Lògica i fonaments: 1850-1920

Un estudi comparatiu de les contribucions del
corrent algèbric i logicista a la lògica contemporània

Departament de Lògica, Història i Filosofia de la Ciència

Programa: Lògica Matemàtica. Bienni: 1987-89

Per optar al títol de doctor en Filosofia

Lògica i fonaments: 1850-1920

Un estudi comparatiu de les contribucions del corrent algèbric i logicista a la lògica contemporània

Tesi doctoral presentada per

Joan Roselló Moya

Dirigida per

Josep Pla i Carrera

Conclusió

En la Introducció hem explicat que el desenvolupament de la lògica matemàtica en el període 1850-1920 es pot dividir en quatre èpoques. Tal com hem dit allí, una primera època s'inicia amb la publicació, d'una banda, de les obres de G. Boole: *A Mathematical Analysis of Logic* (1847) i *Investigation into the Laws of Thought* (1854) i, d'una altra, dels articles d'A. De Morgan: "On the Structure of the Syllogism, and on the Application of the Theory of Probabilities to Questions of Argument and Authority" (1846) i "On the Syllogism, nº IV, and of the Logic of Relations" (1860). L'obra de Boole s'emmarca en el context del desenvolupament de l'àlgebra abstracta en el si de l'escola analítica anglesa, en el qual hi participaren, entre d'altres, G. Peackok, D.F. Gregory i W. R. Hamilton. En aquest sentit, l'objectiu de Boole és construir, prenent com a model l'àlgebra numèrica, un àlgebra de símbols susceptible de ser interpretada lògicament, és a dir, un *àlgebra de la lògica* (*Cf. supra*, cap. I, § 1). Leibniz havia concebut des de ben jove la idea d'una mena d'alfabet del pensament humà que havia de ser alhora una *lingua* o *characteristica universalis* i un *calculus ratiocinator*, en el sentit que permetés expressar els conceptes fonamentals de totes les ciències d'una manera precisa i fos, al mateix temps, un mitjà de descobriment i resolució de totes les disputes i controvèrsies filosòfiques. Així, per exemple, Leibniz considerà el seu descobriment del càlcul infinitesimal una mostra de la importància de posseir un simbolisme adequat en matemàtiques i una prova de la necessitat de desenvolupar una *characteristica universalis* que permetés penetrà en el laberint de les altres ciències. Pel que fa a la lògica, conscient que aquesta ciència, amb els seus termes, proposicions i sil·logismes, presentava una analogia formal amb la ciència de l'àlgebra, amb les seves lletres, equacions i transformacions, intentà presentar la primera com un càlcul i, en algunes ocasions, l'anomenà *mathesis universalis* o matemàtica universal. El que Leibniz tenia al cap era una mena de *teoria general de les formes* que servís de fonament a les diferents branques de les matemàtiques i fes possible nous descobriments en el domini de les matemàtiques. De fet, al llarg de tota la seva vida desenvolupà diferents càlculs lògics, entre els quals destaca el "Calculus de Continentibus et Contentis" que presenta notables analogies amb el càlcul lògic de Boole. El punt de vista de Boole, tal com hem vist en el primer capítol de la nostra exposició, no era gaire diferent del de Leibniz. Segons Boole, en efecte, "la Lògica descansa, com la Geometria, en veritats axiomàtiques, i els seus teoremes estan construïts sobre la doctrina general dels símbols, que constitueix el fonament de l'anàlisi reconegut".[1] Però, tant a *Mathematical Analysis of Logic* com a *Laws of Thought*, Boole no enuncia les lleis a les quals estan subjectes els símbols de la lògica com a veritats *a priori* d'aquesta "doctrina general dels símbols", és a dir, com les lleis de combinació a les quals han d'estar subjectes necessàriament els símbols de *àlgebra simbòlica*, sinó que les dedueix a partir de la seva interpretació lògica com a símbols de classe[2] i, basant-se en l'analogia entre l'àlgebra lògica i l'àlgebra numèrica, incorpora els processos de raonament d'aquesta última a la primera i basteix així un càlcul o àlgebra lògica. Tal com hem vist, en efecte, per a Boole hi ha també, com per Leibniz, una clara analogia entre l'àlgebra lògica i l'àlgebra aritmètica tant pel que fa a llurs operacions com pels que fa a les lleis a les quals estan subjectes aquestes operacions. La única diferència rau en la llei de dualitat $x^2 = x$, que és vàlida en l'àlgebra lògica però no és vàlida generalment en l'àlgebra aritmètica. Amb tot, com que aquesta llei és satisfeta pels nombres 0 i 1 i, doncs, en la subàlgebra $\{0, 1\}$ de l'àlgebra aritmètica comuna, Boole considera plenament justificat importar a l'àlgebra lògica tots els processos de raonament emprats habitualment en l'àlgebra comuna (*Cf. supra*, cap. I, § 2). Aquests processos són essencialment el *desenvolupament* o *expansió*, la *eliminació* i la *reducció* i és gràcies a ells que el sistema de la lògica de Boole esdevé un càlcul efectiu de classes o proposicions (*Cf. supra*, cap. I, §§ 4 i 5). Boole, en efecte, distingia dos tipus de proposicions: les proposicions primàries i les secundàries, distinció que coincideix essencialment amb la distinció habitual en la seva època entre proposicions categòriques i hipotètiques (*Cf. supra*, cap. I, § 3). Com que ambdós tipus de proposicions poden formalitzar-se amb els mateixos símbols, subjectes en un i altre cas a les mateixes lleis de combinació, el mateix càlcul o àlgebra serà aplicable a la lògica categòrica o hipotètica i només la diferent interpretació dels seus signes determinarà el seu àmbit d'aplicació (*Cf. supra*, cap. I, § 6). Podríem dir, doncs, que Boole presentà algèbricament la lògica i d'aquesta manera assolí l'ideal leibnizià de construir un càlcul lògic capaç de resoldre tots els problemes de la lògica tradicional, això és, un *calculus ratiocinator*.

Tal com veurà molt bé Peirce, un dels grans mèrits de Boole, fou que va ser el primer en dissenyar un sistema de notació efectiu per al càlcul lògic. Hem vist, en efecte, que la

---

[1] *Boole 1916*, 58.

[2] De fet, tal com hem vist, a partir d'una barreja de consideracions psicològiques i lògiques prou sorprenent per a un partidari de l'àlgebra abstracta com ell.

quantificació del predicat duta a terme per Hamilton i De Morgan i la introducció per part d'aquest darrer de la noció d'univers del discurs i dels termes negatius, portaren a ampliar el nombre de proposicions categòriques (*Cf. supra*, cap. I, § 1). Calia, doncs, un sistema de notació que permetés expressar simbòlicament aquests enunciats de manera que es pogués bastir a sobre seu un veritable càlcul de la lògica. A tal efecte, Boole introduí el signe 1 per denotar *l'univers del discurs* de De Morgan, gràcies a la introducció del qual i a la del signe per a la resta o subtracció booleana, fou capaç de simbolitzar també els *termes negatius* de De Morgan. L'altra peça clau del sistema de notació de Boole era el símbol de classe indefinida v, gràcies al qual Boole fou capaç de representar simbòlicament els *judicis particulars*. En definitiva, gràcies als signes anteriors, els signes per a la suma booleana, el producte lògic i la igualtat, Boole fou capaç d'expressar equacionalment els vuit tipus diferents de judicis categòric de Hamilton i De Morgan (*Cf. supra*, cap. I, § 3). Ara bé, el preu pagat per Boole per aconseguir això fou molt alt. Car el fet que els signes + i – hagin de representar operacions inverses, per analogia amb el que s'esdevé a l'aritmètica, restringeix la interpretabilitat de l'addició als casos en què els termes units mitjançant aquesta operació representen classes disjuntes (*Cf. supra*, cap. I, § 2). La conseqüència fonamental d'això és que algunes de les lleis més importants que caracteritzen el que avui en dia anomenem *àlgebres de Boole* no són interpretables o no són vàlides en el sistema de la lògica de Boole (*Cf. supra*, cap. I, § 8). Així, per exemple, una de les lleis de *tautologia* o *idempotència*:

$$a + a = a,$$

la llei

$$a + 1 = a,$$

una de les lleis d'*absorció*:

$$a + ab = a$$

i una de les lleis *distributives*:

$$a + bc = (a + b)(a + c),$$

no són interpretables. Aquesta darrer llei expressa el principi de distribució de la suma sobre el producte, que no és vàlid generalment en l'àlgebra lògica de Boole, com tampoc ho és en l'àlgebra aritmètica.[1] Veiem, doncs, que si bé la llei de tautologia $aa = a$, la llei $a0 = 0$, la llei d'absorció $a(a + b) = a$ i la llei distributiva $a(b + c) = ab + ac$ són vàlides en l'àlgebra de la lògica booleana, els seus duals $a + a = a$, $a + 1 = 1$, $a + ab = a$ i $a + bc = (a + b)(a + c)$ no ho són. Doncs bé, la substitució de la suma booleana per l'addició lògica, en assegurar la interpretabilitat i validesa d'aquestes darrers lleis, permet presentar una perfecta correspondència o *dualitat* entre les lleis de l'addició i les del producte. Aquest fet és important no solament per l'elegància que es desprèn de la simetria observada entre les lleis del producte i la suma, sinó fonamentalment perquè permet una correcta caracterització de les àlgebres de Boole, les quals constitueixen la contrapartida algèbrica del càlcul proposicional clàssic. El primer en adonar-se que la substitució de la suma booleana per la suma lògica permet establir un perfecte paral·lelisme entre les lleis que satisfan l'addició i el producte lògic fou Ch. S. Peirce (*Cf. supra*, cap. II, § 3). Aquest avantatge serà reconegut per E. Schröder a través de l'anomenat *principi de dualisme* (*Cf. supra*, cap. III, § 4) i explotat sistemàticament per ell mateix a *Vorlesungen über die Algebra der Logik* (1890-1905) en disposar en columnes paral·leles els teoremes duals relatius a l'addició i el producte lògic.

Els exemples anteriors són només un botó de mostra de les nombroses expressions que sorgeixen inevitablement en el sistema de la lògica de Boole i que, tanmateix, són ininterpretables. Tal com dèiem abans, el problema de la interpretació de les expressions ininterpretables lògicament és un dels problemes principals que planteja l'àlgebra lògica de Boole i que, de fet, ocupà el nostre autor els anys subsegüents a la publicació de *Laws of Thought* (*Cf. supra*, cap. I, § 7). Un altra dels problemes principals que planteja la lògica de Boole és la introducció del símbol v per representar les proposicions *particulars*. El problema principal que planteja aquest símbol és la incompatibilitat entre la seva definició com a símbol de classe sense restriccions -susceptible, doncs, de ser interpretat com la classe nul·la- i el seu import existencial en les proposicions *particular afirmatives*, que Boole simbolitza a través de l'equació $vx = vy$ i on el símbol v no pot ser eliminat (*Cf. supra*, cap. I, § 3). Per un altre costat, hom es pot preguntar amb Peirce, si la representació dels enunciats categòrics a través de la relació d'igualtat ofereix una anàlisi lògica correcta d'aquesta mena d'enunciats i, en definitiva, si la representació de la *còpula* a través de la relació d'inclusió no ofereix una

[1] La llei distributiva només és interpretable quan $bc = 0$ o $a = 0$ i és vàlida només en el cas que $b = 0$ i $c = 0$. Anàlogament, la segona llei d'absorció només és interpretable i vàlida quan $ab = 0$; és a dir, les lleis anteriors només són interpretables i vàlides en els casos trivials.

anàlisi més acurada d'aquests enunciats (*Cf. supra*, cap. II, § 2). Per exemple, la presentació equacional d'una proposició *particular afirmativa* com ara *Alguns homes són vegetarians* converteix aquesta proposició en la proposició *Alguns homes són alguns vegetarians*, la qual conté una referència a quatre classes: *homes*, *vegetarians* i les dues classes denotades per les dues ocurrències d'*alguns*! Anàlogament, en el camp de la lògica hipotètica, la presentació equacional de les proposicions i el desig de fer aplicable tota la potencialitat del seu mètode a aquesta lògica, fa que Boole hagi de recórrer a la idea del temps per tal d'interpretar les proposicions hipotètiques i representi, per exemple, els *enunciats condicionals* de forma anàloga a com havia representat les particulars afirmatives. D'aquesta manera, Boole dissipa la important distinció entre lògica categòrica i hipotètica, que ja havia estat copsada correctament per Aristòtil i els estoics, i basa la lògica hipotètica en la categòrica, tot just al contrari del que farà Frege i, amb ell, tota la lògica contemporània. En definitiva, tal com ha assenyalat Dummett:

> No hi ha dubte que [Boole] mereix un gran crèdit pel que va aconseguir, en el sentit que en aquelles circumstàncies històriques el que va fer devia ser molt difícil de fer. Però, si ens preguntem pel significat històric i, en particular, per l'interès present dels escrits de Boole, s'ha de donar una altra resposta. *Els* descobriments que separen la lògica moderna dels seus precursors són clarament l'ús dels quantificadors (o, més generalment, d'operadors que lliguen variables i poden ser aniuats [*nested*]) i el concepte d'un sistema formal, els quals són tots dos deguts a Frege i no estan presents, ni tan sols en forma embrionària, en l'obra de Boole.[1]

Boole, és cert, té una gran importància històrica pel fet que va originar el corrent o tradició algèbrica al qual cal adscriure autors tan importants com ara Peirce o Schröder. Aquesta tradició algèbrica ha donat lloc, a través de l'obra de Birkhoff i Tarski, a la *lògica algèbrica* i l'*àlgebra universal* contemporànies, que constitueixen avui en dia un dels focus més importants de recerca i on se segueixen fent contribucions importants en el camp de la lògica. En particular, Boole va enunciar per primera vegada algunes de les lleis algèbriques que constitueixen el que avui en dia anomenem *àlgebres de Boole*, que tenen importantíssimes aplicacions no només en l'estudi algèbric de la lògica proposicional pròpiament dita, sinó que constitueixen un dels tòpics fonamentals de l'àlgebra universal amb importants aplicacions en la *teoria de models* i la *teoria de computació* contemporànies. Ara

---

1 *Dummett 1959*, 205.

bé, pot ser la característica més destacada de la lògica moderna és el paper central que juga en ella la lògica quantificacional de primer ordre -per exemple, en la teoria de models o en la teoria de conjunts. Doncs bé, tal com afirma Dummett, Frege va ser capaç no solament de desenvolupar correctament una teoria de la quantificació on l'abast dels quantificadors quedava completament delimitat, sinó també de presentar la seva lògica quantificacional -de primer i segon ordre- com un *sistema formal*. Això és suficient per poder afirmar que Frege és el veritable *pare de la lògica moderna*, no pas Boole. Amb tot, tal com veurem més endavant, Frege no va atorgar a la lògica de primer ordre un *status* especial, sinó que la va desenvolupar conjuntament amb la lògica de segon ordre, perquè el seu objectiu fonamental era fonamentar lògicament les matemàtiques i en la expressió de molts dels conceptes d'aquesta hi intervé de forma natural la quantificació sobre predicats o conjunts. A més, la noció d'*interpretació* que és, juntament amb la noció de sistema formal, la noció més important del que hem anomenat en la introducció la concepció model-teorètica o semàntica de la lògica actual és aliena a l'obra de Frege.

Tal com dèiem en la Introducció, l'obra de De Morgan no pretén, com la de Boole, reinventar la lògica sobre una base completament nova, sinó reformular la vella sil·logística aristotèlica, de manera que pugui donar compte dels diferents tipus d'inferències vàlides que no s'adaptan al cànon sil·logístic. Amb aquest objectiu, De Morgan construirà una teoria de relacions que constituirà la base de nombrosos estudis posteriors. Entre aquests, cal destacar els articles de Ch. S. Peirce: "Description of a Notation for the Logic of Relatives" (1870) i "Note B: The Logic of relatives" (1883). En el primer dels articles citats, Peirce intenta estendre els mètodes de Boole per tal de fer-los aplicables a la lògica de relacions, però el model algèbric de Peirce ja no són les varietats algèbriques de Peackok o Gregory, en les quals s'havia basat Boole, sinó les *àlgebres associatives* recollides per B. Peirce, son pare, en la memòria *Linear Associatives Algebras* (1870), entre les quals s'inclouen, per exemple, les *àlgebres de quaternions* de Hamilton (*Cf. supra*, cap. II, § 4). Això, d'una banda, creà nombrosos problemes a Peirce, com ara el fet que molt dels processos de raonament emprats no fossin interpretables lògicament, però també obrí nombres perspectives com, per exemple, la representació matricial dels relatius. L'objectiu fonamental de "Description of a Notation for the Logic of Relatives" és, tal com dèiem abans, presentar un sistema de notació algèbrica que estengui el sistema de Boole i el faci aplicable no només a l'estudi dels termes absoluts (classes), sinó també a l'estudi del termes relatius (relacions), iniciat uns anys abans per De Morgan. Una de les tesis més importants d'aquest article és la tesi de reducció, que podem reformular en els termes següents: (*i*) les relacions d'aritat 2 no poden, en general, ser reduïdes a relacions d'aritat 1; les relacions d'aritat ≥ 3 no poden, en general, reduir-se a relacions d'aritat 1 o 2 i (*ii*) tota relació d'aritat > 3 pot reduir-se a relacions d'aritat 3. D'aquí que, en definitiva, el desenvolupament efectiu de la lògica de relacions només requereixi tres tipus de termes: els termes absoluts, els termes relatius simples i el termes conjugatius -amb dos correlats. En l'article de 1870 sobre la lògica de relatius, Peirce comença definint l'*univers del discurs* com un conjunt no buit i arbitrari d'individus a partir del qual s'interpretaran els símbols propis i els signes algebraics de relació i operació. Aquesta noció, l'origen de la qual es remunta a l'article de De Morgan de 1846, és una de les nocions bàsiques de la *concepció semàntica* de la lògica predominant avui en dia. En la presentació del càlcul de relatius, Peirce distingeix clarament entre *sintaxi* i *semàntica* i, de fet, podríem dir que el punt de vista Peirce és essencialment semàntic, si més no en el sentit que el nostre autor és ben conscient, en desenvolupar el càlcul de relatius, que els seus raonaments són sobre un model del llenguatge abans explicitat. En l'article "The Logic of relatives" de 1883, Peirce deixarà de banda les analogies matemàtiques i construirà un *àlgebra de relacions* (*Cf. supra*, cap. II, § 8) on, en paraules de Tarski, Peirce "introduí i precisà tots els conceptes fonamentals de la teoria de relacions i formulà i establí les seves lleis fonamentals".[1] En l'origen de la lògica de relatius exposada per Peirce en els articles de 1870 i 1883 hi ha no solament l'intent d'exposar un càlcul o àlgebra de relacions, sinó també el d'abordar el problema de com expressar les proposicions particulars i hipotètiques d'una forma més apropiada que en el sistema de Boole i el de com justificar determinades inferències que no s'adeqüen al cànon sil·logístic i no poden validar-se tampoc en aquell sistema. Les proposicions particulars i hipotètiques, com la resta dels enunciats de la lògica categòrica i hipotètica tradicionals, són expressables emprant una petita part de la lògica quantificacional moderna, a saber, la lògica de predicats monàdics. Ara bé, la lògica de relatius permet expressar una àmplia varietat d'enunciats quantificacionals que cauen fora de l'abast de la lògica de predicats monàdics i que només són expressables en el marc de la lògica de predicats poliàdica, això és, la lògica de primer ordre o lògica quantificacional moderna. Per exemple, els enunciats doblement quantificats que comencen amb un quantificador universal són tots ells expressables en la lògica de relatius peirciana; hom no pot, en canvi, expressar en el marc de la lògica de relatius els enunciats doblement quantificats que comencen amb un quantificador existencial, per la senzilla raó que aquests són negacions d'enunciats que

[1] *Tarski 1941*, 73.

comencen amb un quantificador universal i la lògica de relatius de Peirce no té negació proposicional (*Cf. supra*, cap. II, § 8). Podem concloure, doncs, que l'expressió de les proposicions particulars o enunciats existencials, tant si es tracta d'enunciats que contenen un sola quantificació o una quantificació múltiple, constitueix l'escull més important en l'intent peircià per expressar els diferents tipus d'enunciats en el marc de la lògica de relatius. Peirce, d'una altra banda, veia la lògica de relatius essencialment com un mitjà per representar raonaments que inclouen enunciats quantificats existencialment o universalment. Ara bé, en l'article de 1883 sobre la lògica de relatius, ell mateix fa referència en diverses ocasions a la complicació de les regles de l'àlgebra de relacions, sobretot quan les operacions relatives i no relatives apareixen juntes, i a la dificultat per expressar uniformement els enunciats quantificacionals en què es combinen predicats de diferent aritat. Aquestes apreciacions crítiques envers l'àlgebra de relacions contrasten clarament amb les relatives a la simplicitat de les regles de l'*àlgebra general de la lògica* o *lògica quantificacional* i amb els nombrosos exemples a través del qual Peirce demostra la capacitat d'aquesta per expressar uniformement enunciats quantificacionals en què es combinen predicats de diferent aritat (*Cf. supra*, cap. II, § 8). Tots aquests fets constituïen signes evidents no només de la potència deductiva i expressiva de l'àlgebra general de la lògica, sinó també del seu caràcter sistemàtic i uniforme enfront de l'àlgebra de relacions. Peirce desenvoluparà l'*àlgebra general de la lògica* al final de l'article "The Logic of Relatives" de 1883 i, sobretot, en l'article "On the Algebra of Logic: A Contribution to the Philosophy of Notation" de 1885. En aquest article, a més d'introduir els elements essencials del llenguatge de la teoria quantificacional moderna i algunes regles de transformació i reducció per als quantificadors, Peirce presentarà una axiomatització de la lògica proposicional basada en les connectives $\neg, \rightarrow$, un procediment de decisió per a la mateixa lògica basat en l'ús de valors de veritat, l'ús de la forma normal prenexa en lògica de primer ordre i, fins i tot, una definició de nombre cardinal en lògica de segon ordre (*Cf. supra*, cap. II, §§ 9, 10 i 11). Tal com hem vist en la nostra exposició, en efecte, Peirce introdueix en l'article de 1885 els elements essencials de la notació moderna dels quantificadors: els *termes relatius*, que es corresponen amb els anomenats avui en dia símbols de predicat o relació; els *índexs,* que es corresponen amb les variables individuals modernes i s'afegeixen als quantificadors i als símbols de predicat i relació i, finalment, els signes Σ i Π que denoten respectivament el quantificador existencial i universal i s'entenen com operadors que lliguen les variables que figuren com arguments en els símbols de predicat i relació (*Cf. supra*, cap. II, § 9). Tal com hem observat en el nostre treball, la interpretació semàntica que Peirce fa dels enunciats quantificacionals $\Sigma_i x_i$ i $\Pi_i x_i$, a saber, "*x* és vertadera d'algun dels individus denotats per *i*" i "*x* és vertadera de tots aquests individus" respectivament, pressuposa la idea que una fórmula atòmica amb una variable lliure com ara x_i no és vertadera o falsa, però que esdevé vertadera o falsa en assignar un valor a aquesta variable, i que el valor de veritat dels enunciats quantificacionals $\Sigma_i x_i$ i $\Pi_i x_i$ resta definit en funció dels objectes que satisfan o fan vertadera la fórmula atòmica x_i, car hom té efectivament que $\Sigma_i x_i$ -respectivament $\Pi_i x_i$- és vertader si, i només si, *hi ha com a mínim un objecte* -respectivament, *tot objecte*- de l'univers del discurs que satisfà la fórmula atòmica x_i . Si a aquesta idea peirciana segons la qual la veritat dels enunciats $\Sigma_i x_i$ i $\Pi_i x_i$ s'ha de definir en funció de la satisfacció de la fórmula atòmica x_i, li afegim la idea segons la qual el rang de valors de les variables o, el que és el mateix, l'univers del discurs, no és fix sinó que pot ser diferent en cada ocasió, resulta que en Peirce ja trobem els elements essencials de la idea bàsica i informal que subjau a la *definició model-teorètica moderna de veritat -en una estructura- dels enunciats quantificacionals* (*Cf. supra*, cap. II, § 9). Una altra qüestió important que hem remarcat en la nostra exposició és el fet que Peirce consideri inicialment la interpretació dels enunciats quantificacionals que acabem d'explicar com una interpretació de les equivalències $\Sigma_i x_i = x_i + x_j + x_k +$ etc i $\Pi_i x_i = x_i x_j x_k$, etc i, per tant, consideri $\Sigma_i x_i$ i $\Pi_i x_i$ com equivalents *de facto* a una suma i producte lògics, encara que després afirmi que aquesta identificació no és exacte perquè en els casos en què l'univers és infinit, hom hauria d'identificar $\Sigma_i x_i$ i $\Pi_i x_i$ amb una disjunció o conjunció infinites, l'existència de les quals Peirce sembla finalment rebutjar per analogia amb el que s'esdevé amb la suma i el producte algèbrics (*Cf. supra*, cap. II, § 9). Peirce, en definitiva, va introduir el llenguatge de la lògica de primer ordre i va especificar algunes regles de transformació i reducció, però no va definir formalment els conceptes de fórmula o de demostració, per la qual cosa la seva presentació de la lògica de primer ordre està lluny de la seva presentació com a sistema formal habitual avui en dia. D'una altra banda, si bé és cert que Peirce va distingir clarament entre lògica de primer ordre i de segon ordre, no és menys cert que es mou constantment entre les dues, per la qual cosa seria arriscat afirmar que va concebre la lògica de primer ordre com un sistema autònom i separat de la lògica de segon ordre (*Cf. supra*, cap. II, § 9).

L'objectiu fonamental del programa de recerca plantejat per Schröder a *Vorlesungen über die Algebra der Logik* consisteix en el desenvolupament del càlcul o àlgebra de relatius, que ell considerava la disciplina bàsica a la qual podia reduir-se l'àlgebra de la lògica sencera, que inclou tant el càlcul de dominis com el càlcul de relatius d'ordre superior. En aquest sentit, Schröder pressuposa la tesi segons la qual els relatius ternaris i d'ordre superior poden reduir-se als binaris, que Löwenheim enunciarà i demostrarà per primera vegada en el seu article de 1915. L'interès de Schröder en l'àlgebra de relatius binaris, desenvolupada per primera vegada per Peirce en el seu article de "Description of a Notation for the Logic of Relatives" de 1870 i refinada en articles posteriors, particularment en l'article "The Logic of Relatives" de 1883, sorgia del fet que Schröder veia aquesta àlgebra com el *calculus ratiocinator* d'una mena de llenguatge lògic universal o *pasigrafia*, una *lingua universalis* o *characteristica*, les categories de la qual constituïen els conceptes fonamentals als quals podien reduir-se tots els conceptes de la lògica general i la matemàtica pura -l'aritmètica i la geometria (*Cf. supra*, cap. III, § 12). Tal com hem explicat en la nostra exposició, el programa de Schröder en el tercer volum d'*Algebra der Logik* consisteix a estudiar o desenvolupar l'àlgebra de relatius en el marc de la lògica de relatius i, per tant, s'assembla molt al programa encetat per Peirce en l'article de 1870 i desenvolupat fonamentalment en l'article de 1883 (*Cf. supra*, cap. III, § 8). Amb tot, com ja sabem, aquest darrer autor abandonarà en aquest mateix article l'estudi de l'àlgebra de relatius a partir de la lògica de relatius i convertirà el fragment de primer i segon ordre d'aquesta última, l'*àlgebra general de la lògica*, en el seu propi objecte d'estudi. Per contra, Schröder considerarà sempre el càlcul de relatius com el seu objecte preferent d'estudi, i la lògica de relatius com una mena de recurs auxiliar per demostrar els seus teoremes, mai com un objecte digne d'estudi per si mateix. Això és degut essencialment al paper bàsic que, tal com hem explicat, jugava el càlcul de relatius en el programa schröderià de reducció de les matemàtiques a la lògica. Com ja sabem, Löwenheim manllevarà el seu programa de *logicització* [*Logisierung*] de les matemàtiques de Schröder, la qual cosa influirà decisivament en la seva manca de perspectiva alhora de valorar adequadament la importància de la lògica de primer ordre que ell mateix demarca en el seu article de 1915 i dels resultats que allí obté sobre les fórmules de primer ordre (*Cf. supra*, cap. VII, § 1). Schröder tenia una noció prou clara de la majoria de les nocions semàntiques com ara *interpretació*, *model*, *conseqüència lògica* o *satisfactibilitat* (*Cf. supra*, cap. III, § 2). Així, per exemple, Schröder demostra la independència de les lleis distributives a partir dels axiomes del càlcul idèntic mitjançant el mètode d'*exemplificació* [*Exemplification*] que, tal com el mateix Schröder explica, consisteix en la construcció d'un *model* que faci vertaderes els axiomes del càlcul idèntic i falsa les lleis distributives (*Cf. supra*, cap. III, § 4). Aquest mètode és el mateix que Schröder havia esmentat ja en la introducció a *Algebra der Logik* com l'únic mètode vàlid per demostrar que una inferència lògica no és lògicament vàlida [*logisch gultig*]. Segons Schröder, en efecte, tota inferència [*Schluss*] respon a un *esquema* [*Schema*], que expressa el que Peirce havia anomenat *principi conductor,* del qual en depèn la validesa de la inferència en qüestió. Una inferència serà lògicament vàlida [*logisch gultig*] si el seu esquema "mai no porta de premisses vertaderes a una conclusió falsa"[1] i lògicament no vàlida [*logisch ungultig*] en cas contrari. D'acord amb Schröder:

> L'esquema de la inferència s'obté substituint els noms particulars de les coses de les quals parla la inferència per símbols o lletres de significat general, de manera que totes les relacions, pressuposades o afirmades explícitament pels components de la inferència (premisses i conclusió) en relació a aquelles coses, puguin expressar-se anàlogament.[2]

Per tant, per demostrar que una inferència no és lògicament vàlida serà suficient "trobar un exemple per al seu esquema, en el qual les premisses es reconeguin vertaderes, mentre que la conclusió es mostri falsa".[3] Veiem, doncs, que Schröder entén per una inferència lògicament vàlida o no vàlida, essencialment el mateix que entenem avui en dia per conseqüència lògica i independència lògica i que Schröder no només fou capaç de formular amb una notable precisió el concepte model-teorètic d'independència lògica, sinó que a més fou capaç d'aplicar-lo amb èxit en la demostració de la independència de les lleis distributives. Per un altre costat, com ja sabem, Schröder esmenta com a precursors del seu mètode d'exemplificació els treballs de Beltrami, Cayley i Felix Klein referents a la no demostrabilitat de l'axioma d'Euclides a partir de la resta d'axiomes de la geometria euclidiana (*Cf. supra*, cap. III, § 4), la qual cosa mostra que estava al corrent d'aquests resultats, de tanta importància per al desenvolupament de les recerques model-teorètiques de Hilbert (*Cf. supra*, cap. VIII, § 1). Aquests autors forniren un model -anomenat sovint model de Beltrami-Klein- de la geometria hiperbòlica desenvolupada per Lobacĕvskij i Bolyai de resultes de la negació de l'axioma cinquè d'Euclides, el famós postulat de les paral·leles. Amb aquest model, els autors havien demostrat certament la consistència de la geometria no euclidiana i, per tant, la independència del postulat de les paral·leles (P) de la resta d'axiomes de la geometria euclidiana (Σ), car si $\Sigma \cup \{\neg P\}$ és consistent, llavors efectivament $\Sigma \not\models P$, això

[1] *Schröder 1966 1*, 114.
[2] *Ibid*., 117.
[3] *Ibid*., 117.

és, *P* és independent de Σ. Però, el que és nou en el cas de Schröder és l'aplicació d'aquest mètode semàntic a la lògica. De fet, tal com hem explicat, es tracta de la primera demostració de tipus semàntic de la independència d'una llei lògica de la qual tenim referència i, per tant, no ens ha d'estranyar que Peano qualifiqués la demostració de la independència de les lleis distributives com "un notevolissimo risultato dovuto allo Schröder" (ja citat, *cf. supra*, cap. III, § 4). Ara bé, una cosa és afirmar com hem fet abans que Schröder tenia una noció clara de la majoria de les nocions semàntiques com ara *interpretació*, *model*, *conseqüència lògica* o *satisfactibilitat* i una altra, molt diferent, seria afirmar que Schröder fou capaç de definir correctament aquestes nocions o concebre la possibilitat que aquestes nocions fossin aplicables en el context de la lògica de primer ordre.

