equivalent al fet que resulti vertadera per totes les valoracions dels dominis $x_1, ..., x_n$ amb 0 i 1".[2] Els dos articles següents són una continuació de l'anterior. En el primer, titulat "Potenzen im Relativkalkul und Potenzen allgemeiner endlicher Transformationen" ["Potències en el càlcul de relatius i potències de transformacions generals finites"] i publicat el 1913, Löwenheim estén alguns resultats de l'article anterior al càlcul de relatius. En el segon, titulat "Über eine Erweiterung des Gebietekalkuls, welche auch die gewöhnliche Algebra umfasst" ["Sobre una extensió del càlcul de dominis, la qual abraça també l'àlgebra comuna"] i publicat el 1915, Löwenheim estén el càlcul de dominis a un altre càlcul, "del qual tant el càlcul de dominis comú, com la teoria de nombres (sense excloure necessàriament els nombres transfinits) i l'àlgebra elemental en són casos especials".[3] El sisè és el seu article més conegut i, sens dubte, un dels articles més importants de la història de la lògica occidental: "Über Möglichkeiten im Relativkalkül" ["Sobre les possibilitats del càlcul de relatius"] (*1915*), publicat per la prestigiosa revista *Mathematische Annalen*. En ell Löwenheim presenta el seu famós teorema sobre la satisfactibilitat de les fórmules de primer

[1] *Ibid*., 238.
[2] *Ibid*., 238-39.
[3] *Ibid*., 240.

ordre, una versió del teorema conegut avui en dia com teorema de Löwenheim-Skolem. Només per això, l'article ja hauria de figurar com un dels articles més importants de la lògica occidental, però en l'article podem trobar altres resultats importants. Tal com veurem en la propera secció, en el primer paràgraf del seu article, Löwenheim defineix què cal entendre per una *expressió de relatiu* [*Relativausdruck*]. Essencialment, les expressions d'aquesta mena són les expressions obtingudes a partir dels coeficients de relatiu, els mòduls $1'$ i $0'$, les operacions idèntiques i els quantificadors existencial i universal de primer i segon nivell, els quals tenen com abast respectivament el domini dels individus i el domini dels relatius. Les expressions en què només hi figuren quantificadors de primer nivell són anomenades per Löwenheim *expressions de primer ordre* [*Zählausdrücke*]. A partir de les expressions de relatiu i de primer ordre s'obtenen de la forma habitual les *equacions de relatiu* [*Relativgleichungen*] i *les equacions de primer ordre* [*Zählgleichungen*]. Al final del primer paràgraf, Löwenheim planteja el problema de la *condensació.* Com ja sabem, per a Schröder *condensar* una expressió o equació en la qual hi figuren coeficients de relatiu i quantificació sobre individus significava transformar-la en una fórmula lògicament equivalent en la qual només hi figuren relatius, les sis operacions sobre relatius (les tres operacions idèntiques $+$, $.$, $-$ i les tres de relatiu: $\dagger$, $;$, $\smile$) i quantificació sobre relatius (*Cf. supra*, cap. III, § 11). Per a Löwenheim, en canvi, *condensar* significa transformar una expressió o equació de primer ordre en una equació del càlcul de relatius, és a dir, en una equació entre relatius en la qual només hi figuren relatius, les sis operacions sobre relatius i cap tipus de quantificació. El teorema 1, amb el qual s'enceta el segon paràgraf de l'article, enuncia el resultat de Korselt segons el qual *hi ha equacions no condensables*, *per exemple*:

$$\sum_{h,i,j,k} 0'_{hijk} = 0 \text{ o } 1$$

$$\sum_{h,i,j,k,l} 0'_{hijkl} = 0 \text{ o } 1,$$

i, per tant, hi ha també expressions de primer ordre no condensables.[1] Tal com assenyala Löwenheim, les dues primeres equacions anteriors són vàlides respectivament només quan el domini té com a màxim tres elements i quan el domini té, com a mínim, quatre elements. Löwenheim esbossa llavors una demostració completa del teorema i dóna alguns exemples més de equacions de primer ordre que són o no són vàlides només en determinats dominis finits d'individus. Això porta Löwenheim a la consideració de les equacions de primer ordre

[1] *Löwenheim 1915*, 448 (*Van Heijenoort 1967*, 232)

que no són universalment vàlides però, en canvi, són vàlides en qualsevol domini finit. Löwenheim anomena a aquesta mena d'equacions *equacions de primer ordre progressives* [*Fluchtzählgleichungen*]. El teorema 2, una versió del conegut avui en dia com teorema de Löwenheim-Skolem, enuncia que *tota equació de primer ordre progressiva ja no és satisfeta en un domini pensable numerable per valors qualssevol dels coeficients de relatiu.*[1] És a dir, que *si una equació de primer ordre és vàlida en tot domini finit, però no és universalment vàlida, llavors no és vàlida en cap domini infinit numerable*. I, donat que Löwenheim suposa sempre que les equacions són de la forma $A = 0$ i que, com és obvi, una equació d'aquesta mena és universalment vàlida si, i només si, la fórmula A és insatisfactible, tenim encara la formulació següent, que és potser la més familiar avui en dia: *Si una fórmula de primer ordre insatisfactible en tot domini finit és satisfactible, llavors és satisfactible en un domini infinit numerable*. Tanmateix, Löwenheim no presta massa atenció a aquest teorema i considera que la principal aplicació del seu teorema és el fet que *"totes les qüestions sobre la dependència o independència dels axiomes del càlcul de dominis de Schröder, Müller o Huntington són decidibles ja -si és que de fet ho són- en un domini numerable"*.[2] Löwenheim tampoc presta gaire atenció al teorema 4, amb el qual s'enceta el tercer paràgraf, que enuncia la decidibilitat del fragment monàdic del càlcul de predicats de primer ordre amb igualtat. En paraules de Löwenheim: *no hi ha cap equació progressiva entre coeficients de relatius unaris, ni tan sol quan s'hi afegeixen els coeficients de relatius de* $1'$ i $0'$ *com a únics coeficients binaris*.[3] O, equivalentment, *no hi ha cap fórmula de la lògica de primer ordre amb igualtat, amb només predicats monàdics, que sigui vàlida en tot domini finit, però no universalment vàlida.* Només el teorema 6, amb el qual s'enceta el quart paràgraf, titulat "La reducció del càlcul d'ordre superior de relatius al càlcul binari", mereix l'atenció de Löwenheim. Aquest teorema enuncia, en efecte, que *tota equació de relatiu o equació de primer ordre és equivalent a una de binària*[4] i, per tant, la reducció del problema de decisió del càlcul de predicats de primer ordre al del seu fragment binari. Segons Löwenheim, en efecte:

> Hom pot valorar la importància del nostre teorema pel fet que cada teorema de les matemàtiques o de qualsevol càlcul que pugui inventar-se, pot escriure's com una equació de relatius, de la satisfactibilitat de la qual dependrà que el teorema matemàtic s'acompleixi o no. Aquesta transformació de qualssevol teoremes

[1] *Ibid*., 450 (235).
[2] *Ibid*., 456 (240).
[3] *Ibid*., 459 (243).
[4] *Ibid*., 463 (245).

> matemàtics en equacions de relatius la pot realitzar, em sembla, qualsevol que conegui el treball de Whitehead i Russell. Ara bé, donat que, d'acord amb el nostre teorema, tot el càlcul de relatius es pot reduir al càlcul de relatius binaris, se segueix llavors que hom pot decidir la validesa [*Richtigkeit*] d'un teorema matemàtic qualsevol, en la mesura que pot decidir si una equació del càlcul de relatius binaris se satisfà idènticament o no.[1]

El setè article es titula "Gebietedeterminanten" ["Determinants de dominis"] i fou publicat el 1919. Els dos articles següents són molt posteriors. El primer és "Einkleidung der Mathematik im Schröderschen Relativkälkul" ["L'expressió de les matemàtiques en el càlcul de relatius"] (*1940*) i fou publicat a *The Journal of Symbolic Logic*. El segon fou publicat i traduït prèviament a l'anglès per W. O. Quine l'any 1946 sota el títol "On Making indirect proofs direct" ["Fent directes les proves indirectes"]. L'article de 1940 és interessant, en primer lloc, per la valoració que fa dels formalismes de Peano-Russell i de Peirce-Schröder per atacar el problema de la reducció de les matemàtiques a la lògica:

> Per la tasca de logicitzar [logisieren] les matemàtiques, l'obstacle més gran que ha aparegut han estat les paradoxes descobertes per Russell i altres. Per a la seva superació ha estat proposada la teoria de tipus de Russell, la qual no ha satisfet tanmateix als matemàtics, fins i tot en la seva forma més suavitzada. Jo no m'he trobat mai amb aquestes dificultats, precisament perquè logicitzar ha significat sempre per a mi: expressar en el càlcul de relatius de Schröder.[2]

Una mica més endavant, Löwenheim especifica el següent:

> De resultes del càlcul de Russell, el següent fet, força lògic, també pot ser passat per alt, a saber: que les paradoxes, les quals han provocat un trasbals tan gran, no plantegen cap dificultat, quan hom s'até al càlcul de Schröder. En general, hom creu que el càlcul de Schröder no conté tots els signes que es necessiten per logicitzar les matemàtiques. En particular, que el concepte "conjunt de conjunts" no és pot expressar en el càlcul de relatius schröderià. Hi ha només en el càlcul de Schröder conjunts d'elements, no pas conjunts de conjunts. La conseqüència és que hom no pot expressar mai en el càlcul de Schröder la coneguda paradoxa; hom romà en el càlcul de Schröder sense ser destorbat per ella, perquè aquesta paradoxa pressuposa el

[1] *Ibid*., 463 (246).
[2] *Löwenheim 1940*, 1.

> concepte “conjunt de conjunts”. I, malgrat tot, jo soc del parer, que les matemàtiques senceres poden ser “schröderitzades” [*verschrödern*], com diré d’ara en endavant, és a dir, poden ser expressades en el càlcul de relatius. Això significa: 1) Tot teorema de les matemàtiques és equivalent a un enunciat del càlcul de relatius de Schröder, també els teoremes sobre conjunts de conjunts (Dic, per precaució, “equivalent” i no “idèntic”, perquè hom no pugui objectar que aquest enunciat schroderià sigui quelcom diferent que el teorema matemàtic); 2) Qualsevol demostració matemàtica en qüestió d’un d’aquests teoremes es pot transformar en una demostració estrictament lògico-calculatòria d’aquell enunciat.[1]

Suposant, doncs, que les matemàtiques poden ser logicitzades o schröderitzades, això és, expressades en termes del càlcul de relatius de Schröder, i fent-se ressò del seu resultat de 1915 sobre la reductibilitat dels relatius ternaris i d’aritat superior als relatius binaris (teorema 6), les matemàtiques senceres apareixen als ulls de Löwenheim com un edifici de tres nivells:

> El primer nivell conté només enunciats de primer ordre [*Zählaussagen*], és a dir, enunciats que poden ser logicitzats amb l’ajut d’aquells Σ i Π que abasten només els elements del domini pensable, no pas els relatius [...]
>
> El segon nivell conté aquells enunciats que per ser logicitzats requereixen almenys un Σ o Π que abasti els relatius unaris, però cap Σ o Π que abasti relatius binaris [...]
>
> El tercer nivell conté enunciats per a la logicització dels quals es requereix un Σ o Π que abastin els relatius binaris.[2]

En el primer nivell, Löwenheim hi posa el càlcul de dominis i la geometria elemental i la projectiva “en la mesura que parlin d’aplicacions arbitràries o de nombres en general”.[3] En el segon nivell, hi col·loca la teoria formal de nombres, mentre que en el tercer nivell se suposa que hi van la resta de les matemàtiques. La dificultat principal per schröderitzar les matemàtiques rau, tal com Löwenheim reconeix, en la construcció en el càlcul de relatius de Schröder dels *conjunts de conjunts*. Això s’ha de fer, a més, de manera que s’eviti la paradoxa de Russell. A tal efecte, Löwenheim postula un procediment per tal de generar

[1] *Ibid.*, 1-2.
[2] *Ibid.*, 2-3.
[3] *Ibid.*, 3.

aquests conjunts que, tal com ha observat Thiel, presenta un cert paral·lelisme amb l'*Aussorderungaxiom* de Zermelo.[1]

Pel que fa a les ressenyes o recensions escrites per Löwenheim sobres altres autors, destaquen especialment les escrites a *Archiv der Mathematik und Physik* sobre les parts I i II de l'*Abriss der Algebra der Logik* de Schröder realitzat per E. Müller. Segons Thiel:

> Essencialment, Löwenheim saluda l'*Abriss* com un avenç important, però considera un error l'omissió de la clara separació que fa Schröder del càlcul de dominis i del càlcul de proposicions, que porta a una concepció errònia de la disjunció i la negació depenent d'una teoria dels *punts de validesa* de les proposicions en el temps. En segon lloc, mostra que els axiomes de Schröder per al càlcul de dominis pateixen d'una seriosa feblesa, en estar la suma i el producte definits només per a dos dominis a la vegada. Així, Schröder és "incapaç de parlar de sumes i productes infinits sense caure en una fal·làcia" (p. 72). Fins i tot, si estenem les definicions, "les regles per calcular amb sumes infinites de proposicions han de demostrar-se" i això *s'ha de* fer, donat que "ja en el càlcul de dominis, l'extensió dels axiomes i demostracions a productes i sumes infinits és absolutament necessària, car altrament seria incapaç de les aplicacions més importants (*Ibid*.).[2]

Tal com veurem en les properes seccions, aquesta segona crítica de Löwenheim a Schröder serà represa en l'article de 1915 sobre la lògica de relatius i, curiosament, el mateix Löwenheim serà criticat per Skolem en el mateix sentit. L'altre ressenya de Löwenheim a l'*Archiv* és de "La Logique deductive dans sa derniere phase de developpement" de Padoa i en ella Löwenheim compara el simbolisme de Peano amb el de l'escola de Schröder, per al qual òbviament pren partit. La resta de ressenyes foren escrites per Löwenheim en el *Jarhrbuch über die Fortschritte der Mathematik*, són molt curtes i fan referència fonamentalment a escrits sobre lògica i fonaments d'autors com Burali-Forti, Hugo Dingler, Ph. E. B. Jourdain, N. Wiener i H. M. Scheffer. En definitiva, tant dels articles publicats com de les ressenyes en l'*Archiv* es desprèn clarament l'adscripció de Löwenheim a la tradició algèbrica de Peirce i Schröder, la continuació de les diferents línies de recerca encetades per aquest últim i l'adopció de la seva simbologia.

---

[1] *Cf. Thiel 1977*, 242-43.
[2] *Ibid*., 244.

2. Introducció a "Über Möglichkeiten im Relativkalkül"

L'article de Löwenheim de 1915 "Über Möglichkeiten im Relativkalkül" presenta diversos resultats de tipus metateòric sobre el càlcul i la lògica de relatius, que havien estat introduïts per Peirce i sistematitzats per Schröder. Així, Löwenheim pressuposa al llarg de l'article que el seu lector està familiaritzat amb les nocions bàsiques i la notació lògica del tercer volum de l'obra *Vorlesungen über die Algebra der Logik* de Schröder, titulat *Algebra und Logik der Relative* (*Cf. supra*, cap. III, § 7). Com ja sabem, els *signes lògics* del llenguatge a través del qual Schröder estudia el *càlcul* o *àlgebra de relatius*, és a dir, de la *lògica de relatius*, són els següents:

α) Índexs: i, j, k, l, m (amb subíndexs, si s'escau)

β) Mòduls: $1', 0', 1, 0$.

γ) Signes d'operació idèntiques: + , . , − i de relatiu: † , ; , ⌣.

δ) Signes de relació: € , =.

ε) Quantificadors de primer i segon nivell: Π, Σ.

Els *signes no lògics* són els *relatius* o, com diríem avui en dia, les *constants de relació*, denotats per les minúscules llatines: $a, b, c, \ldots$ En el càlcul de relatius no hi ha, en principi, *constants individuals*, però sovint s'empren en les demostracions dels teoremes del càlcul -mai en els enunciats d'aquests- els *índexs* com a noms d'elements del domini i, per tant, com a constants individuals pròpiament dites D'aquí que els *índexs* a voltes s'hagin de considerar signes lògics de la lògica de relatius que juguen el paper de *variables* i a voltes s'hagin de considerar signes no lògics que juguen el paper de *constants individuals*, encara que el paper predominant i per al qual hagin estat introduïts sigui el primer. Les *fórmules atòmiques* són els coeficients de relatius, que s'obtenen en afegir a un relatiu o mòdul dos o més índexs com a sufixos, això és, les expressions del tipus a_{ij}, $1'_{ijk}$, etc. La resta de *fórmules* de la lògica de relatius s'obtenen a partir dels relatius (entre els quals s'inclouen els quatre relatius distingits o mòduls) i els coeficients de relatiu mitjançant els signes d'operació i relació especificats més amunt i els quantificadors existencial i universal de primer i segon nivell. Löwenheim explica, tot just al començament de l'article de 1915, què cal entendre per una *expressió de relatiu*:

> D'ara en endavant entendrem sempre per una *expressió de relatiu* [*Relativausdruck*] una expressió construïda a partir de relatius o coeficients de relatiu -no necessàriament binaris-, en la qual Σ i Π ocorren només un nombre finit de vegades i on cada Σ o Π té com abast o bé els índexs -això és, tots els individus del domini pensable, el qual, seguint Schröder, anomenarem 1^1- o bé tots els relatius que poden construir-se a partir d'aquest domini. Totes les sumes i productes que no tinguin com abast els individus de 1^1 o tots els relatius s'assumirà que són finits i es designaran sempre per + o per · (o la juxtaposició de factors), mai per Σ o Π.[1]

Així doncs, semblaria que una *expressió de relatiu* és el que nosaltres hem anomenat una fórmula de la lògica de relatius. Però, tal com veurem després, en la pràctica Löwenheim entén sota aquesta categoria només les expressions obtingudes a partir dels coeficients de relatiu, els mòduls $1'$ i $0'$, les operacions idèntiques i els quantificadors existencial i universal de primer i segon nivell. La definició anterior presenta, d'una altra banda, un parell de restriccions sobre l'ocurrència dels quantificadors existencial i universal en les expressions de relatiu. La primera és que els quantificadors Σ i Π només poden aparèixer "un nombre finit de vegades". La segona és que Σ i Π han de tenir com a rang *tots* els individus o relatius del domini, denotant-se "totes les altres sumes i productes … sempre amb $+$ o $\cdot$ (o la juxtaposició de factors) i mai per Σ o Π". Aquestes dues restriccions són importants perquè prohibeixen l'ús d'expansions per tal de desenvolupar els quantificadors. Ara bé, tal com veurem més endavant, Löwenheim empra de forma significativa les expansions almenys en una ocasió, per la qual cosa, o bé s'han de considerar aquestes restriccions paper mullat, o be les expansions són un recurs *ad hoc* del qual es pot prescindir per a la demostració del teorema de Löwenheim. Remarquem per acabar amb el tema de les expressions de relatiu que, tal i com havia fet Schröder, Löwenheim també empra sovint les lletres majúscules $A, B, C, ...$ com a metavariables per representar les fórmules o expressions de relatiu. Aquestes lletres porten sovint subíndexs, amb els quals s'indiquen les variables lliures o lligades, de forma anàloga a com es fa avui en dia. Així, per exemple, en la fórmula A_{ij}, les variables i, j són lliures, mentre que a $\sum_{i,j} A_{ij}$, les variables i, j de A estan lligades -òbviament, en una expressió com l'anterior, la fórmula A podria tenir també variables lliures.

[1] *Löwenheim 1915*, 447-48 (*Van Heijenoort 1967*, 232-33).

Com hem dit abans, en una *expressió de relatiu* els quantificadors poden tenir com abast, o bé el domini dels individus, o bé el domini dels relatius. Doncs bé, d'acord amb Löwenheim:

> Una expressió de relatiu en la qual tots els Σ i Π tenen com abast els índexs i, per tant, cap té com abast els relatius, l'anomenarem una *expressió de primer ordre* [*Zählausdruck*]. Igualant dues expressions d'aquesta mena, hom obté una *equació de primer ordre* [*Zählgleichung*]. Un exemple d'una equació d'aquesta mena és:
>
> $$\sum_{l}\prod_{i,j,h} (\bar{z}_{hi} + \bar{z}_{hj} + 1'_{ij})\bar{z}_{li} \sum_{k} z_{ki} = 0.$$ [1]

Està clar que, amb el terme *Zählausdruck,* Löwenheim fa referència a quelcom anàleg al que avui en dia anomenem fórmules o expressions de la lògica de primer ordre.[2] Així almenys ho entendrà Skolem en el seu conegut article "Logisch-kombinatorische Untersuchungen über die Erfülbarkeit oder Beweisbarkeit mathematischer Sätze nebst einem Theoreme über dichte Mengen" (*1920*):

> Löwenheim entén per una *Zählausdruck* una expressió construïda a partir de coeficients de relatiu amb l'ajut de les cinc operacions lògiques fonamentals; a saber, en la terminologia de Schröder: la multiplicació i l'addició idèntiques, la negació, el producte [*Productation*] i la suma [*Summation*], els quals es refereixen només als individus. Les cinc operacions esmentades es designen per un punt o, simplement, la juxtaposició, el signe +, una barra $-$, i els signes Π i Σ respectivament.[3]

---

[1] *Ibid*., 448 (233).

[2] Com és ben sabut, fent-se ressò d'aquest fet, Van Heijenoort ha traduït els termes *Zählausdruck* i *Zählgleichung*, que hom hauria de traduir literalment per *expressió numèrica* i *equació numèrica*, mitjançant el termes *expressió de primer ordre* i *equació de primer ordre* respectivament. Nosaltres seguirem la traducció de Van Heijenoort en les cites textual de Löwenheim, però emprarem normalment el termes alemanys originals en els nostres comentaris -encara que en la secció següent, i per raons de claredat, emprarem generalment la traducció de Van Heijenoort.

[3] *Skolem 1970*, 103 (*Van Heijenoort 1967*, 254). Tal com veurem en la secció cinquena, Skolem empra en un article de 1917 l'expressió *numerische Aussage* (*enunciats numèrics*) per designar les expressions construïdes a partir de fórmules en les quals es fa referència al nombre d'individus d'una classe amb l'ajut de les tres operacions idèntiques i els signesΣ i Π i és molt probable que aquesta expressió li fos suggerida per l'expressió *Zahlausdruck* de Löwenheim. I, com és ben sabut, el mateix Skolem identificarà en el seu article de 1920 les *Zählausdrücke* de Löwenheim amb els seus *Zählaussage* ("Statt von Zählausdrücken will ich lieber von Zählaussagen reden", Skolem *dixit*) i sembla lògic pensar que amb aquest terme Skolem vol denotar quelcom anàleg amb el que en l'article de 1917 denotava amb el terme *numerische Aussagen*, encara que ara el sentit originari d'aquesta mena de fórmula, en les qual l'expressió sense analitzar se suposava que feia una afirmació sobre el nombre d'individus d'una classe, s'hagi perdut.

Veiem, doncs, que Skolem identifica les *Zählausdrücke* de Löwenheim amb el que avui en dia anomenaríem fórmules de la lògica de primer ordre, però, tal i com es desprèn de l'exemple donat per Löwenheim de *Zählgleichungen* esmentat més amunt, en les *Zählausdrücke* també hi pot aparèixer el mòdul $1'$ (i probablement també, el mòdul $0'$), per la qual cosa seria més correcta identificar les *Zählausdrücke* amb les fórmules de la lògica de primer ordre amb identitat. Pel que fa a les *Zählgleichungen*, aquestes poden ser evidentment del tipus $A = B$, $A = 0$ i $A = 1$, on A i B són *Zählausdrücke*. Com és ben sabut, els tres primers teoremes de l'article de Löwenheim de 1915 fan referència, no pas a les *Zählausdrücke*, sinó a les *Zählgleichungen* i, en concret, a les de la forma $A = 0$. Ara bé, és obvi que una equació d'aquest tipus és equivalent a una fórmula del tipus $\bar{A}$ i, per tant, hom pot transformar amb facilitat totes les consideracions de tipus semàntic que Löwenheim fa en la demostracions dels seus teoremes en relació a les *Zählgleichungen* del tipus $A = 0$ en consideracions relatives a *Zählausdrücke*, és a dir, a fórmules de la lògica de primer ordre amb identitat. No ha d'estranyar, doncs, que Skolem comenci el seu article de 1920 abans esmentat afirmant que "En el volum 76 de *Mathematische Annalen*, Löwenheim ha demostrat un teorema interessant i molt destacable sobre el que s'anomenen *Zählausdrücke*",[1] encara que això no sigui exactament així. Estrictament parlant, el primer que va demostrar el teorema de Löwenheim per a les *Zählausdrücke* o, com ell preferia dir-lis, per a les *Zählaussagen* (literalment: *enunciats numèrics*) i, més exactament, per a conjunts de fórmules d'aquesta mena (la qual cosa suposa un avenç important en relació a la demostració de Löwenheim que fa referència a una sola d'aquestes fórmules) fou Skolem, a qui també se li pot atribuir el mèrit d'haver delimitat amb precisió la noció de fórmula de primer ordre.

Evidentment, de la mateixa manera que podem convertir tota *Zählausdruck* en una *Zählgleichung*, podem convertir tota *Relativausdruck* en una *Relativgleichung* [*equació de relatiu*]. Segons Löwenheim:

> Una equació de relatiu pot ser:
>
> (*a*) Una equació idèntica [*identische Gleichung*];
>
> (*b*) Una *equació progressiva* [*Fluchtgleichung*], això és, una equació que no es satisfeta en tot 1^1, però és satisfeta en tot 1^1 finit (o, més explícitament, una equació que no és satisfeta idènticament [*identische erfüllt*], però és satisfeta sempre que els índexs de la suma [*Summation*] i el producte [*Produktation*] tenen com a recorregut un 1^1finit);

[1] *Ibid*., 103 (254).

(c) Una *equació estable* [*Haltgleichung*], això és, una que no es satisfeta mai en tot 1^1 finit per a valors qualssevol dels índexs.[1]

Les *equacions idèntiques* -o satisfetes idènticament- són les equacions *universalment vàlides*, això és, el que Schröder anomenava *proposicions analítiques*. Löwenheim no defineix aquí què entén per una equació idèntica, però quasi al final de l'article trobem el següent aclariment que no deixa cap lloc al dubte:

> Si, de fet, $f = 0$ no és satisfeta idènticament, llavors hi ha un domini 1^1 i un sistema de valors per als coeficients de relatiu dels relatius $a, b, \ldots$ que ocorren en f per al qual [l'equació] no és satisfeta.[2]

Des d'un punt de vista modern, aquesta explicació potser no és tan clara com hom podria esperar, perquè Löwenheim no disposa dels conceptes precisos de tipus sintàctic (definició de fórmula de primer ordre, distinció entre signes lògics i no lògics, etc) i semàntic (estructura, interpretació, veritat, etc) per dir quan una equació o una fórmula de primer ordre és satisfeta idènticament. Però està clar que, per Löwenheim, una equació de relatiu és satisfeta idènticament si és vertadera en tot domini o univers 1^1 per qualsevol assignació de valors als relatius (les constants de relació) que ocorren en aquesta equació i els índexs (que es poden entendre aquí indistintament com variables o com constants individuals) que ocorren com a sufixos dels relatius (inclosos els mòduls $1'$ i $0'$). És a dir, una equació és satisfeta idènticament si és vertadera en qualsevol estructura en la qual interpretem aquesta fórmula, això és, si és universalment vàlida. Tal com hem vist abans, les equacions progressives i les estables són aquelles que no són idènticament satisfetes, això és, que no són universalment vàlides. Les equacions progressives són aquelles que no són satisfetes idènticament, però són satisfetes en tot domini finit per qualsevol assignació de valors, és a dir, les equacions que no són universalment vàlides, però que són vàlides en tot domini finit. Les equacions estables són aquelles per a les quals hi ha un domini finit i una assignació de valors que no satisfan aquesta equació, és a dir, aquelles que no són vàlides ni tan sols en qualsevol domini finit. Evidentment, les definicions i consideracions anteriors s'apliquen en particular a les *Zählgleichungen* i, a partir d'aquí, són fàcilment extrapolables a les *Zählausdrücke*. Dir, en efecte, que una equació de primer ordre $A = 0$ és idènticament

[1] *Löwenheim 1915*, 448 (233).
[2] *Ibid.*, 469 (251).

satisfeta és el mateix que dir que la fórmula de primer ordre A és falsa per qualsevol interpretació, és a dir, que A és insatisfactible. Per tant, l'equació de primer ordre $A = 0$ serà una equació progressiva si, i només si, la fórmula de primer ordre A és satisfactible, però insatisfactible en tot domini finit; l'equació de primer ordre $A = 0$ serà una equació estable si, i només si, la fórmula de primer ordre A és satisfactible en tot domini finit.

3. El canvi d'ordre dels quantificadors: els índexs progressius

En aquesta secció farem referència al mètode seguit per Löwenheim per realitzar el canvi d'ordre dels quantificadors, el qual Löwenheim hereta de Schröder i és essencial per a l'obtenció de la forma normal. Tal com explicarem més endavant, el primer pas de la demostració de Löwenheim del seu famós teorema, consisteix a descriure un procediment a través del qual hom pot transformar una fórmula del tipus $\Pi\Sigma$ en una altra del tipus $\Sigma\Pi$ equivalent a ella en termes de satisfactibilitat, la qual és equivalent alhora a una fórmula universal del tipus ΠF. Així, per exemple, la *Zahlgleichung* considerada abans:

$$\sum_{l}\prod_{i,j,h} (\bar{z}_{hi} + \bar{z}_{hj} + 1'_{ij})\bar{z}_{li} \sum_{k} z_{ki} = 0,$$

pot transformar-se en l'equació:

$$\sum_{l}\sum_{k_\lambda} \lambda \prod_{i,j,h} (\bar{z}_{hi} + \bar{z}_{hj} + 1'_{ij})\bar{z}_{li} z_{k_i i} = 0,$$

la qual és equivalent a:

$$\prod_{h,i,j} (\bar{z}_{hi} + \bar{z}_{hj} + 1'_{ij})\bar{z}_{li} z_{k_i i}.$$

Per dur a terme la primera de les transformacions anteriors, Löwenheim empra una equació anàloga a la que havia emprat Schröder, que explicarem de seguida. Abans però, i per poder d'entendre correctament aquesta equació, cal explicar la classificació que fa

Löwenheim dels diferents tipus d'índexs. Segons aquest autor, en una expressió en forma normal del tipus ΠF com ara $\prod_{h,i,j} (\bar{z}_{hi} + \bar{z}_{hj} + 1'_{ij})\bar{z}_{li} z_{k_i i}$:

> *F* pot contenir tres tipus d'índexs:
>
> 1) Índexs "*constants*", és a dir, aquells que són els mateixos en cada factor de Π (*l* en el nostre exemple)
>
> 2) "*Índexs de producte*" ["*Produktationsindizes*"] (i, j, h en el nostre exemple). Recorren amb independència els uns dels altres tots els elements del domini pensable, de manera que a *cada* sistema de valors per aquests índexs el correspon un factor de Π i viceversa.
>
> 3) "*Índexs progressius*" ["*Fluchtindizes*"] (com ara k_i en el nostre exemple o i_h i l_{kh} de la pàgina 452). Els seus "subíndexs" (*i*, *h* o *k*,*h* respectivament) són índexs de producte i els índexs progressius són funcions (no necessàriament injectives) sobre els subíndexs; això és, per exemple, l_{kh} designa un i el mateix element en tots aquells factors de Π en els quals els índexs de producte *k* i *h* tenen el mateix valor (però en altres factors l_{kh} no designa necessàriament altres elements).[1]

Sembla clar, a partir de les explicacions i l'exemple donats per Löwenheim en el text anterior, que els *índexs constants* i els *índexs de producte* es corresponen essencialment amb el que avui en dia anomenem *variables lliures* i *variables lligades* per un quantificador universal -a les variables lligades per un quantificador existencial, Löwenheim les anomena *índexs de suma*. Tal com podem llegir en el text anterior, Löwenheim observa en relació als índexs de producte, que "a *cada* sistema de valors per aquests índexs els correspon un factor de Π i viceversa". Evidentment, quan Löwenheim parla dels "factors de Π" no es refereix als factors -per contraposició als sumands- que apareixen en l'abast de Π, sinó als factors que apareixen en l'expansió de ΠF. Així, per exemple, donada la fórmula

$$\prod_{i,j} A(i,j), \qquad (1),$$

llavors l'expansió de la fórmula anterior en un domini de dos elements, denotats per 1, 2, és:

$$A(1,1) \cdot A(1,2) \cdot A(2,1) \cdot A(2,2) \qquad (2)$$

[1] *Ibid.*, 454 (238).

i els factors de Π, en el sentit emprat per Löwenheim en el text anterior, són els factors de l'expansió anterior. Naturalment, les diferents assignacions d'elements del domini als índexs de producte de $\prod_{i,j} A(i,j)$ constitueixen el que Löwenheim anomena "sistema de valors" per aquests índexs i a cada una d'aquestes assignacions o sistemes de valors el correspon un factor de l'expansió de $\prod_{i,j} A(i,j)$. Ara be, quina és la relació a nivell semàntic entre (1) i (2) i, en general, entre una fórmula universal i la seva expansió en un domini de n elements? Evidentment, (1) implica lògicament (2) i, per tant, si $\prod_{i,j} A(i,j)$ és satisfactible, també ho és la seva expansió. El recíproc no és cert, és a dir, (2) no implica lògicament (1), encara que si (2) és satisfactible, llavors també ho és (1) en el domini que té com a únics elements 1 i 2 i amb les relacions restringides a aquest domini. Aquesta observació és capital per entendre la demostració de Löwenheim del seu famós teorema, perquè, tal com veurem més endavant, Löwenheim demostra que tota fórmula de primer ordre és pot transformar en una fórmula universal equivalent a ella a efectes de satisfactibilitat i, tal com acabem de veure, les expansions permeten transformar el problema de la satisfactibilitat de les fórmules universals en un problema resoluble en dominis de cardinalitat finita. Finalment, pel que fa al darrer tipus d'índex introduït en el text de més amunt, Löwenheim es limita a indicar que, en una equació com ara (1), els *índexs progressius* -k_i- que apareixen en el costat dret del signe d'igualtat- són funcions dels seus índexs -i en aquest cas- i que aquests són índexs de producte. És a dir, que allò que caracteritza els índexs progressius és el fet de ser funcions (no necessàriament injectives) dels seus subíndexs i de tenir com a subíndexs variables quantificades universalment, és a dir, elements del domini. Tal com hem vist abans, el índexs progressius apareixen un cop realitzat el procés de transformació d'una fórmula del tipus $\Pi\Sigma$ en una altra del tipus $\Sigma\Pi$, per la qual cosa la naturalesa d'aquesta mena d'índexs s'entendrà molt millor en el context de l'explicació que realitza Löwenheim d'aquesta mena de transformacions. D'acord amb Löwenheim, el canvi d'ordre dels quantificadors en el sentit abans descrit es realitza mitjançant la fórmula:

$$\prod_i \sum_k A_{ik} = \sum_{k_\lambda} \lambda \prod_i A_{ik_i}, \qquad (1)$$

la qual és explicada per Löwenheim en els termes següents:

> Aquí el k_λ sota el $\sum$ significa que k_λ ha de recórrer *tots* els índexs, és a dir, tots els elements de 1^1, i el λ a la dreta de $\sum$ significa que cada un d'aquests k_λ ha de recórrer aquests índexs, de manera que tindrem una suma n-ària si 1^1 té n elements (on n pot designar també un cardinal transfinit).[1]

En altres paraules, el signe λ a la dreta de l'operador $\sum$ és un índex que té com a recorregut tots els individus del domini i que fa que $\sum\limits_{k_\lambda} \lambda$ sigui un quantificador λ-múltiple, és a dir, una successió de λ quantificadors existencials, on λ representarà la cardinalitat del domini. El mateix Löwenheim continua així l'explicació:[2]

> Per tal de fer la fórmula de més amunt més entenedora, desenvoluparé parcialment, per una sola vegada, els signes Σ i Π que figuren en ella, és a dir, empraré per una vegada i de forma excepcional (contra les estipulacions de la pàgina 448) els signes + i la juxtaposició (o punts) en el seu lloc. Designaré els índexs amb 1, 2, 3, … . Així la fórmula [1] es llegeix:
>
> $$\prod_i (A_{i1} + A_{i2} + A_{i3} + \ldots) = \sum_{k_1, k_2, k_3, \ldots} A_{1k_1} A_{2k_2} A_{3k_3} \ldots = \sum_{k_1=1,2,3,\ldots} \sum_{k_2=1,2,3,\ldots} \sum_{k_3=1,2,3,\ldots} \ldots A_{1k_1} A_{2k_2} A_{3k_3} \ldots$$

Veiem, doncs, tal com dèiem abans, que $\sum\limits_{k_\lambda} \lambda$ representa una successió de quantificadors existencials i, per tant, l'existència d'un valor de k_i per cada i. En definitiva, sembla clar que $\sum\limits_{k_\lambda} \lambda$ representa l'equivalent notacional en Löwenheim del "misteriós operador" de Schröder$\Pi_\iota(\Sigma_{m_\iota})$ i que l'equació (1) de Löwenheim és equivalent a l'equació de Schröder:

$$\Pi_i \, \Sigma_m f(i, m) = \Pi_\iota(\Sigma_{m_\iota}) \; \Pi_i f(i, m_\iota), \qquad (2)$$

que, com ja sabem, aquest autor havia emprat també per transformar una fórmula del tipus $\Pi\Sigma$ en una altra equivalent del tipus $\Sigma\Pi$ (*Cf. supra*, cap. III, § 10). En aquest sentit, podríem dir dels índexs progressius com ara k_i, tal com havíem vist que deia Schröder respecte de la ι (iota) que figura en els operadors anteriors, que el seu valor "ha de variar en paral·lel a la i" o, el que és el mateix, tal com hem vist que deia el mateix Löwenheim, que "són funcions (no necessàriament injectives) sobre els seus subíndexs". No hi ha cap dubte, doncs, que

[1] *Ibid.*, 451 (236).
[2] *Ibid.*, 451 (236).

Löwenheim hereta el procés per canviar l'ordre dels quantificadors -l'anomenat a vegades *mètode de desenvolupament*- de Schröder, encara que en introduir l'equació (1) Löwenheim no faci cap esment d'aquest autor. D'una altra banda, les estipulacions a les quals es refereix Löwenheim en el text citat més amunt són les formulades per aquest autor en definir les *expressions de relatiu* que, com tal com ja sabem, prohibeixen explícitament no només el "desenvolupament" dels quantificadors a partir dels signes de la suma i el producte, sinó també l'aparició d'un nombre infinit de quantificadors en una expressió de relatiu. Tal com acabem de veure, el mateix Löwenheim adverteix que les expansions anteriors violen les estipulacions de la definició de *Relativausdrück* i sembla suggerir, per tant, que s'han de considerar com un recurs "excepcional" per explicar el significat de l'equació (1). Ara bé, el problema sembla més greu del que pretén Löwenheim, perquè afecta a la mateixa definició de $\sum_{k_\lambda} \lambda$ com un quantificador λ-múltiple, on λ representa la cardinalitat del domini, donat que, en el cas que aquest sigui infinit, llavors $\sum_{k_\lambda} \lambda$ designarà una successió infinita de quantificadors. D'aquest problema ens en ocuparem en la darrera secció d'aquest capítol. Remarquem finalment que Löwenheim no intenta demostrar l'equació (1), sinó que només intenta aclarir el seu significat a través de les equivalències amb les quals acaba el darrer text citat de Löwenheim. Aquestes equivalències són vàlides en el cas que el domini sigui finit, però en el cas que aquest sigui infinit requereixen ser justificades. Per tant, en cas que Löwenheim hagués considerat aquestes equivalències com una demostració de l'equació en qüestió, llavors hauríem de concloure que Löwenheim extrapola injustificadament al cas infinit un argument que només vàlid en el cas finit.

4. El teorema de Löwenheim (1): L'obtenció de la forma normal

La primera versió del teorema anomenat avui en dia de Löwenheim-Skolem és el teorema 2 de l'article de Löwenheim de 1915, que diu literalment el següent:

> *Tota equació de primer ordre progressiva [Fluchtzahlgleichung] ja no és satisfeta en un domini pensable numerable per valors qualssevol dels coeficients de relatiu.*[1]

[1] *Ibid.*, 450 (235).

D’acord amb la definició d’equació progressiva estudiada a la secció anterior, una formulació una mica més entenedora, equivalent a l’anterior, seria la següent:

Si una equació de primer ordre és vàlida en tot domini finit, però no és universalment vàlida, llavors no és vàlida en cap domini infinit numerable.

I, donat que Löwenheim suposa sempre que les equacions són de la forma $A = 0$ i que, tal com hem explicat a la secció anterior, una equació d’aquesta mena és universalment vàlida si, i només si, la fórmula A és insatisfactible, tenim encara la formulació següent:

Si una fórmula de primer ordre insatisfactible en tot domini finit és satisfactible, llavors és satisfactible en un domini infinit numerable.

L’estructura de la demostració de Löwenheim del seu teorema és com segueix: En primer lloc, Löwenheim demostra que “tota expressió de primer ordre [del tipus $A = 0$] pot ser posada en una certa forma normal”.[1] La forma normal a la qual es refereix Löwenheim és una equació del tipus

$$\Sigma\Pi F = 0,$$ [2]

on Σ i Π representen successions possiblement buides de quantificadors existencials i universals respectivament i F és una fórmula prenexa (sense quantificadors) en forma normal disjuntiva. En segon lloc, Löwenheim fa notar que, per “decidir si (3) [$\Sigma\Pi F = 0$] és idènticament satisfeta o no en algun domini, podem deixar de banda els Σ en les nostres consideracions i examinar l’equació $\Pi F = 0$”.[3] Finalment, Löwenheim demostra a través d’un argument emprat posteriorment per Skolem, Herbrand i Gödel, que $\Pi F = 0$ no és vàlida en cap domini infinit numerable. Si en comptes d’equacions parléssim de fórmules, podríem dir que Löwenheim demostra primer que tota fórmula de primer ordre A és equivalent a un altra fórmula de primer ordre en forma normal del tipus $\Sigma\Pi F$; explica a continuació que a efectes de validesa o satisfactibilitat podem prescindir dels Σ, i demostra finalment que ΠF és satisfactible en un domini infinit numerable. En aquesta secció estudiarem els dos primers

[1] *Ibid*., 450 (235).
[2] *Ibid*., 453 (237).
[3] *Ibid*., 453 (238).

passos de la demostració de Löwenheim, això és, l'obtenció de la forma normal i la justificació de l'equivalència de les fórmules $\Sigma\Pi F$ i ΠF. En la secció següent estudiarem el tercer pas de la demostració de Löwenheim, és a dir, la demostració de la satisfactibilitat en un domini finit de la fórmula ΠF, que constitueix el nucli de demostració del teorema. En general, l'esquema seguit en les properes seccions per explicar la demostració de Löwenheim és molt semblant a l'exposat pel professor C. Badesa en la seva tesi doctoral, titulada "El teorema de Löwenheim en el marco de la teoria de relativos" (*1991*), de la qual hem manllevat també la interpretació d'alguns passatges difícils de l'article de Löwenheim. Amb tot, la nostra interpretació d'alguns aspectes essencials de la demostració de Löwenheim difereix notablement de la de Badesa. En concret, tal com explicarem més endavant, Badesa interpreta que Löwenheim intenta demostrar una versió més forta del seu teorema que la que habitualment se li atribueix. Per contra, nosaltres ens hem inclinat per una interpretació més tradicional, que coincideix fonamentalment amb la defensada per Van Heijenoort en la seva introducció a la traducció anglesa de l'article de Löwenheim.

Per demostrar que tota fórmula de primer ordre A és equivalent a una altra fórmula en forma normal, Löwenheim demostra, en primer lloc, que la fórmula A és equivalent a una altra en la qual "cap Π o Σ ocorre mai en l'abast d'un Π (simple o múltiple)";[1] en segon lloc, que la fórmula obtinguda com a resultat de les transformacions especificades en el primer pas és equivalent a una disjunció de fórmules en forma normal i, finalment, que podem transformar aquesta darrer fórmula en un altre fórmula equivalent en forma normal del tipus $\Sigma\Pi F$. En el primer pas, és a dir, per treure els quantificadors Π, Σ de la fórmula que constitueix l'abast d'un quantificador universal Π -o, com diu Löwenheim, d'un *productand*-, Löwenheim distingeix quatre casos:

1. El productand és un producte del tipus $\cdot$, llavors hom pot treure aquest signe, mitjançant l'aplicació de la fórmula

$$\prod_i (A_i \cdot B_i) = \prod_i A_i \cdot \prod_i B_i \ldots$$

2. El productand és un producte del tipus Π [...]. Llavors Π pot ser eliminat del productand amb l'ajut de la fórmula

$$\prod_i (\prod_k A_{ik}) = \prod_{i,k} A_{ik}.$$

3. El productand és una suma del tipus +, quelcom com ara

$$A + B + C + \ldots \text{ no ad infinitum.}$$

[1] *Ibid*., 450 (235). Un quantificador universal *simple* és una expressió del tipus Π_i i un quantificador *múltiple* és una expressió del tipus $\Pi_{i_1,i_2,\ldots,i_n}$. El mateix val per als quantificadors existencials.

Aquí distingim dos subcasos:

(*a*) Un o més dels *A*, *B*, … són productes (· o Π). Aquest cas es pot reduir al Cas 1 o al Cas 2 per mitjà de la fórmula $a + bc = (a+b)(a+c)$, això és, pel que podríem anomenar "distribució de la suma" ["*Aussadieren*"].

