

**UNIVERSIDAD DE SANTANDER**  
**ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE INGENIEROS**  
**DE CAMINOS CANALES Y PUERTOS**  
**DEPARTAMENTO DE INGENIERIA GEOGRAFICA Y TECNICAS**  
**DE EXPRESION GRAFICA**

**TESIS DOCTORAL**

**POSIBILIDAD DE OBTENCION DE DISTINTAS**  
**EQUIPARTICIONES Y COMPACTACIONES DEL**  
**ESPACIO CON POLIEDROS CONVEXOS CUYAS**  
**CARAS NO SON POLIGONOS REGULARES**

**Presentada por: JESUS OTI VELASCO**  
**Dirigida por : RICARDO QUINCE SALAS**

**SANTANDER, SEPTIEMBRE 1983**

**UNIVERSIDAD DE SANTANDER**

**ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE INGENIEROS**

**DE CAMINOS CANALES Y PUERTOS**

**DEPARTAMENTO DE INGENIERIA GEOGRAFICA Y TECNICAS  
DE EXPRESION GRAFICA**

**TESIS DOCTORAL**

**POSIBILIDAD DE OBTENCION DE DISTINTAS  
EQUIPARTICIONES Y COMPACTACIONES DEL  
ESPACIO CON POLIEDROS CONVEXOS CUYAS  
CARAS NO SON POLIGONOS REGULARES**

**Presentada por: JESUS OTI VELASCO**

**Dirigida por : RICARDO QUINCE SALAS**

**SANTANDER, SEPTIEMBRE 1983**

A MIS PADRES

UNIVERSIDAD DE SANTANDER

ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS

Reunido el Tribunal integrado por los abajo firmantes  
en el día de la fecha, para juzgar la Tesis Doctoral de  
D. JESUS OTI VELASCO

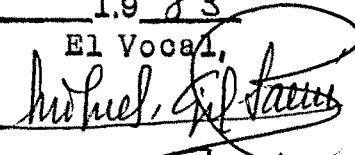
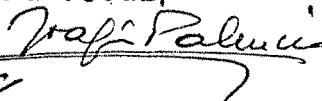
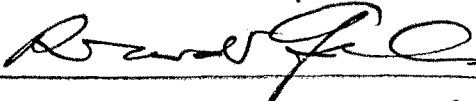
titulada "POSIBILIDAD DE OBTENCION DE DISTINTAS  
EQUIPARTICIONES Y COMPOSICIONES DEL ESPACIO CON  
POLIGONOS CONVEXOS CUYAS CORAS SON POLIGONOS REGULARES  
acordó otorgarle la calificación de SOBRESALIENTE  
"CUM LAUDE"

Santander, 28 de septiembre 1983

El Vocal,

El Vocal,

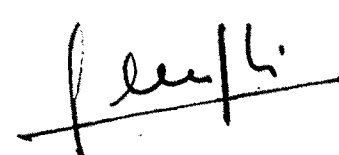
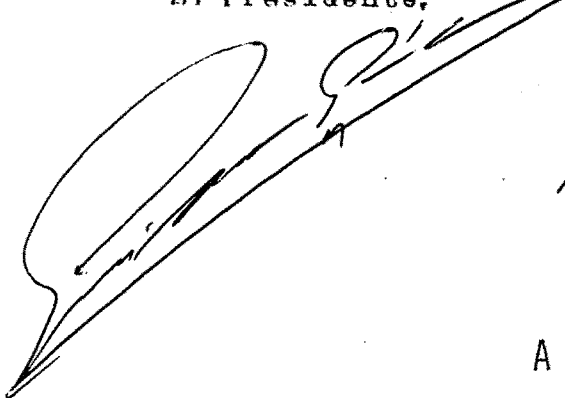
El Vocal,



El Presidente,

El Secretario,

El Doctorado,



AGRADECIMIENTOS

## RECONOCIMIENTOS Y AGRADECIMIENTOS

Sería realmente difícil reflejar a todas las personas que influyen en una determinada investigación; ya que, una correcta aplicación de la ley de causalidad nos haría retroceder en el tiempo, ampliando considerablemente el número de personas que debieran figurar en la lista de agradecimientos.

Pero si nos ceñimos al tiempo que ha durado la gestación de este trabajo, las personas que tuvieron una participación más directa, fueron las siguientes:

- Profesor Ricardo Quince Salas, mi director de Tesis Doctoral, y sin cuyo interés, conocimiento, del tema, experiencia, colaboración y apoyo, no se hubiera iniciado, ni desarrollado ni finalizado este trabajo.
- Profesor Angel Badiola de Miguel, quién colaboró en el desarrollo de la Tesis, aportando muchas ideas y su ayuda personal en todo momento.
- Gonzalo Poo Puig, quién realizó los programas de ordenador para la resolución de los ejemplos del Capítulo III; así como otros programas que no han tenido cabida en la presente Tesis Doctoral.

Asimismo, quiero expresar mi agradecimiento a Víctor Vázquez García, por los magníficos dibujos realizados; a Jesús A. Arriaga Velasco por la mecanografía del texto; y por fin, a José Luis Aja Canales y José Rodríguez Fernández, por la labor de publicación.

El tiempo requerido para la realización de este trabajo, fue hurtado a mi mujer Ana y a mis hijos Héctor y - Martín.

A todos ellos mi más profundo y sincero agradecimiento.

RESUMEN

## R E S U M E N

Al proponernos conseguir el objetivo que dá nombre a la presente Tesis Doctoral ("Posibilidad de obtención de distintas equiparticiones y compactaciones del espacio con poliedros convexos cuyas caras no son poliedros regulares"), se nos planteó el problema de elegir, entre los infinitos poliedros posibles, en qué familia de ellos debíamos polarizar nuestro estudio.

En virtud de que los cinco cuerpos topológicamente distintos que producen la equipartición del espacio pertenecen a la familia de poliedros denominados zonoedros equiláteros, fue en este tipo de sólidos donde centramos nuestra atención.

Era sabido que dados  $3, 4, \dots, n$  segmentos iguales concurrentes, no siendo coplanarios tres de ellos, se pueden obtener poliedros con simetría central de  $n(n-1)$  caras rombo. Sin embargo, no existen fórmulas que relacionen entre sí los ángulos de las caras rombo que se obtienen. Un primer trabajo fue pues, el de obtener estas relaciones y las condiciones de convexidad en función de los ángulos de las caras.

Halladas estas relaciones, concentramos nuestro estudio en los rombododecaedros (con seis caras diferentes), ya

que, como se verá en el Capítulo II, cualquier otro zonoe-dro procedente de una estrella no singular formada por  $n$  segmentos iguales, se puede reducir al estudio de  $\binom{n-2}{2}$  -rombododecaedros.

Llegados a este punto se planteó la duda de si estos rombododecaedros con seis caras diferentes, eran el resultado de una afinidad espacial del rombododecaedro equifacial, llegando a la conclusión de que en general, no todo rombododecaedro puede provenir del rombododecaedro equifacial - por medio de una afinidad espacial, aunque es posible pasar por medio de acortamientos y/o alargamientos de los segmentos de la estrella a un cuerpo formado por caras paralelo-gramos, afín del rombododecaedro equifacial. Esto último, nos permite asegurar que todo rombododecaedro equiparte el espacio.

Dado que todo rombododecaedro rellena el espacio y - tiene elipsoide inscrito, se planteó el problema recíproco de obtener el rombododecaedro que permita el empaquetamiento de elipsoides; en general, no siendo cada uno de ellos tangente a otros doce; y en el caso de que los semiejes cumplan determinadas condiciones, será posible disponerles, tanto igualmente orientados, como desigualmente orientados.

Tomando como punto de partida las relaciones halladas entre las caras de un rombododecaedro, podemos obtener los



sólidos singulares como casos particulares de las familias generales, exigiendo, o bien caras cuadrado, caras iguales, etc. Este estudio nos permite asegurar que solamente existen dos rombododecaedros con todas sus caras iguales.

Por último, conocidos, clasificados y definidos analíticamente los zonoedros equiláteros, teníamos suficiente apoyo matemático para abordar el tema de la equipartición del espacio que, por una parte, quedaba asegurada con un rombododecaedro cualquiera (\*) y que, además, permite generalizar el problema a combinaciones cuaternarias y quinarias de cuerpos que rellenan el espacio, lo que supone una novedad, además de otras combinaciones unitarias, binarias y ternarias también originales.

Las conclusiones que se derivan de la presente investigación, se expresan en el Capítulo VIII.

(\*) Significa ésto, que, partiendo de cinco rombos distintos de igual arista, es posible obtener mediante las fórmulas que se ofrecen, el sexto rombo con el que completar las seis caras distintas posibles de un rombododecaedro, con el que siempre podremos equipartir el espacio.

INDICE

# INDICE

	N° PAG
INTRODUCCION	1
Justificación	2
Objetivos	6
Organización y descripción del trabajo	6
CAPITULO I.- EVOLUCION HISTORICA DEL CONOCIMIENT <u>O</u> TO Y ESTUDIO DE LOS POLIEDROS.	9
1.1.- Definiciones	10
1.2.- Poliedros regulares convexos	16
1.3.- Poliedros arquimedianos o equiángulos con vexos.	21
1.4.- Poliedros equifaciales	25
1.5.- Poliedros uniformes	46
1.6.- Poliedros convexos con caras regulares	56
1.7.- Zonoedros	60
1.8.- Distintas formas de rellenar el espacio y la equipartición del mismo	64
1.9.- Conclusiones	70
CAPITULO II.- OBTENCION DE LAS RELACIONES QUE - LIGAN ENTRE SI A LOS $\binom{N}{2}$ ANGULOS QUE INTERVIENEN EN LOS ZONOEDROS EQUILATEROS PROCEDENTES DE ESTRE <u>LLAS</u> NO-SINGULARES FORMADAS POR N	

	N° PAG
SEGMENTOS IGUALES, PARA VALORES DE N=3, N=4, N=5, N=6	71
2.1.- Planteamiento general del problema	72
2.2.- Relaciones que ligan entre sí a los ángu- los que intervienen en los zonoedros equi- láteros, procedentes de estrellas no sin- gulares, formadas por tres segmentos igua- les	73
2.3.- Relaciones que ligan entre sí a los seis ángulos que intervienen en los zonoedros equiláteros, procedentes de estrellas no singulares, formadas por cuatro segmentos iguales.	73
2.4.- Relaciones que ligan entre sí a los diez ángulos que intervienen en los zonoedros equiláteros, procedentes de estrellas no singulares, formadas por cinco segmentos iguales.	79
2.5.- Relaciones que ligan entre sí a los quin- ce ángulos que intervienen en los zono- edros equiláteros, procedentes de estre- llas no singulares, formadas por seis - segmentos iguales.	86
2.5.1.- Triakontaedros topológicamente - iguales al triakontaedro polar	87
2.5.2.- Triakontaedros topológicamente - iguales al triakontaedro equifa- cial	96

2.6.- Zonoedros equiláteros procedentes de estrellas no singulares formadas por n segmentos iguales	97
2.7.- Conclusiones	101
CAPITULO III.- SOBRE LA EQUIVALENCIA Y CON-	
VEXIDAD DE LOS ZONOEDROS, ASI	
COMO DE LA OBTENCION DE LOS	
MISMOS A PARTIR DE LAS CARAS	
NO RELACIONADAS ENTRE SI	
	102
3.1.- Equivalencia entre zonoedros	103
3.1.1.- Rombododecaedros equivalentes	104
3.1.2.- Romboicosaedros equivalentes	106
3.1.3.- Triakontaedros equivalentes	108
3.1.3.1.- Triakontaedros topo- lógicamente iguales al triakontaedro polar	109
3.1.3.2.- Triakontaedros topo- lógicamente iguales al triakontaedro equi- facial	111
3.2.- Convexidad de los zonoedros. Condiciones necesarias y suficientes que definen la convexidad de un rombododecaedro	117
3.2.1.- Condiciones necesarias de conve- xidad	118

3.2.2.- Otras condiciones exigibles para asegurar la convexidad de un rombododecaedro	122
3.3.- Obtención de los zonoedros equiláteros a partir de las caras no relacionadas entre sí	130
3.3.1.- Obtención de un rombododecaedro a partir de cinco de sus ángulos	130
3.3.2.- Obtención de un romboicosaedro a partir de siete de sus ángulos no relacionados entre sí	132
3.3.3.- Obtención de un triakontaedro topológicamente igual al triakontaedro polar a partir de nueve de sus ángulos, no relacionados entre sí	132
3.3.4.- Obtención de un triakontaedro topológicamente igual al triakontaedro equifacial, a partir de nueve de sus ángulos no relacionados entre sí	133
3.4.- Conclusiones	134

CAPITULO IV.- PROPIEDADES COMUNES A TODOS LOS ROMBODODECAEDROS: LA EQUIPARTICION DEL ESPACIO, EL ELIPSOIDE

INSCRITO Y EL EMPAQUETAMIENTO DE CUALQUIER ELIPSOIDE, SEA O NO DE REVOLUCION, POR MEDIO DE UN DETERMINADO ROMBODODECAEDRO	135
4.1.- La equipartición del espacio	136
4.2.- Condiciones que deben cumplir los rom- bododecaedros de caras cualesquiera sus- ceptibles de rellenar el espacio sin - exigir que estén igualmente orientados	138
4.3.- Obtención del elipsoide inscrito a un rombododecaedro dado de caras cuales- quiera y del rombododecaedro circunscri- to a un elipsoide dado	142
4.3.1.- Obtención del elipsoide inscri- to a un rombododecaedro dado	144
4.3.2.- Empaquetamiento de cualquier elip- soide, sea o no de revolución, - por medio de un determiando rom- bododecaedro	149
4.3.2.1.- El elipsoide no es de revolución	150
4.3.2.2.- El elipsoide es de re- volución	154
4.4.- Empaquetamiento de elipsoides en rombodo- decaedros que sean susceptibles de relle- nar el espacio desigualmente orientados	155

	N° PAG	
4.5.- Conclusiones	159	
CAPITULO V.- DONDE SE OBTIENEN LOS SIETE ROM-		
BODODECAEDROS CONVEXOS CON DOS TI-		
POS DE CARA ROMBO, SIENDO UNA DE		
ELLAS CUADRADO, COMO CASO PARTICU-		
LAR DE UN ESTUDIO EXHAUSTIVO SO-		
BRE LAS RELACIONES QUE LIGAN ENTRE		
SI A LOS ANGULOS DE UN ROMBODE-		
CAEDRO CON DOS TIPOS DE CARA ROMBO		160
5.1.- Planteamiento general del problema	161	
5.2.- Estudio detallado de cada uno de los posibles 144 rombododecaedros con dos tipos de caras rombo	164	
5.2.1.- Rombododecaedros tipo		
$\alpha_1 \quad \alpha_1 \quad \alpha_1 \quad \alpha_1$		
$\alpha_{1,3} \quad \alpha_{2,4}$	164	
5.2.2.- Rombododecaedros tipo		
$\alpha_1 \quad \alpha_1 \quad \alpha_1 \quad \alpha_2$		
$\alpha_{1,3} \quad \alpha_{2,4}$	170	
5.2.3.- Rombododecaedros tipo		
$\alpha_1 \quad \alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_2$		
$\alpha_{1,3} \quad \alpha_{2,4}$	178	
5.2.4.- Rombododecaedros tipo		
$\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_1 \quad \alpha_2$		
$\alpha_{1,3} \quad \alpha_{2,4}$	186	



	N° PAG
5.2.5.- Rombododecaedros tipo	
$\alpha_1$ $\alpha_1$ $\alpha_1$ $\beta_1$	
$\alpha_{1,3}$ $\alpha_{2,4}$	192
5.2.6.- Rombododecaedros tipo	
$\alpha_1$ $\alpha_1$ $\beta_1$ $\alpha_2$	
$\alpha_{1,3}$ $\alpha_{2,4}$	198
5.2.7.- Rombododecaedros tipo	
$\alpha_1$ $\beta_1$ $\alpha_1$ $\alpha_2$	
$\alpha_{1,3}$ $\alpha_{2,4}$	209
5.2.8.- Rombododecaedros tipo	
$\alpha_1$ $\beta_1$ $\alpha_2$ $\alpha_2$	
$\alpha_{1,3}$ $\alpha_{2,4}$	216
5.2.9.- Rombododecaedros tipo	
$\alpha_1$ $\alpha_2$ $\beta_1$ $\alpha_2$	
$\alpha_{1,3}$ $\alpha_{2,4}$	225
5.2.10.- Resumen	234
5.2.11.- Rombododecaedros convexos con dos tipos de caras rombo, sien <u>do</u> do una de ellas cuadrado	235
5.3.- Generalización del problema	237
5.3.1.- Romboicosaedros con dos tipos de caras rombo, siendo una de ellas cuadrado	237
5.3.2.- Triakontaedros con dos tipos de cara rombo, siendo una de ellas cuadrado	239

	N° PAG.
5.4.- Conclusiones	239
CAPITULO VI.- ZONOEDROS EQUILATEROS CON UN -	
SOLO TIPO DE CARA ROMBO PROCE-	
DENTES DE ESTRELLAS NO SINGULA	
RES FORMADOS POR N SEGMENTOS	
IGUALES PARA VALORES DE N=3, -	
N=4, N=5, N= 6	
	241
6.1.- Planteamiento general del problema	242
6.2.- Rombohexaedros con un sólo tipo de ca-	
ra rombo	242
6.3.- Rombododecaedros con un sólo tipo de -	
cara rombo	243
6.4.- Romboicosaedros con un sólo tipo de ca	
ra rombo	244
6.5.- Triakontaedros con un sólo tipo de ca-	
ra rombo	246
6.6.- Relaciones mutuas entre los zonoedros	
equiláteros con un sólo tipo de cara -	
rombo	246
6.7.- Angulos diedros de los poliedros con -	
caras rombo cuyas diagonales estén en	
relación áurea	247
6.7.1.- Angulos diedros del R 1	247
6.7.2.- Angulos diedros del R 2	248

6.8.- Angulos sólidos de los poliedros con ca- ras rombo cuyas diagonales estén en re- lación áurea	249
6.8.1.- Angulos sólidos del R 1	249
6.8.2.- Angulos Sólidos del R 2	250
6.9.- El R 3 como poliedro capaz de producir la equipartición del espacio, así como de rellenar el espacio quedando desigual- mente orientado	252
6.10.- Sobre la imposibilidad de obtener el R 3 como sólido afin del rombododecaedro, lo que hace aún más destacable la importan- cia de este poliedro	254
6.11.- Conclusiones	255

CAPITULO VII.- DONDE SE ESTUDIAN DIVERSAS COM- BINACIONES QUE PERMITEN RELLE- NAR EL ESPACIO CON LOS UNICOS - CINCO POLIEDROS CONVEXOS DE CA- RAS ROMBO CUYAS DIAGONALES ESTAN EN RELACION AUREA	256
---	-----

7.1.- Planteamiento del problema	257
7.2.- Combinaciones a estudiar	257
7.3.- Descomposición de los siete posibles ti- pos de vértice que se pueden formar ha- ciendo concurrir caras rombo con diagona- les en relación áurea en otros vértices	

	N° PAG
en que se dé la misma circunstancia	259
7.4.- Descomposición de los poliedros con <u>ca</u> ras rombo cuyas diagonales están en <u>re</u> lación áurea en otros poliedros con la misma particularidad	260
7.5.- Consideraciones a tener en cuenta para el estudio de las combinaciones que <u>re</u> llenar espacio	261
7.6.- Casos estudiados de las 31 combinacio- nes posibles	262
7.6.1.- Combinaciones unitarias	262
7.6.2.- Combinaciones binarias	263
7.6.3.- Combinaciones ternarias	264
7.6.4.- Combinaciones cuaternarias	265
7.6.5.- Combinaciones quinquenarias	266
7.6.6.- Resumen	266
7.7.- Combinaciones no estudiadas	267
7.8.- Conclusiones	268
CAPITULO VIII.- RESUMEN DE CONCLUSIONES Y NUE VAS LINEAS DE INVESTIGACION	269
8.1.- Conclusiones	270
8.2.- Nuevas líneas de investigación	274
LIBROS Y TRABAJOS CONSULTADOS	276

## INTRODUCCION

## I N T R O D U C C I O N

### JUSTIFICACION

Los poliedros son coexistentes con el concepto de espacio. Instantes posteriores a la gran explosión del Universo, cuatro puntos no coplanarios definían un tetraedro, - ocho simétricamente dispuestos podían ser vértices de un - cubo, etc.

La Naturaleza no ha sido ajena a estas formas y ha - dotado, tanto a los minerales como a algunos seres vivos, de estructuras poliédricas.

Es bien conocido que el sulfantimoniato sódico, la - sal común y el alumbre de cromo, cristalizan según tetraedros cubos y octaedros, respectivamente. Los esqueletos silíceos de los radiolarios (seres unicelulares) *Circogonia* - icosahedra y *Circorrhagma* dodecahedra, estudiados por Haeckel, son ejemplos de perfectos icosaedros y dodecaedros.

Conviene puntualizar que cuando se había creído firmemente en la imposibilidad de que ninguna sustancia inorgánica se presentase bajo la estructura de un icosaedro, resulta que el boro forma una molécula  $B_{12}$  cuyos doce átomos están dispuestos como los vértices de un icosaedro.