Hem vist al llarg de la nostra exposició que en el desenvolupament del càlcul de relatius a *Algebra der Logik* es barregen sovint dues lectures o interpretacions, una lectura o *interpretació algèbrica* i una lectura o *interpretació lògica* o, com de vegades també es diu, *proposicional*. Com que Schröder entén el càlcul de relatius des d'un punt de vista estrictament algèbric, és a dir, com un llenguatge d'un determinat tipus i un conjunt d'axiomes sense interpretar, la doble interpretació a què ens referim afecta essencialment al que abans hem anomenat lògica de relatius, és a dir, al llenguatge lògic a través del qual s'estudia el càlcul de relatius. Tal com hem vist, en efecte, Schröder mateix s'encarrega de destacar la possibilitat d'interpretar proposicionalment els coeficients de relatiu, els mòduls i les operacions idèntiques i els signes Π i Σ (*Cf. supra*, cap. III, § 6). En particular, la interpretació proposicional dels coeficients permet, tant en el cas de Peirce com en el de Schröder, eliminar els constituents i, en darrer terme, els mòduls idèntics del llenguatge pròpiament dit de la lògica de relatius. Com que, a més, els mòduls i les operacions de relatiu són definibles a partir dels de les operacions idèntiques, els coeficients de relatiu i els quantificadors de primer nivell, hom pot demarcar un fragment de la lògica de relatius que coincideix essencialment amb la lògica de primer ordre i que, en un principi, seria interpretable en un sentit anàleg a com ho és el llenguatge de primer ordre d'avui en dia. De fet, en la lògica de relatius de Schröder hi ha tots els elements essencials per a la definició moderna d'*interpretació* i de *satisfactibilitat* o *veritat en una estructura*. Hi ha, en primer lloc, un domini no buit d'objectes (domini pensable) i elements en el qual s'interpreten els símbols propis del llenguatge: les constants individuals i de relació (els relatius). En segon lloc, una interpretació proposicional que fixa el significat dels símbols lògics: les operacions idèntiques i els quantificadors, d'una forma completament anàloga a com ho faríem avui en dia. Aquests elements permeten una definició de satisfactibilitat de les fórmules del llenguatge en el domini en el qual s'interpreten. Però, malauradament, encara que Schröder distingeix clarament entre quantificació de primer i segon nivell, no separa en cap moment el fragment de primer ordre de la lògica de relatius i, per tant, no el converteix mai en el seu objecte d'estudi. En aquest sentit, doncs, hom no pot esperar trobar en l'obra de Schröder una noció, encara que sigui informal o intuïtiva, de les nocions d'interpretació o satisfactibilitat aplicades al llenguatge de la lògica de primer ordre i a les seves fórmules, encara que en la seva obra puguem trobar tots els elements necessaris per això. El mèrit d'haver estat el primer en delimitar en el si de la tradició algèbrica el fragment de primer ordre de la lògica de relatius, haver-lo convertit en objecte d'estudi i haver plantejat respecte a ell qüestions de tipus semàntic, com ara la de la satisfactibilitat de les seves fórmules en dominis de diferents cardinalitat -la qual cosa suposa una concepció clara, si més no a nivell intuïtiu, de les nocions d'interpretació i satisfactibilitat-, correspon a Löwenheim. Cal remarcar, a més, que si bé és cert que en el càlcul i la lògica de relatius d'*Algebra der Logik* es barregen *la interpretació algèbrica* i la *interpretació lògica* o *proposicional* de les fórmules, no és menys cert que la interpretació dominant és la *interpretació algèbrica*. Un signe inequívoc d'això és, per exemple, que al llarg d'aquesta obra Schröder identifica sovint els quantificadors existencial i universal amb una suma i producte possiblement infinits d'individus o relacions. Així mateix, en el segon volum de l'obra *Abriss der Algebra der Logik*, publicada per E. Muller a partir dels *Nachlass* de Schröder -malauradament perduts en la segona guerra mundial-, hom defineix el quantificador existencial i universal de forma completament anàloga, a saber: Si $P(x)$ és una proposició sobre un conjunt numerable d'individus (amb noms $x_1, x_2, \ldots$), llavors $\Pi_x P(x)$ és vertadera si, i només si, $P(x_1).P(x_2) \ldots$ se satisfà i $\Sigma_x P(x)$ és vertadera si, i només si $P(x_1) + P(x_2) \ldots$ se satisfà. En les definicions anteriors de tipus algèbric, el nombre de factors o sumands de l'expansió o desenvolupament del quantificador depèn de la cardinalitat del domini que constitueixi l'abast del quantificador en qüestió. Així, si el domini és finit, infinit numerable o infinit no numerable, llavors els quantificadors existencial i universal donaran lloc a sumes i productes finits, infinits numerables o infinits no numerables respectivament. D'aquesta manera, les regles emprades habitualment per operar amb sumes i producte de tipus finit s'apliquen també en el cas infinit. Ara bé, tal com explicarà Löwenheim més endavant, aquestes regles només estan definides pel cas finit i, per tant, la seva extensió al cas infinit no està en absolut justificada (*Cf. supra*, cap. VII, § 1). Aquest problema sorgeix d'una forma molt evident en la demostració schröderiana del canvi d'ordre dels quantificadors (*Cf. supra*, cap. III, § 3). Tal com hem vist, en efecte, en aquesta demostració hi juga un paper bàsic l'esquema (39) que identifica els "misteriosos operadors" $\Pi_\iota(\Pi_{m_i})$ i $\Pi_\iota(\Sigma_{m_\iota})$ amb successions de quantificadors universals i existencials, on el nombre de quantificadors depèn del domini. Així, Schröder es veu obligat a distingir tres casos, segons que el domini sigui finit, infinit numerable o infinit no numerable, emprant en aquests dos darrer casos regles que només estan justificades pel cas finit. L'aspecte positiu de la caracterització schröderiana dels quantificadors com a sumes o productes possiblement infinits d'individus o relacions és que incorpora implícitament la noció *d'univers del discurs* de De Morgan i, per tant, permet operar amb aquests operadors semànticament, és a dir, raonant directament sobre l'univers del discurs sobre el qual es defineixen. Això és important en relació a la demostració de Löwenheim del seu important teorema sobre la satisfactibilitat de les fórmules de primer ordre. En primer lloc, perquè Löwenheim empra en la seva demostració del teorema de la forma normal l'esquema (39) de Schröder -l'anomenat a vegades *mètode de desenvolupament de Schröder*-, el qual no demostra tot i les seves pròpies advertències sobre l'ús indegut de les regles per operar amb conjuncions i disjuncions infinites i el fet que la seva demostració per part de Schröder és del tot insatisfactòria. En segon lloc, perquè Löwenheim pensa sovint la satisfactibilitat de les fórmules en forma normal en termes de la seva satisfactibilitat de les seves expansions en dominis finits i això el permet, en darrer terme, demostrar el seu famós teorema (*Cf. supra*, cap. VII, § 3). En general, tal com hem vist en la nostra exposició, l'enfocament de Löwenheim és purament *semàntic* i en això hi juga un paper bàsic el fet que el llenguatge porti sempre incorporat, per dir-ho així, el domini al qual fa referència aquest llenguatge. Això també és cert de l'obra de Schröder, però en aquesta no només hi ha una utilització constant de la interpretació algèbrica de les fórmules, sinó també un clar predomini del punt de vista o enfocament *algèbric* en general. Aquest punt de vista es manifesta no només en la presentació purament algèbrica dels diferents càlculs: el càlcul de dominis, el càlcul d'enunciats i el càlcul de relatius, sinó també en la naturalesa dels problemes tractats a *Algebra der Logik* en relació a ells. Tal com hem explicat en el nostre treball, els problemes principals estudiats per Schröder en relació al càlcul de dominis i de relatius a *Algebra der Logik* són els problemes de l'*eliminació* i sobretot el de la *resolubilitat* de les equacions dels càlculs respectius (*Cf. supra*, cap. III, § 9), dels quals Boole ja se n'havia ocupat abastament en relació a la seva àlgebra lògica. És cert, tal com hem vist, que la definició de resolubilitat per a les equacions de relatiu té una certa similitud dia amb la definició moderna de la satisfactibilitat de les fórmules de la lògica de primer ordre amb alguna variable lliure, però no és cert, tal com afirma Goldfarb, que en el càlcul de relatius de Schröder "sigui recercat el següent tipus de qüestió: donada una equació entre dues expressions del càlcul, pot satisfer-se aquesta equació en diferents dominis -això és hi ha relacions en el domini que facin aquesta equació vertadera?".[1] Més aviat el tipus de qüestió que es planteja és, com hem explicat en la nostra exposició, la següent: quines són les *condicions generals* de resolubilitat d'aquesta equació? I, si és resoluble, quina és la forma general de la solució? Per tant, encara que Schröder s'ocupa abastament del problema de la resolubilitat de les equacions del càlcul de dominis o de relatius amb alguna incògnita, el cert és que el seu plantejament no és de tipus semàntic, sinó de tipus algèbric (*Cf. supra*, cap. III, § 9). Per un altre costat, les recerques de Peirce i Schröder sobre les àlgebres de relacions influiran decisivament en el desenvolupament a partir dels anys 40 de l'anomenada *teoria de les àlgebres de relacions* de Tarski. En concret, tal com hem explicat, molt dels problemes plantejats per Tarski en l'article " On the Calculus of Relations" de 1941, d'un clar regust model-teorètic, tenen el seu origen en l'obra de Schröder (*Cf. supra*, cap. III, § 13).

Tal com explicàvem en la Introducció, una segona època pel que fa al desenvolupament de la lògica matemàtica entre els anys 1850 i 1920 s'inicia amb la publicació de *Begriffschrift* (1879) de G. Frege i *Was sind und was sollen die Zahlen?* de R. Dedekind (1888), obres en les quals es defensa la tesi segons la qual les matemàtiques -essencialment l'aritmètica i l'anàlisi- són reductibles a la lògica. El "logicisme" dedekindià descansa en la possibilitat d'una construcció purament lògica del concepte de nombre, sense apel·lar a les intuïcions d'espai i temps, la qual cosa només és possible gràcies a la noció d'*aplicació* (*Cf. supra*, cap. IV, § 1). Tal com hem vist, en efecte, Dedekind defineix a partir de la noció d'aplicació la noció de sistema simplement infinit i, per *abstracció* de la constitució particular dels elements que pertanyen a tot sistema d'aquesta mena, el sistema dels nombres naturals (*Cf. supra*, cap. IV, §§ 5 i 6). Com afirma el propi Dedekind en l'obra abans esmentada, és només gràcies a aquest procés d'abstracció que hom pot anomenar els nombres una lliure creació de l'esperit humà i subordinar els conceptes aritmètics als conceptes generals de la lògica, això és, definir-los en termes de les nocions bàsiques de la seva teoria de sistemes [*Systemlehre*]: sistema, pertinença o inclusió i aplicació (*Cf. supra*, cap. IV, § 8). L'interès històric de l'exposició de la *Systemlehre* de *Was sind* rau en el fet que és probablement el primer intent, juntament amb l'article "Über unendliche lineare

[1] *Goldfarb 1979*, 354.

Punktmannigfaltigkeiten" (1883) de Cantor, per enunciar explícitament principis intuïtius en la formació de conjunts, els quals Zermelo adoptarà més endavant en la seva axiomatització de la teoria de conjunts. Dedekind defineix a partir de la noció d'aplicació la noció de *cadena*, la qual és a la base de la construcció dedekidiana dels nombres naturals i constitueix, juntament amb les nocions de *ideal* i *tall*, una de les nocions més innovadores i fructíferes de la matemàtica dedekindiana (*Cf. supra*, cap. IV, § 4). Si φ és una aplicació de S *en* S i $K \subseteq S$, llavors Dedekind dirà que K és una *cadena* [*Kette*] si $\varphi(K) = K' \subseteq K$. Dedekind remarca de seguida que aquesta definició fa intervenir l'aplicació φ i que "en relació a una altra aplicació del sistema S en si mateix, K pot perfectament no ser cap cadena" (ja citat: *Cf. supra*, cap. IV, § 4). A partir de la noció de cadena, Dedekind defineix la noció de cadena d'un sistema A o, simplement, la *cadena de A*: Si $A \subseteq S$, llavors la cadena de A, en símbols A_0, és la intersecció de totes les cadenes -relatives a una aplicació φ- que contenen A. Dues propietats importants de la cadena de A demostrades per Dedekind són $(A_0)' \subseteq A$ i $(A_0)' = (A')_0$, és a dir, que la imatge de la cadena d'un sistema està inclosa en aquest sistema i és la cadena de la seva imatge, car d'elles se segueix que $(A_0)' \subseteq A_0$, $(A_0)'' \subseteq A_0$, $(A_0)''' \subseteq A_0$, etc. Com hem explicat en la nostra exposició, aquesta possibilitat d'iteració infinita és bàsica per a la construcció de la sèrie dels nombres naturals, car N és intuïtivament la cadena del 1 per l'aplicació successor i la definició dedekindiana dels nombres naturals el que fa és reflectir aquest fet (*Cf. supra*, cap. IV, § 4). Les definicions bàsiques per a la construcció de la sèrie dels nombres naturals són la definició de sistema infinit (*Cf. supra*, cap. IV, § 5) i sistema simplement infinit (*Cf. supra*, cap. IV, § 6). Un sistema N és diu simplement infinit si hi ha una aplicació semblant φ de N en si mateix, tal que N és la cadena d'un element que no està contingut en $\varphi(N)$. Si designem aquest element amb el símbol 1, llavors un sistema simplement infinit N satisfà les condicions $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ següents (*Cf. supra*, cap. IV, § 6):

α. $N' \subseteq N$.

β. $N = 1_0$.

γ. L'element 1 no està contingut en N'.

δ. L'aplicació φ és semblant.

Tal com observa el mateix Dedekind, d'α, β, γ i δ se segueix immediatament que tot sistema simplement infinit és infinit. Hom obté també fàcilment que tot sistema infinit conté un sistema simplement infinit. Aquest teorema i el teorema d'existència d'un conjunt infinit

(*Cf. supra*, cap. IV, § 5) asseguren l'existència de conjunts simplement infinits, a partir dels quals Dedekind podrà definir per abstracció la sèrie dels nombres naturals o ordinals. Veiem, doncs, que Dedekind no defineix explícitament els nombres naturals, sinó que defineix unes estructures de tipus conjuntista -els sistemes simplement infinits- a partir de les propietats que hom atribueix habitualment als nombres naturals i, finalment, obté aquests per *abstracció mental*. Aquesta pràctica definicional i, en particular la definició de la sèrie dels nombres natural, serà criticada per Frege (*Cf. supra*, cap. V, § 1) i Russell (*Cf. supra*, cap. IV, § 6). Però, en qualsevol cas, s'ha de tenir en compte que la definició dedekindiana només resta completament justificada un cop demostrat que tots els sistemes simplement infinits són semblants -equipotents- a N i, per tant, són semblants entre si i que tot sistema Ω semblant a un sistema simplement infinit -i, per tant, a N- és també simplement infinit, car d'aquí resulta que, en paraules del mateix Dedekind, "tot els teoremes sobre els nombres, és a dir, sobre elements n del sistema simplement infinit N ordenat per l'aplicació φ [...] posseeixen també validesa general per qualsevol altra sistema simplement infinit ordenat per una aplicació ϕ i els seus elements v" (ja citat: *Cf. supra*, cap. IV, § 6). Així doncs, l'objecte d'estudi de l'aritmètica són els enunciats que són vertaders en qualsevol conjunt simplement infinit. Dit d'una manera més tècnica, l'aritmètica o teoria de nombres és la teoria d'una classe d'estructures K -els conjunts simplement infinits- isomorfes entre elles i axiomatitzades per les condicions $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Per a Dedekind, la sèrie dels nombres naturals N serà llavors un model *abstracte* o *formal* d'aquesta classe d'estructures, encara que en alguna ocasió parli també de N com un model particular dels axiomes $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ -això és, com l'estructura $\langle N, \varphi, 1 \rangle$, on N és la cadena del 1 per l'aplicació successor φ. Per a Dedekind, en definitiva, els nombres naturals o ordinals són "els elements abstractes d'un sistema ordenat simplement infinit" (ja citat: *Cf. supra*, cap. IV, § 6) i no tenen, per tant, cap altra propietat que la seva posició en una sèrie o progressió i les propietats que es deriven d'aquesta. Com ja hem explicat, el problema que planteja aquesta concepció formalista dels nombres és si amb ella s'aconsegueix definir els nombres naturals com objectes d'alguna mena. Segons Russell, Dedekind no hauria reeixit en assolir aquest objectiu (*Cf. supra*, cap. IV, § 6). Russell rebutja, en efecte, que hom pugui identificar els nombres únicament en termes de les propietats estructurals que posseeixen en virtut de la seva posició en una sèrie o progressió, car aquestes no ens permeten distingir els nombres naturals o ordinals dels elements d'una altra progressió qualsevol -per exemple, els ordinals transfinits o els cardinals. Tal com hem vist, en efecte, Dedekind defineix implícitament -a través d'axiomes o postulats- els nombres;

però aquesta mena de definicions només defineixen un concepte estructuralment, això és, especificant-ne les seves propietats formals o estructurals. D'aquí que aquestes definicions no permetin definir els nombres, tal com voldria Russell, com "una classe d'entitats que tenen, o són, per si mateixes, d'una naturalesa genuïna, i són lògicament independents de la manera com s'han definit" (ja citat: *Cf. supra*, cap. IV, § 8). D'una altra banda, tal com hem explicat en la nostra exposició, aquestes definicions són ambigües pel que fa a la seva *interpretació*, perquè hi ha infinits sistemes d'objectes que satisfan les condicions $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ de Dedekind, i encara que tots aquests sistemes siguin isomorfs, sempre serà possible argumentar *à la Russell* que aquest axiomes no permeten capturar de forma unívoca el sistema dels nombres naturals, això és, definir-lo com un sistema d'objectes genuïns i unívocament determinats. Per això caldria interpretar "1" com el nombre 1 i "φ" com l'aplicació successor, i definir els nombres naturals com la cadena del 1 per l'aplicació successor. Tal com hem explicat en el nostre treball, això evidentment no és incompatible amb la tesi logicista de Dedekind, que consisteix essencialment a desenvolupar l'àlgebra i l'anàlisi a partir dels conceptes de la seva *Systemlehre*, sempre i quan puguem definir l'element fonamental i l'aplicació successor en termes de la seva teoria de conjunts o *Systemlehre* i, de fet, és el que és fa habitualment avui en dia en el marc de la teoria de conjunt de Zermelo-Fraenkel. Però, com ja hem explicat, Dedekind no pretén en cap moment definir els nombres naturals en aquest sentit i difícilment podria fer-ho, donat que en la seva *Systemlehre* no introdueix el conjunt buit ni la distinció entre element i singletó, que són bàsics per definir l'element fonamental i l'aplicació successor. De fet, aquest punt de vista conjuntista, si bé és present d'alguna manera a *Was sind* -com ho demostra el fet que alguna vegada Dedekind identifiqui els nombres naturals amb la cadena del 1 per l'aplicació successor i que el mateix Zermelo reconegui haver-se inspirat en aquella obra a l'hora de desenvolupar la seva teoria de conjunts-, es troba clarament superat pel punt de vista estructuralista o formalista -i, en aquest sentit, no és d'estranyar que Peano hagi reconegut haver-se inspirat en aquesta obra per tal de desenvolupar la seva coneguda axiomatització de l'aritmètica (*Cf. supra*, cap. IV, § 6). És cert, d'una altra banda, que el conjunt d'axiomes de Peano-Dedekind (de segon ordre) per a l'aritmètica és *categòric*, allò que fa que tots els teoremes vàlids en una estructura siguin també vàlids en qualsevol altra estructura que sigui un model dels axiomes. Com hem explicat en la nostra exposició, aquest és un resultat important, que demostra l'adequació de la caracterització dedekindiana dels nombres naturals per a certs propòsits, però no pas per a una fonamentació lògica de les matemàtiques com la que cerquen Frege o Russell, la qual requereix que els nombres es defineixin com objectes d'un tipus determinat, a saber, com objectes lògics. Un altre tema important de la filosofia de la matemàtica dedekindiana és la preeminència dels nombres ordinals sobre els cardinals (*Cf. supra*, cap. IV, § 8). La definició de nombre cardinal se segueix del teorema segons el qual: "Un sistema Σ és finit o infinit, segons que hi hagi o no un sistema Z_n semblant". En efecte, si Σ és un sistema finit, llavors hi haurà un segment Z_n semblant a Σ i, donat que tots els segment semblants a Σ són semblants entre ells i hi ha un *únic* nombre *n* corresponent a tots i cada un d'aquests segments, se segueix d'aquí que hi haurà un únic nombre *n* que expressi el nombre d'elements de Σ, al qual Dedekind anomenarà el nombre cardinal d'aquest sistema. Tal com reconeix Dedekind en una carta al seu amic Weber, sempre ha considerat "el [concepte de] nombre ordinal, no pas el de nombre cardinal, com el concepte bàsic de nombre", la qual cosa l'ha dut a concebre "el nombre cardinal com una aplicació del nombre ordinal" (ja citat: *Cf. supra*, cap. IV, § 8). De fet, donat que Dedekind identifica els nombres ordinals amb "els elements abstractes d'un sistema ordenat simplement infinit" i, per tant, amb els nombres naturals, la dependència dels nombres cardinals respecte als ordinals resulta clarament de la definició d'aquests (*Cf. supra*, cap. IV, § 8). Com hem explicat en la nostra exposició, hom podria seguir evidentment el camí invers i identificar els nombres naturals amb el nombres cardinals, definint-los com la classe de tots els sistemes finits semblants (Frege, Russell), però aquest no és, segons Dedekind, el camí correcte. Dedekind considera, en efecte, que la propietat essencial dels nombres naturals és la "d'estar en un cert ordre determinat" -l'ordre habitual induït per l'aplicació successor- i que aquest ordre és pressuposat en el mateix procés de contar, car quan volem determinar el nombre d'elements d'un conjunt finit arrangem aquests elements en un ordre: primer, segon, tercer … prèviament donat. Així doncs, la propietat dels nombres naturals d'estar ordenats en una sèrie és la propietat essencial dels nombres naturals, mentre que el fet que aquests nombres serveixin per contar els elements d'un conjunt no és més que una "aplicació" seva. D'aquí que Dedekind consideri el concepte de nombre ordinal anterior i més fonamental que el de nombre cardinal i identifiqui els nombres naturals amb els ordinals. Per contra, com ja sabem, Frege identificarà els nombres naturals amb els cardinals, donat que per aquest autor la propietat essencial dels nombres naturals és la de permetre contar els elements d'un conjunt i és, en definitiva, aquesta propietat la que ha de reflectir la seva definició (*Cf. supra*, cap. V, § 5). Remarquem finalment que, en les dues darrers seccions del capítol dedicat a Dedekind, ens hem fet ressò de la influència d'aquest autor en l'axiomatització de l'aritmètica duta a terme per Peano (*Cf. supra*, cap. IV, § 9) i en l'axiomatització de la teoria de conjunts realitzada per Zermelo (*Cf. supra*, cap. IV, § 10), de la qual ens hem ocupat amb una mica més de detall en la secció dedicada específicament a l'estudi d'aquesta última (*Cf. supra*, cap. VIII, § 10).

Els objectius i interessos de Frege a *Begriffschrift*, obra en la qual es duu a terme una segona refundació de la lògica, són completament diferents als de Boole. Així, mentre que l'objectiu fonamental de Boole és fornir una lògica abstracta en base al fet que "la validesa dels processos de l'anàlisi no depenen pas de la interpretació dels símbols que hi són emprats, sinó només de les seves lleis de combinació" (ja citat: *Cf. supra*, cap. I, § 1), l'objectiu fonamental de Frege és fornir un llenguatge que sigui capaç d'expressar el contingut de les diverses ciències i fonamentar-les més sòlidament en base al fet que les seves lleis són completament generals i no depenen de les característiques específiques dels objectes de cada ciència (*Cf. supra*, cap. V, § 2). En particular, l'interès de Frege se centrà sobretot en la fonamentació *lògica* de l'aritmètica i, per això, Frege afirma sovint que aquesta es troba en l'origen de la seva *Begriffschrift*. Per provar que els judicis de l'aritmètica poden ser demostrats amb mitjans exclusivament lògics, cal elaborar un llenguatge lògic -l'escriptura conceptual o conceptografia, que dóna títol a l'obra- que permeti introduir amb tota exactitud els conceptes bàsics de l'aritmètica i demostrar amb el major rigor possible els seus teoremes, tot evitant qualsevol salt en elles que pugui interpretar-se com un recurs a la intuïció, és a dir, a quelcom de naturalesa no estrictament lògica. Conforme a això, en les dues primeres parts de *Begriffschrift*, Frege exposa un sistema lògic, en el qual formula explícitament el llenguatge lògic, els axiomes i les regles d'inferència a partir dels quals introduirà en la tercera part alguns conceptes fonamentals de l'aritmètica i demostrarà les seves propietats bàsiques. Tal com hem explicat en la nostra exposició, el sistema lògic exposat en les dues parts de *Begriffschrift* abasta tant la lògica proposicional com la de primer ordre amb identitat, encara que Frege admet també que les lletres funcionals puguin considerar-se arguments i, per tant, que es pugui quantificar sobre elles. Això és necessari per algunes de les definicions i teoremes més importants de la tercera part, per la qual cosa el desenvolupament d'aquesta requerirà, a més dels axiomes i regles del sistema lògic exposat en les dues primeres parts, alguns axiomes o regles específics de la lògica de segon ordre. Pel que fa a la filosofia de la matemàtica, exposada en la tercera part de *Begriffschrift*, els resultats més importants són aquells que enuncien la *transitivitat* i *connectivitat* de l'*ancestral*, propietats que també compleix la relació *menor que,* definida de la forma habitual en els nombres naturals, la qual és l'ancestral de la relació *segueix* o *precedeix* *immediatament a* (*Cf. supra*, cap. V, § 3). Frege introduirà aquesta relació a *Grundlagen der Arithmetik*, la qual, junt amb la definició del nombre 0, el permetrà definir els *sencers naturals* o *nombres finits* com els nombres n tals que $0 \leq n$ i demostrar la infinitud de la sèrie dels nombres naturals (*Cf. supra*, cap. V, § 5). Això indica clarament que la defensa de la tesi logicista passa a *Begriffschrift* per exposar una teoria general de sèries, en la qual, partint d'una sèrie f qualsevol, es defineix una relació, la relació *ancestral*, que indueix en aquesta sèrie una estructura d'ordre completament anàloga a la induïda en la sèrie dels nombres naturals per la relació *menor que*. En aquest sentit és interessant remarcar que, tal com hem explicat en el nostre treball, l'*ancestral* juga en la teoria general de sèries fregeana i en la ulterior construcció dels nombres naturals a partir d'ella, un paper completament anàleg al paper jugat per la noció de cadena en l'anàlisi dedekindiana del concepte de nombre. Exactament, la relació entre les f-sèries i les cadenes de Dedekind ve donada pel fet que, si f és injectiva, l'extensió de la propietat $f^{*}_{=}ax$ és precisament a_0, la cadena de a, això és:

$$a_0 = \bigcap\{X : \langle X,f\rangle \text{ és una cadena i } a \in X\},$$

per la qual cosa la construcció fregeana dels naturals com la sèrie f que comença amb el 0 -on f és la relació successor- té una similitud evident amb la definició de Dedekind dels naturals com la cadena del 1 (*Cf. supra*, cap. V, § 3). Recordem, en aquest sentit, que el procés seguit per Frege per demostrar la tesi logicista havia de consistir, segons reconeixia el mateix autor, "en intentar reduir primer el concepte d'ordre en una sèrie al de seqüència lògica, per avançar d'aquí al concepte de nombre" (ja citat: *Cf. supra*, cap. V, § 2). Ara bé, Frege només escomet a *Begriffschrift* la primera part del pla previst, demostrant a més alguns principis bàsics que aquestes sèries o seqüències comparteixen amb la sèrie dels nombres naturals. La segona, la definició del concepte de nombre, l'escomet a *Grundlagen der Arithmetik* i recull a nivell formal a *Grundgesetze der Arithmetik*. A *Grundlagen*, Frege defineix el concepte de nombre i demostra informalment alguns de les lleis bàsiques de l'aritmètica -en particular, l'axioma de l'infinit, que Dedekind també intentarà demostrar a *Was sind*. La idea de Frege a *Grundlagen* és fer plausible la possibilitat de reduir l'aritmètica a la lògica, definint tots els conceptes aritmètics en termes estrictament lògics i demostrant algunes de les lleis bàsiques de l'aritmètica sense apel·lar en cap moment a la intuïció, això és, a partir de regles lògiques. Aquest és també el projecte de *Grundgesetze der Arithmetik*, en la tercera part de la qual Frege exposa també la teoria dels nombres reals a partir d'un esquema molt semblant a l'emprat per als nombres naturals a *Grundlagen*. Frege interromp però bruscament l'exposició d'aquesta teoria i introdueix en un apèndix la paradoxa que Russell li havia comunicat per carta el 1902. De fet, tal com hem vist en la nostra exposició de *Begriffschrift*, en la segona part Frege substitueix les variables individuals per variables funcionals sense cap restricció i, en la tercera part empra implícitament una regla de substitució que el permet substituir una lletra de propietat qualsevol per una fórmula del tipus f^*xa. Ara bé, com ja sabem, la definició de f^* -l'ancestral de f- conté un quantificador de segon ordre i, per tant, aquesta relació està definida de forma impredicativa (*Cf. supra*, cap. V, § 3). Així doncs, Frege es troba ja a *Begriffschrift* a un pas de la paradoxa de Russell, en la qual hi acabarà caient inexorablement a *Grundgesetze* -curiosament per la via extensional, perquè la jerarquia de nivells de funcions i conceptes d'aquesta obra evita les paradoxes intensionals. L'origen d'aquesta paradoxa rau, en efecte, en l'axioma V de *Grundgesetze*, l'*axioma de comprehensió*, que és el que permet introduir les classes com a extensions dels conceptes. La importància d'aquest axioma rau en què permet introduir les classes com a objectes lògics, això és, com objectes obtinguts a partir d'un axioma lògic -sense recórrer, doncs, a processos psicològics com ara l'*abstracció*- a partir d'objectes lògics: els conceptes (*Cf. supra*, cap. V, §§ 8 i 10). En aquest sentit, la comunicació per part de Russell que aquest axioma portava a una contradicció havia de significar per a Frege la impossibilitat de reduir les matemàtiques a la lògica i, per tant, l'abandó del programa logicista. Frege no va veure mai els conjunts com objectes que existeixen de forma independent dels conceptes i que poden generar-se mitjançant operacions sobre els elements de conjunts prèviament existents, per la qual cosa Frege no podia operar amb extensions arbitràries, tal com havien fet Cantor o Dedekind. Això ens mostra, en definitiva, que Frege no tenia el concepte modern de conjunt o, com se sol dir avui en dia, la *concepció iterativa* de conjunt, que les teories axiomàtiques de Zermelo i Von Neumann van desenvolupar.