(*b*) Cap dels *A*, *B*, … és un producte. De fet, cap dels *A*, *B*, … pot ser una suma si aquests són realment els *darrers* sumands en els quals el productand es pot descompondre sense l'ús de Σ. Per tant, cada un dels *A*, *B*, … o bé és un coeficient de relatiu (negat o no) o un Σ; Si tots els sumands són coeficients de relatiu, ja hem aconseguit el nostre objectiu; però si, per exemple,

$$A = \sum_k A_{ik}, \qquad B = \sum_k B_{ik},$$

llavors el productand es pot escriure en la forma

$$\sum_k (A_{ik} + B_{ik} + C + ...),$$

la qual cosa redueix aquest cas al Cas 4.

4. El productand és una suma del tipus Σ. Llavors la nostra tasca consisteix a transformar [la fórmula] $\Pi\Sigma$ en una [fórmula] $\Sigma\Pi$, és a dir, en distribuir el producte [*das Produkt auszumultiplizieren*]. Això s'aconsegueix mitjançant la fórmula:

$$\prod_i \sum_k A_{ik} = \sum_{k_\lambda} \lambda \prod_i A_{ik_i} \ldots$$

En el cas que un Σ múltiple sigui precedit per un Π múltiple, llavors la nostra fórmula ha de ser generalitzada com segueix:

$$\prod_{i,i',\ldots k,k',\ldots} \sum A_{ii'\ldots kk'\ldots} = \sum_{k_{ii'}\ldots k'_{ii'\ldots}\ldots} A_{ii'\ldots k_{ii'\ldots} k'_{ii'\ldots}\ldots}.$$ [1]

Veiem, doncs, que el que fa Löwenheim és descriure un procediment mitjançant el qual, donada una fórmula de primer ordre *A*, hom pot eliminar en un nombre finit de passos els quantificadors Π, Σ de l'abast de qualsevol quantificador universal Π que figuri en la fórmula *A* i, per tant, demostra que hom pot obtenir una fórmula lògicament equivalent a l'anterior, en la qual no hi hagi quantificadors en l'abast d'un quantificador universal. En altres paraules, Löwenheim demostra que, donada una fórmula qualsevol de primer ordre, totes les seves subfórmules del tipus $\prod_{i_1,\ldots,i_n} F_{i_1,\ldots,i_n}$ es poden posar en forma normal i, per tant, que aquesta fórmula és equivalent a una fórmula en què totes les subfórmules estan en forma normal. Tal com hem dit abans, una vegada fet això, Löwenheim explica com posar la fórmula obtinguda a través de les transformacions anteriors en una disjunció de fórmules en forma normal:

[1] *Ibid.*, 450-51 (235-36).

Una vegada que tots els productands han estat alliberats de Σ i Π, només resta treure els parèntesis que no segueixen immediatament un Σ o Π i distribuir els productes de Σ. Això s'efectua mitjançant la fórmula

$$\sum_i A_i \sum_i B_i = \sum_{i,k} A_i B_k$$

i anàlogament en el cas de sumes múltiples.
Exactament de la mateixa manera, podem multiplicar un $\sum$ per un altre o per un Σ i el mateix en el cas d'una suma múltiple.[1]

El resultat d'aquestes operacions serà, segons Löwenheim, una fórmula de la forma

$$C + \Sigma D_1 + \ldots + \Sigma D_l + \Pi E_1 + \ldots + \Pi E_m + \Sigma \Pi F_1 + \ldots + \Sigma \Pi F_n,$$

"on les sumes i els productes seran, en general, múltiples i els C, D_v, E_v i F_v són funcions idèntiques de coeficients de relatiu sense Σ o Π".[2] Finalment, Löwenheim explica com treure els quantificadors de la fórmula anterior per tal d'obtenir la fórmula en forma normal que es buscava. Per això, assenyala Löwenheim, primer caldrà treure els Σ mitjançant la fórmula

$$\sum_i a_i + \sum_i b_i = \sum_i (a_i + b_i).$$

(Tal com observa Löwenheim, als termes que no contenen cap Σ se'ls en pot afegir un, car $a = \sum_i a$, si i no apareix en a). Hom obtindrà així una fórmula del tipus

$$\Sigma(F_0 + \Pi F_1 + \Pi F_2 + \ldots + \Pi F_n),$$

i aplicant finalment a aquesta fórmula la fórmula

$$\prod_i a_i + \prod_i b_i = \prod_i (a_i + b_i),$$

hom obtindrà una fórmula del tipus

$$\Sigma \Pi(F_0 + F_1 + \ldots + F_n),$$

[1] *Ibid.*, 452-53 (237).
[2] *Ibid.*, 453 (237).

que és una fórmula del tipus

$$\Sigma \Pi F,$$

amb F sense quantificadors i en forma normal disjuntiva, tal com es volia demostrar.

Tal com hem pogut comprovar en les pàgines anteriors, el procediment seguit per Löwenheim per obtenir la forma normal, que hem reproduït de la manera més fidedigna i entenedora possible, presenta nombroses dificultats de comprensió. Val la pena, doncs, analitzar amb una mica de detall aquesta demostració per tal de comprendre millor què és el que intenta fer Löwenheim i intentar resoldre les dificultats que presenta. Des d'un punt de vista modern, el teorema que demostra Löwenheim coincideix essencialment amb el *teorema de la forma normal*, la demostració del qual pressuposa l'anomenat *teorema de la forma normal prenexa*. A més, com que Löwenheim pressuposa que el prefix F en la fórmula en forma normal obtinguda al final de la seva demostració ha d'estar en forma normal disjuntiva, el teorema de Löwenheim pressuposa també el que podríem anomenar *teorema de la forma normal disjuntiva*. Avui en dia trobem aquests tres teoremes disseminats al llarg de molts manuals de lògica en l'ordre següent:

(a) Teorema de la forma normal disjuntiva
(b) Teorema de la forma normal prenexa.
(c) Teorema de la forma normal.

Aquest ordre no és evidentment casual, sinó que és indicatiu del fet que els teoremes anteriors pertanyen als dominis de la lògica proposicional, la lògica de primer ordre i la lògica de segon ordre respectivament. Ara bé, donada una fórmula concreta de primer ordre, el més normal és que no estigui en forma prenexa i, per tant, si hom volgués obtenir directament una fórmula equivalent a l'anterior en forma normal del tipus $\Sigma \Pi F$, on F estigués en forma normal disjuntiva, hauríem de seguir els passos següents:

(α) Hom demostraria primer que hi ha una fórmula A' equivalent a A en *forma prenexa*, *i.e.* de la forma $Q_1, ..., Q_n F$, on $Q_i (0 \leq i \leq n) \in \{\Sigma, \Pi\}$ i F no té quantificadors.

(β) Hom transformaria la fórmula A' obtinguda en el pas anterior en una fórmula A'' en *forma normal*, *i.e.* de la forma $\Sigma_1, ..., \Sigma_m \Pi_1, ..., \Pi_n F$, on $\Sigma_1, ..., \Sigma_m$ i $\Pi_1, ..., \Pi_n$

representen successions possiblement buides de quantificadors existencial i universal respectivament.

(γ) Hom posaria finalment F en *forma normal disjuntiva*.[1]

En canvi, tal com hem vist abans, el procediment seguit per Löwenheim consisteix a:

(α) Demostrar primer que la fórmula A és equivalent a un altra fórmula A', totes les *subfórmules* de la qual estan en *forma normal*.

(β) Transformar la fórmula A' obtinguda en el pas anterior en una fórmula A'' que té la forma lògica d'una *disjunció de fórmules en forma normal.*

(γ) Posar la fórmula A'' en *forma normal*.

La primera observació que cal fer, doncs, en relació a la demostració de Löwenheim és que el seu argument difereix notablement de l'argument emprat avui en dia. Això fa que la demostració de Löwenheim presenti, si més no des del punt de vista modern, complicacions innecessàries. Per exemple, en la demostració de Löwenheim no hi ha una separació clara entre la part purament proposicional (el procés per obtenir la forma normal disjuntiva) i la part quantificacional (l'obtenció de la forma normal). No es distingeix tampoc l'obtenció de la forma prenexa de l'obtenció de la forma normal, que constitueix l'objectiu al qual Löwenheim s'enfronta directament. Això és important, perquè per a l'obtenció de la forma prenexa no és necessària la quantificació sobre funcions (en sentit modern) o sobre índexs progressius (Löwenheim), que és necessària, en canvi, per a l'obtenció de la forma normal. En altres paraules, des d'un punt de vista modern, la demostració de Löwenheim barreja de forma innecessària la lògica de primer i la de segon ordre. La segona observació de tipus general que cal fer és que, donat que Löwenheim no disposa d'una definició precisa de la noció de fórmula de primer ordre, no pot fer una demostració rigorosa del teorema de la forma normal, si més no amb el rigor exigible a les demostracions actuals. La manca d'una *definició recursiva* del concepte de fórmula de primer ordre fa, en efecte, que Löwenheim no pugui controlar de forma adequada el desenvolupament de la prova -Löwenheim, per exemple, no distingeix sempre de forma adient els diferents casos que es presenten al llarg de la prova- i, el que és més important, no pugui emprar el *principi d'inducció* per a fórmules per tal de demostrar el seu teorema. Ara bé, com és ben sabut, els raonament per inducció

[1] Naturalment, els dos últims passos són intercanviables.

sobre el *grau* o *complexitat* d'una fórmula són essencials per demostrar qualsevol teorema en el qual s'afirmi l'existència d'alguna propietat relativa al conjunt de fórmules d'un determinat tipus i, en particular, per al teorema de la forma normal -en el qual s'enuncia una propietat relativa a les fórmules de primer ordre.

Un vegada fetes les observacions anteriors de tipus general sobre la naturalesa de la demostració de Löwenheim, farem algunes observacions de tipus més tècnic sobre les dues primeres parts de la demostració de Löwenheim per tal de posar al descobert les principals mancances i dificultats que presenta la prova en general (la tercera part no presenta cap problema). Pel que fa a la primera part de la demostració que, tal com recordarem, té com objectiu eliminar els quantificadors Π, Σ de l'abast de tot Π que figuri en la fórmula de partida A, el primer que cal observar és que Löwenheim dóna per suposat que, en la fórmula de partida A, les negacions només afecten als coeficients de relatiu o, com diríem avui en dia, a les fórmules atòmiques de A. Suposant, doncs, que aquest és el cas, podríem reconstruir la prova de Löwenheim en els termes següents: Si $\prod_{i_1,\ldots,i_n} F_{i_1,\ldots,i_n}$ és una fórmula de primer ordre i F conté algun quantificador, llavors es distingeixen els següents casos:

(1) $F = A \cdot B$. Aquest cas és el primer cas distingit per Löwenheim. Segons ell se soluciona per la llei :

$$\prod_{i_1,\ldots,i_n} (A_{i_1\ldots i_n} \cdot B_{i_1\ldots i_n}) = \prod_{i_1,\ldots,i_n} A_{i_1\ldots i_n} \cdot \prod_{i_1,\ldots,i_n} B_{i_1\ldots i_n},$$

(aquesta és, en realitat, una generalització de la llei proposada per Löwenheim). Amb això s'aconsegueix treure de l'abast de $\prod_{i_1,\ldots,i_n}$ els possibles quantificadors de $A_{i_1\ldots i_n}$ i $B_{i_1\ldots i_n}$, però és evident que no s'assoleix posar la fórmula anterior en forma normal. Tal com veurem després, aquí cal distingir casos i, en el cas que s'aplica la llei anterior, el raonament que cal emprar és, tot just el contrari, del que empra Löwenheim.

(2) $F = A + B$. Aquest és el tercer cas de Löwenheim (el segon cas considerat per ell és innecessari des d'un punt de vista modern). Aquí s'han de distingir els següents subcasos:

a. A o B és una conjunció. Aquest subcas és també el subcas *a* del tercer cas de Löwenheim. I, tal com ell mateix afirma, aquest cas es pot reduir al Cas 1 mitjançant fórmula

$$a + bc = (a + b)(a + c).$$

En qualsevol cas, és evident que aquest cas és innecessari, car només interessen els casos en que A o B estan quantificades universalment o existencialment.

b. A o B estan quantificades universalment. Aquest subcas forma part també del subcas *a* del cas 3 de Löwenheim però, en realitat, cal distingir-lo del subcas anterior. Aquest cas se soluciona aplicant la fórmula

$$\prod_i A_i + \prod_i B_i = \prod_{i,j} (A_i + B_j),$$

que només és enunciada per Löwenheim més endavant (en la tercera part de la prova).

c. A o B estan quantificades existencialment. Aquest subcas és el subcas *b* del cas 3 de Löwenheim. Aquest cas es redueix al cas següent mitjançant la fórmula

$$\sum_i A_i + \sum_i B_i = \sum_i (A_i + B_i).$$

Löwenheim diu exactament el mateix, encara que de forma *sui generis* (com s'esdevenia en el cas precedent, l'equivalència anterior només és enunciada per Löwenheim en la tercera part de la prova).

(3) $F = \sum_{i_1,\dots,i_n} A_{i_1 \dots i_n}$. Tal com assenyala Löwenheim, aquest cas es resol mitjançant la fórmula:

$$\prod_{i,i',\dots} \sum_{k,k',\dots} A_{ii'\dots kk'\dots} = \sum_{k_{ii'\dots} k'_{ii'\dots} \dots} A_{ii'\dots k_{ii'\dots} k'_{ii'\dots} \dots}.$$

La segona part de la demostració de Löwenheim presenta també alguns problemes de comprensió. Tal com recordarem, Löwenheim afirma que, per obtenir una disjunció de fórmules en forma normal, cal "treure els parèntesis que no segueixen immediatament un Σ o Π i distribuir els productes de Σ [...] mitjançant la fórmula $\sum_i A_i \sum_i B_i = \sum_{i,k} A_i B_k$". L'eliminació de parèntesis és una generalització de la llei distributiva $a(b+)c = (a+b)(a+c)$ que s'utilitza en la transformació d'una fórmula de la lògica proposicional (per exemple, el prefix d'una fórmula en forma prenexa) en una fórmula en forma prenexa en el cas en què el producte i la suma són del tipus Π i Σ. Així, per exemple, si tenim una fórmula del tipus

$$\prod_i A_i(\prod_j B_j + \sum_h \prod_k c_{hk}),$$

si eliminem els parèntesis, obtenim la fórmula

$$\prod_i A_i \prod_j B_j + \prod_i A_i \sum_h \prod_k c_{hk}.$$

Ara bé, per obtenir una disjunció de fórmules en forma normal en aquest cas, hauríem de treure la conjunció del costat esquerra del sumand i el quantificador existencial del costat dret, per la qual cosa hauríem de fer marxa endarrera i aplicar els procediments especificats en l'etapa anterior. D'una altra banda, tal com hem vist abans, la llei $\sum_i A_i \sum_i B_i = \sum_{i,k} A_i B_k$ és necessària per a una demostració correcta de la primera etapa de la demostració de Löwenheim, tal i com s'esdevé amb les lleis esmentades en la tercera part. Per tant, l'únic que podem afirmar amb seguretat en relació a la demostració de Löwenheim és que, en el millor dels casos, aquest autor esmenta la majoria de les lleis necessàries per, donada una fórmula de primer ordre, obtenir una fórmula en forma normal equivalent a ella i que, de bon segur, Löwenheim era capaç de obtenir en la pràctica aquesta fórmula en forma normal. Però a Löwenheim, tal com hem explicat abans, li manquen les eines essencials -principalment, un concepte clar i precís de fórmula de primer ordre- per efectuar una demostració correcta, amb els estàndards de rigor actuals, del teorema que vol demostrar. Com seria una demostració d'aquesta mena? En primer lloc, en la mesura que es una demostració sobre una propietat que afecta a una fórmula qualsevol del conjunt de les fórmules de primer ordre, seria una demostració en la qual es raonés inductivament sobre la complexitat de la fórmula en qüestió. En segon lloc, caldria distingir els subcasos que Löwenheim passa per alt. En concret, tal com veiem abans, Löwenheim dóna per suposat en la seva demostració que en la fórmula de partida A, les negacions només afecten a les fórmules atòmiques de A. Això fa que Löwenheim no tingui en compte els casos en que les subfórmules de A siguin de la forma $\overline{\prod_i} A_i$ i $\overline{\sum_i} A_i$, que caldria distingir per demostrar correctament el que Löwenheim vol demostrar. Tenint en compte tot això, per demostrar que tota subfórmula F d'una fórmula de primer ordre A es pot posar en forma normal, seguint l'ordre de la demostració de Löwenheim i la seva terminologia, hauríem de distingir els subcasos següents i raonar de la forma especificada en cada cas:

1. $F = \overline{Q}_i A_i$

1.1. Si $F = \overline{\prod_i} A_i$, aplicarem que $\overline{\prod_i} A_i = \sum_i \overline{A}_i$ i la hipòtesi inductiva.

1.2. Si $F = \overline{\sum_i} A_i$, aplicarem que $\overline{\sum_i} A_i = \prod_i \overline{A}_i$ i la hipòtesi inductiva.

2. $F = A \cdot B$

2.1. Si $A \cdot B = \prod_i A_i \cdot \prod_i B_i$, aplicarem que $\prod_i A_i \cdot \prod_i B_i = \prod_i (A_i \cdot B_i)$ i la hipòtesi inductiva.

2.2. Si $A \cdot B = \prod_i A_i \cdot B$, llavors aquest cas es redueix a l'anterior per $B = \prod_i B_i$ (si i no està lliure en B).

2.3. Si $A \cdot B = \sum_i A_i \cdot B$, aplicarem que $\sum_i A_i \cdot B = \sum_i (A_i \cdot B)$ (si i no està lliure en B) i la hipòtesi inductiva.

2.4. Si $A \cdot B = \sum_i A_i \cdot \sum_i B_i$, llavors aquest cas es redueix al cas 4 per $\sum_i A_i \cdot \sum_i B_i = \Sigma_{ik}(A_i \cdot B_k)$

3. $F = A + B$

3.1. Si $A + B = \prod_i A_i + \prod_i B_i$, aplicarem que $\prod_i A_i + \prod_i B_i = \Pi_{ij}(A_i + B_j)$ i la hipòtesi inductiva.

3.2. Si $A + B = \prod_i A_i + B$, llavors aquest cas res redueix a l'anterior per $B = \prod_i B_i$ (si i no està lliure en B).

3.3. Si $A + B = \sum_i A_i + B$, aplicarem que $B = \sum_i B_i$ (si i no està lliure en B), $\sum_i A_i + \sum_i B_i = \Sigma_i(A_i + B_i)$ i la hipòtesi inductiva.

3.4. Si $A + B = \sum_i A_i + \sum_i B_i$, aplicant com abans que $\sum_i A_i + \sum_i B_i = \Sigma_i(A_i + B_i)$, aquest cas es redueix al cas 4.

4. $F = \sum_k A_{ik}$. Aquest cas es resol aplicant $\prod_i \sum_k A_{ik} = \sum_{k_\lambda} \lambda \prod_i A_{ik_i}$ (o, en termes funcionals: $\prod_i \sum_k A_{ik} = \Sigma f \prod_i A_{if(i)}$).

Evidentment, com que A és una subfórmula de si mateixa, llavors la demostració anterior és també una demostració que, donada una fórmula qualsevol de primer ordre A, hi ha una fórmula A' lògicament equivalent a ella en forma normal (El cas interessant és el darrer, la demostració del qual requereix una generalització de l'equivalència emprada allí i s'ha de fer per inducció. Amb tot, l'equivalència emprada en el cas 4 il·lustra perfectament com s'ha de procedir en el cas general).

Tal com dèiem abans, un cop demostrat que tota equació de primer ordre del tipus $A = 0$ pot ser posada en una certa forma normal del tipus $\Sigma\Pi F = 0$, Löwenheim argumenta que aquesta equació és idènticament satisfeta si, i només si, ho és l'equació $\Pi F = 0$ i que, per tant, serà suficient ocupar-se d'aquesta mena d'equacions en la resta de la demostració. L'argument de Löwenheim és el següent:

> Si volem decidir ara si (3) [$\Sigma\Pi F = 0$] és satisfeta idènticament en algun domini, llavors podem ometre Σ de la nostra discussió i examinar l'equació
>
> $$\Pi F = 0$$
>
> o, en el nostre exemple [$\sum_l \sum_{k_\lambda} \lambda \prod_{h,i,j} (\bar{z}_{hi} + \bar{z}_{hj} + 1'_{ij})\bar{z}_{li} z_{k_i i} = 0$]:
>
> $$\prod_{h,i,j} (\bar{z}_{hi} + \bar{z}_{hj} + 1'_{ij})\bar{z}_{li} z_{k_i i} = 0.$$
>
> Car, després de tot, que aquesta equació sigui satisfeta *idènticament* no significa altra cosa que sigui satisfeta per valors *qualssevol* de (z i) l, així com dels k_i (això és, de $k_1, k_2, ...$). Però el Σ omès no deia altra cosa i, per tant, era sobrer, almenys per a nosaltres.[1]

Löwenheim té tota la raó en el que diu. Ara bé, el problema no és la justificació de l'equivalència entre una fórmula en forma normal del tipus $\Sigma\Pi F$ i la fórmula ΠF, en el sentit que una sigui satisfactible en un domini si, i només si, l'altra també ho és. El problema és la justificació de l'equivalència entre una fórmula qualssevol de primer ordre A en forma prenexa i la fórmula corresponent en forma normal $\Sigma\Pi F$ o, el que és trivialment el mateix, entre la fórmula original A i la fórmula universal ΠF obtinguda a partir de $\Sigma\Pi F$. I és en aquest sentit que hem d'entendre el raonament de Löwenheim. Naturalment, si ΠF és vertadera en algun domini, llavors A també ho és. En l'altre direcció, Löwenheim argumenta que si ΠF no és satisfactible en un cert domini, per qualsevol valor dels coeficients de relatiu i els índexs progressius, llavors A tampoc serà satisfactible en aquest domini. Ara bé, com és obvi, aquest argument requereix l'axioma d'elecció: qualsevol domini que fa vertadera la fórmula A pot transformar-se en un domini que faci la fórmula ΠF vertadera, interpretant cada índex progressiu k_i (símbol funcional f, en sentit modern) com una mena de funció d'elecció que seleccioni un valor de k_i per cada i (és a dir, que seleccioni, per qualsevol

[1] *Ibid.*, 453-54 (238).

element *a* del domini, algun element *b*) que satisfacin la fórmula *F*. De fet, tal com hem vist abans, Löwenheim obté la seva forma normal gràcies a l'equació:

$$\prod_i \sum_k A_{ik} = \sum_{k_\lambda} \lambda \prod_i A_{ik_i}. \tag{1}$$

Ara bé, tal com hem explicat abans, l'argument a través del qual Löwenheim justifica aquesta equació només és vàlid en el cas finit, per la qual cosa la seva extrapolació al cas infinit resta completament injustificada. De fet, qualsevol argument per justificar l'equivalència (1) o el que és el mateix (substituint els índexs progressius per termes funcionals):

$$\forall x \exists y A(x, y) \equiv \exists f \forall x A(x, f(x)).$$

requereix l'ús de l'axioma d'elecció. Remarquem finalment que, si bé és cert que, donada una fórmula de primer ordre *A*, hom pot trobar una fórmula universal (una formula en forma prenexa en la qual tots els quantificadors són universals) *A*' tal que *A* es satisfactible si, i només si, *A*' ho és, no és menys cert que aquesta fórmula no serà ja de primer ordre, sinó de segon ordre i, més exactament, del llenguatge que s'obté afegint a l'anterior un nou índex progressiu (símbol funcional) per cada una de les variables quantificades existencialment en la fórmula original. Evidentment, aquestes subtileses no són observades per Löwenheim, no només perquè en la lògica de relatius no hi ha una distinció clara entre sintaxi i semàntica -això fa, per exemple, que els índexs s'emprin indistintament com a variables i com a noms d'elements del domini-, sinó perquè no hi ha cap indici que permeti pensar que Löwenheim considerés els índexs progressius com a variables de segon ordre, sinó tot el contrari -car el fet que en la caracterització de les *Zählausdrücke* no es faci cap referència als índexs i que en introduir els índexs progressius no es faci cap advertència al respecte, fa pensar que Löwenheim considerava els índexs progressius com a variables del mateix tipus que la resta dels índexs, si bé subjectes a certes restriccions de tipus sintàctic.

5. El teorema de Löwenheim (2): El nucli de la prova

Una vegada justificat que una fórmula en forma normal del tipus $\Sigma\Pi F$ és lògicament equivalent a una fórmula universal del tipus ΠF, Löwenheim demostrarà que aquesta darrer fórmula és satisfactible en un domini infinit numerable. Aquesta part constitueix el que podríem anomenar el *nucli* de la demostració del teorema de Löwenheim i l'analitzarem en els apartats 4.1, 4.2 i 4.3.

4.1. Löwenheim comença construint una successió de fórmules. Ara veurem com construeix la primera fórmula de la successió:

(1) En primer lloc, assenyala Löwenheim, donada una equació del tipus $\Pi F = 0$,

> Designarem els seus índexs constants, en un ordre qualsevol, mitjançant els primers nombres $1, 2, ..., n$.[1]

(2) En segon lloc, continua Löwenheim:

> Dels factors de Π a 4 [$\Pi F = 0$] escriurem primer només aquells en què cap índex de producte tingui un valor diferent dels valors $1, 2, ..., n$ definits més amunt a (1) o, si no hi ha índexs constants, prendrem un element qualsevol del domini, el denotarem per 1 i escriurem el factor en què tots els índexs de producte tinguin el valor 1. En aquest cas, posarem $n = 1$. Però en F hi figuraran també índexs progressius com ara
>
> $$i_j, k_{lm}, ...$$
>
> En cada un dels factors escrits fins ara, $j, l, m, ...,$ en la mesura que són índexs de producte, tenen com a valors alguns dels nombres $1, 2, ..., n$; d'aquí que, en aquests factors, tinguem com índexs progressius
>
> $$i_1, i_2, ..., i_n, k_{11}, k_{12}, k_{21}, ..., k_{nn}, ...$$
>
> Aquests ja no són funcions dels índexs, sinó que designen elements completament determinats, que designarem també, en un ordre qualsevol, amb els nombres $n+1, n+2, ..., n_1$. (Remarquem expressament que dos elements designats per nombres

[1] *Ibid.*, 454 (238).

diferents pertanyents a $1, ..., n_1$ no s'assumeix que siguin ni iguals *ni diferents*).
Anomenarem P_1 al producte escrit fins ara. Així, en el nostre exemple, seria:

$$P_1 = \bar{z}_{11}(\bar{z}_{11} + \bar{z}_{11} + 1'_{11})z_{21} = \bar{z}_{11}z_{21}.$$ [1]

Podríem sintetitzar el procediment descrit per Löwenheim per construir la primera fórmula P_1 de la successió de fórmules de la següent manera: Donada una fórmula $\prod F$ en forma normal, assignarem als seus índexs constants (les variables lliures) els nombres $1, 2, ..., n$ i escriurem a continuació el producte de totes les fórmules que s'obtenen en assignar als índexs de producte de $\prod F$ aquests nombres -en el cas que la fórmula no tingui cap índex constant, tots els índexs de producte prendran el valor 1. Als índexs progressius se'ls assignarà el nombre que segueixi al darrer nombre emprat en l'enumeració dels índexs constants. La fórmula així obtinguda és P_1. Així, per exemple, en la fórmula:

$$\prod_{h,i,j} (\bar{z}_{hi} + \bar{z}_{hj} + 1'_{ij})\bar{z}_{li}z_{k_i i},$$

substituirem primer l'únic índex constant "*l*" per 1:

$$\prod_{h,i,j} (\bar{z}_{hi} + \bar{z}_{hj} + 1'_{ij})\bar{z}_{1i}z_{k_i i},$$

eliminarem després els quantificadors substituint els índexs de producte per 1:

$$(\bar{z}_{11} + \bar{z}_{11} + 1'_{11})\bar{z}_{11}z_{k_i 1},$$

i, finalment, substituirem l'únic índex progressiu k_i per "2":

$$(\bar{z}_{11} + \bar{z}_{11} + 1'_{11})\bar{z}_{11}z_{21},$$

que és equivalent evidentment a:

$$\bar{z}_{11}z_{21}.$$

[1] *Ibid.*, 454-55 (238).

Veiem alguns exemples més, una mica més senzills que l'emprat per Löwenheim, els quals potser ens ajudaran a entendre una mica millor com es construeix P_1 i el significat d'aquesta fórmula:

Cas 1. Sigui $\Pi F = \prod_i A(i, k_i)$. Llavors $P_1 = A(1, k_1) = A(1, 2)$.

Cas 2. Sigui $\Pi F = \prod_i A(i, j, k_i)$. Llavors $P_1 = \prod_i A(i, 1, k_i) = A(1, 1, k_1) = A(1, 1, 2)$.

Cas 3. Sigui $\Pi F = \prod_i A(i, j, k, l_i)$. Llavors

$$P_1 = \prod_i A(i, 1, 2, l_i) = A(1, 1, 2, l_1) \cdot A(2, 1, 2, l_2) = A(1, 1, 2, 3) \cdot A(2, 1, 2, 4).$$

Com es pot observar clarament a partir del text de Löwenheim i els exemples anteriors, la construcció de cada fórmula P_1 determina un domini d'individus o elements en el següent sentit. En primer lloc, Löwenheim assigna als índexs constants de ΠF els nombres $1, 2, ..., n$, els quals se suposa que denoten un domini inicial d'elements. Aquests nombres juguen evidentment el paper de constants, per la qual cosa en comptes de $1, 2, ..., n$, podríem haver substituït els índexs de constant de ΠF per les constants $c_1, c_2, ..., c_n$ i, seguint Herbrand, denotar per C_1 al domini inicial determinat per aquestes constants.[1] En segon lloc, Löwenheim escriu el producte de totes les fórmules que s'obtenen en assignar els nombres $1, 2, ..., n$ als índexs de producte de ΠF, de manera que els factors de P_1 representaran les possibles assignacions d'elements de C_1 als índexs de producte de la fórmula en qüestió. Finalment, Löwenheim assigna als índexs progressius de ΠF, els nombres $n+1, n+2, ..., n_1$, la qual cosa equival a dir que, per cada una de les assignacions d'elements de C_1 als índexs de producte de ΠF, s'introdueixen les constants $c_{n+1}, c_{n+2}, ..., c_{n_1}$, les quals substituiran els índexs progressius en la forma indicada. Els individus denotats per aquestes constants, juntament amb els de C_1, constitueixen un nou domini, que anomenarem C_2. Per exemple, en el cas 3 de més amunt, tenim que $C_1 = \{1, 2\}$ i $C_2 = \{1, 2, 3, 4\}$.

4.2. Una vegada explicat com construir P_1, Löwenheim diu el següent:

> ΠF s'anul·larà [*verschwinden*] directament en cada domini si P_1 ho fa, això és, si P_1 s'anul·la no només quan tots els elements de $1, 2, ..., n_1$ són diferents entre si,

[1] En general, en la demostració de Löwenheim hi ha una confusió constant entre el nivell sintàctic i el semàntic, la qual cosa dificulta, en alguns punts, la comprensió del desenvolupament de la prova del seu teorema. D'aquí les nostres distincions terminològiques.

sinó també quan un nombre qualsevol d'ells són iguals entre si. Per veure si aquest és el cas, examinarem totes aquestes possibilitats; així, construirem a partir de P_1 totes aquelles especialitzacions $P_1'', P_1'', P_1''', ...$ que, en un nombre finit, s'obtenen quan qualssevol elements, ja siguin molts o pocs, entre $1, 2, ..., n_1$, es consideren iguals (a més en aquest procés, els coeficients de relatiu $1'$ i $0'$ també són avaluats).

Així, si tots els $P_i^{(v)}$ s'anul·len idènticament, (4) $[\prod F = 0]$ també és satisfeta idènticament. Altrament, afegirem a tots els factors de $\prod F$ ja inclosos en P_1, tots aquells que encara no hi estan inclosos en els quals tots els índexs de producte no tenen cap altre valor que els compresos entre 1 i n_1. Anomenarem P_2 al producte així format (que, per tant, conté també els antics factors de P_1). En P_2, els índexs progressius $i_j, k_m, ...$ tenen els valors:

$$i_1, i_2, ..., i_{n_1}, k_{11}, k_{12}, k_{21}, ..., k_{n_1 n_1}, ... ;$$

d'entre aquests, denotem amb els números $n_1 + 1, n_1 + 2, ..., n_2$ a aquells que encara no han estat denotat per algun nombre (No pressuposem tampoc que aquests representin elements diferents entre ells ni diferents dels antics) [...]

Ara, en P_2 (com abans en P_1), fem que els índexs emprats siguin iguals o distints entre si de totes les maneres imaginables. Als productes així formats a partir de P_2 els anomenem

$$P_2'', P_2'', P_2''', ...$$

Si tots s'anul·len, llavors l'equació $\prod F = 0$ se satisfà idènticament. Si no, formem P_3 afegint-hi tots els factors de $\prod F$ en què els índexs de producte estan entre 1 i n_2. Anomenarem $n_2 + 1, n_2 + 2, ..., n_3$ als nous índexs progressius [...]

Mitjançant la igualtat -respectivament desigualtat- dels índexs formarem de nou

$$P_3'', P_3'', P_3''', ...$$

etc. Donat que d'aquí en endavant és fàcil descriure com es formen P_{n+1} i $P_{n+1}'', P_{n+1}'', P_{n+1}''', ...$ a partir de P_n, la sèrie infinita numerable dels P_k pot considerar-se definida i, el mateix s'esdevé amb els $P_k^{(v)}$. Si, per un k (i, per tant, també per a tos els següents), tots els $P_k^{(v)}$ s'anul·len, llavors l'equació $[\prod F = 0]$ és satisfeta idènticament. Altrament, l'equació ja no es satisfeta en el domini numerable de primer ordre que acabem de construir.[1]

L'argument de Löwenheim en aquest paràgraf sembla ser el següent: Una vegada construïda P_1 (en el paràgraf anterior) i, a partir d'ella les fórmules de primer nivell (en expressió de Skolem) $P_1', P_1'', P_1''', ...$, és clar que, si aquestes darrers fórmules s'anul·len

[1] *Ibid.*, 455-56 (239-40)

idènticament, llavors $\prod F = 0$ se satisfà idènticament, és a dir, $\prod F$ serà insatisfactible contra la hipòtesi inicial. Altrament, construirem P_2 i les fórmules de segon nivell $P_2', P_2'', P_2''', ...$ i raonarem de forma anàloga. I així successivament. D'aquesta manera resta definida la seqüència infinita numerable de fórmules P_k i, per a cada nivell k, el conjunt associat de fórmules $P_k^{(v)}$. Evidentment, si per un k, totes les fórmules de $P_k^{(v)}$ s'anul·len, llavors $\prod F$ serà insatisfactible. Altrament, serà satisfactible en el domini infinit numerable d'elements que determina la construcció de la successió de fórmules $P_1, P_2, ...$. En altres paraules, Löwenheim descriu un procediment que, aplicat a una fórmula universal $\prod F$ satisfactible, però finitament insatisfactible, permetrà construir una successió de fórmules que mostrarà que $\prod F$ és satisfactible en un domini infinit numerable. Badesa interpreta el raonament de Löwenheim en el paràgraf anterior d'una forma una mica diferent. Segons ell, en efecte:

> Esta forma de argumentar resulta un tanto extraña porque lo natural, dado que el supuesto nos asegura que $\prod F$ és satisfactible, seria mostrar que en cada nivel debe haber fórmulas satisfactibles. Löwenheim, sin embargo, razona com si no se supiera si $\prod F$ és satisfactible o no. Más concretamente, parece com si Löwenheim estuviera dando un procedimiento que, aplicado a una fórmula en forma normal, nos mostrará que es insatisfactible o nos permitirá determinar una sucesión de fórmulas que probarán su satisfacibilidad en un dominio finito o infinito numerable.[1]

De fet, tal com veurem més endavant, la formulació que dóna Skolem del teorema de Löwenheim en el seu article de 1920 afirma que tota proposició en forma normal (de Skolem) o bé és una contradicció (és insatisfactible) o bé és satisfactible en un domini finit o infinit numerable, la qual cosa sembla indicatiu del fet que Skolem interpretaria la demostració de Löwenheim en el sentit que explica Badesa en el text anterior. Amb tot, del *rationale* a través del qual Badesa justifica la seva interpretació de l'argument de Löwenheim no se'n segueix necessàriament aquesta interpretació. Segons el professor Badesa, en efecte, Löwenheim raona com si no sabés que $\prod F$ és satisfactible o no, car en el supòsit que fos satisfactible, el més natural hauria estat que Löwenheim hagués demostrat que en cada nivell hi ha d'haver fórmules satisfactibles. Ara bé, aquest fet se segueix de forma immediata de la hipòtesi que $\prod F$ és satisfactible i la construcció de la successió de fórmules $P_1, P_2, ...$ amb els respectius conjunts de fórmules de nivell i, per tant, el fet que Löwenheim no ho demostri no pot considerar-se com una indicació de que en la seva prova raonés com si hagués bandejat la

[1] *Badesa 1992*, 221.

hipòtesi segons la qual $\prod F$ és satisfactible. En qualsevol cas, està clar que el raonament de Löwenheim és pot interpretar de les dues maneres abans explicitades. Si es bandeja la hipòtesi, llavors hem d'interpretar que l'argument de Löwenheim explicita un procediment que permet demostrar que, donada una formula en forma normal qualsevol, o bé aquesta fórmula es insatisfactible o bé és satisfactible en un domini finit o infinit numerable. Si no es bandeja la hipòtesi, llavors hem de considerar que el raonament de Löwenheim explicita un procediment que, aplicat a una fórmula en forma normal satisfactible, però finitament insatisfactible, permet demostrar que aquesta fórmula és satisfactible en un domini infinit numerable.

Una vegada explicat quin és, en línies generals, l'argument de Löwenheim, explicarem ara els detalls tècnics. En primer lloc, explicarem la construcció de la successió de fórmules $P_1, P_2, ...$ i, després, la construcció dels conjunts de fórmules de nivell *n*, $P'_n, P''_n, P'''_n, ...$ Una vegada construïda P_1, la successió de fórmules $P_1, P_2, ...$ és pot definir inductivament de la següent manera: Suposem construïda la fórmula P_n i siguin $1, 2, ..., n$ les constants numèriques que figuren en ella. Escrivim el producte de totes les fórmules que s'obtenen en assignar els nombres anteriors als índexs de producte de $\prod F$. Numerem els índexs progressius que apareixen en aquest producte i no figuren en P_n començant per $n+1$. El resultat serà la fórmula P_{n+1}. Així, per exemple, donada com abans la fórmula:

$$\prod_{h,i,j} (\bar{z}_{hi} + \bar{z}_{hj} + 1'_{ij})\bar{z}_{li} z_{k_i i},$$

les dues primeres fórmules de la successió que s'obtenen a partir d'ella són (escrivint, per abreujar $k\lambda$ en comptes de $z_{k\lambda}$):

$$P_1 = \overline{11} \cdot 21$$

$$\begin{aligned} P_2 = P_1 &\cdot (\overline{11} + \overline{12} + 1'_{12}) \cdot (\overline{12} + \overline{11} + 1'_{21}) \cdot (\overline{12} + \overline{12} + 1'_{22}) \cdot (\overline{21} + \overline{21} + 1'_{11}) \cdot \\ &(\overline{21} + \overline{22} + 1'_{12}) \cdot (\overline{22} + \overline{21} + 1'_{21}) \cdot (\overline{22} + \overline{22} + 1'_{22}) \cdot \overline{12} \cdot 32 \end{aligned}$$

Com podem observar fàcilment, els vuit primers factors de P_2 s'obtenen en substituir de totes les maneres possibles els índexs de producte *h* i *j* en la fórmula $\bar{z}_{hi} + \bar{z}_{hj} + 1'_{ij}$ pels nombres 1 i 2 que apareixen en P_1. Els dos darrers factors, a saber, el producte $\overline{12} \cdot 32$ s'obté de forma anàloga, però ara s'ha de tenir en compte que, a $\bar{z}_{li} z_{k_i i}$, *l* és un índex constant i, per tant, se li assignarà el nombre 1 al llarg de tota la construcció de la successió, mentre que k_i és un índex progressiu que genera a P_2 els dos índexs k_1 i k_2, el segon dels quals no ha aparegut abans i, per tant, se li assignarà el nombre que segueix en l'ordre a $\{1,2\}$, és a dir, 3. Així, els quatre factors que genera $\bar{z}_{li} z_{k_i i}$ són:

$$[\overline{11} \cdot 21] \cdot [\overline{12} \cdot 32] \cdot [\overline{11} \cdot 21] \cdot [\overline{12} \cdot 32],$$

els quals són iguals a

$$[\overline{11} \cdot 21] \cdot [\overline{12} \cdot 32] = P_1 \cdot [\overline{12} \cdot 32] = [\overline{12} \cdot 32]$$

(donat que P_1 apareix prèviament com a factor de P_2). Si simplifiquem ara els vuit primers factors de P_2,[1] concloem que:

$$P_2 = (\overline{22} + 1'_{12}) \cdot \overline{11} \cdot \overline{12} \cdot 21 \cdot 32,$$

tal com assenyala el mateix Löwenheim.[2] Considerem ara una altra fórmula una mica més senzilla que la donada per Löwenheim, com ara la fórmula, $\Pi F = \prod_i A(i, k_i)$, que ja ens havia servit d'exemple en la secció 4.1. En aquest cas tenim que:

$$\begin{aligned}
&P_1 = A(1, k_1) = A(1,2)\\
&P_2 = A(1, k_1) \cdot A(2, k_2) = A(1,2) \cdot A(2,3)\\
&P_3 = A(1, k_1) \cdot A(2, k_2) \cdot A(3, k_3) = A(1,2) \cdot A(2,3) \cdot A(3,4)\\
&\ldots
\end{aligned}$$

Observem, doncs, que per cada i, el domini C_{i+1} determinat per P_i s'obté en afegir a C_i els elements nous que determinen les constants que hom assigna als índexs progressius en fer variar els índexs de producte de F sobre C_i. Així, en l'exemple anterior, $C_1 = \{1\}, C_2 = \{1,2\}$, $C_3 = \{1,2,3\}, C_4 = \{1,2,3,4\}$, etc. Tal com ha assenyalat Van Heijenoort en la seva introducció a la traducció anglesa de l'article de Löwenheim, les n_i possibles assignacions d'elements de C_i als índexs de producte de F es poden ordenar de

[1] *Cf. Badesa 1991*, 213.
[2] *Löwenheim 1915*, 455 (*Van Heijenoort 1967*, 239).

forma arbitrària, amb la condició que, per tot $a < i$, cap assignació de $C_1 \cup C_2 \cup ... \cup C_a$ segueixi en l'ordre establert a cap assignació que contingui algun element de $C_{a+1} \cup C_{a+2} \cup ... \cup C_i$ que no estigui en $C_1 \cup C_2 \cup ... \cup C_a$.[1]

Una vegada explicada la construcció de la successió de fórmules P_k, explicarem ara la construcció dels conjunts de fórmules $P_k^{(v)}$ de nivell k. Donada una fórmula P_k, considerem tots els sistemes d'igualtats (i desigualtats) que poden donar-se entre les constants numèriques que apareixen en la fórmula P_k, substituïm cada una d'aquestes constants per un representant de les classes d'equivalència associades als sistemes d'igualtats anteriors -per exemple, el menor en l'ordre natural- i avaluem finalment els coeficients de $1'$ i $0'$ en cada un d'aquests sistemes. Així, per exemple, una vegada obtingudes P_1 i P_2 a partir de la fórmula $\prod_{h,i,j} (\bar{z}_{hi} + \bar{z}_{hj} + 1'_{ij})\bar{z}_{li} z_{k_i i}$ tal com hem explicat abans, si representem els sistemes d'igualtats mitjançant les particions associades, llavors tenim per aquestes dues primeres fórmules de la successió els següents sistemes d'igualtats:[2]

$\underline{P_1}$	$\underline{P_2}$
	$\{1\},\{2\},\{3\}$
$\{1\},\{2\}$	$\{1\},\{2,3\}$
	$\{1,3\},\{2\}$
$\{1,2\}$	$\{1,2\},\{3\}$
	$\{1,2,3\}$

Evidentment, cada partició representa un sistema d'igualtats o desigualtats. Així, per exemple, $\{1\},\{2\}$ representa que $1 \neq 2$, mentre que $\{1,2\}$ representa que $1 = 2$. Si substituïm ara les constants numèriques de P_1 i P_2 per els representants de cada classe d'equivalència i avaluem els coeficients de $1'$ i $0'$, obtenim llavors els següents conjunts de fórmules de nivell:[3]

---

[1] *Cf. Van Heijenoort 1967*, 231.
[2] *Cf. Badesa 1992*, 213.
[3] *Cf. Ibid.*, 214.

$$
\begin{array}{lll}
\underline{P_1} & & \underline{P_2} \\
 & & P_2' = \overline{22}\cdot\overline{11}\cdot\overline{12}\cdot 21\cdot 32 \\
P_1' = \overline{11}\cdot 21 & & P_2'' = \overline{22}\cdot\overline{11}\cdot\overline{12}\cdot 21\cdot 22 \\
 & & P_2''' = \overline{22}\cdot\overline{11}\cdot\overline{12}\cdot 21\cdot 12 \\
P_1'' = \overline{11}.11 & & P_2^{iv} = (\overline{11}+1)\cdot\overline{11}\cdot\overline{11}\cdot 11\cdot 31 \\
 & & P_2^{v} = (\overline{11}+1)\cdot\overline{11}\cdot\overline{11}\cdot 11\cdot 11
\end{array}
$$

En el nostre exemple d'abans, *i.e.* la formula $\prod F = \prod_i A(i, k_i)$, haurem de considerar els mateixos sistemes d'igualtats que en l'exemple de Löwenheim i tindrem llavors que:

$$
\begin{array}{lll}
\underline{P_1} & & \underline{P_2} \\
 & & P_2' = A(1,2)\cdot A(2,3) \\
P_1' = A(1,2) & & P_2'' = A(1,2)\cdot A(2,2) \\
 & & P_2''' = A(1,2)\cdot A(2,1) \\
P_1'' = A(1,1) & & P_2^{iv} = A(1,1)\cdot A(1,3) \\
 & & P_2^{v} = A(1,1)\cdot A(1,1)
\end{array}
$$

Tal com ha observat Badesa en la seva tesi sobre el teorema de Löwenheim, els conjunts de fórmules anteriors tenen una sèrie de propietats que se segueixen de forma quasi immediata de la seva construcció, però que cal explicar breument per tal d'entendre l'argument de Löwenheim. En primer lloc, tal com assenyala Löwenheim, el nombre de fórmules de cada nivell és finit, donat que, per tot n, P_n té un nombre finit de constant numèriques i, per tant, el nombre de sistemes d'igualtat entre elles també és finit. En segon lloc, tota formula P_n de la successió $P_1, P_2, \ldots$ és de la forma P_{n-1} i tota formula de nivell n és de la forma $Q\cdot A$, on Q és una formula de nivell $n-1$. En aquest darrer cas, direm que la fórmula $P_n^{(v)}$ és una *extensió* de la fórmula Q de $P_{n-1}^{(v)}$ en qüestió. És important remarcar, de cara al desenvolupament futur de la demostració de Löwenheim, que cada formula de nivell n és extensió d'una i només una fórmula de nivell $n-1$ encara que pot contenir diverses fórmules de nivell $n-1$ com a factors seus. Per exemple, tal com hem vist abans, si $\prod F = \prod_i A(i, j, k_i)$, llavors tenim que $P_1 = A(1,1,2)$. D'aquí es dedueix fàcilment que $P_2 = A(1,1,2)\cdot(1,1,3)$. Si calculem ara les fórmules de nivell 1, llavors tindrem que

$P_1' = A(1,1,2)$ i $P_1'' = A(1,1,1)$, però entre les fórmules de nivell 2 tenim, per exemple, que $P_2''' = A(1,1,2) \cdot A(1,1,1)$, la qual conté com a factors les dues formules anteriors, però només és una extensió de la primera d'elles. En tercer lloc, tenim que si una formula de nivell $P_i^{(v)}$ és satisfactible, llavors les seves constants noves han de denotar elements de $C_{i+1} - C_i$. Com hem explicat abans, en efecte, tota formula P_i determina un domini C_{i+1} d'elements que s'obté en afegir a C_i les constants que hom assigna als índexs progressius en fer variar els índexs de producte de F sobre C_i. Ara bé, d'entre les fórmules de nivell de $P_i^{(v)}$, només en algunes d'elles hi figuraran constants que denotin realment elements de $C_{i+1} - C_i$, a saber, aquelles en què els sistemes d'igualtats i desigualtats corresponents no identifiquin les constants noves assignades als índexs progressius de $P_i^{(v)}$ amb constants que apareixien prèviament en les fórmules de nivell $P_{i-1}^{(v)}$. Per tant, només aquestes fórmules amplien, per dir-ho així, el domini i poden ser satisfactibles. Per contra, les fórmules de nivell $P_i^{(v)}$ les constants de les quals denoten elements de C_i tanquen, per dir-ho així, el domini i no poden ser satisfactibles. Car si alguna d'aquestes fórmules fos satisfactible, llavors d'entre les fórmules de nivell $P_{i+1}^{(v)}$, aquelles en què els sistemes d'igualtats i desigualtats identifiquen les constants noves assignades als índexs progressius de P_{i+1} amb les constants assignades als índexs progressius de P_i que denoten elements de C_i, seran també satisfactibles. Tal com hem dit abans, en efecte, cada formula de nivell $P_{i+1}^{(v)}$ és de la forma $Q \cdot A$, on Q és una formula de nivell $P_i^{(v)}$, però si identifiquem les constants noves que apareixen en P_{i+1} amb les constants noves de P_i que denoten elements de C_i i són satisfactibles, llavors el factor A serà igual a una de les fórmules de $P_i^{(v)}$ que tanquen el domini i, per tant, si Q és satisfactible, també ho serà $Q \cdot A$. Així doncs, si alguna de les fórmules de $P_i^{(v)}$que no amplien el domini és satisfactible, llavors alguna de les fórmules de $P_{i+1}^{(v)}$ amb aquesta propietat serà també satisfactible. I així successivament. Com que cap d'aquestes fórmules amplia el domini inicial C_i en el qual alguna de les fórmules de $P_i^{(v)}$ era satisfactible i aquest domini és finit, llavors aquestes fórmules seran finitament satisfactibles, però, com és obvi, si alguna d'aquestes fórmules és finitament satisfactible, llavors també ho serà ΠF, la qual cosa contradiu la hipòtesi del teorema. Finalment, tenim la propietat que constitueix, per dir-ho així, el *múscul* de la prova de Löwenheim i que podem enunciar així: (*i*) *si per un n, P_n és insatisfactible, llavors ΠF és insatisfactible*. Tal com hem vist, Löwenheim afirma que per demostrar que P_n és insatisfactible, s'ha de demostrar que el conjunt de fórmules de nivell n també ho és, és a dir, (*ii*) *si el conjunt de fórmules $P_n^{(v)}$ és insatisfactible, llavors P_n és insatisfactible.* D'aquí conclou finalment que: (*iii*) *si el conjunt de fórmules $P_n^{(v)}$ és* *insatisfactible, llavors* ΠF *és insatisfactible.* Löwenheim no demostra els enunciats (*i*) i (*ii*), d'on se segueix immediatament (*iii*), perquè segurament els considerava obvis, però potser no estaria de més veure com es podríem demostrar actualment per tal d'assegurar-nos la seva validesa.