La incorporación del microscopio electrónico al estu-

dio de los virus, ha detectado que muchos de ellos: virus del sarampión, herpes, la triola iridiscente y otros, cristalizan en macromoléculas con formas icosaédricas.

Pocos temas como los poliedros, han tenido para el - hombre una atracción y dedicación más constante e intensa. Desde que sepamos que se estudian por primera vez, hace más de 2.500 años, hasta nuestros días, geómetras, matemáticos y cristalógrafos no han dejado de investigar esta parcela. En los últimos treinta años se han elaborado y publicado un gran número de trabajos notables sobre los poliedros.

Pero el hombre no se ha detenido en el estudio teórico de estas formas y ha hecho aplicación de ellos, tanto a la Arquitectura como a la Ingeniería Civil. En los Apartados 1.2 y 1.3 se citan algunos ejemplos.

Tal persistente y prácticamente ininterrumpida dedicación de geómetras, artistas, místicos, pensadores, matemáticos, cristalógrafos, etc., durante casi 3.000 años, al estudio de los poliedros en sus múltiples manifestaciones y aplicaciones, ha movido también nuestra curiosidad hacia un universo de formas, en el que cuanto más se profundiza, más difícil es ver sus fronteras. A partir del análisis de los - cinco cuerpos de Platón, los trece de Arquímedes y los equifaciales, el interés se va extendiendo a todo tipo de generalizaciones. Así, Freudenthal y Van der Waerden (1947) ago

tan el tema de los poliedros convexos con caras triángulos equiláteros, Zalgaller dedica su atención a los poliedros convexos cuyas caras son polígonos regulares. Coxeter, Longuet-Higgins y Miller realizan un estudio exhaustivo de todos los posibles poliedros (convexos y no convexos) cuyas caras son polígonos regulares (convexos y estrellados) y a los que se designa con el nombre de poliedros uniformes.

Intimamente ligado con el conocimiento en profundidad de los sólidos limitados por caras planas se desarrollan los temas de la equipartición y la compactación del espacio. Conocida y ampliamente estudiada la forma de llenarlo con poliedros regulares y arquimedianos por repetición de sí mismos, se hacen interesantes estudios de combinaciones de dos o más de estos cuerpos intentando establecer un orden en el espacio. Así, Keith Critchlow en un admirable trabajo, agota el tema del encaje de estos cuerpos sin dejar huecos que se resume en una interesante lámina de su publicación, "Order in Space".

Al aumentar nuestra curiosidad hacia este interesante mundo de los poliedros y sus aplicaciones, empezaremos a descubrir campos aún no explorados.

Al principio, se pensó en si no se podría dividir el espacio de forma distinta a las conocidas. Esto nos exigía un conocimiento mayor del que puede encontrarse en los libros



de determinados tipos de poliedros. En concreto, era necesario conocer exhaustivamente las posibilidades que podían ofrecer los cuerpos de caras rombo.

Nuestra dedicación a estos estudios nos hizo descubrir la importancia que tenía el poder relacionar entre sí a los ángulos que intervenían en un determinado poliedro, limitado por caras rombo; así como poder asegurar por medio de una formulación matemática, la convexidad del mismo.

Ello nos llevó a determinarlos para casos particulares de estos rombos: que las diagonales estuvieran en determinada proporción, o que fueran iguales (caras cuadrados). Así pudimos establecer una teoría ordenada.

Puesta nuestra atención en la posibilidad de dividir el espacio, el estudio llevaba anejo los problemas de empaquetamiento de esferas o elipsoides y con ello, llegar a establecer la afirmación de que todo elipsoide puede ser almacenado por medio de rombododecaedros de forma que; en general, cada uno de los elipsoides no será tangente a otros doce; y que si sus ejes cumplen unas determinadas condiciones (de las que dejamos constancia), es posible empaquetarlos, tanto disponiéndolos igualmente orientados, como desigualmente orientados.

Dentro de este núcleo de nuestra Tesis, hemos llegado

a un acercamiento al problema de combinaciones cuaternarias y quinarías de sólidos que rellenan el espacio; descubriendo un total de cuatro combinaciones diferentes, además de otras once combinaciones unitarias, binarias y ternarias. El estudio sin embargo, no queda agotado dejando iniciado un camino cuyo final se encuentra más allá del horizonte - que en este momento podemos ver.

#### OBJETIVOS

Los objetivos pretendidos en esta investigación son, fundamentalmente, cuatro:

- La determinación de las propiedades comunes a familias de poliedros con caras rombo.
- La obtención de zonoedros singulares y particulares.
- Empaquetar elipsoides, sean o no de revolución, en general, no siendo tangentes a otros doce, por poliedros no afines del rombododecaedro equifacial.
- Posibilidad de obtener compactaciones del espacio - por más de tres poliedros que tengan alguna particularidad.

#### ORGANIZACION Y DESCRIPCION DEL TRABAJO

Generalmente, el desarrollo seguido durante la gesta-

ción de una investigación no es el más apropiado para su exposición, cuando ya se han obtenido resultados que permiten presentar el producto de una búsqueda y un constante tantear vías que nos conduzcan a algún descubrimiento. Este trabajo, que pretende presentar de forma ordenada los logros obtenidos en nuestros años de investigación, se ha dividido en los siguientes capítulos:

En el Capítulo I, se expone, resumidamente, una visión general de los poliedros, sin ánimo de hacer un extenso tratado sobre el tema, pero que nos va a permitir adentrarnos - en los capítulos posteriores en los que se desarrolla propiamente el trabajo realizado.

En el Capítulo II, se obtienen las relaciones que ligan entre sí a los  $\binom{n}{2}$  ángulos que intervienen en un zonoedro equilátero. Entendemos por zonoedros equiláteros, todo poliedro de  $n(n-1)$  caras, siendo todas rombos cualesquiera.

En el Capítulo III, como consecuencia de la simbología propuesta, es preciso introducir el concepto de equivalencia entre zonoedros. Se estudia además, la convexidad de los rombododecaedros.

En los Capítulos IV, V y VI, se hacen múltiples aplicaciones de las relaciones obtenidas en el Capítulo II.

En el Capítulo IV, se demuestra que todo rombododecaedro de hasta seis caras diferentes (en general no es directamente afín del rombododecaedro equifacial), produce la equipartición del espacio; y también se obtiene el rombododecaedro que permite el empaquetamiento de elipsoides, sean o no de revolución, pero en general, no siendo cada uno de estos elipsoides tangente a otros doce.

En el Capítulo V, se realiza un estudio exhaustivo sobre los rombododecaedros con dos tipos de caras rombo.

En el Capítulo VI, se obtienen todos los posibles zonoedros, cuyas caras rombo sean todas iguales.

En el Capítulo VII, se estudian las combinaciones que permiten rellenar el espacio entre los cinco cuerpos, con caras rombo, cuyas diagonales están en relación aurea.

Por fin, las conclusiones que se derivan del presente trabajo, se exponen en el Capítulo VIII.

## CAPITULO I

*¿Será posible que todos los grandes científicos del pasado hayan estado en realidad jugando, dentro de un juego en el que las reglas no las ha escrito el hombre sino Dios?... Al jugar, no se pregunta por qué se juega; se juega, sencillamente. El juego carece de código moral, aparte del extraño código que se impone misteriosamente en el juego... Uno puede buscar en la literatura científica señales de motivación, pero será un esfuerzo vano. Y en lo que se refiere al extraño código moral que los científicos observan, ¿qué puede ser más raro que la consideración abstracta de la verdad en un mundo tan lleno de mentira, de cosas que se esconden y de prohibiciones?... Al poner a su consideración esta idea de que la mente humana alcanza un estado óptimo cuando juega, yo mismo estoy jugando, y esto me hace sentir que en lo que digo puede haber un elemento de verdad.*

J.L. Synge

## CAPITULO I

### EVOLUCION HISTORICA DEL CONOCIMIENTO Y ESTUDIO DE LOS POLIEDROS.

Puesto que a lo largo de cuanto en lo sucesivo se expresa, se van a citar constantemente distintos términos y conceptos, conviene empezar por precisar éstos con toda exactitud.

#### 1.1.- DEFINICIONES

Polígono.....: Es un circuito de  $p$  segmentos  $A_1 A_2$ ,  $A_2 A_3$ , ...,  $A_p A_1$  uniendo pares consecutivos de  $p$  puntos.  $A_1, A_2, \dots, A_p$ . Los segmentos y puntos son llamados lados y vértices del polígono.

Si todos los vértices son coplanarios, diremos que el polígono es plano, y en caso contrario alabeado.

Un polígono plano así definido representa una región simplemente conexa limitada por  $p$  segmentos distintos.

"Simplemente conexa" significa que toda curva cerrada simple dibujada en la región puede ser reducida a un punto sin abandonar la región, es decir, que no hay agujeros

o regiones vacías.

Diremos que un polígono es convexo, cuando el segmento que une dos vértices cualesquiera es interior a la región en todos sus puntos, o bien es uno de sus lados.

De un polígono en el que todos los lados son iguales diremos que es equilátero; y equiángulo, si son iguales todos sus ángulos.

Para  $p > 3$ , el polígono puede ser equilátero sin ser equiángulo y viceversa.

Polígono regu-

lar.....: Es un polígono equilátero y equiángulo. Al polígono regular de  $p$  lados lo designaremos por  $\{p\}$ .

Circunferencia

circunscrita...: Es aquella que contiene a todos los vértices de un polígono plano

Circunferencia

inscrita.....: Es aquella que es tangente a todos los lados del polígono plano.

Para  $p > 3$  no todos los polígonos tendrán algunas de las circunferencias descritas.

Se puede demostrar fácilmente que todo polígono regular tiene circunferencia circunscrita y circunferencia inscrita.

En base a estas definiciones, podríamos definir de nuevo un polígono regular como aquel en que su circunferencia inscrita es tangente en el punto medio de sus lados.

Poliedro.....: Es un conjunto finito de polígonos planos, tal que todos los lados se pertenecen los unos a los otros, con la restricción - de que los polígonos que rodean cada vértice formen un circuito simple (al objeto de eliminar anomalías tales como dos pirámides con un vértice común). Los polígonos son llamados caras y sus vértices aristas

Diremos de un poliedro que es simple-mente conexo, cuando toda curva cerrada - simple dibujada sobre la superficie, puede ser reducida a un punto, o que todo circuito de aristas rodea una región (la cual puede constar de una o más caras).



Todo poliedro simplemente conexo satisface la conocida fórmula de Euler:  $C+V=A+2$

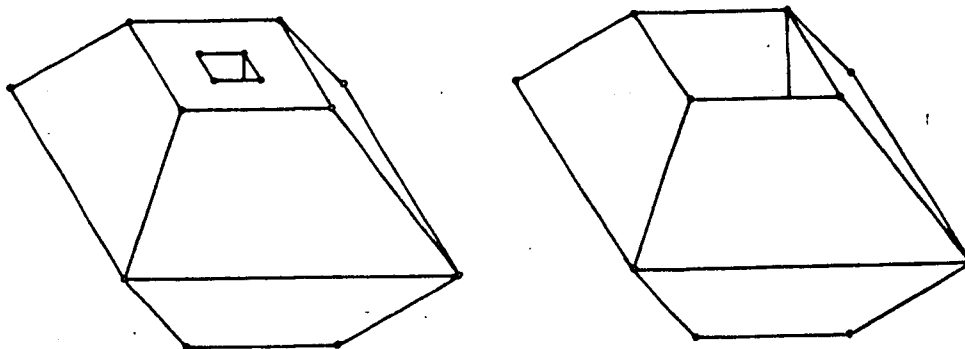


Fig 1.1A

En la figura 1.1<sub>A</sub> se muestran dos cuerpos, de los cuales el primero no cumple con la definición de poliedro por no ser sus caras superior e inferior polígonos.

En el segundo caso es un poliedro, pero no simplemente conexo; y por tanto, no satisface la fórmula de Euler.

En todo lo que sigue entenderemos por poliedros a los cuerpos definidos como simplemente conexos.

Un poliedro será convexo, cuando el segmento que une dos cualesquiera de sus vértices es interior al poliedro en todos sus puntos o bien está sobre su superficie.

Angulo diedro : Es el ángulo interno formado por dos caras que concurren a lo largo de una arista común.

Angulo Sólido

en un vértice : Es el área del polígono esférico que definen la intersección de las caras que concurren en el vértice considerado sobre una esfera de radio unidad con centro en dicho vértice.

Todas las definiciones que anteceden son comunes para toda clase de poliedros.

A continuación, se incluyen definiciones que solamente son válidas para tipos particulares y especiales de poliedros.

Esfera circunscrita

.....: Es la que contiene a todos los vértices del poliedro.

Esfera inscrita: Es aquella que es tangente a todas las caras del poliedro.

Esfera tangente a las aristas, interresfera o esfera

filas : Es aquella que es tangente a todas las aristas del poliedro.

Poliedro conjugado, dual o polar recíproco

de uno dado....:

Se obtiene trazando en primer lugar la interesfera del poliedro dado y a continuación por cada punto de tangencia con las aristas las rectas  $\perp$  a las aristas y tangentes a la esfera. Estas rectas convergen y constituyen las aristas del poliedro dual.

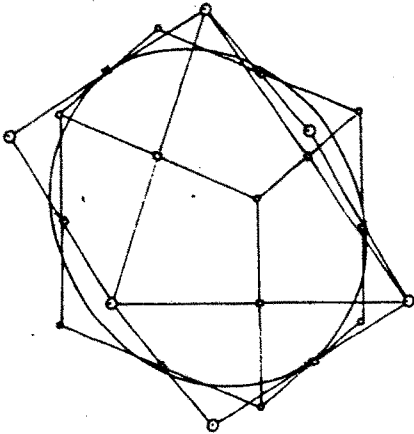


Fig 1.1B

Esta definición es equivalente a que las caras del poliedro conjugado son los planos polares de los vértices del primitivo respecto a la interesfera y sus vértices los polos de las caras del poliedro origen.

De la propia definición se desprende que tiene la propiedad simétrica.

Figura verti-

cial.....:

Si consideramos un poliedro formado por polígonos equiláteros (no necesariamente regulares) de uno o más tipos, que tenga esfera circunscrita y que en todos los vértices concurren el mismo número de caras igualmente dispuestas, todos los vértices que están unidos a un vértice  $V$  cualquiera de dicho poliedro pertenecen, por

definición, a la esfera circunscrita al poliedro, pero además pertenecen a la esfera de centro el vértice  $V$  y radio la arista del poliedro y, por tanto, están situados en el plano intersección de ambas esferas.

Al polígono sección que produce este plano en las caras que concurren en el vértice  $V$  se le denomina figura vertical.

Está claro que si no imponemos ninguna restricción a la definición ya dada de poliedro, se pueden formar series infinitas de ellos que, en principio, no van a tener ningún interés. Todos los poliedros fundamentales estudiados desde el punto de vista teórico y de los cuales se han derivado interesantes aplicaciones prácticas cumplen con todas o algunas de las siguientes condiciones:

<u>Condición</u>	<u>Descripción</u>
1	Todos los polígonos son regulares
2	Todos los polígonos son iguales
3	En todos los vértices concurren el mismo número de caras igualmente dispuestas
4	Todos los ángulos diedros son iguales.

#### 1.2.- POLIEDROS REGULARES CONVEXOS

Si a la definición general de los poliedros convexos se le añade la exigencia de las cuatro condiciones citadas se obtienen los poliedros regulares que, como se sabe, son cinco.

Cuatro de los cinco poliedros regulares convexos eran conocidos en el antiguo Egipto: el tetraedro, el octaedro y el cubo aparecen repetidamente en su Arquitectura. (De una exposición del British Museum parece deducirse que en algunos juegos, los egipcios utilizaban dados icosaédricos). Según Heath (1921), los etruscos construyeron un dodecaedro antes del 500 A.C. Estos cinco poliedros son generalmente conocidos como los cuerpos Platónicos, aunque todos ellos fueron estudiados por los primeros Pitagóricos e incluso por el mismo Pitágoras.

Los cinco poliedros regulares tienen esfera circunscrita, esfera inscrita y esfera tangente a las aristas.

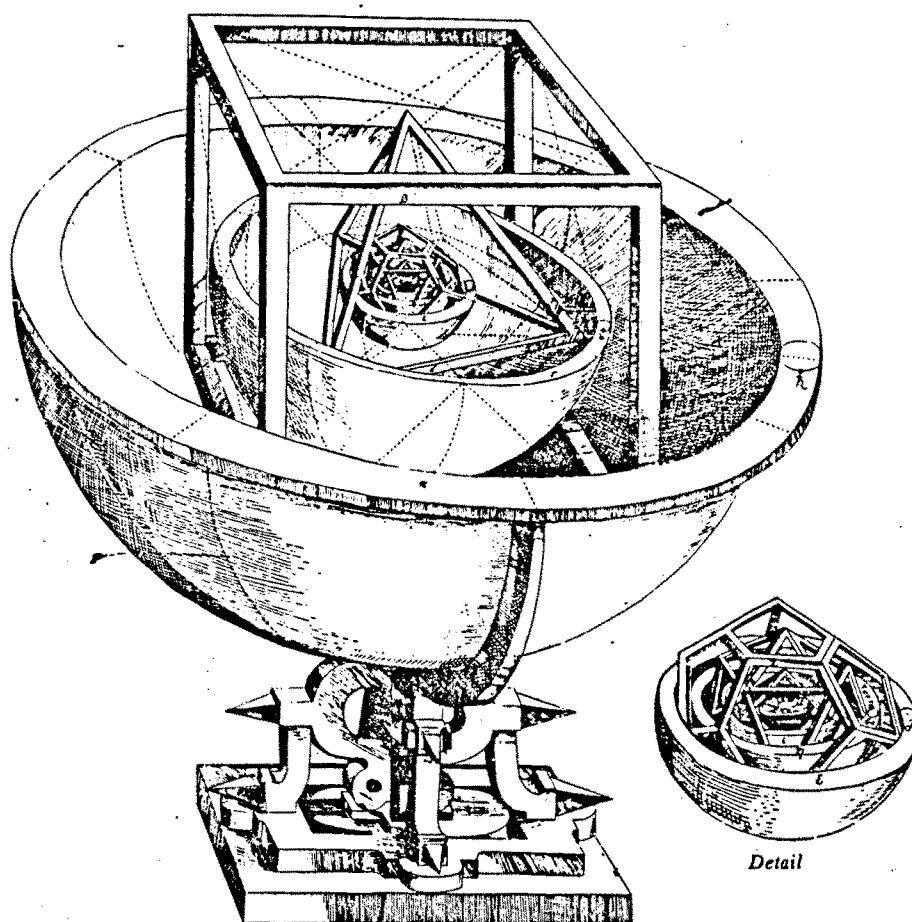
Las figuras verticales correspondientes son polígonos regulares.

Según la notación propuesta por Schläfli al poliedro regular cuya cara y figura vertical son  $\{p\}$  y  $\{q\}$  respectivamente, se le denomina  $\{p,q\}$ . Por ejemplo, el dodecaedro es  $\{5,3\}$ , por tener caras pentágonos y en cada vértice concurren tres polígonos. El icosaedro, de acuerdo con

esta notación es  $\{3,5\}$  , el cubo  $\{4,3\}$  el octaedro  $\{3,4\}$  y el tetraedro  $\{3,3\}$  .

Los conjugados de todos los poliedros regulares son los propios poliedros regulares. El tetraedro es conjugado de sí mismo, el cubo y el octaedro son conjugados entre sí; así como el icosaedro y el dodecaedro. En resumen, el conjugado de  $\{p,q\}$  es  $\{q,p\}$

Existen múltiples interrelaciones entre los cinco só lidos Platónicos. Ya Kepler en su "Misterium Cosmographicum" elaboró una teoría para explicar el número de planetas conocidos en su época (6), y sus distancias al Sol deducidas por Copérnico; pensando que, la razón de que hubiera seis planetas era porque había sólo cinco sólidos regulares y - que esos cuerpos inscritos o anidados uno dentro de otro - determinarían las distancias del Sol a los Planetas. Estaba tan entusiasmado con su idea, que aunque no coincidiera con las observaciones de Copérnico, la elegancia y grandiosidad de la teoría le persuadieron de que los datos observados debían ser erróneos. Su "Misterium Cosmographicum" - quedó totalmente superado por los descubrimientos muy posteriores de los tres restantes planetas: Urano, Neptuno y Plutón.



- |                            |                              |                            |
|----------------------------|------------------------------|----------------------------|
| $\alpha$ Esfera de Saturno | $\beta$ Cubo                 | $\gamma$ Esfera de Júpiter |
| $\delta$ Tetraedro         | $\epsilon$ Esfera de Marte   | $\zeta$ Dodecaedro         |
| $\eta$ Orbita de la Tierra | $\theta$ Icosaedro           | $\iota$ Esfera de Venus    |
| $\chi$ Octaedro            | $\lambda$ Esfera de Mercurio | $\mu$ Sol                  |

Esta figura realizada por Kepler y que aparece en su "Mysterium Cosmographicum", muestra las esferas de los seis planetas anidados en los cinco sólidos de Platón. Kepler propuso al duque de Württemberg construir un modelo de plata y piedras preciosas y que además serviría de cáliz ducal. La propuesta fue rechazada con el amable consejo de que antes construyera un ejemplar menos caro.