Pel que fa a les contribucions de Frege a la història de la lògica, podem afirmar que la seva obra *Begriffschrift* marca un abans i un després en la història d'aquesta disciplina i és una de les seves obres cabdals. En aquest sentit, no sembla exagerat dir que Frege és el pare de la lògica moderna i que la data de naixement d'aquesta coincideix amb la publicació de *Begriffschrift*. En aquesta obra, en efecte, es presenten, per primera vegada en la història, la lògica proposicional i quantificacional com un *sistema formal* o *logístic*, és a dir, especificant-se, a banda de tota consideració referent al significat de les expressions, els *símbols primitius*, les *regles de formació* i *deducció* i els *axiomes lògics*. D'aquesta manera, totes les deduccions es duen a terme d'acord amb la forma de les expressions, deixant-se de banda tot recurs al seu significat o a la intuïció. A més, ambdues lògiques -proposicional i quantificacional- apareixen nítidament diferenciades. En efecte, tal com hem vist, Frege introdueix primer el càlcul proposicional a través de la definició del *condicional* i la *negació*, la regla de *modus ponens* i els *axiomes* (1), (2), (8), (28), (31) i (41). Després, un cop introduïdes les nocions de *funció* i *quantificador*, trets distintius de la lògica quantificacional respecte de la proposicional, introdueix el càlcul quantificacional amb identitat a partir dels axiomes (52), (54) i (58) (*Cf. supra*, cap. V, § 2). En aquest sentit, cal fer un parell d'observacions importants: en primer lloc, que la notació introduïda per Frege per a l'expressió dels enunciats quantificacionals, particularment la concavitat i les lletres gòtiques, permet expressar amb precisió l'abast dels quantificadors i donar raó de tota mena d'enunciats quantificacionals; segonament, que els tres axiomes només donen raó de la quantificació de primer ordre i la igualtat, però no de la quantificació de segon ordre, la possibilitat de la qual és observada ja per Frege en la primer part de *Begriffschrift* i emprada abastament en la segona part. Finalment, cal recordar que tot això és exposat amb un rigor i claredat que ultrapassa amb escreix el dels seus contemporanis i successors immediats. Com hem explicat en la nostra exposició, en la conferència "Funktion und Begriff" de 1891, Frege precisarà i ampliarà la noció de *funció*, introduint els *objectes* en general -en els quals s'inclouen els valors de veritat- com a possibles arguments i valors d'una funció. Així, Frege definirà el *concepte* com una funció el valor de la qual és sempre un valor de veritat i reinterpretarà els signes més importants de *Begriffschrift* com a signes funcionals. Finalment, Frege defineix en aquesta conferència de forma expressa, per primera vegada en la història, la *negació* i el *condicional* com a funcions de veritat, això és, com funcions l'argument i el valor de les quals és un valor de veritat -o, més exactament, com un concepte i una relació que prenen també valors de veritat com arguments (*Cf. supra*, cap. V, § 7). Tant la jerarquia de funcions esbossada a "Funktion und Begriff" com la teoria semàntica exposada en l'article "Über Sinn und Bedeutung" de 1892 (*Cf. supra*, cap. V, § 8) són recollides en la *magnum opus* de Frege: *Grundgesetze der Arithmetik*. Pel que fa al desenvolupament de la lògica quantificacional en aquesta obra, hi ha alguns aspectes que, des del nostre punt de vista, mereixen ser destacats. En primer lloc, pel que fa als axiomes a través dels quals Frege introdueix la lògica quantificacional, cal destacar que les novetats principals respecte a *Begriffschrift* són la introducció d'axiomes específics per a la quantificació sobre funcions, les descripcions definides i d'un axioma que permet la introducció d'extensions a partir dels conceptes (*Cf. supra*, cap. V, § 9). Aquest darrer és l'axioma V de *Grundgesetze* i és el culpable que el sistema lògic de *Grundgesetze* sigui inconsistent, tal com demostrarà Russell ben aviat. En segon lloc, cal destacar que la jerarquia de funcions exposada per Frege a *Grundgesetze* és un clar antecedent de la jerarquia funcional de la *teoria simple de tipus* de Russell i, en general, dels desenvolupament posteriors de les *lògiques d'ordre superior*. L'objectiu principal cercat per Frege amb la construcció d'aquesta jerarquia de funcions és donar raó dels diferents tipus de noms de funció (conceptes i relacions) que apareixen a *Grundgesetze*. Tal com hem explicat en la nostra exposició, un tipus particularment important de noms de funció són els quantificadors, els qual la jerarquia de funcions permet definir amb precisió, tant des del punt de vista sintàctic com des del punt de vista semàntic. En concret, el quantificador universal

1. " $-\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!-\ \phi(\mathfrak{a})$"

és, des d'un *punt de vista sintàctic*, el nom d'un concepte de segon nivell $\Omega_{\beta}(\phi(\beta))$ i, per tant, un operador que lliga les variables individuals que constitueix l'argument del concepte de primer nivell $\phi(\ )$. Des d'un *punt de vista semàntic*, el quantificador universal $-\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!-\ \phi(\mathfrak{a})$ és un *concepte de segon nivell* el valor del qual és el vertader si l'argument és una funció de primer nivell que té com a valor el vertader per qualsevol argument de primer tipus, és a dir, si el seu argument és un concepte de primer nivell $\Phi(\xi)$ que és vertader per a qualsevol objecte. Altrament, $-\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!-\ \phi(\mathfrak{a})$ és el fals (*Cf. supra*, cap. V, § 9). Tal com hem explicat en el nostre treball, aquesta especificació de les condicions de veritat d'un enunciat quantificat universalment és una clara anticipació de les condicions de veritat estipulades per Tarski per al mateix tipus d'enunciat, si bé Tarski no concep *à la Frege* els quantificadors com a predicats d'ordre superior -de seguida tornarem sobre aquesta qüestió. Els dos únics noms primitius de funció de segon nivell introduïts per Frege a la *Begriffschrift* de *Grundgesetze* són " $-\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!-\ \phi(\mathfrak{a})$" i " $-\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!-\!\overset{\mathfrak{e}}{\smile}\!-\ \phi(\mathfrak{a},\ \mathfrak{e})$", car tota la resta d'enunciats quantificacionals de primer ordre considerats per Frege a *Grundgesetze* es poden introduir com a noms de conceptes de segon nivell, emprant a tal efecte els dos noms primitius de conceptes anteriors i els noms primitius de funció de primer nivell -amb un o dos arguments. Així, per exemple:

2. “ $\overset{a}{\smile}\ \phi(\mathrm{a})$” i 3. “ $\neg\overset{a}{\smile}\ \begin{array}{l}\psi(\mathrm{a})\\ \phi(\mathrm{a})\end{array}$ ”

son noms de conceptes de segon nivell amb un argument de segon tipus, que tenen com arguments el concepte i la relació de primer nivell:

2’. $\Phi(\xi)$ i 3’. $\begin{array}{l}\Psi(\zeta)\\ \Phi(\zeta)\end{array}$

El primer nom de concepte de segon nivell és especialment important, perquè mitjançant ell s’expressen les proposicions existencials. El segon nom de concepte de segon nivell expressa la subordinació de dos conceptes de primer nivell. Veiem, doncs, que els noms de conceptes de segon nivell es caracteritzen per tenir un lloc argumental que, en ser completat o saturat per un nom de funció de primer nivell, transformen aquell nom de funció en un nom d’objecte: el Vertader o el Fals. D’aquí que Frege expliqui el seu valor semàntic en termes de la seva saturació mitjançant una funció de primer nivell. Així, tal com explica Frege, el quantificador existencial (2) és un nom de concepte de segon nivell que denotarà el vertader si hi ha algun objecte que cau sota el concepte de primer nivell (2’) a través del qual saturem (2); el quantificador (3) és un nom de concepte de segon nivell que denota el vertader si (3’) denota el vertader per qualsevol objecte que caigui sota aquest concepte, etc. Ara bé, és interessant observar que aquest esquema interpretatiu no funciona plenament en el cas dels enunciats en els quals es barregen els quantificadors universal i existencial. Per exemple, un enunciat del tipus $\forall x \exists y R(x,y)$ és, d’acord amb el que hem vist abans, un concepte de segon nivell, però no es pot explicar semànticament en els termes proposats per Frege, això és, en termes exclusivament de la saturació de la relació $R(x,y)$ amb determinats objectes. Això no és pot arreglar a no ser que abandonem la jerarquia de funcions i conceptes de Frege, amb la qual cosa les definicions semàntiques de Frege dels quantificadors esdevenen equivalents a les definicions tarskianes de veritat en una estructura d’aquests operadors -només que en el cas de Frege, hauríem de parlar de veritat en *l*’univers i no en l’univers d’una estructura, com en el cas de Tarski-; o considerem que $\exists y R(x,y)$ és el concepte de primer ordre al qual s’aplica el concepte de segon ordre $\forall x(\ )$, però això equivaldria a introduir diferències d’ordre entre els quantificadors d’un mateix nivell i, en definitiva, a convertir la jerarquia de funcions i conceptes fregeana en una jerarquia molt semblant a la *jerarquia ramificada* de tipus de Russell. És important remarcar també que si identifiquem l'extensió d'un concepte de primer nivell amb la classe de *n*-tuples d'objectes que cauen sota ell, llavors l'extensió dels quantificadors (1)-(3) esmentats abans és:

$$\forall_u = \{X \subseteq U : X = U\}$$
$$\exists_u = \{X \subseteq U : X \neq \varnothing\}$$
$$All_u = \{<X, Y>: X \subseteq U \wedge Y \subseteq U \wedge X \subseteq Y\},$$

on U és la classe de tots els objectes. Doncs bé, tal com ha assenyalat D. Westerståhl en l'article "Quantifiers in Formal and Natural Languages" (*1989*), "apart del fet que l'univers aquí és fix (i massa gran per ser l'element d'una classe), aquestes extensions són quantificadors generalitzats [*generalized quantifiers*] en el sentit model-teorètic del terme".[1] Així doncs, la definició fregeana dels quantificadors com a conceptes d'ordre superior està intimament lligada amb la moderna *teoria dels quantificadors generalitzats*, encara que és poc probable que Frege acceptés una concepció extensional dels quantificadors com l'anterior -més endavant tornarem sobre aquesta qüestió. Per acabar, cal observar també que els dos noms primitius de conceptes de segon nivell a través dels quals Frege introdueix els quantificadors de primer ordre només són suficients per introduir la lògica quantificacional monàdica i diàdica, però és evident que hom podria considerar també conceptes de segon nivell que tinguessin com possibles arguments relacions de primer nivell de qualsevol aritat, amb la qual cosa hom estendria el sistema lògic de *Grundgesetze* per tal que inclogués la lògica quantificacional poliàdica. Com ja sabem, els següents noms primitius en la jerarquia de funcions considerats per Frege són els noms primitius de funció de tercer nivell, els quals permeten introduir en el sistema lògic la quantificació de segon ordre (*Cf. supra*, cap. V, § 9). Com ja hem dit, Frege no introdueix noms primitius de funció d'un nivell superior, perquè les definicions que després donarà dels conceptes aritmètics requereixen com a molt la quantificació de segon ordre. D'aquí també que els axiomes postulats en la primera secció de la *Begriffschrift* de *Grundgesetze* només donin raó de la quantificació de primer i segon ordre. En qualsevol cas, és evident que hom podria estendre fàcilment la jerarquia de funcions anterior per tal de donar raó de la quantificació d'ordre superior, amb la qual cosa hom obtindria quelcom molt semblant a les exposicions modernes de les lògiques d'ordre

[1] *Gabbay i Guenthner 1989*, 12.

superior. Se segueix evidentment del que acabem de dir, que la lògica quantificacional exposada per Frege a *Grundgesetze* inclou tant la lògica de primer ordre com la de segon ordre. En altres paraules, Frege no considera en cap moment la lògica de primer ordre com un sistema formal separat i independent de la lògica de segon ordre.

Tal com havíem explicat en la Introducció, una tercera època en el desenvolupament de la lògica matemàtica en el període estudiat s'inicia l'any 1902, amb la carta que Russell li envia a Frege i en què li comunica el descobriment de les paradoxes de la lògica i la teoria de conjunts. Aquest descobriment i les diferents solucions aportades per Russell a les paradoxes constitueixen, sens dubte, l'eix principal a través del qual es desenvolupa l'obra de Russell. L'altre eix bàsic és la seva filosofia de les matemàtiques: el *logicisme*. Tal com hem vist, en efecte, la particular versió del logicisme adoptada per Russell i, en particular, algunes de les seves tesis bàsiques com ara la *teoria de la variable universal*, jugaran un paper clau en el desenvolupament dels diferents sistemes lògics que el nostre autor proposarà com a solució a les paradoxes. La primera obra important de Russell sobre lògica i fonaments és *The Principles of Mathematics* (1903). En aquesta obra, Russell exposa públicament la seva tesi logicista, les paradoxes que prèviament havia comunicat a Frege i, finalment, esbossa una primera versió de la teoria simple de tipus com la solució més satisfactòria a aquesta paradoxa (*Cf. supra*, cap. VI, § 7). Com ja sabem, l'objectiu principal de *Principles* és la demostració informal de la tesi logicista, la qual requereix l'existència d'un reduït nombre de conceptes lògics a partir dels quals es puguin definir-se la resta de conceptes matemàtics i la demostració que totes les proposicions de les matemàtiques poden deduir-se a partir d'un petit nombre de principis lògics fonamentals (*Cf. supra*, cap. VI, § 1). L'argumentació de Russell a *Principles* a favor del logicisme té una certa semblança amb l'argumentació de Frege a *Grundlagen der Artihmetik*. En primer lloc, l'argumentació en ambdós casos és de tipus informal, en el sentit que no utilitza el raonament simbòlic, però és força acurada i exhaustiva. En aquest sentit, les dues obres juguen un paper semblant respecte a les obres immediatament posteriors d'ambdós autors: *Grundgesetze der Arithmetik* i *Principia Mathematica*, on es procedeix formalment a la demostració de la tesi logicista. En segon lloc, hi ha una coincidència bastant acusada en els punts claus de l'argumentació a favor del logicisme de tots dos autors, encara que el mateix Russell reconeix que els autors que influïren més decisivament en la seva obra foren Cantor i Peano i que va conèixer l'obra de Frege en un estat força avançat de l'elaboració d'aquesta obra, per la qual cosa, l'única manera de fer-li justícia era dedicar-li un apèndix (*Cf. supra*, cap. VI, § 1). Com hem explicat en el nostre treball, la influència de Peano en Russell és certament molt acusada no solament en matemàtiques sinó també en lògica, encara que en ambdós casos Russell es mostrarà crític i aportarà innovacions importants en alguns aspectes essencials. El motiu fonamental de la influència de Peano sobre Russell en lògica és el paper central que tots dos autors concedeixen a aquesta disciplina en el propòsit compartit de fonamentar les matemàtiques sobre bases més segures que la intuïció -encara que, com és ben sabut, Peano no pretenia reduir les matemàtiques a la lògica. Això va fer, segons Russell, que la lògica de Peano fos molt més dúctil i apropiada per formalitzar les proposicions primitives i definicions de les matemàtiques que no pas l'àlgebra de la lògica de Boole i els seus seguidors i, per tant, fos adoptada per ell mateix en els seus trets essencials en detriment d'aquesta. La lògica de Peano abastava tant la lògica proposicional com el càlcul de classes i l'exposició que Russell fa d'ambdues disciplines a *Principles* evoca constantment la de Peano. Tanmateix, segons Russell, la lògica de Peano presenta un defecte essencial: no reconeix el caràcter irreductible de les proposicions de tipus relacional, en considerar que totes elles són reductibles a proposicions del tipus subjecte-predicat. Aquest seria el motiu pel qual, segons Russell, Peano no va desenvolupar la lògica de relacions. Ara bé, segons Russell, els diferents tipus de relacions entre qualsevol mena d'entitats determinen les distintes branques de les matemàtiques i constitueixen, en definitiva, els veritables objectes d'estudi d'aquesta ciència. Els primers que s'adonaren de la gran importància de la lògica de relacions foren Peirce i Schröder però, assenyala Russell, els seus mètodes estaven inspirats en la lògica de Boole, la qual cosa feia pràcticament impossible la seva aplicació a la tasca de fonamentació de les matemàtiques. La tasca reservada a Russell serà, doncs, estendre el llenguatge simbòlic de Peano a la lògica de relacions, la qual cosa durà a terme en l'article "The Logic of Relations" (1901), en el qual es basarà l'exposició de *Principles*. Tal com hem explicat en la nostra exposició, la importància de la lògica de relacions per a la fonamentació de les matemàtiques prové bàsicament de la rellevància de la noció d'*ordre* en les matemàtiques modernes i del paper clau que juguen les relacions d'*equivalència* en la definició de *nombre* (*Cf. supra*, cap. VI, § 1). Segons Russell, en efecte, les relacions d'ordre generen les *sèries infinites* d'objectes -nombres naturals, punts, etc- que conté cada branca de les matemàtiques -aritmètica, geometria euclidiana, etc-. Ara bé, aquestes relacions no poden ser reduïdes a predicats, per la qual cosa tots els filòsofs anteriors -i, en particular, Kant- no haurien desenvolupat una "filosofia de les matemàtiques satisfactòria" i esdevé necessari el desenvolupament formal de la lògica de relacions. En aquest punt, doncs, l'anàlisi històrica de Russell està totalment justificada. Per demostrar la tesi logicista, Russell es basa en els treballs previs de Cauchy, Dedekind i, sobretot, Cantor. Aquests autors havien mostrat, en efecte, que els nombres reals es poden introduir a partir dels nombres racionals i que aquests es poden introduir a partir dels nombres sencers. En tots dos casos, la reducció utilitzava la teoria de conjunts, que Cantor havia desenvolupat considerablement, convertint-la així en la base de les matemàtiques modernes. Les dues tasques pendents eren llavors la reducció dels nombres sencers a la teoria de conjunts i la reducció d'aquesta a la lògica pura. El primer pas en la reducció de l'aritmètica a la lògica consisteix en la definició, en termes purament lògics, de la noció de *nombre*. Segons la proposta de Russell, "el nombre cardinal d'una classe *u* serà la classe de classes semblants a *u*" (ja citat: *Cf. supra*, cap. VI, § 1). Aquesta és precisament la definició que Russell adoptarà a *Principles* i derivarà de l'anomenat *principi d'abstracció*. És tracta, en definitiva, de la mateixa definició que Frege havia donat de nombre natural i a la qual Russell hi arribà independentment a través de la reflexió i crítica a les definicions per abstracció de Peano. Aquesta definició de nombre cardinal permet, segons Russell, la deducció de totes les propietats usuals dels nombres, tant finits com infinits. Finalment, Russell procedeix a la reducció de l'aritmètica de Peano a la lògica. Peano havia desenvolupat l'aritmètica finita en el seu *Formulaire des mathématiques* (1895-1908) a partir de tres idees matemàtiques primitives: *nombre natural*, *zero* i *successor* -a les quals calia afegir-hi evidentment les idees primitives de la lògica- i els seus coneguts axiomes. A partir d'aquests indefinibles i axiomes, junt amb els axiomes per a la igualtat aritmètica, Peano defineix les operacions aritmètiques bàsiques i estableix a partir d'aquí les propietats usuals dels nombres naturals. Així, per a la reducció de l'aritmètica finita a la lògica, calia definir en termes de la lògica pura les tres nocions primitives abans esmentades i demostrar els cinc axiomes de Peano-Dedekind per a l'aritmètica. En la nostra exposició hem esbossat les línies mestres de la reducció de l'aritmètica a la lògica realitzada per Russell a *Principles* i no cal referir-nos-hi aquí de nou (*Cf. supra*, cap. VI, § 1). Tal com hem explicat també allí, per a la reducció de les altres branques de les matemàtiques, Russell es basa en aquest resultat i en els principals resultats assolits al llarg del segle XIX en anàlisi i geometria per Weiertrass, Cantor i Dedekind.

Com ja sabem, en la carta a Frege de 16 de Juny de 1902, Russell havia plantejat a Frege dues paradoxes o, si preferim dir-ho així, havia enunciat dues formulacions de la seva famosa paradoxa: una formulació intensional, referida a predicats, i un altra extensional, referida a classes. En la seva versió extensional, la *paradoxa de Russell*, això és, la paradoxa de la classe de totes les classes que no es contenen pas a si mateixes, no només atacava el cor del programa logicista de Frege, sinó també la teoria intuïtiva de conjunts de Cantor i Dedekind. La paradoxa de Russell sorgeix efectivament en considerar la classe w dels x tals que $x \notin x$, és a dir, la classe de tots les classes que no es pertanyen a si mateixes, a la qual Russell hi arriba aplicant a la classe de tots els objectes el raonament emprat per Cantor per demostrar $u \precsim P(u)$. D'aquí dedueix Russell que $w \in w \leftrightarrow w \notin w$ i, per tant, que w no és cap classe, contràriament al supòsit bàsic de la teoria cantoriana de conjunts que associa una classe o conjunt a cada propietat. Si, en efecte, formalitzem la teoria cantoriana de conjunts en un llenguatge quantificacional estàndard, les variables del qual tenen com a rang individus i conjunts, les constants no lògiques del qual són les lletres de predicat "S", que s'interpreta intuïtivament com "és un conjunt" i "$\in$", que s'interpreta com "és un element de", llavors Russell demostra que la sentència:

$$\neg(\exists y)(Sy \wedge \forall x(x \in y \leftrightarrow (Sx \wedge x \notin x)))$$

és lògicament vàlida en la teoria cantoriana de conjunts, un dels axiomes de la qual és la sentència:

$$(\exists y)(Sy \wedge \forall x(x \in y \leftrightarrow (Sx \wedge \varphi(x)))),$$

d'on s'obté per substitució que:

$$(\exists y)(Sy \wedge \forall x(x \in y \leftrightarrow (Sx \wedge x \in x))),$$

i, per tant, que la teoria cantoriana de conjunts és inconsistent. Calia doncs, imposar certes restriccions a la concepció cantoriana de conjunt que associava a cada propietat ben definida un conjunt, de manera que s'evitessin les paradoxes i, al mateix temps, es preservessin les diferents aplicacions matemàtiques de la teoria de conjunts. Una possible via per eliminar la paradoxa de Russell proposada per ell mateix a 1906 seria *limitar la mida* d'allò que hom anomena conjunt, impedint la formació de conjunts massa grans com, per exemple, el conjunt de tot els conjunts o el conjunt de tots els conjunts que tenen tal o qual propietat. Aquesta és la idea bàsica de la teoria de conjunts de Zermelo i, en particular, de l'*axioma de separació*, el qual limita els casos en què hom pot associar un conjunt a una propietat a aquells en què els elements que tenen aquesta propietat pertanyen ja a un conjunt donat prèviament, amb la qual cosa hom només pot obtenir un subconjunt del conjunt inicial (*Cf. supra*, cap. VIII, § 10). Però, com ja sabem, la solució de Russell no va anar en aquesta direcció, sinó en la direcció de imposar certes restriccions tipològiques a les variables que poden figurar com arguments en una funció proposicional, de manera que només les funcions que tinguin un argument adequat puguin determinar una classe. Aquesta teoria és coneguda com la *teoria de tipus* i Russell en presenta dues versions: la *teoria simple* i la *teoria ramificada* de tipus. Aquesta última teoria, juntament amb la *no classes theory*, constitueix la solució definitiva proposada per Russell a les paradoxes i és exposada en l'article "Mathematical Logic as Based on the Theory of Types" (1908) i en la seva *magnum opus Principia Mathematica* (1910-13).

Russell esbossa a *Principles* dos mètodes per eliminar les contradiccions que suposen respectivament els primers esbossos de la *teoria zig-zag* i de la *teoria de tipus*, encara que Russell passa contínuament d'un mètode a l'altra i, finalment, considera la segona teoria com la única solució acceptable (*Cf. supra*, cap. VI, § 7). Segons la "doctrina dels tipus lògics", les funcions proposicionals del tipus $\phi(u)$, on u és una variable de classe, només son significatives si substituïm u per un objecte del mateix tipus que les classes. Però els individus i les *classes unes* són d'un tipus diferent del de les classes d'individus i, per tant, no poden ser substituïts "salva significationem" per u. Ara bé, això és el que s'esdevé amb les funcions com ara $x \in x$ o $x \notin x$ que donen origen a l'antinòmia. Aquestes funcions són, com ja sabem del tipus $\phi(K_\phi)$ on K_ϕ representa una classe una -car x és una classe i la relació $\in$ requereix que el referent sigui d'un tipus inferior al del correlat. Aquestes funcions són, doncs, *no significatives*, car *si* ϕ és una funció els arguments de la qual son classes d'individus, llavors els seus arguments possibles han de ser del mateix tipus lògic que aquelles i no poden ser conseqüentment classes unes. Russell exposarà en detall la teoria de tipus en l'Apèndix B de *Principles*. Russell estableix allí quatre jerarquies diferents de tipus, corresponents a les classes, les relacions, els nombres i les proposicions. Com ja hem explicat en la nostra exposició, la definició del concepte de nombre en termes de la noció de classe fa que els nombres es puguin introduir a partir de la jerarquia de classes, per la qual cosa no caldria introduir específicament una jerarquia de tipus de nombres -aquest és el punt de vista adoptat per Russell en les versions posteriors de la teoria de tipus. Les proposicions, en canvi, formen un tipus específic perquè, segons Russell, "només les proposicions poden significativament ser afirmades com a vertaderes o falses" (ja citat: *Cf. supra*, cap. VI, § 7).

A partir d'elles s'aixeca llavors una jerarquia de tipus formada pels rangs o classes de proposicions, les classes de classes de proposicions, etc. Però aquesta jerarquia de tipus fa reaparèixer de nou la contradicció, que la teoria havia precisament d'eliminar. Russell sembla haver arribat a aquesta paradoxa per un camí molt semblant al que l'havia conduït a la paradoxa relativa a la noció de classe i, aparentment, no és distingeix pas d'ella. Però, tal com hem explicat en detall en la nostra exposició, aquesta paradoxa fa referència en realitat únicament i exclusiva a la noció de *proposició*. Russell suggereix a *Principles* com a solució a aquesta contradicció la possibilitat que "les proposicions elles mateixes siguin de diversos tipus" però, al mateix temps, considera aquesta idea "brutal i altament artificial" (ja citat: *Cf. supra*, cap. VI, § 1). Es tractaria, en definitiva, d'una *ramificació* dels tipus de proposicions, la qual adoptarà ja en la teoria substitucional ramificada exposada l'any 1906 i posteriorment en la teoria ramificada de tipus de l'article "Mathematical Logic" i de *Principa Mathematica*.

Durant els anys 1903 i 1904 Russell buscarà la solució a la paradoxa de classes en dos fronts: D'una banda, Russell intentarà desenvolupar criteris formals per tal de separar aquelles expressions funcionals legítimes d'aquelles que porten a contradiccions. És tracta, doncs, de diversos intents en els quals Russell vol desenvolupar la *teoria zig-zag* esbossada a *Principles*. En un altra direcció, completament diferent a l'anterior, Russell centrarà els seus esforços en la teoria de la denotació, amb l'esperança que el qüestionament de la vella teoria de la denotació aportés -directament o indirecta- alguna llum sobre com solucionar l'antinòmia de classes tal com, de fet, va passar i explicarem de nou a continuació. El descobriment de la contradicció va dur Russell, en efecte, a replantejar-se alguns tòpics de la vella teoria de la denotació i, a la llarga, a substituir-la per una nova teoria, que exposarà en la seva forma definitiva en l'article "On Denoting" (1905) (*Cf. supra*, cap. VI, § 8). En aquest article, Russell trencarà amb la distinció fregeana entre sentit i significat i proposarà el que anomena definicions contextuals dels enunciats que contenen *frases denotatives* com ara les descripcions definides. La importància d'aquestes definicions rau en el fet que permet construir una teoria que contingui expressions denotatives sense haver d'acceptar les seves denotacions i això és el que farà la *no classes theory -teoria sense classes-* respecte a les expressions de classes. Així, per exemple, de la mateixa manera que la teoria de les descripcions d'"On Denoting" permet donar raó del valor semàntic dels enunciats que contenen descripcions definides, sense haver d'assumir la denotació d'aquestes -la qual cosa és especialment important per donar raó dels enunciats com ara "El rei de França és calb", la teoria sense classes permetrà construir un sistema lògic en el qual hom pugui expressar tots els axiomes i teoremes de la teoria de classes sense haver d'assumir l'existència d'aquestes. Això mostra, en definitiva, que la idea d'una teoria sense classes que explicarem tot seguit és una conseqüència directa del descobriment de la nova teoria de les descripcions.

En l'article "On Some Difficulties in the Theory of Transfinite Numbers and Order Types" (1905), Russell centra la seva atenció en les paradoxes sorgides en l'àmbit de la teoria dels nombres transfinits i deixa de banda altres paradoxes com, per exemple, la paradoxa relativa a la noció de proposició -això és bastant sorprenent si tenim en compte que aquesta és precisament l'única paradoxa que la doctrina de tipus de *Principles* era incapaç de resoldre (*Cf. supra*, cap. VI, § 9). Aquestes contradiccions són essencialment la paradoxa de Cantor i la de Burali-Forti, que fan referència respectivament a les nocions de nombre cardinal i ordinal. Tal com hem explicat en la nostra exposició, l'anàlisi d'aquestes paradoxes porta Russell a la conclusió que aquestes paradoxes tenen un origen lògic -i, per tant, no són específiques de la teoria dels nombres transfinits- i que totes elles responen a una mateixa forma lògica que apunta a l'existència del que Russell anomena *processos* o *classes autoreproductives*, això és, a que "hi ha certes propietats mitjançant les quals, donada una classe qualsevol de termes que tinguin tots ells una propietat d'aquesta mena, podem definir sempre un nou terme que tingui la propietat en qüestió. D'aquí que no puguem recollir sempre tots els termes que tenen la dita propietat en un *tot* [*whole*], perquè sempre que confiem tenir-los tots, la col·lecció que tenim procedeix immediatament a generar un nou terme que tingui també la dita propietat" (ja citat: *Cf. supra*, cap. VI, § 9). Russell proposa en l'article abans esmentat tres teories per evitar el l'aparició de paradoxes en l'àmbit general de la lògica, a les quals ja ens hem referit prèviament: la teoria *zig-zag*, la teoria de la *limitació de la mida*, i la *no classes theory*. Com ja sabem, la teoria *zig-zag* havia estat ja esbossada per Russell a *Principles*, en suggerir que les funcions *quadràtiques* (ara anomenades *no predicatives*) no determinen mai una classe i caracteritzar aquestes com funcions d'un tipus determinat. Com hem dit abans, aquesta teoria havia centrat bona part dels esforços de Russell dels anys 1903 i 1904 per solucionar les paradoxes, però Russell no aconseguí arribar mai a una teoria satisfactòria. Només cal afegir ara que la idea russelliana de la teoria *zig-zag* serà represa i reelaborada alguns anys més tard per Quine en l'anomenada *teoria de l'estratificació*. Ja ens hem referit abans també a la teoria de la *limitació de la mida*, respecte a la qual el mateix Gödel ha afirmat que "la teoria axiomàtica de conjunts tal com va ser desenvolupada més tard per Zermelo i altres pot considerar-se com una elaboració d'aquesta idea pel que fa a les classes" (ja citat: *Cf. supra*, cap. VI, § 9). En qualsevol cas, com ja sabem, a partir de 1906 Russell deixarà de banda aquestes dues teories i s'inclinarà definitivament per la tercera, la *no classes theory* que, tal com diu el mateix nom, "es basa simplement en l'abstinència d'una suposició dubtosa", a saber, la referent a l'existència de classes (*Cf. supra*, cap. VI, § 9).

Com hem dit abans, la idea d'una teoria sense classes té el seu origen en la teoria de les descripcions de 1905 i respon a una certa anàlisi de les paradoxes segons la qual l'origen d'aquestes es trobaria indefectiblement en alguna mena de cercle viciós. En la seva anàlisi sobre la paradoxa de Richard, Poincaré havia arribat a la conclusió que les paradoxes apareixen només quan definim un conjunt de forma circular, és a dir, quan el conjunt que hom defineix ocorre no només en el *definiendum*, sinó també en el *definiens* de la definició en qüestió. Russell està d'acord amb Poincaré en què totes les paradoxes provenen d'alguna mena de cercle viciós i, tal com hem explicat, aquesta idea ja és present en els manuscrits russellians de 1904 i està present ja en la descripció de la forma general de les paradoxa que Russell realitza en l'article "On Some Difficulties in the Theory of Transfinite Numbers and Order Types". Però en l'article "Les paradoxes de la logique" (1906), Russell discrepa de Poincaré respecte a la manera d'evitar aquests cercles viciosos, car per això "cal recórrer de totes totes a una reforma aprofundida dels principis lògics, més o menys anàloga a la meva teoria "sense classes"" (ja citat: *Cf. supra*, cap. VI, § 9). Essencialment, la idea d'una teoria sense classes consisteix a analitzar els enunciats referents a classes com enunciats quantificacionals d'un cert tipus, de manera que els enunciats referents a classes contradictòries esdevinguin enunciats mal formats, això és, enunciats sense sentit. En altres paraules, els símbols de classes hauran de ser considerats com *símbols* o *expressions incompletes*, que no tenen significat per si soles i, doncs, com meres *façons de parler*. Conseqüentment, hom haurà d'abstenir-se de suposar que aquests símbols representin classes i considerar aquestes com a simples *ficcions lògiques*. De fet, la mateixa noció russelliana de cercle viciós de l'article "Les paradoxes de la logique" només rep un significat precís en el marc de la teoria sense classes. Segons Russell, en efecte:

> Els cercles viciosos apareixen quan una frase que conté les expressions *tot* o *algun* (això és, que conté una variable aparent) sembla representar un dels objectes als quals s'aplica l'expressió *tot* o *algun* (ja citat: *Cf. supra*, cap. VI, § 9).

Així, segons Russell, per evitar els cercles viciosos, caldrà observar el principi següent:

> Tot allò que conté una frase denotativa amb *tot* o *algun* no ha de ser un dels objectes denotats per aquesta frase denotativa.

o, equivalentment:

> Tot allò que conté una variable aparent no ha de ser ell mateix un dels valors possibles d'aquesta variable.

Tal com hem explicat en la nostra exposició, Russell reservarà a "Les paradoxes de la logique" el nom de *principi del cercle viciós* (*PCV*) a aquesta última formulació, la qual conservarà literalment en el seu conegut article "Mathematical Logic" de 1908. És important remarcar que el *PCV* no s'aplica exclusivament a les classes, sinó "a tota expressió que conté una variable aparent" i, segons Russell, aquestes comprenen no solament les (expressions de) classes i relacions, sinó també les descripcions definides i les proposicions generals. Prou significativament, en aquesta llista no hi apareixen les funcions proposicionals, a les quals s'aplicarà preeminentment una nova i ampliada versió del *PCV* a "Mathematical Logic" i a *Principia Mathematica*, però això es degut al fet que a "Les paradoxes de la logique" Russell considera que pot prescindir dels símbols de funció i substituir-los per les anomenades *matrius* -aquesta és la idea bàsica de la teoria substitucional desenvolupada l'any 1906; en canvi, a partir de 1908, Russell considera que les funcions proposicionals són entitats de ple dret -juntament amb els individuals- i conseqüentment el *PCV* s'aplicarà essencialment a elles -aquesta és la idea bàsica de la teoria de tipus de "Mathematical Logic" i *Principia Mathematica*. D'altra banda, cal observar que el *PCV* és un principi purament negatiu, que "no és per ell mateix la solució de les paradoxes de cercle viciós, sinó només la conseqüència que una teoria ha de fornir per aportar una solució" (ja citat: *Cf. supra*, cap. VI, § 9). Així doncs, si la teoria sense classes ha de solucionar les contradiccions, haurà de ser una teoria que sigui capaç d'evitar que es produeixin els cercles viciosos que l'originen. Per tant, continua Russell, "cal construir una teoria de les expressions que continguin variables aparents que tingui com a conseqüència el principi del cercle viciós" (ja citat: *Cf. supra*, cap. VI, § 9). Tal com hem explicat en la nostra exposició, el problema de construir una teoria d'aquesta mena rau en què el *PCV* sembla, si més no a primera vista, incompatible amb la vella i venerable *teoria de la variable universal* russelliana. En efecte, si, com postula el *PCV*, els objectes que contenen una variable aparent no poden ser ells mateixos un dels valors d'aquesta variable, llavors el rang d'aquesta variable no podrà comprendre tots els objectes. Així, qualsevol sistema lògic que tingués com a conseqüència el *PCV* hauria de tenir diferents tipus de variables -individuals, funcionals, …-. Es tractaria, doncs, d'un sistema lògic essencialment anàleg a la doctrina de tipus de *Principles*. Però, com ja hem explicat, la teoria de la variable universal és a la base de la concepció russelliana de la lògica com un llenguatge universal i de la possibilitat de reduir les matemàtiques a la lògica (*Cf. supra*, cap. VI, § 1). Així, l'exigència d'universalitat imposada ja per Russell a *Principles* i que explica la seva insatisfacció amb la doctrina de tipus allí exposada roman encara intacta a "Les paradoxes de la logique". Ara bé, ¿és possible construir una lògica que satisfaci la doble exigència de tenir com a conseqüència el *PCV* i satisfer la teoria de la variable universal? Russell respon afirmativament aquesta pregunta. Més en concret, perquè una lògica satisfaci la doble exigència abans esmentada, caldrà, en primer lloc, restringir el rang de les variables als individus i considerar aquests com les úniques entitats vertaderes, tot definint contextualment la resta d'entitats -classes, relacions, proposicions, ...-, de manera que (*i*) esdevinguin meres ficcions lògiques i (*ii*) la substitució d'un dels símbols incomplets, mitjançant els quals hom ha introduït aquestes entitats, per una variable individual esdevingui un absurd, una expressió sense significat (*Cf. supra*, cap. VI, § 9). Això és el que farà en bona mesura la *teoria substitucional* -si més no, la seva versió més sofisticada-, amb la qual cosa aquesta teoria serà no només una teoria sense classes, sinó també sense cap mena d'objecte que contingui una variable aparent.