(*i*) *Si per un n*, P_n *és insatisfactible, llavors* ΠF *és insatisfactible*.

Cas $n = 1$. Tal com hem vist P_1 s'obté en substituir els índexs constants i progressius de ΠF per les constants $c_1, c_2, ..., c_{n_1}$. Sigui ΠF una sentència del llenguatge L i sigui $\mathcal{A}$ una estructura per a L, tal que $\mathcal{A} \models \Pi F$. Sigui $L' = L \cup \{c_1, c_2, ..., c_n\}$ i sigui $\mathcal{A}'$ l'expansió de $\mathcal{A}$ a L'. Llavors $\mathcal{A}' \models \Pi F$ i, per exemplificació, $\mathcal{A}' \models P_1$, *i.e.* P_1 és satisfactible.

Cas $n + 1$. Si ΠF és satisfactible, llavors per la hipòtesi inductiva, P_n és satisfactible. Ara, per construcció:

$$P_{n+1} = P_n \cdot K,$$

i les úniques constants noves de K en relació a P_n són les assignades als índexs progressius de ΠF. Sigui ΠF una sentència del llenguatge L i sigui $\mathcal{A}$ una estructura per a L tal que $\mathcal{A}$ $\models P_n$. Sigui $L' = L \cup \{c_{i_1}, c_{i_2}, ..., c_{i_m}\}$, on $c_{i_1}, c_{i_2}, ..., c_{i_m}$ són les constants de P_{n+1} que no apareixen en P_n i sigui $\mathcal{A}'$ l'expansió a L'. Com que, per hipòtesi inductiva, tenim que $\mathcal{A} \models P_n$, llavors també tenim que $\mathcal{A}' \models P_n$. D'una altra banda, com que per hipòtesi tenim que $\mathcal{A}$ $\models \Pi F$, aleshores també tenim que $\mathcal{A}' \models \Pi F$ i, per exemplificació, $\mathcal{A}' \models K$. Per tant, $\mathcal{A}'$ $\models P_n \cdot K$, és a dir, $\mathcal{A}' \models P_{n+1}$.

(*ii*) *Si el conjunt de fórmules* $P_n^{(v)}$ *és insatisfactible, llavors* P_n *és insatisfactible.*

Si ΠF no conté els relatius distingits $1', 0'$, llavors per cada *n*, $P_n = P'_n$ i, per tant, si P_n és satisfactible, també ho és $P_n^{(v)}$ i ja hem acabat. Si ΠF conté els relatius distingits $1', 0'$, llavors en P_n també apareixeran aquests relatius, els quals caldrà avaluar per obtenir així P'_n. Se segueix així immediatament de la construcció de P'_n que si P_n és satisfactible, també ho és P'_n i, per tant, també ho serà $P_n^{(v)}$

(iii) *Si el conjunt de fórmules* $P_n^{(v)}$ *és insatisfactible, llavors* ΠF *és insatisfactible.*

Se segueix immediatament de (i) i (ii).

4.3. Löwenheim conclou la seva demostració amb el següent argument:

> Si per un k (i, per tant, per a tots els següents) tots els $P_k^{(v)}$ s'anul·len, aleshores l'equació $[\Pi F = 0]$ és satisfeta idènticament. Altrament, l'equació ja no es satisfeta idènticament en el domini numerable de primer ordre que acabem de construir. Car llavors, entre els $P'_1, P''_1, P'''_1, ...$ hi haurà com a mínim un Q_1 que figurarà com a factor en els $P_k^{(v)}$ que, en nombre infinit, no s'anul·len (perquè cada un d'aquests $P_k^{(v)}$ conté com a factor un dels finitament molts $P_1^{(v)}$). A més, entre els $P'_2, P''_2, P'''_2, ...$ hi ha com a mínim un Q_2 que conté com a factor Q_1 i apareix com a factor en els $P_k^{(v)}$ que, en nombre infinit, no s'anul·len (perquè cada un d'aquests $P_k^{(v)}$ conté com a factor un dels finitament molts $P_2^{(v)}$. Anàlogament, entre els $P'_3, P''_3, P'''_3, ...$ hi ha almenys un Q_3 que conté com a factor Q_2 i apareix en els $P_k^{(v)}$ que, en nombre infinit, no s'anul·len, etc.
>
> Cada Q_v és = 1, per tant, també és
>
> $$1 = Q_1 Q_2 Q_3 ... \text{ ad infinitum.}$$
>
> Però ara, per aquells valors dels índexs de suma la substitució dels quals dóna lloc a $Q_1, Q_2, Q_3, ...$, $\Pi F = Q_1 Q_2 Q_3 ...$ i, doncs, $\Pi F = 1$. Per tant, ΠF no s'anul·la idènticament i, d'aquesta manera, l'equació (4) no es satisfeta ni tan sols ja en un domini infinit numerable.[1]

L'argument de Löwenheim sembla ser el següent: Una vegada construïda la successió infinita numerable de fórmules $P_1, P_2, ...$ es té que, si per un k, P_k és insatisfactible (és a dir, si tots els $P_k^{(v)}$ son insatisfactibles), llavors ΠF serà insatisfactible. Altrament, ΠF serà satisfactible en el domini infinit numerable que s'acaba de construir. Suposem, en efecte, que per a tot k, hi ha alguna fórmula de $P_k^{(v)}$ satisfactible. Tal com hem vist abans, cada fórmula de nivell $m + 1$ és una extensió d'una -i només una- fórmula de nivell m. Per hipòtesi, en cada nivell hi ha alguna fórmula $P_k^{(v)}$ satisfactible. Així, hi haurà almenys una fórmula de $P_1^{(v)}$ que serà satisfactible i tindrà infinites extensions satisfactibles. Per veure això, anomenem E_k el conjunt de fórmules satisfactibles de nivell k, el qual, com hem explicat, és un conjunt finit, E

---

[1] *Löwenheim 1915*, 456 (*Van Heijenoort 1967*, 240).

a la unió infinita d'aquests conjunts $E_1, E_2, ...$ i S a la relació d'extensió. Llavors en E_1 hi haurà una fórmula que tindrà infinites extensions satisfactibles, és a dir, hi haurà un nombre infinit de fórmules de E que tindran la relació S o la seva iteració (és a dir, seran extensions seves, o extensions d'extensions d'ella, etc). Car cada una de les fórmules satisfactibles del conjunt infinit E és una extensió d'una de les fórmules del conjunt finit E_1 i, per tant, hi ha d'haver alguna fórmula de E_1 que tingui la relació d'extensió (o la seva iteració) amb un nombre infinit de fórmules de E. Löwenheim anomena Q_1 a una d'aquestes fórmules. Anàlogament, hi haurà almenys una fórmula Q_2 de $P_2^{(v)}$ que serà una extensió satisfactible de Q_1 i tindrà infinites extensions satisfactibles, etc. Així, podem definir una successió de fórmules $Q_1, Q_2, Q_3, ...$ tal que, per cada $n > 0$, Q_{n+1} és una extensió de Q_n. Löwenheim raona finalment de la següent manera: com que per cada n, Q_n és satisfactible, llavors $Q_1Q_2Q_3...$ serà satisfactible i donat que "per aquells valors dels índexs de suma la substitució dels quals dóna lloc a $Q_1, Q_2, Q_3, ...$, $\Pi F = Q_1Q_2Q_3...$", llavors ΠF serà satisfactible en el domini infinit numerable que determina la successió anterior. Aquest darrer pas de la demostració requereix un parell de comentaris. En primer lloc, Löwenheim no justifica el pas que el duu a afirmar, a partir de la satisfactibilitat de Q_n, per a qualsevol n, la satisfactibilitat de$Q_1Q_2Q_3...$ o, el que és el mateix, de $\{Q_1, Q_2, Q_3, ...\}$. Ara bé, tal com ha afirmat Van Heijenoort, aquest pas s'ha de justificar:

> El que s'ha de demostrar és que, per a les assignacions així obtingudes per a tot i, es pot formar una assignació amb la qual ΠF sigui vertadera, això és, $\Pi F = 0$ sigui falsa. Això Löwenheim no ho fa. El pas que falta és el que Quine anomena la llei de la conjunció infinita, la qual casualment es representada gràficament a través de la fórmula (sense demostrar):
>
> $$1 = Q_1Q_2Q_3... \text{ ad infinitum.}$$ [1]

Quine anomena *llei de la conjunció infinita* a la llei segon la qual *una classe infinita d'esquemes veritativo-funcionals és consistent si cada una de les seves subclasses finites ho és*,[2] la qual és equivalent, doncs, al que avui en dia anomenem teorema de compacitat. A partir d'aquesta llei o teorema podem demostrar, en efecte, que si per cada n, Q_n és satisfactible, llavors també ho és $\{Q_1, Q_2, Q_3, ...\}$. Sigui Σ, en efecte, un subconjunt finit qualsevol de $\{Q_1, Q_2, Q_3, ...\}$, llavors Σ és satisfactible. Car si Q_n és la formula d'índex més

[1] *Van Heijenoort 1967*, 231.

[2] *Quine 1974,* 173.

gran de Σ, llavors donat que, per hipòtesi, per cada n, Q_n és satisfactible i és una extensió (possiblement iterada) de totes les fórmules d'índex menor, totes aquestes fórmules seran també satisfactibles i, per tant, Σ serà satisfactible. Per tant, pel teorema de compacitat, $\{Q_1, Q_2, Q_3, ...\}$ també és satisfactible. En segon lloc, afirma Löwenheim, donat que "per aquells valors dels índexs de suma la substitució dels quals dóna lloc a $Q_1, Q_2, Q_3, ...$, $\Pi F = Q_1 Q_2 Q_3 ...$", llavors ΠF és satisfactible. Com ja sabem, ΠF no conté índexs de suma -variables lligades per un quantificador existencial-, donat que aquests han desaparegut en el pas de $\Sigma \Pi F$ a ΠF i, per tant, l'afirmació de Löwenheim ha de fer referència als índexs de suma de la primera de les fórmules anteriors. Com ja hem explicat, en el pas de $\Sigma \Pi F$ a ΠF s'eliminen els quantificadors existencials -inclòs l'operador $\sum$-, de manera que els índexs de suma $\Sigma \Pi F$ passen a ser els índexs constants i progressius de ΠF. Així doncs, l'argument de Löwenheim sembla ser el següent: Donat que cada successió infinita de fórmules satisfactibles representa les diferents formes d'assignar valors als índexs de suma (els índexs constants i progressius) en un domini infinit numerable i, donat que el producte de les fórmules de qualsevol d'aquestes successions pot veure's com una expansió de ΠF en aquest domini, llavors per als valors dels índexs de suma que donen lloc a la successió $Q_1, Q_2, Q_3, ...$ es té que ΠF té el mateix valor de veritat que $Q_1 Q_2 Q_3 ...$ en aquest domini. Evidentment, el pas de la satisfactibilitat de $Q_1 Q_2 Q_3 ...$ a la de ΠF és immediat, donat que la successió $Q_1, Q_2, Q_3, ...$ determina un domini infinit numerable en el qual, per la mateixa construcció de la successió, ΠF és també satisfactible. Amb tot, és digne de remarcar com, una vegada més, Löwenheim pensa en termes d'expansions i és aquesta manera de pensar la que el permet concloure la seva demostració.

Per acabar, cal notar que, tal com ha explicat Wang, "l'argument de Löwenheim estableix en un cas particular el que avui en dia s'anomena "lema d'infinitud"".[1] Wang es refereix naturalment a l'argument de Löwenheim partir del qual aquest autor conclou l'existència d'una successió de fórmules satisfactibles $Q_1, Q_2, Q_3, ...$ ordenada per la relació d'extensió. Més concretament, el lema d'infinitud afirma el següent:

[1] *Skolem 1970*, 28.

Donada una seqüència de conjunt finits mútuament disjunts $A_1, A_2, \ldots$ i una relació S tal que: (i) si xSy i $x \in A_n$, llavors $y \in A_{n+1}$, i (ii) per tot $x_{n+1} \in A_{n+1}$, hi ha un i només un $x_n \in A_n$ tal que $x_n S x_{n+1}$. Llavors hi ha una seqüència $y_1, y_2, \ldots$ tal que, per tot i, $y_i \in A_i$ i $y_i S y_{i+1}$.[1]

Així, en el cas concret que ens ocupa, $A_1, A_2, \ldots$ seria el conjunt de fórmules satisfactibles $E_1, E_2, \ldots$, *S* seria la relació d'extensió. Tal com hem vist, les fórmules de $E_1, E_2, \ldots$ satisfan respecte la relació d'extensió les propietats (*i*) i (*ii*) enunciades en el lema d'infinitud. Per tant, es pot concloure d'aquest lema que hi ha una successió de fórmules $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$, tal que per tot *i*, $Q_i \in E_i$ i tota fórmula Q_{i+1} és una extensió de Q_i. Com és obvi, Löwenheim no pot utilitzar el lema de infinitud, el qual fou demostrat per D. König en la dècada dels vint i, per tant, és posterior a la publicació de l'article de Löwenheim. Això fa que Löwenheim raoni directament sobre fórmules satisfactibles i conjunts de formules satisfactibles ordenades per la relació d'extensió. D'aquí que, tal com ha observat Wang, Löwenheim faci "un ús implícit de l'axioma d'elecció dependent",[2] el qual és necessari també per demostrar el lema de König. Una formulació possible d'aquest axioma és la següent:

Si B és un conjunt no buit i S una relació tal que:

$$\forall x(x \in B \rightarrow \exists y(y \in B \wedge xSy)),$$

llavors hi ha una seqüència d'elements $x_1, x_2, \ldots$ de B tal que, per tot n, $x_n S x_{n+1}$.[3]

Evidentment, Löwenheim fa un ús implícit d'aquest axioma en el raonament que utilitza per concloure que hi haurà almenys una fórmula Q_1 de $P_1^{(\nu)}$ que serà satisfactible i tindrà infinites extensions satisfactibles, a partir del fet que per cada *k*, totes les fórmules satisfactibles de nivell *k*, seran una extensió d'alguna fórmula de $P_1^{(\nu)}$ o, com havíem dit nosaltres, en concloure que hi ha d'haver alguna fórmula de E_1 que tingui la relació d'extensió (o la seva iteració) amb un nombre infinit de fórmules de *E*, a partir del fet que cada una de les fórmules satisfactibles del conjunt infinit *E* és una extensió d'una de les fórmules del conjunt finit E_1. Car aquest raonament infereix l'existència d'una seqüència infinita de fórmules ordenades per la relació d'extensió a partir del fet que tots els conjunts

---

[1] *Ibid.*, 28.
[2] *Ibid.*, 28.
[3] *Ibid.*, 28.

finits de fórmules tenen aquesta propietat, la qual cosa només es pot justificar en presencia d'un axioma com l'anterior. Finalment, com que l'axioma d'elecció dependent és una conseqüència alhora de l'*axioma d'elecció*, hem de concloure que aquesta part de la demostració de Löwenheim pressuposa també, en darrer terme, aquest axioma.

6. Els primers escrits de Skolem

Th. Skolem (1887-1963) ha fet algunes contribucions fonamentals per al desenvolupament de la lògica i la filosofia de les matemàtiques contemporànies. En particular, Hao Wang n'ha assenyalat les següents en la seva introducció a *Selected Works in Logic* (*Skolem 1970*) del mateix autor:

> (1) Les funcions de Skolem i els models numerables com a mètode general per analitzar els quantificadors tant en la lògica pura com en les teories axiomàtiques.
> (2) El descobriment de l'aritmètica recursiva com a mètode per desenvolupar les matemàtiques a partir d'una base no quantificacional.
> (3) La invenció de l'eliminació de quantificadors com a mètode de decisió en les teories axiomàtiques i de les seves potents aplicacions.
> (4) Diferents resultats sobre el problema de decisió i reducció de la teoria de la quantificació (per exemple, la forma normal de Skolem).
> (5) La clàssica explicació del concepte "propietat definida" de Zermelo per mitjà de la notació de la teoria de la quantificació.
> (6) El descobriment i èmfasi en els models no estàndards de la teoria de nombres axiomàtica i la teoria de conjunts.[1]

Tal com ha observat el mateix Wang, Skolem realitzà la major part d'aquestes contribucions en el període 1919-1933, encara que algunes de les idees desenvolupades en aquest període poden retrotreure's als anys immediatament anteriors. En particular, les principals contribucions de Skolem en el camp de la lògica i els fonaments de les matemàtiques poden trobar-se en els articles "Untersuchungen über die Axiome des Klassenkalküls und über Produktations- und Summationsprobleme, welche gewisse Klassen

---

[1] *Ibid.*, 17.

von Aussagen betreffen" (*1919*), "Logisch-kombinatorische Untersuchungen über die Erfülbarkeit oder Beweisbarkeit mathematischer Sätze nebst einem Theoreme über dichte Mengen" (*1920*), "Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begründung der Mengenlehre" (*1922*), "Begründung der elementären Arithmetik durch die rekurriende Denkweise ohne Anwendung scheinbarer Veränderlichen mit unendilchem Ausdehnungsbereich" (1923), "Über die matematische Logik" (1928), "Über einige Grundlagenfragen der Mathematik" (1929), "Über einige Satzfunktionen in der Arithmetik" (1930) i "Über die Unmöglichkeit einer Charakterisierung der Zahlenreihe mittels eines endlichen Axiomensystems" (1933). Tal com ha assenyalat Hao Wang, "en els primers treballs de Skolem trobem una gran influència dels llibres de Schröder i l'article de Löwenheim de 1915".[1] Aquest influència és ben palesa en la major part dels articles publicats per l'autor abans del període 1919-1933 abans esmentat i en els primers escrits d'aquest període. En aquesta secció farem una breu ressenya bibliogràfica d'alguns d'aquests treballs amb la finalitat, en primer lloc, de fer palesa aquesta influència i, en segon lloc, de fer una breu introducció a les diferents versions del teorema de Löwenheim-Skolem que ens permetin entendre millor les seccions següents. En la secció següent, estudiarem més acuradament la demostració duta a terme per Skolem del teorema de Löwenheim-Skolem en l'article de 1920 abans citat, la qual cosa ens permetrà aportar en la darrera secció d'aquest capítol una mica de llum sobre les contribucions de Skolem especificades per Wang en els ítems (1) i (4) i comparar-les amb les de Löwenheim.

El primer article que apareix a *Selected Works* es titula "On the Structure of Groups in the Identity Calculus" (*1918*). Donades certes classes, hom pot posar el problema de determinar totes les classes possibles que es poden derivar a partir d'elles a través de les tres operacions del càlcul idèntic schröderià: suma, producte i negació. Doncs bé, segons Skolem, "la totalitat d'aquestes classes constitueix un grup respecte a aquestes operacions".[2] Així, per exemple, donada una classe a, ho obté el grup:

$$G(a) = (0, a, \bar{a}, 1),$$

donades dues classes a, b, hom obté el grup:

$$G(a,b) = (0, ab, a\bar{b}, \bar{a}b, \bar{a}\bar{b}, a, \bar{a}, b, \bar{b}, ab + a\bar{b}, \bar{a}b, a + b, a + \bar{b}, \bar{a} + b, \bar{a} + \bar{b}, 1),$$

[1] *Ibid.*, 18.
[2] *Ibid.*, 56.

i, anàlogament, per al grup generat per tres classes a, b, c. Ara bé, tal com assenyala Skolem:

> A *Algebra der Logik* de Schröder, no trobem una teoria general per aquest grup. Només hi ha una recerca completa per aquells grups que es poden generar a partir de 1 o 2 símbols de classe i Schröder posa com a problema la determinació d'aquells grups que es poden derivar a partir de tres símbols. D'una altra banda, normalment es planteja la determinació del nombre d'elements en el grup que es deriva a partir de n classes. Resta així manifest que ell [Schröder] ho ha vist l'estructura general i simple que aquests grups posseeixen.[1]

Així, l'objectiu principal d'aquest primer article de Skolem serà bastir una teoria general dels grups derivats a partir de n lletres o símbols i, en particular, determinar el nombre de subgrups d'aquest grups. El segon article de Skolem que apareix a *Selected Works* es l'article de 1919 abans citat, el títol del qual traduït al català és: "Recerques sobre els axiomes del càlcul de classes i sobre problemes relatius a sumes i productes, els quals fan referència a determinades classes d'enunciats", encara que les recerques que duu a terme Skolem en aquest article són, en realitat, de mena molt diversa. Així, en el primer paràgraf d'aquest article, Skolem demostra diversos teoremes relatius a la independència mútua dels postulats a través dels quals Schröder havia axiomatitzat el càlcul de classes o dominis. Skolem justifica la seva recerca afirmant que, si bé aquest problema ja havia estat tractat per Huntington en el seu article de 1905, ell no l'havia llegit i només coneixia la seva existència a partir de l'esment que en fa Löwenheim en el seu article de 1915.[2] En el segon paràgraf, Skolem estudia les propietats del que anomena un *anell de classes*, això és, un sistema o conjunt de classes en el qual són vàlids els axiomes I, II i III de Schröder (que caracteritzen, com ja sabem, un ordre parcial) i els axiomes $V_{\times}$ i V_{+} que afirmen l'existència d'un ínfim i un suprem. Com és ben sabut, un ordre parcial en el qual per cada dos elements hi ha ínfim i suprem és un *reticle* i, per tant, donada la naturalesa abstracta del càlcul de dominis schröderià, l'estudi de Skolem no és sinó un estudi de les propietats abstractes d'aquesta mena d'estructures. En el tercer paràgraf, Skolem estudia els anells de classes en els quals les lleis distributives són vàlides, això és, el que avui en dia anomenem reticles distributius. Finalment, en el quart paràgraf, el punt de partida és "el càlcul de classes i el càlcul de relatius d'Schröder",[3] i l'objectiu és demostrar que "els productes i sumes d'enunciats sempre

[1] *Ibid*., 60.
[2] *Ibid*., 67.
[3] *Ibid*., 93.

poden ser interpretats, quan hom tracta amb un tipus d'enunciats, que podem anomenar *numèrics*".[1] Un *enunciat numèric simple* és un enunciat del tipus $a \geq n$ o $a \leq n$, on a representa una classe i n un nombre natural. Un *enunciat numèric* [*numerische Aussage*] és llavors "qualsevol enunciat que pot construir-se a partir dels esmentats enunciats numèrics simples mitjançant les tres operacions del càlcul d'enunciats",[2] és a dir, el producte, la suma i la negació. El teorema 15b enuncia que, donat un enunciat numèric $U(u, v, ...)$, en el qual hi apareixen, a més de les variables anteriors, les constants $a, b, c, ...$, llavors el resultat de prefixar a l'expressió anterior qualsevol combinació dels signes Π, Σ que lliguin les variables anteriors, és un *enunciat numèric* sobre les classes $a, b, c, ...$. Els darrers teoremes demostrats en aquest paràgraf són interessants perquè mostren la connexió entre els *numerische Aussagen* de Skolem i les *Zählausdrücken* o *expressions de primer ordre* de Löwenheim. Així, per exemple, el teorema 17a enuncia la possibilitat de transformar una *Zählgleichung* [*equació de primer ordre*] qualsevol amb coeficients de relatius unaris qualssevol a, b, c, … i, possiblement, els coeficients de $0'$ i $1'$ en un *enunciat numèric* del tipus $U(a, b, c, ...)$. El teorema 17b enuncia el recíproc i, per tant, d'ambdós se segueix l'equivalència de *numerische Aussagen* i *Zählausdrücken* o, el que és el mateix, entre el càlcul de classes de primer ordre i la lògica monàdica de primer ordre. Això permet a Skolem transformar el teorema 15b en un enunciat equivalent sobre *Zählausdrücke* (teorema 18), del qual se segueix immediatament l'important teorema 4 de l'article de Löwenheim 1915. El tercer article de Skolem a *Selected Works* és el conegut article de 1920 abans citat, el títol del qual en català és: "Recerques lògico-combinatòries sobre la satisfactibilitat o demostrabilitat de les proposicions matemàtiques juntament amb un teorema sobre conjunts densos". Aquest article se situa també de ple en la tradició algèbrica de Schröder i Löwenheim, com ho mostra el fet que la notació sigui la de Schröder -encara que, com veurem més endavant, pel que fa a la interpretació d'aquests símbols, Skolem introdueix algunes novetats molt importants en relació a Schröder i Löwenheim- i que l'objectiu sigui oferir una nova demostració del teorema de Löwenheim i algunes generalitzacions del mateix. El mateix Skolem explica el perquè de la nova demostració del teorema de Löwenheim en el primer paràgraf de l'article de 1920 en els termes següents:

> Löwenheim demostra el seu teorema mitjançant el "desenvolupament" schröderià de productes i sumes, un procediment que permet traslladar el signe Π

[1] *Ibid.*, 93.
[2] *Ibid.*, 94.

davant del signe Σ o viceversa. Però aquest procediment és una mica enrevessat i fa que hom hagi d'introduir símbols d'individus com a subíndexs per als coeficients de relatiu. En el que segueix presentaré una demostració més senzilla, gràcies a la qual aquests subíndexs poden evitar-se.[1]

Tal com veurem més endavant, per demostrar el teorema de Löwenheim tot evitant els subíndexs dobles emprats per aquest autor, Skolem introduirà les anomenades avui en dia "formes normals de Skolem per a la satisfactibilitat" i les "funcions de Skolem", que han esdevingut eines d'una importància extraordinària en les recerques ulteriors sobre la teoria de la quantificació i les teories axiomàtiques. D'una altra banda, cal avançar ja que en aquest article Skolem no demostra exactament el mateix teorema que Löwenheim, sinó una versió més forta del mateix, anomenada sovint "versió del subdomini". Tal com hem vist en la secció quarta, una formulació equivalent del teorema originalment enunciat per Löwenheim és la següent:

(T1) *Si una fórmula de primer ordre insatisfactible en tot domini finit és satisfactible, llavors és satisfactible en un domini infinit numerable.*

Ara bé, per demostrar que si una fórmula *A* és satisfactible en un domini infinit no numerable, llavors és satisfactible en un domini infinit numerable, hom pot procedir essencialment de dues maneres:

(α) Construir una solució sobre un domini infinit numerable que faci vertadera la fórmula *A*.

(β) Suposar que existeix una solució *S* en un domini infinit no numerable *D* que fa vertadera *A* i construir a partir d'ell un subdomini *D*' infinit numerable que faci vertadera *A* amb la solució *S* restringida a aquest subdomini.

Si hom procedeix d'acord amb (α), hom demostra estrictament (T1), però si hom procedeix d'acord amb (β), llavors hom demostra quelcom una mica més fort, a saber:

[1] *Ibid.*, 103 (*Van Heijenoort 1967*, 254).

(T2) *Si una fórmula de primer ordre insatisfactible en tot domini finit, és satisfeta en un domini infinit no numerable D amb una solució S, llavors és satisfeta també en un subdomini infinit numerable D' de D amb una solució S' que és la restricció a D' de S.*

Si generalitzem els dos teoremes anteriors a conjunts qualssevol de fórmules i, en comptes de fórmules, parlem de sentències, llavors (T1) i (T2) es corresponen amb les dues formes en què avui en dia s'enuncia habitualment el teorema de Löwenheim-Skolem -on Σ és un conjunt de sentencies de la lògica de primer ordre amb identitat i se suposa que el llenguatge té un nombre infinit numerable de símbols:

(T1)' *Si Σ té un model, llavors té un model numerable.*
(T2)' *Si Σ té un model $\Re$, llavors Σ té un model numerable $\Im$ que és una subestructura de $\Re$.*

La diferència fonamental entre procedir d'acord amb (α) o (β), és a dir, entre demostrar estrictament les versions (T1) i (T2) del teorema de Löwenheim-Skolem rau en el fet en què, en el primer cas, no és necessari apel·lar a l'*axioma d'elecció*, mentre que en el segon cas si que ho és, car per demostrar que un subconjunt infinit no numerable té un subconjunt infinit numerable ja és necessari l'axioma d'elecció. En línies generals, la majoria dels historiadors de la lògica coincideixen a acceptar que Löwenheim va demostrar en el seu article de 1915 només la versió feble del teorema de Löwenheim-Skolem, mentre que Skolem hauria demostrat en el seu article de 1920 la versió forta o, com també es diu a vegades, la versió del subdomini, generalitzada a conjunts de fórmules. Com ja hem explicat abans, la excepció que confirma la regla és la tesi doctoral del professor Badesa, en la qual s'intenta provar que Löwenheim hauria demostrat en el seu article de 1915 la versió del subdomini. En l'article de 1922 citat al començament d'aquesta secció, el títol del qual traduït al català és "Algunes remarques sobre la fonamentació axiomàtica de la teoria de conjunts", Skolem donarà una nova demostració, ara si, del teorema original de Löwenheim, que després afinarà en l'article de 1929 citat prèviament i titulat "Sobre algunes preguntes fonamentals de les matemàtiques". En un article una mica posterior, titulat "Sur la portée du théorème de Löwenheim-Skolem" (*1941*), Skolem compararà les diferents demostracions del teorema de Löwenheim-Skolem i observarà que, en realitat, aquestes demostracions donen lloc a dues versions diferents del mateix teorema: la "versió feble", demostrada per Löwenheim i ell mateix en els articles de 1922 i 1929 i la "versió forta" o del "subdomini", demostrada per ell en l'article de 1920.

7. La demostració de Skolem del teorema de Löwenheim-Skolem

Tal com hem explicat en la secció anterior, l'objectiu principal de Skolem en l'article "Logisch-kombinatorische Untersuchungen über die Erfülbarkeit oder Beweisbarkeit mathematischer Sätze" de 1920 és oferir una nova demostració més senzilla i elegant del teorema de Löwenheim -que eviti, per exemple, l'ús dels subíndexs dobles en els coeficients relatius per designar els individus del domini-, encara que, en realitat, Skolem demostra una versió més forta del mateix teorema, l'anomenada "versió del subdomini". En l'article esmentat, després d'una petita introducció, on explica els objectius de l'article i la connexió de la seva recerca amb la de Löwenheim, Skolem defineix el concepte d'*enunciat de primer ordre* [*Zählaussage*] en els termes següents:

> *Un enunciat de primer ordre és un enunciat construït a partir de coeficients de relatiu en el sentit de Schröder per mitjà de les cinc operacions esmentades abans* $[\cdot, +, -, \Pi \text{ i } \Sigma]$*, i en el qual* Π i Σ *tenen com a recorregut només els individuals*.[1]

En l'article de 1920, Skolem empra essencialment la mateixa notació i terminologia que Löwenheim, el qual l'havia après de Schröder. Així, per exemple, el concepte de *Zählaussage* és correspon exactament amb el concepte de *Zälhausdruck* de Löwenheim, tal com el mateix Skolem reconeixerà. Ara bé, Skolem centra des d'un primer moment la seva atenció únicament en els *enunciats de primer ordre* [*Zählaussage*] i s'oblida per complet de les *equacions de relatiu* [*Relativgleichungen*] i de *primer ordre* [*Zälhgleichungen*], *i.e.* equacions entre *expressions de relatiu* o enunciats de *primer ordre* que s'igualen a 0, que constituïen el veritable objecte d'estudi de l'article de Löwenheim. Una vegada definit el concepte d'enunciat de primer ordre, Skolem defineix el concepte de forma normal o, com diríem avui en dia, de *forma normal de Skolem per a la satisfactibilitat*:

[1] *Ibid*., 103 (254).

Un enunciat de primer ordre es dirà que està en forma normal si està escrit de manera que primer vinguin signes de tipus Π*, després signes de tipus* Σ *i, després segueixi una expressió que estigui lliure dels signes* Π i Σ*. Tot enunciat de primer ordre que contingui només signes del tipus* Π o Σ *es dirà també que està en forma normal, sempre i quan aquests signes estiguin al començament i segueixin l'un a l'altre.*[1]

És a dir, un enunciat o fórmula de primer ordre és en forma normal si és de la forma

$$\Pi\Sigma\alpha,$$

on Π i Σ denoten, respectivament, conjunts, possiblement buits, de quantificadors universals i existencials i α no conté cap quantificador. És evident, doncs, que les formes normal de Skolem no es corresponen amb les formes normals de Löwenheim que, com ja sabem, són de la forma:

$$\Sigma\,\Pi\,\alpha.$$

En qualsevol cas, les formes normal de Skolem i les de Löwenheim juguen un paper molt similar en la demostració del teorema de Löwenheim-Skolem per part de tots dos autors. Així, per exemple, el teorema (1) de l'article de Skolem enuncia per a les primeres un resultat anàleg al demostrat per Löwenheim per a les segones en la primera part de la seva demostració del teorema de Löwenheim-Skolem, a saber:

Si U és un enunciat de primer ordre qualsevol, llavors existeix un enunciat U' *en forma normal, de tal manera que U és satisfactible en un domini donat sempre que* U' *ho és, i recíprocament.*[2]

Abans de demostrar el teorema anterior en el cas general, Skolem el demostra per un senzill cas particular que permet veure el procediment general de com podem anar canviant

[1] *Ibid.*, 104 (254).
[2] *Ibid.*, 104 (255).

l'ordre dels quantificadors, corrent els quantificadors existencials cap a la dreta i els universals cap a l'esquerra. Considerem, en efecte, la proposició:[1]

$$\forall\chi\exists\psi\forall\omega a(\chi,\psi,\omega) \tag{1}$$

on a està construïda exclusivament a partir de constants relacionals amb l'ajut de les connectives $\wedge, \vee, \sim$. Sigui ara,

$$\Re(\chi,\psi) = \forall\omega a(\chi,\psi,\omega)$$

per a tot χ,ψ. Així, podem escriure:

$$\forall\chi\forall\psi(\Re(\chi,\psi) = \forall\omega a(\chi,\psi,\omega)) \tag{2}$$

Ara, (2) és equivalent a:

$$\forall\chi\forall\psi((\sim\Re(\chi,\psi)\vee\forall\omega a(\chi,\psi,\omega))\wedge(\exists\upsilon\sim a(\chi,\psi,\upsilon)\vee\Re(\chi,\psi))),$$

i aquesta expressió és equivalent a:

$$\forall\chi\forall\psi\forall\omega\exists\upsilon((\sim\Re(\chi,\psi)\vee a(\chi,\psi,\omega))\wedge(\Re(\chi,\psi)\vee\sim a(\chi,\psi,\upsilon))), \tag{3}$$

que és en forma normal. A partir de (2) podem reescriure (1) com a

$$\forall\chi\exists\psi\Re(\chi,\psi) \tag{4}$$

que també és en forma normal. Finalment, podem escriure la conjunció de (3) i (4) com:

---

[1] A partir d'ara substituirem la notació emprada per Skolem per la notació estàndard avui en dia. En particular, emprarem les variables gregues $\chi,\psi,\omega,...$ per denotar successions finites de variables i les expressions$\forall\chi$ i $\exists\psi$ per denotar successions finites de quantificadors, de manera que una expressió com ara $\forall\chi\exists\psi a(\chi,\psi)$ denotarà el mateix que en l'article de Skolem denota l'expressió $\Pi_{x_1}...\Pi_{x_m}\Sigma_{y_1}...\Sigma_{y_n}U_{x_1...x_m y_1....y_n}$. Substituirem també la fraseologia pròpia de la lògica de relatius emprada per Skolem per una de més moderna -per exemple, parlarem de símbols o constants de relació en comptes de coeficients de relatiu, de conjunció en comptes de producte, etc.

$$\forall\phi\forall\chi\forall\psi\forall\omega\exists\varphi\exists\upsilon((\Re(\phi,\varphi)\wedge((\sim\Re(\chi,\psi)\vee a(\chi,\psi,\omega))\wedge(\Re(\chi,\psi))\vee\sim a(\chi,\psi,\upsilon)))(5)$$

que també és en forma normal. Ara, si (1) és satisfactible, també ho és (5) donat que, a banda de $\Re$, els relatius que apareixen en (1) i (5) són els mateixos i, sempre podem trobar $\Re$ a partir de (2) si es coneixen els relatius de (1). Recíprocament, si (5) es satisfactible, també ho és (1) donat que (5) és la conjunció lògica de (3) i (4) a partir dels quals se segueix (1).

A partir del cas particular anterior, Skolem duu a terme la demostració general. Considerem la proposició:

$$\forall\chi_1\exists\chi_2\forall\chi_3\ldots\exists\chi_n a(\chi_1,\chi_2,\ldots,\chi_n), \qquad (6)$$

on

$$\chi_1=(x_1,x_2,\ldots,x_{n_1})$$

$$\chi_2=(x_{n_1+1},x_{n_1+2},\ldots,x_{n_1+n_2})$$

....

$$\chi_n=(x_{n_1+n_2+\ldots+n_{n-1}+1},x_{n_1+n_2+\ldots+n_{n-1}+2},\ldots,x_{n_1+n_2+\ldots+n_n})$$

Així, hom pot definir les següents relacions:

$$\Re^1(\chi_1,\chi_2,\ldots,\chi_{n-1})=\exists\chi_n a(\chi_1,\chi_2,\ldots,\chi_n) \qquad (7)$$

$$\Re^2(\chi_1,\chi_2,\ldots,\chi_{n-2})=\forall\chi_{n-1}\Re^1(\chi_1,\chi_2,\ldots,\chi_{n-1})$$

....

$$\Re^{n-2}(\chi_1,\chi_2)=\forall\chi_3\Re^{n-3}(\chi_2,\chi_3)$$

Ara bé, cadascuna d'aquestes proposicions i, per tant, les definicions de $\Re^1,\Re^2,\ldots,\Re^{n-2}$ es poden posar en forma normal de la mateixa manera com abans es transformava (2) en la forma normal (3). Però llavors també la conjunció de $\Re^1, \Re^2, ..., \Re^{n-2}$ es podrà escriure en forma normal. Tenint en compte (7), hom pot escriure (6) com:

$$\forall \chi_1 \exists \chi_2 \Re^{n-2}(\chi_1, \chi_2) \tag{8}$$

que és també en forma normal. Finalment, la conjunció de (7) i (8) es pot escriure com una proposició α' en forma normal. Ara, si hom pot trobar, pels relatius de (6), valors tals que (6) se satisfaci, llavors, per (7), es podrà trobar successivament $\Re^1, \Re^2, ..., \Re^{n-2}$ i, aleshores, α' se satisfarà. Recíprocament, si α' és satisfeta (per certs valors assignats als relatius de α'), llavors (7) i (8) seran també satisfetes i, per tant, també (6), tal com es volia demostrar.

Una volta reduït el problema de la satisfactibilitat de les proposicions de primer ordre al de la satisfactibilitat de les seves formes normals, Skolem enuncia el teorema 2:

> *Tota proposició en forma normal o bé és una contradicció o bé és satisfactible ja en un domini finit o infinit numerable*.[1]

Sembla clar que aquesta és una altra forma d'enunciar el teorema de Löwenheim equivalent a la que havia donat el propi Löwenheim, sobretot si es té en compte que, tal com indica la redacció del mateix teorema, l'expressió "és una contradicció" s'ha d'entendre aquí en el sentit de "és insatisfactible". De fet, tal com ja havíem vist, la mateixa demostració de Löwenheim suggereix aquesta manera d'enunciar el seu teorema. Ara bé, tal com veurem immediatament, Skolem demostra un versió més forta del teorema anterior que la demostrada per Löwenheim, donat que suposa que la proposició en qüestió es satisfeta en un domini prèviament donat i construeix a partir d'ell un sudomini domini finit o numerable en la qual també és satisfeta. Aquest supòsit previ no apareix, si més no de forma explícita en la demostració de Löwenheim, per la qual cosa només podem atribuir a Löwenheim la demostració d'una versió més feble del teorema. Per demostrar el teorema anterior, Skolem considera primer, com abans, una proposició en forma normal el més senzilla possible. Sigui, en efecte,

$$\forall x \exists y \alpha(x, y)$$

[1] *Ibid*., 106 (256).

i *suposem* que aquesta proposició sigui satisfactible en un cert domini A. Ara, continua Skolem, per l'*axioma d'elecció* podem *escollir* un únic element d'entre tots els ys per als quals $a(x,y)$ és vertadera per qualsevol x. Així, si anomenem x' a aquest element tenim que en A se satisfarà:

$$\forall x \exists x' a(x,x').$$

Sigui ara $a \in A$, aleshores existiran certes classes $X \subseteq A$ tals que (*i*) $a \in X$ i (*ii*) $x' \in X$ sempre que $x \in X$. Sigui $X_0 = \cap X$, llavors per un conegut teorema de la teoria de cadenes de Dedekind, X_0 és una classe finita o be infinita numerable i, òbviament, en X_0 se satisfà $\forall x \exists x' a(x,x')$.