Las aplicaciones prácticas de los poliedros regulares son numerosas, tanto a la Arquitectura como a la Ingeniería Civil. Recordemos dentro de las Obras Marítimas los tetrapodos, dolos, akmon, etc., obtenidos a partir del tetraedro y otros inspirados en el cubo.

Entre los ejemplos más conocidos de nuestros días, - puede citarse al Atomium, símbolo de la Exposición Internacional de Bruselas del año 1958; que se diseñó disponiendo un cubo con una diagonal vertical y situando una esfera en cada vértice y otra en el centro. Recientemente se han - construido viviendas unifamiliares en Holanda, que en esencia son un cubo con una diagonal vertical apoyado en un - prisma de generatrices verticales, tratando de simular un conjunto de árboles.

El icosaedro y el dodecaedro encuentran su aplicación en las cúpulas esféricas materializadas por mallas triangulares, las cuales han sido diseñadas por Richard Buckminster Fuller. Combinando tetraedros y octaedros se han diseñado cubiertas planas. De estas últimas existen en nuestro país realizaciones de ingenieros españoles que han sido soluciones récord de luz en el mundo.

De los cinco poliedros regulares, solamente con el - cubo puede obtenerse la equipartición del espacio.



### 1.3.- POLIEDROS ARQUIMEDIANOS Ó EQUIANGULOS CONVEXOS

Si imponemos a la definición general de los poliedros convexos que todas las caras sean polígonos regulares de dos o más tipos, y que en todos los vértices concurren el mismo número de caras igualmente dispuestas; es decir, que satisfaga las condiciones 1 y 3, obtenemos los poliedros arquimedianos o equiángulos.

Se sabe que Platón ya tuvo conocimiento de uno de los poliedros equiángulos con caras de dos tipos: el cuboctaedro. A este cuerpo y otros doce se les suele relacionar con Arquímedes, aunque su libro sobre ellos se ha perdido. Cinco de estos trece sólidos fueron redescubiertos por Piero della Francesca (1416-1492), cuyo manuscrito "Libellus de quinque corporibus regularibus", está en el Vaticano. Este tratado fue traducido al italiano por Fra Luca Pacioli (1509), quien añadió un icosihexaedro (ahora conocido como el rombicuboctaedro). Un modelo de cristal de este último sólido fue exquisitamente pintado por Jacopo di Barbari en su retrato de Pacioli, el cual puede verse en el Museo Nazionale en Nápoles.

La más antigua enumeración completa de los poliedros regulares y arquimedianos fue hecha por Kepler (1619), quien observó que la definición incluía también a los prismas con caras laterales cuadradas y a los antiprismas con caras la-

terales triángulos equiláteros.

Todos los poliedros equiángulos tienen esfera circunscrita y esfera tangente a las aristas; pero, tienen más de una esfera tangente a las caras (tantas como polígonos diferentes tenga el poliedro).

Estos poliedros que tienen una identidad incuestionable a partir de su propia definición; en ocasiones, por razones didácticas o para facilitar su exposición se les puede clasificar en seis familias para poder ser obtenidos partiendo de los poliedros de Platón a los que se les trunca y achaflana.

Un símbolo adecuado para este tipo de poliedros es  $(p^\alpha, q^\beta, r^\gamma, s^\delta)^\epsilon$ , el cual representa un conjunto de  $\alpha\{p\}$ ,  $\beta\{q\}$ ,  $\gamma\{r\}$  y  $\delta\{s\}$  que se repite por este orden  $\epsilon$  veces.

1° Familia.- Se puede obtener truncando los poliedros regulares a " $\frac{1}{3}$ " de la arista (en el cubo y dodecaedro, obviamente, no es exactamente a  $\frac{1}{3}$  puesto que deben obtenerse octógonos y decágonos regulares respectivamente).

Los cinco arquimedianos a los que se llega son:

- |   |   |                       |   |                    |
|---|---|-----------------------|---|--------------------|
| 1 | - | (3 , 6 <sup>2</sup> ) | - | Tetraedro truncado |
| 2 | - | (3 , 8 <sup>2</sup> ) | - | Cubo truncado      |
| 3 | - | (4 , 6 <sup>2</sup> ) | - | Octaedro truncado  |

- 4 - (5 , 6<sup>2</sup>) - Icosaedro truncado
- 5 - (3 , 10<sup>2</sup>) - Dodecaedro truncado

2° Familia.- Truncando y achaflanando los poliedros regulares. En esta familia, las caras del poliedro base {p,q} se transforman en polígonos regulares {2 p}. De esta forma obtendremos:

- 6 - (4, 6, 8) - Cuboctaedro truncado
- 7 - (4, 6, 10) - Icosidodecaedro truncado

3° Familia.- Truncando a  $\frac{1}{2}$  de la arista los poliedros regulares. Por este procedimiento se obtienen

- 8 - (3 , 4)<sup>2</sup> - Cuboctaedro
- 9 - (3 , 5)<sup>2</sup> - Icosidodecaedro

4° Familia.- La obtenemos truncando y achaflanando los poliedros regulares. En esta familia las caras {p} del poliedro base {p,q} se transforman en polígonos regulares {p}. Resultan los siguientes:

- 10 - (3, 4<sup>3</sup>) - Rombicuboctaedro
- 11 - (3, 4, 5, 4) - Rombicosidodecaedro

5° Familia.- La forman dos series infinitas de poliedros los primas de Arquímedes y los antiprismas de Arquímedes.

6° Familia.- La constituyen dos poliedros que pueden obtenerse, aunque no de forma sencilla, a partir del cubo y del dodecaedro; o bien, del octaedro e icosaedro.

12 -  $(3^4, 4)$  - Cubo romo

13 -  $(3^4, 5)$  - Dodecaedro romo

Todo poliedro arquimediano que se obtenga de un  $\{p,q\}$  también puede ser obtenido de su conjugado  $\{q,p\}$ .

A esta lista de poliedros equiángulos aparentemente completa, conocida desde la Antigüedad aunque, recuperada y ordenada por Kepler, se le ha añadido en nuestro siglo un nuevo poliedro descubierto por Azhkinuze cuyas caras y ángulos son iguales a los del rombicuboctaedro aunque le diferencia de éste la pérdida de simetría central de cuatro de sus vértices.

Los conjugados de los poliedros arquimedianos son llamados poliedros equifaciales, que se describirán en el próximo epígrafe.

El icosaedro truncado, el icosidodecaedro y el dodecaedro romo tienen mucha aplicación en la construcción de cúpulas esféricas materializadas por mallas triangulares, y en un plano mucho más popular es interesante reseñar que

el primero de ellos ha servido para inspirar el despiece del actual balón de fútbol en polígonos esféricos regulares iguales de dos tipos: 20 hexágonos y 12 pentágonos de igual arista.

De los trece poliedros arquimedianos (al que podríamos añadir el poliedro de Azhkinuze) y de las dos series infinitas de prismas y antiprimas, solamente dos poliedros producen la equipartición del espacio disponiéndoles igualmente orientados. Son éstos el troncooctaedro (ó poliedro de Lord Kelvin) y el prisma hexagonal. El prisma triangular ( $\Pi_3$ ) aunque rellena espacio no queda igualmente orientado y el  $\Pi_4$  es el cubo ya descrito al referirnos a los poliedros regulares

#### 1.4.- POLIEDROS EQUIFACIALES

Si añadimos a la definición general de los poliedros convexos el que todas las caras sean iguales y que todos los ángulos diedros sean idénticos; es decir, que cumplan las condiciones 2 y 4, se obtienen los poliedros equifaciales.

Los dos poliedros equifaciles más importantes, el rombododecaedro y el triakontaedro son citados por Kepler en el siglo XVII.

Todos los poliedros equifaciales tienen esfera inscrita, esfera tangente a las aristas, y tantas esferas que con tenga a sus vértices como vértices de distinto tipo tenga - el poliedro.

Existen trece poliedros equifaciales correspondiéndose uno a uno con los poliedros arquimedianos; además del caso singular del conjugado del poliedro de Azhkinuze.

Los conjugados de los poliedros equifaciales son, - evidentemente los poliedros arquimedianos.

De los trece poliedros equifaciales y el conjugado - del poliedro de Azhkinuze solamente un poliedro produce la equipartición del espacio. Este poliedro es el rombododecaedro.

Estos poliedros y sus características más interesantes son las que se reúnen en el siguiente cuadro:

símbo llo ar quimedi ano	Nombre del poliedro arquimediano			Nombre del poliedro equifacial			Tipo de cara del poliedro			
	C	V	A	C	V	A	C	V	A	
1	8	12	18	12	14	18	12	8	18	Triángulo isósceles
2	14	24	36	24	24	36	24	14	36	Triángulo isósceles
3	14	24	36	24	24	36	24	14	36	Triángulo isósceles
4	32	60	90	60	60	90	60	32	90	Triángulo isósceles
5	32	60	90	60	60	90	60	32	90	Triángulo isósceles
6	26	48	72	48	48	72	48	26	72	Triángulo escaleno
7	62	120	180	120	120	180	120	62	180	Triángulo escaleno
8	14	12	24	12	12	24	12	14	24	Rombo con diagonales en rel. $\sqrt{2}$
9	32	30	60	30	30	60	30	32	60	Rombo con diagonales en rel $\phi$
10	26	24	48	24	24	48	24	26	48	Cuadrilátero isósceles con tres ángulos iguales
11	62	60	120	60	60	120	60	62	120	Cuadrilátero isósceles con dos ángulos opuestos iguales.
12	38	24	60	24	24	60	24	38	60	Pentágono isósceles teniendo - cuatro ángulos iguales.
13	92	60	150	60	60	150	60	92	150	Pentagono isósceles teniendo - cuatro ángulos iguales.
	26	24	48	24	24	48	24	26	48	Cuadrilátero isósceles con - tres ángulos iguales

En las páginas que siguen, se ofrecen, agrupados, cada uno de los trece poliedros arquimedianos y el de Azhkinuze junto con sus equifaciales conjugados; emparejando en cada hoja, cada uno con su dual y recogiendo junto a ellos alguno de sus elementos más característicos.

Estos elementos son para los poliedros arquimedianos:

C			V	A		
$C_{\{p\}}$	$C_{\{q\}}$	$C_{\{r\}}$		$A_{\{p\}\{q\}}$	$A_{\{p\}\{r\}}$	$A_{\{q\}\{r\}}$

donde:  $C_{\{p\}}$  = número de caras  $\{p\}$

$A_{\{p\}\{q\}}$  = número de aristas compartidas por un  $\{p\}$   
y un  $\{q\}$

$\delta_{\{p\}\{q\}}$  = ángulo diedro formado por una cara  $\{p\}$  y  
una cara  $\{q\}$

$R$  = radio de la esfera circunscrita

$\rho$  = radio de la esfera tangente a las aristas.



Para la definición de los últimos elementos consideraremos igual a la unidad la arista del poliedro arquimediano.

Los elementos considerados para los poliedros equifaciales son:

C	V			A
	$V_i$	$V_j$	$V_k$	

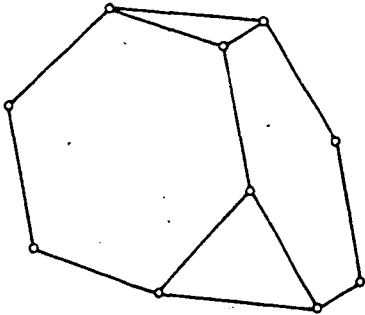
donde  $V_i$  = número de vértices en que concurren  $i$  caras

$\delta$  = ángulo diedro entre dos caras adyacentes del poliedro



Definición de la cara del poliedro

### TETRAEDRO TRUNCADO



C		V	A	
C <sub>{3}</sub>	C <sub>{6}</sub>		A <sub>{3}{6}</sub>	A <sub>{6}{6}</sub>
4	4		12	6
8		12	18	

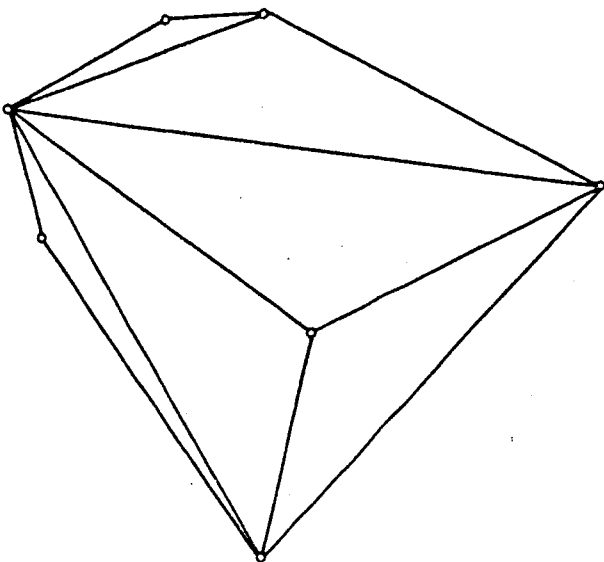
$$\delta_{\{3\}\{6\}} = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) \approx 109^\circ 28' 16''$$

$$\delta_{\{6\}\{6\}} = \arccos\left(\frac{1}{3}\right) \approx 70^\circ 31' 44''$$

$$R = \frac{\sqrt{22}}{4}$$

$$\rho = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

### TRIAKISTETRAEDRO

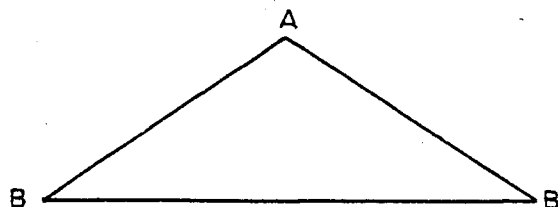


C	V		A
	V <sub>3</sub>	V <sub>6</sub>	
12	4	4	18
12	8		18

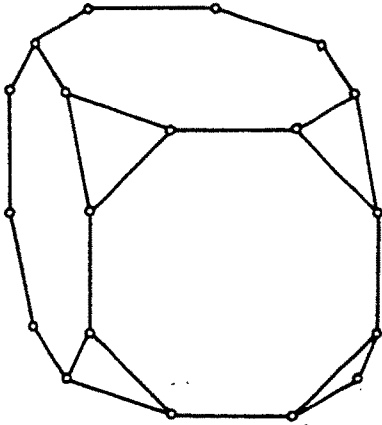
$$\delta = \arccos\left(-\frac{7}{11}\right) \approx 129^\circ 31' 16''$$

$$A \approx 112^\circ 53' 8''$$

$$B \approx 33^\circ 33' 26''$$



### CUBO TRUNCADO



C		V	A	
$C_{\{3\}}$	$C_{\{8\}}$		$A_{\{3\}\{8\}}$	$A_{\{8\}\{8\}}$
8	6		24	12
14		24	36	

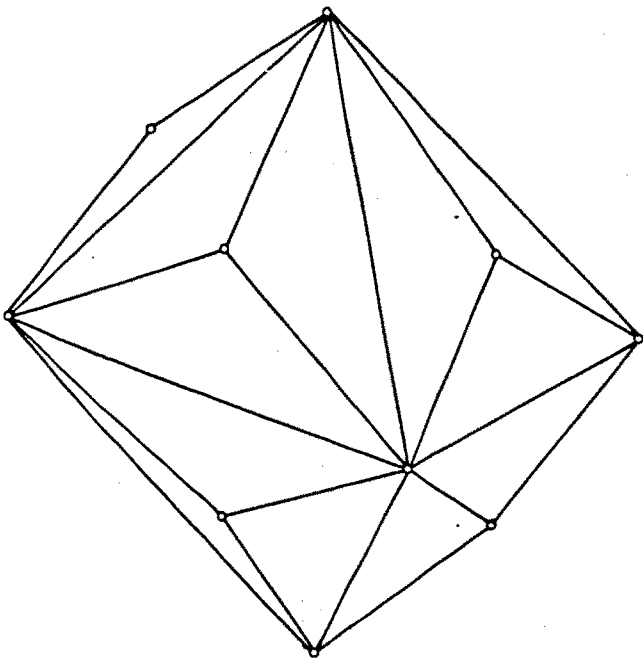
$$\delta_{\{3\}\{8\}} = \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \approx 125^\circ 15' 52''$$

$$\delta_{\{8\}\{8\}} = 90^\circ$$

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{7 + 4\sqrt{2}}$$

$$\rho = \frac{1}{2} (2 + \sqrt{2})$$

### TRIAKISOCTAEDRO

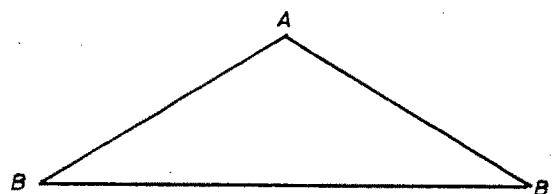


C	V		A
	$V_3$	$V_8$	
24	8	6	36
24	14		36

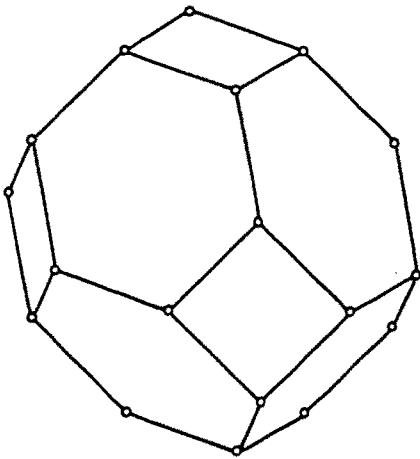
$$\delta \approx 147^\circ 21'$$

$$A \approx 117^\circ 15' 18''$$

$$B \approx 31^\circ 22' 21''$$



OCTAEDRO TRUNCADO (POLIEDRO DE LORD KELVIN)



C		V	A	
$C_{\{4\}}$	$C_{\{6\}}$	24	$A_{\{4\}\{6\}}$	$A_{\{6\}\{6\}}$
6	8		24	12
14		24	36	

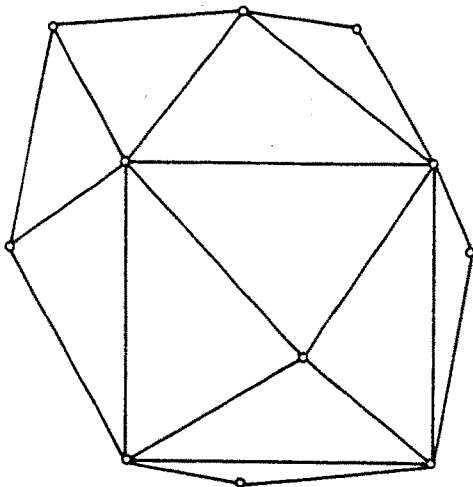
$$\delta_{\{4\}\{6\}} = \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \approx 125^\circ 15' 52''$$

$$\delta_{\{6\}\{6\}} = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) \approx 109^\circ 28' 16''$$

$$R = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

$$\rho = 1,5$$

TETRAKISHEXAEDRO

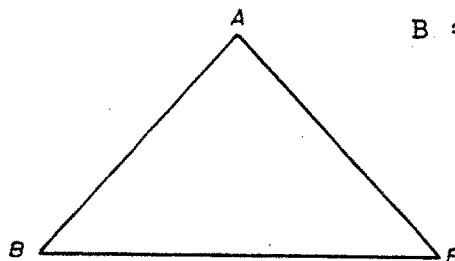


C	V		A
24	$V_4$	$V_6$	36
	6	8	
24	14		36

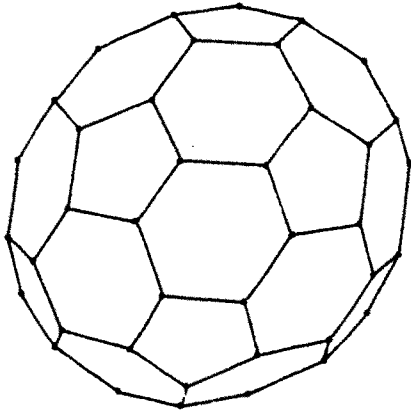
$$\delta \approx 143^\circ 7' 48''$$

$$A \approx 83^\circ 37'$$

$$B \approx 48^\circ 11' 30''$$



### ICOSAEDRO TRUNCADO



C		V	A	
$C_{\{5\}}$	$C_{\{6\}}$		$A_{\{5\}\{6\}}$	$A_{\{6\}\{6\}}$
12	20	60	60	30
32		60	90	

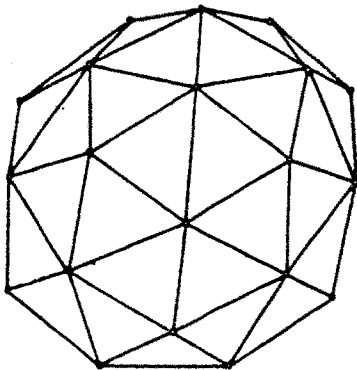
$$\delta_{\{5\}\{6\}} = \arccos\left(-\frac{\sqrt{15}}{15} \sqrt{3+4\phi}\right) \approx 142^\circ 37' 21''$$