Russell exposa la teoria substitucional a "Les paradoxes de la logique". De fet, en aquest article hi trobem dues versions d'aquesta teoria (*Cf. supra*, cap. VI, § 10), la primera de les quals és exposada en la segona part d'aquest article només a manera de recordatori. Aquesta teoria, en efecte, havia estat esbossada ja a "On Some Difficulties in the Theory of Transfinite Numbers and Order Types" de 1905 i exposada amb tot luxe de detalls en una conferència titulada "On the substitutional Theory of Classes and Relations", llegida el 1906 davant la *London Mathematical Society*. Però, la constatació que aquesta teoria era vulnerable a les paradoxes va fer que Russell renunciés a la publicació del text d'aquesta conferència i proposés una segona versió de la teoria, que exposa en la tercera part de "Les paradoxes de la logique". Tanmateix, aquesta teoria ja no presentarà per a Russell els mateixos atractius que la primera, per la qual cosa l'abandonarà i la substituirà en l'article "Mathematical Logic" de 1908 per la *teoria de tipus* -encara que en aquest article trobem de bell nou aquesta teoria exposada com una mera possibilitat teòrica. La versió de la teoria de tipus presentada en aquest article coincideix essencialment amb la versió del capítol II de la Introducció de *Principia Mathematica* i la de l'article "La théorie des types logiques" (1910), que és essencialment una traducció al francès del capítol II de la Introducció de *Principia*, publicada a *Revue de métaphysique et de morale* com a rèplica a un article anterior de Poincaré aparegut en la mateixa revista i on aquest autor criticava alguns aspectes de l'article de 1908 abans esmentat. En el nostre estudi ens hem fet ressò fonamentalment d'aquesta versió de la Introducció de *Principia*, la qual cal distingir, tal com assenyala Russell en el Prefaci (p. vii), de la versió presentada en el capítol XII de la mateixa obra (*Cf. supra*, cap. VI, § 11). La teoria dels tipus lògics és, com la teoria substitucional, una teoria que té com objectiu principal evitar les paradoxes, l'origen de les quals rau invariablement, segons afirma Russell d'ençà 1905, en alguna mena de cercle viciós. Així doncs, és evident que, tal com s'esdevenia amb la teoria substitucional, el *PCV* jugarà també un paper fonamental en la formulació de la teoria de tipus. Ara bé, mentre que en la teoria substitucional es deduïa del *PCV* una jerarquia de ficcions lògiques -classes o funcions, relacions i enunciats generals-, en la teoria de tipus es deduirà a partir del *PCV* una jerarquia d'entitats lògiques -funcions proposicionals i proposicions. La raó per la qual el *PCV* dóna lloc a dues menes de jerarquies de naturalesa tan distinta és ben senzilla: a "Les paradoxes de la logique" Russell considera tota expressió que conté una variable aparent un símbol incomplet, per la qual cosa el *PCV* duu a una jerarquia dels símbols incomplets o ficcions lògiques, els quals s'haurien d'introduir contextualment a partir de les entitats lògiques pròpiament dites -els individuals i les proposicions elementals. En canvi, a partir de 1908 es recuperen les funcions proposicionals -que havien estat reemplaçades en la teoria substitucional per les matrius- i les proposicions -tant elementals com generals- com entitats legítimes. I, donat que tant les funcions proposicionals com les proposicions poden contenir variables aparents, una formulació essencialment anàloga del *PCV* a la de "Les paradoxes de la logique" duu a "Mathematical Logic" i *Principia* a una jerarquia d'aquestes entitats lògiques.

La teoria de tipus presentada per Russell a "Mathematical Logic" i *Principia* és una *teoria ramificada de tipus*. La idea bàsica d'aquesta teoria és que l'*ordre* o tipus lògic d'una funció proposicional està determinat per dos principis: (*i*) una funció proposicional és d'ordre superior a qualsevol dels seus valors possibles i (*ii*) una funció proposicional és d'ordre superior a qualsevol objecte que pertanyi al rang de qualsevol quantificador que ocorri en ella. La jerarquia *ramificada* de funcions proposicionals que així s'obté constitueix el moll de l'os de la teoria dels tipus lògics proposada a "Mathematical Logic" i *Principia*, els trets essencials de la qual hem explicat en detall en la nostra exposició (*Cf. supra*, cap. VI, § 11). És interessant remarcar que la nostra interpretació de la jerarquia de funcions de *Principia* difereix essencialment de la interpretació clàssica, segons la qual, en paraules de Quine, "la jerarquia d'ordre és sobreimposada [a la jerarquia de tipus], de manera que les funcions proposicionals poden diferir quant a l'ordre tot i ser del mateix tipus".[1] Així, segons aquesta interpretació, les funcions proposicionals es divideixen originàriament en tipus -entesos com a rangs de significació de les seves variables lliures, és a dir, com a *tipus simples*- i, després, aquests tipus es ramifiquen donant lloc als *ordres*. Però, tal com hem explicat en la nostra exposició, una funció proposicional pot contenir no tan sols variables reals o lliures, sinó també variables aparents o lligades i, en definitiva, quantificadors. Per tant, una funció proposicional pressuposarà no només els valors possibles dels seus arguments, sinó també els de les variables aparents que figuren en ella. Així, pel principi del cercle viciós, el *tipus* d'una funció estarà determinat no només pel seu rang de significació, sinó també pel que hem anomenat la seva profunditat de quantificació. Russell anomenarà *ordres* als tipus lògics entesos en aquest sentit, per distingir-los així dels tipus entesos com a *rangs de significació* (*Cf. supra*, cap. VI, § 11). En definitiva, en la nostra interpretació, la divisió originària operada pel *PCV* dóna lloc als ordres -els veritables *tipus lògics* de què parla Russell a *Principia*-, a partir dels qual hom pot obtenir els *tipus simples* -però no els *tipus lògics* de *Principia*- com a rangs de significació de la funció en qüestió.[2]

D'acord amb la *teoria ramificada de tipus*, no és possible parlar de totes les funcions d'un determinat argument, sinó que cal especificar l'ordre de les funcions en qüestió. Així, per exemple, no es pot parlar significativament de "totes les funcions de *a*", on *a* és un individual, sinó que només es pot parlar de "totes les funcions de primer ordre de *a*", "totes les funcions de segon ordre de *a*", etc. Ara bé, en lògica i en matemàtiques s'utilitzen constantment generalitzacions sobre totes les funcions o propietats d'un argument determinat o, equivalentment, sobre totes les classes a les quals pertany un determinat objecte, per la qual cosa la reconstrucció de les matemàtiques en el marc de la teoria de tipus sembla *prima facie* impossible. Doncs bé, per solucionar aquests problemes Russell introdueix, tant a

---

1 *Quine 1966*$_b$, 25. Vegeu també, entre d'altres, *Kneale 1962*, 659.

2 Per a una interpretació semblant, vegeu *Rouilhan 1996*, 247-250 i *Grattan-Guinness 2000*, 396.

“Mathematical Logic” com a *Principia*, la noció de *predicativitat* i l’*axioma de reductibilitat* (*Cf. supra*, cap. VI, § 12). D’acord amb Russell, “definirem una funció d’una variable com a predicativa si és de l’ordre immediatament superior al del seu argument, *i.e.* si és de l’ordre més petit compatible amb tenir aquell argument. Si una funció té distints arguments, i l’ordre més gran de les funcions que ocorren entre els arguments és el *n*-èsim, anomenarem la funció predicativa si és de l’ordre $n+1$, *i.e.* de nou, si és de l’ordre més petit compatible amb tenir els arguments que té” (ja citat: *Cf. supra*, cap. VI, § 12). La importància de les funcions predicatives rau en el fet que si bé és cert que no és possible, d’acord amb la teoria ramificada de tipus, generalitzar sobre totes les funcions d’un argument d’un tipus determinat, sí es possible, en el marc de la mateixa teoria, generalitzar sobre totes les funcions predicatives d’aquest mateix argument, perquè aquestes funcions són totes del mateix ordre. Per tant, si per tota funció proposicional existís una funció predicativa equivalent -coextensiva- amb ella, podríem solucionar els problemes esmentats relatius a generalitzacions il·lícites en el marc de la teoria de tipus, però totalment indispensables per a la reducció de les matemàtiques a la lògica. Doncs bé, això és el que enuncia precisament l’axioma -o, millor dit, els axiomes- de reductibilitat. Per exemple, en el cas de les funcions els arguments de les quals són individuals, aquests axiomes serien per tot $n > 0$ i $m > 1$, els següents (en notació moderna):

$$\forall f \exists g! \forall x_1, ..., x_n (f x_1, ..., x_n \leftrightarrow g! x_1, ..., x_n),$$

on *f* és una funció *n*-àdica de l’ordre *m*-èsim i *g* una funció predicativa -i, per tant, en aquest cas, una funció de primer ordre. I, per qualsevol altra tipus d’arguments, tindríem axiomes similars, en els quals *f* representaria sempre una funció d’ordre més alt que el requerit pels seus arguments i *g* una funció de l’ordre més baix compatible amb ells. En definitiva, tal com hem explicat en la nostra exposició, la reducció de les matemàtiques a la lògica requereix només la jerarquia de funcions predicatives, en la qual es pot interpretar la *teoria simple de tipus* tal com aquesta es presentada en la majoria d’escrits sobre els fonaments de les matemàtiques. De fet, com es ben sabut a partir dels anys vint, a partir d’aquesta teoria es poden reconstruir les matemàtiques clàssiques sense problema, per la qual cosa també es pot dur a terme aquesta reconstrucció a partir de la *teoria ramificada de tipus* plus l’*axioma de reductibilitat*. Ara bé, tal com hem explicat en la nostra exposició, per això es requereixen encara un parell d’axiomes més: l’*axioma multiplicatiu* i l’*axioma de l’infinit*. Com és ben sabut, el primer axioma és equivalent a l'axioma d'elecció de Zermelo, la qual cosa ens ha donat peu a estudiar, en la secció dedicada a l'estudi del desenvolupament de la teoria de conjunts per part de Zermelo, la relació entre ambdós axiomes i la recepció per part de Russell de l'axioma d'elecció (*Cf. supra*, cap. VIII, § 10). Pel que fa al axioma de l'infinit, tal com hem explicat en la nostra exposició, la seva admissió suposa un reconeixement *de facto* que els teoremes de les matemàtiques no poden ser demostrats exclusivament en termes de principis lògics, la qual cosa hauria de dur a una reformulació de la tesi logicista, que afirmés no ja que les matemàtiques són reductibles a la lògica, sinó que les matemàtiques són reductibles a la lògica *si* a aquesta hi afegim l'axioma de l'infinit. En el capítol dedicat a Hilbert hem vist, finalment, que Hilbert renunciarà explícitament al programa russellià de reconstrucció de les matemàtiques a partir de la teoria ramificada de tipus al·legant la manca de validesa lògica dels axiomes de reductibilitat i infinit, la qual cosa ens ha portat a discutir amb una mica més de detall el caràcter no lògic d'aquests dos axiomes (*Cf. supra*, cap. VIII, § 9).

La contribució més important de Russell al desenvolupament de la lògica contemporània és, sens dubte, la mateixa teoria de tipus. Com ja sabem, Russell esbossa a "Mathematical Logic" i *Principia* una teoria simple de tipus, però les paradoxes de tipus intensional el porten a postular la teoria ramificada de tipus com la seva proposta definitiva d'un sistema formal a partir del qual es puguin reconstruir les matemàtiques senceres. En qualsevol cas, en la dècada dels vint, autors com L. Chwistek i P. Ramsey proposaren la teoria simple de tipus com a solució a les paradoxes, donat que aquesta teoria és suficient per resoldre les antinòmies de tipus conjuntista, amb la qual cosa pogueren prescindir de l'axioma de reductibilitat, que fou des del primer moment l'axioma més controvertit de la teoria ramificada de tipus. El punt fort de la teoria ramificada de tipus rau així en el fet que permet evitar no solament les paradoxes extensionals o conjuntistes -les paradoxes de Russell, Burali-Forti, etc-, sinó també les intensionals o semàntiques -les paradoxes del mentider, de Richard, etc-; per contra, el seu punt feble rau en què per desenvolupar les matemàtiques clàssiques a partir d'aquesta teoria cal afegir-li un parell d'axiomes que difícilment hom pot catalogar com axiomes lògics, l'*axioma de l'infinit* i l'*axioma de reductibilitat*, per la qual cosa la pretesa reducció de les matemàtiques a la lògica queda en entredit. Més encara, com que l'axioma de reductibilitat pressuposa l'acceptació de l'existència d'una sèrie de propietats primitives, hom pot preguntar-se perquè no acceptem equivalentment l'existència de conjunts i desenvolupem les matemàtiques en base a la teoria axiomàtica de Zermelo, la qual sembla estar més d'acord amb els intents inicials de fonamentació de l'aritmètica i l'anàlisi engegats per Cantor i Dedekind. Aquesta seria, a la llarga, la via escollida per la majoria dels matemàtics, la qual cosa ha fet que la teoria axiomàtica de conjunts hagi jugat un paper clau en les recerques sobre fonaments de les matemàtiques i hagi esdevingut també un objecte d'estudi prioritari en les recerques model-teorètiques. Amb tot, al llarg dels anys vint i trenta, la teoria de tipus -simple o ramificada- serà el sistema formal preferit per la majoria dels matemàtics que cercaven reconstruir les matemàtiques sobre un fonament més ferm que la teoria intuïtiva de conjunts de Cantor i Dedekind o la lògica de Frege. Tal com ha explicat Ferreirós a *Labyrinth of Thought. A History of Set Theory ant its Role in Modern Mathematics* (1999), "fins la dècada dels vint, pocs autors adoptaren el sistema de Zermelo explícitament, i, fins i tot entre aquells que preferiren el punt de vista formal axiomàtic, molts es mostraren favorables a la teoria de tipus".[1] De fet, tal com ha esmentat el mateix autor, només "a partir de 1928 aproximadament, *Principia* deixa de ser la principal obra de referència, data en la qual apareixen obres com *Grundzüge der theoretischen Logik* de Hilbert i Ackermann",[2] encara que "la teoria de tipus continuarà essent molt influent al llarg de la dècada dels trenta".[3] L'èxit de la teoria de tipus com a sistema lògic es pot confirmar a partir dels escrits dels lògics més importants del període, com ara Hilbert, Carnap, Gödel o Tarski, i, una mica més endavant, Church o Quine, els quals escolliren una o altra versió de la teoria de tipus com a sistema formal a partir del qual desenvoluparen les seves recerques sobre lògica i fonaments.[4] Un altre aspecte digne de remarcar per tal d'entendre la influència de *Principia* en les recerques posteriors sobre lògica i fonaments de les matemàtiques és l'adequació del sistema lògic presentat en aquesta obra per "digerir" la *Mengenlehre* de Cantor i, a partir d'ella, les matemàtiques "senceres". La reducció de les matemàtiques a la lògica duta a terme per Russell i Whitehead a *Principia* ha estat poc estudiada. L'excepció a la regla és el llibre de Grattan-Guinness *The Search for Mathematical Roots, 1870-1940* (2000) esmentat en la introducció, el qual dedica una secció (7.9: Types and the treatment of mathematics in *Principia Mathematica*) a aquest tema. En el nostre treball tampoc no ens hem fet ressò específicament de la reducció de les matemàtiques a la lògica duta a terme per Russell i Whitehead a *Principia*, per la qual cosa potser valgui la pena fer ara alguns comentaris al

---

1 *Ferreirós 1999*, 337.
2 *Ibid.*, 353.
3 *Ibid.*, 356.
4 *Vegeu Ferreirós 1999*, cap. X, § 4.

respecte. Els tres volums de *Principia* es divideixen en les parts següents: I. Mathematical Logic; II. Prolegomena to cardinal arithmetic; III. Cardinal arithmetic; IV. Relation-arithmetic; V. Series; VI. Quantity (El segon volum comença en la secció IIIA i el tercer volum en la secció VD). Com podem veure, doncs, les matemàtiques que desenvoluparen Whitehead i Russell a *Principia* són essencialment (deixant de banda naturalment la teoria de conjunts): l'aritmètica cardinal, l'aritmètica ordinal (finita i infinita) i la teoria dels nombres reals. Aquí ens limitarem a fer algunes observacions sobre les definicions més importants de la teoria dels nombres cardinals, per tal de poder comparar la reducció de la teoria de nombres duta a terme per Russell i Whitehead a *Principia* i la reducció de la mateixa realitzada per Frege a *Grundlagen* i *Grundgesetze*. Russell i Whitehead defineixen "el nombre cardinal d'una classe α" $\mathrm{Nc}`\alpha$ com la classe de totes les classes semblants a α: $\hat{\beta}(\beta \mathrm{\ sm\ } \alpha)$ ($\ast$100.01). El seu tipus lògic és immediatament superior al de α ($\ast$100.1), però β pot ser, en principi, de qualsevol tipus lògic. Per això, els autors defineixen el "cardinal homogeni" $\mathrm{N_0c}`\alpha$ ($\ast$103.01), per al cas en què el tipus de $\beta$ és $t`\alpha$ ($\ast$63.01), això és, quan β és del mateix tipus que α. La definició dels diferents nombres comença amb la definició de 0 com la classe unitària de la classe buida Λ:[1]

$$\ast 54.01 \qquad 0 = \overrightarrow{I}`\Lambda, \qquad \mathrm{Df}$$

1 com la classe de classes unitàries:

$$\ast 52.01 \qquad 1 = \hat{\alpha}\{(\exists x) \cdot \alpha = \overrightarrow{I}`x\}, \mathrm{Df}$$

2 com la classe de parells desordenats:

$$\ast 54.02 \qquad 2 = \{(\exists x, y) \cdot x \neq y \cdot \alpha = \overrightarrow{I}`x \cup \overrightarrow{I}`y\}, \mathrm{Df}$$

---

[1] En les definicions següents, l'operador "$\overrightarrow{I}$`" permet transformar un element en la classe que té aquest únic element, de manera que l'expressió "$\overrightarrow{I}`x$" denota la classe unitària de x (*Cf. supra*, cap. VI, § 4). Russell només empra circumstancialment aquest símbol i s'inclina generalment per un símbol que reflecteix el fet que aquest operador denota l'operació inversa a la que denota l'operador per a les descripcions definides, que permet seleccionar d'una classe l'únic element que té una determinada propietat.

i així successivament ($*100-102$). La suma de dues classes α, β es defineix com la unió de dos conjunts equinumèrics amb α i β i mútuament disjunts:

$$(*110.01) \qquad \alpha + \beta = \downarrow (\Lambda \cap \beta)\text{``}\overrightarrow{I}\text{``}\alpha \cup (\Lambda \cap \alpha) \downarrow \text{``}\overrightarrow{I}\text{``}\beta, \ \ \text{Df}$$

i la suma de dos cardinals homogenis es defineix de la següent manera:

$$(*110.02) \qquad \mu +_c \upsilon = \hat{\xi}\{(\exists \alpha, \beta) \cdot \mu = \mathrm{N}_0\mathrm{c}\text{`}\alpha \cdot \upsilon = \mathrm{N}_0\mathrm{c}\text{`}\beta \cdot \xi \ \mathrm{sm}\ (\alpha + \beta)\}, \qquad \text{Df}$$

(la subtracció es defineix a ($*119.01$)). Els exemples anteriors són només un botó de mostra de com procedeixen Russell i Whitehead per reduir les matemàtiques a la lògica, però mostren clarament la diferència entre la reducció de les matemàtiques duta a terme per aquests autors i la de Frege. En primer lloc, Russell i Whiteheada defineixen els nombres cardinals, no pas els nombres naturals com havia fet Frege, i la definició dels diferents nombres és distinta de la que havia donat Frege. Segonament, donat que Russell i Whitehead defineixen els nombres com a classes, les quals han estat definides contextualment a partir de les funcions proposicionals i, per tant, no són entitats lògiques de ple dret, és evident que el logicisme de Russell i Whitehead no descansa en la possibilitat de construir els nombres com objectes lògics, tal com s'esdevenia en Frege. Finalment, tal com ens mostren les definicions anteriors, la reducció de les matemàtiques a la lògica duta a terme per Whitehead i Russell segueix molt de prop la reducció a la teoria de conjunts endegada per Cantor i Zermelo, la qual cosa l'allunya de nou de la reducció de les matemàtiques duta a terme per Frege. Tal com ha assenyalat B. Linsky a "Russell's Metaphysical Logic" (*1999*):

> [Russell i Whitehead] no fan cap intent de reduir el contingut matemàtic o conjuntista de les definicions com va fer Frege. El que Russell i Whitehead presenten a *Principia* és un desenvolupament completament senzill de les relacions, funcions i nombres en l'estil de la teoria axiomàtica de conjunts de Zermelo.[1]

Per exemple, tal com hem vist en la nostra exposició, a *Grundgesetze* Frege havia evitat les extensions en la mesura del possible en la seva demostració de les lleis bàsiques de l'aritmètica i, de fet, només les havia emprat per demostrar el principi de Hume, la qual cosa

1 *Linsky 1999*, 132.

permet reconstruir la seva demostració dels axiomes de Peano-Dedekind per a l'aritmètica a partir del principi de Hume (el "teorema de Frege") en termes de la seva teoria de conceptes, sense apel·lar a extensions. Per contra, tal com assenyala Linsky en el text anterior, Russell i Whitehead no intenten reduir el contingut conjuntista de les definicions matemàtiques (de nombre cardinal, dels diferents nombres, de la unió de conjunts, etc) a un llenguatge estrictament lògic com havia fet Frege, sinó que el que fan és desenvolupar l'aritmètica cardinal a partir de la *Mengenlehre* de Cantor en el llenguatge de la teoria de classes de *Principia*. De fet, si alguna cosa sorprèn al lector modern és la similitud de la reducció de la teoria de nombres a la lògica a *Principia* amb la reducció habitual avui en dia a partir de la teoria axiomàtica de conjunts de Zermelo. En definitiva, l'adequació del sistema lògic de *Principia* per "digerir" la *Mengenlehre* de Cantor i, a partir d'ella, la teoria de nombres, i el fet que aquella fos una època en la qual regnava una "atmosfera d'inseguretat" (en paraules de Ferreirós) explica que, tal com havíem dit abans, en els anys subsegüents a la publicació de *Principia* la teoria de tipus de Russell fos preferida per la majoria dels lògics a la teoria axiomàtica de conjunts de Zermelo per dur a terme les seves recerques sobre lògica i fonaments.

Una quarta època en el desenvolupament de la lògica matemàtica en el període 1850-1920 s'inicia, tal com dèiem en la Introducció, amb la publicació de l'article de Löwenheim "Über Möglichkeiten im RelativKalkül" (1915) i amb les lliçons impartides per Hilbert a la universitat de Göttingen titulades "Prinzipien der Mathematik" (1917-18). Tal com hem vist en el nostre treball, els articles de Löwenheim i els articles de Skolem anteriors a 1920 continuen el programa de recerca desenvolupat per Schröder a *Vorlesungen über die Algebra der Logik*, al qual van contribuir d'una forma molt notable, fins al punt de reorganitzar-lo completament i plantejar en el seu marc alguns dels problemes més importants de la lògica contemporània (*Cf. supra*, cap. VII, § 1 i 5). En el seu article de 1915, Löwenheim, com ja havia fet Schröder en el tercer volum d'*Algebra der Logik*, distingeix entre la quantificació sobre individus i la quantificació sobre relatius. A les fórmules en què només hi figura el primer tipus de quantificació, Löwenheim les anomena *expressions de primer ordre* [*Zählausdrücke*]. Doncs bé, la gran novetat de l'article de 1915 és que en ell l'atenció se centra en aquesta mena de fórmules, és a dir, en el que avui en dia anomenaríem fórmules de la lògica de primer ordre amb igualtat. Així, per exemple, Löwenheim demostrarà teoremes tan importants sobre la lògica de primer ordre com ara el teorema de Löwenheim-Skolem o el teorema que afirma la decidibilitat del seu fragment monàdic (*Cf.*

supra, cap. VII, § 1). Amb tot, tal com hem vist, Löwenheim no defineix exactament què cal entendre per una expressió o fórmula de primer ordre, sinó que cal deduir-ho pel context. A més, aquestes expressions apareixen sempre en el context del que Löwenheim anomena *equacions de primer ordre* [*Zählgleichungen*], les quals constitueixen, en darrer terme, les expressions a les quals fan referència els diferents teoremes enunciats al llarg de l'article (*Cf. supra*, cap. VII, § 2). Finalment, en el mateix article de 1915, Löwenheim només remarca la importància del teorema 6, que enuncia la reducció del càlcul de relatius d'ordre superior al binari i, en cap moment, valora els teoremes 2 i 4 que afirmen respectivament la satisfactibilitat de les fórmules de primer ordre no contradictòries en dominis de cardinalitat finita o infinita numerable i la decidibilitat del fragment monàdic de la lògica de primer ordre (*Cf. supra*, cap. VII, § 1). Això mostra clarament, d'una banda, la inserció de l'article de Löwenheim en el programa de recerca schröderià i, més en concret, en el seu programa de logicització o schröderització de les matemàtiques. Tal com hem pogut comprovar, en efecte, el teorema 6 juga en aquest sentit un paper bàsic, donat que en ell es fonamenta la possibilitat mateixa d'expressar les matemàtiques senceres en el càlcul de relatius binaris de Schröder. D'una altra banda, tal com ha assenyalat Goldfarb, mostra també que "Löwenheim no sembla reconèixer la importància del fragment de primer ordre que ell tot just ha demarcat".[1] A més, si bé és cert que el teorema 2 de Löwenheim és un teorema sobre la satisfactibilitat de les fórmules de primer ordre i que, per tant, podem afirmar que Löwenheim centrà la seva atenció en la lògica de primer ordre, no és menys cert que aquesta no és entesa en cap moment per Löwenheim com un sistema formal, amb uns axiomes i regles específiques i una noció de demostració formal. Això fa que els resultats s'hagin d'obtenir sense possibilitat de fer cap referència a un sistema formal i, per tant, a partir de consideracions estrictament semàntiques sobre les fórmules de primer ordre. L'absència d'una concepció més o menys clara de la lògica de primer ordre com un sistema formal axiomàtic és la principal limitació que presenta l'article i, en definitiva, tota la tradició algèbrica de Peirce, Schröder i Löwenheim, car això fa literalment impossible que es plantegin en el seu si les qüestions metalògiques que constituiran el cor de les recerques lògiques contemporànies a partir de Gödel. Tal com hem vist en el capítol cinquè, Frege fou el primer en presentar la lògica com un sistema formal axiomàtic, per a la qual cosa distingí d'una forma bastant clara entre el llenguatge objecte (la lògica de primer i segon ordre) i el metallenguatge emprat per parlar del llenguatge objecte (emprant, a tal efecte, variables metalingüístiques o sintàctiques per

[1] *Goldfarb 1979*, 355.

referir-se a les fórmules lògiques). Aquesta distinció entre llenguatge i metallenguatge, que està indissolublement lligada a la concepció de la lògica com a sistema formal axiomàtic, és completament absent en l'article de Löwenheim i en tota la tradició algèbrica. La conseqüència fonamental d'això és, tal com ha observat Goldfarb, que Löwenheim no pot comprendre de forma adequada "el rol del llenguatge objecte en la formalització de les matemàtiques"[1] i, per tant, el rol de la lògica de primer ordre com un sistema formal a partir del qual és possible axiomatitzar les diferents branques de les matemàtiques. Com que la lògica de primer ordre no es presenta com un sistema formal axiomàtic, la qüestió de si una determinada sentència és conseqüència lògica o és independent d'un conjunt d'axiomes no es pot plantejar mai i, en definitiva, no té sentit preguntar-se per la presència d'una definició de la noció de conseqüència lògica per a la lògica de primer ordre. A més, la manca de distinció entre llenguatge i metallenguatge faria impossible una definició adequada d'aquesta noció. Això no vol dir evidentment que Löwenheim no tingués una noció bastant clara d'aquesta noció, sinó simplement que aquesta noció no tenia sentit per a Löwenheim en el context de la lògica de primer ordre que ell, d'alguna manera, havia demarcat per primera vegada. Com ja hem dit, en efecte, Löwenheim no concep la lògica de primer ordre com un sistema formal axiomàtic, sinó que "simplement" es pregunta per la satisfactibilitat de les seves fórmules i, en aquest context, sense axiomes ni regles d'inferència, la noció de conseqüència lògica aplicada a la lògica de primer ordre perd bona part del seu interès intrínsec. Això és interessant perquè, tal com hem vist en el capítol tercer, Schröder té una clara concepció de les nocions d'interpretació o model i de conseqüència lògica i, de fet, és el primer en emprar aquestes nocions en el marc estricte de la lògica en demostrar la independència de les lleis distributives respecte de la resta d'axiomes del càlcul idèntic. Immediatament després de Schröder, els autors més importants de l'escola de Schröder com ara Voigt, Korselt o Luroth presentaren també noves proves de tipus semàntic sobre la independència de les lleis distributives. Sembla lògic pensar, doncs, que si Schröder o algun dels seus seguidors, com ara el mateix Löwenheim, haguessin concebut la lògica de primer orde com un sistema formal axiomàtic i haguessin estat capaços de copsar la importància del paper de la lògica de primer ordre per a la formalització i axiomatització de les matemàtiques, s'haguessin plantejat inevitablement les qüestions relatives a la dependència o independència dels axiomes i teoremes de la lògica de primer ordre i Löwenheim, en particular, hagués valorat d'una forma adequada el seu teorema sobre la satisfactibilitat de les fórmules de primer

1 *Ibid.*, 355.

ordre. Però, com ja hem vist, Löwenheim considera en el seu article de 1915 com a principal aplicació del seu teorema la decidibilitat de totes les qüestions relatives a la dependència o independència del càlcul de dominis de Schröder i altres en un domini numerable! D'una altra banda, això mostra que Löwenheim veia el problema de determinar si un enunciat era conseqüència lògica o no d'un conjunt d'enunciats com un problema que es podia reduir al de determinar si una equació era satisfactible o no en un cert domini, problema al qual era aplicable el seu teorema. En paraules de Löwenheim:

> En les recerques sobre la independència, s'ha de decidir si un determinat axioma se segueix d'un altre. Però si aquest és el cas, això és pot expressar a través d'una equació de relatiu, que hom pot fer primària. Així doncs, en les recerques d'aquesta mena es tracta de decidir si una determinada equació de relatiu i, en particular, en vista del precedent, si una equació de primer ordre, se satisfà idènticament o no. Però si aquest no és el cas, llavors, d'acord amb el teorema 2, serà possible donar ja un contraexemple en un domini finit o numerable.[1]

Pel que fa a les principals nocions semàntiques que apareixen en l'article de 1915 -interpretació, validesa, satisfactibilitat, ...- cap d'elles és definida és definida explícitament per l'autor, encara que, tal com s'esdevenia amb la noció de fórmula de primer ordre, el seu significat es pot deduir fàcilment per la manera i el context en què són emprades per Löwenheim. D'una altra banda, la profunditat dels resultats assolits per Löwenheim en relació a la satisfactibilitat de les fórmules de primer ordre i la desimboltura amb què maneja en la seva demostració les diferents nocions semàntiques abans esmentades, mostren clarament que tenia un concepte clar i precís d'aquestes nocions. Sembla clar també que Löwenheim entén que el lector coneix aquests conceptes en la mesura que pressuposa que està familiaritzat amb l'obra de Schröder (*Cf. supra*, cap. VII, § 2). Tots els conceptes anteriors ja són presents, en efecte, en l'obra de Schröder. Ara bé, entre el paper que juguen aquests conceptes en l'obra de Schröder i el que juguen en l'obra de Löwenheim hi ha un bon tros. Tal com hem vist, en efecte, encara que Schröder s'ocupa abastament del problema de la resolubilitat del que ell anomena proposicions sintètiques generals, això és, de la resolubilitat de les equacions del càlcul de dominis o de relatius amb alguna incògnita, el cert és que, tal com hem dit abans, el seu plantejament és eminentment de tipus algèbric, seguint en això a

[1] *Löwenheim 1915*, 458 (*Van Heijenoort 1967*, 242). Van Heijenoort explica en una nota a peu de pàgina que una equació de relatiu és *primària* si no conté cap condicional o equivalència a dreta o esquerra del signe d'igualtat (*Van Heijenoort 1967*, n. 6).

Boole, no pas semàntic. És digne de remarcar, d'una altra banda, la generalitat del plantejament de Löwenheim pel que fa a la qüestió de la satisfactibilitat de les fórmules de primer ordre. Tal com hem vist, en efecte, Löwenheim classifica semànticament les equacions de primer ordre en termes de la seva validesa en dominis de diferent cardinalitat i enuncia respecte a un del tipus resultant d'aquesta classificació, les *equacions progressives*, és a dir, les equacions que no són universalment vàlides però, en canvi, són finitament vàlides, el seu famós teorema (*Cf. supra*, cap. VII, § 2). És a dir, el punt de partida de la recerca de Löwenheim són les equacions vàlides en *qualsevol* domini d'una certa cardinalitat, no pas vàlides en *algun* domini d'una certa cardinalitat, és a dir, satisfactibles *stricto sensu*.