Per provar el teorema en tota la seva generalitat, Skolem enuncia els dos lemes següents:

Lema 1: Sigui $\Re(x_1,x_2,...,x_m,y_1,y_2,...,y_n)$ una relació $m+n$-ària tal que, per a cada seqüència $\langle x_1,x_2,...,x_m \rangle$, existeix una única seqüència $\langle y_1,y_2,...,y_n \rangle$ amb la qual $\Re(x_1,x_2,...,x_m,y_1,y_2,...,y_n)$ se satisfà. Sigui K una classe arbitrària finita i sigui K_1 la classe de tots els valors de $\langle y_1,y_2,...,y_n \rangle$ corresponents a les possibles seqüències $\langle x_1,x_2,...,x_m \rangle$ en K. Sigui $K' = K_1 \cup K$. Llavors K' és finita.

Lema 2: Sigui $\Re$ un relatiu $m+n$-ari amb les mateixes característiques que abans i sigui Θ la intersecció de totes les classes X amb les dues propietats següents:

1. $a \in X$
2. Per a tota seqüència $\langle x_1,x_2,...,x_m \rangle$ de X, $\langle y_1,y_2,...,y_n \rangle$ també està inclosa en X (on $\langle y_1,y_2,...,y_n \rangle$ és tal que $\Re(x_1,x_2,...,x_m,y_1,y_2,...,y_n)$ es satisfà).

Llavors Θ és una classe finita o infinita numerable.

El primer lema és obvi i no cal que ens hi aturem. Per demostrar el segon lema, Skolem considera K, K_1, K' com en el lema anterior i una classe de classes Φ tal que:

1. $\{a\} \in \Phi$
2. $K \in \Phi \rightarrow K' \in \Phi$.

Com que el pas de K a K' és una funció injectiva, es té com abans, que la seva intersecció A és una cadena de Dedekind i, per tant, A és finita o infinita numerable. A més, pel lema 1, tot element de A és finit i, per tant, la suma de totes les classes que en són elements, que Skolem anomena SA, ha de ser finita o infinita numerable. Així doncs, si hom demostra que $\Theta = SA$, ja haurà acabat. Que $SA \subseteq \Theta$ és clar, donat que $\{a\} \in \Theta$ i si $K \in \Theta$ també hi pertany K'. Recíprocament, $\Theta \subseteq SA$ donat que $a \in SA$ i si hom agafa arbitràriament $x_1, x_2, ..., x_m$ de SA, llavors donat que $\{a\} \subseteq \{a\}', \{a\}' \subseteq \{a\}'', ...$, existirà un element K de A que contingui tot $x_1, x_2, ..., x_m$. Aleshores com que tot y de la seqüència $y_1, y_2, ..., y_n$ pertany a K', que és el successor de K en A, es té que aquests ys son també de SA. Així doncs, d'acord amb la definició de Θ, $\Theta \subseteq SA$, tal com es volia demostrar.

Sigui ara una proposició de la forma

$$\forall \chi \exists \psi \alpha(\chi, \psi),$$

on $\chi = \langle x_1, ..., x_m \rangle$ i $\psi = \langle y_1, ..., y_n \rangle$ i suposem que aquesta proposició és satisfeta en un domini donat per una determinada assignació de valors a les constants de relació que figuren en α. Per l'axioma d'elecció, per a cada seqüència χ de variables, hom pot triar-ne una d'entre totes les seqüències ψ que fan vertadera $\alpha(\chi, \psi)$ en el domini. Sigui $\langle \psi_1, ..., \psi_n \rangle$ el conjunt d'aquestes seqüències. Llavors

$$\alpha(\chi, \psi_1, ..., \psi_n)$$

se satisfà per cada seqüència χ i és una relació amb les propietats considerades en els lemes anteriors. Per tant, si a és individu del domini i Θ és la intersecció de totes les classe X que (*i*) contenen a com element i (*ii*) contenen $\psi_1, ..., \psi_n$ sempre que contenen χ, llavors Θ és una classe finita o infinita numerable i, a més,

$$\alpha(\chi, \psi_1, ..., \psi_n)$$

se satisfà per cada seqüència χ en Θ, pertanyent també $\psi_1, ..., \psi_n$ a Θ des del moment que hi pertany χ.

8. El mètode de desenvolupament de Schröder i les funcions de Skolem

Tal com hem explicat en la secció tercera, per transformar una fórmula del tipus $\Pi\,\Sigma$ en una altra equivalent del tipus $\Sigma\,\Pi$, Löwenheim empra l'equació:

$$\prod_i \sum_k A_{ik} = \sum_{k_\lambda} \lambda \prod_i A_{ik_i}, \qquad (1)$$

Tal com explicàvem allí, $\sum_{k_\lambda} \lambda$ és un quantificador λ-múltiple, on λ representa la cardinalitat del domini i, per tant, en el cas que aquest sigui infinit, llavors $\sum_{k_\lambda} \lambda$ representa una successió infinita de quantificadors. A partir d'aquí havíem conclòs que $\sum_{k_\lambda} \lambda$ representa l'equivalent notacional en Löwenheim del "misteriós operador" de Schröder $\Pi_\iota(\Sigma_{m_\iota})$ i que l'equació (1) de Löwenheim és equivalent a l'equació de Schröder:

$$\Pi_i\, \Sigma_m f(i,m) = \Pi_\iota(\Sigma_{m_\iota})\ \Pi_i f(i,m_\iota),$$

la qual està en la base del seu famós *mètode de desenvolupament*, a través del qual aquest autor transformava una fórmula del tipus $\Pi\,\Sigma$ en una altra equivalent del tipus $\Sigma\,\Pi$. El problema és, tal com ja havíem explicat, que la definició de $\sum_{k_\lambda} \lambda$ com un quantificador múltiple, on el nombre de quantificadors depèn de la cardinalitat del domini, fa que totes les expressions del tipus

$$\sum_{k_\lambda} \lambda \prod_i A_{ik_i}, \qquad (2)$$

obtingudes en aplicar l'equació (1) en un domini infinit, violin clarament el primer requisit inclòs en la definició de *Relativausdrück*, segons el qual el nombre de quantificadors que ocorren en una fórmula d'aquesta mena ha se ser finit. Això és important perquè, com ja sabem, l'equació (1) juga un paper essencial per transformar una fórmula qualsevol de primer ordre en una fórmula en forma normal equivalent a ella i, per tant, per la demostració que duu a terme Löwenheim del seu conegut teorema. Aquest detall no ha passat desapercebut a la majoria dels historiadors de la lògica. Així, per exemple, Van Heijenoort ha observat que:

> En la forma normal de Löwenheim, el nombre de quantificadors existencials depèn del nombre d'individus del *Denkbereich*. Per dominis de diferents cardinalitats, la fórmula original es reemplaçada per fórmules diferents; per dominis infinits, hi ha un nombre infinit de quantificadors i la fórmula és reemplaçada pel que ara s'anomena una expressió infinitament llarga, la qual ja no satisfà la pròpia definició de Löwenheim de *Zählausdruck*.[1]

El conegut historiador de la lògica G. Moore diu exactament el mateix:

> Per començar la seva demostració, [Löwenheim] va mostrar que tota expressió de primer ordre es pot transformar en una altra d'equivalent en forma normal i en la qual tots els quantificadors precedeixen els universal. Amb tot, aquesta seqüència de quantificadors pot ser infinita -amb un d'aquests quantificadors per a cada element en el domini sota consideració.[2]

I, una mica més avall, afirma que:

> [Löwenheim] desenvolupa una lògica infinitària com un afegit a la lògica de primer ordre i empra aquesta lògica infinitària .[3]

De fet, aquestes opinions es poden retrotreure a Skolem, el qual afirmà en diversos articles que una de les dificultats principals que presentava la demostració de Löwenheim era l'ús d'expressions infinitament llargues. Així, per exemple, en l'article "Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begründung der Mengenlehre" de 1922, escriu que:

> La demostració de Löwenheim és innecessàriament complicada i ho és d'una forma certament essencial, perquè raona amb subíndexs que provenen del desenvolupament de sumes o productes lògics infinits, amb la qual cosa esdevenen expressions amb un nombre infinit no numerable de termes. Així doncs, ha de fer, per dir-ho, una excursió pel no numerable.[4]

---

[1] *Van Heijenoort 1967*, 229-30.
[2] *Moore 1980*, 101.
[3] *Ibid*., 101.
[4] *Skolem 1922*, 140 (*Van Heijenoort 1967*, 293).

Així doncs, segons aquests autors, Löwenheim hauria emprat expressions lògiques "amb un nombre infinit no numerable de termes" (Skolem), és a dir, "expressions infinitament llargues" (Van Heijenoort) i, en definitiva, hauria desenvolupat una "lògica infinitària per demostrar el teorema de Löwenheim-Skolem per a la lògica de primer ordre" (Moore). En general, tots aquests comentaris coincideixen a considerar que, donat que $\sum_{k_\lambda} \lambda$ representa un quantificador múltiple, llavors (2) és un esquema de fórmules que dóna lloc a fórmules diferents segons la cardinalitat del domini que es consideri. Aquesta interpretació es basa, en primer lloc, en el fet que el mateix Löwenheim afirma explícitament que $\sum_{k_\lambda} \lambda$ és una "suma *n*-ària" i, en segon lloc, en el fet que, per explicar el significat de (2), Löwenheim fa la seva expansió en termes de la suma i el producte, la qual dóna lloc a una expressió suposadament infinita -tal com semblen indicar els punts suspensius amb què acaba l'expressió. Ara bé, com ja sabem, les estipulacions de Löwenheim relatives a les fórmules de primer ordre prohibeixen explícitament les expressions amb un nombre infinit de quantificadors -i això és precisament el que obtenim quan interpretem (2) com un esquema de fórmules i el domini és infinit- i el desenvolupament o expansió dels quantificadors a partir dels signes + i · -que donen lloc a expressions infinitament llargues quan el domini és infinit. Ara bé, des del nostre punt de vista, aquestes prohibicions fan inversemblant la interpretació de (2) com un esquema de fórmules i, conseqüentment, l'ús de expressions infinitament llargues i, encara menys, l'atribució a Löwenheim del "mèrit" d'haver desenvolupat una lògica de tipus infinitari. És veritat que Löwenheim afirma explícitament que $\sum_{k_\lambda} \lambda$ és una suma *n*-ària, però és plausible pensar que, en afirmar això, Löwenheim no volgués dir exactament que $\sum_{k_\lambda} \lambda$ és o representa un quantificador múltiple, sinó que *significa* el mateix que un quantificador múltiple. Des d'un punt de vista semàntic, una suma *n*-ària representa una successió d'elements del domini i, per tant, és plausible pensar que quan Löwenheim afirma que $\sum_{k_\lambda} \lambda$ representa una suma *n*-ària, el que vol dir en realitat és que $\sum_{k_\lambda} \lambda$ representa una successió d'elements del domini considerat. De fet, tal com ha afirmat Badesa, està clar que per qualsevol domini D i qualsevol solució S en D (3):

$\sum_{k_\lambda} \lambda \prod_i A_{ik_i}$ és vertadera amb S en D si, i només existeix una successió $\{k_a : a \in D\}$ d'elements de D, tal que per tot $a \in D$, $A(a, k_a)$ és vertadera amb S en D.[1]

No hi ha dubte que Löwenheim interpretava (2) en aquest sentit i, per tant, és possible que veiés (2) més aviat com una fórmula la interpretació de la qual ve determinada per (3), que no pas com un esquema de fórmules. D'una altra banda, és evident que Löwenheim no podia explicar (2) a partir de (3), perquè això requereix distingir clarament la sintaxi de la semàntica, cosa que Löwenheim no fa. Aquesta manca de distinció entre sintaxi i semàntica explica també, des del nostre punt de vista, el recurs que fa Löwenheim a les expansions per tal d'explicar el significat dels quantificadors. En poques paraules: les expansions són l'únic recurs del qual disposa Löwenheim per expressar la semàntica dels enunciats quantificacionals i, per tant, la finalitat de l'expansió que Löwenheim fa de l'equació (1) és explicar el significat d'aquesta equació. De fet, tal com hem vist, en escriure aquesta expansió, Löwenheim adverteix que ho fa de forma excepcional i en contra de les estipulacions, la qual cosa mostra que no s'ha d'entendre (1) com un esquema de fórmules. Aquest recurs a les expansions per tal d'explicar la semàntica dels quantificadors ja l'havíem trobat a Peirce. Tal com hem vist anteriorment, en efecte, per explicar la semàntica dels enunciats quantificacionals $\Sigma_i x_i$ i $\Pi_i x_i$, Peirce posa les igualtats $\Sigma_i x_i = x_i + x_j + x_k +$ etc i $\Pi_i x_i = x_i x_j x_k$, etc, però adverteix tot seguit que "$\Sigma_i x_i$ i $\Pi_i x_i$ són només similars a una suma i un producte, no són estrictament d'aquesta naturalesa, perquè els individuals de l'univers podrien ser innumerables" (*ja citat*: *Cf. supra* cap. II, § 10). Aquestes precaucions foren oblidades per Schröder, el qual operava amb sumes i productes infinits -numerables i no numerables- per obtenir la forma normal d'una fórmula qualsevol, la qual cosa el dugué a extrapolar les regles per a la suma i el producte al cas infinit (*Cf. supra*, cap. III, § 9). Això, tal com hem explicat en la primera secció d'aquest capítol, fou observat per Löwenheim en una ressenya sobre Schröder i el dugué a afirmar que "les regles per calcular amb sumes infinites de proposicions han de demostrar-se". En aquest sentit, és força significatiu que Löwenheim (*i*) no intentés demostrar la fórmula (1), la demostració de la qual per part de Schröder devia considerar incorrecte o, com a mínim, injustificada, i (*ii*) que quan vol aclarir el significat d'aquesta expressió, apel·li a les expansions però adverteixi al mateix temps que l'ús de les expansions és il·lícit perquè, tal com hem vist, porta a expressions que no s'ajusten

[1] *Badesa 1991*, 115.

a la definició de *Zälhausdruck* i, per tant, no es poden considerar correctament formades. En definitiva, al nostre entendre, en prohibir les successions infinites de quantificadors i les expansions, Löwenheim volia evitar els problemes que planteja operar amb sumes i productes infinits de termes i, en particular, la manca de justificació de les lleis que regules l'ús d'aquesta mena d'operacions. El problema és que Löwenheim obté la seva forma normal seguint pràcticament al peu de la lletra el mètode de desenvolupament de Schröder i això comporta no només l'ús de subíndexs dobles, sinó també el recurs a la interpretació algèbrica dels quantificadors a l'hora de justificar aquest procediment amb tot el que això comporta: recurs a les expansions, expressions finitament llargues, etc. En definitiva, Löwenheim no només segueix molt lligat als interessos de Schröder -condensació, reducció del càlcul de relatius d'ordre superior al càlcul de relatius binari, *schröderització*, etc- sinó també als seus mètodes de raonament -dobles subíndexs, mètode de desenvolupament, etc-, la qual cosa fa que apareguin en el seu article, encara que sigui com un recurs *ad hoc*, les expressions infinitament llargues. Per contra, en l'obra de Skolem trobem una major distancia respecte a l'obra de Schröder. Tal com hem explicat, en efecte, l'objectiu de Skolem és, en bona mesura, demostrar el teorema de Löwenheim sense apel·lar als dobles subíndexs i a les expressions infinitament llargues, la qual cosa aconsegueix gràcies a les funcions de Skolem i a la seva forma normal per a la satisfactibilitat. D'una altra banda, tal com ja havíem assenyalat, encara que Skolem segueix també molt de prop la notació de Schröder, el veritable objecte d'estudi del seu article de 1920 són els enunciats de primer ordre [*Zählaussage*] i no pas les equacions de primer ordre [*Zählgleichungen*] i, a més, la interpretació algèbrica de les expressions del llenguatge desapareix completament del seu article i apareix en el seu lloc exclusivament la interpretació proposicional o lògica. Això és important, des d'un punt de vista històric, perquè quan parlem avui en dia de la teoria de la quantificació o de la lògica de primer ordre, no fem referència exclusivament a un llenguatge o sintaxi, sinó també i de forma molt especial a una semàntica de tipus model-teorètic que, en definitiva, no és sinó un refinament de la interpretació proposicional que, tal com hem vist, era ja present en l'obra de Schröder i Löwenheim, encara que barrejada amb la interpretació algèbrica. Per tant, si bé correspon a Löwenheim el mèrit d'haver estat el primer en centrar l'atenció en un fragment de la lògica de relatius que coincideix essencialment amb la lògica de primer ordre moderna i en plantejar-se qüestions de tipus semàntic en referència a aquest fragment com ara la satisfactibilitat de les seves fórmules en dominis de diferent cardinalitat, el cert és que el seu lligam excessiu amb la notació i els mètodes de raonament propis de

Schröder, fan que Löwenheim no sigui capaç de veure la importància de la lògica de primer ordre ni dels resultats model-teorètics que ell mateix ha obtingut en relació aquesta. A més, com ha hem dit, Löwenheim barreja la interpretació algèbrica i la proposicional de la lògica de primer ordre i, per tant, en el seu article de 1915 no trobem encara una exposició clara de la semàntica de tipus model-teorètic de la lògica de primer ordre predominant avui en dia. En sentit estricte, el primer autor en la tradició algèbrica, que separa nítidament la lògica de primer ordre de la de segon ordre i en el qual trobem tots els elements essencials de la concepció model-teorètica dominant en la lògica actual és Skolem.

Un altra qüestió important, des d'un punt de vista històric, és la relació entre els índexs progressius de Löwenheim i les funcions de Skolem o, més genèricament, entre el procediment emprat per Schröder i Löwenheim per obtenir la forma normal i el procediment emprat per Skolem -anomenat avui en dia *skolemització*. Les referències de Skolem a aquesta qüestió són abundants. Ja hem vist en la secció cinquena d'aquest capítol que, per exemple, Skolem afirma tot just començar el seu article de 1920, que el mètode de "desenvolupament" schröderia emprat per Löwenheim per demostrar el seu teorema "és una mica enrevessat i fa que hom hagi d'introduir símbols d'individus com a subíndexs per als coeficients de relatiu" i que ell presentarà "una demostració més senzilla gràcies a la qual aquests subíndexs poden evitar-se". Tal com explicàvem allí i hem pogut comprovar en la secció anterior, aquesta demostració fa un ús essencial de la forma normal de Skolem per a la satisfactibilitat i del procediment de skolemització. I, encara d'una forma més clara, en l'article "Sur la porté du théorème de Löwenheim-Skolem" (*1941*), Skolem afirma que:

> La démonstration de Löwenheim est très penible a cause de l'usage des expressions logiques Π, Σ-d'après la notation de Schröder- avec un ensemble infini ou indeterminé de termes. Mais ses raisonnements peuvent être simplifiés si on utilise les "Belegungsfunktionen" (c'est-a-dire fonctions d'individus dont les valeurs sont des individus), en tenant en compte du fait qu'une proposition telle que
>
> $$(x_1)...(x_n)(Ey)A(x_1, ..., x_n, y)$$
>
> peut être transformée en
>
> $$(Ef)(x_1)...(x_n)A(x_1, ..., x_n, f(x_1, ..., x_n)).$$ [1]

[1] *Skolem 1970*, *455-56.*

En general, la majoria dels historiadors de la lògica han coincidit en veure en el procés de desenvolupament de Schröder i Löwenheim l'origen del procés de skolemització. Així, per exemple, Hao Wang ha assenyalat que:

> L'ús de les funcions de Skolem sembla retrotreure's als lògics de l'escola de Schröder, a la qual hi pertanyen Löwenheim i Korselt. Ells parlen d'una llei lògica (una llei distributiva) que, en notació moderna, afirma:
>
> $$\forall x \exists y A(x, y) \equiv \exists f \forall x A(x, f(x)).^{1} \qquad (4)$$

Anàlogament, Van Heijenoort ha afirmat que:

> Löwenheim obté la seva forma normal commutant un quantificador universal i un existencial mitjançant un procediment que manlleva de Schröder.[2]

Aquest procediment, continua Van Heijenoort, porta Löwenheim a l'equació (1). En explicar aquesta equació, Van Heijenoort afirma que, donat que "k_i és un índex progressiu (de fet, una funció de i)",[3] podem interpretar el quantificador $\sum_{k_\lambda} \lambda$ com un quantificador sobre funcions, i llavors l'equació (1) pot expressar-se, en notació moderna, a través de (4).[4] En un article posterior, Van Heijenoort escriu que, per demostrar el seu teorema, Löwenheim introdueix una "prefiguració de les funcions de Skolem (per tal d'obtenir la forma funcional per a la satisfactibilitat d'una fórmula)".[5] El lògic i historiador R. Vaught, per la seva part, afirma que en la demostració de Löwenheim trobem una "estranya manera de pensar en tractar el que avui en dia anomenaríem funcions de Skolem".[6] Veiem, doncs, que tots aquests autors reconeixen en el procediment de desenvolupament de Schröder, emprat per Löwenheim en el seu article de 1915, l'origen de les funcions de Skolem. Van Heijenoort, en concret, identifica *de facto* els índexs progressius de Löwenheim amb les funcions de Skolem, encara que en cap moment diu res sobre si el mateix Löwenheim veia els seus índexs progressius com termes funcionals. Goldfarb, en canvi, opina el següent:

---

[1] *Ibid.*, 27.
[2] *Van Heijenoort 1967*, 230.
[3] *Ibid.*, 230.
[4] *Cf. Ibid.*, 230.
[5] *Van Heijenoort 1977*, 184.
[6] *Vaught 1974*, 156.

> L'ús de funcions d'elecció [per part de Skolem] fou anticipat per Schröder (*1895*, §29) i per Löwenheim (*1915*) en introduir els subíndexs dobles en les equacions de relatiu. Encara que, en darrer terme, els subíndexs dobles representen funcions de l'univers, aquests autors no relacionaren la quantificació sobre els subíndexs dobles amb la quantificació (de segon ordre) sobre funcions.[1]

En la seva tesi doctoral, Badesa ha aportat arguments prou convincents a favor de l'opinió de Goldfarb segons la qual ni Schröder ni Löwenheim associarien el procediment per canviar l'ordre dels quantificadors amb la quantificació sobre funcions i, en particular, els índexs progressius amb termes funcionals. Tal com ha afirmat Badesa:

> La supuesta evidencia de que [los índices progresivos] son términos funcionales se encuentra casi con seguridad en el significado de (2). Ya he dicho que (3) formulaba la semàntica apropiada para ella y que todos los comentaristas estarían de acuerdo en este punto. Puesto que en (3) se afirma la existencia de una sucesión y las sucesiones son funciones, se concluye que $\sum\limits_{k_i}$ es cuantificador funcional i k_i un término funcional. Esta es la explicación de que todos los comentaristas vean en (2) el origen del concepto de función de Skolem.[2]

Amb tot, tal com observa el mateix Badesa, "és possible adoptar una precisió de (3) que no obliga a tractar els índexs progressius com termes funcionals"[3] i que, per tant, no força a una interpretació de $\sum\limits_{k_i}$ com una quantificador sobre funcions. En qualsevol cas, independentment de com veiessin Schröder i Löwenheim els índexs progressius, està clar des d'un punt de vista modern que, en la mesura que les successions són funcions, els índexs progressius es poden veure com termes funcionals i que el mètode de desenvolupament de Schröder i Löwenheim es pot considerar una prefiguració del procés de skolemització. Per tant, la majoria dels historiadors han atribuït correctament a (1) l'origen del procés de skolemització i a (2) el del concepte de funció de Skolem. Altrament, la insistència del mateix Skolem en comparar l'ús de les "Belegungsfunktionen" i el procediment de

---

[1] *Goldfarb 1979*, 357, n. 12.

[2] *Badesa 1991*, 135. Evidentment, $\sum\limits_{k_i}$ és una altra forma d'escriure $\sum\limits_{k_i} \lambda$.

[3] *Ibid.*, 136. Badesa especifica aquesta precisió en l'apèndix de la seva tesi doctoral, en el qual reconstrueix tota la demostració de Löwenheim en el marc del que l'autor anomena una "lògica de primer ordre amb índexs progressius".

skolemització amb l'ús dels índexs progressius i el mètode de desenvolupament de Schröder i Löwenheim no tindria gaire sentit.

Tal com hem vist en la secció anterior, la simplificació que obté Skolem gràcies a aquest procediment és molt notable. Per exemple, en el cas d'una proposició en forma normal el més senzilla possible com ara:

$$\forall x \exists y a(x, y),$$

la qual se suposa que és satisfactible en un cert domini A, Skolem pot triar, gràcies a l'*axioma d'elecció,* un únic element x' d'entre tots els ys per als quals $a(x, y)$ és vertadera per qualsevol x. Així, en A se satisfarà:

$$\forall x \exists x' a(x, x').$$

Sigui ara $a \in A$, llavors Skolem considera les classes $X \subseteq A$ tals que (*i*) $a \in X$ i (*ii*) $x' \in X$ sempre que $x \in X$. Aquestes classes X són cadenes que contenen a a i, per tant, la seva intersecció $X_0 = \bigcap X$ serà la cadena de a. Aquest conjunt X_0 és un conjunt simplement infinit d'acord amb la definició 71 donada per Dedekind a *Was sind* i, pel teorema 132 de la mateixa obra, és semblant a N (*Cf. supra*, cap. IV, § 6). A més, òbviament, en X_0 se satisfarà $\forall x \exists x' a(x, x')$. El recurs explícit en el raonament anterior a l'axioma d'elecció de Zermelo i a la teoria de les cadenes de Dedekind mostra que Skolem estava al corrent dels més recents desenvolupaments en teoria de conjunts i que havia comprés perfectament la seva importància. Per contra, Löwenheim, tot i la correspondència que mantingué amb Zermelo, no sembla haver-se adonat de la importància de l'axioma d'elecció per tal d'extrapolar raonaments que son vàlids en conjunts infinits al cas infinit, com ens ho mostra el fet que no sigui capaç de veure la utilitat d'aquest axioma per demostrar la llei de desenvolupament de Schröder. Tal com explicàvem al final de la secció tercera d'aquest capítol, l'equació (1) no està justificada en el cas que el domini sigui infinit i tant en aquest cas com en el de la equació (4), el seu equivalent notacional en termes funcionals, la seva demostració en el cas infinit requereix l'ús de l'axioma d'elecció. De fet, tal com vèiem en la secció quarta, Löwenheim també estén injustificadament un raonament que és vàlid en el cas finit al cas infinit al final de la seva demostració, quan infereix a partir de la satisfactibilitat de Q_n per cada n, la satisfactibilitat de $\{Q_1, Q_2, Q_3, ...\}$. Tot això no vol dir òbviament que Löwenheim no fos conscient d'aquesta problemàtica, car tal com ja sabem, ell mateix havia advertit en relació al càlcul de dominis de Schröder que "les regles per calcular amb sumes infinites de proposicions han de demostrar-se", donat que "ja en el càlcul de dominis, l'extensió dels axiomes i demostracions a productes i sumes infinits és absolutament necessària, car altrament seria incapaç de les aplicacions més importants" (*ja citat*: *Cf. supra*, cap. VII, § 1). En qualsevol cas, el fet que Löwenheim no intentés demostrar l'equació (1), la qual constitueix la base del mètode de desenvolupament de Schröder i que aquest mateix autor no va ser capaç de demostrar en el cas infinit, sembla indicatiu que Löwenheim no sabia tampoc com demostrar aquesta equació i, en general, com justificar les regles relatives a productes i sumes infinites de proposicions que, tal com ell mateix reconeix, són necessàries per a la majoria d'aplicacions importants en el camp de la lògica.

Remarquem finalment que, tal com hem pogut veure en el desenvolupament de la demostració de Skolem, l'ús de les funcions de Skolem i el consegüent procés de skolemització, així com el recurs a l'axioma d'elecció, són posteriors a l'obtenció de la forma normal -recordem que una fórmula està en forma normal de Skolem si és de la forma $\Pi\Sigma F$ i que per a la seva obtenció no es requereix l'axioma d'elecció. Per contra, en el cas de la demostració de Löwenheim, l'obtenció de la forma normal -recordem que una fórmula està en forma normal de Löwenheim si és de la forma $\Sigma\Pi F$- es realitza mitjançant l'equació (1) o, el que és el mateix, el mètode de desenvolupament de Schröder, la demostració de la qual requereix l'axioma d'elecció. A més, tal com hem explicat al final de la secció quarta, aquest axioma es necessari també en el que hem anomenat el nucli de la prova, donat que aquí Löwenheim demostra un cas particular del lema d'infinitud, per a la demostració del qual usa implícitament l'axioma d'elecció dependent. Per contra, tal com hem explicat en la secció anterior, Skolem donarà una nova demostració del teorema de Löwenheim en l'article de "Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begründung der Mengenlehre" de 1922 que no requereix l'axioma d'elecció. De fet, la demostració de Skolem en aquest article és molt semblant a l'original de Löwenheim, però amb les modificacions necessàries per evitar l'ús de l'axioma d'elecció que són bàsicament: l'ús de la forma normal de Skolem per a la satisfactibilitat en comptes de la forma normal de Löwenheim i la consideració, per cada nivell k, del conjunt de solucions de nivell k, en comptes del conjunt de fórmules satisfactibles de nivell k, tal i com havia fet Löwenheim. Però l'anàlisi d'aquest article i de la demostració que en ell duu a terme Skolem del teorema de Löwenheim-Skolem queda fora de l’abast del nostre estudi, donats els límits que ens autoimposat en ell i que hem explicat en la Introducció.

CAPÍTOL VIII

El mètode axiomàtic de Hilbert: la gènesi de les qüestions metalògiques i el desenvolupament de la teoria de conjunts

1. El context geomètric

El desenvolupament al llarg del segle XIX de geometries diferents de la geometria euclidiana -en particular, la geometria no euclidiana de mans de Lobačevskij i Bolyai, la projectiva per part de Poncelet i la no arquimediana per part de Veronese- plantejà la necessitat d'una organització deductiva dels coneixements geomètrics que permetés veure les connexions lògiques entre les noves geometries i la geometria euclidiana. Aquesta necessitat fou satisfeta en bona mesura per l'obra de David Hilbert (1862-1943) *Grundlagen der Geometrie* (*1899*), l'estudi de la qual és l'objecte de la secció següent. En aquesta secció farem una breu ressenya històrica del desenvolupament de la geometria no euclidiana, la qual ens servirà d'exemple per conèixer la mena de problemes que són a l'origen de l'obra de Hilbert i, en definitiva, per posar aquesta obra en el seu context geomètric. I, per això, haurem de referir-nos primer de tot, encara que sigui breument, a la geometria euclidiana i al seu axioma més conegut, l'anomenat *postulat d'Euclides*.

Euclides treballà a Alexandria durant el regnat de Ptolemeu I com a cap del Museu, que havia estat fundat feia poc. La seva obra, els *Elements* (300 a. de C., ca.) està constituïda per trenta llibres en els quals l'autor recollí bona part dels coneixements matemàtics obtinguts pels grecs al llarg dels segles V i IV a. de C: els treballs aritmètics dels pitagòrics, la teoria de la semblança i de les raons -"ratios"- d'Èudox, així com el seu mètode d'exhaustió, etc. Els *Elements* foren escrits per Euclides prenent com a punt de referència la teoria de la ciència d'Aristòtil, per la qual cosa en el llibre primer trobem una llista d'enunciats sense demostrar, classificats en tres grups: 1. *definicions*, 2. *postulats* i 3. *nocions comunes*, [1] a partir dels quals es demostren lògicament els teoremes més importants de la geometria plana -el mètode de demostració preferit per Euclides és la demostració indirecta o

[1] Els postulats i nocions comunes només apareixen al començament del primer llibre, mentre que les noves definicions precedeixen la majoria de la resta de llibres dels *Elements*.

reducció a l’absurd. Pel que fa la teoria del paral·lelisme, cal destacar, en primer lloc, la definició 23:

> Dues línies són paral·leles si estan en el mateix pla i, tot i això, si hom les perllonga indefinidament per ambdós costats, mai no es troben l’una amb l’altra.[1]

En segon lloc, cal destacar el cinquè postulat, el famós *axioma de les paral·leles* o *postulat d’Euclides*:

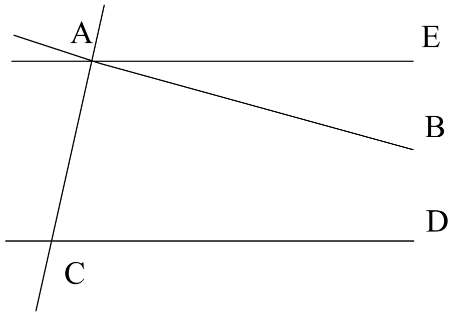
> Si una línia recta, en tallar dues línies rectes, determina que els angles interiors sorgits així en un mateix costat, siguin menors que dos angles rectes, llavors les dues línies rectes es trobaran, en ser perllongades indefinidament, en el costat on hi ha els angles que junts són menors que dos angles rectes.[2]

Se segueix d’aquest postulat que, donada una recta, hi ha com a molt una altra recta que passa a través d’un punt exterior a la primera recta i no la talla (la qual cosa, curiosament, Euclides no demostrà). D’aquí que el cinquè postulat d’Euclides s’enunciï sovint en els termes següents:

> Donada una recta i un punt que no està sobre aquesta recta, hi ha una sola recta que conté aquest punt i és paral·lela a la recta donada.

Aquesta formulació ja és present a la geometria grega, però la va popularitzà John Playfair (1748-1819) a “Elements of Geometry” (1795), un compendi molt emprat durant la primera meitat del segle XIX. De fet, tal com veurem més endavant, Hilbert també formularà el postulat d’Euclides essencialment en els mateixos termes. Per veure la connexió intuïtiva entre la definició de paral·lelisme i l’axioma de les paral·leles és suficient observar que, en la següent figura:[3]

[1] *Euklid 1973*, 3.
[2] *Ibid.*, 4.
[3] *Rosenfeld 1988*, 36.



els angles $B\hat{A}C$ i $A\hat{C}D$ junts són menors que dos angles rectes i, d'acord amb el postulat d'Euclides, les línies AB i CD es tallaran en ser perllongades indefinidament, mentre que si les línies AE i CD són paral·leles, llavors el postulat d'Euclides ens assegura que els angles $E\hat{A}C$ i $A\hat{C}D$ junts són iguals a dos angles rectes.

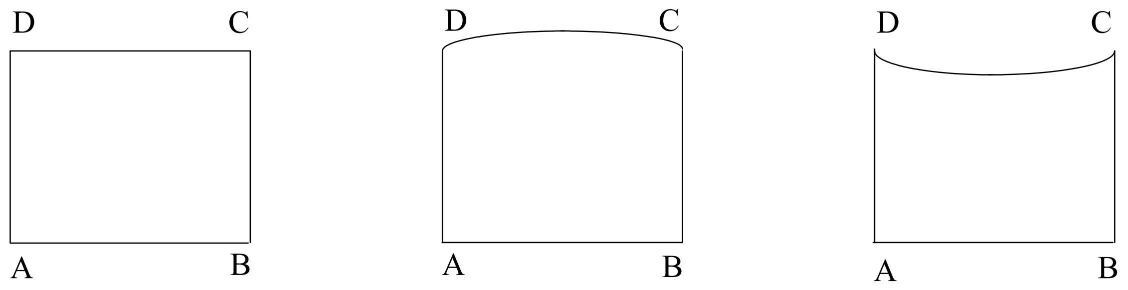
La suposada manca d'evidència intuïtiva de l'axioma de les paral·leles i el fet que en la seva formulació no hi figurés cap noció que no aparegués en els axiomes anteriors, va fer que molts autors intentessin demostrar-lo a partir de la resta d'axiomes, és a dir, intentessin demostrar, com diríem avui en dia, que és una conseqüència lògica dels altres axiomes. Ja en l'antiguitat es donaren diversos intents de demostrar el postulat d'Euclides, entre els quals destaquen els intents d'Arquimedes, Ptolemeu i Proclus. Aquests intents foren continuats en l'època bizantina per Aghanis i Simplicius, que havia estat deixeble de Proclus. Tant els *Elements* d'Euclides com els intents de demostrar el postulat de les paral·leles per part dels autors bizantins foren traduït a l'àrab pel matemàtics islàmics al començament de l'edat mitjana, la qual cosa va permetre que matemàtics com ara Al-Gauhari, Thabit ibn Qurra, Ibn al-Haytham, Omar Khayyam i, sobretot, Nasir Eddin al-Tusi, continuessin els intents dels matemàtics grecs i bizantins per demostrar el postulat d'Euclides. La traducció en el renaixement de les versions àrabs dels textos dels matemàtics grecs i les publicacions en grec i llatí dels textos originals van crear un renovat interès en la geometria i, en particular, en el problema de les paral·leles. Així, tal com havia esdevingut en l'antiguitat i al llarg de l'edat mitjana, se succeïren d'ençà el renaixement i fins a mitjans del segle XIX nombrosos intents fallits de demostrar el postulats de les paral·leles. Entre aquests intents cal destacar els de J. Wallis (1616-1703), G. Saccheri (1667-1733), J. H. Lambert (1728-1777) i A. M. Legendre (1752-1833). Potser l'intent més notable d'aquests fou el de Saccheri, el qual intenta provar el postulat d'Euclides per reducció a l'absurd. En el seu intent, Saccheri va aconseguir demostrar molts dels teoremes fonamentals de la geometria hiperbòlica, però no va ser capaç d’adonar-se del que realment havia fet i va acabar inferint una contradicció on en realitat no n’hi havia cap. Per negar el cinquè postulat d’Euclides, Saccheri considera un quadrilàter ABCD amb angles rectes a A i B, anomenat avui en dia *quadrilàter de Saccheri*. Si anomenem γ i δ als angles C i D respectivament, llavors Saccheri demostrà que:

Si $AD = BC$, llavors $\gamma = \delta$.

Saccheri considera llavors les tres possibilitats següents:

(i) $\gamma = \delta = 90^{\circ}$,
(ii) $\gamma = \delta > 90^{\circ}$,
(iii) $\gamma = \delta < 90^{\circ}$,

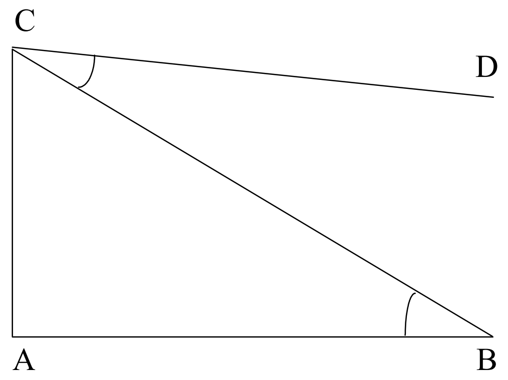
que es corresponen amb les tres figures següents:



Les tres possibilitats anteriors es coneixen respectivament com la hipòtesi de l’angle recte (i), la hipòtesi de l’angle obtús (ii) i la hipòtesi de l’angle agut (iii). Les hipòtesis (ii) i (iii) neguen evidentment el cinquè postulat d’Euclides i, per tant, l’objectiu de Saccheri fou demostrar que d’ambdues hipòtesi se’n seguia una contradicció. Pel que fa a la hipòtesi (ii), Saccheri demostrà efectivament que era incompatible amb la proposició I.17 d’Euclides, la qual cosa el dugué a afirmar que “la hipòtesi de l’angle obtús és completament falsa, perquè es destrueix a si mateixa”.[1] Per demostrar el cinquè postulat d’Euclides només restava, doncs, demostrar que la hipòtesi (iii) era incompatible amb alguna de les hipòtesi inicials d’Euclides. Tal com hem dit abans, una manera de construïr línies que no es tallen és la

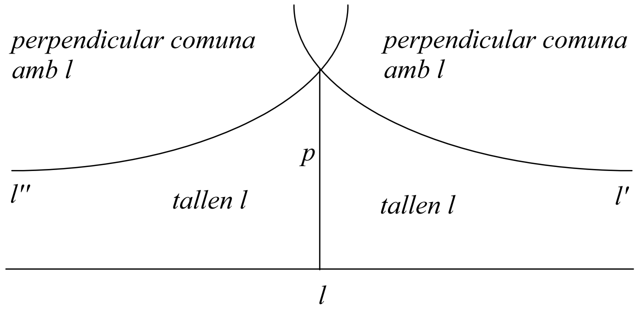
[1] Citat a *Rossenfeld 1988*, 98.

següent: Sigui ABC un triangle amb un angle recte a A. Si a C dibuixem CD de manera que $B\hat{C}D=A\hat{B}C$, llavors CD i AB no es tallen, tal com afirma el teorema I.27 d'Euclides. Aquest resultat també es vertader quan l'angle $A\hat{C}D$ és agut:

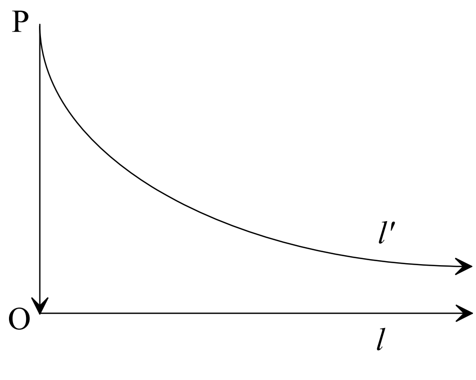


En un quadrilàter que satisfaci la hipòtesi de l'angle agut, els angles interiors a D i C poden ser (*i*) tots dos aguts, (*ii*) un recte i un agut i (*iii*) un agut i un obtús. En els primers dos casos, hi ha una perpendicular comuna a CD i AB, però en el tercer cas no necessàriament. Saccheri demostrà en efecte, que sota la hipòtesi de l'angle agut, dues línies rectes o bé es tallen o bé no es tallen i, en aquest darrer cas, o bé tenen un perpendicular comuna a ambdós costats de la qual divergeixen, o bé divergeixen en una direcció i convergeixen asimptòticament en l'altre (Props. XXIV, XXV). De fet, aquestes últimes constitueixen un límit superior de les línies que no tallen AB i un límit inferior de les que tenen una perpendicular comuna amb ella. Saccheri demostra, a més, que aquests dos límits són una i la mateixa línia (Prop. XXXII). En definitiva, Saccheri demostrà que sota la hipòtesi de l'angle agut, la família de línies a través d'un punt A, exterior a una línia *l*, conté dues línies *l'* i *l''* asímptotes a *l*, a l'esquerra i dreta de la perpendicular *p* dibuixada a partir de A, tals que cada una d'elles divideixen la família de línies a través de A en dues parts: la que queda per sota de *l'* i *l''* conté aquelles línies que tallen *l*, i la part que queda per sobre *l'* i *l''* que conté aquelles línies que no tallen *l* i tenen una perpendicular comuna amb *l*:[1]

[1] *Cf. Gray 1989*, 88.



La importància d'aquesta figura per al desenvolupament de la geometria no euclidiana rau en el fet que mostra l'existència de nombroses línies que passen a través d'un punt A exterior a una línia *l* i que, tanmateix, no tallen aquesta línia, és a dir, l'existència d'una geometria en la qual per cada recta hi haurà una munió de paral·leles. El primer que va albirar la possibilitat de desenvolupar una geometria no euclidiana fou C. F. Gauss (1777-1855). Però Gauss no va publicar les seves recerques i tot el que sabem ho coneixem a partir d'un parell de manuscrits no publicats, algunes notes privades i diverses cartes als seus amics. En el primer dels manuscrits abans esmentats, Gauss parteix de la figura de Saccheri o, millor dit, de la seva meitat dreta. Gauss només considera línies dirigides, és a dir, línies que s'estenen en una direcció a partir d'un punt determinat i defineix llavors les paral·leles tal com segueix: Donada una línia dirigida *l* a través de O i un punt *P* exterior a ella, llavors la línia dirigida paral·lela a *l* a través de *P* és la primera línia dirigida de la família de línies a través de *P* que no tallen: *l'* en la figura següent:[1]



La definició anterior és important perquè, per dir-ho així, mostra la nova perspectiva a partir de la qual autors com Gauss, Lobačevskij o Bolyai veieren la geometria euclidiana. En

[1] *Cf. ibid.*, 89.

el primer manuscrit abans esmentat, Gauss demostrarà a partir de la definició anterior les propietats característiques de les paral·leles: reflexivitat, simetria i transitivitat. En el segon manuscrit, Gauss s'endinsarà en la nova geometria resultant de la negació del postulat d'Euclides, la *geometria no euclidiana*, com ell mateix l'anomena per primera vegada. En el cas de la geometria euclidiana, hi ha dues famílies de línies: la família de línies a través d'un punt exterior a una línia i la família de línies perpendicular a una línia, la qual coincideix amb la família de les paral·leles. Però, en el cas de la geometria no euclidiana, les línies perpendiculars a una línia fixa no són paral·leles entre elles, sinó "ultraparal·leles" o "hiperparal·leles". Doncs bé, la tasca de Gauss consistí en determinar els *loci* corresponents a cada una d'aquestes famílies de línies: En el cas de les línies a través d'un punt i de les línies amb una perpendicular comuna, els *loci* coincideixen en el cas de la geometria euclidiana i no euclidiana, però en el cas de les línies paral·leles, el *locus* corresponent a la geometria no euclidiana és una figura nova, que Lobačevskij anomenarà desprès l'"horocicle" i que jugarà un paper molt important en el desenvolupament de la geometria no euclidiana a mans d'aquest autor; Gauss però no desenvolupà cap de les seves propietats.