$$\delta_{\{6\}\{6\}} = 2 \arcsin\left(\frac{\sqrt{3\phi}}{3}\right) \approx 138^\circ 11' 23''$$

$$R = \frac{\sqrt{10 + 9\phi}}{2}$$

$$\rho = \frac{3\phi}{2}$$

### PENTAKISDODECAEDRO

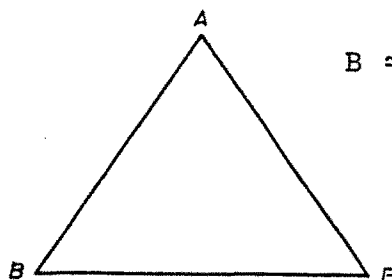


C	V		A
	$V_5$	$V_6$	
60	12	20	90
60	32		90

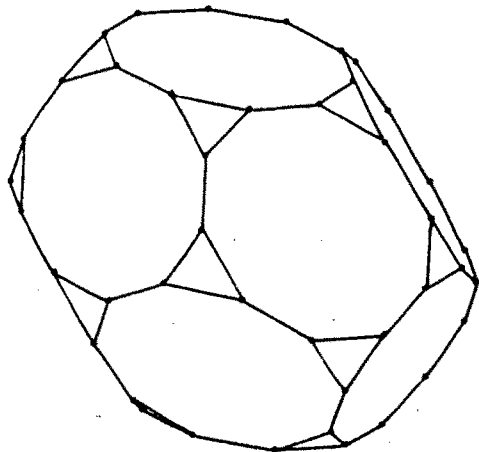
$$\delta \approx 156^\circ 43' 7''$$

$$A \approx 68^\circ 37' 8''$$

$$B \approx 55^\circ 41' 26''$$



### DODECAEDRO TRUNCADO



C		V	A	
$C_{\{3\}}$	$C_{\{10\}}$	60	$A_{\{3\}\{10\}}$	$A_{\{10\}\{10\}}$
20	12		60	30
32		60	90	

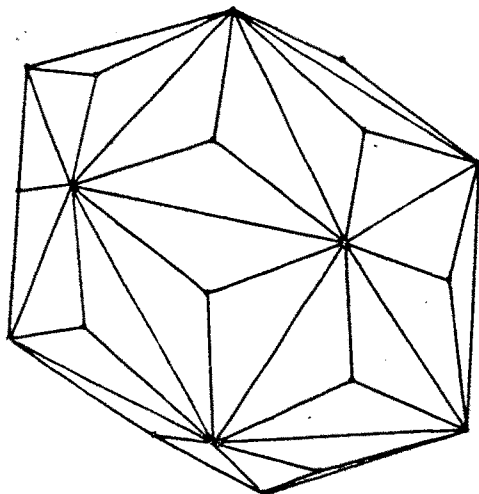
$$\delta_{\{3\}\{10\}} = \arccos\left(-\frac{\sqrt{15}}{15}\sqrt{3+4\phi}\right) \approx 142^\circ 37' 21''$$

$$\delta_{\{10\}\{10\}} = 2 \arcsin\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\sqrt{2+\phi}\right) \approx 116^\circ 33' 54''$$

$$R = \frac{\sqrt{11+15\phi}}{2}$$

$$\rho = \frac{1+3\phi}{2}$$

### TRIAKISICOSAEDRO

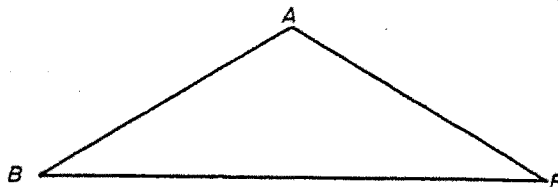


C	V		A
60	$V_3$	$V_{10}$	90
	20	12	
60	32		90

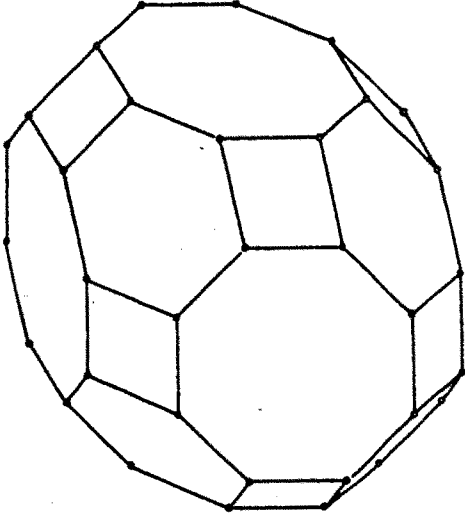
$$\delta \approx 160^\circ 36' 45''$$

$$A \approx 119^\circ 3'$$

$$B \approx 30^\circ 28' 30''$$



### CUBOCTAEDRO TRUNCADO



C			V	A		
$C_{\{4\}}$	$C_{\{6\}}$	$C_{\{8\}}$	48	$A_{\{4\}\{6\}}$	$A_{\{4\}\{8\}}$	$A_{\{6\}\{8\}}$
12	8	6		24	24	24
26			48	72		

$$\delta_{\{4\}\{6\}} = \arccos\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right) \approx 144^\circ 44' 8''$$

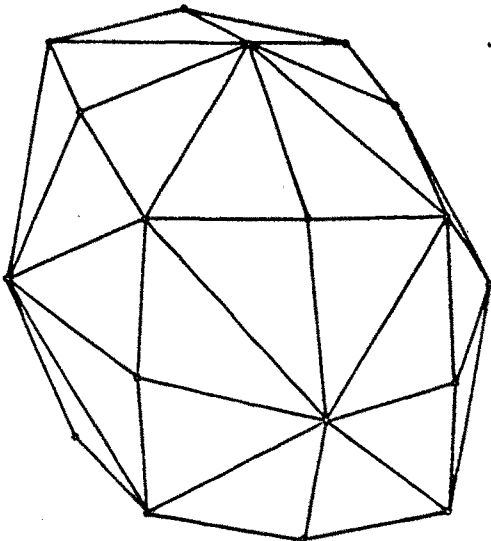
$$\delta_{\{4\}\{8\}} = \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 135^\circ$$

$$\delta_{\{6\}\{8\}} = \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \approx 125^\circ 15' 52''$$

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{13 + 6\sqrt{2}}$$

$$\rho = \frac{1}{2} \sqrt{12 + 6\sqrt{2}}$$

### HEXAKISOCTAEDRO



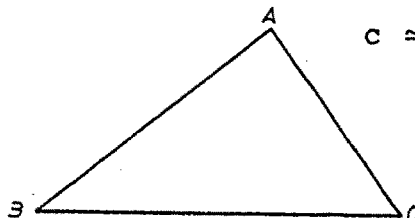
C	V			A
48	$V_4$	$V_6$	$V_8$	72
	12	8	6	
48	26			72

$$\delta \approx 155^\circ 4' 56''$$

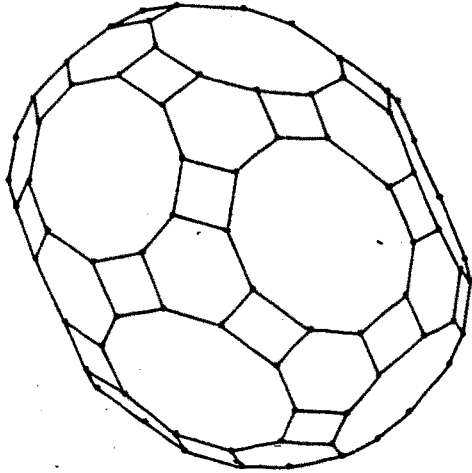
$$A \approx 87^\circ 12' 7''$$

$$B \approx 37^\circ 46' 24''$$

$$c \approx 55^\circ 1' 29''$$



### ICOSIDODECAEDRO TRUNCADO



C			V	A		
$C_{\{4\}}$	$C_{\{6\}}$	$C_{\{10\}}$	120	$A_{\{4\}\{6\}}$	$A_{\{4\}\{10\}}$	$A_{\{6\}\{10\}}$
30	20	12		60	60	60
62			120	180		

$$\delta_{\{4\}\{6\}} = \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\phi\right) \approx 159^\circ 5' 41''$$

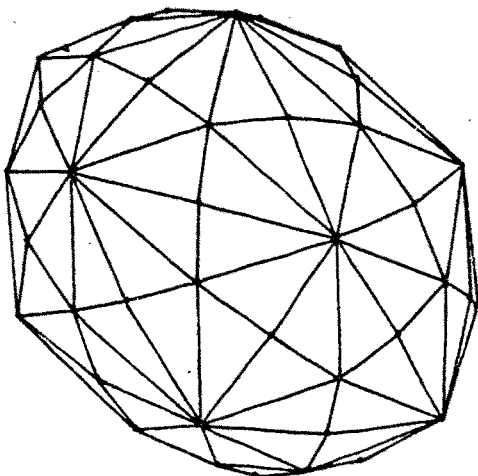
$$\delta_{\{4\}\{10\}} = \arccos\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\sqrt{2+\phi}\right) \approx 148^\circ 16' 57''$$

$$\delta_{\{6\}\{10\}} = \arccos\left(-\frac{\sqrt{15}}{15}\sqrt{3+4\phi}\right) \approx 142^\circ 37' 21''$$

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{19 + 24\phi}$$

$$\rho = \frac{\sqrt{6}}{2} \sqrt{3 + 4\phi}$$

### HEXAKISICOSAEDRO



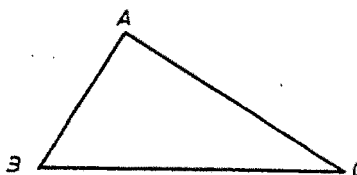
C	V			A
120	$V_4$	$V_6$	$V_{10}$	180
	30	20	12	
120	62			180

$$\delta \approx 164^\circ 53' 17''$$

$$A \approx 88^\circ 59' 31''$$

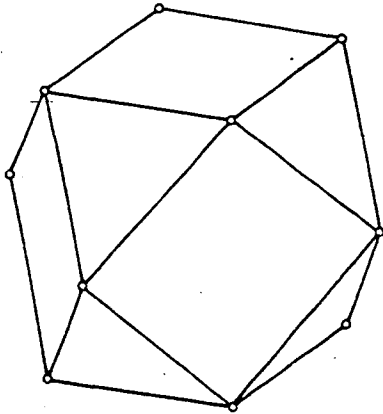
$$B \approx 58^\circ 14' 17''$$

$$C \approx 32^\circ 46' 12''$$





### CUBOCTAEDRO



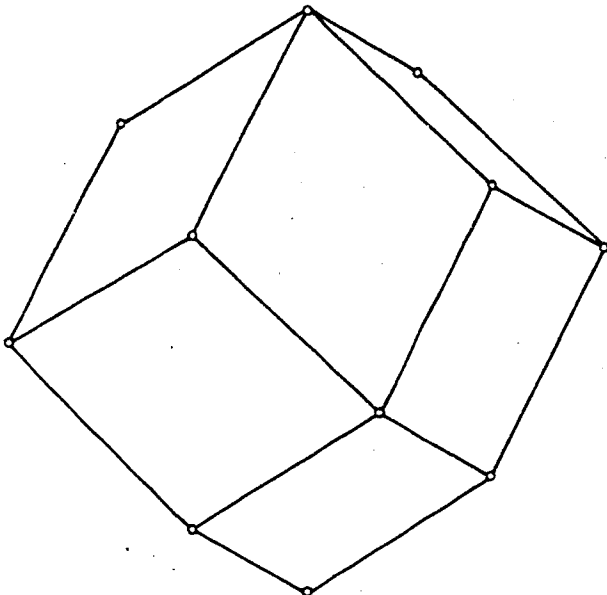
C		V	A
$C_{\{3\}}$	$C_{\{4\}}$		$A_{\{3\}\{4\}}$
8	6	12	24
14		12	24

$$\delta_{\{3\}\{4\}} = \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \approx 125^\circ 15' 52''$$

$$R = 1$$

$$\rho = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

### ROMBODODECAEDRO



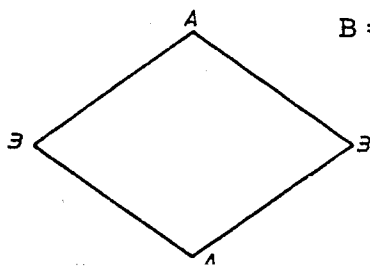
C	V		A
	$V_3$	$V_4$	
12	8	6	24
12	14		24

$$\delta = 120^\circ$$

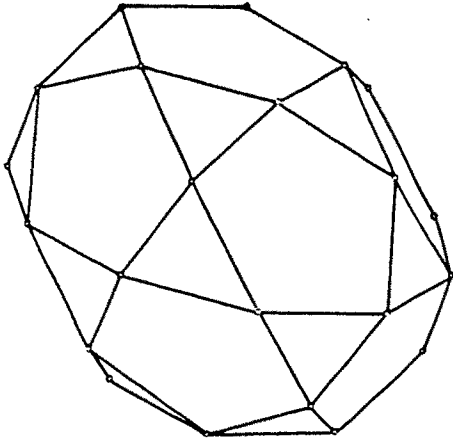
Las caras son rombos cuyas diagonales están en la relación  $\sqrt{2}$ .

$$A = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) \approx 109^\circ 28' 16''$$

$$B = \arccos\left(\frac{1}{3}\right) \approx 70^\circ 31' 44''$$



### ICOSIDODECAEDRO



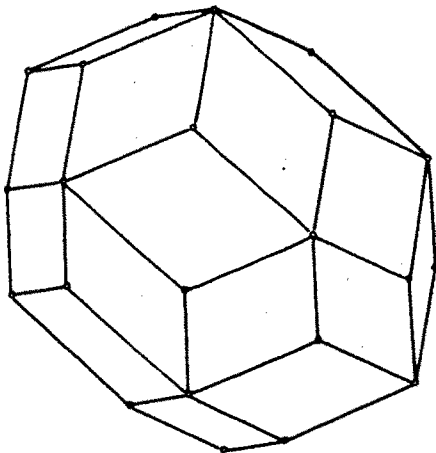
C		V	A
$C_{\{3\}}$	$C_{\{5\}}$	30	$A_{\{3\} \{5\}}$
20	12		60
32		30	60

$$\delta_{\{3\} \{5\}} = \arccos\left(-\frac{\sqrt{15}}{15}\sqrt{3+4\phi}\right) \approx 142^\circ 37' 21''$$

$$R = \phi$$

$$\rho = \frac{\sqrt{3+4\phi}}{2}$$

### TRIAKONTAEDRO



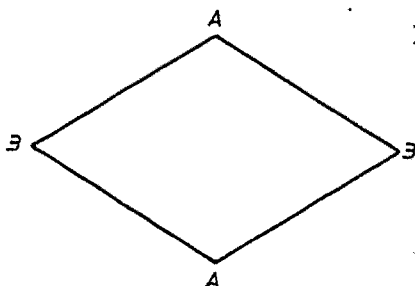
C	V		A
30	$V_3$	$V_5$	60
	20	12	
30	32		60

$$\delta = 144^\circ$$

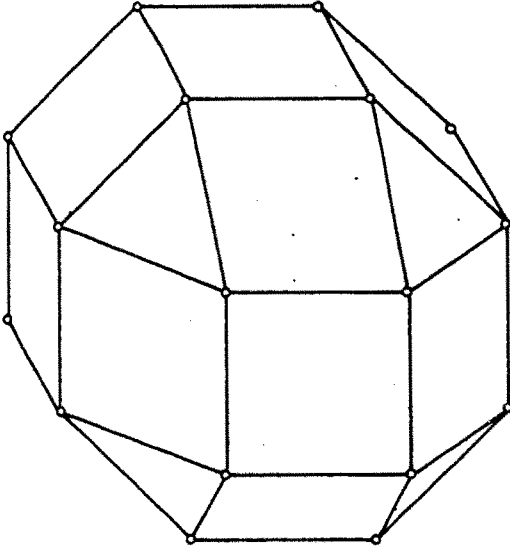
Las caras son rombos cuyas diagonales están en relación áurea.

$$A = \arccos\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) \approx 116^\circ 33' 54''$$

$$B = \arccos\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right) \approx 63^\circ 26' 6''$$



### ROMBICUBOCTAEDRO



C		V	A	
$C_{\{3\}}$	$C_{\{4\}}$	24	$A_{\{3\}\{4\}}$	$A_{\{4\}\{4\}}$
8	18		24	24
26		24	48	

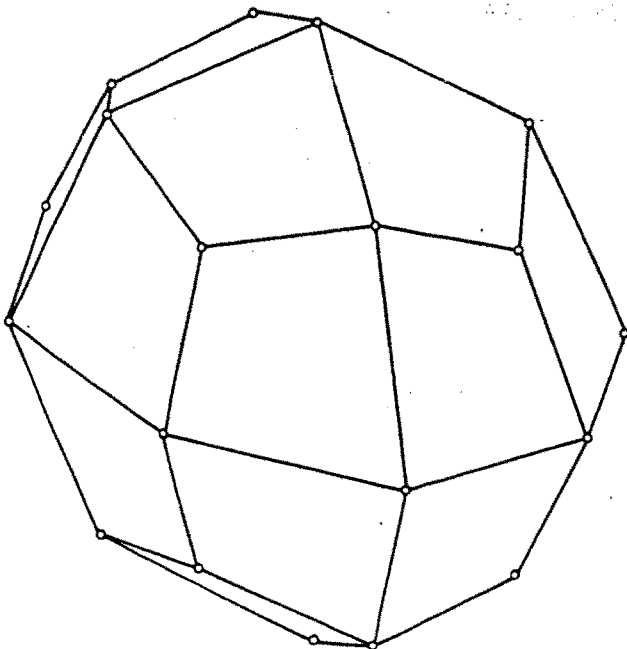
$$\delta_{\{3\}\{4\}} = \arccos\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right) \approx 144^\circ 44' 8''$$

$$\delta_{\{4\}\{4\}} = \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 135^\circ$$

$$R = \frac{\sqrt{5 + 2\sqrt{2}}}{2}$$

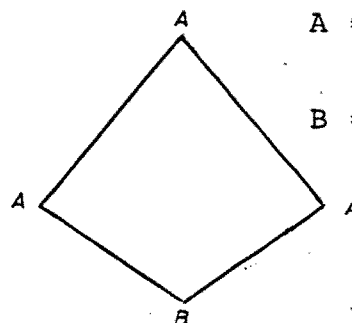
$$r = \frac{\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}}{2}$$

### ICOSITETRAEDRO TRAPEZOIDAL



C	V		A
24	$V_3$	$V_4$	48
	8	18	
24	26		48

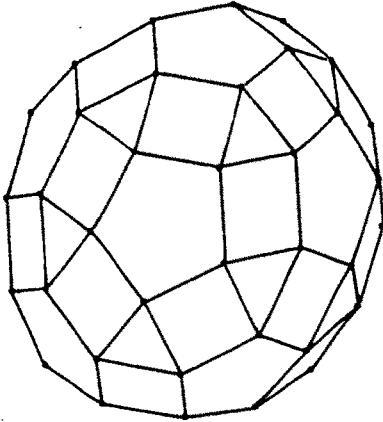
$$\delta \approx 138^\circ 6' 34''$$



$$A \approx 81^\circ 34' 44''$$

$$B \approx 115^\circ 15' 48''$$

### ROMBICOSIDODECAEDRO



C			V	A	
C <sub>{3}</sub>	C <sub>{4}</sub>	C <sub>{5}</sub>	60	A <sub>{3}{4}</sub>	A <sub>{4}{5}</sub>
20	30	12		60	60
62			60	120	

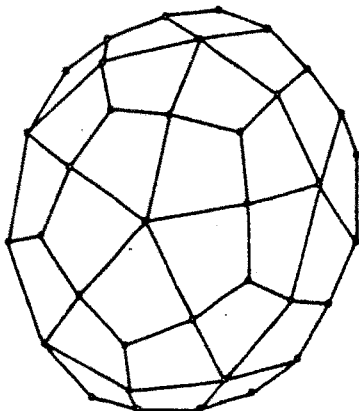
$$\delta_{\{3\}\{4\}} = \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\phi\right) \approx 159^\circ 5' 41''$$

$$\delta_{\{4\}\{5\}} = \arccos\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\sqrt{2+\phi}\right) \approx 148^\circ 16' 57''$$

$$R = \frac{\sqrt{7 + 8\phi}}{2}$$

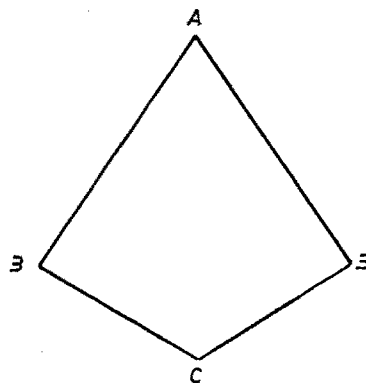
$$\rho = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{3 + 4\phi}$$