En l'article "Logisch-kombinatorische Untersuchungen über die Erfülbarkeit oder Beweisbarkeit mathematischer Sätze" (1920), Skolem empra essencialment la mateixa notació i terminologia que Schröder i Löwenheim. Així, per exemple, el concepte de *Zählaussage* de Skolem és correspon exactament amb el concepte de *Zälhausdruck* de Löwenheim, tal com el mateix Skolem reconeixerà en aquest article (*Cf. supra*, cap. VII, §§ 2 i 6). Ara bé, tal com hem explicat en la nostra exposició, Skolem centra des d'un primer moment la seva atenció únicament en els *enunciats de primer ordre* [*Zählaussage*] i s'oblida per complet de les *equacions de relatiu* [*Relativgleichungen*] i de *primer ordre* [*Zälhgleichungen*], que constituïen el veritable objecte d'estudi de l'article de Löwenheim (*Cf. supra*, cap. VII, § 6). D'una altra banda, al llarg de l'article de Skolem no apareixen símbols específics per a la classe nul·la i la classe universal i, el que és més important, els quantificadors no s'assimilen o expliquen a través de sumes o productes. Tot això fa que la interpretació algèbrica de les expressions del llenguatge, molt important en l'obra de Schröder i present també, encara que en menor grau, en la de Löwenheim, desaparegui completament de l'article de Skolem i s'obri pas d'una manera inexorable la interpretació proposicional o lògica. En definitiva, en l'obra de Skolem no només trobem una definició clara i precisa de la noció de fórmula de primer ordre, sinó també una semàntica o interpretació de la lògica de primer ordre completament anàloga a la que trobem avui en dia en qualsevol manual de lògica. Tot això fa que la *teoria de la quantificació* o, més exactament, la lògica de primer ordre pugui esdevenir el veritable objecte d'estudi en els articles de Skolem posteriors a 1920 i que Skolem sigui, en definitiva, el primer autor en la tradició algebràica que va destacar explícitament la importància del llenguatge de la lògica de primer ordre en les recerques de tipus semàntic o metalògic. De fet, si ens fixem en la llista de les principals contribucions de Skolem a la lògica que dóna Hao Wang en la Introducció a

Selected Works in Logic del mateix autor, veurem que bona part d'elles fan referència a la teoria de la quantificació i, en particular, a la lògica quantificacional de primer ordre (*Cf. supra*, cap. VII, § 5). Per un altre costat, com és ben sabut, Skolem fou un dels agents principals en la presa de consciència respecte a la importància de la lògica de primer ordre per a la formalització de les diferents branques de les matemàtiques. En particular, el seu article "Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begründung der Mengenlehre" (1922) és un clar alegat en defensa de la tesi segons la qual axiomatitzar la teoria de conjunts significa el mateix que donar una formalització de la mateixa en el llenguatge de la lògica de primer ordre -recordem, a tal efecte, la seva definició en aquest article de l'expressió *enunciat ben definit* de Zermelo (*Cf. supra*, cap. VIII, § 10), encara que Skolem no arriba a enunciar explícitament aquesta tesi. La major part d'aquestes contribucions de Skolem al cada cop més evident protagonisme de la lògica de primer ordre en el context de les diferents recerques sobre lògica i fonaments són posteriors a 1920 i, per això, només han estat esmentades *en passé* en el nostre treball, donades les limitacions que ens hem autoimposat en el mateix. Amb tot, cal tenir-les en compte per obtenir una visió correcta de la importància d'aquest autor en la gènesi i desenvolupament de la lògica quantificacional moderna.

La importància de Hilbert pel que fa al desenvolupament de la lògica matemàtica contemporània i la concepció model-teorètica predominant avui en dia ens sembla fora de tot dubte i està íntimament lligada a l'aplicació del mètode axiomàtic a la lògica. Com ja sabem, la gènesi del mètode axiomàtic hilbertià es pot retrotreure a l'obra *Grundlagen der Geometrie* (1899), en la qual Hilbert aplica el mètode axiomàtic a la geometria (*Cf. supra*, cap. VIII, § 2). En aquesta obra, en efecte, Hilbert planteja per primera vegada, els problemes de la *independència* i *consistència* d'un sistema axiomàtic. Tal com hem explicat en la nostra exposició, les demostracions de Hilbert de la consistència i independència mútua dels axiomes de la geometria són relatives, perquè Hilbert apel·la per a les seves demostracions al model fornit per la geometria analítica cartesiana. Això posà en el punt de mira de Hilbert el problema de la demostració de la *consistència* de sistema dels nombres reals en primer pla. Doncs bé, a "Über den Zahlbegriff", Hilbert axiomatitzarà l'anàlisi, caracteritzant el sistema dels nombres reals com un *cos ordenat arquimedià* i *maximal*, això és, no extensible a un altre cos del mateix tipus que el contingui (*Cf. supra*, cap. VIII, § 4). Aquest requisit de *no extensibilitat* [*Nichterweiterbarkeit*] s'expressarà a través de l'*axioma de completesa* [*Axiom der Vollständigkeit*]. Hilbert afegirà a partir de la segona edició de *Grundlagen der Geometrie* un axioma anàleg a aquest a la llista d'axiomes presents en la primera edició, l'*axioma de completesa lineal*, gràcies al qual podrà bijectar els punts d'un recta amb el sistema dels nombres reals i introduir el concepte de mesura. Com hem remarcat en el nostre treball, una conseqüència immediata de l'afegit de l'axioma de completesa és la *categoricitat* dels sistemes d'axiomes a través dels quals Hilbert caracteritza els nombres reals a "Über den Zahlbegriff" i la geometria euclidiana a *Grundlagen der Geometrie* i, per tant, la *completesa* de les teories respectives (*Cf. supra*, cap. VIII, § 4). Això explica que, encara que a "Über den Zahlbegriff" Hilbert destaqui la importància de demostrar la completesa dels axiomes de qualsevol teoria, en els anys següents Hilbert centri tots els seus esforços en la demostració de la consistència dels axiomes de l'anàlisi -i, en menor grau, en la demostració de la seva independència. Així, en la conferència titulada *Mathematische Probleme*, llegida en el segon *Congrés Internacional de Matemàtics* a Paris de l'any 1900, Hilbert posarà en el segon lloc de la seva famosa llista de problemes, la qüestió de si és possible una demostració directa de la no contradicció o consistència dels axiomes que determinen l'estructura dels nombres reals, que ell anomena simplement *axiomes de l'aritmètica*. Hilbert confiava en trobar una ràpida i fàcil solució al problema de la consistència de l'anàlisi, però aquesta confiança es va veure afectada pel descobriment per part de Zermelo i Russell de les paradoxes de la lògica i la teoria de conjunts. Frege i Dedekind, en efecte, creien haver fonamentat d'una forma ferma i segura l'aritmètica sobre la lògica pura i la teoria de conjunts respectivament. Però el descobriment de les paradoxes mostrava que tant l'una com l'altre eren inconsistents. Això va dur Hilbert a pensar que una demostració dels axiomes de l'aritmètica era impossible, si més no a través dels mitjans de la lògica pura -tal com havia proposat el 1900- o de la teoria de conjunts i, en definitiva, a replantejar el seu programa de fonamentació de les matemàtiques i la seva concepció de la relació entre aritmètica i lògica. Aquest replantejament ja és manifest en la coneguda conferència "Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik" (1904) pronunciada en el tercer *Congrés Internacional de Matemàtics* celebrat a Heidelberg de 1904, en la qual Hilbert esbossa també, per primera vegada, una solució al segon problema plantejat el 1900 (*Cf. supra*, cap. VIII, § 4).

En les lliçons titulades "Logische Principien des mathematischen Denkens" (1905), Hilbert intentarà desenvolupar la idea, formulada en la conferència de 1904 sobre els fonaments de la lògica i l'aritmètica, d'un desenvolupament conjunt d'aquestes dues ciències i aclarirà algunes de les idees programàtiques esbossades en la conferència anterior (*Cf. supra*, cap. VIII, § 4). En concret, Hilbert no havia especificat en la conferència de 1904 el sistema lògic que requeria el desenvolupament conjunt de lògica i aritmètica a partir del qual pensava abordar la demostració de la consistència de l'anàlisi. En canvi, en les lliçons de 1905 abans esmentades, Hilbert especificarà un sistema lògic i aclarirà amb un cert detall les relacions entre lògica i aritmètica. Això duu Hilbert a aplicar, per primera vegada, el mètode axiomàtic a un sistema lògic i a plantejar-se en el seu marc, per primera vegada en la història, algunes qüestions metalògiques tan importants com ara la qüestió relativa a la *independència* o *no contradicció* dels axiomes d'aquest sistema lògic o la *decidibilitat* dels seus teoremes. Les limitacions d'aquestes lliçons provenen del fet que Hilbert només axiomatitza el càlcul proposicional i, en conseqüència, només planteja les qüestions metalògiques esmentades en relació a aquest sistema lògic. Per un altre costat, si Hilbert no avançà gaire en aquestes lliçons en relació al seu projecte d'un desenvolupament conjunt de la lògica i l'aritmètica per tal d'atacar la demostració de la consistència de l'anàlisi, fou segurament perquè confiava en què Zermelo fos capaç d'axiomatitzar la lògica i la teoria de conjunts i resoldre d'aquesta manera les paradoxes de la lògica i la teoria de conjunts descobertes de forma independent per Russell i el mateix Zermelo. L'any 1908, en efecte, Zermelo publicaria l'article "Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre", on, prenent com a model l'axiomatització de la geometria duta a terme per Hilbert el 1899, exposava la seva coneguda axiomatització de la teoria de conjunts que permetia evitar les paradoxes de tipus conjuntista. El mateix Zermelo reconeixeia en aquest article que el seu objectiu havia estat mostrar "com tota la teoria [de conjunts] elaborada per Cantor i Dedekind pot reduir-se a algunes definicions i a set "principis" o "axiomes" aparentment independents els uns dels altres" (ja citat: *Cf. supra*, cap. VIII, § 10). Com hem dit abans, en efecte, la teoria de conjunts sobre la qual Cantor i Dedekind havien bastit les seves recerques s'havia mostrat inconsistent tot just començar el segle XX. En particular, la paradoxa de Russell (en la seva versió extensional) atacava el cor de la teoria intuïtiva de conjunts de Cantor i Dedekind, en no fer referència més que als conceptes de conjunt i element. En aquest sentit, la idea bàsica de Zermelo serà imposar certes restriccions a la concepció cantoriana de conjunt que associava a cada propietat ben definida un conjunt, de manera que s'evitessin les paradoxes i, al mateix temps, es preservessin les diferents aplicacions matemàtiques de la teoria de conjunts. Es tractava, en definitiva, de determinar o definir la noció de conjunt mitjançant uns pocs axiomes o principis a partir dels quals hom no pogués derivar les antinòmies conegudes fins llavors. Així doncs, la teoria de conjunts de Zermelo s'inscriurà, d'una banda, en el programa dedekindià de fonamentar "lògicament" les matemàtiques a partir de la teoria de conjunts i, d'una altra, en el programa hilbertià d'axiomatització de les diferents branques de les matemàtiques. L'any 1908 Zermelo abordà també el problema de l'axiomatització de la lògica en una lliçó impartida a la universitat de Freiburg titulada "Mathematische Logik", però no va més enllà de presentar un conjunt d'axiomes per al càlcul proposicional i de classes. D'aquí que, en unes lliçons de 1910 titulades *Elemente und Prinzipienfragen der Mathematik*, Hilbert pugui afirmar que la paradoxa de Russell havia estat solucionada en la seva versió conjuntista per la teoria axiomàtica de conjunts de Zermelo, però que "encara no havia estat resolta d'una forma satisfactòria com antinòmia lògica" (ja citat: *Cf. supra*, cap. VIII, § 6). No ens ha d'estranyar, doncs, que alguns anys desprès Hilbert exalcés en diversos indrets l'axiomatització de la lògica duta a terme per Russell i Whitehead a *Principia Mathematica* i la seva solució a les paradoxes lògiques a través de la teoria de tipus. Com ja sabem, en efecte, Hilbert lloarà en la conferència *Axiomatisches Denken* de 1917 l'axiomatització de la lògica duta a terme per Russell i Whitehead a *Principia* i la consegüent reducció, gràcies a la teoria de tipus allí exposada, de la teoria de nombres i la teoria de conjunts a la lògica (*Cf. supra*, cap. VIII, § 6). En aquesta conferència i en les lliçons de 1917-18 a la universitat de Göttingen Hilbert accepta, en principi, el programa logicista de Frege i Russell, això és, la reducció de la teoria de nombres i i la teoria de conjunts a la lògica. Això posava evidentment els axiomes de la lògica quantificacional i les qüestions relatives a la independència, completesa i no contradicció d'aquests axiomes en el punt de mira de la recerca hilbertiana. Hilbert i Bernays aniran precisant aquestes qüestions metalògiques al llarg dels anys vint, fins donar-lis la forma definitiva que trobem en la segona edició del llibre de Hilbert i Ackermann de 1928, que constituirà el punt de partida de les recerques metalògiques de Gödel en els anys immediatament següents. El plantejament de les qüestions metalògiques abans esmentades requereix evidentment convertir la mateixa lògica en objecte d'estudi i, per això, cal veure-la com un sistema purament formal de signes, desproveïts de tot significat o contingut, al qual es pugui aplicar el mètode axiomàtic. Doncs bé, aquesta és una idea bàsica que apareix per primera vegada en les lliçons titulades *Prinzipien der Mathematik*, impartides en el semestre d'hivern del curs de 1917-18, la qual romandrà pràcticament intacta en el llibre de 1928 escrit amb la col·laboració de Ackermann (*Cf. supra*, cap. VIII, § 7). La importància d'aquestes llicons és digne de remarcar, perquè en elles Hilbert presentarà, per primera vegada en la història, la lògica de primer ordre com un sistema separat i independent de la lògica d'ordre superior i li aplicarà el mètode axiomàtic. En aquest context, Hilbert definirà recursivament en el metallenguatge el concepte de fórmula de primer ordre i plantejarà en relació a aquest sistema lògic tota una sèrie de qüestions metalògiques que constituiran un dels objectes fonamentals d'estudi de la lògica contemporània (*Cf. supra*, cap. VIII, § 9).

Tal com hem vist en la nostra exposició, Hilbert distingeix clarament en les lliçons de 1917-18 entre el càlcul funcional i el càlcul funcional ampliat, és a dir, entre la lògica de primer i segon ordre (*Cf. supra*, cap. VIII, §§ 7 i 9). Tal com assenyala el mateix Hilbert, la funció bàsica del càlcul funcional és la presentació de les teories matemàtiques des d'un punt de vista axiomàtic. Però la lògica no té com a únic objectiu la formalització de les diferents branques de les matemàtiques, sinó també la fonamentació de les matemàtiques i, per això, és necessari "ampliar" el càlcul funcional i admetre la quantificació sobre funcions. En el marc d'aquest càlcul funcional ampliat, Hilbert procedeix a la reducció a la lògica de la teoria de conjunts i l'aritmètica, però l'amenaça de la paradoxa de Russell -en la seva versió intensional, donada la reducció de la teoria de conjunts a la lògica de segon ordre- porta el nostre autor a postular un *càlcul de nivells*, que no és altra cosa que la teoria ramificada de tipus de Russell. Amb tot, com veu molt bé Hilbert, la reducció de les matemàtiques a la lògica requereix ara l'axioma de reductibilitat, la naturalesa lògica dels quals és posada en dubte ja en les mateixes lliçons de 1917-18. En les lliçons de 1921-22, Hilbert observa que l'axioma de reductibilitat no se satisfà en un domini arbitrari d'individus i propietats i relacions bàsiques entre ells, per la qual cosa hom ha d'expandir "el sistema de propietats i relacions bàsiques" de manera que l'axioma sigui satisfet. Això porta el nostre autor a abandonar "l'objectiu d'una fonamentació lògica de l'aritmètica i l'anàlisi" i a "retornar al punt de vista axiomàtic" (*Cf. supra*, cap. VIII, § 9). En definitiva, Hilbert sembla haver estat el primer autor en veure l'adequació de la lògica de primer ordre per a la formalització de les teories axiomàtiques i en veure les dificultats que entranyen els axiomes de reductibilitat i de l'infinit, la qual cosa el portarà a l'abandó del programa logicista de Russell. Sembla plausible pensar, doncs, que aquests fets, juntament amb la proposta de Skolem de formalitzar la teoria axiomàtica de conjunts de Zermelo en el llenguatge de primer ordre, contribuïren de forma decisiva al creixent protagonisme de la lògica de primer ordre i la teoria de conjunts en les recerques sobre lògica i fonaments a partir de la dècada dels trenta enfront de la teoria de tipus de Russell.

Pel que fa al plantejament de les qüestions metalògiques en les lliçons de 1917-18, cal recordar primer de tot que la propietat més important que, segons Hilbert, havia de posseir un sistema axiomàtic era que fos no contradictori o consistent. En el cas de la lògica, inicialment s'esdevenia el mateix, però a partir de les lliçons de 1917-18, Hilbert ja no considerarà la consistència com la propietat més important, sinó la completesa (Post-completesa). En el nostre estudi ens hem fet ressò de com Hilbert anirà precisant el concepte de completesa sintàctica o Post-completesa d'una teoria lògica i de com el concepte de completesa semàntica apareix formulat amb tota precisió en l'*Habilitationschrift* de Bernays (1918), que fou publicada parcialment alguns anys més tard a *Mathematische Zeitschrift* amb el títol "Axiomatische Untersuchung des Aussagen-Kalkuls der "Principia mathematica"" (1926) (*Cf. supra*, cap. VIII, § 8). Així doncs, en l'*Habilitationschrift* de Bernays trobem, per primera vegada en la història, una formulació explícita del problema de la completesa d'un càlcul lògic i, més en concret, del càlcul proposicional. En relació a la presentació que fa Bernays d'aquest càlcul en la seva *Habilitationschrift* de 1918 convé remarcar algunes diferències importants respecte a la presentació que en fa Hilbert en les lliçons de 1917-18. En primer lloc, Bernays presenta primer el sistema formal i després la seva interpretació, la qual cosa indica una clara separació entre sintaxi i semàntica que contrasta clarament amb la pràctica habitual de Hilbert de presentar-les conjuntament. En segon lloc, la interpretació que fa Bernays del càlcul proposicional és una interpretació veritativo-funcional, la qual cosa contrasta de nou amb la interpretació aritmètica que en fa Hilbert. Finalment, en base a la distinció entre sintaxi i semàntica, Bernays remarcarà la necessitat de distingir rigorosament la noció de fórmula *generalment vàlida* [*allgemeingültig*] de la noció de fórmula *demostrable* [*beweisbare*], distinció que havia estat obviada per Hilbert en parlar habitualment de fórmules correctes [*richtige*], sense precisar en cap moment aquesta noció. Com ja sabem, la finalitat de Bernays en fer això era poder demostrar que tota fórmula *demostrable* de la lògica proposicional és *generalment vàlida* (*teorema de correcció*) i, recíprocament, que tota fórmula *vàlida* de la lògica proposicional és *demostrable* (*teorema de completesa*). Així doncs, Bernays va estar el primer en definir precisament els conceptes de fórmula *demostrable* i fórmula *vàlida* que són necessaris per un correcte plantejament del problema de la *completesa semàntica* del càlcul proposicional. De fet, ell és també el primer en delimitar aquesta noció, en atorgar al problema de la completesa del càlcul lògic la importància que avui en dia hom li atorga generalment i, en definitiva, en resoldre aquest problema d'una forma satisfactòria (*Cf. supra*, cap. VIII, § 8).[1] Aquest resultat també fou obtingut de forma independent per E. L. Post en l'article "Introduction to a General Theory of Elementary Propositions" (*1921*), el qual constitueix, de fet, el primer article publicat que conté una demostració de la completesa semàntica del fragment proposicional de *Principia*.

[1] La demostració de la completesa semàntica del càlcul proposicional ja es troba, si bé de forma implícita, en les lliçons de Hilbert de 1917-18 (*Cf. supra*, cap. VIII, § 7).

Amb tot, quan Gödel afirma a l'article "Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkälkuls" (1930), que "aquest problema s'ha decidit en sentit positiu per al domini de les fórmules de la lògica proposicional, això és, hom ha demostrat que, de fet, tota formula proposicional correcta se segueix dels axiomes donats a *Principia Mathematica*",[1] aquest autor fa referència únicament a l'article de Bernays de 1926.

El problema de la completesa sintàctica i la consistència dels axiomes del càlcul funcional restringit també són resolts per Hilbert en les lliçons de 1917-18, per la qual cosa cal retrotreure a aquestes lliçons el primer plantejament d'aquestes qüestions metalògiques en relació a la lògica de primer ordre (*Cf. supra*, cap. VIII, § 9). El problema de la completesa semàntica del càlcul funcional és exposat per primera vegada en el llibre *Grundzüge der theoretischen Logik* (1928) de Hilbert i Ackermann, per a la redacció del qual els autors es basaren en les lliçons de 1917-18. Tal com hem explicat en la nostra exposició, aquesta definició de completesa posa alguns problemes, deguts essencialment a la definició de *fórmula lògica* i l'ambigüitat de la noció de fórmula *correcta* emprats en ella, però en la mateixa obra Hilbert i Ackermann defineixen més endavant la noció de fórmula *generalment vàlida*, que hauria permès una correcta formulació del problema de la completesa del càlcul funcional restringit. Cal notar també que Hilbert i Ackermann defineixen una fórmula generalment vàlida com una fórmula correcta en tot domini, on la noció de fórmula correcta s'entén en el mateix sentit que s'havia especificat en les lliçons de 1917-18, per la qual cosa l'anterior plantejament del problema de la completesa és pot reinterpretar fàcilment en termes de la noció de fórmula generalment vàlida. La definició de fórmula generalment vàlida del càlcul funcional és, d'una altra banda, una generalització de la noció de fórmula generalment vàlida del càlcul proposicional prèviament donada i que, tal com hem dit abans, Bernays havia estat el primer en donar. De fet, en la segona edició del llibre de Hilbert i Ackermann (1938), les expressions "fórmula lògica" i "fórmula correcta" desapareixeran i seran reemplaçades per l'expressió "fórmula generalment vàlida", la definició de la qual (p. 58) coincideix exactament amb la definició que dóna Gödel en l'article de 1930 abans esmentat per tal d'explicar l'enunciat del seu famós teorema de completesa: "Tota fórmula generalment vàlida del càlcul funcional restringit és demostrable".[2]

Un cop exposades les principals contribucions que, des del nostre punt de vista, han fet els autors del corrent algèbric i logicista al desenvolupament de la lògica contemporània i les realitzades en els anys immediatament posteriors a la publicació de *Principia* per altres

[1] *Gödel 1996*, 102.
[2] *Ibid.*, 102. *Cf.* n. 3 i n. 4.

autors com ara Löwenheim, Skolem o Hilbert i la seva escola, ens farem ressò ara de les valoracions que alguns dels autors més representatius de la recent historiografia lògica, com ara Dummett, Van Heijenoort, Goldfarb o Grattan-Guinness, han fet de les contribucions d'aquests autors i veurem després fins quin punt aquesta valoració coincideix amb la nostra. En el clàssic de M. Dummett: *Frege: Philosophy of Language* (*1973*), aquest autor assenyala que:

> Frege no es va contentar amb trobar una caracterització de la totalitat de les sentències del llenguatge simbòlic, ni tampoc amb una simple estipulació de les regles d'inferència que considerava adequat emprar. Més aviat, la descripció de l'estructura de les sentències d'aquest llenguatge anava acompanyada per una explicació de la manera en què els seus valors de veritat eren determinats, i les regles d'inferència postulades es consideraven llavors justificades per les regles que governaven l'assignació de valors de veritat [...] Encara que Frege no va definir expressament les dues nocions -semàntica i sintàctica- de conseqüència lògica, ambdues estan disponibles i a l'abast en la seva obra: car, d'una banda, hi ha el sistema formal, amb les seves regles de formació, axiomes i regles d'inferència precisament enunciades; i, de l'altra, hi ha les explicacions semàntiques de les proposicions del llenguatge formalitzat, exposades en alemany en el text que les acompanya, clarament separades del desenvolupament formal. Frege hauria tingut aleshores al seu abast els conceptes necessaris per formular la noció de completesa d'una formalització de la lògica, així com la de la seva coherència [*soundness*].[1]

Una mica més endavant, Dummett retrotreu el *tractament semàntic modern del llenguatge de la lògica contemporània* a la semàntica que Frege introduí per a les *formules del llenguatge de la lògica de predicats*. Segons Dummett, en efecte:

> Una interpretació d'una fórmula (o conjunt de fórmules) com aquesta s'obté assignant entitats de tipus adequats a les constants no lògiques primitives en les fórmules [...] La interpretació assignarà a cada constant un objecte; a cada símbol de funció unària una funció unària, que estigui definida per a cada objecte i tingui un objecte com a valor per a cada argument; a cada símbol de funció binària una funció binària, que estigui definida per a cada parell ordenat d'objectes i tingui un objecte com a valor per a cada parell d'arguments; a cada predicat monàdic, una propietat,

1 *Dummett 1973*, 82.

definida sobre cada objecte (*i.e.* de manera que estigui especificat d'alguna manera, per a cada objecte, que aquest objecte té o li manca, aquesta propietat); i, per a cada expressió relacional diàdica, una relació binària, definida anàlogament sobre cada parell d'objectes.[1]

Dummett descriu llavors com els valors de veritat són assignats a les sentències atòmiques sota una determinada interpretació i com s'assignen finalment a les sentències complexes formades a partir dels operadors sentencials i els quantificadors. Ara bé, aquesta interpretació de la lògica fregeana i les conclusions sobre la seva *modernitat* que d'ella se'n extreuen, no consonen en absolut amb la interpretació i valoració que han fet d'ella altres historiadors com J. Van Heijenoort i W. Goldfarb en els articles esmentats en la Introducció. Com ja sabem, en efecte, Van Heijenoort distingeix en la lògica de finals del segle XIX i començaments del XX, la línia d'investigació de Frege i Russell de la de Boole, Peirce, Schröder i Löwenheim, i apunta que el plantejament de determinades qüestions de tipus semàntic o metalògic només és possible en aquesta última. D'acord amb Van Heijenoort, el logicisme de Frege i Russell hauria dut aquests autors a construir, sobre la base del mètode axiomàtic, sistemes lògics omnicomprensius:

Els precursors de Frege, Boole i De Morgan, tenien un univers del discurs que es podia canviar a voluntat en el curs de les investigacions. Per ells, l'univers del discurs comprèn només el que convenim a considerar en un determinat moment, en un cert context. Per a Frege, no hi ha possibilitat de canviar universos. Ni tan sols podem dir que ell es restringeixi a un sol univers. El seu univers és *l*'univers. No necessàriament l'univers físic, per suposat, perquè per a Frege hi ha objectes que no són físics. L'univers de Frege està format per tot el que existeix i és fix.[2]

En conseqüència, res no es podria dir fora del sistema lògic i aquesta seria la raó per la qual ni Frege ni Russell s'haurien plantejat cap qüestió metalògica -per exemple, la completesa del sistema, ni trobem en la seva obra cap noció semàntica -com, per exemple, la noció de validesa. Així, Van Heijenoort explica que:

1 *Ibid.*, 88.

2 *Van Heijenoort 1976*, 13.

> Si la qüestió de la completesa semàntica de la teoria de la quantificació no es presentà "d'immediat", fou per la universalitat, en el sentit que hem intentat explicar de la lògica de Russell i Frege. El llenguatge formal universal substitueix a l'idioma natural, i preservar fora del sistema una noció de validesa basada en una teoria intuïtiva de conjunts no sembla convenir a la reconstrucció científica del llenguatge. La única qüestió de completesa que es pot presentar és, emprant una expressió de Herbrand, una qüestió de completesa experimental. Es deriven en el sistema tants de teoremes com sigui possible.[1]

Per contra, tal com escriu Van Heijenoort, el sistemes lògics que desenvoluparen Peirce, Schröder i Löwenheim no pressuposen l'existència d'un únic univers, fixat per endavant i immutable; a més, no hi ha en ells regles d'inferència i la noció de demostrabilitat ha estat reemplaçada per la de validesa i, més en concret, per la noció de validesa en universos diferents:

> Peirce, Schröder i Löwenheim consideraren dominis d'individus, dominis on es defineixen les propietats i les relacions, i la major part del temps ignoren les demostracions formals. Els seus resultats, que avui en dia consideraríem com a resultats model-teorètics, s'obtenen a partir de consideracions de tipus semàntic.[2]

Quines són les contribucions que Van Heijenoort atribueix, en concret, a aquests autors? Pel que fa a Peirce, Van Heijenoort esmenta el concepte de validesa per a la lògica proposicional i la introducció dels signes Σ i Π, els qual "juguen el paper dels quantificadors existencial i universal. Però aquests quantificadors són manejats per Peirce d'una manera molt diferent a com Frege maneja aquests quantificadors. No hi ha axiomes sobre ells. La seva interpretació i maneig estan lligats amb un domini específic, que és pot canviar a voluntat".[3] Pel que fa a Schröder, Van Heijenoort és força més críptic i afirma simplement que "Schröder tenia axiomes per a les àlgebres de Boole, però això no va més enllà del càlcul sentencial".[4] Finalment, pel que fa a Löwenheim, Van Heijenoort afirma que en el seu famós article de 1915:

---

1 *Ibid.*, 15.
2 *Van Heijenoort 1977*, 183.
3 *Ibid.*, 184.
4 *Ibid.*, 184.

Löwenheim s'ocupa de la lògica de primer ordre amb identitat. Però el seu sistema no està proveït d'un concepte de demostració formal; no hi ha axiomes ni regles. L'enfocament és purament semàntic. La noció que Löwenheim maneja és la d'interpretació, junt amb les nocions afins de validesa i satisfactibilitat. Tenim així fórmules que són vàlides, vàlides en qualsevol domini finit o vàlides en un domini infinit numerable. Löwenheim no dóna una definició explícita de les nocions semàntiques que empra; les dóna per ben enteses; però la novetat i complexitat dels resultats que és capaç d'obtenir no deixen cap dubte sobre que les entenia perfectament.[1]

Així doncs, segons Van Heijenoort, Löwenheim hauria posat en primer pla l'aspecte semàntic de la teoria de la quantificació i, en particular, hauria estat el primer en plantejar-se qüestions de tipus semàntic o model-teorètiques en relació a la lògica de primer ordre. Per la seva banda, W. Goldfarb exposa essencialment, si bé amb un mica més de detall, les mateixes tesis que Van Heijenoort. Així, distingeix també entre la tradició logicista, encapçalada per Frege i Russell i la dels algebristes schröderians, entre els quals destaquen el mateix Schröder i Löwenheim, i destaca diverses raons per les quals "la nostra noció dreta i feta [*full-fledged*] de la teoria de la quantificació no podia sorgir naturalment en el marc logicista".[2] En primer lloc, assenyala Goldfarb, "els rangs dels quantificadors -com nosaltres diríem-, estan fixats per endavant i d'una vegada per totes. L'univers del discurs és sempre l'univers, destriat apropiadament".[3] En segon lloc, per Frege i Russell, les proposicions de la lògica no contenen vocabulari no lògic i no hi ha signes esquemàtics [*schematic placeholders*] als quals els pugui ser assignat un valor o un altra. Tota fórmula té un significat fix; no hi ha possibilitat de reinterpretar cap signe".[4] Conseqüentment, les lleis lògiques tindran un contingut, a saber, seran veritats referents als *objectes* de l'univers. En resum, segons Goldfarb:

No ens podem representar en termes fregeans o russellians un dels aspectes centrals en què nosaltres concebem la teoria de la quantificació, a saber, com un esquematisme general o lògica subjacent [*underlying logic*], una lògica aplicable a qualsevol àrea particular de les matemàtiques [...] La *nostra* concepció de la lògica

1 *Ibid.*, 183.
2 *Goldfarb 1979*, 353.
3 *Ibid.*, 352.
4 *Ibid.*, 352.