Tal com dèiem abans, Gauss no va publicar res i tampoc no va intentar demostrar mai la no contradicció de la geometria hiperbòlica. Tot just al contrari del que van fer Nikolaj Ivanovič Lobačevskij (1793-1856) i János Boliyai (1802-1860), que només per això cal considerar-los els veritables creadors de la geometria no euclidiana. Lobačevskij i Bolyai van començar a atacar el problema de les paral·leles convençuts, com Saccheri o Lambert, que serien capaços de refutar definitivament les hipòtesis alternatives. Però tots dos van anar canviant d'opinió gradualment i l'any 1829 publicaren els primers escrits on es desenvolupa una geometria no euclidiana: János Bolyai en un apèndix al llibre del seu pare Farkas Bolyai (1775-1856), el *Tentamen* (1832); Lobačevskij en l'article "Sobre els principis de la geometria" (en rus), presentat aquell mateix any davant la divisió de ciències físico-matemàtiques de la universitat de Kazan en una conferència titulada "Una breu exposició dels principis de la geometria incloent una demostració rigorosa del teorema sobre les paral·leles" (en rus). Com que els resultats assolits per Bolyai i Lobačevskij són molt similars, encara que els obtinguessin de forma completament independent, ens referirem exclusivament a l'obra d'aquest últim. En l'article abans esmentat, després d'introduir els conceptes bàsics de la geometria que no depenen del postulat d'Euclides -la *geometria absoluta*, en termes de Bolyai-, Lobačevskij introdueix al costat de la geometria euclidiana una *geometria imaginària*, que resulta de la negació del postulat d'Euclides:

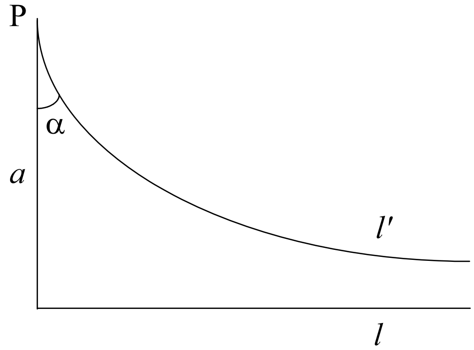
Hem vist que la suma d'angles en un triangle rectilini no pot ser $> \pi$. Cal assumir, doncs, que aquesta suma és $= \pi$ o $< \pi$. Aquestes dues possibilitats poden assumir-se sense que se'n segueixi cap contradicció i això dóna lloc a dues Geometries: una, d'*ús corrent* fins hores d'ara degut a la seva simplicitat, coincideix, de fet, amb totes les mesures; una altra, *imaginària*, més general i, per tant, més difícil en els seus càlculs, admet la possibilitat que les línies depenguin dels angles.

Si hom assumeix que la suma d'angles és π en un triangle rectangle, llavors ho serà en tots. Si, pel contrari, fem que sigui menor que π en un [triangle], llavors és fàcil demostrar que decreix a mida que els costats del triangle creixen.

Així doncs, dues línies no poden trobar-se en un pla si formen amb una tercera angles la suma dels quals és π. No es troben necessàriament en el cas que aquesta suma sigui $< \pi$, en la mesura que adoptem la hipòtesi addicional que la suma d'angles en un triangles és $< \pi$.

Així, en relació a una línia, totes les línies en el pla poden dividir-se en aquelles que es tallen i aquelles que no. Aquestes últimes s'anomenaran paral·leles (a aquelles línies) si representen un límit o, dit d'una altra manera, marquen, en relació a totes les línies que surten a partir d'un punt, la transició d'aquelles [línies] en una categoria a aquelles en l'altra.[1]

Una vegada exposada les bases de la geometria imaginària, Lobačevskij defineix l'angle de paral·lelisme. Donada una línia *l*, una perpendicular *a* respecte *l* i un punt P sobre *a* exterior a *l*, l'*angle de paral·lelisme* és l'angle entre la perpendicular *p* i la paral·lela *l'* a *l* -és a dir, la primera línia a través de P que no talla *l*:



[1] Citat a *Rosenfeld 1988*, 207.

Tal com ha assenyalat Rosenfeld, “en geometria euclidiana, aquest angle sempre és igual a $\frac{\pi}{2}$, però en la geometria de Lobačevskij és agut i és una funció de a. Lobačevskij denota aquí aquesta funció per $F(a)$, però en articles posteriors ho farà per $\Pi(a)$. És clar que

$$\lim_{a\to 0} \Pi(a) = \frac{\pi}{2} \qquad\qquad \lim_{a\to\infty} \Pi(a) = 0.$$

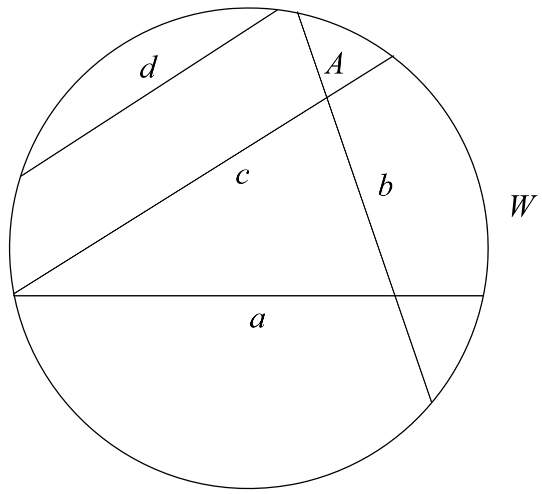
Lobačevskij estén aquesta funció a tots els valors reals de a posant $\Pi(0) = \frac{\pi}{2}$ i $\lim \Pi(-a) = \pi - \Pi(a)$ i mostra que, per tot angle A, agut o obtús, hi ha un valor a ($a > 0$, si A és agut i $a < 0$ si A és obtús) tal que $A = \Pi(a)$. Llavors Lobačevskij troba les fórmules trigonomètriques per als triangles rectilinis i esfèrics en el seu espai. En el primer cas, expressa aquestes fórmules mitjançant la funció $F(a)$. En el segon cas, aquestes fórmules coincideixen amb les fórmules de la trigonometria esfèrica en l’espai euclidià”.[1] Això últim és important, perquè mostra que les mesures dels triangles esfèrics no depèn del postulat de les paral·leles. D’una altra banda, Lobačevskij demostrà que les fórmules trigonomètriques per als triangles rectilinis en geometria no euclidiana s’obtenen a partir de les fórmules corresponents per als triangles esfèrics, multiplicant els costats del triangle per la unitat imaginària $\sqrt{-1}$. Això Lobačevskij ho considerà inicialment un argument a favor de la consistència de la seva geometria plana. Ara bé, tal com ha assenyalat Rosenfeld, l’únic que va fer Lobačevskij fou demostrar que les fórmules trigonomètriques de la seva geometria plana se seguien dels axiomes de la seva geometria, però per demostrar la consistència d’aquesta hom havia de fer tot just el contrari: demostrar que els axiomes de la geometria de Lobačevskij se segueixen de les seves fórmules trigonomètriques i dels axiomes de la geometria absoluta. Lobačevskij demostrà això en la seva obra *Geometria Imaginària*, però el seu argument no era encara concloent, perquè les fórmules de la trigonometria esfèrica, que impliquen que la suma d’angles en un triangles és més gran que π, contradiuen els axiomes de la geometria absoluta quan aquests són interpretats com axiomes de la trigonometria plana i, per tant, l’únic que va demostrar Lobačevskij fou la consistència interna de les seves fórmules trigonomètriques, però en cap cas la de la seva geometria plana.

El primer model de la geometria plana de Lobačevskij fou donat per Eugenio Beltrami (1835-1900) a *Saggio di interpretazione della geometria non euclidea* (1868). En aquest article, Beltrami va demostrar que la geometria de Lobačevskij es realitzava en les

---

[1] *Rosenfeld 1988*, 222.

superfícies de curvatura constant negativa, anomenades per ell mateix *superfícies pseudoesfèriques*. Podríem descriure el model de Beltrami en els termes següents. Considerem un cercle *W*, on cada punt dins *W* representa un punt hiperbòlic i cada línia representa una corda d'aquest cercle sense els seus punts finals. Si, a partir d'un punt *A* exterior a una corda *a* dibuixem les dues cordes que uneixen *A* i el final de *a*, llavors les dues cordes així obtingudes seran les línies paral·leles a *a*. Les cordes les línies de les quals es tallen a fora de *W* són les ultraparal·leles a *a*. Així, en la figura següent:[1]



a i *c* són paral·leles, mentre que *a* i *d* són ultaparal·leles.

2. Els fonaments de la geometria

En la secció anterior hem explicat que el desenvolupament al llarg del segle XIX de geometries diferents de la geometria euclidiana plantejà la necessitat d'una organització deductiva i, en definitiva, d'una reelaboració rigorosa de la geometria euclidiana. Entre aquests intents de fonamentar la geometria d'Euclides sobre bases més sòlides destaquen l'obra de Moritz Pasch (1843-1930): *Vorlesungen über neuere Geometrie* (1882) [*Lliçons de geometria moderna*], Giuseppe Peano (1858-1932): *Calcolo geometrico secondo l'*Ausdehnungslehre *di Grassmann preceduto dalle operazioni della logica*

[1] *Cf. Gray 1989*, 148.

deductiva (1888) i *I principii di geometria espositi* (1889), Mario Pieri (1860-1913): *Della geometria elementare comee sistema ipotetico deductivo* (1899) i David Hilbert (1862-1943): *Grundlagen der Geometrie* (*1899*) [*Els fonaments de la geometria*]. Tal com ha assenyalat Beth en la seva obra clàssica *The Foundations of Mathematics* (*1968*):

> Els estudis de Moritz Pasch (1882), Giusseppe Peano (1889), Giuseppe Veronese (1891), Mario Pieri (1898, 1908) i David Hilbert (1899), mostraren que Euclides, juntament amb els axiomes i postulats que esmenta explícitament, apel·la tàcitament a un bon nombre d'hipòtesis, una posició que, evidentment, no es pot admetre en una axiomatització realment rigorosa; aquestes hipòtesis fan referència especialment a les anomenades *relacions d'estar entre* (o relacions d'ordre). Com a resultat de la recerca moderna, s'han construït diferents sistemes d'axiomes per a la geometria plana, essent tots ells complets en el sentit que constitueixen una base suficient per a una derivació rigorosa dels teoremes clàssics d'aquest domini de les matemàtiques.[1]

Ara bé, és evident que l'axiomatització de la geometria d'Euclides duta a terme per Hilbert a *Grundlagen der Geometrie*, més enllà de fornir una reelaboració rigorosa de la geometria euclidiana, té com a objectiu principal possibilitar la demostració de la seva consistència i de la independència dels axiomes de les paral·leles i d'Arquimedes. Tal com hem vist en la secció anterior, en efecte, la demostració de la consistència de la geometria euclidiana era una qüestió urgent a l'època de Hilbert, car les diferents demostracions de la consistència de les geometries no euclidianes assumien aquest fet. Pel que fa a la importància de la demostració de la independència dels axiomes de les paral·leles i d'Arquimedes en relació a la gènesi de l'axiomatització de la geometria duta a terme per Hilbert en la seva obra de 1899, el mateix Hilbert reconeixerà en una carta a Frege que:

> Vaig ser portat necessàriament a bastir el meu sistema axiomàtic, car volia que fos possible entendre aquelles proposicions geomètriques que considerava els resultats més importants de les recerques geomètriques: que l'axioma de les paral·leles no és una conseqüència dels altres axiomes, i anàlogament per l'axioma d'Arquimedes, etc.[2]

---

[1] *Beth 1968*, 139.
[2] *Frege 1976*, 65.

De fet, el mètode axiomàtic constituïa per a Hilbert el mètode ideal per demostrar les connexions lògiques entre les diverses geometries que s'havien desenvolupat al llarg del segle XIX. Per això mateix, tal com s'encarregaren de remarcar ja il·lustres matemàtics coetanis dels anteriors, l'obra de David Hilbert constitueix un punt d'inflexió tan important en les recerques sobre els fonaments de la geometria i, en general, de les matemàtiques. Així, per exemple, Veblen afirmarà, a penes tres anys després de l'aparició de l'obra de Hilbert, que:

> Des de la seva aparició el 1899, l'obra de Hilbert *Els Fonaments de la Geometria* ha tingut una circulació més gran que qualsevol altre assaig modern en el domini de les matemàtiques pures.[1]

Per la seva banda, Poincaré afirmarà que l'obra de Hilbert:

> Ha fet donar a la filosofia de les matemàtiques un gran pas endavant, comparable a aquells deguts a Lobačevskij, Riemann, Helmholtz i Lie.[2]

Un cop explicats els motius que dugueren Hilbert a escriure *Grundlagen der Geometrie*, cal que fixem la nostra atenció en el desenvolupament pròpiament dit d'aquesta obra. Hilbert defineix a *Grundlagen der Geometrie* l'espai tridimensional euclidià com un domini d'elements de naturalesa arbitrària subdividit en tres sistemes diferents, els elements dels quals estan subjectes a determinades relacions que els axiomes s'encarreguen de descriure. L'obra comença, en efecte, amb la següent explicació o aclariment [*Erklärung*]:

> Considerem [*Wir denken*] tres sistemes diferents de coses: a les coses del primer sistema les anomenen *punts* i les designem amb les lletres A, B, C, ...; a les coses del segon sistema les anomenem *rectes* i les designem amb les lletres a, b, c, ...; a les coses del tercer sistema les anomenem *plans* i les designem amb les lletres $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$. Concebem [*Wir denken*] els punts, rectes i plans en determinades relacions recíproques i designem aquestes relacions mitjançant paraules com "estar sobre", "entre", "congruent", "paral·lel" i "continu"; la descripció precisa i, pels propòsits de

---

[1] *Citat a Ehrlich 1994*, xxiv.
[2] *Ibid*, xxiv.

les matemàtiques, completa, d'aquestes relacions s'obté mitjançant els axiomes de la geometria.[1]

Com és ben sabut, Euclides havia definit un punt com "allò que no té parts" i una línia com "allò que s'estén uniformement entre tots els seus punts", però no havia definit què significaven "part" i "estendre's uniformement entre". Així, només la intuïció espacial d'aquests termes podia ajudar a la comprensió dels conceptes anteriors, amb la qual cosa les definicions d'Euclides no contribuïen en absolut al rigor de la geometria. Hilbert, en canvi, no pretén definir "punt", "línia" o "pla", sinó que postula simplement l'existència de tres sistemes diferents d'elements arbitraris, que anomena "punts", "línies" o "plans", però que hagués pogut anomenar també "cadires", "taules" i "gerres de cervesa" -l'exemple és de Hilbert!- perquè allò important no és la naturalesa dels elements, sinó que aquests elements satisfacin els axiomes. D'una altra banda, si no hem de pensar els elements abans esmentats com objectes de la nostra intuïció espacial, tampoc no hem de pensar els axiomes com veritats referides a l'espai real. Segons Hilbert, en efecte, els axiomes, més enllà d'expressar evidències intuïtives, el que fan és determinar o *definir implícitament* les relacions fonamentals -"estar sobre", "entre", "congruent", "paral·lel", "continu"- entre els elements dels diferents sistemes. Hilbert no empra el terme *definició implícita*, l'origen del qual es remunta a Gergonne, però quan introdueix el segon i tercer grup d'axiomes diu que aquests grups d'axiomes *defineixen* [*definieren*] respectivament les relacions d'ordre (estar entre) i congruència. D'aquesta manera, Hilbert trenca tot lligam de la geometria amb l'espai real que no només per Euclides, sinó també per Pasch, Enriques, Veronese, Pieri o Klein, constituïa la font última d'on brollava la intuïció geomètrica. Amb Hilbert, d'una vegada per totes, la geometria esdevé una branca més de les matemàtiques pures, l'aplicabilitat de la qual a la realitat física planteja el mateix tipus de problemes que, posem per cas, l'anàlisi.

Com que hi ha cinc relacions fonamentals entre els elements dels diferents sistemes, hi haurà cinc grups de d'axiomes que definiran respectivament les relacions abans esmentades:

I, 1-8. Axiomes d'*incidència*
II, 1-4. Axiomes d'*ordre*
III, 1-5. Axiomes de *congruència*

[1] *Hilbert 1956*, § 1.

IV. Axioma de les *paral·leles*

V, 1-2. Axiomes de *continuïtat*

El primer grup d'axiomes defineix, en efecte, la relació d'*incidència* o "estar sobre": "un punt està sobre una línia", "una línia està sobre un pla" i "un punt està sobre un pla". El segon grup d'axiomes defineix la relació d'*ordre* o "estar entre": "un punt està sobre una línia entre dos punts". Aquesta relació, tal com remarcava Beth en el text citat més amunt, no apareix definida en l'obra d'Euclides, malgrat ser bàsica per demostrar la majoria de propietats de la geometria plana. Així, per exemple, és necessària per definir els conceptes de *segment* i *angle* i per distingir entre els punts *interiors* i *exteriors* d'un triangle. El tercer grup d'axiomes defineix la relació de *congruència* entre segments i angles, que és bàsica per introduir el concepte de *mesura*, essent la mesura un nombre real (longitud d'un segment o mesura d'un angle) associat amb un segment o angle. El concepte de mesura s'introdueix a partir de la relació de congruència estipulant que dos segments o angles tenen la mateixa mesura si, i només si, són congruents. El quart grup d'axiomes està format per un sol axioma, el famós cinquè postulat d'Euclides, que Hilbert enuncia així:

> IV. (Axioma d'Euclides): Sigui *a* una recta qualsevol i *A* punt exterior a *a*: llavors en el pla determinat per *a* i *A* hi ha com a molt una recta que passa per *A* i no talla a *a*.[1]

Hilbert defineix llavors aquesta recta com "la paral·lela a *a* per *A*". Potser semblaria més lògic que Hilbert hagués considerat la relació de paral·lelisme com una relació primitiva, tal com havia fet amb les relacions d'incidència, ordre i congruència. Però, tal com podem observar en l'enunciat de l'axioma anterior, la relació de paral·lelisme es pot definir en termes de la relació d'incidència i, de fet, el més habitual avui en dia és definir primer la relació de paral·lelisme de la manera indicada i enunciar després l'axioma d'Euclides. En realitat, el fet que es consideri l'axioma de les paral·leles apart de la resta d'axiomes és degut només a la seva importància històrica, sobretot en relació al desenvolupament de les geometries no euclidianes. L'últim grup d'axiomes, els anomenats axiomes de continuïtat [*Axiome der Stetigkeit*], permeten posar en una correspondència biunívoca els conjunt de punts d'una recta i el sistema dels nombres reals i, per tant, emprar els nombres reals per

[1] *Ibid*., § 7.

introduir les idees *mètriques* de longitud i mesura d'angles a partir de la relació de congruència. Aquestes idees són alhora essencials per l'estudi de la semblança de figures i de les àrees. El primer d'aquest grup d'axiomes és el següent:

> V, 1. (*Axioma de la mesura o axioma d'Arquimedes*): Si AB i CD són segments qualssevol, llavors hi ha sobre la recta AB un nombre de punts$A_1, A_2, ..., A_n$, tals que els segments $AA_1, A_1A_2, A_2A_3, ..., A_{n-1}, A_n$ són congruents amb el segment CD i B està entre A i A_n.[1]

Aquest és un enunciat geomètric del principi d'Arquimedes. En efecte, si assumim la idea de longitud i a és la longitud de AA_1 i b la longitud de AB, llavors podem enunciar l'axioma en la seva forma analítica més habitual:

> (*Principi d'Arquimedes*): Donats $a > 0$ i $b > 0$ arbitraris, llavors hi ha un nombre sencer positiu n tal que $na > b$.

Aquest axioma converteix el conjunt de punts d'una recta en un cos ordenat arquimedià -suposant definida la relació d'ordre de la forma habitual-, la qual cosa assegura que tots els punts d'una recta poden injectar-se en els reals -donat que es pot demostrar que tot cos ordenat arquimedià és una part del sistema dels nombres reals. Ara bé, podria ser que aquest conjunt de punts, tot i satisfer els axiomes anteriors (l'axioma d'Arquimedes inclòs), fos extensible amb l'afegit de nou punts, amb la qual cosa el conjunt de punts d'una recta ja no seria bijectable amb el sistema dels nombres reals i llavors hom no podria emprar aquests per mesurar segments i angles. La conseqüència immediata d'això és que, tal com ha observat Judson Webb en l'article "Tracking Contradictions in Geometry: The Idea of a Model from Kant to Hilbert" (*1995*), el sistema d'axiomes presentat per Hilbert en la primera edició de *Grundlagen der Geometrie* "no era complet, per exemple, era incapaç de demostrar

[1] Citat en l'article d'Arnold Schmidt "Zu Hilberts Grundlegung der Geometrie" (*1933*) (*Hilbert 1965 2*, 406), en el qual aquest autor reformula els axiomes de *Grundlagen der Geometrie* a partir de la formulació oferta per Hilbert en la setena edició d'aquesta obra. En el cas dels axiomes de continuïtat, la formulació que en fa Schmidt ens sembla més senzilla i intuïtiva que la que apareix en la setena edició de l'obra de Hilbert. La setena edició és la edició de referència de l'obra de Hilbert, car és l'última que va revisar el mateix autor, però nosaltres només hem pogut disposar de la vuitena edició en l'original alemany, que és una edició preparada per Bernays a partir de la setena.

que una recta amb punts a dins i a fora d'un cercle, ha de tallar aquest cercle" .[1] És necessari, doncs, afegir l'axioma següent:

> V, 2. (Axioma de completesa lineal) Els punts d'una recta formen un sistema que no és susceptible de cap extensió, amb la condició de conservar els axiomes I 1-2, II, III, V 1.[2]

És a dir: no és possible afegir a aquest sistema de punts altres punts, de manera que el sistema que s'obté per composició, satisfaci tots els axiomes enunciats. En altres paraules, aquest axioma assegura que l'espai euclidià caracteritzat pel sistema d'axiomes de *Grundlagen der Geometrie* -inclòs l'axioma de completesa- és un model maximal (no extensible) dels axiomes I-V,1. Aquest axioma no apareix en la primera edició de *Grundlagen der Geometrie*. La seva necessitat fou observada per primera vegada en l'article "Über den Zahlbegriff" (*1900$_a$*). Les edicions 2-6 de *Grundlagen* contenen la següent versió d'aquest axioma. "Els elements de la geometria: punts, rectes i plans, constitueixen un sistema d'objectes que no admeten cap extensió quan hom accepta els axiomes precedents". Un enunciat semblant a aquest és demostrat per Hilbert en la setena edició i posteriors (teorema 32).

En el capítol segon de *Grundlagen der Geometrie*, Hilbert demostrarà la *no contradicció* o consistència i la *independència* mútua dels axiomes anteriors. Per demostrar la *no contradicció* dels axiomes per a la geometria plana, Hilbert apel·la a un model aritmètic fornit per la geometria analítica. En la primera edició de *Grundagen*, Hilbert empra el sistema dels nombres algèbrics Ω obtinguts a partir del 1 per les quatre operacions elementals i l'operació $\left|\sqrt{1+n^2}\right|$, on n és un nombre prèviament donat. En aquest sistema, un punt serà representat per una parella de nombres (x,y), una dreta per les raons de 3 nombres $(u:v:w)$. La geometria analítica ordinària tradueix llavors les relacions fonamentals i demostra que els axiomes són satisfets: L'existència de l'equació $ux+vy+w=0$ permet expressar que el punt (x,y) *està sobre* la recta $(u:v:w)$, *i.e.* la relació d'*incidència*. Pel que fa a la relació d'*ordre* és suficient assenyalar que els nombres de Ω són tots reals i, per tant, és poden ordenar. En efecte, si $(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3),...$ són punts qualssevol d'una recta, llavors es poden ordenar de manera que els nombres $x_1,x_2,x_3,...$ i $y_1,y_2,y_3,...$ formin una successió creixent o decreixent. Finalment, la relació de *congruència* és definida pels grups de translacions i de

[1] *Hintikka 1995 (ed.)*, 15.
[2] *Hilbert 1965 2*, 406.

rotacions en el pla (d'aquí la necessitat de l'operació $\left|\sqrt{1+n^2}\right|$). En el domini Ω se satisfan llavors els axiomes dels grups I-IV, juntament amb l'axioma d'Arquimedes, que era l'únic axioma de continuïtat introduït en la primera edició de *Grundlagen der Geometrie*. En canvi, l'axioma de completesa no se satisfà, perquè el domini Ω és extensible a altres dominis en els quals se satisfan tots els axiomes anteriors. Un d'aquests dominis és el cos dels nombres reals, el qual no és extensible a cap altre cos ordenat arquimedià que el contingui pròpiament. Per tant, si en comptes de Ω considerem el cos de tots els nombres reals, la geometria cartesiana plana usual fornirà el model dels cinc grups d'axiomes que hom estava cercant. L'extensió de l'argument a la geometria espacial no planteja cap problema.

Pel que fa a la *independència* recíproca dels diferents axiomes, cal destacar la demostració de la independència de l'axioma de les paral·leles i de l'axioma d'Arquimedes, d'on se segueixen respectivament la consistència de la geometria hiperbòlica de Lobačevskij i Bolyai i de la geometria no arquimediana de Veronese. Per demostrar la independència de l'axioma de les paral·leles, Hilbert apel·la al model geomètric abstracte que Cayley havia construït a l'interior d'una cònica, on els punts i rectes són definits a partir dels punts i rectes euclidianes i un grup de col·lineacions permet fixar les relacions d'angles i de longitud. Felix Klein havia demostrat, en efecte, que aquest model geomètric de Cayley satisfeia tots els axiomes d'Euclides, llevat de l'axioma de les paral·leles. Més exactament, que la geometria realitzada en l'interior d'una cònica és la geometria de Lobačevskij. Per demostrar la independència de l'axioma d'Arquimedes en relació als altres axiomes, Hilbert considera el mateix cos de nombres algèbrics Ω introduït prèviament i el cos de funcions algèbriques en una indeterminada t sobre aquest cos -amb les mateixes cinc operacions d'abans i on n és ara una funció arbitrària generada per les cinc operacions. L'ordre s'obté definint $a < b$ per dos funcions a, b, si $c = a - b$ de t és sempre positiva o negativa per un t prou gran. Per qualsevol nombre racional positiu q, la funció $q - t$ sempre és negativa per un t prou gran, de manera que $q < t$ per tot q. En altres paraules, l'axioma d'Arquimedes no és vàlid.

3. La controvèrsia Frege-Hilbert

La publicació de *Grundlagen der Geometrie* el 1899 donà lloc, primer, a un curt intercanvi epistolar entre Frege i Hilbert sobre algunes qüestions relatives a la metodologia adoptada per Hilbert en aquella obra i, després, a la publicació creuada de diversos articles per part de Frege i Korselt -que assumí la defensa del punt de vista de Hilbert- en el *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung*.[1] La correspondència Frege-Hilbert inclou essencialment tres cartes: una primera carta escrita per Frege el 27/12/1899, on adreça a Hilbert una sèrie de objeccions a la seva obra de 1899, la resposta immediata de Hilbert el 29/12/1899 a les objeccions de Frege, i una última carta de Frege el 6/01/1900, a la qual Hilbert declinarà respondre per falta de temps.

El primer punt de la controvèrsia entre Frege i Hilbert fa referència a les nocions d'axioma i definició i la seva relació. Pel que fa als axiomes, Frege accepta el punt de vista tradicional segons el qual els axiomes de la geometria són enunciats vertaders que expressen fets bàsics de la nostra intuïció espacial, això és, són *intuïtivament* vertaders, per la qual cosa és impossible demostrar *lògicament* la seva no contradicció:

> Anomeno axiomes als enunciats que són vertaders, però que no poden ser demostrats perquè el seu coneixement brolla d'una font completament diferent a la lògica, que hom pot anomenar intuïció espacial. De la veritat dels axiomes se segueix que no es contradiuen mútuament. Aquest fet no requereix, doncs, cap demostració ulterior.[2]

Segons això, tant les demostracions de la consistència de la geometria no euclidiana o no arquimediana com la de la independència de l'axioma de les paral·leles dutes a terme per Hilbert a *Grundlagen der Geometrie* serien sobreres. De fet, és evident que el punt de vista fregeà és incompatible amb el desenvolupament de les geometries no arquimediana o no euclidiana explicat en la primera secció d'aquest capítol, car d'ell se segueix immediatament que, o bé la intuïció ens forneix evidències intuïtives contradictòries, o bé la negació de l'axioma d'Arquimedes o el de les paral·leles d'Euclides és fals i, per tant, no pot ser un axioma. Frege no dubta en adoptar aquest últim punt de vista i afirma, per exemple, que "la geometria no euclidiana ha de contar-se entre les disciplines no científiques, les quals hom ha de prendre en consideració només com a rareses històriques d'escàs valor".[3] Segons Frege,

[1] Tots els textos esmentats, llevat de l'article de Korselt, es troben en la versió alemanya original, a *Wissenschaftlicher Briefwechsel* (*Frege 1976*). A *On the Foundations of Geometry and Formal Theories of Arithmetic* (*Frege 1971*) hi ha traduïts a l'anglès tots els textos anteriors, inclòs també l'article de Korselt, així com una acurada introducció als punts bàsics de la polèmica.

[2] *Frege 1976*, 63.

[3] *Frege 1969*, 184.

els axiomes afirmen quelcom, a saber, un pensament o proposició referit a la nostra intuïció espacial. En canvi, "en una definició no s'afirma res, sinó que s'estipula quelcom", a saber, el significat d'"un signe (una expressió, una paraula) que fins ara no tenia cap significat".[1] Només les definicions poden realitzar aquesta funció i, per tant, només elles permeten la introducció de nous signes. Els axiomes no poden estipular el significat dels signes que figuren en ells, car els axiomes són vertaders i per això cal que els signes que figuren en ells ja tinguin un significat prèviament estipulat.[2] Segons Frege, en efecte:

> És absolutament essencial per al rigor de les recerques matemàtiques que la diferència entre les definicions i tots els altres enunciats sigui mantinguda amb tota precisió. Els altres enunciats (Axiomes, lleis bàsiques, teoremes) no poden contenir cap paraula (signe) el sentit i el significat o (en el cas de signes esquemàtics o lletres en les fórmules) la contribució a l'expressió del pensament de les quals, no estigui ja plenament establerta, de manera que no hi hagi cap dubte sobre el sentit de l'enunciat, sobre el pensament expressat en ell. De l'únic que es pot discutir llavors és si aquest pensament és vertader i, en aquest cas, en què descansa la seva veritat. Així doncs, els axiomes i teoremes no poden pretendre mai establir el significat d'un signe o d'una paraula que figuri en ells; ans al contrari, aquest ja ha d'haver estat establert abans.[3]

De fet, continua Frege, encara que concedim a Hilbert que els axiomes, més enllà d'expressar "fets bàsics de la nostra intuïció",[4] són capaços també de definir les relacions fonamentals, ens adonarem ben aviat que els manca un dels requisits bàsics que cal exigir a tota definició, a saber, que determinin el significat dels conceptes definits completament i sense ambigüitat, de manera que puguem decidir per cada objecte si cau o no cau sota l'extensió del concepte en qüestió. Així, per exemple, respecte als axiomes d'ordre, que defineixen suposadament la relació "entre", Frege observa que contenen també les paraules "punt" i "recta"; però si volem saber, per exemple, si quelcom és un punt o una recta, haurem de conèixer prèviament el significat de la relació "estar sobre", en la definició de la qual hi intervenen de nou el conceptes "punt" i "recta". Així, escriu Frege amb indignació, els axiomes de *Grundlagen der Geometrie* no permeten decidir si el meu rellotge de butxaca és

---

[1] *Frege 1967*, 408.

[2] Recordem que, segons Frege, el significat d'un enunciat és el seu valor de veritat i que, pel principi de composicionalitat, el significat d'un enunciat és una funció del significat dels signes que figuren en ell (*Cf. supra*, cap. V, § 7).

[3] *Frege 1967*, 408.

[4] *Hilbert 1956*, § 1.

un punt! En definitiva, Frege conclou que, en el millor dels casos, són la totalitat dels axiomes els que defineixen els conceptes ("punt", "recta", "pla") i relacions ("estar sobre", "estar entre", ...) primitius i compara aquest sistema de definicions amb "un sistema d'equacions amb vàries incògnites, on la resolubilitat i, especialment, la univocitat de la determinació de les incògnites resta dubtosa".[1] Una conseqüència immediata de la hipòtesi que els conceptes i relacions primitives són definits per la totalitat dels axiomes és que les proves d'independència de *Grundlagen der Geometrie* no són vàlides. Car, per hipòtesi, el significat dels termes introduïts en cada axioma dependrà del significat dels altres termes que figurin en ell i, alhora, de la resta d'axiomes en què s'introdueixin aquests termes. D'aquí que el significat del terme en qüestió canviï cada cop que afegim un nou axioma o substituïm un axioma per un altre. Així, per exemple, "recta" i "paral·lela" no tindran el mateix significat en geometria euclidiana o no euclidiana i la substitució de l'axioma de les paral·leles per la seva negació donarà lloc a un nou sistema d'axiomes, amb la qual cosa els axiomes emprats en les proves d'independència ja no seran els axiomes la independència dels quals es volia demostrar:

> Herr Hilbert considera en el capítol II la qüestió de si els axiomes no es contradiuen mútuament o de si són independents els uns dels altres. Ara bé, com hem d'entendre aquesta independència? [...] És només a través de la totalitat d'axiomes que, segons Hilbert, pertanyen a la definició de punt, que la paraula "punt" adquireix el seu sentit; i, consegüentment, és només a través de la totalitat d'aquests axiomes que cada axioma particular, en el qual hi figura la paraula "punt", adquireix ple sentit: Una separació dels axiomes de manera que hom en consideri alguns com a vàlids i altres com a invàlids, és impensable, perquè amb això, fins i tot aquells considerats vàlids, adquiririen un altre sentit.[2]

Segons Frege, i aquesta és segurament l'aportació més interessant de la seva correspondència amb Hilbert, els axiomes de *Grundlagen der Geometrie* contenen conceptes o relacions de segon nivell o, com diríem avui en dia, de segon ordre, car tots ells són o bé axiomes existencials -recordem que els quantificadors expressen, segons Frege, conceptes de segon ordre-, o bé axiomes que descriuen una relació ("incidència", "ordre", ...) entre conceptes de primer ordre ("punt", "recta" i "pla"), és a dir, una relació de segon ordre. Per

---

[1] *Frege 1976*, 73.
[2] *Frege 1967*, 265-66.

tant, els axiomes de *Grundlagen der Geometrie* no defineixen pas conceptes o relacions de primer ordre, com creia equivocadament Hilbert, sinó conceptes i relacions de segon ordre, sota l'extensió dels quals cauran els conceptes de primer ordre de la geometria euclidiana - el punts, rectes i plans de l'espai euclidià. D'acord amb això, tal com diu Frege, "la geometria euclidiana es presenta com un cas particular d'un sistema més extens, junt amb el qual poden donar-se potser innumerables altres casos particulars, innumerables geometries, si aquesta paraula encara és admissible".[1] En altres paraules, Frege caracteritza el sistema de Hilbert com un sistema de segon ordre $R(R_1, ..., R_n)$, on R és una variable de relació de segon ordre que representa la conjunció dels axiomes de *Grundlagen der Geometrie* i $R_1, ..., R_n$ són variables de predicat de primer ordre. Si saturem l'expressió anterior amb n conceptes de primer ordre, haurem aconseguit el que avui en dia anomenem un model dels axiomes de Hilbert, però amb això només haurem aconseguit provar la consistència d'aquest sistema de segon ordre, no pas de la geometria euclidiana o qualsevol altra geometria que puguem subsumir sota aquest sistema de segon ordre. Per un altre costat, la substitució d'un axioma per un altre en el sistema anterior, donarà lloc a un sistema de segon ordre diferent, sota el qual hi podran caure o no els conceptes de primer ordre de geometries diferents. Vol dir això que les proves d'independència dutes a terme per Hilbert a *Grundlagen der Geometrie*, el que demostren en realitat és la independència d'un axioma de segon ordre respecte dels altres axiomes la conjunció dels quals defineix el sistema de segon ordre construït per Hilbert, no pas la independència dels axiomes de primer ordre que suposadament constitueixen, segons Frege, la geometria euclidiana.

Una vegada exposades les objeccions formulades per Frege al sistema axiomàtic presentat per Hilbert a *Grundlagen der Geometrie*, cal que ens ocupem ja de la defensa que Hilbert en farà en la carta de 29/12/1899 a Frege i en altres textos posteriors, però significatius en aquest context. Pel que fa a la naturalesa dels axiomes, és evident que Hilbert els veu d'una manera completament diferent a com ho feia Frege. Tal com hem explicat anteriorment, Hilbert considera a *Grundlagen der Geometrie* que els axiomes, més enllà d'expressar "fets bàsics de la nostra intuïció", això és, d'expressar fets relatius a certs objectes i relacions fonamentals entre ells prèviament donats en la intuïció espacial, el que fan és definir o determinar implícitament aquests objectes i relacions fonamentals, tot enunciant-ne les seves propietats bàsiques (*Cf. supra*, § 2). De fet, tal com reconeixerà Hilbert més endavant, aquest és un punt bàsic per entendre la diferència entre *l'axiomàtica*

[1] *Ibid.*, 272.

intuïtiva [*anschauliche*] o de *contingut* [*inhaltliche*], l'exponent màxim de la qual el trobem en els *Elements* d'Euclides i que és defensada per Frege en la correspondència amb Hilbert, i l'*axiomàtica formal*, representada de forma paradigmàtica a *Grundlagen der Geometrie* de Hilbert i defensada per ell mateix en la correspondència amb Frege i en altres indrets:

> En l'axiomàtica de contingut, les relacions són vistes com quelcom que es presenta en l'experiència o en la intuïció i que, per consegüent, té un contingut determinat. Per contra, en l'axiomàtica formal les relacions fonamentals no es consideren quelcom el contingut del qual està determinat des d'un principi, sinó que tan sols reben implícitament la seva determinació a través dels axiomes. Així, quan en la geometria axiomàtica trobem el nom de relacions com ara "estar sobre" o "entre", que s'empren per a les relacions fonamentals corresponents en la geometria intuïtiva, això s'ha d'entendre com una concessió a l'hàbit per tal de facilitar el contacte de la teoria amb els fets de la intuïció.[1]

Com podem veure, Hilbert descriu en aquest text els axiomes com definicions implícites de les relacions fonamentals. De fet, com ja sabem, en introduir a *Grundlagen der Geometrie* els axiomes dels grups II i III, Hilbert afirmava que aquests axiomes definien les relacions d'ordre i congruència. I, en la correspondència amb Frege, concedirà a aquest que el conjunt dels seus axiomes no només defineixen les relacions fonamentals, sinó també els conceptes de "punt", "recta" o "pla". Ara bé, això últim és incompatible amb el fet que punts, rectes i plans siguin a *Grundlagen der Geometrie* objectes individuals sobre els quals es quantifica lliurement, no pas conceptes que hom pugui fer anar de bracet amb les relacions. Frege, en canvi, en no admetre la quantificació restringida, veurà "punt", "recta" i "pla" com conceptes o predicats del tipus "… és un punt", etc.[2] En aquest sentit, doncs, Hilbert fou un mal propagandista dels seus propis punts de vista i expressà una confusió que molta gent compartia en la seva època. De fet, una conseqüència immediata de l'acceptació per part de Hilbert que "punt", "recta" i "pla" son conceptes de primer ordre hauria d'haver estat la concessió a Frege que el sistema axiomàtic de *Grundlagen der Geometrie* era efectivament un sistema de segon ordre, però aquesta concessió hagués portat alhora a posar en qüestió les proves de no-contradicció i independència, que constitueixen el nucli del mètode axiomàtic hilbertià. Hilbert però mai va entrar en aquesta via i preferí seguir arrossegant la confusió

[1] *Hilbert i Bernays 1968*, 6-7.

[2] Com ja sabem, per a Frege, el rang dels quantificadors és sempre l'univers de tots els objectes (*Cf. supra*, cap. V, § 7).

abans esmentada, encara que fos incompatible amb la resta dels seus punt de vista. En qualsevol cas, deixant de banda aquesta confusió, és prou clar què entenia Hilbert quan afirmava que els axiomes defineixen les relacions fonamentals. D'acord amb Hilbert:

> És evident que cada teoria és un esquelet o esquema de conceptes amb les seves necessàries relacions recíproques, i que els elements bàsics poden ser pensats de qualsevol manera. Si concep el meus punts com un sistema qualsevol de coses, per exemple, el sistema de l'amor, de les lleis o dels desembussadors de xemeneies, i considero tots els meus axiomes com a relacions entre aquestes coses, llavors els meus teoremes, per exemple, el de Pitàgores, valdran també per aquestes coses. En altres paraules: cada una d'aquestes teories pot aplicar-se sempre a una infinitat de sistemes d'elements bàsics. Hom només necessita aplicar una transformació invertible i unívoca i estipular que els axiomes han de ser els mateixos per les coses transformades. De fet, aquesta situació s'aplica sovint, per exemple, en el principi de dualitat, i jo també l'he aplicada en les meves proves d'independència.[1]

Tal com hem vist en la secció anterior, en efecte, els axiomes de *Grundlagen der Geometrie* defineixen una estructura complexa $S=<P,R,Q,I,E,C,C'>$, on P,R,Q representen conjunts d'individus qualssevol (anomenats respectivament "punts", "rectes" i "plans"), on $I\subseteq P\times D$ ($(x,\zeta)\in I$ es llegeix "el punt x està sobre la recta ζ"), $E\subseteq P^3$ ($(x,y,z)\in E$ és llegeix "el punt x està entre els punts y i z"), $C\subseteq P^4$ ($(x,y,z,w)\in C$ es llegeix "els segments xy i zw són congruents") i, finalment, $C'\subseteq P^8$ ($(x_1,...,x_8)\in C'$ es llegeix "els angles $<(x_1x_2,x_3x_4)$ i$<(x_5x_6,x_7x_8)$ són congruents). Naturalment, tal com s'esdevenia amb els axiomes de Peano-Dedekind (de segon ordre) en relació a l'estructura $<N,0,s>$, els axiomes de Hilbert només defineixen l'estructura S llevat d'isoformia, és a dir, que si aquest conjunt d'axiomes defineix l'estructura S, llavors també defineix qualsevol altra estructura $S^*=<P^*,R^*,Q^*,I^*,E^*,C^*,C'^*>$ que pugui associar-se a S per una aplicació bijectiva φ definida sobre el domini $P\cup R\cup Q$ i amb valors a$P^*\cup R^*\cup Q^*$ i tal que, per cada relació $R\subseteq I\cup E\cup C\cup C'$ i $R^*\subseteq I^*\cup E^*\cup C^*\cup C'^*$, es compleixi que $a_1,...,a_n\in R$ si, i només si, $\varphi(a_1),...,\varphi(a_n)\in R^*$. Per això, en el text anterior, Hilbert assenyala que cada sistema d'axiomes "pot aplicar-se sempre a una infinitat de sistemes d'elements bàsics" i que per això

[1] *Frege 1976*, 69. Hilbert es refereix al principi de dualitat, emprat en geometria projectiva, gràcies al qual hom pot permutar "punt" i "dreta" en els teoremes d'incidència. Per exemple, al teorema "cada parella de punts distints determina una recta única", li correspon el teorema dual "cada parella de rectes distintes determina un únic punt".

"hom només necessita aplicar una transformació invertible i unívoca [*i.e.* una transformació bijectiva] i estipular que els axiomes han de ser els mateixos per les coses transformades". En el sentit que acabem d'explicar, doncs, un espai euclidià tridimensional és una estructura $S = < P, R, Q, I, E, C, C' >$, que satisfà els axiomes I-V de Hilbert i, per tant, els axiomes de Hilbert permeten dir si un determinat conjunt d'objectes que estan en certes relacions entre ells és o no és un espai euclidià. Així, per exemple, els nombres reals amb les relacions d'incidència, ordre i congruència definides en la secció anterior és un espai euclidià -de fet, tal com hem vist, és el model a través del qual Hilbert demostra la consistència relativa dels seus axiomes-, però els nombres racionals amb les mateixes relacions no ho són per les raons explicades allí mateix. Hilbert, en definitiva, entenia el paper dels sistemes axiomàtics en un sentit completament modern i essencialment correcte, tot i les seves confusions i ambigüitats de tipus terminològic. En aquest context, les crítiques de Frege a Hilbert manifesten una clara manca de comprensió del mètode axiomàtic i del seu paper en el desenvolupament de la lògica i la matemàtica contemporània. Per exemple, tal com hem vist abans, Frege negava la possibilitat de les proves de no contradicció dutes a terme per Hilbert, perquè els axiomes són vertaders intuïtivament i "de la veritat dels axiomes se segueix que no es contradiuen mútuament", sense que calgui doncs, "cap demostració ulterior". A això li respon Hilbert que:

> D'ençà vaig començar a pensar, escriure i ensenyar sobre aquestes qüestions, sempre he dit el contrari. Si els axiomes posats arbitràriament no es contradiuen els uns amb els altres o amb alguna de les seves conseqüències, llavors són vertaders i les coses definides per ells existeixen. Aquest és per mi el criteri de la veritat i l'existència.[1]

Així doncs, segons Hilbert, de la consistència d'un sistema d'axiomes se'n segueix la veritat d'aquests axiomes i l'existència dels objectes amb les propietats explicitades per aquests axiomes. En termes moderns, podríem dir que Hilbert assimila l'existència d'un model d'una teoria Γ -és a dir, d'una estructura en la qual són satisfetes les sentències d'aquesta teoria- al fet que aquesta teoria sigui consistent. Ara bé, aquesta equivalència entre l'existència d'un model i la consistència d'una teoria no és pas, en absolut, evident i necessita ser demostrada. De fet, el mateix Hilbert, en l'article "Die Grundlagen der Mathematik" (*1927*), qüestionarà aquesta equivalència i transformarà la seva convicció inicial en un dels

[1] *Ibid.*, 68.

problemes bàsics de la recerca sobre els fonaments de les matemàtiques.[1] Com és ben sabut, l'equivalència entre l'existència d'un model i la consistència d'una teoria només és vàlida en el cas de la lògica de primer ordre (una teoria consistent d'ordre superior pot no tenir models estàndards) i fou demostrada per Gödel en la seva tesi doctoral "Über die Vollstandigkeit des Logikkalküls" (*1929*) i en el seu famós article "Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkälkuls" (*1930*). De fet, tal com declara Gödel en la seva tesi doctoral, el seu *teorema de completesa* -una formulació del qual és que tota teoria de primer ordre és consistent si, i només si, té un model- constitueix el "complement teòric" que garanteix la validesa teòrica de les demostracions hilbertianes de la consistència d'un sistema axiomàtic mitjançant l'exhibició d'un model.[2] Frege també està en desacord amb la tesi hilbertiana segons la qual la consistència seria el criteri de la veritat i l'existència i, al final de la carta de 6/1/1900, li objecta que la recerca matemàtica va en sentit contrari: inferim la consistència d'un conjunt de sentències a partir de la satisfactibilitat, no a l'inrevés. De fet, tal com hem vist en la secció anterior, el mateix Hilbert demostra la consistència dels axiomes de *Grundlagen der Geometrie* a partir de l'exhibició d'una estructura que satisfà aquest conjunt de sentències, és a dir, fornint un model d'aquest conjunt de sentències. En qualsevol cas, encara que sigui cert que per demostrar la consistència d'una teoria hom apel·la sovint a un model d'aquesta teoria, hom no procedeix sempre d'aquesta manera: Per exemple, hom estableix la consistència d'una teoria de primer ordre amb un conjunt infinit d'axiomes demostrant que cada subconjunt finit d'aquests axiomes té un model. La manca de comprensió per part de Frege del mètode axiomàtic és també prou manifesta quan pensem en la seva crítica a les proves d'independència dutes a terme per Hilbert. Tal com hem vist, Frege considerava que, donat que era el conjunt dels axiomes el que determinava el significat dels conceptes i relacions primitives del sistema de Hilbert, llavors l'eliminació d'un d'aquests axiomes, modificaria el significat prèviament atribuït a aquests termes i conceptes. Ara bé, si els axiomes de Hilbert defineixen l'estructura $S=<P,R,Q,I,E,C,C'>$ llevat d'isomorfia, llavors poden passar dues coses quan eliminem un axioma com, per exemple,

---

[1] *Cf. Van Heijenoort 1967*, 473.