### HEXAKONTAEDRO TRAPEZOIDAL



C	V			A
60	V <sub>3</sub>	V <sub>4</sub>	V <sub>5</sub>	120
	20	30	12	
60	62			120

$$\delta \approx 154^\circ 8'$$

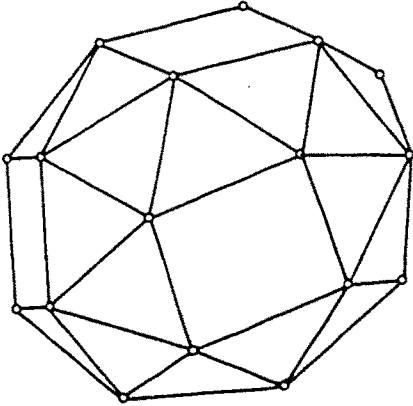


$$A \approx 67^\circ 46' 59''$$

$$B \approx 86^\circ 58' 27''$$

$$C \approx 118^\circ 16' 7''$$

CUBO ROMO



C		V	A	
$C_{\{3\}}$	$C_{\{4\}}$	24	$A_{\{3\}\{3\}}$	$A_{\{3\}\{4\}}$
32	6		36	24
38		24	60	

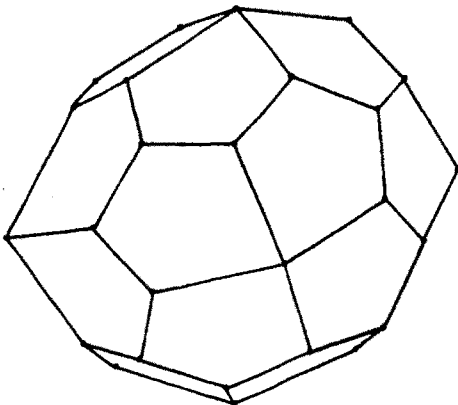
$$\delta_{\{3\}\{3\}} \approx 153^\circ 14' 4''$$

$$\delta_{\{3\}\{4\}} \approx 142^\circ 59'$$

$$R \approx 1,3436$$

$$\rho \approx 1,2472$$

ICOSITETRAEDRO PENTAGONAL



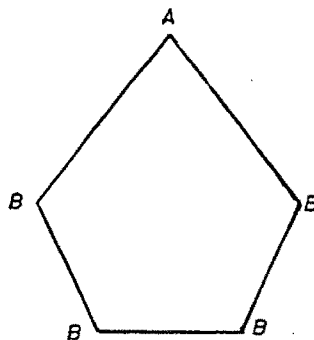
C	V		A
24	$V_3$	$V_4$	60
	32	6	
24	38		60

$$\delta \approx 136^\circ 20'$$

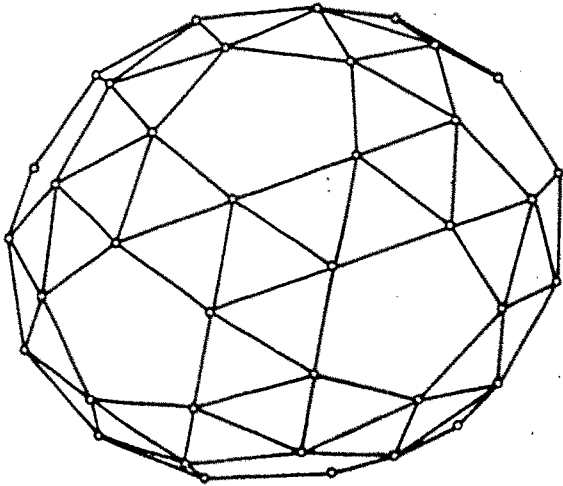
$$A \approx 80^\circ 45' 6''$$

$$B \approx 114^\circ 48' 43''$$

Los lados BB  
son iguales



DODECAEDRO ROMO



C		V	A	
$C_{\{3\}}$	$C_{\{5\}}$	60	$A_{\{3\}\{3\}}$	$A_{\{3\}\{5\}}$
80	12		90	60
92		60	150	

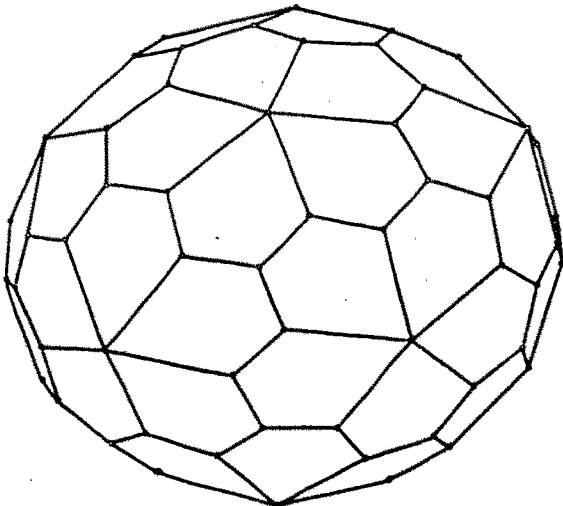
$\delta_{\{3\}\{3\}} \approx 164^\circ 10' 31''$

$\delta_{\{3\}\{5\}} \approx 152^\circ 55' 53''$

$R \approx 2,1556$

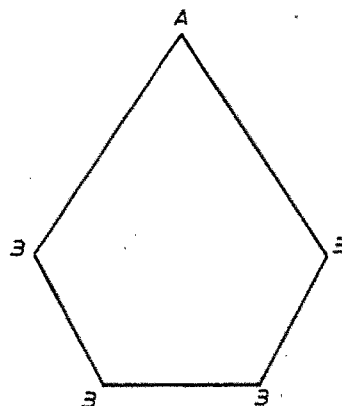
$\rho \approx 2,0969$

HEXAKONTAEDRO PENTAGONAL



C	V		A
60	$V_3$	$V_5$	150
	80	12	
60	92		150

$\delta \approx 153^\circ 10' 24''$

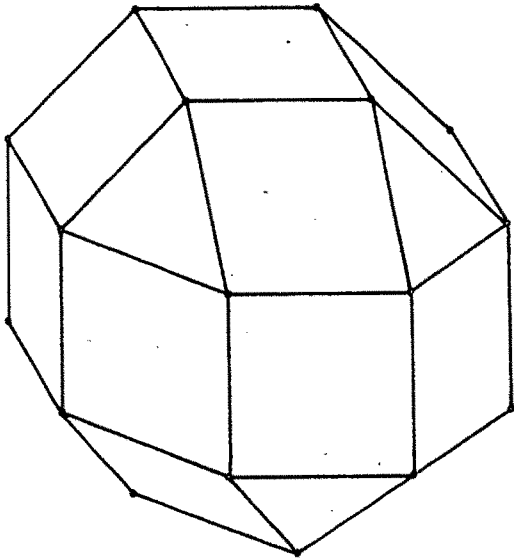


$A \approx 67^\circ 28'$

$B \approx 118^\circ 8'$

Los lados BB son iguales.

POLIEDRO DE AZHKINUZE



C		V	A	
C <sub>{3}</sub>	C <sub>{4}</sub>		A <sub>{3}{4}</sub>	A <sub>{4}{4}</sub>
8	18	24	24	24
26		24	48	

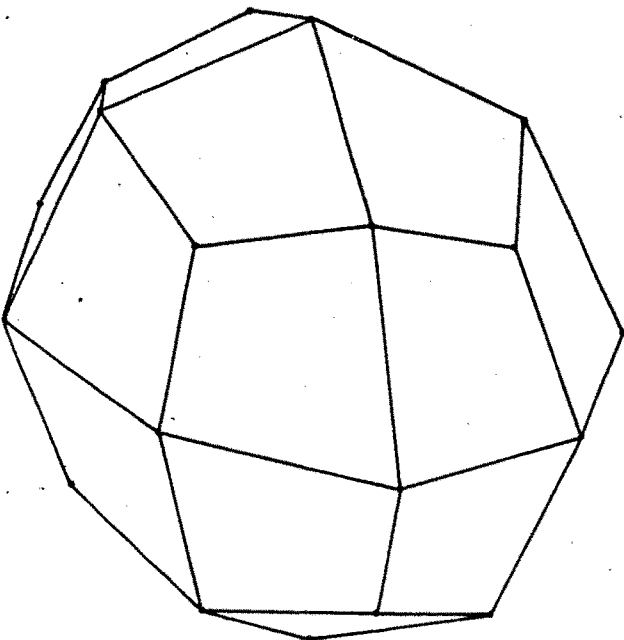
$$\delta_{\{3\}\{4\}} = \arccos\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right) = 144^\circ 44' 8''$$

$$\delta_{\{4\}\{4\}} = \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 135^\circ$$

$$R = \frac{\sqrt{5 + 2\sqrt{2}}}{2}$$

$$\rho = \frac{\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}}{2}$$

CONJUGADO DEL POLIEDRO DE AZHKINUZE

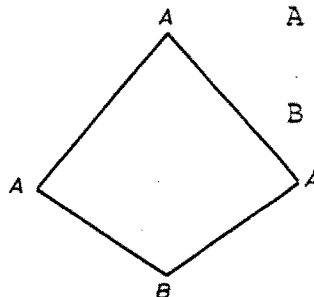


C	V		A
	V <sub>3</sub>	V <sub>4</sub>	
24	8	18	48
24	26		48

$$\delta \approx 138^\circ 6' 34''$$

$$A \approx 81^\circ 34' 44''$$

$$B \approx 115^\circ 15' 48''$$



Por último, ordenamos los poliedros regulares, arquimedianos y equifaciales de caras rombo de acuerdo con la relación  $I = \text{Superficie}/(\text{volumen})^{2/3}$ .

Evidentemente el mínimo valor de  $I$  se consigue con la esfera, que es el cuerpo que encierra un determinado volumen empleando la mínima envoltura.

Recorriendo la lista de abajo hacia arriba, los poliedros considerados, quedarían ordenados con valores decrecientes de  $I$ , lo cual nos indica que a medida que avanzamos en dicho sentido, obtendremos poliedros cuya estructura se encuentra más cercana a la esfera.

El valor de  $I$  representa la superficie necesaria para encerrar una unidad de volumen.

El valor de  $I/I_s$  expresa la relación entre la superficie de un poliedro y la de la esfera que encierra el mismo volumen.



Poliedro	Símbolo	$I=S/(Vol)^{2/3}$	$I/I_s$
Esfera		4,8360	1,0000
Dodecaedro romo	$(3^4, 5)$	4,9248	1,0184
Rombicosidodecaedro	$(3, 4, 5, 4)$	4,9380	1,0211
Icosidodecaedro truncado	$(4, 6, 10)$	4,9840	1,0305
Icosaedro truncado	$(5, 6^2)$	5,0024	1,0344
Cubo romo	$(3^4, 4)$	5,0106	1,0361
Triakontaedro		5,0328	1,0407
Rombicuboctaedro	$(3, 4^3)$	5,0690	1,0482
Icosidodecaedro	$(3, 5)^2$	5,0869	1,0519
Cuboctaedro truncado	$(4, 6, 8)$	5,1275	1,0603
Icosaedro	$\{3, 5\}$	5,1480	1,0645
Dodecaedro truncado	$(3, 10^2)$	5,2216	1,0797
Dodecaedro	$\{5, 3\}$	5,3126	1,0986
Octaedro truncado	$(4, 6^2)$	5,3146	1,0990
Cuboctaedro	$(3, 4)^2$	5,3437	1,1050
Rombododecaedro		5,3467	1,1056
Cubo truncado	$(3, 8^2)$	5,6925	1,1771
Octaedro	$\{3, 4\}$	5,7190	1,1826
Cubo	$\{4, 3\}$	6,0000	1,2407
Tetraedro truncado	$(3, 6^2)$	6,2370	1,2897
Tetraedro	$\{3, 3\}$	7,2055	1,4900

### 1.5.- POLIEDROS UNIFORMES

Si se obliga en la definición general de los poliedros (en general, no convexos) a que todas las caras sean polígonos regulares (los cuales no tienen por qué ser convexos) de uno o más tipos; y, que en todos sus vértices concurran el mismo número de caras igualmente dispuestas, se obtienen los poliedros uniformes.

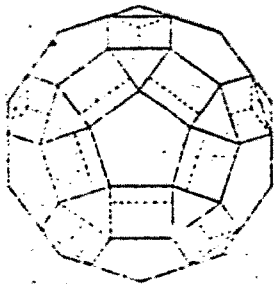
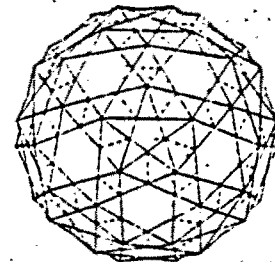
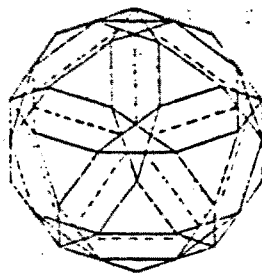
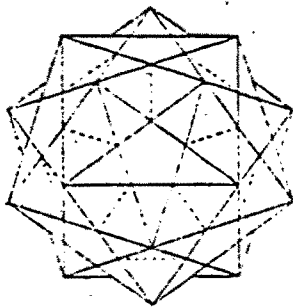
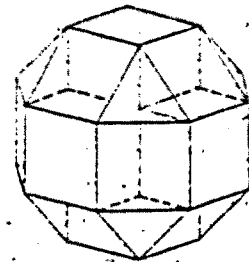
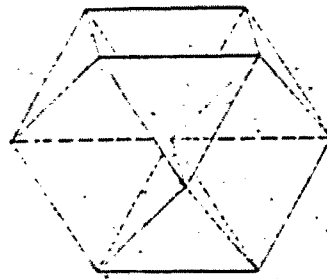
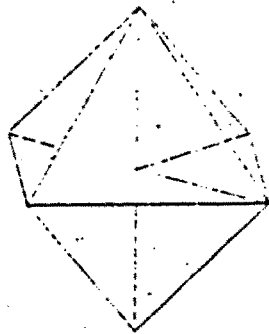
En el caso particular de que todas las caras sean iguales, obtenemos los poliedros regulares (convexos y estrellados).

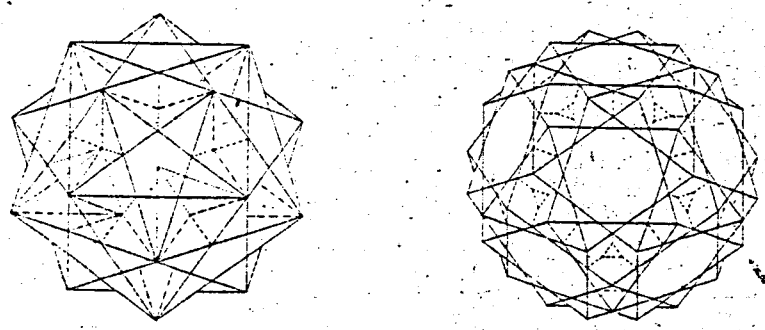
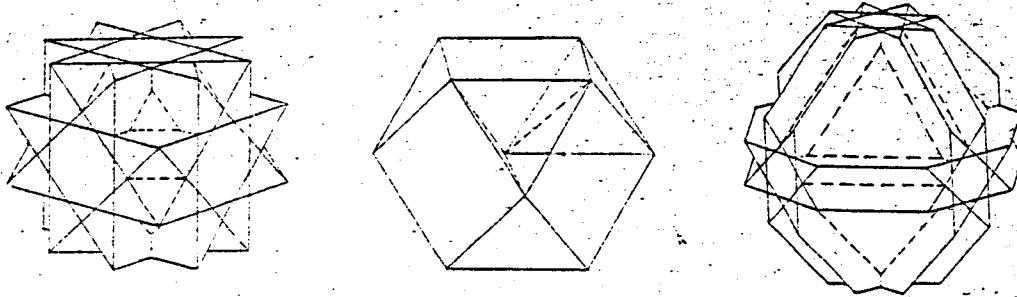
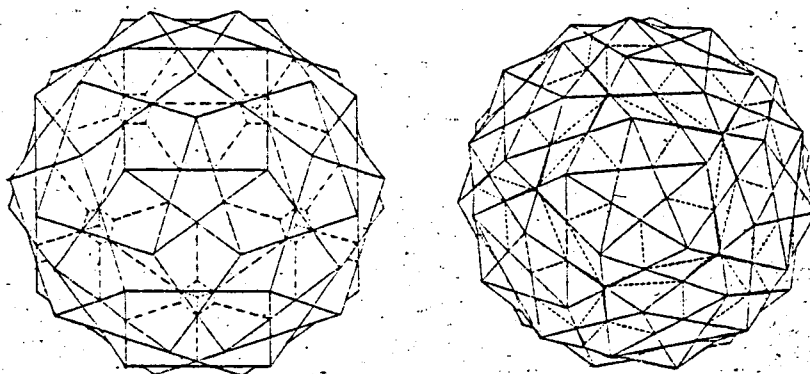
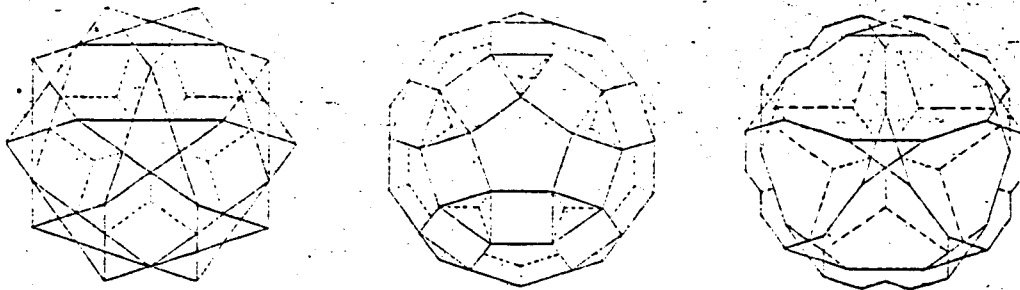
Junto a los cinco cuerpos de Platón, los trece arquimedianos, el poliedro de Azhkinuze, los cuatro poliedros estrellados regulares de Kepler (1619) y Poincot (1810), y de las familias infinitas de prismas y antiprismas, hay por lo menos otros cincuenta y tres; cuarenta y uno de los cuales fueron descubiertos por Badoureau (1881) y Pitch (1881). Los doce que faltaban fueron descubiertos por Coxeter y Miller entre 1930 y 1932, pero la publicación fue pospuesta a la espera de obtener una demostración de que la serie estaba completa.

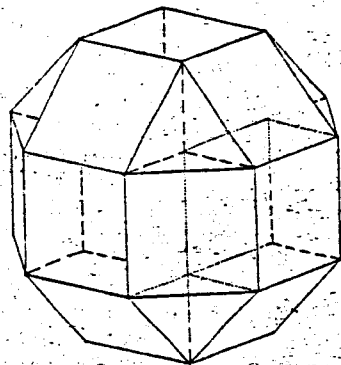
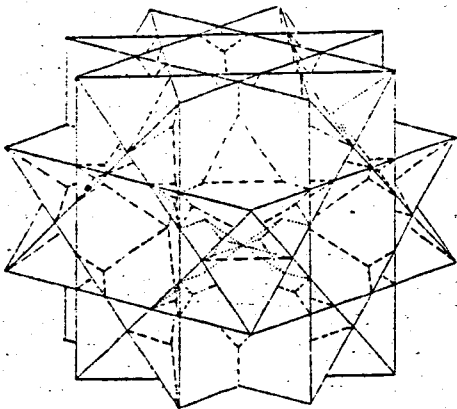
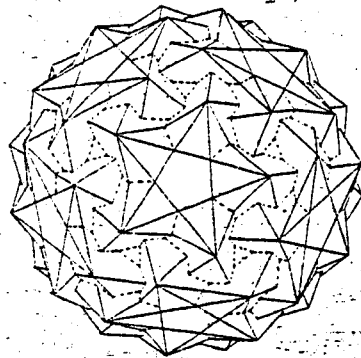
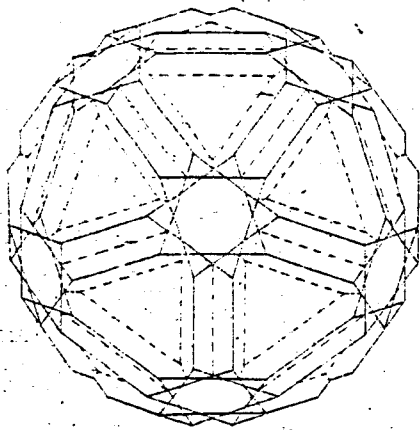
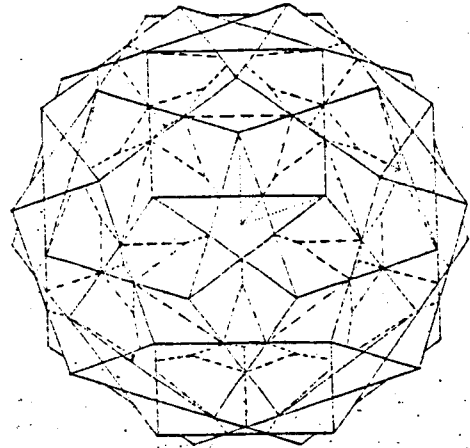
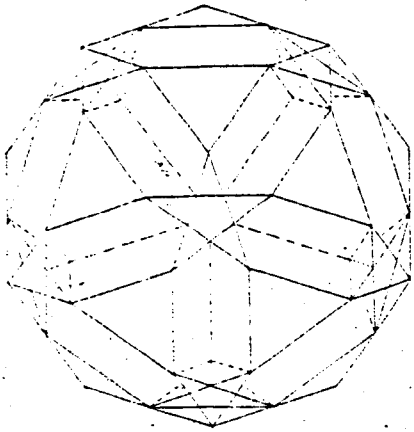
Por fin, en 1953, se dió a conocer el conjunto de los poliedros uniformes sin haber conseguido alcanzar su propósito de acompañarlos con una demostración rigurosa de que no existían más que los que se ofrecían.