> incorpora la noció que les veritat lògiques són completament generals, no en el sentit de ser les veritat més generals sobre les entitats lògiques, sinó més aviat en el sentit de no tenir cap contingut en particular, de no parlar de cap entitat o mena d'entitats en particular i de ser aplicable a no importa quines coses desitgem investigar. Cap fragment dels sistemes de Frege i Russell té *aquesta* mena de generalitat.[1]

A més, Goldfarb explica essencialment en els mateixos termes que Van Heijenoort, que el logicisme fregeà i russellià impediria el plantejament de qualsevol qüestió semàntica o metalògica. Per contra, en l'obra de Schröder trobaríem ja la noció de satisfactibilitat d'una fórmula lògica i Löwenheim aplicaria aquesta noció a les expressions de primer ordre [*Zählausdrücke*], la qual cosa el permetria formular el seu famós teorema segons el qual tota fórmula satisfactible és també satisfactible en un domini numerable. Tot això, malgrat les moltes limitacions presents en la seva obra, aproparia Schröder i Löwenheim a la nostra manera d'entendre la teoria de la quantificació. Goldfarb no explicita en cap moment quines serien les contribucions específiques de Peirce a la concepció model-teorètica de la lògica dominant avui en dia, però fa algunes observacions interessants sobre les contribucions de Schröder i Löwenheim:

> Basant-se en el treball anterior de Peirce, Schröder desenvolupa en el tercer volum de la seva obra *Vorlesungen über die Algebra der Logik* (1895) el càlcul de relatius (això és, relacions). Els quantificadors es defineixen com sumes o productes simplement infinits sobre individus o relacions. No hi ha un concepte de demostració formal. Més aviat, s'investiga el següent tipus de qüestió: donada una equació entre dues expressions del càlcul, pot satisfer-se aquesta equació en diferents dominis -això és hi ha relacions en el domini que facin aquesta equació vertadera? Això és semblant a la nostra noció de satisfactibilitat. Tanmateix, aquesta noció no és exhibida amb tota la seva la potència en l'obra de Schröder, car hi ha en la seva àlgebra de la lògica una constant confusió entre la interpretació de la mateixa en termes de la teoria de classes i la interpretació proposicional, tenint més pes al final la primera d'elles.[2]

Pel que fa a Löwenheim, Goldfarb assenyala simplement que per demostrar el seu famós teorema sobre la satisfactibilitat de les fórmules de primer ordre, aquest autor "distingí acuradament -a diferència de Schröder- la quantificació sobre els individus de la

[1] *Ibid.*, 353.
[2] *Goldfarb 1979*, 354.

quantificació sobre relacions, la qual cosa el va dur a destacar la classe de les expressions de primer ordre".[1] Van Heijenoort i Goldfarb estan d'acord, finalment, en què els agents principals en la demarcació de la lògica de primer ordre com un sistema lògic diferenciat de la lògica d'ordre superior i en el desenvolupament de la concepció model teorètica dominant avui en dia foren Hilbert i Skolem, però fan referència únicament a les seves contribucions en la dècada dels vint, en què, tal com ha assenyalat Van Heijenoort, va tenir lloc la "fusió" del corrent algèbric i logicista:

> La posició de Hilbert està d'alguna entre la de Frege-Russell i la de Peirce-Schröder-Löwenheim. Com els primers, treballa amb axiomes i regles. Però amb el seu instint matemàtic, s'inclina a considerar que els quantificadors no tenen com a referència "tot", sinó una col·lecció ben definida d'objectes. Hilbert també fou conscient que el salt de la lògica de primer ordre a la lògica de segon ordre suposa un canvi important en complexitat i, encara que la lògica de segon ordre podria ser indispensable en un cert moment, és important veure que es pot fer amb la lògica de primer ordre. De manera, que quan va tenir lloc la fusió dels dos corrents en la dècada dels vint, Hilbert fou uns dels seus agents. La noció d'un sistema formal deductiu acompanyat d'una interpretació apareix en els escrits lògics de Hilbert i, a l'obra de Hilbert i Ackermann de 1928, el problema de la completesa de la lògica de primer ordre és enunciat en exactament els mateixos termes que a l'article de Gödel de 1930.[2]

Pel que fa a Skolem, Van Heijenoort es limita a subratllar que "coneixia òbviament el treball de Löwenheim, el qual va rectificar i generalitzar. Però també havia llegit *Principia*".[3] Goldfarb, en canvi, és més explícit a l'hora de destacar les contribucions de Skolem:

> L'any 1920 Skolem publicà la seva demostració d'una extensió del teorema de Löwenheim. Skolem empra essencialment la notació de Schröder, però canvia la terminologia en alguns aspectes importants. Per exemple, parla de proposicions de primer ordre [*Zählaussagen*] en comptes de expressions de primer ordre, i s'ocupa d'elles directament, en comptes de fer-ho a través d'equacions; el símbols per a la classe universal i la classe buida no apareixen. Això reforça la interpretació

1 *Ibid.*, 355.
2 *Van Heijenoort 1977*, 185.
3 *Ibid.*, 185.

> proposicional de la notació schröderiana: les expressions es llegeixen com afirmant que determinades relacions es donen entre els individus i, per tant, pressuposen la [idea de] predicació. Més encara, els quantificadors ja no s'assimilen a sumes i productes i deixen d'emprar-se les manipulacions algèbriques poc clares amb ells.[1]

Tal com dèiem abans, un cop exposades les valoracions que Dummett, Van Heijenoort o Goldfarb han fet de les contribucions del corrent algèbric i logicista al desenvolupament de la lògica contemporània, cal veure fins quin punt aquesta valoració coincideix amb la nostra. Com que les contribucions de Boole ja han estat valorades en el seu moment i la valoració que aquests autors fan de Löwenheim, Skolem i l'escola de Hilbert coincideixen essencialment amb la nostra, centrarem la nostra discussió en la valoració que aquests autors fan, d'una banda, de les contribucions de Frege i Russell i, d'una altra, de Peirce i Schröder. A tal efecte, començarem la nostra discussió crítica amb les valoracions que fan els historiadors anteriors de les contribucions de Frege al desenvolupament de la lògica contemporània. Tal com hem vist abans, Van Heijenoort i Goldfarb reconeixen a Frege el mèrit d'haver estat el primer d'exposar la lògica com un sistema formal, però ambdós autors insisteixen en què la noció d'*interpretació* és aliena a la seva obra i que, per tant, Frege tenia una visió limitada de la lògica segons la qual aquesta es reduiria al joc de demostrar sintàcticament els teoremes a partir dels axiomes. La mateixa noció fregeana de veritat, com explicarem de seguida, està força allunyada de la noció moderna de veritat lògica. Ja hem vist, en efecte, que l'univers fregeà coincideix amb el domini de quantificació i que aquest està constituït per dos tipus d'entitats lògiques: els objectes i les funcions. Ara bé, com assenyalen Van Heijenoort i Goldfarb, aquest univers és únic i està fixat per endavant d'una vegada per totes. En cap moment, Frege planteja la possibilitat d'un univers diferent que permeti una altra interpretació del vocabulari no lògic. Més encara, en la lògica fregeana no hi ha signes *esquemàtics* o *ambigus* per interpretar. Hi trobem, és cert, noms d'objecte i de funcions -en les quals s'inclouen els noms de conceptes i de relacions-, però aquests es refereixen invariablement als objectes i funcions -conceptes i relacions- de *l*'univers denotats per ells. No hi ha, doncs, *constants individuals* o *constants de predicat*, que puguin interpretar-se com objectes o relacions diferents i, per tant, no hi ha tampoc *esquemes de sentències*. Ara bé, les nocions model-teorètiques de *veritat* i *conseqüència lògica* requereixen precisament que l'univers es pugui variar i que en el llenguatge hi ha hagi

[1] *Goldfarb 1979*, 357.

signes no lògics per interpretar. Així, per exemple, hom diu que una proposició és lògicament vàlida si, i només si, aquesta proposició és vertadera en qualsevol univers o domini en el qual s'interpretin les seves constants no lògiques. Per a Frege, en canvi, una proposició és vertadera si, i només si, denota el valor de veritat "vertader" en l'univers fregeà d'objectes i funcions. Així doncs, Frege *no* tenia al seu abast els conceptes de *veritat* i *conseqüència lògica* necessaris per definir les nocions de *completesa* i *coherència* i, per tant, no podia formular-se cap qüestió metalògica en relació a la lògica quantificacional que ell mateix havia presentat, per primera vegada, com un sistema formal. En aquest sentit, doncs, la noció moderna d'*interpretació* és completament aliena a la lògica de Frege i, per tant, el *tractament semàntic modern de la lògica* no es pot retrotreure, com pretén Dummett, a la semàntica fregeana. La controvèrsia Frege-Hilbert sobre el mètode axiomàtic és, des del nostre punt de vista, un clar exemple de fins quin punt la concepció fregeana de la lògica era completament aliena a la concepció model-teorètica actual. Tal com hem vist en la nostra exposició, en efecte, Frege critica a Hilbert que els significats dels conceptes ("punt", "recta", "pla") i relacions ("estar sobre", "estar entre", ...) que figuren en els axiomes de *Grundlagen der Geometrie* no estiguin completament fixats per endavant i puguin variar amb l'afegit de nous axiomes. Frege critica, en definitiva, que els axiomes puguin definir implícitament els conceptes i relacions anteriors, la qual cosa el porta a negar també la possibilitat de les proves de no contradicció i independència dutes a terme per Hilbert en l'obra esmentada (*Cf. supra*, cap. VIII, § 3). Així doncs, Frege nega explícitament la possibilitat que el significat del vocabulari no lògic pugui variar i, per tant, que les constants individuals i de relació puguin entendre's com les entenem avui en dia, això és, com símbols ambigus que poden interpretar-se com objectes o relacions diferents. En definitiva, les crítiques de Frege a Hilbert manifesten una clara manca de comprensió per part del primer del paper que pot jugar la lògica en la formalització de les teories matemàtiques i mostra que la concepció fregeana de la lògica és irreconciliable amb la concepció model-teorètica predominant avui en dia, segons la qual la lògica seria, en paraules de Goldfarb, una mena d'"esquematisme general [...] aplicable a qualsevol àrea particular de les matemàtiques". Evidentment, les consideracions anteriors relatives a la concepció fregeana de la lògica i la seva incompatibilitat en relació a la moderna concepció model-teorètica de la lògica són perfectament extrapolables a Russell. De fet, tal com hem vist en la nostra exposició, un dels postulats bàsics del logicisme russellià és la seva teoria de la variable universal, que consisteix essencialment a negar la possibilitat de les variables restringides i, per tant, a estendre el domini de quantificació a tot l'univers. Això porta Russell a criticar obertament la noció d'*univers del discurs* emprada pels lògics del corrent algèbric (*Cf. supra*, cap. VI, § 2) i, per tant, a negar la validesa d'una de les nocions bàsiques de la concepció semàntica de la lògica predominant avui en dia. En qualsevol cas, des del nostre punt de vista, les valoracions de Van Heijenoort i Goldfarb respecte a les contribucions de Frege a la moderna concepció semàntica de la lògica haurien de matisar-se en diversos sentits. En primer lloc, tal com hem vist en la nostra exposició, Frege tenia una noció de veritat a partir de la qual definia els diferents tipus de signes lògics a *Begriffschrift* (les connectives lògiques i els quantificadors) i justificava els axiomes, les regles de formació i d'inferència. I, respecte a aquesta noció de veritat, Frege considerava totes les proposicions demostrables en el seu sistema lògic com a vertaderes. Per tant, si bé és cert que, tal com han afirmat Van Heijenoort i Goldfarb, la moderna concepció semàntica de la lògica no és pot retrotreure a Frege, no és menys cert que les contribucions d'aquest autor no es poden limitar al fet d'haver introduït, per primera vegada en la història, la noció de sistema formal. De fet, tal com ha assenyalat Dummett, en Frege hi trobem, per primera vegada en la història, el dualisme entre l'enfocament sintàctic i semàntic característic de la lògica moderna, per la qual cosa, des del nostre punt de vista, seria un error considerar Frege com un teòric de la demostració, és a dir, com un lògic preocupat exclusivament per problemes sintàctics, les contribucions del qual caldria trobar només en aquest nivell. Segonament, des d'un punt de vista històric, es poden traçar nombroses connexions entre el desenvolupament de la teoria de la quantificació i la concepció model-teorètica de la lògica, per la qual cosa hauríem d'evitar una concepció esquizofrènica (en el sentit etimològic de la paraula: "ment dividida") de la història de la lògica contemporània que, encara avui en dia, semblen subscriure alguns autors. De la mateixa manera que hom pot afirmar, sens cap mena de dubte, que els conceptes bàsics de la moderna concepció model-teorètica de la lògica són els conceptes de sistema formal i interpretació -i el conceptes relacionats amb aquest com ara els de validesa i conseqüència lògica-, hom pot afirmar també que el concepte fonamental de la moderna *teoria de la quantificació* és el de *quantificador* o, més explícitament, els conceptes de *quantificador* i d'*abast* del quantificador. Ara bé, tal com hem argumentat en la nostra exposició, Frege és l'únic lògic de l'època que té un concepte (sintàctic i semàntic) precís de quantificador i que fou capaç de desenvolupar una notació en la qual l'abast del quantificador restava sempre complement especificat i permetia, doncs, expressar els diferents tipus de quantificació (múltiple, aniuada, etc) d'una forma clara i precisa. Aquests conceptes són tan bàsics que ens oblidem sovint que no hi ha un únic concepte de quantificador o d'abast dels quantificadors, com no hi ha tampoc una única teoria de la quantificació. D'acord amb Van Heijenoort, en efecte, la teoria de la quantificació és una "família de sistemes formals" entre els membres de la qual s'inclouen els *sistemes axiomàtics* o *à la Hilbert*, la *teoria de la quantificació* de *Herbrand*, el *càlcul de seqüents* de *Gentzen* i la *deducció natural.*[1] Hintikka ha assenyalat ensems tres concepcions o interpretacions dels quantificadors: La interpretació dels quantificadors com a *predicats d'ordre superior*, la interpretació *substitucional* dels quantificadors i la interpretació dels quantificadors com a *funcions d'elecció*.[2] Doncs bé, tal com hem explicat abans, la primera de les interpretacions anteriors té els seus orígens en Frege i avui en dia ha estat sistematitzada i desenvolupada per l'anomenada teoria dels *quantificadors generalitzats* [*generalized quantifiers*], que està en l'origen de l'estudi de les anomenades *lògiques abstractes* i té una importància fonamental per a les recerques actuals de la *lingüística teòrica*. Cal remarcar també que aquesta teoria i, en general, la lògica de primer ordre, s'ha desenvolupat normalment en el marc del que podríem anomenar la semàntica model-teorètica clàssica, és a dir, una semàntica de tipus conjuntista i amb les definicions de veritat o satisfacció i conseqüència lògica que Tarski precisà, per primera vegada en la història, en els articles "Der Wahreitsbegriff in der formalisierten Sprachen" ["El concepte de veritat en els llenguatges formalitzats "] (*1935*) i "Über den Begriff der logischen Folgerung" ["Sobre el concepte de conseqüència lògica"] (*1936*). Ara bé, com és ben sabut, la definició tarskiana de veritat és essencialment una definició recursiva, en la qual la veritat d'un enunciat complex es defineix a partir de la veritat dels constituents més simples, per la qual cosa pressuposa d'una forma òbvia el *principi de composicionalitat* per al significat de Frege (*Cf. supra*, cap. V, § 7). En aquest context, és important remarcar de nou que la definició semàntica de *Grundgesetze* dels quantificadors com a conceptes de segon ordre és clarament una anticipació de la definició tarskiana de la veritat d'un enunciat quantificacional en una estructura, encara que la definició de Frege és diferent de la de Tarski en un aspecte essencial i és que, en el cas de Frege, hem de parlar de veritat en *l*'univers, i no en l'univers d'una estructura, com en el cas de Tarski.

Tal com hem vist abans, Van Heijenoort i Goldfarb coincideixen en afirmar que les primeres qüestions semàntiques es formulen en el si de la tradició algèbrica de Peirce, Schröder i Löwenheim, però són poc concrets a l'hora d'especificar quines han estat les contribucions efectives dels dos primers al desenvolupament de la lògica contemporània i la

1 *Cf. Van Heijenoort 1976*, 7.
2 *Cf. Hintikka 1994*, 113-15.

concepció model teorètica dominant avui en dia. Així, pel que fa a Peirce, Van Heijenoort li atribueix "el concepte de validesa per a la lògica proposicional i la introducció dels signes Σ i Π", mentre que Goldfarb només esmenta que Schröder s'hauria basat "en el treball anterior de Peirce" per escriure el tercer volum de *Vorlesungen über die Algebra der Logik.* Però, tal com hem vist abans, les contribucions de Peirce són més nombroses que les esmentades per Van Heijenoort i la seva importància com a lògic està molt més enllà de ser un mer predecessor de Schröder en el desenvolupament de la teoria de relacions. Tal com hem explicat abans, en efecte, Peirce introduí en el seu famós article "On the Algebra of Logic" de 1885 els elements bàsics de la notació moderna per als enunciats quantificacionals i els trets essencials de la moderna interpretació model-teorètica d'aquesta mena d'enunciats: la noció d'univers, els signes per als quantificadors, constants de predicat i relació, variables, etc. En aquest sentit, doncs, en Peirce no trobem solament, com afirma Van Heijenoort, la definició correcta de validesa per al càlcul proposicional, sinó que hi trobem també els elements essencials de la idea bàsica i informal que subjau a la *definició model-teorètica moderna de veritat -en una estructura- dels enunciats quantificacionals*. A més, tal com hem dit abans, Peirce especificà també algunes regles de transformació i reducció dels enunciats quantificacionals, emprà les formes prenexes en lògica de primer ordre i separà la lògica proposicional de la lògica de primer ordre i, aquesta última, de la lògica de segon ordre. D'una altra banda, per valorar la influència de Peirce en el posterior desenvolupament de la lògica contemporània no solament ens hem de fixar en les contribucions d'aquest autor a la lògica quantificacional pròpiament dita, sinó que també ens hem de fixar en les contribucions que aquest autor realitzà en el camp de la lògica algèbrica i en els problemes que deixà plantejats en aquest camp, que tenen sempre un clar regust model-teorètic. Entre aquests problemes cal esmentar primer de tot, la *tesi de reducció* que Peirce plantejà, per primera vegada, en el seu article de 1870 sobre la lògica de relatius. Tal com hem dit abans, aquesta tesi o conjectura té com a conseqüència que el desenvolupament efectiu de l'àlgebra de relatius només requereixi tres tipus de termes relatius: monàdics, diàdics i triàdics. Amb tot, com ja sabem, Schröder només desenvoluparà al tercer volum de *Vorlesungen über die Algebra der Logik* el que ell anomena *l'àlgebra de relatius binaris* o, com en deia Peirce, *l'àlgebra de relacions diàdiques* (*Cf. supra*, cap. III, § 6). Per tant, una justificació teòrica de la manera de procedir de Schröder requeria demostrar que els relatius d'aritat ≥ 3 eren reductibles als relatius binaris. Doncs bé, això és el que farà Löwenheim en el seu article "Über Möglichkeiten im Relativkalkül" de 1915. El teorema 6 d'aquest article enuncia, en efecte, que *tota equació de relatiu o equació de primer ordre és equivalent a una de binària* i, per tant, la reducció del càlcul de relatius d'ordre superior al càlcul de relatius binaris (*Cf. supra*, cap. VIII, § 1). Com ja hem dit, només aquest teorema mereix l'atenció de Löwenheim, la qual cosa mostra fins quin punt Löwenheim estava immers en el programa de recerca iniciat per Peirce i Schröder. Un altre problema que interessà especialment a Peirce fou la expressió dels enunciats universals i particulars, fins al punt que Peirce veia la lògica de relatius essencialment com un mitjà per representar raonaments que inclouen enunciats quantificats existencialment o universalment. El mateix Peirce s'ocupà en el seu article "The Logic of Relatives" de 1883 de demostrar com poden expressar-se en el marc de l'àlgebra de relacions que acaba d'exposar els diferents tipus d'enunciats quantificacionals que el seu deixeble O. H. Mitchell havia distingit en l'article "On a New Algebra of Logic" (*Cf. supra*, cap. II, § 8). L'àlgebra de relacions exposada per Peirce en l'article de 1883 fou desenvolupada sistemàticament per Schröder, el qual dedicà la major part del seu esforç intel·lectual a l'estudi d'aquesta. El motiu era que Schröder considerava que la matemàtica era una branca de la lògica i que tots els seus conceptes podien expressar-se en termes d'un pocs conceptes bàsics pertanyents al càlcul o àlgebra de relatius. D'aquí la rellevància que Schröder atorgà al procés de *condensanció*, gràcies al qual, segons aquest autor, tota fórmula de la lògica de relatius es podia transformar en una fórmula del càlcul de relatius. Per a Schröder *condensar* una expressió o equació en la qual hi figuren coeficients de relatiu i quantificació sobre individus significava transformar-la en una fórmula lògicament equivalent en la qual només hi figuren relatius, les sis operacions sobre relatius (les tres operacions idèntiques $+$, $.$, $-$ i les tres de relatiu: $\dagger$, $;$, $\smile$) i quantificació sobre relatius (*Cf. supra*, cap. III, § 11). Per a Löwenheim, en canvi, *condensar* significarà transformar una expressió o equació de primer ordre en una equació del càlcul de relatius, és a dir, en una equació entre relatius en la qual només hi figuren relatius, les sis operacions sobre relatius i cap tipus de quantificació (*Cf. supra*, cap. VII, § 2). Doncs bé, com ja sabem, el teorema amb el qual s'enceta el segon paràgraf de l'article de Löwenheim de 1915, enuncia el resultat de Korselt segons el qual *hi ha equacions no condensables i, per tant, hi ha també expressions de primer ordre no condensables*. A tal efecte, Löwenheim posa com exemple les equacions $\sum_{h,i,j,k} 0'_{hijk} = 0$ o 1 i $\sum_{h,i,j,k,l} 0'_{hijkl} = 0$ o 1. Tal com assenyala Löwenheim, les dues primeres equacions anteriors són vàlides respectivament només quan el domini té com a màxim tres elements i quan el domini té, com a mínim, quatre elements. Löwenheim esbossa llavors una demostració completa del teorema i dóna alguns exemples més de equacions de primer ordre que són o no són vàlides només en determinats dominis finits d'individus. Això porta Löwenheim a la consideració de les *equacions de primer ordre* [*Zählgleichungen*] que no són universalment vàlides però, en canvi, són vàlides en qualsevol domini finit. Löwenheim enuncia llavors el seu famós teorema segons el qual una equació d'aquesta mena ja no és satisfeta en un domini pensable numerable (*Cf. supra*, cap. VII, § 2). Així doncs, el problema inicialment plantejat per Peirce porta, a través de Schröder i Korselt, a la noció d'un *enunciat de primer ordre* [*Zählausdrück*] vàlid en un domini i al primer plantejament de qüestions model-teorètiques en relació a aquesta mena d'enunciats. Cal notar també que el resultat de Korselt recollit per Löwenheim en el seu article de 1915 fou generalitzat per Tarski en el seu article de 1941 (*Cf. supra*, cap. III, § 13). Com ja sabem, Tarski atribueix en aquest article a Peirce la introducció i precisió dels conceptes fonamentals de la teoria de relacions i formulació de les seves lleis fonamentals. El nostre estudi ha confirmat sobradament aquesta opinió de Tarski i, en definitiva, la importància de les contribucions de Peirce a la lògica algèbrica i, en general, a la lògica contemporània.

Un altra qüestió que cal remarcar també, per tal de valorar adequadament les contribucions de Peirce al desenvolupament de la lògica contemporània, és la seva influència en la teoria de jocs contemporània i el que Hintikka anomena la interpretació dels quantificadors com a *funcions d'elecció*. En aquest sentit, cal observar primer de tot que, si bé la interpretació dels quantificadors com a predicats d'ordre superior, ha estat històricament la primera en aparèixer de la mà de Frege i segueix tenint avui en dia un gran predicament a través de la teoria dels quantificadors generalitzats, la seva preeminència no ha estat tan absoluta com hom podria suposar. Goldfarb ha assenyalat, per exemple, que "la connexió entre els quantificadors i les funcions d'elecció o, més precisament, entre la dependència quantificacional i les funcions d'elecció, constitueix el punt essencial de com els lògics clàssics dels anys vint veieren la naturalesa de la quantificació",[1] és a dir, de com interpretaren Skolem i Hilbert els quantificadors. La interpretació dels quantificadors com a funcions d'elecció està implícita, en efecte, en les *funcions de Skolem* i el *calculus-epsilon* de Hilbert i es pot retrotreure al *mètode de desenvolupament* emprat per Schröder i Löwenheim per donar resposta al problema del canvi d'ordre dels quantificadors. Ara bé, tal com hem vist en la nostra exposició, aquest problema és esmentat per primera vegada per Peirce, el qual insisteix sovint en què, encara que $\Sigma_i \Pi_j x_{ij}$ implica lògicament $\Pi_j \Sigma_i x_{ij}$, el recíproc no és cert. Com ja sabem, Schröder descobrirà un *mètode de desenvolupament* que el permetrà

[1] *Goldfarb 1979*, 357.

traslladar sempre un signe Π a l'esquerra d'un signe Σ i viceversa. El canvi d'ordre dels quantificadors juga un paper essencial en el procediment emprat per Löwenheim per obtenir, a partir d'una fórmula qualsevol de primer ordre, una altra fórmula en una certa forma normal, a partir de la qual Löwenheim demostra el seu famós teorema sobre la satisfactibilitat de les fórmules de primer ordre (*Cf. supra*, cap. VII, § 3). Per la seva part, Skolem reconeixerà en la introducció al seu conegut article de 1920, en el qual ofereix una nova demostració del teorema de Löwenheim, que un dels seus objectius és cercar una demostració alternativa a la de Löwenheim, que eviti el *mètode de desenvolupament* de Schröder, emprat per Löwenheim per demostrar el seu teorema (*Cf. supra*, cap. VII, § 5). A tal efecte, Skolem introduí l'anomenat avui en dia procés de skolemització i les funcions de Skolem. En qualsevol cas, tal com hem explicat en la nostra exposició, està clar que el mètode de desenvolupament de Schröder i Löwenheim i l'ús que en ell fan aquests autors dels subíndexs dobles es pot considerar una prefiguració del procés de skolemització i de la introducció de les funcions de Skolem (*Cf. supra*, cap. VII, § 7), per la qual cosa el problema plantejat per Peirce del canvi d'ordre dels quantificadors hauria portat, a través del mètode de desenvolupament de Schröder i Löwenheim, al procés de skolemització i la introducció de les funcions de Skolem. Per un altre costat, si bé és cert que les semàntiques de tipus conjuntista han estat les més importants al llarg del segle XX, no és menys cert que també s'han desenvolupat altres semàntiques com, per exemple, la semàntica basada en la teoria de jocs de Von Neumann, desenvolupada fonamentalment per Hintikka i que es pot retrotreure a la *semiòtica* de Peirce -encara que no n'hi cap traça en la seva obra lògica pròpiament dita (*Cf. supra*, cap. II, § 14). De fet, quan parlem de la concepció semàntica o model-teorètica de la lògica predominant avui en dia, encara que hom pensi sobretot en les semàntiques conjuntistes [*set-theoretic semantics*], està clar que aquesta concepció no exclou altres semàntiques alternatives i que, per tant, dins d'aquesta concepció hi hem d'incloure també les semàntiques basades en la teoria de jocs [*game-theoretic semantics*]. Doncs bé, de la mateixa manera que la semàntica conjuntista ha anat de bracet històricament amb la interpretació dels quantificadors com a predicats d'ordre superior, la semàntica de la teoria de jocs és inseparable de la interpretació dels quantificadors com a funcions d'elecció (*Cf. supra*, cap. II, § 14). Com podem veure, doncs, les diferents interpretacions dels quantificadors estan estretament lligades amb la concepció semàntica a partir de la qual hom vegi la lògica quantificacional i, per tant, l'estudi de les contribucions dels diferents corrents i autors al desenvolupament de la moderna teoria de la quantificació està íntimament lligat a les contribucions d'aquests corrents i autors a la concepció model-teorètica de la lògica. Per això no ens ha d'estranyar que Frege i Peirce, que foren els dos primer autors que desenvoluparen la teoria de la quantificació, més o menys a la mateixa època i de forma completament independent, estiguin també en l'origen, d'una forma o altra i amb tots els matisos que s'hi vulguin afegir, de les diferents interpretacions dels quantificadors i de la moderna concepció model-teòretica o semàntica de la lògica predominants avui en dia. En el cas de Frege, com ja hem explicat abans, si bé és cert que la seva concepció de la lògica quantificacional és incompatible en alguns aspectes essencials amb la moderna concepció model-teorètica de la lògica, no és menys cert que altres aspectes d'aquesta concepció són ja presents en la seva obra, per exemple: la noció de sistema formal, la separació entre sintaxi i semàntica, el principi de composicionalitat per al significat o la mateixa definició dels quantificadors com a predicats d'ordre superior.

Pel que fa a Schröder, tal com hem vist abans, Goldfarb afirma primer de tot que en la seva obra "els quantificadors es defineixen com sumes o productes simplement infinits sobre individus o relacions" i que en ella no es "distingí acuradament" entre "la quantificació sobre els individus de la quantificació sobre relacions", distinció que caldria atribuir a Löwenheim i que hauria portat a aquesta a la noció d'enunciat de primer ordre. Però, tal com hem vist al llarg del nostre estudi, Schröder no solament interpretà els quantificadors algèbricament o sintàctica, sinó també semànticament o proposicional (*Cf. supra*, cap. III, § 5) i quan enuncia les regles bàsiques que regulen l'ús d'aquests operadors, ho fa en el marc d'una reflexió general sobre el paper que juguen aquests operador quan són interpretats semànticament (*Cf. supra*, cap. III, § 7). Per un altre costat, en contra del que afirma Goldfarb, Schröder distingí acuradament entre quantificació de primer ordre i quantificació de segon ordre (*Cf. supra*, cap. III, § 7), si bé no mostrà cap interès especial pels enunciats que contenen només el primer tipus de quantificació, donat el seu projecte *pasigràfic* de reducció de les matemàtiques al càlcul de relatius i el fet que en aquest era permissible la quantificació de segon ordre, però no la de primer ordre (*Cf. supra*, cap. III, § 12). Goldfarb assenyala, a més, que en l'obra de Schröder es recerca "el següent tipus de qüestió: donada una equació entre dues expressions del càlcul, pot satisfer-se aquesta equació en diferents dominis -això és hi ha relacions en el domini que facin aquesta equació vertadera?", però com ja hem explicat abans, aquest tipus de qüestió no és exactament el tipus de qüestió recercat per Schröder. Amb tot, des del nostre punt de vista, Goldfarb té raó en afirmar que en "l'àlgebra de la lògica de Schröder hi ha una constant confusió entre la interpretació de la mateixa en termes de la teoria de classes i la interpretació proposicional, tenint més pes al final la primera d'elles". Un exemple d'això és, en efecte, la interpretació algèbrica dels quantificadors i el fet que sigui sobre aquesta interpretació que Schröder justifiqui el seu mètode de desenvolupament. Tal com hem explicat abans, la influència del programa de recerca de Schröder és molt present encara en l'article de Löwenheim sobre el càlcul de relatius de 1915, la qual cosa fa que aquest autor no sigui capaç de copsar la importància del resultat sobre la satisfactibilitat de les fórmules de primer ordre que ha demostrat. La influència de Schröder també és manifesta en la interpretació algèbrica de les expressions del llenguatge i, en particular, dels enunciats quantificacionals. Per contra, tal com hem explicat abans, aquesta interpretació desapareix completament de l'article de Skolem de 1920 i s'obre pas d'una manera inexorable la interpretació proposicional o lògica. En definitiva, tal com hem dit abans, en l'obra de Skolem no només trobem una definició clara i precisa de la noció de fórmula de primer ordre, sinó també una interpretació de la lògica de primer ordre completament anàloga a la semàntica de tipus conjuntista predominant avui en dia. Van Heijenoort i Goldfarb tenen raó, en definitiva, en afirmar Skolem i Hilbert foren els dos agents principals que contribuïren a la demarcació de la lògica de primer ordre com un sistema lògic diferenciat de la lògica d'ordre superior i al desenvolupament de la concepció model-teorètica dominant avui en dia.