[2] *Cf. Gödel 1986*, 60-64. La formulació anterior del teorema de completesa se segueix evidentment de la seva formulació habitual en termes de l'equivalència entre les relacions de deducció i conseqüència logica. Suposem, en efecte, que Γ és inconsistent, *i.e.* que hi ha alguna sentència σ tal que $\Gamma \vdash \sigma$ i $\Gamma \vdash \neg\sigma$, llavors pel teorema de completesa,$\Gamma \models \sigma$ i $\Gamma \models \neg\sigma$ i, per tant, tota estructura que satisfaci Γ també haurà de satisfer $\{\sigma, \neg\sigma\}$, la qual cosa és impossible i, per tant, no hi haurà cap estructura que satisfaci Γ, *i.e.* Γ és insatisfactible (no té cap model). Recíprocament, si Γ és insatisfactible, llavors tota estructura que satisfaci Γ (*i.e.* cap), satisfarà també qualsevol sentència i, per tant, per tota sentència σ tindrem que $\Gamma \models \sigma$ i $\Gamma \models \neg\sigma$ i, per tant, $\Gamma \vdash \sigma$ i $\Gamma \vdash \neg\sigma$, *i.e.* Γ és inconsistent.

l'axioma de les paral·leles en el qual no hi figuri cap terme primitiu que no ocorri en els altres axiomes: si l'axioma en qüestió és conseqüència lògica de la resta d'axiomes, llavors la seva eliminació no afectarà en absolut el significat dels termes primitius del sistema axiomàtic; en altres paraules, el nombre d'estructures que satisfacin aquests axiomes no variarà en absolut per l'eliminació d'aquest axioma; si l'axioma en qüestió és, en canvi, independent de la resta d'axiomes, llavors l'eliminació d'aquest axioma comportarà que el significat dels termes primitius estarà menys especificat i, per tant, que el sistema d'axiomes original definirà un nombre d'estructures més gran que no pas el sistema d'axiomes resultant d'eliminar d'aquell conjunt l'axioma en qüestió. En altres paraules, els axiomes són les condicions que han de satisfer certes estructures del tipus $S=<P,R,Q,I,E,C,C'>$; eliminar, per tant, l'axioma de les paral·leles equival a posar menys condicions i, per tant, a ampliar el ventall d'estructures d'aquest tipus que satisfaran els axiomes. En cap cas, doncs, el significat dels termes primitius es veurà afectat d'una forma essencial.

4. Els fonaments de l'aritmètica

Les primeres recerques de Hilbert sobre els fonaments de l'aritmètica estan íntimament relacionades amb les seves recerques anteriors sobre els fonaments de la geometria. En l'article "Über den Zahlbegriff", publicat l'any següent de l'aparició de *Grundlagen der Geometrie*, Hilbert oposa el *mètode genètic* de la teoria de nombres i el *mètode axiomàtic* de la geometria en els termes següents:

> Partint del concepte del número 1, normalment hom imagina primer que gràcies al procés de contar s'originen els nombres sencers positius 2, 3, 4, … i es desenvolupen les regles del càlcul; després, per l'exigència que la subtracció es pugui realitzar generalment, hom arriba al nombre negatiu; hom defineix després el nombre racional com una parella de nombres -i llavors tota funció s'anul·la- i, finalment, el nombre real com un tall o una sèrie fonamental -amb la qual cosa hom obté que [...] tota funció continua indefinida s'anul·la. Podem anomenar aquest mètode d'introducció del concepte de nombre el *mètode genètic* [...] Per erigir la geometria hom procedeix de forma essencialment diferent. Aquí hom sol començar amb la hipòtesi de l'existència de tots els elements, és a dir, hom pressuposa des d'un

> principi tres sistemes de coses, a saber, els punts, les rectes i els plans, i els posa en relació els uns amb els altres -seguint essencialment l'exemple d'Euclides- a través de certs axiomes, a saber, els axiomes d'enllaç, d'ordre, de congruència i de continuïtat. Sorgeix després la tasca ineludible de demostrar la *manca de contradicció* [*Widerspruchlosigkeit*] i *completesa* [*Vollständigkeit*] d'aquests axiomes, és a dir, s'ha de demostrar que l'aplicació dels axiomes postulats no pot dur mai a contradicció i, a més, que el sistema d'axiomes és suficient per a la demostració de tots els teoremes de la geometria. Anomenen a aquest procediment de recerca el *mètode axiomàtic*.[1]

El mètode genètic era el mètode emprat habitualment en l'escola de Weierstrass i també per Kronecker o Dedekind, figures dominants de l'anàlisi en la segona meitat del segle XIX. El mètode axiomàtic havia estat aplicat per primera vegada a la geometria per Euclides en els *Elements*, prenent com a punt de referència la teoria de la ciència d'Aristòtil. Tal com hem vist en la segona secció, Hilbert no només havia axiomatitzat a *Grundlagen der Geometrie* la geometria euclidiana, sinó que havia demostrat la *no contradicció* o *consistència* i la *independència* dels seus axiomes -la *completesa* se seguia de l'*axioma de completesa linial*. Ara bé, Hilbert havia demostrat a *Grundlagen der Geometrie* la consistència de la geometria euclidiana a través de l'exhibició d'un model en el qual eren satisfets tots els axiomes de la geometria plana. Aquest model era el de la geometria analítica, la consistència de la qual es donava per suposada. Així doncs, la tasca pendent era axiomatitzar l'anàlisi i demostrar després la seva consistència. Com ja sabem, Peano havia axiomatitzat l'aritmètica, caracteritzant el sistema dels nombres naturals a través del conjunt d'axiomes que duu el seu nom. Doncs bé, a "Über den Zahlbegriff", Hilbert axiomatitzarà l'anàlisi, caracteritzant el sistema dels nombres reals com un *cos ordenat arquimedià* i *maximal*, és a dir, no extensible a un altre cos del mateix tipus que el contingui. Aquest requisit de *no extensibilitat* [*Nichterweiterbarkeit*] s'expressarà a través de l'*axioma de completesa* [*Axiom der Vollständigkeit*] següent: "No és possible afegir al sistema de nombres un altra sistema d'objectes de manera que els axiomes I (enllaç), II (càlcul), III (ordre) i IV (Arquimedes) siguin satisfets de forma conjunta; en resum: els nombres formen un sistema d'axiomes que, conservant totes les relacions i tots els axiomes, no és pas extensible".[2] Com hem explicat anteriorment, Hilbert afegirà a partir de la segona edició de

[1] *Ewald 1996 2*, 1092-93. Traduït directament de l'alemany a partir de l'article de Paul Bernays: "Hilberts Untersuchungen über die Grundlagen der Arithmetik" (*1935*) (*Hilbert 1965 3*, 196-197).
[2] *Ewald 1996 2*, 1094.

Grundlagen der Geometrie un axioma anàleg a aquest a la llista d'axiomes presents en la primera edició, l'*axioma de completesa lineal*, gràcies al qual hom pot introduir el concepte de mesura i "demostrar tots els teoremes de la geometria" (*Cf. supra*, § 2). De fet, tal com explicarem després, una conseqüència immediata de l'afegit de l'axioma de completesa és la *categoricitat* dels sistemes d'axiomes a través dels quals Hilbert caracteritza els nombres reals a "Über den Zahlbegriff" i la geometria euclidiana a *Grundlagen der Geometrie* i, per tant, la *completesa* de les teories respectives. Això explica que, encara que a "Über den Zahlbegriff" Hilbert destaqui la importància de demostrar la completesa dels axiomes de qualsevol teoria, centri tots els seus esforços en la demostració de la consistència dels axiomes de l'anàlisi -i, en menor grau, en la demostració de la seva independència-, com ho mostra el fet que Hilbert posi només aquest problema en la seva famosa conferència "Mathematische Probleme" (*1900_b*), presentada en el segon *Congrés Internacional de Matemàtics* celebrat a Paris l'any 1900. La manca de contradicció i la independència són també les úniques propietats metamatemàtiques estudiades o demostrades per Hilbert a *Grundlagen der Geometrie* en relació als axiomes allí exposats, no només en la primera edició, sinó també a partir de la segona, en la qual Hilbert afegeix l'axioma de completesa linial a la resta d'axiomes. Tal com hem explicat abans, aquest axioma assegura la completesa del sistema d'axiomes per a la geometria euclidiana en el sentit que permet derivar tots els teoremes corresponents a les veritats acceptades generalment en aquest domini matemàtic (*Cf. supra*, § 2). Aquesta noció de completesa és molt genèrica, però concorda perfectament amb la noció informal explicitada per Hilbert a l'article "Über den Zahlbegriff" aplicada també al sistema d'axiomes de la geometria, a saber, que aquest sistema sigui "suficient per a la demostració de tots els teoremes de la geometria". De fet, tant en l'article anterior com en la conferència "Mathematische Probleme", Hilbert fa un comentari molt semblant en relació als reals:

> La totalitat dels nombres reals, això és, el continu, és, d'acord amb la concepció que acabem d'exposar [...] un sistema de coses, les relacions recíproques entre les quals estan governades pels axiomes postulats i per a les quals són vertaderes totes aquelles proposicions -i només aquelles- que es poden demostrar a partir dels axiomes mitjançant un nombre finit de passos.[1]

[1] *Hilbert 1965 3*, 301.

En altres paraules, Hilbert pensa que una proposició relativa als reals és vertadera si, i només si, se segueix dels axiomes que ha postulat per aquests nombres. Segurament, Hilbert considerava que l'axioma de completesa garantia això donat que, de fet, garanteix que qualsevol model dels axiomes és un cos ordenat, arquimedià i maximal i els reals són l'únic cos d'aquesta mena (llevat d'isomorfia), de manera que qualsevol enunciat vertader en un model dels axiomes I-V és també vertader en el cos dels reals. En termes més tècnics, podríem dir que Hilbert entén els reals com la teoria constituïda per totes les sentències que es dedueixen dels axiomes I-V -inclòs l'axioma de completesa. En aquest sentit, l'axioma de completesa garanteix la categoricitat d'aquesta teoria i, per tant, que aquesta teoria sigui completa en el sentit habitual del terme, això és, que permeti demostrar o refutar qualsevol enunciat del llenguatge de la teoria. D'aquí que qualsevol enunciat que sigui vertader en un model d'aquesta teoria sigui vertader en qualsevol altre model i, en particular, en els reals. Ara bé, d'aquí no se segueix immediatament, com sembla afirmar Hilbert, que les conseqüències lògiques de la teoria (les sentències vertaderes en tot model de la teoria) puguin deduir-se dels axiomes en un nombre finit de passos, car això només és cert si la lògica subjacent és completa semànticament. Però Hilbert no solament esta lluny encara de distingir entre el nivell sintàctic i semàntic que el permetrà més endavant formular adequadament el problema de la completesa semàntica d'un sistema lògic, sinó fins i tot de poder precisar els axiomes i regles lògiques que haurien d'acompanyar els axiomes matemàtics per tal de caracteritzar correctament els reals com una teoria axiomàtica.

Tal com dèiem abans, Hilbert havia demostrat la consistència de la geometria euclidiana a partir de la de la geometria analítica, la consistència de la qual es donava per suposada. Així doncs, la tasca pendent era axiomatitzar l'anàlisi i demostrar després la seva consistència. Ara bé, si l'anàlisi constitueix també una teoria axiomàtica, llavors la demostració de la consistència dels axiomes de la geometria realitzada a *Grundlagen der Geometrie* és només una demostració de la consistència *relativa* d'aquests axiomes. Per demostrar la consistència *absoluta* dels axiomes de la geometria, cal demostrar la consistència dels axiomes que defineixen els nombres reals com un cos ordenat, arquimedià i maximal. Així, en la conferència "Mathematische Probleme", Hilbert posarà en el segon lloc de la seva famosa llista de problemes, la qüestió de si és possible una demostració directa de la no contradicció o consistència dels axiomes que determinen l'estructura dels nombres reals, que ell anomena simplement *axiomes de l'aritmètica*, això és: "*s'ha de demostrar que, en base a aquests* [*axiomes*]*, hom mai podrà arribar a resultats contradictoris entre si a* *través d'un nombre finit de deduccions lògiques*".[1] Hilbert estava convençut de la possibilitat de trobar fàcilment una demostració *sintàctica*, purament lògica, dels *axiomes de l'aritmètica*, reformulant a tal fi els mètodes de prova emprats en la teoria dels irracionals de Weiertrass i Dedekind.[2] D'aquesta manera el destí de l'anàlisi -i, per extensió, de la geometria- es troba ja en la filosofia de la matemàtica hilbertiana indissolublement lligat al de la lògica, encara que Hilbert veiés el lligam entre lògica i matemàtiques de forma ben diferent a com el veien els logicistes Frege i Russell -això és, a través d'un esquema reduccionista. Remarquem, d'una altra banda, que la importància d'aquesta demostració rau no solament en el fet que se seguiria d'ella immediatament la consistència absoluta dels axiomes de l'anàlisi i la geometria, sinó també en què només ella seria capaç de fornir una demostració de l'*existència* dels nombres reals:

> Si hom confereix a un concepte propietats que es contradiuen mútuament, llavors direm que el concepte no existeix matemàticament. Així, per exemple, no existeix matemàticament un nombre real l'arrel quadrada del qual és -1. Però, si hom aconsegueix demostrar que les propietats conferides a un concepte mai poden dur, mitjançant l'aplicació d'un nombre finit de deduccions lògiques, a una contradicció, llavors direm que s'ha demostrat l'existència matemàtica del concepte, per exemple, un nombre o una funció, que compleixen certs requisits. En el cas present, tractant-se dels axiomes dels nombres reals en l'aritmètica, la demostració de la manca de contradicció dels axiomes és equivalent a la demostració de l'existència matemàtica del sistema dels nombres reals o continu.[3]

De fet, tal com ha argumentat W. Sieg en l'article "Hibert's Programs: 1917-1922" (*1999*), el problema de donar una demostració de l'*existència* dels nombres reals era una problema bàsic als ulls de Hilbert, donat que "algunes observacions de Cantor havien tingut uns efectes devastadors en els assaigs de Dedekind".[4] Sieg es refereix a la carta adreçada a Dedekind de 28/07/1899 (*Cf. supra*, cap. IV, § 5), en la qual Cantor observa que l'existència del *Gedankenwelt* de Dedekind, en la qual aquest havia basat la seva demostració de l'existència d'un conjunt infinit, és equivalent a la hipòtesi de l'existència del conjunt de tots els conjunts, la qual mena llavors a una contradicció lògica anàloga a la que mena la

[1] *Ibid.*, 300.
[2] *Ibid.*, 300.
[3] *Ibid.*, 300.
[4] *Sieg 1999*, 5.

consideració del conjunt de tots els ordinals o de tots els cardinals. Cantor pensava resoldre aquestes contradiccions amb la distinció entre pluralitats absolutament infinites o *inconsistents* (com les anteriors) i pluralitats *consistents* o conjunts; però, aquesta solució no podia satisfer a Hilbert, el qual plantejarà llavors la demostració de la *consistència* del sistema d'axiomes a través dels quals ha caracteritzat els nombres reals com un mitjà per demostrar precisament la seva existència. Així, per exemple, l'observació que fa Hilbert a "Über den Zahlbegriff" segons la qual en la demostració de la consistència d'aquest sistema d'axiomes hi veu "també una demostració de l'existència de la totalitat dels nombres reals o, en la terminologia de Cantor, la demostració que el sistema dels nombres reals és un conjunt consistent (complet)"[1] és clarament una crítica implícita a la solució adoptada Cantor.

Amb tot, la confiança de Hilbert en trobar una ràpida i fàcil solució al problema de la consistència de l'anàlisi es va veure afectada pel descobriment per part de Zermelo i Russell de les paradoxes de la lògica i la teoria de conjunts. Frege i Dedekind, en efecte, creien haver fonamentat sobre una base ferma i segura l'aritmètica, el primer en el marc de la lògica pura i el segon en el de la teoria de conjunts. Però el descobriment de les paradoxes mostrava que tant l'una com l'altra eren inconsistents. Això va dur Hilbert a pensar que una demostració dels axiomes de l'aritmètica era impossible, si més no a través dels mitjans de la lògica pura -tal com havia proposat el 1900- o de la teoria de conjunts i, en definitiva, a replantejar el seu programa de fonamentació de les matemàtiques i la seva concepció de la relació entre aritmètica i lògica. Aquest replantejament ja és manifest en la coneguda conferència "Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik" ["Sobre els fonaments de la lògica i de l'aritmètica"] (*1904*) pronunciada en el tercer congrés internacional de matemàtiques celebrat a Heidelberg de 1904, en la qual Hilbert esbossa també per primera vegada una solució al segon problema plantejat el 1900. Així, en les primeres línies de la conferència de 1904, Hilbert adverteix de la diferència fonamental que hi ha, pel que fa al problema de la demostració de la no contradicció, entre l'aritmètica i la geometria:

> En l'examen dels fonaments de la geometria hom pot deixar de costat certes dificultats, de natura purament aritmètica; però tractant-se de fonamentar l'aritmètica, el recurs a una altra disciplina fonamental sembla prohibit.[2]

[1] *Ewald 1996 2*, 1095.

[2] *Van Heijenoort 1967*, 130.

Hom podria considerar potser la possibilitat de fonamentar l'aritmètica en la lògica, però adverteix Hilbert:

> Després d'una consideració atenta, hom se n'adonarà que en l'exposició tradicional de les lleis de la lògica es recorre ja a certs conceptes aritmètics fonamentals com, per exemple, el concepte de conjunt i, en certa mesura, el concepte de nombre, particularment el de nombre cardinal. Així, hom es troba immers en un cercle viciós. D'aquí que, per evitar les paradoxes, calgui desenvolupar simultàniament, almenys de forma parcial, les lleis de la lògica i l'aritmètica.[1]

Hilbert no fa sinó esbossar en aquest article el desenvolupament conjunt de la lògica i l'aritmètica esmentat en el text anterior -en concret, Hilbert no arriba a especificar un sistema lògic i es limita a parlar de "les formes familiars d'inferència lògica"- i les idees programàtiques que haurien de dur finalment a demostrar la consistència de l'anàlisi. Amb tot, tal com veurem en la secció següent, en unes lliçons donades a la universitat de Göttingen tot just uns mesos després de la conferència de 1904, Hilbert especificarà, almenys de forma parcial, el sistema lògic a partir del qual atacarà el problema de la consistència de l'anàlisi i aclarirà algunes de les idees programàtiques esbossades en la conferència anterior. Pel que fa a la conferència de 1904, Hilbert intenta demostrar la consistència de l'anàlisi en dues etapes. Primer de tot, Hilbert intenta demostrar la no contradicció de l'aritmètica elemental, reformulant a tal efecte els axiomes de Peano i, després, afirma al final de l'article que hom pot demostrar la no contradicció de l'anàlisi de forma anàloga, car "els axiomes que he donat per als nombres reals poden expressar-se a través de fórmules exactament anàlogues a les dels axiomes considerats més amunt".[2] Però Hilbert no especifica en què consisteix aquesta analogia d'expressió entre els axiomes de l'aritmètica pròpiament dita i els axiomes que caracteritzen els reals com un cos ordenat, arquimedià i maximal, ni tampoc intenta demostrar la no contradicció d'aquests darrers axiomes seguint la metodologia emprada per demostrar la no contradicció dels primers. Pel que fa a l'aritmètica pròpiament dita, Hilbert formula els següents axiomes:

1. $x = x$
2. $\{x = y \text{ i } w(x)\} \mid w(y)$

---

[1] *Ibid.*, 131.
[2] *Ibid.*, 137. Hilbert es refereix als axiomes de l'article "Über den Zahlbegriff".

3. $s(ux) = u(s'x)$

4. $s(ux) = s(uy) \mid ux = uy$

5. $\overline{s(ux) = u1}$,

on u representa un conjunt infinit, s representa successor i s' l'operació corresponent.[1] Els dos primers axiomes defineixen, segons Hilbert, el concepte d'igualtat. El segon axioma és llegeix: de $x = y$ i $w(x)$ se segueix $w(y)$. Els tres axiomes restants son reformulacions una mica *sui generis* de tres axiomes peanians. Així, escriu Hilbert, "l'axioma 3 expressa que tot element ux té com a successor un objecte determinat $s(ux)$, que sent igual a un element del conjunt u, a saber, l'element $u(s'x)$, pertany també al conjunt u. L'axioma 4 expressa el fet que si dos elements del conjunt u tenen el mateix successor, llavors són iguals. Segons l'axioma 5, no existeix a u cap successor el successor del qual sigui l'element $u1$: aquest element serà anomenat, doncs, "el primer element" de u".[2] Remarquem, doncs, que Hilbert deixa de banda els axiomes de Peano "1 és un nombre" i l'anomenat sovint "principi d'inducció completa", el qual tanmateix enunciarà més endavant. L'argument que sembla desprendre's de la demostració de la consistència dels axiomes de l'aritmètica esbossada per Hilbert en aquest article és el següent. Per demostrar la consistència dels axiomes 1, 2, 3 i 4, Hilbert raona de la següent manera:

(*i*) una contradicció és un enunciat de la forma A i no A;

(*ii*) cap dels axiomes anterior conté una negació;

(*iii*) la seva conjunció no pot, doncs, engendrar mai una contradicció.

Aquest raonament no pot aplicar-se, en canvi, a l'axioma 5, que conté explícitament una negació. La idea de Hilbert per demostrar la no contradicció d'aquest axioma i, en definitiva, la no contradicció dels axiomes de l'aritmètica és atribuir als axiomes una propietat ("ser una equació homogènia") que sigui preservada per les regles d'inferència, de manera que si F és una fórmula demostrable, llavors F serà una equació homogènia. A més, la negació d'una equació homogènia no és homogènia i, per tant, la fórmula corresponent no serà demostrable. En concret, Hilbert demostra o creu demostrar respecte als cinc axiomes anteriors que:

[1] *Cf. ibid.*, 132-33. La distinció entre successor i l'operació del mateix nom sembla innecessària.

[2] *Ibid.*, 133.

(*iv*) Els axiomes 1, 2, 3 i 4 són homogenis;

(*v*) tots els enunciats demostrables a partir dels axiomes anteriors són homogenis;

(*vi*) la negació de l'axioma 5, que no és pas homogènia, no és deductible, doncs, dels axiomes 1, 2, 3 i 4; però això és el mateix que dir que la conjunció de 5 amb 1, 2, 3, 4 és no contradictòria i, donat que aquests darrers axiomes són no contradictoris, que els axiomes de l'aritmètica són no contradictoris.

Hilbert és conscient que ha donat només les indicacions necessàries per dur a terme una "demostració completa", si bé està convençut, al mateix temps, que la seva demostració "constitueix el primer exemple reeixit d'una prova directa de no contradicció dels axiomes"[1] de l'aritmètica. Però Poincaré demostrarà ben aviat la circularitat constant dels seus raonaments. En concret, Poincaré observarà que les demostracions d'enunciats que fan referència a un conjunt infinit d'enunciats, com ara (*iii*) o (*v*), requereixen pròpiament una inducció completa, de manera que "el raonament de Hilbert no només assumeix el principi d'inducció, sinó que suposa que aquest principi ens és donat, no com una simple definició, sinó com un judici sintètic *a priori*".[2] Curiosament, Hilbert afegirà una mica més endavant, que "si traduïm al llenguatge [simbòlic] que hem adoptat el axiomes ben coneguts de la inducció completa, podrem establir de forma anàloga que són no contradictoris amb els precedents".[3] Però, tal com observa Poincaré, si hom raona de forma anàloga a com ha raonat Hilbert per demostrar la no contradicció dels axiomes 1-5, es veurà obligat a emprar el principi d'inducció completa per a la demostració de la no contradicció d'aquest principi! El mateix Poincaré sintetitza els seus punts de vista sobre la demostració de consistència duta a terme per Hilbert a la conferència de 1904 en els termes següents:

> En resum:
>
> Una demostració [de consistència] és necessària.
>
> L'única demostració possible és per recurrència.
>
> Això és legítim només si admetem el principi d'inducció i si el considerem, no ja com una definició, sinó com un judici sintètic.[4]

[1] *Ibid.*, 135.
[2] *Ewald 1996 2*, 1059.
[3] *Van Heijenoort 1967*, 135.
[4] *Ewald 1996 2*, 1059.

De fet, el mateix Hilbert sembla adonar-se al final de la conferència de 1904 de la circularitat que entranya la demostració que la negació de 5 no se segueix de la resta d'axiomes i altres demostracions semblants i observa que:

> Cada vegada que hem parlat fins aquí de *diferents* objectes del pensament, de *diferents* tipus de combinacions o de *diferents* objectes arbitraris, hem entès sempre que fèiem referència a un nombre finit d'objectes. Ara que hem establert la definició de nombre finit estem en posició de comprendre el sentit general d'aquestes expressions. Així mateix, basant-nos en la definició de nombre finit -corresponent a la idea d'inducció completa-, podem descriure exactament amb l'ajut d'un mètode recursiu, què entenem per una conseqüència "arbitrària" o per la "diferència" d'un enunciat amb tots els altres enunciats d'un tipus determinat. És així que podem completar la demostració esbossada més amunt que la proposició $s(ux^{(0)}) = u$ difereix de tot enunciat deduït dels axiomes 1-4 en un nombre finit de passos; per això n'hi ha prou en considerar la demostració mateixa com un objecte matemàtic, a saber, un conjunt finit els elements del qual estan relacionats pel fet que afirmen que la demostració permet deduir 6 a partir de 1-4. Cal llavors demostrar que una demostració d'aquesta mena conté una contradicció i, per tant, no existeix en la forma no contradictòria tal i com nosaltres l'hem definit.[1]

Aquesta és la primera vegada en què apareix la idea d'una "teoria de la demostració", això és, d'una teoria matemàtica que estudiï les demostracions matemàtiques en el llenguatge formalitzat de la lògica. Hilbert desenvoluparà aquesta teoria en les lliçons titulades "Grundlagen der Mathematik" (*1921-22*) i en els articles "Neubegründung der Mathematik. Erste Mitteilung" (*1922*) i "Die logischen Grundlagen der Mathematik" (*1922$_a$*). Tal com explica Hilbert en aquests articles, una demostració formalitzada és una cadena finita de fórmules les propietats estructurals de les quals són accessibles a una raonament metamatemàtic, intuïtiu i concret. Això possibilita les demostracions de consistència que recauen sobre les demostracions emprades en matemàtiques i no pas sobre els objectes o conceptes abstractes als quals les demostracions fan referència. En definitiva, gràcies a la formalització, una demostració metamatemàtica de consistència pot ser reduïda a una cadena finita d'enunciats aritmètics simples.[2] Així doncs, cal distingir dos principis d'inducció

---

[1] *Van Heijenoort 1967*, 137.
[2] *Cf. Hilbert 1965 3*, 174.

completa: un intuïtiu i finit i l'altre pròpiament matemàtic. D'aquesta manera Hilbert respondrà a partir dels anys vint a les objeccions de Poincaré.

5. El primer plantejament de qüestions metalògiques

Hilbert havia nascut a la ciutat de Königsberg, estudià a la seva universitat i impartí classes en ella des de l'any 1886 fins l'any 1895, any en què acceptà un oferiment de la universitat de Göttingen, on va romandre fins a la seva mort. Durant la seva estada en aquesta universitat impartí nombrosos cursos o lliçons sobre lògica i fonaments, una llista de les quals pot trobar-se en l'apèndix al tercer volum de *Gesammelte Abhandlungen* (*Hilbert 1965*). Aquestes lliçons foren preparades pels seus assistents (Courant, Hellinger, Schönfinkel, Bernays i Ackermann, entre d'altres), corregides pel mateix Hilbert i estan dipositades en la biblioteca del *Mathematisches Institut* de la universitat de Göttingen. Les primeres d'aquestes lliçons en ordre cronològic corresponen a un curs impartit per Hilbert a la universitat de Göttingen l'any 1905, titulat *Logische Principien des mathematischen Denkens* [*Hilbert 1905*]. Aquestes lliçons es divideixen en dues parts: una primera part, titulada "Das mathematische Denken", dedicada a les aplicacions del mètode axiomàtic a diverses branques de les matemàtiques (anàlisi, geometria i altres disciplines) i una segona part, titulada "Die logische Grundlagen", que inclou una discussió de les paradoxes de la teoria de conjunts, una exposició del sistema lògic i un darrer capítol, titulat "Die Axiomlehre", on torna a desenvolupar les idees exposades en la conferència de l'any anterior relatives a la demostració de la consistència de l'anàlisi. En línies generals, podríem dir que en aquestes lliçons Hilbert intentarà desenvolupar la idea, formulada en la conferència de 1904 sobre els fonaments de la lògica i l'aritmètica, d'un desenvolupament conjunt d'aquestes dues ciències i aclarirà algunes de les idees programàtiques esbossades en la conferència anterior. En concret, tal com havíem explicat en la secció precedent, Hilbert no havia especificat en la conferència de 1904 el sistema lògic que requeria el desenvolupament conjunt de lògica i aritmètica a partir del qual pensava abordar la demostració de la consistència de l'anàlisi. En canvi, en les lliçons de 1905 abans esmentades, Hilbert especificarà un sistema lògic i aclarirà amb un cert detall les relacions entre lògica i aritmètica. Aquests tòpics han estat estudiats per V. Peckhaus a l'article "Logic in Transition:

The Logical Calculi of Hilbert (1905) and Zermelo (1908)" (*1905*), per la qual cosa aquí ens limitarem a fer-nos ressò del sistema lògic presentat per Hilbert en aquestes lliçons i del primer plantejament en elles de qüestions metalògiques.

Pel que fa al sistema lògic presentat per Hilbert en les lliçons de 1905, Hilbert es limita a exposar el següent conjunt d'axiomes per a la lògica proposicional:

> Axioma I. Si $X \equiv Y$, llavors hom pot reemplaçar X per Y i Y per X.
>
> Axioma II. A partir de dues proposicions X, Y en resulta ("additivament") una nova:
>
> $$Z \equiv X + Y.$$
>
> Axioma III. A partir de dues proposicions X, Y, en resulta de forma diferent ("multiplicativament") una nova:
>
> $$Z \equiv X \cdot Y.$$
>
> Per aquestes "operacions" se satisfan les següents identitats:
>
> Axioma IV. $X + Y \equiv Y + X$. Axioma VI. $X \cdot Y \equiv Y \cdot X$.
>
> Axioma V. $X + (Y + Z) \equiv (X + Y) + Z$. Axioma VII. $X \cdot (Y \cdot Z) \equiv (X \cdot Y) \cdot Z$
>
> Axioma VIII. $X \cdot (Y + Z) \equiv X \cdot Y + X \cdot Z$.
>
> [...] Hi ha dues proposicions definides 0, 1, i, per a cada proposició X es defineix una proposició diferent $\bar{X}$, de manera que se satisfan les identitats següents:
>
> Axioma IX. $X + \bar{X} \equiv 1$. Axioma X. $X \cdot \bar{X} \equiv 0$.
>
> Axioma XI. $1 + 1 \equiv 1$. Axioma XII. $1 \cdot X \equiv 0$.[1]

En el text anterior X, Y, Z, … són variables proposicionals, "+", " $\cdot$""–"i "≡" representen respectivament la conjunció, disjunció, negació i equivalència lògiques i, finalment, 1 i 0 representen una proposició falsa i una proposició vertadera -o, com diu Hilbert, correcte [*richtige*] o no-contradictòria [*widerspruchlose*].[2] Poc després, Hilbert planteja per aquest sistema d'axiomes les mateixes qüestions metalògiques que havia plantejat i resolt satisfactòriament el 1899 respecte als axiomes de la geometria:

> S'ha de recercar ara en quina mesura els axiomes són independents els uns dels altres [...] Però, el més important aquí seria demostrar que els 12 axiomes no es

[1] *Hilbert 1905*, 225-28.

[2] *Ibid.*, 226.

contradiuen, és a dir, que hom no pot derivar a partir d'ells, mitjançant els procediments establerts, cap proposició que contradigui els axiomes, per exemple, $X + \bar{X} = 0$.[1]

Tal com explica el mateix Hilbert, de moment només pot oferir material per tal d'atacar aquestes qüestions que, tal com veurem més endavant, seran resoltes per ell mateix en les lliçons de 1917-18 i pel seu col·laborador Bernays en la seva *Habilitationschrift* de 1918. Una altra de les qüestions plantejades per Hilbert en aquestes lliçons és la de la *decidibilitat* de la lògica proposicional, la qual ell mateix reconeix que "ha estat el veritable punt de partida de totes les meves recerques en aquest camp",[2] car veu la solució d'aquesta qüestió com un primer pas en la solució del problema més general de la demostració de la decidibilitat de tots els teoremes de les matemàtiques, això és, "la demostració que en matemàtiques no hi pot haver "ignorabimus"".[3] El mèrit d'aquestes lliçons és, doncs, digne de remarcar, perquè en elles trobem, per primera vegada en la història, l'aplicació del mètode axiomàtic a un sistema lògic i, en el seu marc, el plantejament de qüestions metalògiques tan importants com ara la qüestió relativa a la *independència* o *no contradicció* dels axiomes d'un sistema lògic o la *decidibilitat* dels seus teoremes. Les limitacions d'aquestes lliçons provenen del fet que Hilbert només axiomatitza el càlcul proposicional i, en conseqüència, només planteja les qüestions metalògiques esmentades en relació a aquest sistema lògic. És interessant remarcar que en les lliçons de 1905 Hilbert no planteja en cap moment la qüestió de la *completesa* del càlcul proposicional, la qual cosa pot semblar a primera vista sorprenent tenint en compte que a "Über den Zahlbegriff" Hilbert havia afirmat que la demostració de la manca de contradicció i completesa dels axiomes de qualsevol teoria constitueixen una "tasca ineludible" del mètode axiomàtic. Com ja sabem, Hilbert havia afegit a "Über den Zahlbegriff" un axioma de completesa a la resta d'axiomes, el qual assegurava que el sistema d'axiomes resultant fos complet, en el sentit que fos suficient per a la demostració de tots els teoremes de la geometria. Hilbert no explica en aquest article què entén per la completesa d'un sistema d'axiomes i en quina manera aquesta se segueix de l'axioma de completesa, però en el primer capítol de les lliçons de 1905, titulat "Axiome der Arithmetik", tot just després d'haver introduït la seva axiomatització dels reals, observa el següent respecte a l'axioma de completesa:

---

[1] *Ibid*., 230-31.
[2] *Ibid*., 249.
[3] *Ibid*., 249.

> Aquest darrer axioma té un caràcter completament general i ha d'afegir-se, en alguna forma concreta, a qualsevol mena de sistema d'axiomes. D'acord amb aquest axioma, el sistema de nombres ha de ser de tal manera que cada vegada que s'afegeixi un element nou aparegui una contradicció, independentment de les estipulacions que hom postuli en relació a ells. Si hi ha coses que poden ser afegides al sistema sense contradicció, llavors ja han de pertànyer en veritat al sistema.[1]

Aquest text és interessant per diversos motius. En primer lloc, perquè indica que Hilbert pensava segurament que el problema de la completesa de qualsevol teoria matemàtica axiomàtica podia resoldre's en cada cas mitjançant l'afegitó d'una axioma de completesa per a la teoria en qüestió, és a dir, mitjançant una estipulació a tal efecte. Tal com ha assenyalat R. Zach en l'article:"Completeness before Post: Bernays, Hilbert, and the Development of Propositional Logic" (*1999*), aquesta solució fou criticada ja per il·lustres coetanis de Hilbert:

> A 1906, escrivint a Göttingen, Johannes Mollerup discuteix l'axiomatització dels reals de Hilbert i -sense criticar explícitament Hilbert al respecte- transforma el punt de vista sobre la completesa com quelcom que ha de ser estipulat a quelcom que ha de ser demostrat. Escriu: "Tenim així dos requeriments per un sistema d'axiomes, a saber, primer un requeriment aritmètic de consistència, i segon, un requeriment conjuntista de completesa". König també critica l'ús per part de Hilbert de l'axioma de completesa, afirmant que "l'"axioma de completesa" és una intuïció que hauríem de tenir com a resultat d'un sistema de pensament complet; la "completesa" és una hipòtesi que no pot ser formulada com un "axioma" en la nostra síntesi, com tampoc la hipòtesi de la consistència pot ser formulada d'aquesta manera".[2]

En qualsevol cas, tal com ha observat el mateix Zach, sembla que Hilbert va fer cas omís d'aquestes crítiques, car conservà l'axioma de completesa en les successives edicions de *Grundlagen der Geometrie* i en les posteriors axiomatitzacions del nombres reals. En segon lloc, el text anterior és interessant perquè aclareix què entén Hilbert per completesa en el cas del "sistema de nombres", a saber, que l'afegit d'un nou element generi una contradicció i, per tant, que tot allò que puguem afegir al sistema sense contradicció, pertanyi ja al sistema. El més important aquí és que Hilbert explicita, d'una forma clara i entenedora, el requisit o propietat de maximalitat a què fa referència l'axioma de completesa per al

[1] *Hilbert 1905*, 17.
[2] *Zach 1999*, 354.

"sistema de nombres". Ara bé, aquesta propietat no coincideix exactament amb la noció informal de completesa explicitada per Hilbert a "Über den Zahlbegriff" (un sistema d'axiomes és complet si és suficient per a la demostració de tots els teoremes de la teoria en qüestió) i que, segons Hilbert, *se segueix* de l'axioma de completesa en afegir aquest axioma a la resta d'axiomes que caracteritzen el "sistema de nombres". Hilbert no precisa més aquest concepte, però ja hem explicat abans que una conseqüència immediata de l'afegit de l'axioma de completesa és la *categoricitat* del sistema d'axiomes a través dels quals Hilbert caracteritza els nombres reals a "Über den Zahlbegriff" i, per tant, la *completesa* de la teoria dels nombres reals en el sentit habitual del terme, això és, en el sentit que permet deduir o refutar qualsevol enunciat del llenguatge de la teoria (*Cf. supra*, § 4). Això és interessant, perquè en les lliçons de 1917-18 Hilbert enunciarà també la noció informal de completesa relativa a un sistema lògic (un sistema lògic és complet si és suficient per bastir la lògica corrent) i, després, la precisarà en el següent sentit: una teoria és completa si l'afegit d'una fórmula, fins ara no demostrada, al sistema d'axiomes sempre dóna lloc a una contradicció (*Cf. infra*, § 7). Sembla clar, doncs, que la noció de completesa sintàctica o Post-completesa d'una teoria lògica deriva del requisit o propietat de maximalitat o no extensibilitat a què fa referència l'axioma de completesa i que Hilbert explicita, per primera vegada, en les lliçons de 1905. Car, tal com ha observat Zach, "si tenim en compte que els "elements" descrits per un axioma [de completesa] per a la lògica proposicional *són* proposicions, llavors la Post-completesa diu sobre les proposicions exactament el mateix que l'axioma de completesa diu per als reals".[1] Per un altre costat, la noció de completesa deductiva d'una teoria matemàtica (una teoria és completa si permet demostrar o refutar qualsevol fórmula que puguem expressar en el llenguatge de la teoria) sembla evolucionar de la noció informal de completesa que, segons Hilbert, se seguia de l'afegit de l'axioma de completesa i podria ser conseqüència d'una certa elaboració a nivell conceptual sobre quines són exactament les connexions lògiques entre la categoricitat d'una teoria i la seva completesa a nivell deductiu. En qualsevol cas, està clar que a partir de 1920 aproximadament, Hilbert és ben conscient d'aquestes distincions conceptuals, donat que a les lliçons de 1920-21, demostrarà l'equivalència per a un sistema lògic de la completesa sintàctica o Post-completesa i la seva completesa a nivell deductiu.[2]

---

[1] *Zach 1999*, 354.
[2] *Hilbert 1920-21*, 18-19.

6. *Axiomatisches Denken*

Tal com hem vist en la secció anterior, Hilbert no avançà gaire en les lliçons de 1905 en relació al seu projecte d'un desenvolupament conjunt de la lògica i l'aritmètica per tal d'atacar la demostració de la consistència de l'anàlisi. De fet, tal com ha assenyalat Peckhaus, "Hilbert no va elaborar més els seus pensaments sobre els fonaments lògics de les matemàtiques en aquella època, perquè creia que Ernst Zermelo seria capaç d'axiomatitzar la lògica i la teoria de conjunts"[1] i resoldre d'aquesta manera les paradoxes de la lògica i la teoria de conjunts descobertes de forma independent per Russell i el mateix Zermelo. L'any 1908, en efecte, Zermelo publicaria l'article "Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre" ["Recerques sobre els fonaments de la teoria de conjunts"] on, prenent com a model l'axiomatització de la geometria duta a terme per Hilbert el 1899, exposava la seva coneguda axiomatització de la teoria de conjunts que permetia evitar les paradoxes de tipus conjuntista (*Cf. infra*, § 10). El mateix any Zermelo abordà també el problema de l'axiomatització de la lògica en una lliçó impartida a la universitat de Freiburg titulada "Mathematische Logik", però no va més enllà de presentar un conjunt d'axiomes per al càlcul proposicional i de classes. D'aquí que, en unes lliçons de 1910 titulades *Elemente und Prinzipienfragen der Mathematik* (*1910*), Hilbert pugui afirmar que la paradoxa de Russell havia estat solucionada en la seva versió conjuntista per la teoria axiomàtica de conjunts de Zermelo, però que "encara no havia estat resolta d'una forma satisfactòria com antinòmia lògica".[2] D'una altra banda, com a conseqüència segurament de la crítica de Poincaré, Hilbert abandona en aquestes lliçons el seu projecte d'un desenvolupament conjunt de la lògica i l'aritmètica per tal d'atacar la demostració de la consistència de l'anàlisi i advoca per una reducció dels axiomes de l'aritmètica als de la lògica. Tal com assenyala Hilbert:

> Si postulem els axiomes de l'aritmètica, però renunciem a una posterior reducció dels mateixos i adoptem acríticament les lleis habituals de la lògica, llavors hem de ser conscients que no hem salvat les dificultats d'una primera fonamentació filosòfica i epistemològica, sinó que simplement les hem passat per alt.[3]

---

[1] *Peckhaus 1994*, 317.
[2] *Hilbert 1910*, 159.
[3] *Ibid.*, 146.

Hilbert es pregunta llavors immediatament "¿a que podem reduir els axiomes de la l'aritmètica? i respon "a les lleis de la lògica". Tot això posava, sens dubte, l'axiomatització de la lògica en el primer pla de les seves recerques sobre els fonaments de les matemàtiques. No ens ha d'estranyar, doncs, que alguns anys després Hilbert exalcés l'axiomatització de la lògica duta a terme per Whitehead i Russell a *Principia Mathematica* (*1910-13*) i la seva solució a les paradoxes lògiques a través de la teoria de tipus. Així, en la coneguda conferència "Axiomatisches Denken" ["Pensament axiomàtic"] (*1917*), Hilbert valorarà els dos desenvolupaments del mètode axiomàtic que hem esmentat fa un moment en els termes següents. Pel que fa a l'axiomatització de Zermelo de la teoria de conjunts de Cantor i Dedekind, Hilbert assenyala que a través d'ella "es limita de forma adequada, d'una banda, l'arbitrarietat de les definicions dels conjunts i, d'una altra, la licitud de les afirmacions sobre els seus elements, per tal de desenvolupar la teoria de conjunts de manera que s'eliminin les contradiccions en qüestió i que, tot i les limitacions imposades, l'abast i l'aplicabilitat de la teoria de conjunts romangui la mateixa".[1] La importància de la teoria de conjunts rau, segons Hilbert, en què gràcies a ella "la pregunta per la manca de contradicció del sistema d'axiomes per als *nombres reals* es pot reduir a una pregunta anàloga per als nombres sencers: aquest és el servei de la teoria dels nombres irracionals de Weiertrass i Dedekind".[2] D'aquesta manera, el problema de la demostració de la consistència dels axiomes de la geometria queda reduït a la demostració de la consistència dels axiomes de l'aritmètica i la teoria de conjunts i, en darrer terme, a la de la lògica, car "la reducció a un altre disciplina particular és manifestament inviable, donat que no hi ha fora de la lògica cap disciplina més sobre la qual sigui possible basar-se després".[3] Així doncs, "donat que la demostració de la manca de contradicció [de l'aritmètica i la teoria de conjunts] és una tasca ineludible, sembla necessari axiomatitzar la mateixa lògica i demostrar que tant la teoria de nombres com la teoria de conjunts són només una part de la lògica".[4] Això és el que aconseguiren Russell i Whitehead, en el que constituí el segon gran desenvolupament del mètode axiomàtic en aquest període a què abans fèiem referència. Aquests autors, en efecte, exposaran a *Principia Mathematica* la seva coneguda axiomatització de la lògica de Frege en el marc de la teoria ramificada de tipus, gràcies a la qual es podien evitar les paradoxes a què portava la lògica fregeana. No debades, Hilbert considerarà l'axiomatització de la lògica duta a terme per Russell i

[1] *Hilbert 1965 3,* 152.
[2] *Ibid.*, 153.
[3] *Ibid.*, 153.
[4] *Ibid.*, 153.