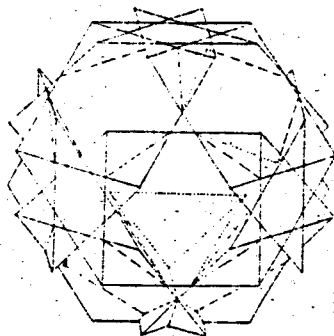
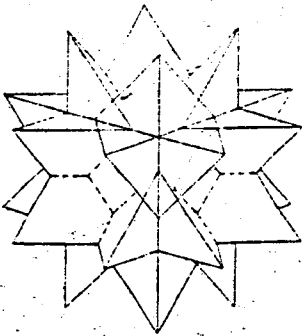
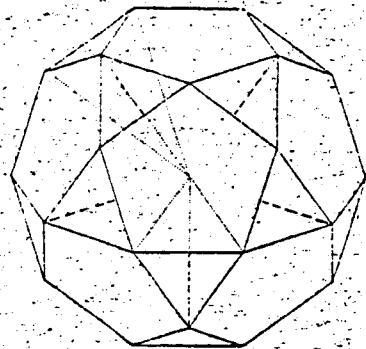
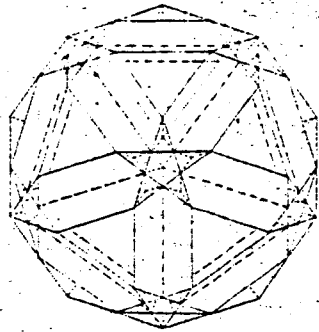
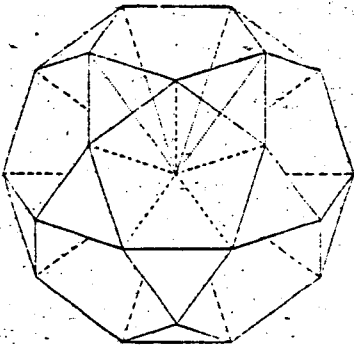
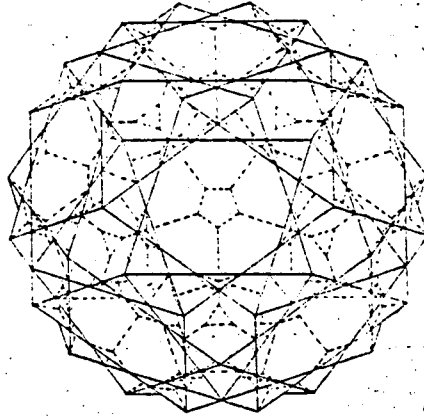
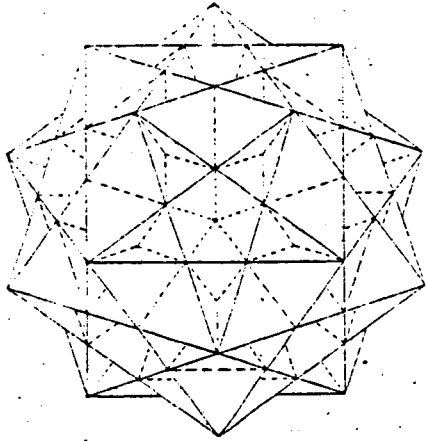
La enumeración de los poliedros uniformes está basada en una aplicación sistemática de la construcción de Wythoff's a todos los posibles triángulos de Schwarz. Todos, excepto uno de los poliedros, pueden ser obtenidos de esta manera.

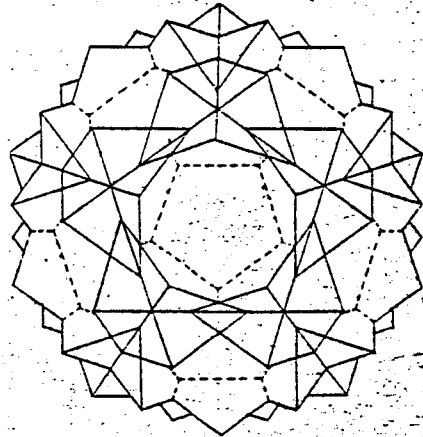
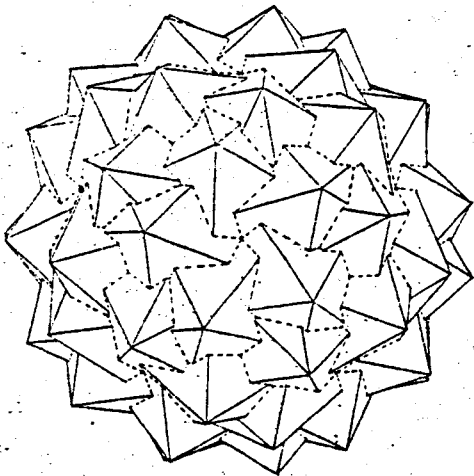
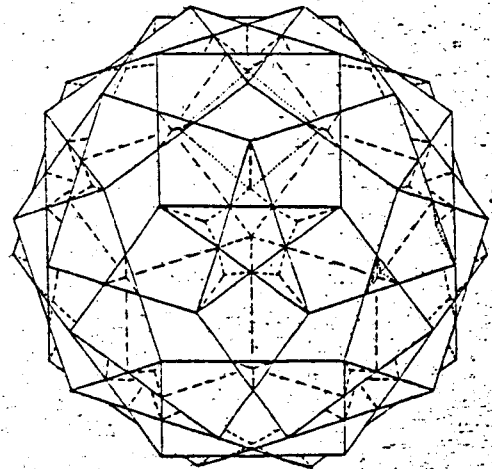
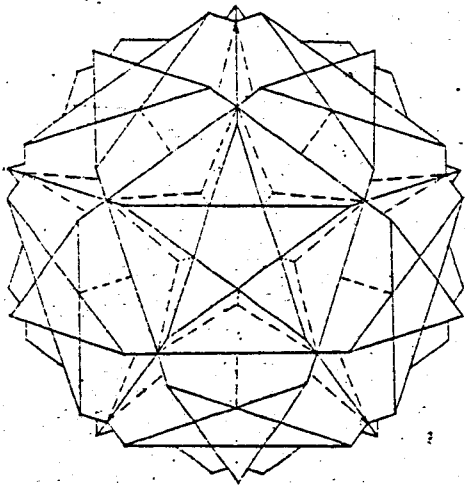
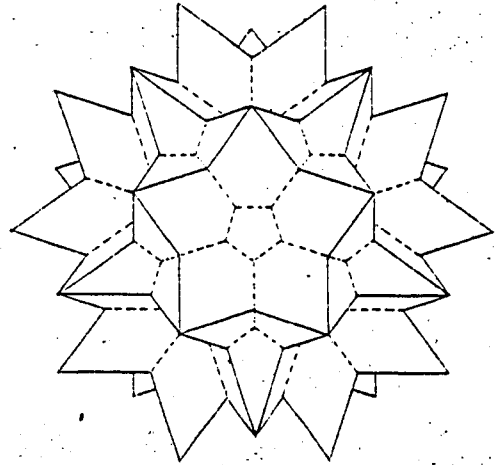
En las páginas que siguen, se ofrecen los cincuenta y tres poliedros uniformes a los que nos hemos referido.

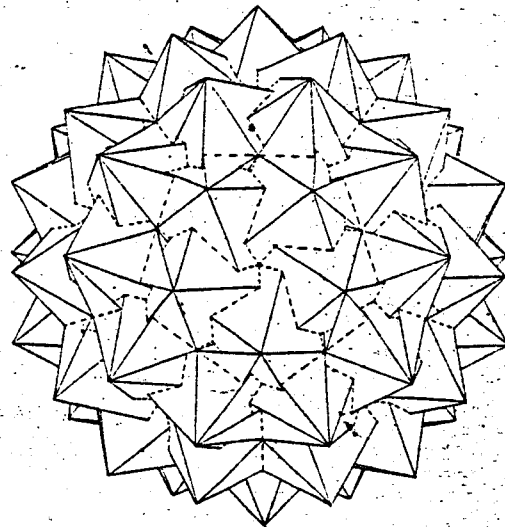
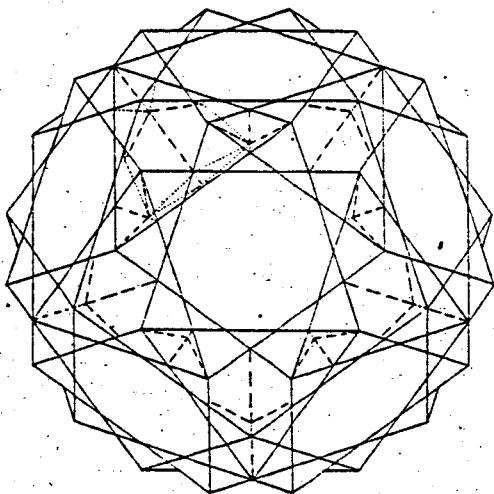
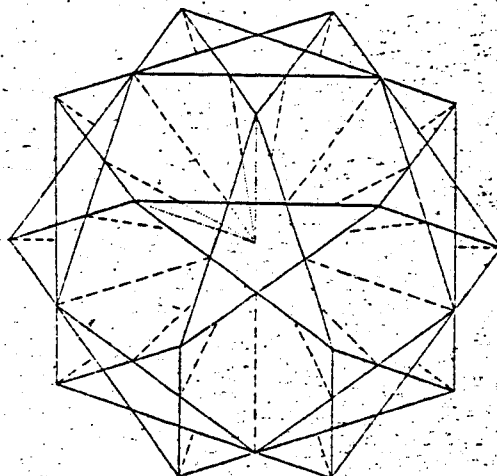
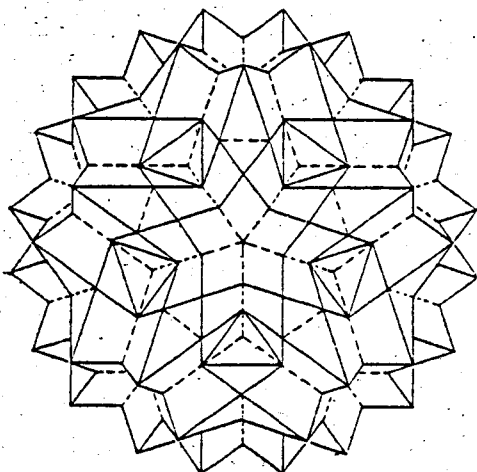
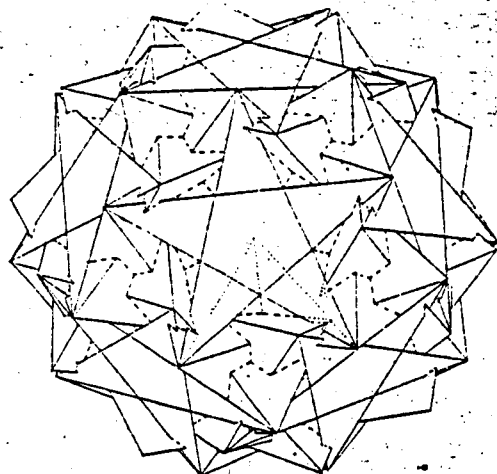
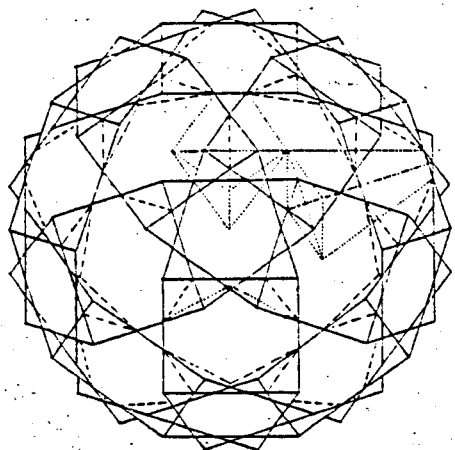




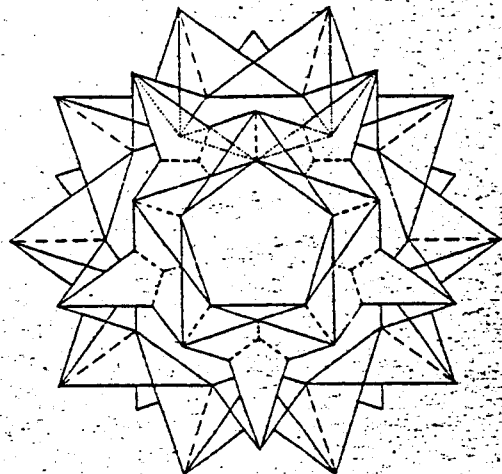
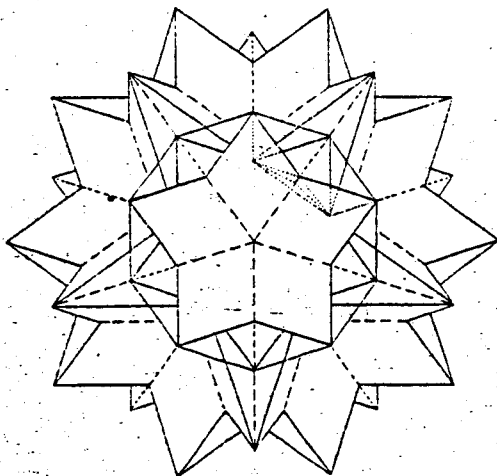
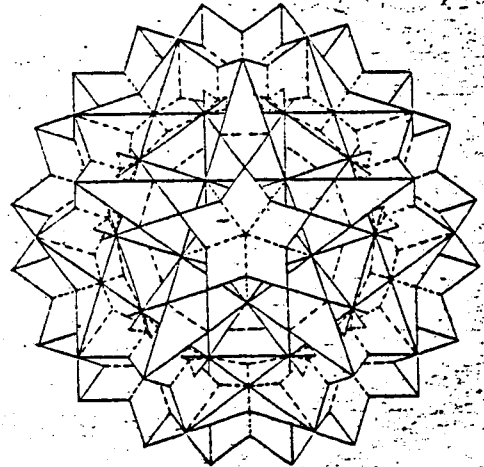
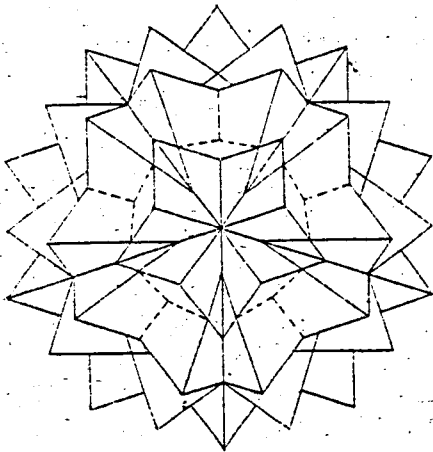
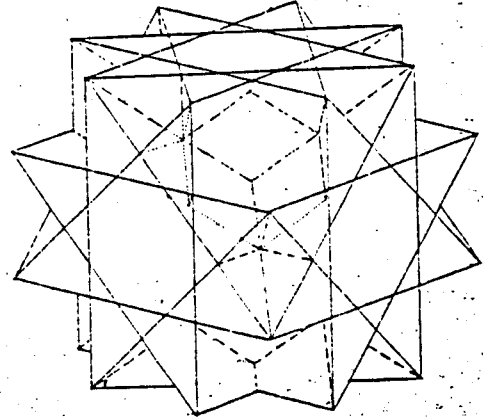
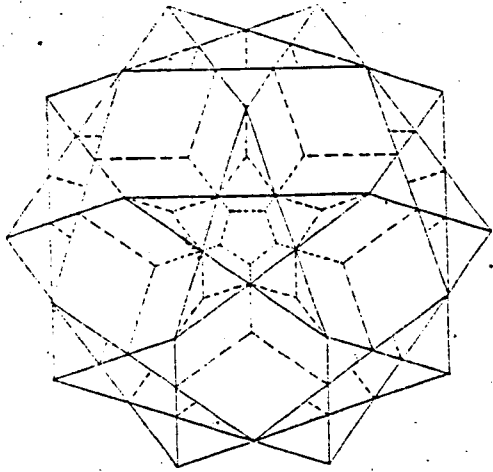


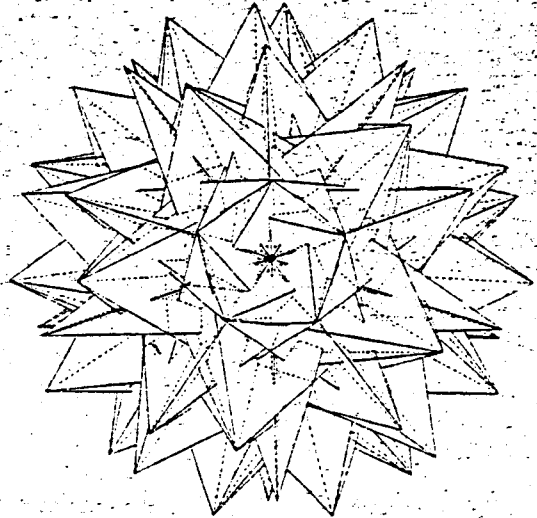
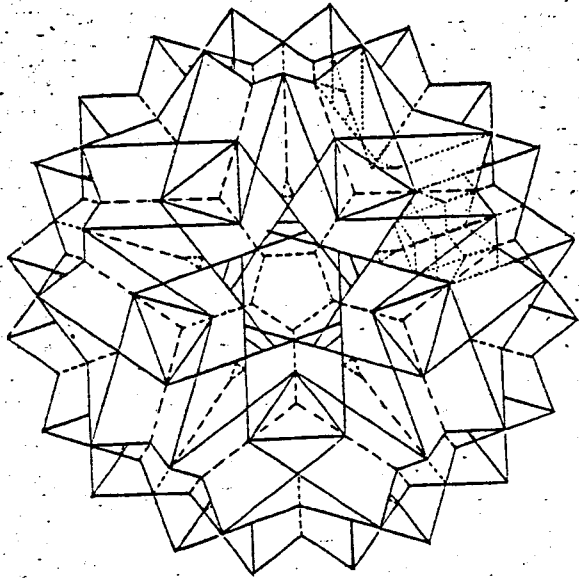
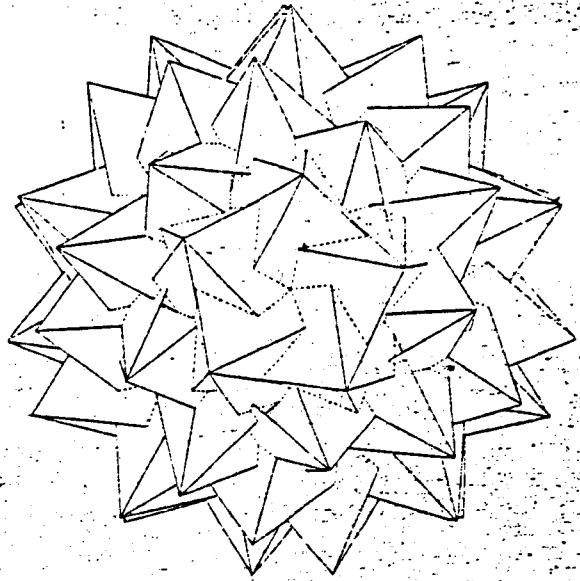
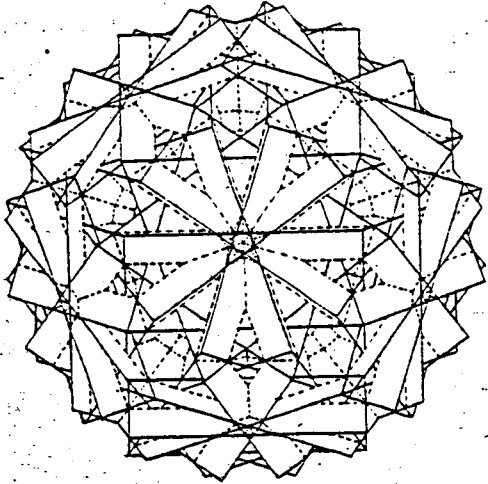


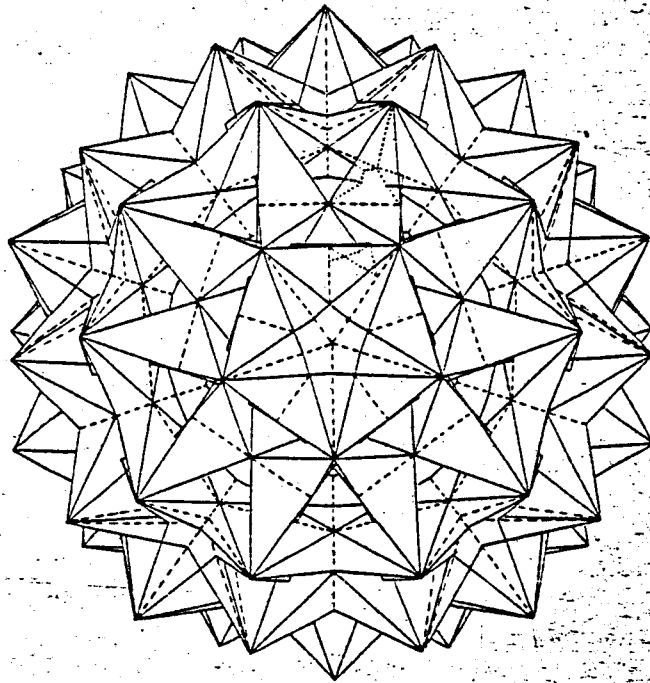
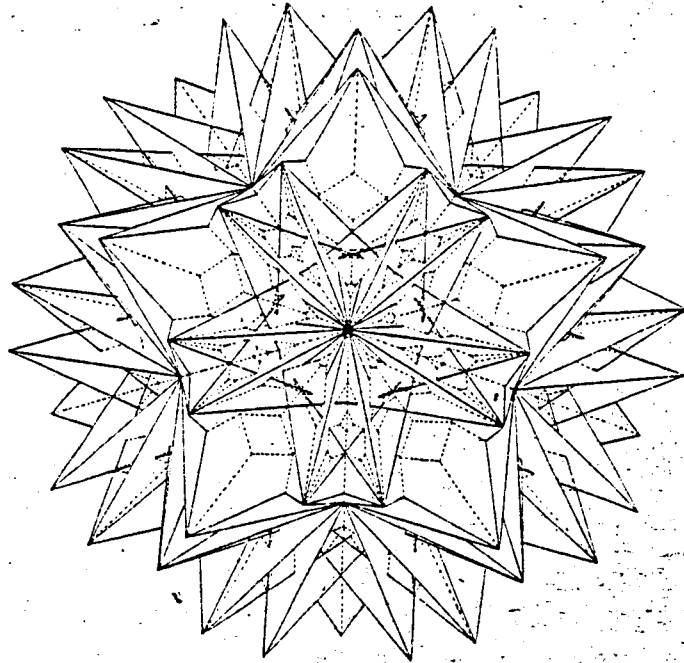












### 1.6.- POLIEDROS CONVEXOS CON CARAS REGULARES

Si a la definición de poliedros convexos añadimos - que todas las caras sean polígonos regulares; es decir, la primera condición, estaremos en presencia de los poliedros convexos con caras regulares.