Tal com explicàvem en la Introducció, les valoracions de Van Heijenoort, Goldfarb i Hintikka sobre quines han estat les contribucions del corrent algèbric i logicista a la lògica contemporània han estat posades en qüestió, entre d'altres, per Anellis i Houser i Grattan-Guinness -encara que des de posicions diferents i, en molt d'aspectes, antagòniques. Grattan-Guinness és indiscutiblement un dels historiadors de les matemàtiques i la lògica més importants avui en dia, per la qual cosa centrarem la nostra anàlisi en les tesis defensades per aquest autor. Tal com dèiem en la Introducció, segons aquest autor, la tradició algèbrica de Boole, Peirce i Schröder hauria estat eclipsada o absorbida per la tradició lògico-matemàtica de Frege, Peano i Russell, jugant aquest últim autor un paper central en el desenvolupament de la lògica contemporània. El mateix Grattan-Guinness apunta en els articles i l'obra esmentats en la Introducció que la raó de l'eclipsi de la *lògica algèbrica* de Boole, Peirce i Schröder per part de la *lògica matemàtica* de Frege, Peano i Russell seria essencialment que la primera no va ser capaç de respondre a les creixents demandes de rigor provinents de l'anàlisi matemàtica (Cauchy, Weiertrass), que van portar als lògics matemàtics a la formalització (Peano) o reconstrucció lògica (Frege, Russell) d'aquesta branca de les matemàtiques, ni va saber integrar, degut a la manca de distinció entre les relacions de pertinença i inclusió, la *Mengenlehre* de Cantor, la qual ocupa, en canvi, un lloc central en la lògica matemàtica de Russell. En definitiva, tal com ha assenyalat Grattan-Guinness:

> La qüestió adreçada en la lògica matemàtica era més específica que la posada pels algebristes. No és difícil imaginar el lector de Peirce o Schröder d'aquell temps (i, de fet, de temps més recents), admirant la clarividència dels seus sistemes, però preocupat per saber quin és, en definitiva, el seu propòsit.[1]

La manca de distinció entre les relacions de pertinença i inclusió per part dels lògics de la tradició algèbrica i, en particular, per part de Schröder, ha estat documentada abastament en la nostra exposició (*Cf. supra*, cap. III, § 2). Tal com hem vist, aquesta manca de distinció portà a Schröder a desenvolupar una jerarquia de classes de tipus extensional basada en la relació part-tot i en la qual, com veié molt bé Frege, es negligeixen les diferències entre l'element i la classe unitària i es fa impossible la introducció de la classe buida (*Cf. supra*, cap. III, § 3). En aquest sentit, tal com ha observat Grattan-Guinness, es fa molt difícil imaginar una reconstrucció plausible de l'aritmètica o l'anàlisi en termes de la lògica o la integració en aquesta de la *Mengenlehre* de Cantor. És veritat que, tal com hem vist, Schröder abordà en el tercer volum d'"Algebra der Logik" la formalització ("schröderització", en paraules de Löwenheim) de la teoria de cadenes de Dedekind i que, en l'article "Über Pasigraphie" de 1898, dóna les definicions pasigràfiques d'alguns conceptes bàsics de la teoria de conjunts i l'aritmètica (*Cf. supra*, cap. III, § 12). Amb tot, és evident que les definicions d'aquests conceptes en termes del llenguatge del càlcul de relatius són molt artificioses i suposen una enorme pèrdua de temps perquè, tot comptat i debatut, només adquireixen un sentit clar quan hom les tradueix al llenguatge de primer ordre, és a dir, quan s'introdueix la quantificació sobre individus per especificar el significat de les operacions de relatius. Per això mateix, Schröder acompanya sovint les seves definicions pasigràfiques amb la traducció corresponent en termes de la lògica de primer i segon ordre i Peirce deixà d'interessar-se per la lògica algèbrica de relacions i centrà els seus esforços en l'estudi de la lògica quantificacional de primer i segon ordre. Amb tot, Peirce tampoc tenia un símbol específic per a la relació de pertinença, la qual identificava amb la relació d'*inherència* entre subjecte i predicat (*Cf. supra*, cap. II, § 11), ni tenia en perspectiva un projecte de reconstrucció lògica de les matemàtiques, degut a la particular visió de la relació entre lògica

[1] *Houser, Roberts i Van Evra (eds.) 1997*, 32.

i matemàtiques que havia heretat del seu pare, el matemàtic Benjamin Peirce. En canvi, Frege i Russell aplicaren la seva lògica matemàtica a la reconstrucció lògica de les matemàtiques, però amb una notable diferència: mentre que el sistema de notació emprat pel primer és de tipus bidimensional i força allunyat de la pràctica matemàtica de l'època, el sistema de notació del segon és unidimensional i està en íntima relació amb el llenguatge lògic emprat a l'època. De fet, com ja sabem, el sistema de notació emprat per Russell coincideix essencialment amb el de Peano i la seva escola, al qual Russell hi afegí una notació específica per a les relacions, donada la importància d'aquestes per a la reconstrucció lògica de les matemàtiques. D'aquesta manera, la lògica matemàtica de Russell incorpora la lògica de relacions de Peirce i Schröder, però deixant de banda les operacions de relatius que no juguen cap paper en la reconstrucció lògica de les matemàtiques -particularment, la suma relativa i, en menor grau, el producte relatiu. D'aquesta manera, el sistema lògic presentat per Russell a *Principia* s'assembla molt a una presentació moderna de la lògica quantificacional, tot i les restriccions tipològiques imposades per la teoria ramificada de tipus i el fet que Russell presenti, en contra de la pràctica habitual avui en dia, la lògica de classes i de relacions com a càlculs específics. Un dels grans avantatges de la notació de Peano-Russell és, tal com ha observat Grattan-Guinness, la presencia del símbol ε per denotar la relació de pertinença, car la distinció entre pertinença i inclusió i, en definitiva, entre element i conjunt o classe, permet a Russell "incorporar" la *Mengenlehre* de Cantor en la seva lògica matemàtica sense problemes. Cal remarcar, en aquest sentit, la gran diferència entre la notació de Russell i la de Frege, el qual empra el signe $\frown$ per denotar la relació que es dóna entre un objecte i l'extensió sota la qual aquest objecte queda subsumit (*Cf. supra*, cap. V, § 8). Així doncs, mentre que per Frege parlar de conjunts o classes pressuposa parlar sempre de conceptes i extensions, Russell -un cop rebutjat l'axioma de comprehensió per inconsistent i evitades les contradiccions de tipus extensional gràcies a la *no classes theory*- podrà desenvolupar la *Mengenlehre* de Cantor d'una forma completament moderna i, a partir d'ella, reduir les matemàtiques a la lògica.

Abans ens hem referit ja a aquesta qüestió i hem remarcat que l'adequació del sistema lògic de *Principia* per "digerir" la *Mengenlehre* de Cantor i, a partir d'ella, la teoria de nombres, és una de les raons principals que explica perquè molts d'autors adoptaren la teoria de tipus de Russell com a sistema formal de referència en les seves recerques sobre els fonaments de les matemàtiques. Tot això confirma, en bona mesura, el lloc central que Grattan-Guinness atribueix a la figura de Russell en el desenvolupament de la lògica contemporània. Amb tot, des del nostre punt de vista, caldria fer algunes matisacions importants respecte a algunes de les tesis col·laterals en què sustenta Grattan-Guinness la seva tesi. Per exemple, Grattan-Guinness ha observat en diversos indrets què els treballs de Frege no foren gaire influents (*Cf. Introducció*) i afirma en la seva monumental obra *The Search for Mathematical Roots, 1870-1940* (2000) que Frege fou molt poc llegit en el seu temps, sobretot abans que Russell li dediqués un apèndix a *Principles*, la qual cosa el porta a deixar de banda completament l'estudi d'aquest autor en l'obra esmentada.[1] Però, tal com hem vist en la nostra exposició, Frege fou llegit, entre d'altres, per Cantor, Dedekind, Schröder, Husserl, Peano i Hilbert, amb tots els quals mantingué polèmiques de considerable importància intel·lectual a través de ressenyes, intercanvi epistolar o referències creuades en les seves pròpies obres -recordem, a més, que fins i tot Zermelo, en les lliçons "Mathematische Logik" de 1908, emprà la notació lògica de Frege per tal d'axiomatitzar la lògica! Per tant, la imatge corrent avui en dia d'un Frege aïllat intel·lectualment, basada en els comentaris que fa Russell a *Principles* -que es presenta a si mateix com el descobridor de Frege- i la descripció que fa Carnap dels seus anys de maduresa, és més fictícia que no pas real i no resisteix una anàlisi històrica acurada dels fets. Per un altre costat, tal com havíem dit en la Introducció, hom pot considerar el desenvolupament de la lògica contemporània com una contribució exclusiva o quasi bé exclusiva dels *lògics matemàtics* -i, en particular, de Russell-, només si hom considera que la tradició algèbrica ha estat absorbida per la nova lògica matemàtica, de manera que vegi les contribucions de Löwenheim i Skolem com alienes al desenvolupament de la tradició algèbrica o, simplement, relegui les contribucions d'aquests autors al naixement de la lògica quantificacional i la teoria de models contemporànies a un segon pla en favor de les contribucions a les mateixes de Hilbert i la seva escola. Aquesta és essencialment la posició de Grattan-Guinness a *The Search for Mathematical Roots, 1870-1940*, en la qual tot i dedicar quasi bé el capítol segon sencer al desenvolupament de la lògica algèbrica de De Morgan (2.4), Boole (2.5) i els seus seguidors a Anglaterra (2.6) i un parell de seccions del capítol quart a la lògica algèbrica de Peirce (4.3) i Schröder (4.4), tan sols hi podem trobar una sola referència, de caràcter circumstancial, a Löwenheim (p. 176). Per un altre costat, Grattan-Guinness explica les contribucions de Löwenheim i Skolem en una subsecció del capítol vuitè (8.7.5 *Orders of lògic and models of set theory: Löwenheim and Skolem, 1915-1923*) de menys d'una pàgina, però dedica a Hilbert una secció sencera del capítol quart (4.7 *Hilbert: early proof and model theory*) i una

[1] *Cf. Grattan-Guinness 2000*, 558-59.

subsecció del capítol vuitè (8.7.4 *Hilbert's definitive 'metamathematics', 1917-1930*), a més de nombroses referències al llarg de tota l'obra. En definitiva, des del nostre punt de vista, la lògica contemporània és el resultat de la confluència de la tradició algèbrica de Boole, Peirce i Schröder, la tradició logicista de Frege i Russell (notablement influït per Peano), d'autors com ara Löwenheim i Skolem que continuaren el programa de recerca desenvolupat per Schröder a *Algebra der Logik* i, al mateix temps, foren capaços de reorganitzar-lo completament i plantejar en el seu marc alguns dels problemes semàntics més importants de la lògica contemporània i, finalment, dels autors pertanyents a l'escola de Hilbert, particularment el mateix Hilbert i Bernays, els quals presentaren la lògica de primer ordre com un sistema formal axiomàtic i plantejaren en el seu marc les principals qüestions metalògiques de la lògica contemporània. Així doncs, qualsevol estudi que vulgui recercar l'origen i desenvolupament de la lògica contemporània i la concepció semàntica sobre la mateixa dominant avui en dia ha de fer referència, de forma ineludible, als autors esmentats.

APÈNDIX

El sistema lògic de *Principia Mathematica*

En aquest apèndix exposarem, d'una forma esquemàtica, els axiomes i regles d'inferència de *Principia*. El nostre objectiu no és tant fer una anàlisi crítica del sistema lògic exposat per Russell i Whitehead a *Principia* com oferir al lector una guia ràpida que el permeti identificar les múltiples referències que fem al llarg de la nostra exposició als axiomes de *Principia*. En aquest sentit, per tal d'evitar les ambigüitats i redundàncies característics d'aquesta obra (Russell i Whitehead ofereixen, per exemple, tres formulacions diferents de la regla de *Modus Ponens*: $*1\cdot 1, *1\cdot 11$ i $*9.12$), la nostra formulació dels axiomes i regles d'inferència no coincideix sempre exactament amb la de *Principia*.

1. Alfabet

Signes lògics: $\vdash, \sim, \vee, \forall$ (a partir d'ells es defineixen $\wedge, \supset, \equiv, \exists$ de la forma habitual).
Variables: $p, q, r, \ldots$ (proposicionals); $x, y, z, \ldots$ (individuals), $\phi, \varphi, \ldots, f, g, \ldots$ (funcionals).

2. Regles d'inferència

Modus Ponens: $*1\cdot 1$. Si $\vdash p$ i $\vdash \cdot\, p \supset q$, llavors $\vdash q$
Regla de substitució per a les variables proposicionals i funcionals (no enunciada explícitament)
Generalització Universal: $*10\cdot 11$. Si $\vdash \phi y$, llavors $\vdash (x)\cdot \phi x$

3. Axiomes del càlcul proposicional

$*1\cdot 2.\ \vdash: p \vee p \cdot\!\supset\cdot\, p$ ("Taut.")
$*1\cdot 3.\ \vdash: q \cdot\!\supset\cdot\, p \vee q$ ("Add.")

$*1 \cdot 4.\ \vdash : p \vee q \,.\!\supset .\, q \vee p$ (“Perm.”)

$*1 \cdot 5.\ \vdash : p \vee (q \vee r) \,.\!\supset .\, q \vee (p \vee r)$ (“Assoc.”) (redundant, com demostrà Bernays)

$*1 \cdot 6.\ \vdash :.\, q \supset r \,.\!\supset : p \vee q \,.\!\supset .\, p \vee r$ (“Sum.”)

4. Axiomes del càlcul de predicats

$*10 \cdot 1.\ \vdash : (x) \,.\, \phi x \,.\!\supset .\, \phi y$

$*10 \cdot 12.\ \vdash :.\, (x) \,.\, p \vee \phi x \,.\!\supset : p \,.\vee .\, (x) \,.\, \phi x$

5. Axiomes de reductibilitat

$*12 \cdot 1.\ \vdash : (\exists f) : \phi x \,.\equiv_x .\, f!x$

$*12 \cdot 11.\ \vdash : (\exists f) : \phi(x,y) \,.\equiv_{x,y} .\, f!(x,y)$

6. Definició d’identitat

$*13 \cdot 01.\ x = y \,.\equiv : (\phi) : \phi!x \,.\supset .\, \phi!y$

7. Axioma multiplicatiu

$*88 \cdot 03.$ Mult ax $. = :.\, \kappa \in \mathrm{Cls\ ex}^2\ \mathrm{excl} \,.\supset_\kappa : (\exists \mu) : \alpha \in \kappa \,.\!\supset_\alpha .\, \mu \cap \alpha \in 1$

(“Si κ és una classe de classes mútuament exclusives i no nul·les, llavors hi ha almenys una classe μ que conté un i només un element de cada classe de κ”).

8. Axioma de l’infinit

$*120 \cdot 03.$ Infin ax $. = .\, \alpha \in \mathrm{Nc\ induct} \,.\supset_\alpha .\, \exists!\alpha$

(“Si α és un cardinal inductiu (finit), llavors hi ha almenys una classe (del tipus en qüestió) que té α termes”).

Referències bibliogràfiques

ANDRÉKA, Hajnal, MONK, James Donald i NÉMETI, István, (eds.)

1991 *Algebraic Logic, Prooceedings of the Conference in Budapest, 8-14 August, 1988.* Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai. Vol 54. North Holland, Amsterdam.

ANELLIS, Irving H. i HOUSER, Nathan

1991 "Nineteenth Century Roots of Algebraic Logic and Universal Algebra", a *Andréka, Monk i Nemeti (eds.) 1991*, 1-36.

ARISTÓTELES

1982 *Tratados de Lógica* (*Órganon*), vol. 1: Gredos (Biblioteca Clásica Gredos, 51), Madrid.

1988 *Tratados de Lógica* (*Órganon*), vol. 2: Gredos (Biblioteca Clásica Gredos, 115), Madrid.

ASPRAY, William i KITCHER, Philip, eds.

1988 *History and Philosophy of Modern Mathematics*. Minnesota Studies in the Philosophy of Science, vol. 11. University of Minnesota, Minneapolis.

BADESA, Calixto

1991 "El teorema de Löwenheim en el marco de la teoria de relativos", tesi doctoral presentada a la Universitat de Barcelona.

BALDWIN, James Mark, eds.

1901, 1905 *Dictionary of Philosophy and Psichology*, Mcmillan, New York (3 vols).

BARWISE J. i PERRY, J.

1975 "Semantic Innocence and Uncompromising Situations", a *Midwest Studies in Philosophy, vol VI: The Foundations of Analitic Philosophy*, editat per P. French, T. Uehling Jr. i H. K. Wettstein, 387-403, University of Minessota Press, Minessota; reproduït a *Martinich 1996*, 369-381.

BENACERRAF, Paul i PUTNAM, Hilary (*eds.*)

1964 *Philosophy of Mathematics: Selected Readings*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ (2a edició: 1983).

BERNAYS, Paul

1918 "Beiträge zur axiomatischen Behandlung des Logik.Kalküls", *Habilitationschrift*, Göttingen.

1926 "Axiomatische Untersuchung des Aussagen-Kalkuls der "Principia mathematica"", *Mathematische Zeitschrift*, 25, 305-20.

1935 "Hilberts Untersuchungen über die Grundlagen der Arithmetik", a *Hilbert 1932-35*, vol. 3, 196-216.

1976 "Review of E. Schröder, *Vorlesungen über die Algebra der Logik* (*exakte Logik*), vol. 1". *The Journal of Symbolic Logic*, 40, 609-614.

BETH, Evert W.

1968 *The Foundations of Mathematics*. Amsterdam, North Holland (Segona edició revisada).

BIRKHOFF, Garret

1984 *Lattice Theory*, *American Mathematical Society*, Colloquium publications, 25 (Tercera edició revisada).

BOLZANO, Bernard

1851 *Paradoxien des Unendlichen*, C. H. Reclam, Leipzig.

1955 Reedició de *Bolzano 1851*, F. Meiner, Hamburg.

1969- *Bernard Bolzano Gesamtausgabe*, editat per Eduard Winter *et alii*, Fromann, Stuttgart

BOOLE, George

1847 *The Mathematical Analysis of Logic*, *being an Essay towards a Calculus of Deductive Reasoning*, Cambridge; reproduït a *Boole 1916*, pp. 45-124.

1848 "The Calculus of Logic", *The Cambridge and Dublin mathematical Journal*, vol. 3, pp. 183-198; reproduït a *Boole 1916*, pp. 125-140.

1854 *An investigation of the Laws of Thought, on which are founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities*, Londres; reeditat per Dover, Nova York, 1958.

1916 *George Boole's Collected Logical Works*, Chicago-Londres, reeditat a Open Court, La Salle, 1952 (edició i introducció a càrrec de Rush Rhees). Conté, a banda dels escrits ja citats, els manuscrits "On the Mathematical Theory of Logic and on the Philosophical Interpretation of its Methods and Processes", escrit cap el 1855-1856 i reproduït parcialment (230-246) i "Logic and Reasoning", escrit després de 1855 (211-229).

BOOLOS, George

1985 "Reading the *Begriffschrift*", *Mind*, 94, 331-344; reproduït a *Demopoulos 1995*, pp.163-181.

1987 "The Consistency of Frege's *Foundations of Arithmetic*", a *On Being and saying: essays in honor of Richard Cartwright*, editat per J. J. Thomson, MIT Press, Cambridge, 3-20; reproduït a *Demopoulos 1995*, 211-233.

1990 "The Standard of Equality of Numbers", a *Meaning and method: Essays in honour of Hilary Putnam*, Cambridge University Press, 261-77; reproduït a *Demopoulos 1995*, 234-254.

BOYER, Carl B.

1992 *Historia de la matemática*, Alianza Universidad Textos, Madrid.

BRINK, Chris

1978 "On Peirce's Notation for the Logic of Relatives", *Transactions of the Charles S. Peirce Society*, 14, 285-304.

BROUWER, Luitzen Egbertus Jean

1908 "De onbetrouwbaarheid der logische principes. Tijdschrift voor wijsbegeerte", 2, 152-58; traduït a l'angles per Arend Heyting a *Brouwer 1975*, 107-11.

1975 *Collected works*, vol. 1 (editat per Arend Heyting), North Holland, Amsterdam.

BURRIS, Stanley i SANKAPPANAVAR, H. P.

1981 *A Course in Universal Algebra*. Springer, New York.

CANTOR, Georg

1883 "Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten", nº 5 ("Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitenlehre"), *Mathematische Annalen*, 21, 51-58 i 545-586; reeditat amb un nou prefaci i notes addcionals amb el títol *Grundlagen einer allgemeine Mannigfaltigkeitslehre, ein mathematisch-philosophischer Versuch in der Lehre des Unendlichen*, Leipzig, 1883; reimprès a *Cantor 1966*, 165-209.

1891 "Über eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre", *Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung* 1 (1890-1891), 75-78, reimprès a *Cantor 1966*, 278-281.

1895-1897 "Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre", *Mathematische Annalen*, 46 (1895), 481-512; 49 (1897), 207-246; reimprès a *Cantor 1966*, 282-356.

1932 *Gessammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts* (editat per E. Zermelo), Springer, Berlin.

1966 Reedició de *Cantor 1932*, G. Olms, Hidelsheim.

1991 *Georg Cantor: Briefe* (ed. H. Meshkowski i W. Nilson), Springer, Berlin/Heidelberg/New York.

CAVAILLÈS, Jean

1938 *Méthode axiomatique et formalisme. La Non-contradiction de l'arithmètique*, Hermann, Paris.

1962 *Philosophie mathématique*, Hermann, Paris.

COCHIARELLA, Nino B.

1989 "Russell's Theory of Logical Types and the Athomistic Hierarchy of Sentences", a *Savage i Anderson 1989*, 41-62.

COFFA, Alberto

1982 "Kant, Bolzano and the Emergence of Logicism", *The Journal for philosophy*, 74, 679-89; reproduït a *Demopoulos 1995*, 29-40.

COUTURAT, Louis

1901 *La Logique du Leibniz d'après des documents inedits*, Georg Olm, Hidelsheim (reedició: 1985).

CHURCH, Alonzo

1940 "A Formulation of the Simple Theory of Types", *Journal of Symbolic Logic*, 5, 56-68.

1956 *Introduction to Mathematical Logic*, vol. 1, Princeton University Press.

1976$_a$ "Schröders Anticipation of the Simple Theory of Types", *Erkenntnis*, 10, 407-411. Article presentat en el *Fith International Congress for the Unity of Science*, Cambridge, (Mass.), 1939, el qual havia de ser publicat en el *Journal of Unified Science* (*Erkenntnis*), 9, 149-152, però aquest volum no va arribar a aparèixer.

1976$_b$ "Comparison of Russell's Resolution of the Semantical Antinomies with that of Tarski", *Journal of Symbolic Logic*, 41,747-760.

DEDEKIND, Richard

1872 *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, Vieweg, Braunschweig; reproduït a *Dedekind 1932*, 315-334.

1888 *Was und was sollen die Zahlen?*, Vieweg, Braunschweig; reproduït a *Dedekind 1932*, 335-390.

1930-32 *Gesammelte mathematische Werke*, editat per R. Fricke, E. Noether i Ö. Ore, Vieweg, Brunswick, vol. 1: 1930, vol. 2: 1931, vol. 3: 1932.

1969 Reedició de *Dedekind 1930-32*, Chelsea Publishing Co., New York.

1979 *Les Nombres. Que sont-ils et à quoi servent-ils?*, *Analítica* 12-13, Bibliothèque d'Ornicar, Paris.

1998 *¿Qué són y para qué sirven los numeros? y otros escritos sobre los fundamentos de la matemática*, Alianza Universidad, Madrid.

DEMOPOULOS, William

1994 "Frege and the Rigorization of Analysis", *Journal of philosophical logic*, 23, 225-46. Reproduït a *Demopoulos 1995*, 68-88.

1995 *Frege's Philosophy of Mathematics* (*ed.*), Harvard University Press, Cambridge.

DE MORGAN, August

1846 "On the Syllogism, no. I. On the structure of the Syllogism, and of the Application of the Theory of Probabilities to Questions of Argument and Authority", *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, 1849, 8, 379-408; reproduït a *De Morgan 1966*, 1-21, traduït (parcialment) al francès a *Rivenc i Rouilhan 1992*, 33-35.

1850 "On the Syllogism, no. II, and on Logic in General", *Transactions of the Cambridge Philosophical Society* , 10, 173-230; reproduït a *De Morgan 1966*, 74-146.

1860 "On the Syllogism, no. IV, and of the Logic of Relations", *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, 1864, 10, 331-58; reproduït a *De Morgan 1966*, 208-246, traduït (parcialment) al francès a *Rivenc i Rouilhan 1992*, 35-49.

1966 *On the Syllogism and Other Writings*, Routledge i Kegan, London.

DILEO, Jeffrey R.

1997 "Charles Peirce's Theory of Proper Names", a *Houser, Roberts i Van Evra (eds.) 1997*, 574-594.

DIPERT, Randall R.

1981 "Peirce's Propositional Logic", *Review of Metaphysics*, 34, 569-595.

DIRICHLET, Peter Gustave Lejeune

1863 *Vorlesungen über Zahlentheorie*, Vieweg, Braunschweig, editat per R. Dedekind, (reeditat a 1871, 1879 i 1894 amb importants "suplements" escrits per Dedekind).

DREBEN, Burton i VAN HEIJENOORT, Jean

1986 "Introductory Note to *1929*, *1930* and *1930a*", a *Gödel 1986*, 44-59.

DRUCKER, Thomas (*ed.*)

1991 *Perspectives on the History of Mathematical Logic*, Birkhäuser, Boston.

DUGAC, Pierre

1976 *Richard Dedekind et les fondaments des mathématiques*, Vrin, Paris.

DUMMETT, Michael

1959 "Review of *Studies in Logic and Probability*, by George Boole", *The Journal of Symbolic Logic*, 24, 203-209.

1973 *Frege: Philosophy of Language*, Harper and Row, New York.

1981 *The Interpretation of Frege's Philosophy*, Duckworth, London.

1991 *Frege: Philosophy of Mathematics*, Harvard University Press, Cambridge.

EDWARDS, Harold M.

1983 "Dedekind's Invention of Ideals", *Bulletin of the London Mathematical Society*, 15, 8-17.

EHRLICH, Philip

1995 "Hahn's *Über die Nichtarchimedischen Grössensysteme* and the Development of the Modern Theory of Magnitudes and Numbers to Measure Them", a *Hintikka 1995* (*ed.*), pp. 165-213.

EHRLICH, Philip (*ed.*)

1994 *Real Numbers, Generalizations of the Reals, and Theories of Continua*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London (Synthese Lybrary, volum 242). Introducció general de l'editor: vii-xxxii.

EUKLID

1973 *Die Elemente*. Buch I-XIII, Wissenchaftliche Buchgesellschaft, Darmstad.

EWALD, William (*ed.*)

1996 *From Kant to Hilbert. A Source Book in the Foundations of Mathematics*, 2 vols, Clarendon Press, Oxford.

FAUVEL, J. & GRAY, J.J.

1987 *The History of Mathematics -A Reader*, Mac Millan Press, Houndsmill.

FERREIRÓS, J.

1999 *Labyrinth of Thought. A History of Set Theory and its Role in Modern Mathematics*. Birkhäuser, Basel/Boston/Berlin

2001 "The Road to Modern Logic -An Interpretation". *The Bulletin of Symbolic Logic*, 7, 441-484.

FISCH, M. i TURQUETTE, A.

1966 "Peirce's Triadic Logic", *Transactions of the Charles S. Peirce Society*, II, 71-85.

FRAENKEL, Abraham A. i BAR-HILLEL, Yehoshua

1958 *Foundations of Set Theory*, North-Holland, Amsterdam (2a edició revisada: 1984).

FREGE, Gottlob

1873 *Über eine geometrische Darstellung der imaginären Gebilde in der Ebene*, A. Neuenhann, Jena; reimprès a *Frege 1967*, 1-49.

1874 *Rechnungsmethoden, die sich auf eine Erweiterung des Grössenbegriffes gründen*, Friedrich Frommann, Jena; reimprès a *Frege 1967*, 50-84.

1879 *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*, Nebert, Halle a. S; reimprès a *Frege 1964*. Traduït a l'anglès a *Van Heijenoort 1967*, 5-82.

1879$_b$ "Anwendungen der Begriffschrift", *Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft* 13/Supplement II, 29-33; reimprès a *Frege 1964*, 89-93.

1880? "Boole rechnende Logik un die Begriffschrift", inèdit; reproduït a *Frege 1969*, 9-52.

1882$_a$ "Über die wissenchaftliche Berechtigung einer Begriffschrift", *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik*, 81, 48-56; reimprès a *Frege 1964*, 106-114.

1882$_b$ "Über den Zweck der Begriffschrift", Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft, 16/Supplement, 1-10, reimprès a *Frege 1964*, 97-106.

1882$_c$ "Booles logische Formelsprache und meine Begriffschrift", inèdit, reproduït a *Frege 1969*, 53-59.

1884 *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff den Zahl*, W. Koebner, Breslau; reeditat per Wissenchaftliche Buchgesselschat, Darmstadt i G. Olms, Hidelsheim, 1961. Edició bilingüe alemany-anglès a *Frege 1959*.

1891 "Funktion und Begriff", Hermann Pohle, Jena; reimprès a *Frege 1967*, 125-142.

1892 "Über Sinn und Bedeutung", *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik*, 100, 25-50; reimprès a *Frege 1967*, 143-162.

1892$_a$ "Rezension von: Georg Cantor, *Zur Lehre vom Transfiniten*: *Gesammelte Abhandlungen*", *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik*, 100, 269-272; reimprès a *Frege 1967*, 163-166.

1892$_b$ "Über Begriff und Gegenstand". *Vierteljahrschrift für wissenschaften Philosophie*, 16, 192-205; reimprès a *Frege 1967*, 167-178.

1892-1895 "Ausführungen über Sinn und Bedeutung", inèdit, reproduït a *Frege 1969*, 128-136.

1893 *Grundgesetze der Arithmetik, begriffsschriftlich abgeleitet*, vol 1, H. Pohle, Jena; reeditat a *Frege 1962*, vol. 1, 1-253.

1895 “Kritische Beleuchtung einiger Punkte in E. Schröders *Vorlesungen über die Algebra der Logik*”, *Archiv für systematische Philosophie*, I, 433-456; reimprès a *Frege 1967*, 193-210.

1897 “Logik”, inèdit; reproduït a *Frege 1969*, 139-161.

1899? “Über Euklidische Geometrie”, inèdit, reproduït a *Frege 1969*, 182-184.

1903 *Grundgesetze der Arithmetik, begriffsschriftlich abgeleitet*, vol. 2, H. Pohle, Jena, reeditat a *Frege 1962*, vol 2, 1-265.

1903$_b$ “Über die Grundlagen der Geometrie” (Primera sèrie), *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 12, 319-324 (Part I), 368-375 (Part II); reimprès a *Frege 1967*, 262-272.

1906 “Über die Grundlagen der Geometrie” (Segona sèrie), *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 15, 293-309 (Part I), 377-403 (Part II), 423-430 (Part III); reimprès a *Frege 1967*, 281-323.

1918 “Der Gedanke”, primera part de “Logische Untersuchungen”, inèdit. Reproduït a *Frege 1967*, 342-362.

1959 *The Foundations of Arithmetic. A logic-mathematical enquiry into the concept of number* (editat i traduït per J. L. Austin), Basil Blackwell, Oxford.

1962 *Grundgesetze der Arithmetik, begriffsschriftlich abgeleitet*, G. Olms, Hidelsheim.

1964 *Begriffsschrift und andere Aufsätze* (editat per I. Angelelli), G. Olms, Hidelsheim.

1967 *Kleine Schriften* (editat per I. Angelelli), Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt i G. Olms, Hidelsheim.

1971 *On the Foundations of Geometry and Formal Theories of Arithmetic*, traduït i amb una introducció de Eike-Henner W. Kluge, Yale University Press, New Haven/London.

1969 *Nachgelassene Schriften* (editat per H. Hermes, F. Kambartel i F. Kaubach), F. Meiner, Hamburg.

1976 *Wissenschaftlicher Briefwechsel* (editat per G. Gabriel, H. Hermes, F. Kambartel, C. Thiel i A. Veraart), F. Meiner, Hamburg.

1997 *The Frege Reader* (editat per Michael Beaney), Oxford: Blackwell.

FREUDENTHAL, H.

1981 “The Impact of von Staudt’s Foundations of Geometry”, a *Plaumann i Strambach 1981*, 401-425.

FRIEDMAN, Michael

1985 “Kant’s Theory of Geometry”, *Philosophical Review*, 94, 455-506.

GABBAY, D. i GUENTHNER, F. (*eds*.)

1983 *Handbook of Philosophical Logic*, *vol. I: Elements of Cassical Logic*, D. Reidel Publishing Company (Synthese Library, vol. 164), Dordrecht/Boston/Lancaster.

1989 *Handbook of Philosophical Logic*, *vol. IV: Topics in the Philosophy of Language*, D. Reidel Publishing Company (Synthese Library, vol. 167), Dordrecht/Boston/ Lancaster.

GIVANT, S. i ANDRÉKA, H.

2002 “Groups and Algebras of Binary Relations”, *The Bulletin of Symbolic Logic*, 8, 38-64.

GÖDEL, Kurt

1929 “Über die Vollstandigkeit des Logikkalküls”, tesi doctoral presentada a la universitat de Viena; traduïda a l’anglès a *Gödel 1986*, 60-101.

1930 “Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkälkuls”, *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 37, 349-360; traduït a l’angles a *Gödel 1986*, 102-122.

1931 “Über formal unentscheidbare Sätze der Principia mathematica und verwandter Systeme, I”. *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 38, 173-198; traduït a l’angles, amb una nota afegida per Gödel el 1965, a *Gödel 1986*, 144-95).

1944 “Russell’s Mathematical Logic”, a *Schlipp 1944*, 125-53; reimprès a *Gödel 1990*, 119-141.

1986-95 *Collected Works* (ed. S. Feferman, J. W. Dawson , Jr., S. C. Kleene., G. H. Moore, R. M. Solovay, J. Van Heijenoort), 3 vols, Oxford University Press, New York/Oxford.

1986 *Cf. Gödel 1986-95*, vol 1: *Publications 1929-1936*. Oxford University Press, New York i Clarendon Press, Oxford.

1990 *Cf. Gödel 1986-95*, vol. 2: *Publications 1938-1974*. Oxford University Press, New York/Oxford.

1995 *Cf. Gödel 1986-95* vol. 3: *Unpublished Essays and Lectures*, Oxford University Press, New York/Oxford.

GOLDFARB, Warren D.

1979 “Logic in the Twenties: The nature of The Quantifier”, *The Journal of Simbolic Logic*, 44, nº 3, 351-368.

1989 “Russell’s Reasons for Ramification”, a *Savage i Anderson 1989*, 24-40.

GOMEZ PIN, Victor

1998 *La tentación pitagórica: ambición filosófica y anclaje matemático*, Síntesis (Colección Hermeneia, 3), Madrid.

GRATTAN-GUINNESS, Ivor.

1972 "Bertrand Russell on His Paradox and the Multiplicative Axiom. An Unpublished Letter to Philip Jourdain", *Journal of Philosophical Logic*, 1, 103-10.

1977 *Dear Russell-Dear Jourdain. A Commentary on Russell's Logic, Based on His Correspondence with Philip B. Jourdain*, Duckworth, London.

1984 (*ed.*) *From the calculus to set theory: 1630-1910. An introductory history*, Duckworth, London.

1988 "Living Together and Living Apart: On the Interactions Between Mathematics and Logics from the French Revolution to the First World War", *South African Journal of Philosophy*, 7, 73-82.

1997 "Peirce Between Logic and Mathematics", a *Houser, Roberts i Van Evra* (*eds*.) *1997*, 23-42.

2000 *The Search for Mathematical Roots, 1870-1940. Logics, Set Theories and The Foundations of Mathematics from Cantor through Russell to Gödel*, Princeton University Press, Princeton/Oxford.

GRAY, Jeremy

1989 *Ideas of Space*. *Euclidean, Non-Euclidean and Relativistic*, 2a edició, Clarendon Press, Oxford.