Whitehead "la coronació del treball d'axiomatització vist en conjunt".[1] Amb tot, tal com remarcarà Bernays en el seu article "Hilberts Untersuchungen über die Grundlagen der Arithmetik" (*1935*), *Principia Mathematica* només podia oferir als ulls de Hilbert una confiança de tipus experimental o "inductiva" de la no contradicció dels axiomes lògics, no pas una seguretat absoluta com la que ell cercava, car l'únic que es pot fer en el marc de *Principia* en aquest respecte és derivar teoremes i veure que d'ells no se segueix cap contradicció.[2] D'aquesta manera, el problema de la demostració de la no contradicció dels axiomes de la lògica i, amb ell, el de la no contradicció dels axiomes de l'aritmètica i de la teoria de conjunts romania encara obert. A més, tal com escriu Hilbert en l'article de 1917:

> Si examinem atentament la qüestió, ens adonarem ben aviat que la pregunta per la no contradicció dels nombres sencers i dels conjunts no és una pregunta aïllada, sinó que pertany a un gran domini de preguntes epistemològiques d'un regust específicament matemàtic, entre les quals esmentaré, per tal de caracteritzar breument aquest domini de preguntes, les següents: el problema de la *resolubilitat* de principi de *cada una de les qüestions matemàtiques*, el problema de la conseqüent *verificabilitat* dels resultats d'una recerca matemàtica, la pregunta per un *criteri de simplicitat* de les demostracions matemàtiques, la pregunta per la relació entre *contingut* i *formalisme* de la lògica i les matemàtiques i, finalment, el problema de la *decidibilitat* d'una qüestió matemàtica a través d'un nombre finit d'operacions.[3]

D'aquí que, continua Hilbert, "no ens podrem donar per satisfets amb l'axiomatització de la lògica, fins que totes les preguntes d'aquesta mena i les seves interconnexions hagin estat enteses i aclarides".[4] Totes aquestes qüestions i, en particular, la decidibilitat d'una qüestió matemàtica -que és, sens dubte, la més important de totes- li sembla a Hilbert que obren "un nou camp de recerca que cal explorar i per conquerir aquest camp -si més no, aquest és el meu convenciment- hem de convertir el mateix concepte de demostració matemàtica en objecte específic de recerca".[5] Aquestes són les paraules amb què Hilbert reprèn de nou la idea central de la seva *Beweistheorie*, que ja havia expressat al final de la conferència de 1904 sobre els fonaments de la lògica i l'aritmètica i que desenvoluparà

---

[1] *Ibid.*, 153.
[2] *Cf. ibid.*, 200.
[3] *Ibid.*, 153.
[4] *Ibid.*, 153.
[5] *Ibid.*, 155.

a començaments dels anys vint en els articles "Neubegründung der Mathematik. Erste Mitteilung" i "Die logischen Grundlagen der Mathematik" (*Cf. supra*, § 4).

7. Les lliçons de 1917-18: el càlcul proposicional

Abans dels articles esmentats al final de la secció anterior, Hilbert donarà una sèrie de *lliçons* a la universitat de Göttingen sobre lògica i fonaments de les matemàtiques, entre els quals destaquen les següents: *Prinzipien der Mathematik* (*1917-18*), *Logik-Kalkül* (*1920-21*) i *Grundlagen der Mathematik* (*1921-22*). Les lliçons de 1917-18, mereixen ser estudiades perquè Hilbert i Ackermann es basaran en elles per redactar el seu famós llibre *Grundzüge der theoretischen Logik* [*Elements de lògica teòrica*] (*1928*) i perquè en elles, per primera vegada en la història, es presentarà la lògica de primer ordre com un sistema separat i independent de la lògica d'ordre superior i es plantejaran en relació a ella les qüestions metalògiques que Hilbert havia plantejat en relació a la lògica proposicional en les lliçons de 1905. Per un altre costat, en les lliçons de 1921-22 trobem la primera exposició detallada de la teoria de la demostració hilbertiana [*Hilbertsche Beweistheorie*], en la qual es basaran els articles de 1922 esmentats al final de la secció anterior. En aquesta i les següents seccions ens farem ressò només de les contribucions al desenvolupament de la lògica contemporània contingudes en les lliçons de 1917-18, car el desenvolupament de la *Beweistheorie* queda fora del nostre estudi i ha estat estudiat acuradament per W. Sieg a l'article "Hilbert's Programs: 1917-1922" ja citat.

Tal com hem vist abans, en la conferència *Axiomatisches Denken* de 1917, Hilbert havia lloat l'axiomatització de la lògica duta a terme per Whitehead i Russell a *Principia* i la consegüent reducció, gràcies a la teoria de tipus allí exposada, de la teoria de nombres i la teoria de conjunts a la lògica. Això posava evidentment els axiomes de la lògica i les qüestions relatives a la independència, completesa i no contradicció d'aquests axiomes en el punt de mira de la recerca hilbertiana. Com veurem en aquesta i les propers seccions, Hilbert i Bernays aniran precisant aquestes qüestions metalògiques en les lliçons que hem esmentat abans, fins donar-lis la forma definitiva que trobem en la segona edició del llibre de *Grundzüge der theoretischen Logik*, el qual constituirà el punt de partida de les recerques metalògiques de Gödel en els anys immediatament següents. El plantejament de les qüestions metalògiques abans esmentades requereix evidentment convertir la lògica mateixa en objecte d'estudi i, per això, cal veure-la com un sistema purament formal de signes, desproveïts de tot significat o contingut, al qual es pugui aplicar el mètode axiomàtic. És tracta, en definitiva, de veure la lògica, ja no com una disciplina fonamental a la qual puguin reduir-se totes les matemàtiques (logicisme), sinó més aviat com una branca més de les matemàtiques a la qual pugui ser aplicat el mètode axiomàtic. Doncs bé, tal com ha assenyalat G. Moore en l'article "Hilbert and the Emergence of Modern Mathematical Logic" (*1997*), aquesta és una idea bàsica que apareix per primera vegada en les lliçons de 1917-18 i que romandrà pràcticament intacta en el llibre de 1928 escrit en col·laboració amb Ackermann:

> En aquelles lliçons [Hilbert] escrivia: "El càlcul de la lògica consisteix en l'aplicació del mètode formal de l'àlgebra al camp de la lògica" (*1917-18*, 63). I en les lliçons de 1920-1 repetí la mateixa frase, llevat que ara substituirà la paraula "àlgebra" per "matemàtiques". Aquesta mateixa frase, lleugerament elaborada, obre el llibre de 1928: "La lògica teòrica, també anomenada lògica matemàtica o simbòlica, és una aplicació del mètode formal de les matemàtiques al camp de la lògica" (*1928*, 1).[1]

Les lliçons de 1917-18 estan dividides en dues parts: la part A, titulada *Axiomatisches Methode,* en la qual Hilbert fa una presentació del mètode axiomàtic aplicat a la geometria i l'anàlisi, i la Part B, titulada *Mathematische Logik*, en què aplica aquest mètode a la lògica. Aquesta segona part s'organitza en els cinc capítols següents:

1. Der Aussagen-Kalkül [El càlcul proposicional]
2. Prädikaten-Kalkül und Klassen-Kalkül [El càlcul de predicats i el càlcul de classes]
3. Überleitung zum Funktionen-Kalkül [Transició al càlcul funcional]
4. Systematische Darstellung des Funktionen-Kalkül [Representació sistemàtica del càlcul funcional]
5. Der erweiterte Funktionen-Kalkül [El càlcul funcional ampliat]

Aquesta estructura es conservarà de forma pràcticament idèntica en el llibre de Hilbert i Ackermann de 1928, només que en aquest darrer els capítols 3 i 4 de les lliçons de

[1] *Moore 1997*, 72.

1917-18 es fondran en un sol capítol titulat “Die Eingere Funktionen-Kalkül” [El càlcul funcional restringit]. Per *càlcul funcional* (1917-18) o *càlcul funcional restringit* (1928), Hilbert entén el que avui en dia anomenem lògica de primer ordre, i per *càlcul funcional ampliat* el que anomenem lògica d’ordre superior. La mateixa estructura de les lliçons de 1917-18 mostra clarament que, tal com comentàvem abans, en elles hi podem trobar la primera exposició de la lògica de primer ordre com un sistema autònom i diferenciat de la lògica d’ordre superior. Aquesta presentació de la lògica de primer ordre com un sistema específic i diferent de la lògica d’ordre superior és una de les fites més celebrades del llibre de Hilbert i Ackermann de 1928, car és allí on apareix publicada per primera vegada. Church, per exemple, ha observat que:

> La separació del càlcul funcional de primer ordre dels d’ordre superior es troba de forma implícita en la teoria de tipus de Russell o potser, fins i tot abans, en la jerarquia de “Stufen” de Frege o la jerarquia de “reine Mannigfaltigkeiten” de Schröder. La consideració per part de Löwenheim i, després, de Skolem de “Zählausdrücke” i “Zählgleichungen” en connexió amb el càlcul de Schröder és efectivament un tractament del càlcul de primer ordre amb igualtat. Els càlculs funcionals monàdic de primer i segon ordre, amb i sense igualtat, foren també estudiats per Behmann. Però la primera formulació explícita del càlcul funcional de primer ordre com un sistema logístic independent es troba segurament en la primera edició de *Grundzüge der theoretischen Logik* (1928) de Hilbert i Ackermann.[1]

Però, com ja hem dit abans, aquesta primera formulació de la lògica de primer ordre com un sistema formal cal retrotreure-la a les lliçons de 1917-18, en les qual es basaren Hilbert i Ackermann per escriure el seu famós llibre de 1928. Per un altre costat, com dèiem abans, el mèrit d’aquestes lliçons rau no solament en el fet que en elles es presenti la lògica de primer ordre com un sistema formal, separat i independent de la lògica d’ordre superior, sinó també en el fet que allí es plantegen, també per primera vegada en la història, les qüestions metalògiques en relació a aquell sistema lògic que constituiran l’objecte fonamental d’estudi de la lògica contemporània. Per veure això amb una mica més detall, estudiarem la presentació que fa Hilbert en aquestes lliçons del càlcul proposicional i del càlcul de primer ordre de les qüestions més interessants que es plantegen en el seu marc, especialment les qüestions de caràcter metalògic.

[1] *Church 1956*, 288-89.

Pel que fa a la lògica proposicional, el càlcul presentat per Hilbert en el primer capítol de les lliçons de 1917-18 és molt semblant al de les lliçons de 1905. El llenguatge consta, en efecte, dels mateixos signes, però ara el signe "≡" és reemplaçat pel signe "=" i "·" és reemplaçat per "×". Els axiomes són les lleis commutativa, associativa i distributiva per "+" i "×", la llei d'identitat $X = X$, una llei que afirma que $X = 0$ o $X = 1$ i els axiomes IX-XII de les lliçons de 1905. Tal com havia fet en aquelles lliçons, Hilbert es demanarà també per les propietats metalògiques d'aquest sistema axiomàtic, però amb una notable diferència:

> Tal com s'esdevé amb tot sistema axiomàtic, hom pot plantejar també per aquest sistema les qüestions relatives a la manca de contradicció, independència lògica i completesa. La qüestió més important és aquí la relativa a la completesa. Car l'objectiu de la lògica consisteix precisament a desenvolupar la lògica emprada habitualment a partir de supòsits formalitzats. Per això mateix, es tracta essencialment demostrar que el nostre sistema d'axiomes és suficient per bastir la lògica corrent.[1]

Així doncs, Hilbert no només incorpora ara la completesa a les qüestions metalògiques plantejades en les lliçons de 1905 -la consistència i independència-, sinó que considera que la completesa és la propietat més important que ha de posseir un sistema axiomàtic i no pas, com havia afirmat a 1905, la consistència. En el text anterior no queda del tot clar què entén Hilbert per completesa i, de fet, Hilbert no arriba a abordar la qüestió de la completesa del càlcul proposicional abans exposat. Hilbert si que demostrarà, en canvi, la seva consistència i la independència d'algun dels seus axiomes. Pel que fa a la *independència*, Hilbert defineix un model aritmètic en el qual les lletres proposicional s'interpreten com nombres sencers; 0, 1 i "+" s'interpreten aritmèticament de la forma habitual; les identitats s'interpreten com congruències entre sencers mòdul 2; $\overline{X}$ s'interpreta com la funció $1 - X$ i, finalment, la suma lògica s'interpreta com la funció constant 0. L'estructura així resultant satisfà els axiomes 1-10, però no satisfà els axiomes 11 i 12, la qual cosa demostra la independència d'aquests dos darrers axiomes respecte als deu primers.[2] Per demostrar la consistència dels axiomes proposicionals, Hilbert empra el mètode anomenat en les lliçons de 1920-21 d'*exhibició* [*Aufweisung*], que consisteix en la construcció d'un *sistema de coses* en el qual els axiomes siguin satisfets. A tal efecte, Hilbert dóna, com diríem avui en dia, una estructura en la qual interpreta aritmèticament les

[1] *Hilbert 1917-18*, 67.
[2] *Ibid.*, 69.

connectives lògiques del llenguatge proposicional i on les proposicions poden rebre només uns valors determinats. Donat que en aquesta estructura tots els axiomes de la lògica proposicional són satisfets, Hilbert conclou llavors que aquest conjunt d'axiomes és consistent:

> Restringim el domini de les proposicions de manera que només es permetin les proposicions 0 i 1 i, d'acord amb això, interpretem les equacions com identitats pròpiament dites. Definim, a més, la suma i el producte a través de les vuit equacions
>
> $$\begin{array}{ll} 0+0=0 & 0\times 0=0 \\ 0+1=1 & 0\times 1=0 \\ 1+0=1 & 1\times 0=0 \\ 1+1=1 & 1\times 1=1 \end{array}$$
>
> les quals es caracteritzen pel fet que esdevenen equacions aritmètiques correctes en reemplaçar la suma simbòlica pel valor màxim dels sumands i el producte simbòlic pel valor mínim dels factors. Definim la proposició 1 com la negació de la proposició 0, i la proposició 0 com la negació de la proposició 1.
>
> Aquestes definicions no duen en cap cas a una contradicció, donat que en cada una d'elles es defineix un símbol nou. Per un altre costat, hom pot establir a través d'un nombre finit d'intents que tots els axiomes I-XII són satisfets amb aquestes definicions. Per això mateix, aquests axiomes no poden donar com a resultat una contradicció. D'aquesta manera, la qüestió de la manca de contradicció del nostre càlcul queda totalment resolta.[1]

En aquest text, hi ha algunes qüestions que cal remarcar: La primera és que, tal com havíem dit abans, la demostració de la consistència dels axiomes es fa a partir de l'exhibició d'una *estructura* en la qual se satisfan els axiomes, això és, d'un *model* per aquestes sentències. El *rationale* d'aquest mètode ja l'hem explicat abans a partir de la controvèrsia amb Frege i no val la pena aturar-s'hi de nou (*Cf. supra*, § 3). La segona qüestió és que aquest model és un *model aritmètic*, però de tipus *finit*, donat que el domini d'interpretació i el conjunt de definicions són finits. Això fa que la prova de consistència no sigui relativa, és a dir, no depengui de la consistència de l'aritmètica. En aquest sentit, és interessant remarcar també el fet que Hilbert sembla donar voltes a la idea d'assignar a les proposicions els valors 0 i 1 i, de fet, defineix inicialment la suma i el producte de forma molt semblant a com les

[1] *Ibid.*, 70.

definiríem avui en dia a través de les seves taules de veritat, car això suposaria bastir una interpretació veritativo-funcional de la lògica proposicional. Amb tot, aquesta idea no acaba d'imposar-se i, en darrer terme, la demostració de la consistència del càlcul proposicional es basa, segons afirma Hilbert, en el fet que les equacions a través de les quals s'ha definit la suma i el producte esdevenen "equacions aritmètiques correctes" i que, un cop definida la negació, els axiomes són satisfets una vegada interpretades aritmèticament les diferents connectives lògiques. La tercera i última qüestió que cal remarcar en relació al text anterior és l'ús de la paraula *correcta* [*richtig*] en un sentit semblant al de les lliçons de 1905, a saber, en el sentit de *vertadera* o, més exactament, *vertadera en una estructura*. Tal com veurem en la secció següent, les dues últimes remarques són importants per comprendre les novetats que introdueix l'*Habilitationschrift* de Bernays en relació a les lliçons de Hilbert de 1917-18.

Com hem vist abans, Hilbert exposa en el capítol 4 de les lliçons de 1917-18 el càlcul funcional com un sistema formal axiomàtic, el fragment proposicional del qual és recercat separadament en la secció 2 del mateix capítol titulada "El sistema de les fórmules de la lògica proposicional". El llenguatge d'aquest fragment consisteix com abans de variables proposicionals X, Y, Z, ..., però ara Hilbert introdueix la disjunció ($\times$) i la negació ($-$) com a connectives primitives, mentre que el condicional ($\rightarrow$), la conjunció ($+$) i l'equivalència ($=$) són introduïts com abreujaments seus. Hilbert defineix llavors les expressions (fórmules) de la lògica proposicional mitjançant les següents clàusules:

1. Tota variable proposicional és una expressió.
2. Si α és una expressió, també ho és $\bar{\alpha}$.
3. Si α i β són expressions, també ho són $\alpha \times \beta$, $\alpha \rightarrow \beta$, $\alpha + \beta$ i $\alpha = \beta$.[1]

Aquesta és una definició recursiva en el metallenguatge, car α, β, ... són variables metalingüístiques que tenen com a rang les fórmules de la lògica proposicional. Tal com veurem després, Hilbert definirà de forma anàloga les fórmules de primer ordre, la qual cosa constitueix evidentment un gran salt endavant car, com ja sabem, la definició en el metallenguatge de les fórmules del llenguatge lògic i, en general, la distinció entre llenguatge i metallenguatge és una eina fonamental per a les recerques metalògiques o

[1] *Ibid.*, 130-31. Hilbert defineix la noció de fórmula i presenta els axiomes i les regles d'inferència en relació al càlcul funcional, però donat que en la secció 2 Hilbert estudia el fragment proposicional d'aquest càlcul, sembla lícit exposar la definició de fórmula, els axiomes i les regles d'inferència d'aquest fragment per separat.

model-teorètiques. Finalment, Hilbert introdueix el següent conjunt d'axiomes (on "XY" és un abreujament de "$X \times Y$"):

$$1.\ XX \to X$$
$$2.\ X \to XY$$
$$3.\ XY \to YX$$
$$4.\ X(YZ) \to (XY)Z$$
$$5.\ (X \to Y) \to (ZX \to ZY),$$ [1]

i enuncia les dues regles següents (substitució i *modus ponens*):

> I. A partir d'una formula correcta hom n'obté una altra reemplaçant totes les ocurrències d'una variable proposicional amb una i la mateixa expressió.
>
> II. Si α i $\alpha \to \beta$, són fórmules correctes, llavors β també és correcte.[2]

Aquest càlcul és molt semblant al de *Principia Mathematica*, essent la diferència principal entre ells el fet que en aquesta última obra la regla de substitució no s'enuncia de forma explícita. Entre els resultats demostrats a partir dels axiomes i regles anteriors destaca un teorema de la forma normal, el qual s'empra ara no només, com s'havia fet a les lliçons de 1905, per demostrar la decidibilitat del càlcul proposicional, sinó també per demostrar la seva Post-completesa. La primera qüestió metalògica abordada per Hilbert en aquest context és la de la consistència dels axiomes. Hilbert demostra de nou la consistència dels axiomes proposicionals apel·lant a una estructura aritmètica de tipus finit que interpreta les variables proposicionals com els nombres 0 o 1, "XY" com el producte aritmètic i "$\bar{X}$" com "$1 - X$". En aquesta estructura, els cinc axiomes són iguals a 0 i les regles d'inferència preserven aquesta propietat. Així, si una fórmula α és demostrable serà igual a 0 i, per tant, la seva negació $\bar{\alpha}$ serà igual a 1 i no serà, doncs, demostrable.[3] Una vegada demostrada la consistència dels axiomes proposicionals, Hilbert aborda el problema de la seva completesa. Per això li cal precisar aquesta noció, que en el capítol 1 havia introduït només de forma intuïtiva, i ho fa en els termes següents:

---

[1] *Ibid*., 133.

[2] *Ibid*., 134 i 135 respectivament.

[3] *Cf. ibid*., 151.

> Anomenarem complet al sistema d'axiomes presentat, si l'afegit d'una fórmula, fins ara no demostrada, al sistema de fórmules bàsiques [*i.e.* axiomes] sempre dóna lloc a un sistema contradictori.[1]

Veiem, doncs, que en les lliçons de 1917-18, Hilbert acaba entenent per completesa allò que en el llibre de 1928 anomenarà completesa en sentit estricte o, com diríem avui en dia, Post-completesa. Tal com havíem dit abans, Hilbert demostra la Post-completesa del càlcul proposicional a partir del teorema de forma normal. D'acord amb aquest, en efecte, tota fórmula és deductivament equivalent a una fórmula en forma normal conjuntiva, això és, una fórmula del tipus $\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_n$, on cada α_i $(1 \leq i \leq n)$ és un literal (una variable proposicional o la seva negació) o una disjunció de literals. Evidentment, una fórmula d'aquesta mena és demostrable si, i només si, tots els α_i són demostrables. Per la demostració de consistència, si una disjunció α_i és demostrable, llavors és igual a 0 i, tal com demostra Hilbert, és igual a 0 si, i només si, conté la disjunció d'una variable i la seva negació. Per tant, una fórmula α és demostrable si tota fórmula α_i de la seva forma normal conjuntiva β conté una variable i la seva negació. Ara, si α no és demostrable, llavors β tampoc ho serà i, per tant, hi haurà un α_i on no hi figurarà cap variable amb la seva negació. Fent les oportunes substitucions, Hilbert demostra que aquest α_i és equivalent a la disjunció de la variable X n vegades i, per tant, a la mateixa X. Finalment, substituint X per $\bar{X}$ obté la contradicció cercada.[2]

Tal com hem dit abans, per demostrar la consistència del càlcul proposicional, Hilbert demostra que les fórmules demostrables són aquelles que són sempre iguals a 0 (teorema de *correcció*). Doncs bé, en una nota a peu de pàgina Hilbert demostra el recíproc, a saber, que tota fórmula que és sempre igual a 0 és demostrable (teorema de *completesa*). En efecte, si aquesta fórmula fos igual a 0 i no fos demostrable, llavors, pel teorema de consistència, el sistema axiomàtic resultant d'afegir aquesta fórmula als axiomes existents seria consistent. Però aquest resultat contradiu clarament la Post-completesa del càlcul proposicional.[3] Naturalment, aquests resultats constitueixen una demostració de la *completesa semàntica* del càlcul proposicional, encara que Hilbert no hagués estat capaç de precisar aquesta noció o de veure la seva importància teòrica.

---

[1] *Ibid.*, 152.
[2] *Cf. ibid.*, 153.
[3] *Cf. ibid.*, 153, n. 1.

8. L'*Habilitationschrift* de 1918 de Bernays

El primer en definir rigorosament la noció de completesa en sentit modern i en destacar-ne la seva importància fou P. Bernays en la seva *Habilitationschrift* (*1918*), algunes parts de la qual foren publicades uns anys després a la revista *Mathematische Zeitschrift* amb el títol "Axiomatische Untersuchung des Aussagen-Kalkuls der "Principia mathematica"" (*1926*). En el primer paràgraf de l'*Habilitationschrift* de 1918, Bernays introdueix el càlcul proposicional d'una manera estrictament formal. A tal efecte, Bernays defineix primer la noció de fórmula i postula després els axiomes i regles d'inferència de forma pràcticament idèntica a com ho havia fet Hilbert en les lliçons de 1917-18. En el segon paràgraf, Bernays introdueix el que anomena una *interpretació de contingut* [*inhaltlichen Interpretation*] per al càlcul que ha exposat en el paràgraf anterior. Segons Bernays:

> Aquesta interpretació s'obté de la manera següent:
>
> Les variables és consideraran símbols per a enunciats (proposicions).
>
> Hom considerarà la propietat característica dels enunciats el fet que siguin o bé vertaders o bé falsos, però no totes dues coses a la vegada.
>
> El producte simbòlic s'interpretarà com la connexió de dos enunciats mitjançant la "o", on aquesta connexió no s'ha d'entendre en el sentit d'una disjunció pròpia, que exclou que els dos enunciats s'acompleixin alhora, sinó més aviat de manera que "*X* o *Y*" s'acompleixi (això és, sigui vertader) quan, i només quan, almenys un dels dos enunciats *X*, *Y* s'acompleixi [...]. [1]

Bernays defineix de forma anàloga la resta de connectives. En relació a la presentació anterior de la lògica proposicional convé ja remarcar algunes diferències importants respecte a la presentació que en fa Hilbert en les lliçons de 1917-18. En primer lloc, Bernays presenta primer el sistema formal i després la seva interpretació, la qual cosa indica una clara separació entre sintaxi i semàntica que contrasta clarament amb la pràctica habitual de Hilbert de presentar-les conjuntament. En segon lloc, la interpretació que fa Bernays del càlcul proposicional és una interpretació veritativo-funcional, la qual cosa contrasta de nou amb la interpretació aritmètica que en fa Hilbert. Finalment, en base a la distinció entre sintaxi i semàntica, Bernays remarcarà la necessitat de distingir rigorosament la noció de

---

[1] *Bernays 1918*, 3-4.

fórmula *generalment vàlida* [*allgemeingültig*] de la noció de fórmula *demostrable* [*beweisbare*], distinció que havia estat obviada per Hilbert en parlar habitualment de fórmules correctes [*richtige*], sense precisar en cap moment aquesta noció. La finalitat de Bernays en fer això era poder demostrar que tota fórmula *demostrable* de la lògica proposicional és *generalment vàlida* (teorema de *correcció*) i, recíprocament, que tota fórmula *vàlida* de la lògica proposicional és *demostrable* (teorema de *completesa*). Segons Bernays, en efecte:

> La importància del nostre sistema d'axiomes per a la lògica descansa en el fet següent: Si hom entén per fórmula "demostrable" una fórmula que es pot demostrar que és correcte d'acord amb els axiomes [Nota a peu de pàgina: Em sembla necessari introduir el concepte de fórmula demostrable junt amb el de fórmula correcte (que no està totalment delimitat) per tal d'evitar un cercle], i per una fórmula "generalment vàlida" una fórmula que, a través d'una elecció arbitrària dels enunciats que substitueixin les variables, dóna com a resultat un enunciat vertader conforme a la interpretació donada, llavors el següent teorema és vàlid:
>
> *Tota fórmula demostrable és una fórmula generalment vàlida i viceversa*.[1]

Les definicions anteriors de fórmula demostrable i fórmula generalment vàlida no són potser tan precises com hom podria esperar -remarquem, per exemple que la definició de fórmula demostrable empra la noció de fórmula correcta, que resta encara sense definir-, però l'ús que fa Bernays d'ambdues nocions al llarg de la seva dissertació no deixa cap mena de dubte que entenia aquests conceptes exactament tal i com els entenem avui en dia. Per exemple, per demostrar la correcció de la lògica proposicional, Bernays demostra que els axiomes són generalment vàlids i que les regles d'inferència preserven la validesa. Ara bé, tal com assenyala Bernays, "per això hom només ha de tenir en compte un nombre finit de casos, donat que les expressions del càlcul són totes de tal mena que la seva veritat o falsedat està unívocament determinada en la interpretació lògica, si per cada un dels enunciats que s'han de substituir per les variables està determinat si és vertader o fals. Com que, d'una altra banda, el contingut d'aquests enunciats és indiferent, hom necessita considerar només com a valor de les variables, en compte d'enunciats, el Vertader i el Fals".[2] En altres paraules, el valor de veritat d'una fórmula està determinat pel valor de veritat que assignem -en la

---

[1] *Ibid*., *6*.
[2] *Ibid*., 6.

interpretació lògica- a les seves variables proposicionals, de manera que una fórmula serà generalment vàlida si, i només si, és vertadera per qualsevol assignació de valors de veritat a les variables. Pel que fa al recíproc, el teorema de completesa, Bernays el demostra de forma completament anàloga a com ho havia fet Hilbert en les lliçons de 1917-18, això és, demostrant primer la correcció i la Post-completesa del càlcul proposicional i demostrant després a partir d'aquestes la seva completesa semàntica. De fet, tal com remarca el mateix Bernays, aquest resultat permet resoldre alhora l'*Entscheidungproblem* en el cas de la lògica proposicional, problema que Hilbert havia plantejat per primera vegada en la lliçó de 1905 (*Cf. supra*, § 5). Segons Bernays, en efecte:

> Aquesta consideració conté no tan sols la demostració de la completesa del nostre càlcul, sinó que forneix a més un procediment uniforme a través del qual hom pot decidir després d'un nombre finit d'aplicacions dels axiomes si cada fórmula del càlcul és una fórmula demostrable o no. Per tal de decidir això, hom necessita només determinar per a l'expressió en qüestió una forma normal i observar si en cada un dels seus productes hi figuren almenys com a factors una variable i la seva negació. Si aquest és el cas, llavors l'expressió considerada és una fórmula demostrable, altrament no ho és. D'aquesta manera, el càlcul pot ser completament trivialitzat.[1]

Finalment, pel que fa la independència dels axiomes de la lògica proposicional, Bernays demostrarà que l'axioma $*1 \cdot 5$ de *Principia* (*Cf. infra*, Apèndix) és dependent, mentre que la resta d'axiomes són mútuament independents. Per fer això, Bernays introdueix unes matrius finites o, com diu ell, "sistemes", on interpreta les connectives lògiques i on les fórmules demostrables adquireixen uns valors distingits [*ausgezeichnete Werte*], mentre que les fórmules independents adquireixen valors diferents. Bernays introdueix aquest mètode en els termes següents:

> En cada una de les proves d'independència següents, el càlcul es reduirà a un sistema finit (un grup finit en el sentit ampli de la paraula [Nota a peu de pàgina: és a dir, sense el supòsit de les lleis associatives i la unicitat de l'invers de la composició], on per a cada un dels seus elements es definirà una composició ("producte simbòlic") i una "negació". Aquesta reducció es realitza fent que les variables del càlcul es refereixin als elements de cada sistema com els seus valors. Les "fórmules correctes"

[1] *Ibid*., 15-16.

es caracteritzen en cada cas pel fet que només prenen valors d'un determinat subsistema *T* per a valors arbitraris de les variables que ocorrin en elles.[1]

Tots els resultats anteriors, assolits per Bernays en la seva *Habilitationschrift* de 1918, no foren publicats fins l'any 1926 en l'article "Axiomatische Untersuchungen des Aussagen-Kalkuls der *Principia Mathematica*" on, tal com indica el mateix títol, es remarcarà sovint la connexió dels resultats obtinguts amb l'obra de Whitehead i Russell i, en canvi, no s'esmentarà en cap moment la seva connexió amb les lliçons de Hilbert de 1917-18, que eren la referència més freqüent en l'*Habilitationschrift* de 1918. És precisament el sistema d'axiomes de Bernays, simplificat del de *Principia Mathematica* després de la demostració de la dependència d'un dels seus axiomes, el que Hilbert i Ackermann adoptaran en el seu llibre de 1928 i Gödel en la seva tesi doctoral de 1929. Pel que fa a les qüestions metalògiques, tal com havia fet en l'*Habilitationschrift* de 1918, Bernays demostra primer de tot la correcció de la lògica proposicional, mostrant que els axiomes són vàlids -és a dir, vertaders per a qualsevol assignació de valors a les variables proposicionals- i que les regles d'inferència preserven la validesa. Bernays observa llavors que de la correcció de la lògica proposicional se segueix immediatament la seva consistència. Finalment, Bernays introdueix la definició de completesa semàntica i demostra la completesa de la lògica proposicional a partir de la seva correcció i Post-completesa, emprant per a la demostració d'aquesta última essencialment el mateix argument que Hilbert havia fet servir en una nota a peu de pàgines en les lliçons de 1917-18 (*Cf. supra*, § 6). Ni en l'*Habilitationschrift* de 1918 ni en l'article de 1926, Bernays posa el problema de la completesa de la lògica de primer ordre, però això no ens ha de sorprendre perquè l'objecte de recerca és en ambdós casos la lògica proposicional.

9. Les lliçons de 1917-18: el càlcul funcional

Una vegada estudiades les innovacions introduïdes per Bernays en la seva *Habilitationschrift* de 1918 en l'aplicació del mètode axiomàtic a la lògica proposicional, centrarem de nou la nostra atenció en les lliçons de 1917-18 i estudiarem l'aplicació que fa en elles Hilbert del mètode axiomàtic al càlcul funcional, és a dir, a la lògica de primer ordre.

[1] *Bernays 1926*, 27-28.

Tal com s'esdevenia amb el càcul proposicional, Hilbert desenvolupa també el càlcul funcional com un sistema formal axiomàtic. A tal efecte, enuncia primer de tot els símbols primitius: les variables i constants: individuals, proposicionals i funcionals; els símbols lògics: la negació, la disjunció i el quantificador universal (la resta de connectives lògiques i el quantificador s'introdueixen com a símbols auxiliars); i, finalment, els parèntesis. Hilbert defineix després recursivament les expressions del càlcul funcional. La definició de la noció d'expressió del càlcul funcional o, com diríem avui en dia, de fórmula de primer ordre, és molt similar a la que hom trobarà després en el llibre de 1928 escrit amb Ackermann i consta, a més de les clàusules específiques del fragment proposicional (*Cf. supra*, § 7), de les dues clàusules següents:

> 1. Un signe de funció, cada lloc buit del qual ha estat omplert per una variable o per un nom propi, és una expressió.
> 2. Si a és una expressió, llavors $(x)a$ és una expressió; per abreujar, hom escriurà normalment $(Ex)a$ en comptes de $\overline{(x)\overline{a}}$.[1]

Tal com hem dit abans, aquesta definició recursiva del conjunt de les fórmules de primer ordre és un fet digne de remarcar no només perquè forneix una definició *efectiva* d'aquest conjunt, sinó perquè constitueix una eina indispensable per a la majoria de les demostracions relacionades amb les qüestions metalògiques. En efecte, tal com ha assenyalat G. Moore:

> Avui en dia, les definicions recursives d'aquesta mena són la base de molts teoremes sobre fórmules i són una eina essencial per a la lògica. Però aquest no és el cas de [les lliçons de] 1917 i el mateix Hilbert no va emprar la seva definició per demostrar res sobre totes les fórmules (encara que si ho va fer a [les lliçons de] 1921-22. No obstant això, Hilbert va donar la primera definició rigorosa de fórmula de primer ordre. En efecte, la definició és en el metallenguatge. La importància d'aquesta definició rau en el tractament de les fórmules com a objectes purament sintàctics, *i.e.* com a cadenes de signes mancats de significat (Recordem que Russell i Whitehead havien argumentat que no hi podia haver una definició de fórmula de *PM* i insistit en què no hi havia manera possible de demostrar enunciats sobre totes les fórmules de *PM*).[2]

[1] *Hilbert 1917-18*, 130-31.
[2] *Moore 1997*, 76.

Finalment, una vegada exposat el llenguatge de la lògica de primer ordre, Hilbert exposa els axiomes i les regles d'inferència que converteixen aquest en un càlcul deductiu. Aquests axiomes i regles inclouen els del fragment proposicional que ja coneixem (*Cf. supra*, § 7). A diferència del que s'esdevenia amb els axiomes per a la lògica proposicional, els quals són una versió simplificada dels axiomes de *Principia Mathematica* -encara que aquesta obra no és esmentada explícitament-, els axiomes postulats per a la lògica quantificacional pròpiament dita tenen molt poc a veure amb els de *Principia*. Es tracta de sis axiomes, la majoria dels quals són evidentment innecessaris i que no val la pena reproduir aquí. El conjunt de regles d'inferència és també força complicat, car inclou diverses regles de substitució i d'altres referides als quantificadors, que tampoc reproduirem aquí. En el llibre *Grundzüge der theoretischen Logik* de 1928 escrit amb Ackermann, els axiomes proposicional són els mateixos -llevat de l'axioma la dependència del qual fou demostrada per Bernays en la seva *Habilitationschrift*-, però els axiomes per als quantificadors i les regles d'inferència són molt diferents. En les lliçons de 1917-18, Hilbert anomena *axiomes formals* [*formale Axiome*] als axiomes pròpiament dits i *axiomes de contingut* [*inhaltliche Axiome*] a les regles d'inferència, amb la qual cosa indica la naturalesa lingüística del primers -Hilbert també els anomena *fórmules lògiques bàsiques* [*logische Grundformeln*]- i metalingüística de les segones -recordem que, per exemple, per enunciar el *modus ponens*, Hilbert empra variables metalingüístiques (*Cf. supra*, § 7). Segons Hilbert, el punt de partida del càlcul el constitueix la hipòtesi que els axiomes són *fórmules correctes* [*richtige Formeln*]. Hilbert no especifica què entén per fórmula correcta, però assenyala tot seguit que, en el context de l'aplicació del sistema lògic exposat per a la formalització d'una teoria matemàtica, "també es poden considerar fórmules correctes aquelles que representen simbòlicament els axiomes de la teoria o *bé* altres judicis que es consideren vàlids [*gültig*]".[1] De fet, al llarg de tota la seva exposició, a diferència del que hem vist que s'esdevenia amb l'*Habilitationschrift* de Bernays, Hilbert barreja constantment les consideracions de tipus sintàctic i semàntic apareixen. Amb tot, una vegada exposat el sistema d'axiomes i regles d'inferència per a la lògica de primer ordre, Hilbert delimita clarament quina és la seva funció com a càlcul deductiu i quan és necessària una interpretació semàntica. Segons Hilbert, en efecte:

[1] *Hilbert 1917-18*, 133.

> Aquest sistema d'axiomes ens forneix un procediment per dur a terme les demostracions lògiques d'una manera que no haguem de preocupar-nos gens ni mica pel sentit [*Sinn*] dels judicis que són representats mitjançant fórmules, sinó que només haurem d'observar les prescripcions obtingudes en les regles. Amb tot, haurem de donar un significat [*Deutung*] als signes del nostre càlcul per tal de representar simbòlicament les premisses de les quals partim i per interpretar els resultats obtinguts a través de les operacions formals.[1]

Segons Hilbert, aquesta *interpretació* [*Interpretation*], s'obté de la següent manera:

> Pel que fa als signes lògics, aquesta interpretació s'efectua com abans, d'acord amb la lectura lingüística prescrita; i la ocurrència de signes proposicionals i funcionals en una fórmula s'entendrà com segueix: que *per substitucions arbitràries* de proposicions i funcions [...] l'afirmació que resulta de la fórmula és correcta.[2]

La "lectura lingüística" dels signes lògics forneix el que podríem anomenar la seva interpretació lògica habitual, la qual ha estat explicitada per Hilbert en introduir aquesta mena de signes. Així, pel que fa als signes primitius del càlcul, Hilbert "llegeix" $\overline{X}$ com "no-X", $X \times Y$ com "X o Y" i $(x)F(x)$ com "Per a tot x, $F(x)$".[3] Amb tot, Hilbert no va més enllà d'aquí, en el sentit que no intenta, per exemple, fornir una interpretació veritativo-funcional per a les connectives proposicionals, cosa que si farà Bernays en l'*Habilitationschrift* de 1918 (*Cf. supra*, § 8). En una nota a peu de pàgina, Hilbert aclareix que els quantificadors universal i existencial "han de referir-se sempre a una col·lecció d'objectes determinada",[4] és a dir, a un domini d'interpretació concret i fixat per endavant. Finalment, les variables proposicionals i funcionals podran prendre qualsevol valor del domini en qüestió. Així, una expressió del càlcul funcional que no contingui variables proposicionals o funcionals serà correcta si és vertadera en el domini en el qual s'interpretin els signes lògics que figurin en ella, mentre que una expressió que contingui aquesta mena de variables serà correcta, tal com hem vist, si "*per substitucions arbitràries* de proposicions i funcions [...] l'afirmació que resulta de la fórmula és correcta", això és, vertadera en el domini al qual pertanyi el rang de valors de les variables. Aquesta definició de fórmula *correcta* és exactament la que

---

[1] *Ibid.*, 135.
[2] *Ibid.*, 135-36.
[3] *Cf. ibid.*, 130.
[4] *Ibid.*, 135, n. 1.

pressuposa el plantejament del problema de la completesa semàntica del càlcul funcional, tal com el trobem exposat per primera vegada en el llibre de 1928 escrit amb Ackermann:

> Si aquest sistema d'axiomes és complet, si més no en el sentit que totes les fórmules lògiques que són correctes en tot domini d'individus poden ser derivades d'ell, és una pregunta que encara no ha estat resposta. Només podem afirmar de forma purament empírica que aquesta sistema d'axiomes ha estat sempre suficient per qualsevol aplicació.[1]

Aquesta definició de completesa planteja alguns problemes, deguts essencialment a la definició de *fórmula lògica* i l'ambigüitat de la noció de fórmula *correcta*, però més endavant (p. 72), Hilbert i Ackermann definiran la noció de fórmula *generalment vàlida*, que hauria permès una correcta formulació del problema de la completesa del càlcul funcional restringit. De fet, Hilbert i Ackermann defineixen una fórmula generalment vàlida com una fórmula correcta en tot domini, on la noció de fórmula correcta s'entén en el mateix sentit que s'havia especificat en les lliçons de 1917-18, per la qual cosa l'anterior plantejament del problema de la completesa és pot reinterpretar fàcilment en termes de la noció de fórmula generalment vàlida. La definició de fórmula generalment vàlida del càlcul funcional és, d'una altra banda, una generalització de la noció de fórmula generalment vàlida del càlcul proposicional prèviament donada i que, tal com hem vist abans, Bernays havia estat el primer en donar. De fet, en la segona edició del llibre de Hilbert i Ackermann (1938), les expressions "fórmula lògica" i "fórmula correcta" desapareixeran i seran reemplaçades per l'expressió "fórmula generalment vàlida", la definició de la qual (p. 58) coincideix exactament amb la definició que dóna Gödel en el seu article "Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkälkuls" (*1930*), per tal d'explicar l'enunciat del seu famós teorema de completesa: "Tota fórmula generalment vàlida del càlcul funcional restringit és demostrable".[2]

Les qüestions metalògiques recercades per Hilbert en les lliçons de 1917-18 en relació a la lògica de primer ordre són la *consistència* i la *completesa* (*Post-completesa*), les quals reben una resposta positiva i negativa respectivament. Tal com assenyala Hilbert, " el mètode de la interpretació aritmètica, amb l'ajut del qual hem demostrat primer la manca de contradicció i completesa dels axiomes del subsistema investigat [*i.e.* el fragment

[1] *Hilbert i Ackermann 1928*, 68.
[2] *Gödel 1986*, 102. *Cf.* n. 3 i n. 4.

proposicional del càlcul funcional restringit], ens permet també demostrar la manca de contradicció (en el sentit explicat) del sistema complet d'axiomes del càlcul funcional".[1] Així doncs, a Hilbert només li cal, primer, estendre la interpretació aritmètica prèviament donada per al fragment proposicional per tal de poder interpretar els signes específics del càlcul funcional i demostrar, després, que els axiomes i les fórmules demostrables són sempre iguals a 0 en la interpretació donada.[2] Per demostrar la incompletesa del càlcul funcional restringit, assenyala Hilbert, "cal trobar una fórmula que sigui igual a 0, però que no sigui una conseqüència dels axiomes".[3] Hilbert proposa a tal efecte la fórmula $(Ex)F(x) \rightarrow (x)F(x)$, la qual en la interpretació aritmètica abans donada és igual a la constant 0. Amb tot, Hilbert no demostra que aquesta fórmula no és demostrable a partir del sistema d'axiomes del càlcul restringit. La demostració d'aquest fet apareix, per primera vegada, en el llibre de 1928 escrit amb Ackermann, per la qual cosa en aquesta obra trobem la primera demostració que la lògica de primer ordre no és Post-completa (p. 66). Remarquem finalment que, tal com explica Hilbert al final del capítol 4, la funció bàsica del càlcul funcional és la presentació de les teories des d'un punt de vista axiomàtic. Ara bé:

> El càlcul és adient per aquest objectiu essencialment per dues raons: en primer lloc, perquè amb la seva aplicació s'evita que hom empri, sense adonar-se'n, hipòtesis que no han estat introduïdes com axiomes i, després, perquè a través del simbolisme del càlcul hom pot representar les dependències lògiques, que són tan importants en les recerques axiomàtiques, d'una manera especialment precisa.[4]

Amb tot, la lògica no només té com objectiu la formalització de les teories matemàtiques, sinó també la fonamentació de les matemàtiques i, per això, no n'hi ha prou amb el càlcul funcional restringit, sinó que cal també el que Hilbert anomena càlcul funcional ampliat. Com ja sabem, Hilbert dedica a aquest el cinquè capítol de les lliçons de 1917-18, que s'obre amb el següent text:

> Amb els [capítols] anteriors podríem donar per acabades, en principi, les discussions sobre el càlcul lògic, si aquest càlcul no tingués altre objectiu que la formalització de les inferències lògiques. Però amb aquesta aplicació de la lògica

---

[1] *Hilbert 1917-18*, 154.
[2] *Cf. ibid.*, 154-56.
[3] *Ibid.*, 156.
[4] *Ibid.*, 187.