El planteamiento de obtener poliedros convexos con caras polígonos regulares aparece en 1946, cuando desde - Tashkent, L. Esaulova envía un manuscrito al Departamento de Geometría de la Universidad de Leningrado, en el cual - exponía la problemática de la forma de los poliedros convexos con caras regulares. La dirección de L. Esaulova -- permaneció desconocida a pesar de las investigaciones de la Oficina de Direcciones de la ciudad de Tashkent. En su manuscrito presentaba una tabla de posibles tipos de vértices y los diagramas esquemáticos de un número de poliedros.

Las figuras no hacían un estudio exhaustivo de todos los poliedros. Una considerable parte de ellos eran erróneos y cuando fueron pegados los desarrollos correspondientes se vió que no correspondían a poliedros con caras regulares.

Viktor A. Zalgaller ayudado por muchos colaboradores y personas interesadas en el tema, desarrolló y publicó en 1966 el trabajo completo cuyas conclusiones fundamentales fueron:

- Además de los primas  $\Pi_3$ ,  $\Pi_4$ , ... y de los antiprismas  $A_4$ ,  $A_5$ , ... existen sólo 28 poliedros simples de caras regulares. Se dice que un poliedro de caras regulares es simple si no puede ser descompuesto en dos poliedros de caras regulares por un plano.

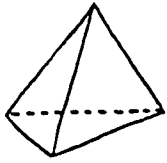
- Dejando aparte primas y antiprismas, poliedros regulares y arquimedianos existen sólo 92 poliedros convexos de caras regulares.

Este trabajo engloba como caso particular a los cinco deltaedros que no son poliedros regulares.

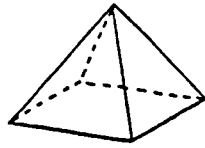
En la literatura especializada se ha aceptado el nombre de deltaedro a aquellos poliedros convexos cuyas caras son exclusivamente triángulos equiláteros.

Solamente hay ocho deltaedros convexos, los de 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16 y 20 caras. Como se observa en esta serie de números pares falta el deltaedro de 18 caras. La demostración de que solamente existen ocho deltaedros convexos no fue conocida hasta el año 1947, año en que fue publicada por B.L. Van der Waerden y Hans Freudenthal en el número 25 de la revista Simon Stevin (págs. 115-121) bajo el título "Over een bewering van Euclides"

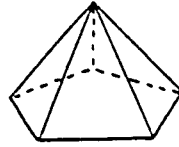
A continuación se reúnen las representaciones gráficas de los 28 poliedros simples de caras regulares y de los 8 deltaedros.



M<sub>1</sub>



M<sub>2</sub>



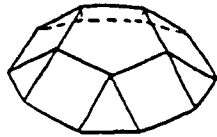
M<sub>3</sub>



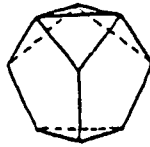
M<sub>4</sub>



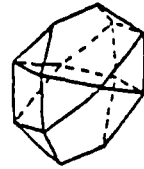
M<sub>5</sub>



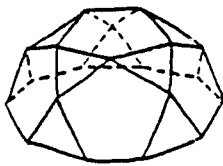
M<sub>6</sub>



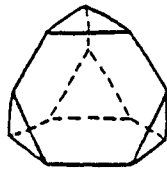
M<sub>7</sub>



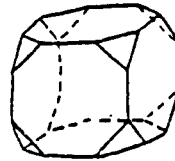
M<sub>8</sub>



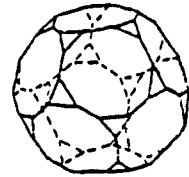
M<sub>9</sub>



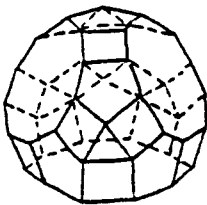
M<sub>10</sub>



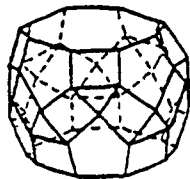
M<sub>11</sub>



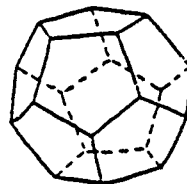
M<sub>12</sub>



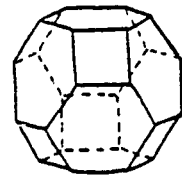
M<sub>13</sub>



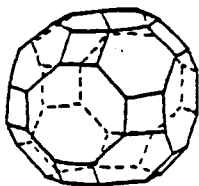
M<sub>14</sub>



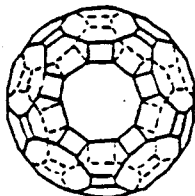
M<sub>15</sub>



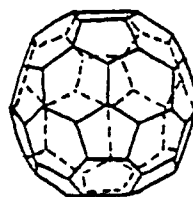
M<sub>16</sub>



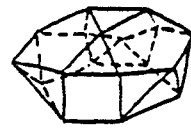
M<sub>17</sub>



M<sub>18</sub>



M<sub>19</sub>



M<sub>20</sub>

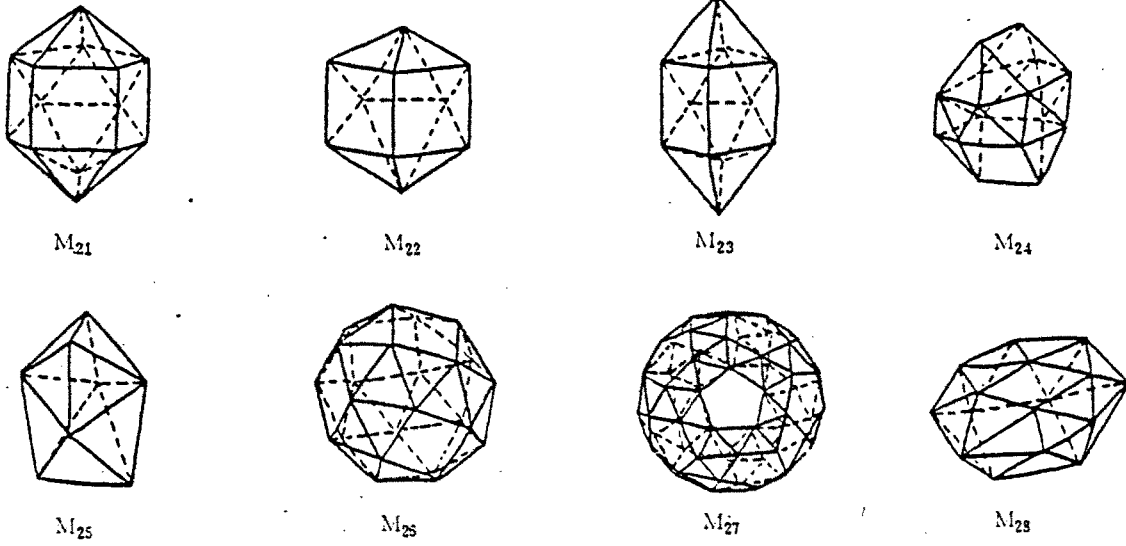


Fig. 1.6<sub>A</sub>. Los 28 poliedros simples de caras regulares

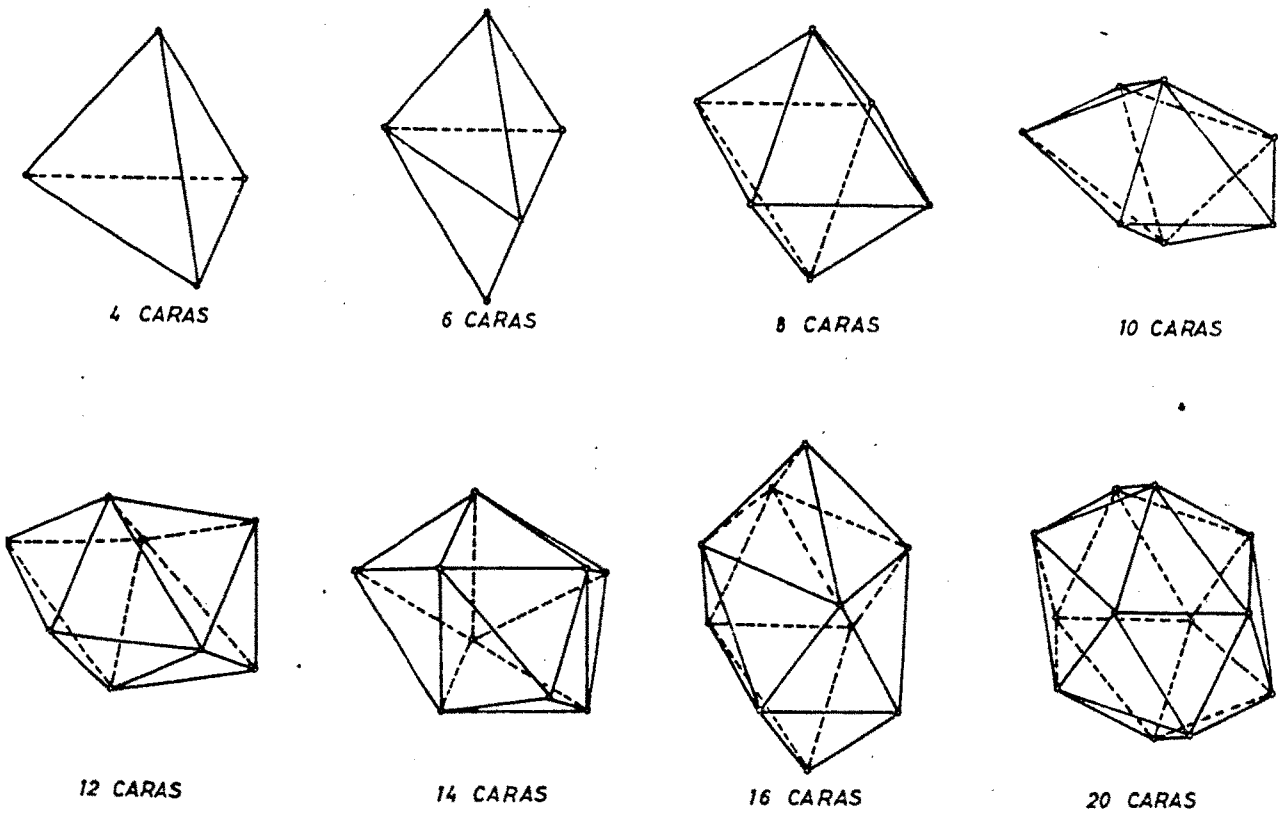


Fig 1.6<sub>B</sub> LOS OCHO DELTAEDROS

1.7.- ZONOEDROS

La definición más simple y la que en principio se da de un zonoedro es la de un poliedro convexo cuyas caras son paralelogramos.

La teoría general de estos cuerpos es debida al cristalógrafo ruso E.S. Fedorov.

Si  $n$  es el número de direcciones diferentes en que se hallan las aristas, no es difícil demostrar que un poliedro así definido tiene  $n(n-1)$  caras,  $2n(n-1)$  aristas y  $n(n-1) + 2$  vértices.

<u>Direcciones</u>	<u>Caras</u>	<u>Vértices</u>	<u>Aristas</u>
3	6	8	12
4	12	14	24
5	20	22	40
6	30	32	60
⋮	⋮	⋮	⋮
$n$	$n(n-1)$	$n(n-1) + 2$	$2n(n-1)$

Una estrella se define como un conjunto de  $n$  segmentos con un punto medio común, y diremos que es no singular si ninguna terna de segmentos son coplanarios. Se puede comprobar que todo poliedro convexo formado por paralelogramos determina una estrella no singular, teniendo un segmento por



cada conjunto de  $2(n-1)$  aristas paralelas.

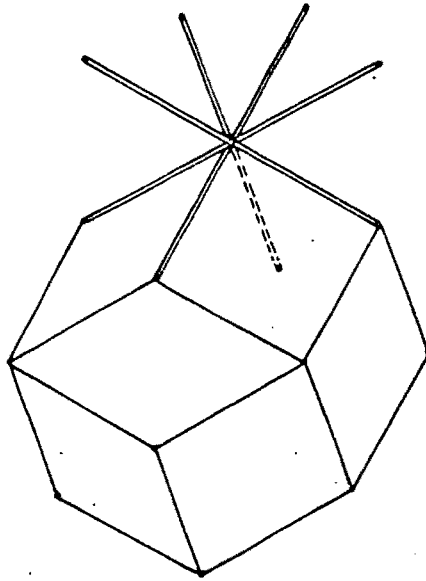


Fig. 1.7<sub>A</sub>

Inversamente, la estrella determina el poliedro. Sean  $\underline{n}$  vectores  $\vec{e}_1, \vec{e}_2 \dots \vec{e}_n$  representados por los segmentos de la estrella (con un sentido definido sobre la dirección de cada uno de los segmentos).

Las varias sumas de estos vectores sin repetición

$$\sum x_i \vec{e}_i \quad (x_i = 0 \text{ ó } 1)$$

conducirá de un punto dado a un conjunto de  $2^n$  puntos no necesariamente todos distintos. El más pequeño cuerpo convexo que contiene a todos estos puntos (en la superficie o en el interior) es un poliedro cuyas aristas son paralelas a los vectores  $\vec{e}_i$ . Si la estrella es no singular, las caras son paralelogramos.

En el caso de que la estrella sea singular, transformará algunas caras del poliedro en polígonos de  $2p$  lados ( $p > 2$ ) y cuyos lados opuestos serán paralelos; por tanto, generalizaremos la definición de zonoedro y llamaremos zonoedro general a todo poliedro convexo cuyas caras (incluso no siendo polígonos regulares) tienen simetría central. Esta definición agrupa tanto a los zonoedros que proceden de estrellas no singulares como a los formados a partir de estrellas singulares.

Hay que tener en cuenta para estos últimos, en la expresión que da el número de caras, que cada polígono de  $2p$  lados ocupará el lugar de  $\binom{p}{2}$  paralelogramos.

De acuerdo con el teorema de Alexandroff, que dice: "*Si toda cara de un poliedro convexo tiene simetría central, también la tendrá el poliedro*", (el recíproco de este teorema es falso) se puede asegurar que todo zonoedro general tiene simetría central.

Zonoedro equilátero, es todo aquel que procede de estrellas (singulares o no singulares) cuyos segmentos sean iguales.

Zonoedro polar, es todo aquel determinado por una estrella, que para  $n$  par una vértices opuestos de un prisma  $n$ -gonal ( $\Pi_n$ ) y para  $n$  impar una vértices opuestos de un antiprisma  $n$ -gonal ( $A_n$ ).

De las propias definiciones se deduce que todo zonoedro polar es equilátero (lo recíproco no es cierto), sus  $n(n-1)$  caras serán rombos y estarán distribuidos de la siguiente forma:  $n$  rombos iguales rodeando un vértice; otros  $n$  rombos debajo, iguales entre sí, pero en general, diferentes a las anteriores y así sucesivamente; en total,  $(n-1)$  conjuntos de  $n$  rombos, terminando con aquellos que rodean el vértice opuesto.

Del conjunto de los cinco cuerpos Platónicos, los trece arquimedianos y sus trece conjugados equifaciales, solamente seis poliedros (si exceptuamos los  $\Pi_{2n}$ ), responden a la definición de zonoedro. Son éstos:

- 1.- El cubo (caras cuadrado).
- 2.- El octaedro truncado o poliedro de Lord Kelvin (caras cuadrados y hexágonos regulares).
- 3.- El cuboctaedro truncado (caras cuadrados, hexágonos regulares y octógonos regulares).
- 4.- El icosidodecaedro truncado (caras cuadrados, hexágonos regulares y decágonos regulares).
- 5.- El rombododecaedro (caras rombo)
- 6.- El triakontaedro (caras rombo)

Es oportuno destacar que los cinco cuerpos topológicamente diferentes que equiparten al espacio permaneciendo igualmente orientados son zonoedros. (Haremos referencia expresa a ello en el próximo apartado)

Conviene señalar, por último, que todo zonoedro que procede de una estrella no singular puede ser descompuesto en  $\binom{n}{3}$  paralelepípedos.

#### 1.8.- DISTINTAS FORMAS DE RELLENAR EL ESPACIO Y LA EQUIPARTICION DEL MISMO.

Entenderemos que un número finito de cuerpos convexos (al objeto de evitar que se pueda descomponer el espacio en infinitos cuerpos diferentes y ser recompuesto similarmente a como se hace con un puzzle plano), es capaz de rellenar el espacio, cuando se pueden acoplar unos a otros indefinidamente en las tres direcciones del espacio sin dejar huecos o intersticios entre ellos.

Si existe una combinación de cuerpos tal que rellene el espacio, también lo rellenará cualquier otra que proceda de la anterior por transformación proyectiva afín de todo el conjunto.

Por tanto, desechemos cualquiera de las infinitas combinaciones que procedan por transformación afín de una compactación base o primaria.

Además, se les suele imponer a todos los poliedros que intervienen en una combinación que rellena espacio, el que permanezcan igualmente orientados.

En consecuencia, diremos que se produce la equipartición del espacio cuando interviene un sólo tipo de poliedro y permanecen él y todos sus iguales, idénticamente orientados.

El primer estudio riguroso sobre la partición del espacio se debe a E.S. Fedorov quién en 1885 publicó un trabajo en que daba a conocer los posibles poliedros que por yuxtaposición de individuos idénticos o enantiomorfos pueden llenar el espacio sin intersticios, a los cuales llamó este roedros.

Numerosos autores continuaron el estudio de este problema geométrico, especialmente Alexandroff, Andreini, Barlow, Chaundy, Delaunay, Engeihardt, Heesch, Keller, Lord Kelvin, Nowacki, Reinhardt, Schubnikow, Steinitz, Tertsch y el propio Fedorov. Sin que esta bibliografía sea completa, hace ver de todos modos el interés que ha suscitado este problema entre los geómetras, matemáticos y cristalógrafos de fines del siglo pasado y primera mitad de éste.