GREGORY, Duncan Farquharson

1840 "On the real nature of symbolical algebra", *Transactions of the Royal Society of Edinburgh*, 14, 208-16; reproduït a *Ewald 1996*, vol 1, pp. 323-30.

HAILPERIN, Theodore

1976 *Boole's Logic and Probability*, North Holland, Amsterdam.

1984 "Boole's Abandoned Propositional Logic", *History and Philosophy of Logic*, 5, 39-48.

HALLET, Michael

1984 Cantorian set theory and "limitation of size", Clarendon Press, Oxford.

HAZEN, Allen

1983 "Predicative Logics", a *Gabbay i Guenthner 1983* (*eds*), pp. 331-407.

HECK, R. G., Jr.

1993 "The Development of Arithmetic in Frege's *Grundgesetze der Arithmetik"*, *The Journal of symbolic logic*, 58, 579-601; reproduït a *Demopoulos 1995*, 257-287.

HESSENBERG, Gerhard

1906 *Grundbegriffe der Mengenlehre*. Vandenhoeck und Ruprecht, Göttingen.

HILBERT, David

1899 *Grundlagen der Geometrie*, Leipzig.

1900a "Über den Zahlbegriff", *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 8, 180-194; traduït a l'anglès a *Ewald 1996*, 1092-1095.

1900b "Mathematische Probleme", conferència donada a l'"Internationaler Mathematiker Kongress zu Paris" i publicada a *Archiv für Mathematik und Physik*, 3. Reihe, Bd. 1, 44-63 i 213-237 (1901); reproduïda a *Hilbert 1965*, vol. 3, 290-329.

1904 "Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik", *Verhandlungen des Dritten Internationalen Mathematiker-Kongress in Heidelberg vom 8. bis 13. August 1904*, Teubner, Leipzig; traduït a l'anglès a *Van Heijenoort 1967*, 130-138.

1905 "Logische Principien des mathematischen Denkens", Vorlesung, ausgearbeitet von Ernst Hellinger, Sommer-Semester 1905. Manuscrit inèdit. Bibliothek, Mathematisches Institut, Universitat Göttingen.

1910 "Elemente und Prinzipien Fragen der Mathematik", Vorlesung, ausgearbeitet von Richard Courant, Sommer-Semester 1910. Manuscrit inèdit. Bibliothek, Mathematisches Institut, Universitat Göttingen.

1917 "Axiomatisches Denken", conferència donada a la "Schweizerischen mathematischen Gesellschaft" l'onze de setembre de 1917 i publicada a *Mathematische Annalen*, 78, 405-415 (1918); reproduïda a *Hilbert 1965*, vol 3, 146-156.

1917-18 "Prinzipien der Mathematik", Vorlesung, ausgearbeitet von Paul Bernays. Winter-Semester 1917-18. Mecanoscrit inèdit. Bibliothek, Mathematisches Institut, Universitat Göttingen.

1920-21 "Logik-Kalkül", Vorlesung, ausgearbeitet von Paul Bernays, Winter-Semester 1920. Mecanoscrit inèdit. Bibliothek, Mathematisches Institut, Universitat Göttingen.

1921-22 "Grundlagen der Mathematik", Vorlesung, ausgearbeitet von Paul Bernays, Winter-Semester 1921. Mecanoscrit inèdit. Bibliothek, Mathematisches Institut, Universitat Göttingen.

1922 "Neubegründung der Mathematik. Erste Mitteilung". *Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität*, Band I, 157-177; reproduït a *Hilbert 1965*, vol. 3, pp. 157-177.

1922a "Die logischen Grundlagen der Mathematik", *Mathematische Annalen*, 88 (1923), 151-165; reproduït a *Hilbert 1965*, vol. 3, 178-191.

1927 "Die Grundlagen der Mathematik", *Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität*, Band VI, 65-85; traduït a l'anglès a *Van Heijenoort 1967*, 464-479.

1932-35 *Gesammelte Abhandlungen*, 3 vols (1932, 1933, 1935) Berlin, Springer.

1956 *Grundlagen der Geometrie*. 8. Auflage, mit Revisionem und Ergänzungen von Paul Bernays, Teubner, Stuttgart.

1965 Reedició en tres volums de *Hilbert 1932-35*, Chelsea, New York.

HILBERT, David i ACKERMANN, W.

1928 *Grundzüge der theoretischen Logik*, Springer, Berlin (2a edició: 1938).

HILBERT, David i BERNAYS, Paul

1934 *Grundlagen der Mathematik* I, Springer, Berlin.

1939 *Grundlagen der Mathematik* II, Springer, Berlin.

1968 Reedició de *Hilbert i Bernays 1934*, Springer, Berlin/Heidelberg/New York.

1970 Reedició de *Hilbert i Bernays 1939*, Springer, Berlin/Heidelberg/New York.

HILPINEN, Risto

1982 "On C. S. Peirce's Theory of Propositions: Peirce as a Precursor of Game-Theoretical Semantics", *The Monist*, 65, 182-188.

HINTIKKA, Jaakko

1979 *Game-theoretical Semantics: Essays on Semantics*, Reidel (Synthese Language Library, 5), Dordrecht.

1988 "On the Development of the Model-Theoretic Viewpoint in Logical Theory", *Synthese,* 77, 1-36.

1994 "What is a Quantifier?" *Synthese*, 98, 113-129.

HINTIKKA, Jaakko (*ed.*)

1995 *From Dedekind to Gödel*, Kluwer Academic Publishers (Synthese Lybrary, volum 251), Dordrecht/Boston/London.

1979 *Game-theoretical Semantics: Essays on Semantics*, Reidel (Synthese Language Library, 5), Dordrecht.

HODGES, Wilfrid

1983 "Elementary Predicate Logic", a *Gabbay* i *Guenthner 1983*, 1-131.

HOOKWAY, Christopher

1985 *Peirce*, Routledge i Kegan Paul, London.

HOUSER, Nathan

1991 "Peirce and the Law of Distribution", a *Drucker 1991*, 10-32.

HOUSER, Nathan, ROBERTS, Don D. i VAN EVRA, James (eds.)

1997 *Studies in the Logic of Charles Sanders Peirce*, Indiana Universty Press, Bloomington i Indianapolis.

HUNTINGTON, Edward V.

1904 "Sets of independent postulates for the algebra of logic", *Transactions of the American Mathematical Society*, V, 288-309.

HUSSERL, Edmund

1891 "Besprechung von E. Schröder, *Vorlesungen über die Algebra der Logik* (*Exakte Logik*), I. Band", *Gottingsche gelehrte Anzeigen* 1891, 243-273; citat a partir de la reedició a *Husserliana*, XXII, M. Nijhoff, Den Haag/Boston/London, 1-43.

HYLTON, Peter

1980 "Russel's Substitutional Theory", *Synthese*, 45, 1-31.

1989 "The Significance of "On Denoting"", a *Savage i Anderson 1989*.

1990 *Russell, Idealism and the Emergence of Analytic Philosophy*, Clarendon Press, Oxford.

JEVONS, W. Stanley

1890 *Pure Logic and Other Minor Works*, Mac Millan and Co, London/New York.

KANT, Immanuel

1781 *Kritik der Reinen Vernunft*, J. F. Hartknoch, Riga. Segona edició de 1787. Reproduïda a *Kant 1968*.

1968 *Kants Werke*. Band III. *Kritik der Reinen Vernunft*. 2. Auflage 1787, Walter de Gruyter & Co, Berlin.

KITCHER, Philip

1998 "Mill, Mathematics and the Naturalist Tradition", a *Skorupski 1998*, 57-111.

KLEMKE, E. D. (*ed.*)

1968 *Essays on Frege*, Urbana, Chicago/London.

KLINE, M.

1972 *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford University Press, New York.

KNEALE, William i KNEALE, Martha

1962 *The Development of Logic*, Clarendon Press, Oxford.

LARGEAULT, Jean

1970 *Logique et Philosophie chez Frege*, Nauwelaerts, Paris/Louvaine.

LEBLANC, Hughes

1983 "Alternatives to Standard First Order Semantics", a *Gabbay* i *Guenthner 1983* (eds.), 189-274.

LEWIS, Charles Irving

1918 *A Survey of symbolic logic*. University of California, Berkeley; reeditat, amb l'omissió dels capítols V i VI a Dover, New York, 1960.

LINSKY, Bernard

1999 *Russell's Metaphysical Logic*, CSLI Publications, Stanford.

LÖWENHEIM, Leopold

1915 "Über Möglichkeiten im Relativkalkül", *Mathematische Annalen*, 76, 447-70; traduït a l'anglès per Stefan Bauer-Mengelberg a *Van Heijenoort 1967*, 228-51.

1940 "Einkleidung der Mathematik in Schröderschen Relativkalkül", *The Journal of Symbolic Logic*, 5, 1-15.

ŁUKASIEWICZ, Jan

1934 "Z historii logiki zdan´" Przeglad Filosoficzny 37, pp. 417-437, traducció alemanya realitzada per l'autor amb el títol "Zur Geschichte der Aussagenlogik", *Erkentniss*, 5, 1935, 111-131; reproduït a *Łukasiewicz 1970*.

1970 *Selected Works* (editat per L. Borkowski), North-Holland, Amsterdam.

MADDUX, Roger D.

1991 "The Origin of Relation Algebras in the Development and Axiomatization of the Calculus of Relations", *Studia Logica*, 50, 421-455.

MANCOSU, Paolo

1998 *From Brouwer to Hilbert. The Debate on the Foundations of Mathematics in the 1920s,* Oxford University Press, New York/Oxford.

MARTIN, Richard M.

1978 "Of Servants, Lovers, and Benefactors: Peirce's Algebra of Relatives in 1870", *Journal of Philosophical Logic*, 7, 27-48; reproduït a *Martin 1980*, 25-45.

1980 *Peirce's Logic of Relations and Other Studies*, Foris, Dordrecht.

MARTINICH, A. P.

1996 *The Philosophy of Language*, 3a edició, Oxford University Press, New York/Oxford.

MERRILL, Daniel D.

1990 *August De Morgan and The Logic of Relations*, Kluwer Academic Publishers (The New Synthese Historical Library, vol. 38), Dordrecht/Boston/London.

MICHAEL, Emily

1979a "A Note on Peirce on Boole's Algebra of Logic", *Notre Dame Journal of Formal Logic*, XX, nº 3, 636-638.

1979b "An Examination of the Influence of Boole's Algebra on Peirce's Developments in Logic", *Ibid.*, nº 4, 801-806.

MITCHELL, Oscar Howard

1883 "On a New Algebra of Logic", a *Peirce (ed.) 1883*, 72-106.

MOORE, Gregory

1980 "Beyond First-Order Logic: The Historical Interplay between Mathematical Logic and Axiomatic Set Theory", *History and Philosophy of Logic*, 1, 95-137.

1997 "Hilbert and the Emergence of Modern Mathematical Logic", *Theoria*, vol. 12, no 1, pp. 65-90.

PEACOCK, George

1830 *A Treatise on Algebra*, Deighton, Cambridge.

1842-45 *Treatise on Algebra*, 2 vols. (2a edició; la primera edició és *Peacock 1830*). Deighton, Cambridge (volum 1: *Arithmetical Algebra*; volum 2: *Symbolical Algebra*).

PEANO, Giuseppe

1889 *Arithmetices principia, novo methodo exposita*, Bocca, Torino; reproduït a *Peano 1958*, 20-55).

1891 "Recenzione: E. Schröder, Volesungen über die Algebra der Logik"; reproduït a *Peano 1958*, 115-121.

1894 *Notations de logique mathématique*. *Introduction au formulaire de mathématique*. Charles Guadagnini, Tori; reproduït a *Peano 1958,* 123-176.

1895-1908 *Formulaire de mathématiques*, 5 vols, Bocca, Torí.

1899 *Cf. Peano 1895-1908*, vol 2.

1901 *Cf. Peano 1895-1908*, vol 3.

1957-1959 *Opere Scelte*, Roma, Editione Cremonese, vol. 1 (1957), vol 2 (1958), vol. 3 (1959).

1958 *Cf. Peano 1957-1959*, vol 2.

PECKHAUS, Volker

1990 *Hilbertsprogramm und Kritische Philosophie. Das Göttinger Modell interdisziplinärer Zusammenarbeit zwischen Mathematik und Philosophie*, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen.

1994 "Logic in Transition: The Logical Calculi of Hilbert (1905) and Zermelo (1908)", a *Prawitz i Westerstål 1994*, 311-323.

PEIRCE, Charles Sanders

1867$_a$ "On an Improvement in Boole's Calculus of Logic", *Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences*, 7 (1868), 250-261; reproduït a CP 3.1-19 i W2: 12-23.

1867$_b$ "On the Natural Cassification of Arguments", *Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences*, 7 (1868), 261-287; reproduït a CP 2.461-514, W2: 23-48.

1867$_c$ "On a New List of Categories", *Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences*, 7 (1868), 287-298; reproduït a CP 1.287-99 i W2: 49-59.

1867$_d$ "Upon the Logic of Mathematics", *Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences*, 7 (1868), 402-412; reproduït a CP 3.20-44 i W2: 59-69.

1867$_e$ "Upon Logical Comprehension and Extension", *Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences*, 7 (1868), 416-32; reproduït a W2: 70-86.

1870 "Description of a Notation for the Logic of Relatives, Resulting from an Amplification of the Conceptions of Boole's Calculus of Logic", *Memoirs of the American Academy of Arts and Sciences*, 9, 317-318; reproduït a CP 3.45-149 i W2: 359-429.

1880 "On the Algebra of Logic", *American Journal of Mathematics*, 3, 15-57; reproduït a CP 3.154-251 i W4: 163-209.

1881 "On the Logic of Number", *American Journal of Mathematics*, 4, pp. 85-95; reproduït a CP 3.252-288 i W4: 299-309.

1882 "Brief Description of the Algebra of Relatives", publicat privadament a Baltimore; reproduït a CP 3.306-322 i W4: 328-333.

1883a "On a Limited Universe of Marks", inclòs com a "Note A" a *Peirce (ed.) 1883*, 182-186; reproduït a CP 2.517-531.

1883b "The Logic of Relatives", inclòs com a "Note B" a *Peirce (ed.) 1883*, 187-203; reproduït a CP 3.328-358 i W4: 453-466.

1885 "On the Algebra of Logic: A Contribution to the Philosophy of Notation", *American Journal of Mathematics*, 7, nº 2, 180-202; reproduït a CP 3.359-403 i W5: 162-190.

1892 "The Critic of Arguments", *The Open Court*, 6, 3391-3394; reproduït a CP 3.404-424.

1893 "The Essence of Reasoning", capítol 6 de "Grand Logic", reproduït a CP 4.21-79.

1896 "The Regenerated Logic", *The Monist*, 7, 19-40; reproduït a CP 3.425-455.

1897 "The Logic of Relatives", *The Monist*, 7, 161-207; reproduït a CP 3.456-552.

1902a "Logic (exact)", a *Baldwin 1901*, vol. 2, 23-27; reproduït parcialment a CP 3. 616-625.

1902b "The Simplest Mathematics", capítol 3 de "Minute Logic"; reproduït a CP 4.227-307.

1931-1958 *Collected Papers of Charles Sanders Peirce* (CP). Volums 1-6, editats per Ch. Hartshorne i P. Weis, Harvard University Press, Cambridge (Mass.). Volums 7-8, editats per Ch. Hartshorne, P. Weis A. W. Burks. Harvard University Press. Reeditats el 1967, Belknap Press, Cambridge (Mass.),.

1976 *The New Elements of Mathematics* (NE), editats per Carolyn Eisele. Mouton, Den Haag, 4 vols.

1982- *Writings of Charles S. Peirce: A Chronological Edition* (W). Editats per Max. H. Fisch, Edward C. Moore, *et al*. Bloomington, Indiana University Press.

PEIRCE, Charles Sanders (ed.)

1883 *Studies in Logic, By Members of the Johns Hopkins University*. Introducció de Ch. S. Peirce, Little, Brown & Co., Boston.

PLA i CARRERA, Josep

1993 "Dedekind y la teoria de conjuntos". *Modern Logic*, 3, no 3, 215-305.

PLAUMANN, Peter & STRAMBACH, Karl

1981 *Geometry -von Staudt's Point of View*, D. Reidel, Dordrecht.

POINCARÉ, Henrí

1905 "Les mathématiques et la logique", *Revue de métaphysique et de morale*, 13, 815-835; traduït a l'anglès a *Ewald 1996*, vol. 2, 1021-1038.

1906 "Les mathématiques et la logique", *Revue de métaphysique et de morale*, 14, 17-34 i 294-317; traduït a l'anglès a *Ewald 1996*, vol. 2, 1021-1038 i 1038-1052.

1908 *Sciencie et méthode*, Flammarion, Paris.

POST, Emil Leon

1921 "Introduction to a general theory of elementary propositions", *American Journal of Mathematics*, 43, 163-85; reproduït a *Van Heijenoort 1967*, pp. 264-83.

PRAWITZ, Dag i WESTERTÅL, Dag (*eds*.)

1994 *Logic and Philosophy of Science in Uppsala*, Kluwer Academic Publishers (Synthese Lybrary, vol. 236), Dordrecht/Boston/London.

PRIOR, Arthur N.

1955 *Formal Logic*, Clarendon Press, Oxford.

1958 "Peirce's Axioms for Propositional Logic", *Journal of Symbolic Logic*, 23, 135-136

1976 *Historia de la Logica*, Tecnos, Madrid.

QUINE, W. Van Orman

1936 "New Foundations for Mathematical Logic", *American Mathematical Monthly*, 44 (1937), pp. 70-80.

1950 *Methods of Logic*. Holt, Rinehart and Winston, New York.

1955 "On Frege's way out", *Mind* , 145-159, reproduït a *Klemke 1968*, 485-501.

1956 "Quantifiers and Propositional Attitudes", *The Journal of Philosophy*, 53, 177-187; reimprès a *Quine 1966*; reproduït a *Martinich 1996*, 330-336.

1963 *Set Theory and its Logic*, Harvard University Press, Cambridge (2a edició, 1969).

1966 *The Ways of Paradox and Other Essays*, Random House, New York (2a edició: 1976, Harvard University Press, Cambridge).

1966$_b$ *Selected Logic Papers*, Random House, New York.

1974 *Methods of Logic*. London: Routledge i Kegan Paul. 3a edició amb correccions i suplements de *Quine 1950*.

RAMSEY, Frank Plumpton

1925 "The Foundations of Mathematics", *Proceedings of the London Mathematical Society*, sèrie 2, 25 (1926), 338-384 (text llegit davant la *London Mathematical Society* el 1925); reimprès a *Ramsey 1978*, 152-212.

1926 "Mathematical Logic", *The Mathematical Gazette*, 13, 185-194 (text llegit davant la *British Association* el 1926); reimprès a *Ramsey 1978*, pp. 213-232.

1978 *Foundations. Essays in phylosophy, logic, mathematics and economics* (ed. D. H. Mellor), Routledge i Kegan Paul, London.

RICHARD, Jules

1905 "Les principes des mathématiques et le problème des ensembles", *Revue générale des sciencies pures et appliquées*, 16, 541.

RIVENC, François i ROUILHAN, Philippe de (eds.)

1992 *Logique et fondements des mathématiques*. Antologie (1850-1914), Payot, Paris.

ROSENFELD, B. A.

1988 *A History of Non-Euclidean Geometry. Evolution of the Concept of a Geometric Space*, Springer, New York/Berlin.

ROUILHAN, Philippe de

1996 *Russell et le cercle des paradoxes*, Presses universitaires de France, Paris.

RUSSELL, Bertrand

1900 *A Critical Exposition of the Philosophy of Leibniz*, Cambridge University Press.

1900-1901 "On The Logic of Relations with Applications to Artihmetic and the Theory of Series", esborrany de *Russell 1901*, reproduït a *Russell 1993*, Appendix **V. I**, pp. 590-612.

1901 "The Logic of Relations with Some Applications to the Theory of Series", a *Russell 1993*, **8**, pp. 314-349. Text original en anglès de l'article "Sur la logique des relations avec des applications à la théorie des séries", *Revue des mathématiques*, 7 (1901), 115-48, reproduït a *Russell 1993*, Appendix **V.2**, 613-627.

1902 Cartes del 16 i 24 de Juny a Frege, reproduïdes a *Frege 1976.*

1903 *The Principles of Mathematics*, vol. 1, Cambridge University Press; 2a edició, amb una nova introducció, 1937, Allen & Unwin.

1903_a "On The Meaning and Denotation of Phrases", manuscrit publicat per primera vegada a *Russell 1994*, **11**, 284-296.

1903_b "On Meaning and Denotation", manuscrit publicat per primera vegada a *Russell 1994*, **14**, 315-358.

1904 "On Functions, Classes and Relations", article inèdit publicat per primera vegada a *Russell 1994*, **5**, 86-95.

1905_a "On Fundamentals", manuscrit publicat per primera vegada a *Russell 1994*, **15**, 360-413

1905_b "On Denoting", *Mind*, 14, 479-493; reimprès a *Russell 1956*, *1973* i *1994,* **16**, 415-427.

1905$_c$ "On some Difficulties in the Theory of Transfinite Numbers and Order Types", *Proceedings of the London Mathematical Society*, sèrie 2, 4 (1906), 29-53 (text llegit el 1905 davant la *London Mahematical Society*; reimprès a *Russell 1973*).

1906$_a$ "The Theory of Implication", *American Journal of Mathematics*, V, 28, 159-202.

1906$_b$ "On the Substitutional Theory of Classes and Relations', publicat a *Russell 1973* (text llegit davant la *London Mathematical Society* el 1906).

1906$_c$ "Les paradoxes de la logique", *Revue de métaphysique et de morale*, 14, 627-650 (versió original anglesa: 'On "Insolubilia" and their Solution by Simbolic Logic', publicat a *Russell 1973*).

1907 "On the Nature of Truth", *Proceedings of the Aristotelian Society*, 7 (1906-07), 28-49.

1908 "Mathematical Logic as based on the Theory of Types", *The American Journal of Mathematics*, 30, 222-262; reproduït a *Russell 1956*, 59-102 i *Van Heijenoort 1967*, 152-182.

1910 *Cf. Whitehead i Russell 1910-13*, vol 1.

1910$_a$ "On the Nature of Truth and Falsehood", a *Philosophical Essays*, Longmans Green, London1910 (2a ed: 1966, G. Allen & Unwin, London); reproduït a *Russell 1992*, **13**, 116-124.

1910$_b$ "La théorie des types logiques", *Revue de métaphysique et de morale*, 18, 263-301 (versió original anglesa: 'The Theory of Logical Types', publicat a *Russell 1973* i *Russell 1992*, **1**, 4-31*)*.

1911$_a$ "L'importance philosophique de la logistique", *Revue de métaphysique et de morale*, 19, 282-91; traduït a l'anglès per P. E. B, Jourdain com "The Philosophical Importance of Mathematical Logic", *The Monist*, 23, 481-93 (1913). Reimprès a *Russell 1973* i *Russell 1992*, **2**, 33-40.

1911$_b$ "Knowledge by Acquaintance and Knowledge by Description", *Proceedings of the Aristotelian Society*, 11, 108-28; reimprès a *Russell 1992*, **15**, 148-161.

1912 *Cf. Whitehead i Russell 1910-13*, vol 2.

1912$_a$ "On the Relations of Universals and Particulars", *Proceedings of the Aristotelian Society*, 12, 1-24, reimprès a *Russell 1992*, **16**, 167-182.

1913 Cf. *Whitehead i Russell 1910-13*, vol 3.

1919 *Introduction to Mathematical Philosophy*, G. Allen & Unwin, London; reimprès per Routledge, London/New York, 1993.

1956 *Logic and Knowledge* (editat per R. C. Marsh), G. Allen & Unwin, London.

1967-69 The Autobiography of Bertrand Russell, G. Allen & Unwin, London vol. 1 (*1872-1914*): 1967; vol. 2 (*1914-1944*): 1968; vol. 3 (*1944-1967*): 1969.

1973 *Essays in Analysis* (ed. D. Lackey), G. Allen & Unwin, London.

1992 *The Collected Papers of Bertrand Russell, vol. 6: Logical and Philosophical Papers 1909-13* (editat per J. G. Slater i Bernd Frohmann), Routledge, London/New York.

1993 *The Collected Papers of Bertrand Russell*, *vol.* 3: *Towards* "*The Principles* of *Mathematics*", *1900-02* (editat per G. H. Moore), Routledge, London/New York.

1994 *The Collected Papers of Bertrand Russell*, vol. 4: *Foundations of Logic* (editat per A. Urquhart), Routledge, London/New York.

SCANLAN, Michael

1989 "Beltrami's Model and the Independence of the Parallel Postulate", *History and Philosophy of Logic*, 9, 13-34.

SCHILPP, Paul Arthur (ed.)

1944 *The Philosophy of Bertrand Russell*, Northwestern University, Everton i Chicago (5a ed., Open Court, La Salle, 1989).

SCHMIDT, Arnold

1933 "Zu Hilberts Grundlegung der Geometrie", a *Hilbert 1932-35*, vol. 2, 404-14.

SCHRÖDER, Ernst

1877 *Der Operationskreis des Logikkalkuls*, B. G. Teubner, Leipzig.

1879 "Anzeige von Gottlob Freges Begriffschrift", *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, 25, 81-94, traduït a l'anglès a *Frege 1972*, 218-232.

1898$_a$ "Über zwei Definitionen der Endlichkeit und G. Cantor'sche Sätze", *Nova Acta Academiae Caesareae Leopoldina-Carolinae Germanicae Naturae Curiosorum*, 71, 303-362.

1898$_b$ "Über Pasigraphie, ihren gegenwärtigen Stand und die pasigrapische Bewegung in Italien", *Verhandlungen des ersten internationalen Mathematiker Kongresses in Zürich*, 147-162, Leipzig; reimpressió de 1967, Nendel/Liechtenstein.

1890-1905 *Vorlesungen über die Algebra der Logik* (*Exakte Logik*), Teubner, Leipzig (vol 1: 1890, vol. 2.1: 1891, vol 3: 1895, vol 2.2: 1905).

1966 Reedició de *Schröder 1890-1905*. Chelsea, Bronx, Nova York.

SCHROEDER-HEISTER, Peter

1987 "A Model-Theoretic Reconstruction of Frege's Permutation Argument", *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 28, 69-79.

SHIELDS, Paul

1997 "Peirce's Axiomatization of Arithmetic", a *Houser*, *Roberts* i *Van Evra* (*eds.*) *1997*, 43-52.

SIEG, Wilfried

1988 "Hilbert's Program Sixty Years Later", *Journal of Symbolic Logic*, 53, 338-48.

1999 "Hibert's Programs: 1917-1922", *The Bulletin of Symbolic Logic*, 5, 1-44.

SKOLEM, Thoralf

1913 "On the Structure of Groups in the Identity Calculus" (Títol original: "Om konstituisjonen av den identiske kalkyls grupper"), *Proceedings of the 3rd Scand. Math. Congress*, Kristiania, 1913, 149-63; reproduït a *Skolem 1970*, 53-65.

1919 "Untersuchungen über die Axiome des Klassenkalküls und über Produktations- und Summationsprobleme, welche gewisse Klassen von Aussagen betreffen", *Skrifter, Videnskabsakademiet i Kristiania*, no. 3; reproduït a *Skolem 1970*, 67-101.

1920 "Logisch-kombinatorische Untersuchungen über die Erfülbarkeit oder Beweisbarkeit mathematischer Sätze nebst einem Theoreme über dichte Mengen", *Videnskapsselskapets skrifter, I. Mathematisk-naturvidenskabelig klasse*, no. 4, pp. 1-36; reproduït a *Skolem 1970*, 103-36; traduït a l'anglès a *Van Heijenoort 1967*, 254-63.

1922 "Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begründung der Mengenlehre", *Matematikerkongressen i Helsingfors den 4-7 Juli 1922, Den femte skandinaviska matematikerkongressen, Redogörelse*. Akademiska Bokhandeln: Helsinki, 217-32; reproduït a *Skolem 1970*, 137-52; traduït a l'anglès a *Van Heijenoort 1967*, 291-301.

1941 "Sur la porté du théoréme de Löwenheim-Skolem", *Les Entretiens de Zürich*, 6-9 de Desembre de 1938, Zürich 1941, 25-47, discussion: 47-52; reproduït a *Skolem 1970*, 455-82.

1970 *Selected Works in Logic*, editat per J. E. Fenstad i amb una introducció de Hao Wang. Universitetsforlaget, Oslo.

SKORUPSKI, John (*ed.*)

1998 *The Cambridge Companion to Mill*, Cambridge University Press, Cambridge.

STEVENSON, Leslie

1973 "Frege's Two Definitions of Quantification", *Philosophical Quarterly*, 23, 207-223.

SZABO, M. E.

1969 *The Collected Papers of Gerhard Gentzen*, North Holland, Amsterdam.

TARSKI, Alfred

1935 “Der Wahreitsbegriff in der formalisierten Sprachen”, *Studia Philosophica*, I, 261-405; traduït a l’anglès a *Tarski 1956*, 152-278.

1936 “Über den Begriff der logischen Folgerung”, *Actes du Congrès International de Philosophie Scientifique*, Paris, vol. 7, 1-11; traduït a l’anglès a *Tarski 1956*, 409-420.

1941 “ On the Calculus of Relations”, *The Journal of Symbolic Logic*, 6, 73-89.

1956 *Logic, Semantics, Metamathematics. Papers from 1923 to 1938*, Oxford Universiy Press. (2a ed. Hackett, Indianapolis, 1990).

TAYLOR, Kenneth

1998 *Truth and Meaning. An Introduction to the Philosophy of Language*, Blacwell, Oxford.

THIBAUD, Pierre

1975 *La Logique de Charles Sanders Peirce: de l’algebre aux graphes*, Université de Provence, Aix-en-Provence.

1982 *La Lógica de Charles Sanders Peirce. Del Algebra a los Gráficos.* Traducció al castellà de *Thibaud 1975*, Paraninfo, Madrid.

THIEL, Christian

1975 “Leben und Werk Leopold Löwenheim (1878-1957). Teil I: Biographisches und Bibliographisches”, *Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 77, 1-9.

1977 “Leopold Löwenheim: Life, work, and early influence”, *Logic Colloquium 76*, 235-252, North Holland, Amsterdam.

1978 “Reflexiones en el centenario del nacimiento de Leopold Löwenheim”. *Teorema*, VIII, 3-4, 263-267.

TORRETI, Roberto

1984 *Philosophy of Geometry from Riemann to Poincaré*, D. Reidel, Dordrecht.

VAN EVRA, James W.

1977 “A reassessment of George Boole’s Theory of Logic”, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, XVIII, 3, 363-377.

VAN HEIJENOORT, Jean

1967 *From Frege to Gödel. A source book in Mathematical Logic, 1879-1931*, Harvard University Press, Cambridge (Mass.); 3a edició corregida 1977.

1967a "Logic as Calculus and Logic as Language", *Boston studies in the philosophy of Science*, 3, 440-46.

1976 *El desarrollo de la teoría de la quantificación*, UNAM, México DF.

1977 "Set-Theoretics Semantics", a *Logic Colloquium 76*, North Holland, Amsterdam.

VAUGHT, Robert Lawson

1974 "Model theory before 1945", *Proceedings fo Symposia in Pure Mathematics*, XXV, 153-172, American Mathematical Society, Providence.

VUILLEMIN, Jules

1968 *Leçons sur la première philosophie de Russell*, Librairie Armand Colin, Paris.

WANG, Hao

1957 "The Axiomatization of Arithmetic", *Journal of Symbolic Logic*, 22, 145-158.

WEBB, Judson

1995 "Tracking Contradictions in Geometry: The Idea of a Model from Kant to Hilbert", a *Hintikka 1995* (*ed*.), 1-20.

WESTERSTÅHL, Dag

1989 "Quantifiers in Formal and Natural Languages", a *Gabbay* i *Guenthner 1989*, 1-131.

WEYL, Hermann

1918 *Das Kontinuum*, Veit, Leipzig.

WIENER, Norbert

1914 "A Simplification of the Logic of Relations", *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 17, 387-390; reproduït a *Van Heijenoort 1967*, 224-227.

WILSON, Mark

1992 "Frege: The Royal Road from Geometry", *Nous* 26, 149-180, reimprès a *Demopoulos 1995*, 108-159.

WHITEHEAD, Alfred North i RUSSELL, Bertrand

1910-13 *Principia Mathematica*, vol. 1 (1910); vol. 2 (1912), vol. 3 (1913): Cambridge University Press. 2a edició, amb una nova introducció i apèndix, 1925 (vol 1), vols 2 i 3 (1927).

ZACH, Richard

1999 "Completeness before Post: Bernays, Hilbert, and the Development of Propositional Logic", *The Bulletin of Symbolic Logic*, 5, 331-366.

ŻARNECKA-BIAŁY, Ewa

1973 "Negation in Ch. S. Peirce's Propositional Logic", *Reports on Mathematical Logic*, 1, 99-101.

ZERMELO, Ernst

1902 "Mündliche Mitteilung an Husserl", *Husserliana*, XXII, Beilage II, 399, M. Nijhoff, Den Haag/Boston/London,

1904 "Beweis, dass jede Menge wohlgeordnet werden kann", *Mathematische Annalen*, 59, 514-516; traduït a l'anglès a *Van Heijenoort 1967*, 139-141.

1908a "Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung", *ibid.*, 65, 107-128; traduït a l'anglès a *Van Heijenoort 1967*, 183-198.

1908b "Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre, I", *ibid.*, 261-81; traduït a l'anglès a *Van Heijenoort 1967*, 200-215.