> simbòlica no ens podem pas conformar. No volem ser capaços només de desenvolupar teories concretes a partir dels seus principis d'una manera purament formal, sinó que també volem investigar els fonaments de les mateixes teories matemàtiques i examinar quina és la seva relació amb la lògica i en quina mesura poden ser obtingudes a partir de les operacions i els conceptes de la lògica; i per això el càlcul lògic ens ha de servir com a mitjà d'ajuda.
>
> Quan volem emprar el càlcul lògic en aquest sentit, ens veiem empesos a ampliar les regles del càlcul formal en una determinada direcció. Així, mentre que fins ara havíem procurat mantenir d'una forma rigorosa la separació entre, d'una banda, els enunciats i funcions d'objecte i, d'una altra, les variables, a partir d'ara admetrem que els enunciats i funcions puguin esdevenir, de la mateixa manera que s'esdevé amb els objectes propis, valors de les variables lògiques, i les variables enunciatives i funcionals puguin figurar com arguments de les expressions simbòliques.[1]

Hilbert esmenta a continuació diversos exemples que fan necessària aquesta ampliació del càlcul funcional restringit: el principi d'inducció completa, la definició d'identitat o el concepte de nombre. En relació a aquest últim, per exemple, Hilbert afirma que "el nombre es pot concebre com una propietat d'aquells conceptes sota els quals els objectes contats es poden subsumir".[2] La introducció del concepte de nombre com una propietat dels predicats duu Hilbert a definir també el concepte de conjunt de forma anàloga, donat que "els matemàtics normalment han considerat els nombres propietats dels conjunts".[3] Hilbert defineix evidentment els conjunts com extensions de conceptes i afirma que "la condició necessària i suficient per a que dos predicats determinin un i el mateix conjunt és que els predicats siguin equivalents (en el sentit prèviament explicat)",[4] és a dir que siguin coextensius. Les anteriors consideracions porten Hilbert, en definitiva, a la següent conclusió:

> La relació entre la lògica i la teoria de nombres és un cas especial de la relació *més general* de la relació que es dóna entre la lògica i la teoria de conjunts.[5]

---

[1] *Ibid*., 188.
[2] *Ibid*., 192-93.
[3] *Ibid*., 193.
[4] *Ibid*., 194.
[5] *Ibid*., 195.

En aquest context tan marcadament fregeà que, tal com hem vist, duu Hilbert a acceptar la reducció logicista de la teoria de nombres i la teoria de conjunts a la lògica, Hilbert discuteix les paradoxes que sorgeixen en admetre la quantificació sobre funcions o predicats i el principi de comprehensió. Hilbert comença discutint la versió extensional de la paradoxa de Russell (la paradoxa del conjunt de tots els conjunts que no es contenen pas a si mateixos), però la reducció a la lògica de la teoria de conjunts, permet a Hilbert centrar tota la seva atenció en la versió intensional de la mateixa (la paradoxa dels predicats que es prediquen de tots els predicats que no es prediquen de si mateixos), el descobriment de la qual és atribuït a Russell. Això duu Hilbert a postular el que ell anomena *càlcul de nivells* [*Stufen-Kalkül*] com a solució a les paradoxes. Aquest càlcul no és altra cosa que la *teoria ramificada de tipus* de Russell, però aquest autor no és esmentat en cap moment. Un cop exposat aquest càlcul, Hilbert conclou el següent:

> D'aquesta manera ha estat establerta un nova forma del càlcul, el "càlcul de nivells", que suposa una ampliació del càlcul funcional originari -el qual està contingut en aquest com una teoria de primer nivell-, però que en comparació a l'ampliació anterior del càlcul funcional significa una limitació essencial de la manera d'operar formalment.[1]

Així doncs, Hilbert distingeix amb precisió i claredat, la *lògica de primer ordre* de la *lògica de segon ordre* i, aquestes dues, de les *lògiques d'ordre superior*. El càlcul de nivells, tal com Hilbert s'encarrega de comprovar, és adequat per a la solució de les paradoxes més conegudes. Amb tot, continua Hilbert:

> Hom es troba amb dificultats de considerable importància quan vol procedir a fonamentar la teoria de conjunts i l'anàlisi mitjançant la nostra teoria lògica.[2]

Hilbert esmenta com exemple d'aquestes dificultats "la traducció al nostre càlcul de la demostració cantoriana de l'existència de conjunts no numerables",[3] però més endavant fa referència també a la demostració que tot conjunt de reals fitat superiorment té suprem. Ja hem explicat en un altre indret les dificultats que planteja la traducció en el marc de la teoria

[1] *Ibid*., 223.
[2] *Ibid*., 229.
[3] *Ibid*., 229.

ramificada de tipus d'aquesta última demostració i altres dificultats semblants (*Cf. supra*, cap. VI, § 12), per la qual cosa no cal que ens fem ressò aquí de l'anàlisi de Hilbert d'aquestes qüestions. Els exemples abans esmentats porten Hilbert a "buscar una determinada modificació" del càlcul de nivells que permeti "una major llibertat de moviment" en l'aplicació del càlcul a la tasca de fonamentació de les matemàtiques.[1] Segons Hilbert, en definitiva, "això s'assoleix mitjançant la introducció d'un postulat, el qual ha estat formulat per Russell i anomenat per ell mateix *axioma de reductibilitat*".[2] Tal com explica Hilbert, un cop introduïda la noció russelliana de funció predicativa (*Cf. supra*, cap. VI, § 12), aquest axioma es pot enunciar informalment de la següent manera:

> Per a cada expressió funcional que figuri en el càlcul de nivells, hi ha una expressió [funcional] predicativa equivalent a ella.[3]

Hilbert ja és conscient en les lliçons de 1917-18 de les dificultats de tipus filosòfic que es deriven de la introducció d'aquest axioma:

> El significat metòdic de la introducció d'aquest postulat rau en què, a diferència del que s'esdevé amb els requisits admesos fins ara, segons els quals tota funció o bé s'introdueix com una funció bàsica a través d'un signe individual o bé, si es tracta d'una funció derivada, ha de ser representable com una expressió simbòlica, a partir d'ara determinats predicats i relacions s'han de considerar existents per si mateixos, de manera que [l'existència d'] aquest conjunt [de predicats i relacions] no depèn de les definicions donades ni de la nostra capacitat de definir. Aquesta manera de procedir és molt estranya, però és inevitable en la mesura que aspirem a desenvolupar els fonaments de la teoria de conjunts i de l'anàlisi a partir del sistema de funcions del nostre càlcul.[4]

Ja sabem, en efecte, que en el nivell més bàsic de la teoria ramificada de tipus de Russell hi trobem un domini d'individus amb una sèrie de propietats i relacions bàsiques entre ells. A partir d'aquesta base, Russell obté tota la resta de predicats i relacions mitjançant les operacions lògiques. Ara bé, tal com afirma Hilbert, aquest punt de vista

---

[1] *Cf. ibid.*, 231.
[2] *Ibid.*, 231.
[3] *Ibid.*, 231.
[4] *Ibid.*, 232.

constructiu és violat per l'axioma de reductibilitat, el qual té com a conseqüència l'admissió en cada nivell de predicats i relacions que tenen una existència independent i, per tant, no s'han obtingut com construccions lògiques a partir de les propietats i relacions bàsiques entre els individus del primer nivell. Tal com ha remarcat Sieg, Hilbert observa a les lliçons de 1921-22 que l'axioma de reductibilitat no se satisfà en un domini arbitrari d'individus i propietats i relacions bàsiques entre ells, per la qual cosa hom ha d'expandir "el sistema de propietats i relacions bàsiques" de manera que l'axioma sigui satisfet. Així doncs:

> Només resta la possibilitat d'assumir que el sistema de predicats i relacions de primer nivell és un conjunt que existeix independentment i que satisfà l'axioma de reductibilitat. D'aquesta manera, retornem al punt de vista axiomàtic i abandonem l'objectiu d'una fonamentació lògica de l'aritmètica i l'anàlisi. Donat que ara la reducció a la lògica només és assolida nominalment.[1]

Aquest text mostra d'una forma clara l'abandó per part de Hilbert del programa logicista de Russell i les raons d'aquest abandó. En la conferència "Die Grundlagen der Mathematik" (*1927*), Hilbert explicarà les raons de la fallida del programa logicista d'una forma semblant, però afegint ara l'axioma de l'infinit a la llista d'axiomes la validesa dels quals posa en qüestió:

> La teoria sobre els fonaments de Whitehead i Russell és una investigació lògica general d'un gran abast. Però la fonamentació que proposa per a les matemàtiques descansa, primer, sobre l'axioma d'infinitud i, després, sobre l'anomenat axioma de reductibilitat, i aquests dos axiomes són genuïnament hipòtesis de contingut, les quals no són confirmades per una demostració de consistència; són hipòtesis la validesa de les quals resta, de fet, dubtosa i que, en qualsevol cas, la meva teoria no necessita.[2]

Segurament, Hilbert qüestiona la validesa de l'axioma de l'infinit pels mateixos motius que l'havien dut a qüestionar en les lliçons de 1921-22 l'axioma de reductibilitat. En poques paraules: l'axioma de l'infinit no se satisfà en un domini arbitrari d'individus i ens obliga a expandir aquest domini amb un nombre infinit d'individus. En aquest sentit, ni l'axioma de reductibilitat ni l'axioma de l'infinit són axiomes lògics, donat que afirmen o

[1] Citat a *Sieg 1999*, 19.
[2] *Van Heijenoort 1967*, 473.

pressuposen l'existència d'un nombre determinat d'individus (i propietats i relacions bàsiques entre ells, en el cas de l'axioma de reductibilitat) i, per tant, la validesa lògica d'aquests axiomes depèn de que el domini hagi estat destriat adequadament. Dit d'una altra manera, l'axioma de reductibilitat i l'axioma de l'infinit no són lògicament (universalment) vàlids i, per tant, no poden ser acceptats com axiomes lògics pròpiament dits. En aquest sentit, doncs, el punt de vista de Hilbert expressa, una vegada més, un punt de vista sobre la naturalesa dels axiomes lògics i, en general, de les veritats lògiques, plenament coincident amb el de la concepció model-teorètica de la lògica dominant avui en dia.

10. La teoria axiomàtica de conjunts de Zermelo

L'origen de la teoria axiomàtica de conjunts de Zermelo i, en particular, del seu axioma més conegut i polèmic, l'axioma d'elecció, està íntimament relacionat amb la seva demostració del teorema del bon ordre, car, tal com afirma Zermelo en el seu article "Beweis, dass jede Menge wohlgeordnet werden kann" ["Demostració que tot conjunt pot ser ben ordenat"] (*1904*), la demostració d'aquest teorema requereix admetre "el principi que fins i tot per a una totalitat infinita de conjunts, hi ha sempre correspondències que associen a cada conjunt un dels seus elements [...] principi lògic que no pot pas ser reduït a un principi més simple, però que és aplicat, sense dubte, arreu de les deduccions matemàtiques".[1] La importància de demostrar el teorema del bon ordre descansava en el fet que d'ell se seguia de forma immediata la possibilitat de comparar dos conjunts pel que feia a la seva cardinalitat o potència, la qual cosa es veia aleshores com un primer pas en la demostració de la hipòtesi del continu.[2] Car ben ordenar un conjunt vol dir associar-lo a un ordinal i Cantor ja havia demostrat que sempre és possible comparar dos ordinals qualssevol, de manera que només restava demostrar que tot conjunt admet una bona ordenació o, en paraules de Cantor, que tota potència transfinita és un àlef. El mateix Cantor escrivia l'any 1883 que el fet "que sigui sempre possible de posar tot conjunt ben definit en la forma d'un conjunt ben ordenat és, em sembla, una llei fonamental del pensament, rica en conseqüències i particularment remarcable per la seva universalitat, llei sobre la qual em proposo tornar-ne a parlar en un treball

[1] *Zermelo 1904*, 516.

[2] Això es pot veure ben clarament en l'exposició que fa Hilbert d'ambdós problemes, els qual apareixen íntimament lligats. Vegeu *Hilbert 1990a*, 70-71.

posterior".[1] Però, deu anys més tard, ja no veia el fet que tot conjunt pogués ser ben ordenat com una llei del pensament, sinó com un teorema que calia demostrar. Finalment, Cantor comunicà per carta a Hilbert (26/10/1897) la seva demostració d'aquest teorema. Però aquesta demostració no va convèncer Hilbert,[2] el qual va posar la demostració del teorema del bon ordre en la seva famosa llista de problemes presentada al congrés de matemàtics de Paris celebrat el 1900. El mateix Zermelo, com a editor de les obres completes de Cantor, explica en una nota a la demostració que Cantor havia transmès per carta a Hilbert, els *punts febles* d'aquesta demostració que l'haurien portat a formular la seva pròpia demostració del teorema de bon ordre. En primer lloc, en considerar eleccions successives arbitràries, Cantor aplica "una intuïció temporal a un procés que ultrapassa tota intuïció" i és precisament per evitar això que, segons Zermelo, cal postular mitjançant l'axioma d'elecció la "possibilitat d'una elecció simultània".[3] En segon lloc, la demostració de Cantor fa intervenir "multiplicitats *inconsistents*", és a dir, "conceptes que possiblement són contradictoris", per la qual cosa la demostració de Cantor és "lògicament inadmissible".[4] Zermelo publicà la seva "demostració que tot conjunt pot ser ben ordenat" en l'article homònim de 1904, demostració que suscitarà un ampli debat. Entre les reaccions que provocà l'axioma d'elecció i la demostració del teorema de bon ordre destaquen l'intercanvi de cartes entre els analistes francesos (R. Baire, E. Borel, J. Hadamard i H. Lebesgue) l'any 1905, els articles publicats el mateix any a *Mathematische Annalen* per Borel, J. König, Ph. Jourdain, F. Bernstein, A. Schoenflies i G. Hamel o, els articles publicats per Russell i Poincaré l'any següent. Les crítiques adreçades a la demostració de Zermelo són essencialment de dos tipus: aquelles que, basant-se en l'antinòmia de Burali-Forti, objecten el suposat ús del conjunt de tots els ordinals en la demostració de Zermelo (König, Jourdain i Bernstein), i aquelles que posen en qüestió la validesa de l'axioma d'elecció en el qual es basa la demostració de Zermelo (Baire, Borel, Lebesgue i William H. Young). La resposta a aquestes crítiques portarà Zermelo a publicar l'any 1908 dos articles en el mateix volum de *Mathematische Annalen*. En el primer d'ells: "Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung" ["Nova demostració de la possibilitat d'un bon ordre"] (*1908_a*), Zermelo exposarà una nova demostració del teorema de bon ordre i respondrà les crítiques que havia rebut la seva primera demostració de 1904; en el

---

1 *Cantor 1966*, 169.

2 Hilbert va enviar a Cantor una carta (27/9/1897) amb les seves objeccions, a la qual respongué Cantor en una nova carta (2/10/1897), amb la qual s'acaba l'intercanvi epistolar entre aquests dos autors en referència a aquesta qüestió.

3 *Ibid.*, 451.

4 *Ibid.*, 451.

segon: “Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre” [“Recerques sobre els fonaments de la teoria de conjunts”] (*1908*$_b$), proposarà la seva coneguda axiomatització de la teoria de conjunts, gràcies a la qual podran eliminar-se les paradoxes conjuntistes i, en particular, la paradoxa de Burali-Forti, en base a la qual els autors ja esmentats havien plantejat les seves objeccions a la demostració de Zermelo del teorema de bon ordre. A aquests autors, Zermelo ja els havia recriminat en el primer dels dos articles esmentats no haver-se’n adonat que “la forma elemental donada per B. Russell a les antinòmies de la teoria de conjunts mostrava que la solució a aquestes dificultats calia cercar-la, no en l’abandó del bon ordre, sinó únicament en una restricció adequada del concepte de conjunt”.[1] Aquesta restricció del concepte de conjunt és precisament l’objectiu de la seva axiomatització de la teoria de conjunts presentada en el segon dels articles publicats l’any 1908.

El mateix Zermelo reconeixerà en el segon article de 1908 que el seu objectiu és mostrar “com tota la teoria [de conjunts] elaborada per Cantor i Dedekind pot reduir-se a algunes definicions i a set “principis” o “axiomes” aparentment independents els uns dels altres”.[2] Com és ben sabut, en efecte, la teoria de conjunts sobre la qual Cantor i Dedekind havien bastit les seves recerques s’havia mostrat inconsistent tot just començar el segle XX. En particular, la contradicció trobada per Russell i ell mateix el 1902 en considerar el conjunt de tots els conjunts que no es contenen pas a ells mateixos com a elements, atacava el cor de la teoria intuïtiva de conjunts de Cantor i Dedekind, car no feia referència més que als conceptes de conjunt i element. Calia, doncs, imposar certes restriccions a la concepció cantoriana de conjunt que associava a cada propietat ben definida un conjunt, de manera que s’evitessin les paradoxes i, al mateix temps, es preservessin les diferents aplicacions matemàtiques de la teoria de conjunts. En el paràgraf que obre l’article “Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre”, Zermelo ho explica amb les paraules següents:

> La teoria de conjunts és la branca de les matemàtiques la tasca de la qual és estudiar matemàticament els conceptes fonamentals de nombre, d’ordre i de funció en la seva simplicitat original i, per això mateix, desenvolupar els fonaments lògics de tota l’aritmètica i l’anàlisi; constitueix així un component indispensable de la ciència matemàtica. Amb tot, a hores d’ara, és justament aquesta disciplina la que sembla

[1] *Zermelo 1908*$_a$, 118-19. Zermelo afirma en una nota a peu de pàgina que ell mateix “havia descobert aquesta antinòmia independentment de Russell i que l’havia comunicat amb anterioritat a 1903 al professor Hilbert entre d’altres”. La publicació d’una comunicació a Husserl de 1902 confirma aquest extrem (*Cf. supra*, cap. III, § 3).
[2] *Zermelo 1908*$_b$, 261-62.

> estar amenaçada en la seva mateixa existència per certes contradiccions o "antinòmies" que es deriven dels seus principis -necessaris, segons sembla, per al pensament-, contradiccions per a les quals hom no ha trobat fins ara cap solució plenament satisfactòria. En particular, arran de l'antinòmia russelliana del "conjunt de tots els conjunts que no es contenen pas a si mateixos com a elements", ja no sembla admissible a partir d'ara atribuir a qualssevol concepte lògicament definible un "conjunt" o una "classe" com a extensió. La definició de "conjunt" donada originàriament per Cantor: "una reunió en un tot d'objectes ben definits i distints de la nostra intuïció o dels nostre pensament", requereix, doncs, en qualsevol dels casos, una restricció, donat que hom encara no l'ha pogut substituir per una altra definició que no doni lloc a dubtes d'aquesta mena. En aquestes condicions, no hi ha actualment cap altra sortida que no sigui anar en la direcció contrària i cercar, a partir de la teoria de conjunts tal i com ha estat donada històricament, quins són els principis requerits per fundar aquesta disciplina matemàtica. Per això caldrà restringir de forma suficient els principis per tal d'excloure tota contradicció, tot i considerar-los, no obstant això, de forma prou àmplia per tal que es preservi tot allò que hi ha de preciós en aquesta teoria.[1]

Veiem, doncs, que la teoria de conjunts de Zermelo s'inscriu, d'una banda, en el programa dedekindià de fonamentar "lògicament" les matemàtiques a partir de la teoria de conjunts i, d'una altra, en el programa hilbertià d'axiomatització de les diferents de les matemàtiques. És tracta, en definitiva, de determinar o definir la noció de conjunt mitjançant uns pocs axiomes o principis a partir dels quals sigui impossible derivar les antinòmies conegudes fins llavors. En aquest context, tota qüestió relativa a l'existència de conjunts es reduirà al problema de demostrar la consistència o no contradicció dels axiomes a partir dels quals s'han definit aquests objectes matemàtics, encara que, tal i com reconeix el propi Zermelo, "encara no he pogut demostrar de forma rigorosa la "no contradicció" dels meus axiomes, cosa de bon segur essencial, i m'he de conformar amb aquesta remarca circumstancial que totes les antinòmies conegudes desapareixeran quan hom hagi pres com a base els principis proposats aquí".[2] Així doncs, prenent com a model l'axiomatització de la geometria duta a terme per Hilbert a *Grundlagen der Geometrie*, Zermelo considerarà un domini $\mathscr{B}$ d'objectes o *coses* i una *relació fonamental* entre elles de la forma $a \in b$, que expressa intuïtivament la relació de pertinença i permet distingir entre elements i conjunts.

---

[1] *Ibid.*, 261.
[2] *Ibid.*, 262.

Així, en el primer paràgraf de "Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre" titulat "Definicions fonamentals i axiomes", Zermelo escriu:

> 1. La teoria de conjunts considera un "*domini*" $\mathscr{B}$ d'objectes [*Objekten*], que anomenarem simplement "*coses*" [*Dinge*] i dels quals els conjunts en constitueixen una part. Si dos símbols a i b designen la mateixa cosa, llavors escriurem $a = b$ i, en cas contrari, $a \neq b$. Direm que una cosa a "existeix", si pertany al domini $\mathscr{B}$; anàlogament, direm d'una classe $\mathscr{K}$ de coses que "existeixen coses de la classe $\mathscr{K}$", si $\mathscr{B}$ conté almenys un individu d'aquesta classe.
>
> 2. Hi ha entre les coses del domini $\mathscr{B}$ certes "relacions fonamentals" de la forma $a \in b$. Si per dues coses a i b, la relació $a \in b$ té lloc, hom diu que "a és element del conjunt b" o que "b conté a com a element" o "posseeix l'element a". Una cosa b que conté una altra cosa a com a element, sempre pot anomenar-se un conjunt, i només en aquest cas -amb una sola excepció (axioma II).[1]

A partir de la relació de pertinença, Zermelo defineix la relació d'inclusió entre conjunts i n'enuncia la seva reflexivitat i transitivitat:

> 3. Si cada element x d'un conjunt M és també, al mateix temps, element del conjunt N, de manera que a partir de $x \in M$ pugui deduir-se sempre que $x \in N$, llavors direm que "M és un subconjunt de N" i escriurem "$M \subset N$". És té sempre que $M \subset M$ i que de $M \subset N$ i $N \subset R$ se segueix sempre que $M \subset R$.[2]

Veiem, doncs, que Zermelo distingeix clarament les relacions de pertinença i inclusió, distinció que trobàvem a faltar a *Was sind* de Dedekind (*Cf. supra* cap. IV, § 2) i en el primer volum d'*Algebra der Logik* de Schröder (*Cf. supra* cap. III, § 1 i § 3). A continuació, Zermelo explica que s'ha d'entendre per una sentència o un enunciat obert *ben definit*:

> 4. Una qüestió o un enunciat $\mathcal{E}$ s'anomena "ben definit" si les relacions fonamentals del domini permeten decidir, sense cap mena d'arbitrarietat, la seva validesa o invalidesa amb l'ajut dels axiomes i de lleis lògiques universalment vàlides. Anàlogament, un "enunciat obert" [*Klassenaussage*] $\mathcal{E}(x)$, en el qual la

---

[1] *Ibid.*, 262.
[2] *Ibid.*, 262.

variable x pot recórrer tots els individus d'una classe $\mathcal{K}$, es dirà "ben definit", si està ben definit per *cada un* dels individus x de la classe $\mathcal{K}$".[1]

Tal com veurem immediatament, aquesta definició és molt important, donat que l'axioma III diu que només les propietats ben definides poden tenir un conjunt com a extensió seva. Amb tot, es tracta d'una definició ambigua, car Zermelo no precisa en cap moment el llenguatge lògic a través del qual s'hauria d'exposar formalment la seva teoria de conjunts i, com a conseqüència d'això, quines són les lleis lògiques que determinarien, amb l'ajut dels axiomes, la validesa d'una sentència de la teoria. Aquesta dificultat serà superada per Skolem en l'article "Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begründung der Mengenlehre" (*1922*), en precisar que un enunciat o proposició de la teoria de conjunts està ben definida si s'expressa en el llenguatge de la lògica de primer ordre i només fa intervenir, a banda de les constants lògiques, els símbols de predicat $\in$ i $=$.[2]

Els axiomes a través dels quals es determina la noció de conjunt són de dos tipus: els que expressen l'existència de determinats conjunts (axiomes II i VII) i els que expressen regles que permeten crear conjunts nous a partir de conjunts ja donats (axiomes III-VI). Vet aquí aquests axiomes:

Axioma I. Si cada element d'un conjunt M també és element de N i viceversa; si, per consegüent, hom té a la vegada $M \subset N$ i $N \subset M$, llavors hom té $M = N$. Breument: cada conjunt està determinat pels seus elements. (Axioma de determinació).[3]

Aquest axioma mostra clarament que Zermelo adopta, com ja havia fet Dedekind, un punt de vista extensional. De fet, a aquest axioma se'l sol anomenar avui en dia *axioma d'extensionalitat*.

Axioma II. Existeix un conjunt (impropi), el "*conjunt buit*" 0, que no conté cap element. Si a és una cosa qualsevol del domini, existeix un conjunt $\{a\}$ que conté a i solament a com a element; si a i b són dues coses del domini, existeix un conjunt

[1] *Ibid.*, 263.
[2] *Skolem 1970*, 137-38 (*Van Heijenoort 1967*, 292-93).
[3] *Zermelo 1908$_b$*, 263.

$\{a, b\}$ que conté a la vegada a i b, i cap altra cosa x distinta alhora de a i b. (Axioma dels conjunts elementals).[1]

Zermelo, degut al punt de vista extensional adoptat, introdueix el conjunt buit com un conjunt impropi. Com ja sabem, Dedekind havia rebutjat a *Was Sind* (*Cf. supra* cap. IV, § 2) la possibilitat d'introduir aquest conjunt per idèntiques raons, encara que més endavant l'acceptarà en admetre també la possibilitat de definir intensionalment els conjunts. De forma semblant, Russell havia introduït en el cos de *Principles of Mathematics* la classe buida com una classe *fictícia* degut al punt de vista predominantment extensional adoptat allí i només l'acceptarà plenament en l'apèndix A d'aquella obra en admetre també els cursos de valors o extensions fregeanes com a classes de ple dret (*Cf. supra* cap. VI, § 6). Només Frege, dels autors estudiats, introdueix de bon començament el conjunt buit com un conjunt propi i, més exactament, com l'extensió del concepte sota el qual no hi cau cap objecte.

Axioma III. Si l'enunciat obert $\mathcal{E}$ està ben definit per a tots els elements d'un conjunt M, M té sempre un subconjunt $M_\mathcal{E}$ que conté tots els elements de M per als quals $\mathcal{E}(x)$ és vertadera, i només ells (Axioma de separació [*Axiom der Aussorderung*]).[2]

Tal com explica el mateix Zermelo, aquest axioma "constitueix un substitut de la definició general del concepte de conjunt, evocada i abandonada com insostenible en la introducció, de la qual es distingeix per les restriccions següents: En primer lloc, amb aquest axioma, hom no té mai dret a *definir* conjunts *de forma independent*, sinó solament en tant que subconjunts obtinguts per *separació* de conjunts ja donats; de manera que construccions contradictòries com "el conjunt de tots els conjunts" o "el conjunt de tots els nombres ordinals" i, per això mateix, totes les "paradoxes transfinites" en expressió de Hessenberg, son eliminades. En segon lloc, el criteri determinat $\mathcal{E}(x)$ ha d'estar *ben definit* en el sentit de la definició donada en el nº 4 [...] de manera que els criteris tals com "definible en un nombre finit de mots" i, per això mateix, la "paradoxa" de Richard o la "paradoxa" de la "descripció finita" són, des del nostre punt de vista, eliminades".[3] Deixant ara de banda les paradoxes *semàntiques*, que no tenen cap interès des d'un punt de vista matemàtic, cal que recordem

[1] *Ibid*., 263.
[2] *Ibid*., 263.
[3] *Ibid*., 263-64.

algunes qüestions relatives a la paradoxes *conjuntistes* i, en particular, a la paradoxa de Russell. En la seva forma extensional, la paradoxa de Russell sorgeix en considerar la classe w dels x tals que $x \notin x$, això és, la classe de totes les classes que no es pertanyen a si mateixes, a la qual Russell hi arriba aplicant el raonament, emprat per Cantor per demostrar $u \precsim P(u)$, a la classe de tots els objectes. Car d'aquí dedueix Russell que $w \in w \leftrightarrow w \notin w$ i, per tant, que w no és cap classe, contràriament al supòsit bàsic de la teoria cantoriana de conjunts que associa una classe o conjunt a cada propietat.[1] Una possible via per eliminar la paradoxa de Russell proposada per ell mateix a l'article "On some Difficulties in the Theory of Transfinite Numbers and Order Types" (*1905$_c$*), seria, doncs, *limitar la mida* d'allò que hom anomena conjunt, impedint la formació de conjunts massa grans com, per exemple, el conjunt de tot els conjunts o el conjunt de tots els conjunts que tenen tal o qual propietat (*Cf. supra* cap. VI, § 9). Aquesta és la idea bàsica de la teoria de conjunts de Zermelo i, en particular, de l'axioma de separació, el qual limita els casos en què hom pot associar un conjunt a una propietat a aquells en què els elements que tenen aquesta propietat pertanyen ja a un conjunt donat prèviament, amb la qual cosa hom només pot obtenir un subconjunt del conjunt inicial. D'aquest axioma es dedueix, en efecte, el següent teorema (10): "Tot conjunt M posseeix almenys un subconjunt M_0 que no és pas element de M".[2] Sigui, en efecte, M_0 el conjunt -obtingut per separació- de tots els elements $x \in M$ tals que $x \notin x$, llavors $M_0 \notin M$. Car, o bé $M_0 \in M_0$, o bé $M_0 \notin M_0$. En el primer cas, M_0 tindria un element $x = M_0$ tal que $x \in x$, en contra de la definició de M_0. Només és possible, doncs, el segon cas, però si $M_0 \in M$, llavors $M_0 \in M_0$ en contra d'aquesta possibilitat. D'aquest teorema se segueix immediatament que el domini $\mathscr{B}$ no és un conjunt -car en aquest cas tindria un subconjunt $\mathscr{B}_0$ que no seria pas element de $\mathscr{B}$, en contra de la definició de $\mathscr{B}$- i, per tant, que $w = \{x : x \notin x\}$ no és tampoc un conjunt -car w s'ha definit a partir de $\mathscr{B}$, que no és un conjunt, la qual cosa està prohibida per l'axioma de separació. D'aquesta manera, la paradoxa de Russell desapareix d'una vegada per totes. Tenim a continuació els dos axiomes següents:

[1] Si formalitzem la teoria cantoriana de conjunts en un llenguatge estàndard, les variables del qual tenen com a rang individus i conjunts, les constants no lògiques del qual són les lletres de predicat "S", que s'interpreta intuïtivament com "és un conjunt" i "$\in$", que s'interpreta com "és un element de", llavors Russell demostra que la sentència $\neg(\exists y)(Sy \wedge \forall x(x \in y \leftrightarrow (Sx \wedge x \notin x)))$ és lògicament vàlida en la teoria cantoriana de conjunts, un dels axiomes de la qual és la sentència $(\exists y)(Sy \wedge \forall x(x \in y \leftrightarrow (Sx \wedge \varphi(x))))$, d'on s'obté per substitució que $(\exists y)(Sy \wedge \forall x(x \in y \leftrightarrow (Sx \wedge x \in x)))$, és a dir, la teoria cantoriana de conjunts és inconsistent.

[2] *Ibid.*, 264.

Axioma IV. A cada conjunt T li correspon un altra conjunt $\mathfrak{U}T$ (el *conjunt de les parts* [*Potenzmenge*] de T) que conté tots els subconjunts de T i solament aquests. (Axioma del conjunt de les parts).

Axioma V. A cada conjunt T li correspon un conjunt $\mathfrak{S}T$ (el "*conjunt reunió*" de T) que conté els elements dels elements de T i solament aquests (Axioma de la reunió).[1]

Aquests axiomes donen raó de principis intuïtius en la formació de nous conjunts a partir de conjunts ja donats, que hom pot trobar ja en la teoria de conjunts de Cantor i Dedekind. L'axioma V es troba contingut en la definició (8) del *sistema reunió* [*zussammengesetztes System*] de Dedekind a *Was Sind*, mentre que l'axioma IV és un dels principis bàsics de la teoria cantoriana de conjunts. El següent axioma és força més interessant:

Axioma VI. Si T és un conjunt tots els elements del qual són conjunts diferents de 0 i sense elements comuns dos a dos, la seva reunió $\mathfrak{C}T$ conté almenys un subconjunt S_1 que té un element comú amb cada element de T, i només un. (Axioma d'elecció [*Axiom der Auswahl*]).[2]

Aquesta formulació de l'axioma d'elecció és essencialment idèntica a la que trobem a l'article anterior de 1908: "Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung". Hom podria reformular aquest axioma en els termes següents: "El producte cartesià d'una col·lecció no buida de conjunts no buits no és buida". Com que tota col·lecció arbitrària de conjunts $\mathcal{C}$ pot considerar-se una família, funció o conjunt indexat -emprant la mateixa col·lecció $\mathcal{C}$ com a conjunt d'índexs i la funció identitat sobre $\mathcal{C}$ com a funció indexadora-, i el producte cartesià d'una família de conjunts $\{X_i\}$ $(i \in I)$ és, per definició, el conjunt de totes les famílies $\{x_i\}$, amb $x_i \in X_i$ per cada $i \in I$, llavors el producte cartesià de $\mathcal{C}$ serà, per definició, una família el domini de la qual serà el mateix $\mathcal{C}$ i el valor de la qual per a cada conjunt de $\mathcal{C}$ serà un element d'aquest conjunt. Així doncs, l'axioma d'elecció afirma que, per a tota col·lecció no buida de conjunts no buits $\mathcal{C}$, hi ha una funció f el domini de la qual és $\mathcal{C}$ tal que si $A \in \mathcal{C}$, llavors $f(A) \in \mathcal{C}$. En llenguatge intuïtiu, la funció f pot descriure's com una funció que *tria* simultàniament un element de cada un dels conjunts $A \in \mathcal{C}$, *i.e.* com una

[1] *Ibid*., 265.
[2] *Ibid*., 266.

funció d'elecció per a $\mathcal{C}$. D'aquí el nom de l'axioma. En el cas que la col·lecció $\mathcal{C}$ sigui finita, es pot demostrar fàcilment per inducció que aquesta elecció simultània d'un element per a cada subconjunt de $\mathcal{C}$ sempre és possible. El paper de l'axioma és garantir aquesta possibilitat en el cas que $\mathcal{C}$ sigui una col·lecció infinita. D'aquí la necessitat d'admetre, tal com hem vist que afirmava Zermelo en la seva primera formulació de l'axioma en l'article "Beweis, dass jede Menge wohlgeordnet werden kann" de 1904, "el principi que fins i tot per una totalitat infinita de conjunts, hi ha sempre correspondències que associen a cada conjunt un dels seus elements".[1] Aquesta formulació és interessant, en efecte, perquè ens ajuda a veure la gran diferència que hi ha entre el fet d'admetre la possibilitat de realitzar un nombre finit d'eleccions o un nombre infinit segons una regla donada, i el fet d'admetre la possibilitat d'una infinitat d'eleccions simultànies, sense cap regla o llei específica que indiqui com s'ha de realitzar aquesta elecció. En els dos primers casos, l'axioma seria inútil. En el primer cas, perquè l'elecció d'un element per a cada conjunt d'una col·lecció finita de conjunts sempre es pot realitzar en un nombre finit de passos. En el segon cas, perquè l'existència d'una llei explícita que indiqui com es pot escollir un element de cada conjunt d'una col·lecció infinita permet sempre crear un nou conjunt -per exemple, en el cas d'un nombre infinit d'intervals tancats i disjunts de $\mathbb{R}$, hom pot definir una funció que seleccioni l'element més petit de cada interval, amb la qual cosa haurem definit un conjunt en què cada element pertanyerà a un i un sol dels intervals de $\mathbb{R}$. Per contra, en el darrer cas, és necessari postular un axioma que legitimi l'existència d'un conjunt del qual hom no en pot especificar els seus elements ni la regla o llei a partir de la qual podem obtenir aquests elements o, el que és el mateix, una funció que hom no pot descriure i de la qual hom no en pot especificar els valors. Bertrand Russell ha explicat de forma magistral la diferència que hi ha entre els diferents casos que acabem d'explicar amb el següent exemple:

> Donat $\aleph_0$ parells de botes, suposem que es demana demostrar que el nombre de botes és parell. Aquest serà el cas si totes les botes en qüestió es poden dividir en dues classes que siguin mútuament semblants. Ara bé, si cada parell té la bota del peu dret i esquerra diferents, només cal que posem totes les botes del peu dret en una classe i les del peu esquerra en una altra: la classe de les botes del peu dret és semblant a la classe de les botes del peu esquerra, i el nostre problema està resolt. Però, si les botes del peu dret i l'esquerra són indistingibles, no podem descobrir cap propietat que pertanyi a la meitat exactament de les botes. D'aquí que no puguem

[1] *Zermelo 1904*, 516.

> dividir les botes en dues parts iguals, i no puguem demostrar que el seu nombre és parell. Si el nombre de parells fos finit, simplement en seleccionaríem una de cada parell, però no en podem seleccionar una de cada parell quan el seu nombre és infinit, llevat que tinguem una *regla* d'elecció i, en el cas present, no es pot trobar cap regla.[1]

D'aquí la necessitat de postular axiomàticament l'existència d'una funció que permeti seleccionar un element de cada subconjunt d'una col·lecció infinita de conjunts, fins i tot quan hom no tingui una regla o llei que permeti seleccionar aquests elements o, el que és el mateix, d'un conjunt que contingui un i un sol de cada un d'una infinitat de conjunts donats sense tenir cap llei per seleccionar aquests elements. La dificultat d'acceptar una funció o un conjunt d'aquesta mena explica, en definitiva, l'ampli debat que suscità en la comunitat matemàtica internacional l'axioma d'elecció tot just després de la seva primera publicació el 1904. Com ja hem dit abans, entre els protagonistes d'aquest debat hi figurà de forma destacada Bertrand Russell. El mateix Russell explica en una carta adreçada a Jourdain el 1906 com, el mateix any en que Zermelo formulà per primera vegada el seu conegut axioma, ell va descobrir independentment un axioma equivalent a l'axioma d'elecció, que anomenà *axioma multiplicatiu*:

> Pel que fa a l'axioma multiplicatiu, el vaig descobrir diguem-ne que per casualitat. Whitehead i jo solíem fer alternativament recensions de les diverses parts del llibre, corregint cada un l'última recensió feta per l'altre. En repassar la seva recensió, que contenia una demostració de l'axioma, vaig descobrir que la proposició anterior emprada en la demostració suposava subreptíciament l'axioma. Això va passar l'estiu de 1904. En un principi vaig pensar que hom podria trobar-ne fàcilment una demostració correcta, però poc a poc em vaig anar convencent que, si és que n'hi havia alguna, devia estar ben amagada.[2]

Malgrat que, en aquell mateix any, Russell ja s'havia convençut que l'axioma multiplicatiu era independent de la resta d'axiomes lògics que havia acceptat fins llavors i que la validesa de bona part de les definicions i teoremes de l'aritmètica transfinita depenia de l'acceptació d'aquest axioma,[3] el cert és que Russell mostrà des d'un principi seriosos

---

[1] *Russell 1905$_c$*, 47-48.

[2] *Grattan-Guinness 1977*, 80.

[3] Un exemple paradigmàtic n'és la definició de Whitehead de la multiplicació de cardinals i d'aquí el nom de l'axioma.

dubtes respecte a la seva validesa i sempre considerà oberta la possibilitat d'una demostració de la seva falsedat. Afortunadament, el mateix Russell explicà en un parell d'articles les raons del seu escepticisme envers l'axioma multiplicatiu o, el que és el mateix, envers l'axioma d'elecció. En la tercera part de l'article "On Some Difficulties in the Theory of Transfinite Numbers and Order Types" Russell es proposa, en efecte, examinar les dificultats que presenten aquests axiomes. A tal efecte, Russell formula primer de tot l'axioma d'elecció i ho fa en termes pràcticament idèntics als que trobem en l'article de Zermelo de 1904: "Donada qualsevol classe w, hi ha una funció $f'u$ tal que si u és una classe existent [*i.e.* no buida] continguda en w, llavors $f'u$ és un membre de u".[1] Una mica més endavant, trobem la següent formulació de l'axioma multiplicatiu: "Donat un conjunt de classes mútuament exclusives K, cap de les quals és buida, hi ha almenys una classe composta d'un terme extret de cada membre de K".[2] Russell afirma a continuació que "aquest axioma és més especial que l'axioma de Zermelo. Pot deduir-se de l'axioma de Zermelo, però la deducció conversa, tot i que podria ser possible, pel que jo se, encara no s'ha fet".[3] Però, com ja hem vist en les pàgines anteriors, Zermelo formula en els dos articles de 1908 el seu conegut axioma en termes essencialment idèntics als que Russell empra aquí en la seva formulació de l'axioma multiplicatiu, formulacions que hem vist que eren equivalents a la de l'article de Zermelo de 1904. De fet, el mateix Russell demostrarà l'equivalència de l'axioma d'elecció i de l'axioma multiplicatiu a *Principia Mathematica* (§ 88). Russell és prou clar respecte a l'origen del seu escepticisme respecte a aquests axiomes:

> Tant en el cas de l'axioma de Zermelo com en el cas de l'axioma multiplicatiu, del que dubtem és de l'existència d'una norma o propietat que seleccioni un terme de cada un dels nostres agregats; el dubte relatiu a l'existència d'una *classe* que realitzi aquesta selecció es deriva del dubte relatiu a l'existència d'una norma.[4]

Recordem, en efecte, que a *Principles of Mathematics*, Russell havia afirmat que mentre que les classes finites poden generar-se extensionalment, *i.e.* per enumeració, les classes infinites només poden generar-se intensionalment, això és, a partir d'una funció

[1] *Russell 1905$_c$*, 47.
[2] *Ibid.*, 48-49.
[3] *Ibid.*, 49.
[4] *Ibid.*, 52.

proposicional o norma que defineixi aquesta classe (*Cf. supra*, cap. VI, § 6).[1] Així, en l'article "On the Axioms of the Infinite and of the Transfinite" (*1911$_c$*), Russell afirma que:

> L'axioma multiplicatiu ha d'afirmar que, per qualsevol conjunt de classes, hi ha sempre alguna propietat que posseeix un i només un terme de cada classe pertanyent al conjunt. Però, al meu parer, això no és en absolut evident. Em veig així forçat a concloure que l'axioma deixa de ser obvi tan bon punt s'entén el seu significat.[2]

En efecte, des del punt de vista intensional de Russell, afirmar l'existència d'un conjunt format per un i un sol dels elements de cada subconjunt d'una col·lecció infinita, suposa afirmar l'existència d'una propietat que verifica exactament un element de cada subconjunt d'aquella col·lecció. Ara bé, tal com afirma el mateix Russell en el text anterior, "això no és en absolut evident". En canvi, si adoptem un punt de vista extensional com el de Zermelo, l'axioma multiplicatiu o d'elecció sembla tan intuïtiu i evident com qualsevol altre dels axiomes de la teoria de conjunts de Zermelo. De fet, tal com ha explicat Gödel, "res no pot expressar millor el significat del terme "classe", que els axiomes d'existència de classes i l'axioma d'elecció".[3]

Per acabar la nostra anàlisi del sistema axiomàtic presentat per Zermelo en el segon dels seus articles de 1908, cal que ens ocupem del seu últim axioma:

> Axioma VII. El domini conté almenys un element, un conjunt *Z*, que conté com element el conjunt buit i que està constituït de manera que a cada un dels seus elements *a* li correspon un element nou de la forma $\{a\}$, és a dir, que per cada un dels seus elements *a*, conté igualment el conjunt corresponent $\{a\}$ com element. (Axioma de l'infinit).[4]

Aquest axioma postula, doncs, la possibilitat de construir un conjunt infinit. En particular, aquest axioma permet construir fàcilment el conjunt *N* dels nombres naturals. Hom

[1] Recordem que aquesta concepció intensional de les classes es veurà reforçada per l'entrada en escena de la "no classes theory", que considera les classes *en general* ficcions lògiques definibles contextualment a partir de funcions proposicionals (*Cf. supra*, cap. VI, § 9) i que el durà a *Principia* a derivar la jerarquia extensional -de classes i relacions- a partir de la jerarquia intensional -de funcions proposicionals (*Cf. supra*, cap. VI, § 13).
[2] *Russell 1911*, 51.
[3] *Gödel 1990*, 139.
[4] *Zermelo 1908$_b$*, 266-67.

pot, en efecte, definir gràcies a l'axioma de separació el conjunt dels nombres naturals posant $N = \{x : x \in Z, \text{ per tot conjunt infinit } Z\}$, on l'existència de Z queda assegurada per l'axioma VII. Hom emprarà el símbol 0 per designar al conjunt buit, el símbol 1 per designar al singletó del buit, etc. Tal com reconeix el mateix Zermelo, aquest axioma "és degut essencialment a R. Dedekind", que l'havia introduït com un teorema que calia demostrar. Però, tal com observa també ell mateix:

> L'intent de demostració per part de Dedekind d'aquest principi [l'existència d'un conjunt infinit] no pot ser satisfactòria, perquè parteix del "conjunt de tot allò pensable", però des del nostre punt de vista, el domini $\mathscr{B}$ ["de tot allò pensable"] [...] no constitueix pas un conjunt.[1]

Remarquem finalment que les dues modificacions fonamentals introduïdes a l'axiomàtica de Zermelo seran l'afegit, proposada per Fraenkel el 1922, de l'esquema d'*axiomes de reemplaçament*, els quals permeten construir d'una forma adequada la sèrie dels ordinals, i l'*axioma de fonamentació*, que restringeix la categoria del conjunts per tal de copsar millor els conjunts emprats habitualment en matemàtiques.[2]

[1] *Ibid.*, 266 n **. Recordem que el fet que el domini $\mathscr{B}$ no sigui un conjunt se segueix del teorema 10.
[2] Pel que fa a aquests axiomes vegeu, per exemple, *Fraenkel 1958*, 49-53 i 86-91.