Con las restricciones que acabamos de hacer, la equipartición del espacio solamente se puede hacer por medio de cinco poliedros topológicamente diferentes, a saber:

- El cubo
- El prisma hexagonal
- El octaedro truncado o poliedro de Lord Kelvin
- El rombododecaedro
- El rombododecaedro alargado

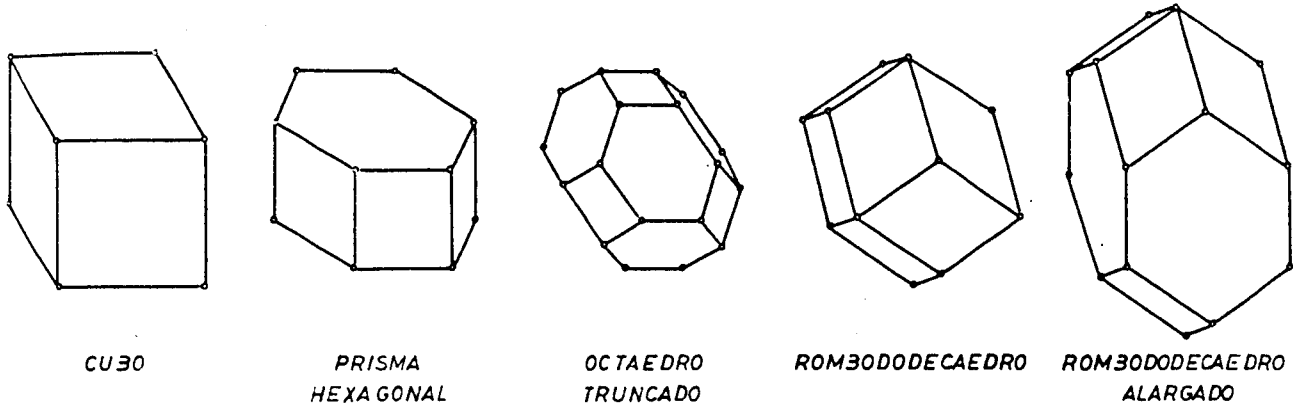
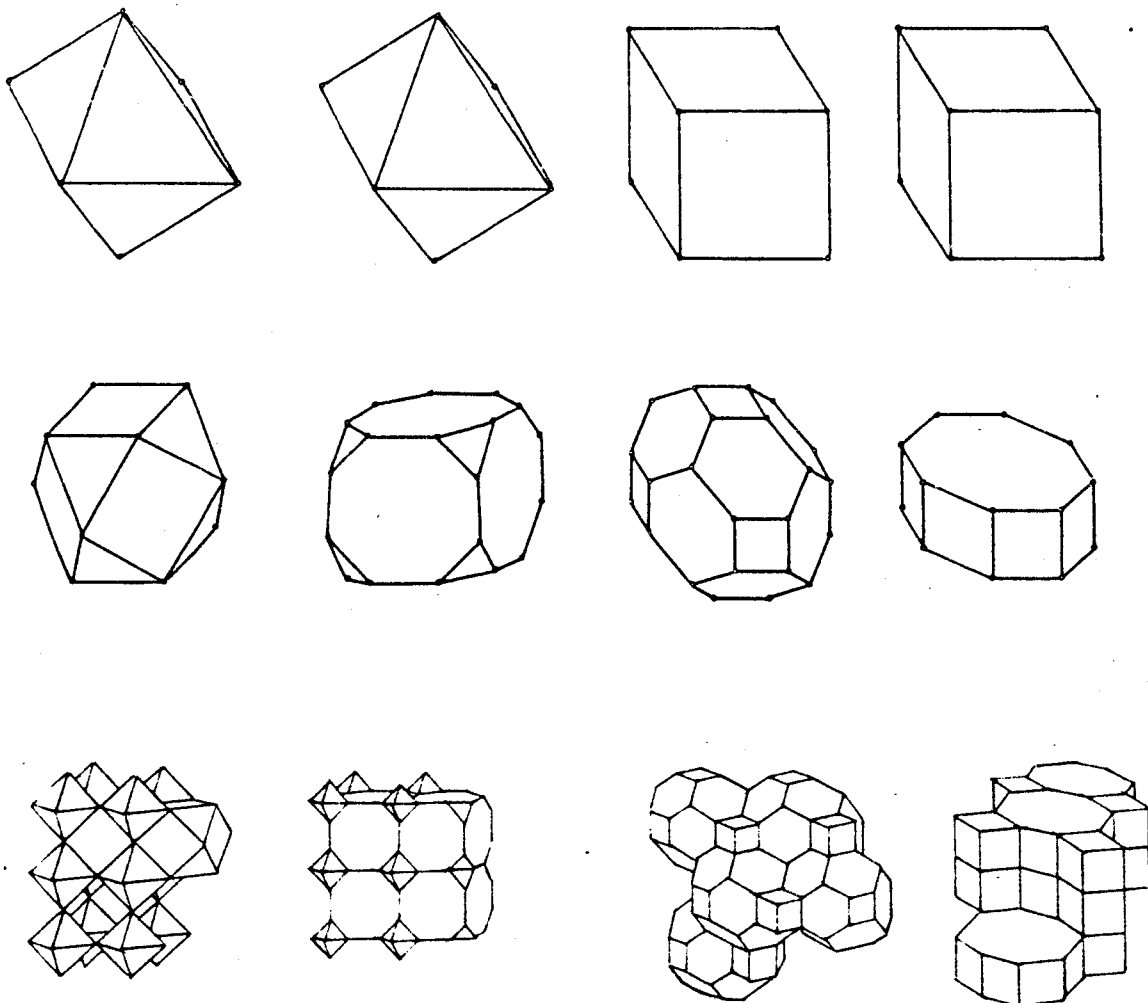


Fig. 1.8A

Con las mismas restricciones solamente existen cuatro combinaciones de dos cuerpos diferentes que permiten rellenar el espacio y son los que se esquematizan a continuación:



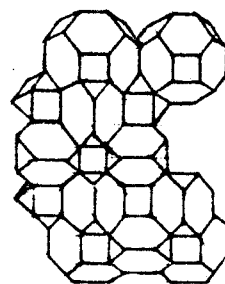
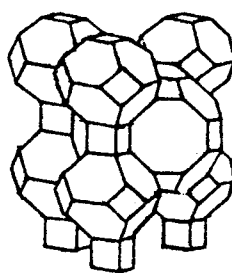
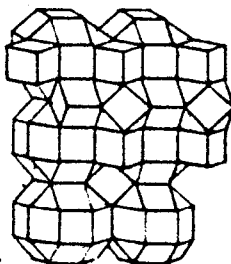
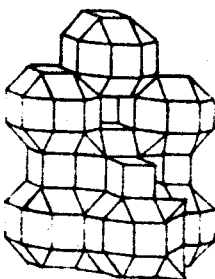
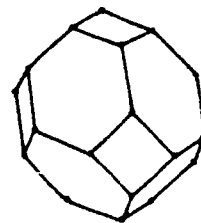
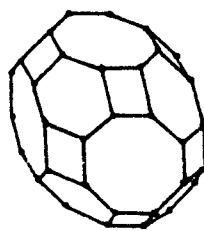
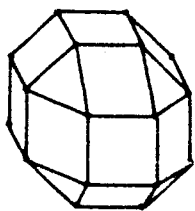
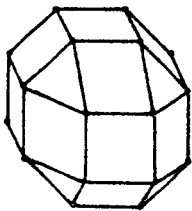
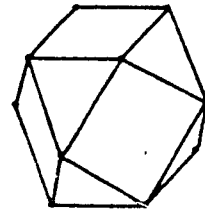
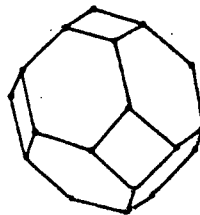
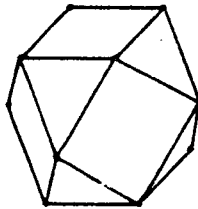
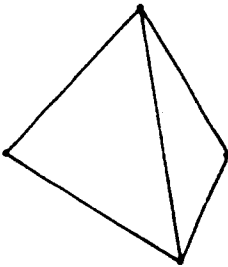
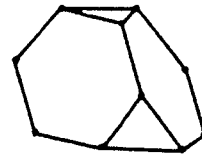
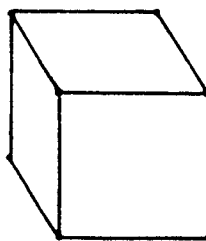
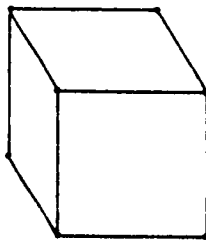
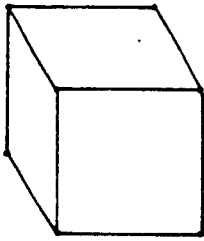
Existen otras combinaciones de dos cuerpos diferentes que permiten compactar el espacio; pero, con la pérdida de la igualdad de orientación de alguno de los poliedros.

Sin duda, la más importante de éstas es la que combina tetraedros y octaedros, ya citada en las aplicaciones de los poliedros regulares a las cubiertas planas.

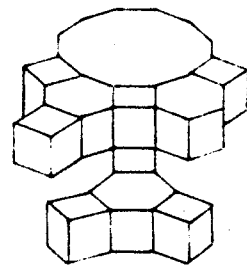
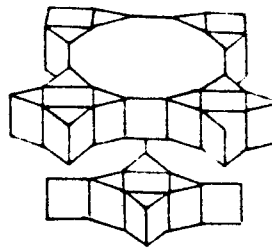
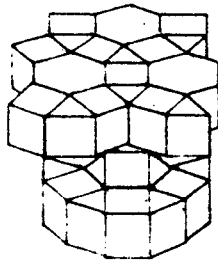
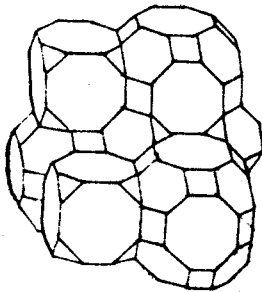
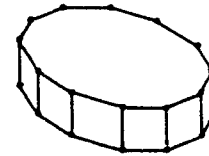
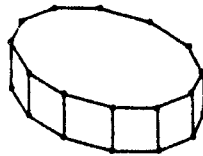
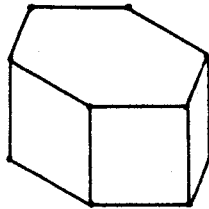
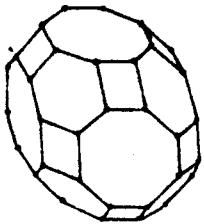
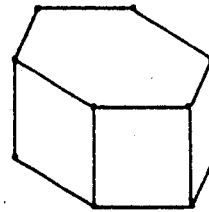
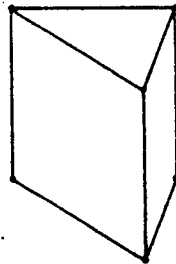
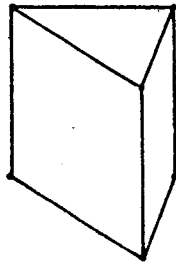
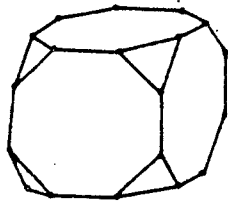
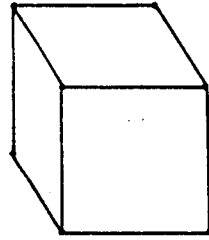
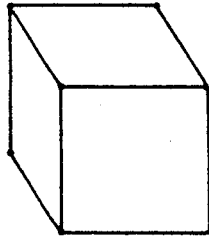
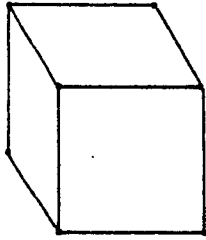
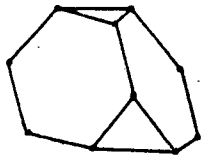
Si se siguen manteniendo las condiciones anteriores, ya no existen combinaciones de más de dos cuerpos que permitan rellenar el espacio, aunque si eliminamos la restricción de que los cuerpos queden igualmente orientados, existen ocho combinaciones de tres poliedros diferentes (regulares y arquimedianos) que son capaces de rellenar el espacio.

En las páginas siguientes, se ofrecen estas ocho combinaciones ternarias, junto con los poliedros que las forman.

*Con cuanto antecede, se resume y extracta el estado actual del conocimiento sobre los poliedros convexos, las formas de rellenar o equipartir el espacio y las aplicaciones que de ellos se derivan*







### 1.9.- CONCLUSIONES

- Solamente existen cinco poliedros topológicamente diferentes que equiparten el espacio.
  
- Son posibles cuatro combinaciones binarias de poliedros que rellenen el espacio y en el que todos los sólidos permanezcan igualmente orientados.
  
- Hay ocho combinaciones ternarias de poliedros regulares y arquimedianos que permiten rellenar el espacio sin quedar igualmente orientados.

(Estado actual del conocimiento).

CAPITULO II

## CAPITULO II

OBTENCION DE LAS RELACIONES QUE LIGAN ENTRE SI A LOS  $\binom{N}{2}$  ANGULOS, QUE INTERVIENEN EN LOS ZONOEDROS EQUILATEROS PROCEDENTES DE ESTRELLAS NO-SINGULARES FORMADAS POR N SEGMENTOS IGUALES, PARA VALORES DE  $N=3$ ,  $N=4$ ,  $N=5$ ,  $N=6$ .

### 2.1.- PLANTEAMIENTO GENERAL DEL PROBLEMA

De lo ya dicho en el punto 1.7 se desprende facilmente que partiendo de una estrella no singular formada por  $n$  segmentos iguales se obtiene un zonoedro de  $n(n-1)$  caras rombos. Por gozar de simetría central, el número máximo posible de caras rombo diferentes será  $\binom{n}{2}$  y los ángulos que las definen serán los que forman entre sí los  $n$  segmentos de la estrella tomados dos a dos.

El objetivo que se trata de alcanzar en el presente capítulo es relacionar entre sí estos  $\binom{n}{2}$  ángulos, para lograr los fines siguientes:

- Definir un zonoedro cualquiera a partir de las caras no relacionadas entre sí.
- Deducir las propiedades comunes intrínsecas en estos zonoedros.
- Obtener los zonoedros singulares o particulares.

2.2.- RELACIONES QUE LIGAN ENTRE SI A LOS ANGULOS QUE INTERVIENEN EN LOS ZONOEDROS EQUILATEROS PROCEDENTES DE ESTRELLAS NO-SINGULARES FORMADAS POR TRES SEGMENTOS IGUALES.

A partir de una estrella no-singular formada por tres segmentos iguales se obtiene un zonoedro equilátero compuesto de 6 caras rombo.

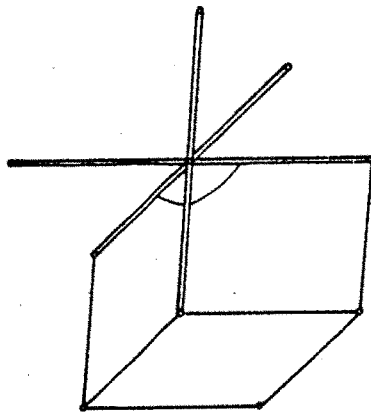


Fig 2.2<sub>A</sub>

Debido a la simetría central del zonoedro el número máximo posible de caras rombo diferentes será 3 y los ángulos que las definen serán los que forman entre sí los 3 segmentos de la estrella tomados dos a dos. No existe

correlación alguna entre estos ángulos; y todos los cuerpos así obtenidos son los conocidos bajo el nombre de rombohexaedros, cuerpos afines del cubo y por tanto, triviales.

2.3.- RELACIONES QUE LIGAN ENTRE SI A LOS SEIS ANGULOS QUE INTERVIENEN EN LOS ZONOEDROS EQUILATEROS PROCEDENTES DE ESTRELLAS NO SINGULARES FORMADAS POR CUATRO SEGMENTOS IGUALES.

Definida la estrella no singular formada por cuatro segmentos iguales se obtiene el zonoedro equilátero compuesto de 12 caras rombo. Denominaremos a estos poliedros con

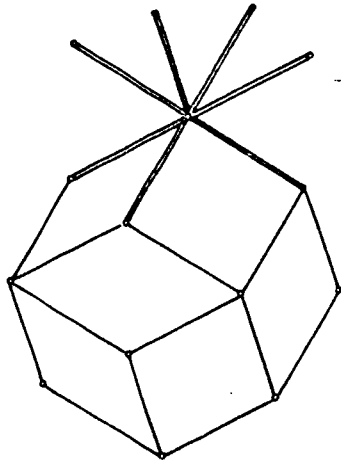


Fig 2.3A

el nombre genérico de rombodecaedros. Por tener simetría central cada cara será igual a la opuesta y por tanto el número máximo posible de caras rombo diferentes será seis y los ángulos que definen dichas caras serán los que forman en

entre sí los cuatro segmentos de la estrella tomados dos a dos. Estudiemos a continuación la relación existente entre estos seis ángulos.

Sean  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$  y  $\vec{v}_4$  vectores unitarios dirigidos según los cuatro segmentos que forman la estrella, y sean:

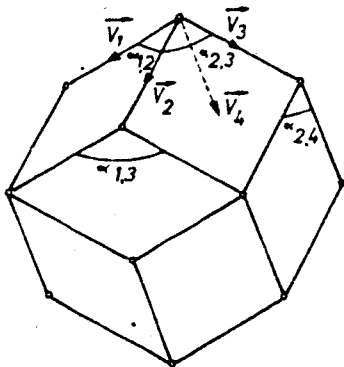


Fig 2.3B

$\alpha_{i,j}$  → ángulo formado por los vectores  $\vec{v}_i$  y  $\vec{v}_j$

Adoptemos la simbología

$$\begin{matrix} \alpha_{1,2} & \alpha_{2,3} & \alpha_{3,4} & \alpha_{4,1} \\ \alpha_{1,3} & \alpha_{2,4} & & \end{matrix}$$

para expresar el rombodecaedro

que aparece en la fig. 2.3B; donde se han tomado:

$\alpha_{1,2} \alpha_{2,3} \alpha_{3,4} \alpha_{4,1}$  en sentido horario y por este orden, observados desde el exterior del vértice donde concurren.

$\alpha_{1,3}$  es el ángulo que forma triedro con  $\alpha_{1,2}$  y  $\alpha_{2,3}$   
o bien con  $\alpha_{3,4}$  y  $\alpha_{4,1}$

$\alpha_{2,4}$  es el ángulo que forma triedro con  $\alpha_{2,3}$  y  $\alpha_{3,4}$   
o bien con  $\alpha_{4,1}$  y  $\alpha_{1,2}$

Tomemos O como origen de coordenadas y como plano yz el definido por los vectores  $\vec{V}_1$  y  $\vec{V}_3$ . El eje X será  $\perp$  a este plano por el punto O. Por ejes y, z, tomaremos las bisectrices de  $\vec{V}_1$  y  $\vec{V}_3$ .

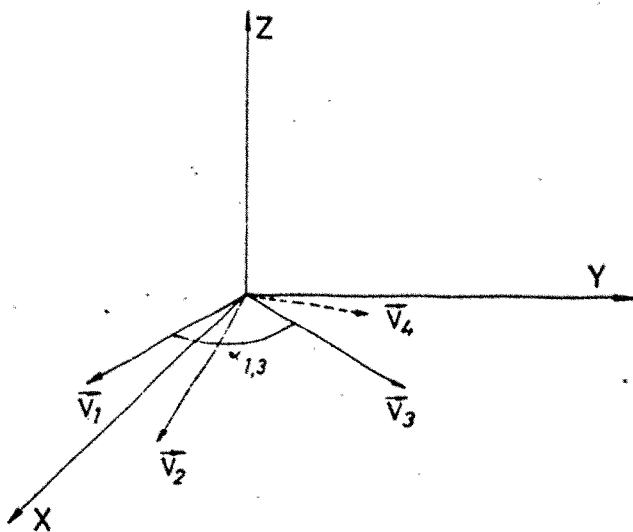


Fig 2.3c

$$\vec{V}_1 \left\{ 0, -\operatorname{sen} \frac{\alpha_{1,3}}{2}, -\operatorname{cos} \frac{\alpha_{1,3}}{2} \right\}$$

$$\vec{V}_3 \left\{ 0, \operatorname{sen} \frac{\alpha_{1,3}}{2}, -\operatorname{cos} \frac{\alpha_{1,3}}{2} \right\}$$

$$\vec{V}_2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{1+b^2+c^2}}, \frac{b}{\sqrt{\quad}}, \frac{c}{\sqrt{\quad}} \right\}$$

Podemos tomar como 1 el primer coseno director de  $\vec{V}_2$ , ya que tenemos

la seguridad de que nunca va a tomar el valor cero; ya que en ese caso,  $\vec{V}_2$  sería coplanario con  $\vec{V}_1$  y  $\vec{V}_3$  y la estrella sería singular.

$$\widehat{\vec{V}_1, \vec{V}_2} = \alpha_{1,2} ; -\frac{b}{\sqrt{\quad}} \operatorname{sen} \frac{\alpha_{1,3}}{2} - \frac{c}{\sqrt{\quad}} \operatorname{cos} \frac{\alpha_{1,3}}{2} = \operatorname{cos} \alpha_{1,2}$$

$$\widehat{\vec{V}_2, \vec{V}_3} = \alpha_{2,3} ; \frac{b}{\sqrt{\quad}} \operatorname{sen} \frac{\alpha_{1,3}}{2} - \frac{c}{\sqrt{\quad}} \cos \frac{\alpha_{1,3}}{2} = \cos \alpha_{2,3}$$

$$\text{Sumando m. a m.: } -\frac{2c}{\sqrt{\quad}} \cos \frac{\alpha_{1,3}}{2} = (\cos \alpha_{1,2} + \cos \alpha_{2,3})$$

$$c_1 = \frac{c}{\sqrt{1+b^2+c^2}} = -\frac{\cos \alpha_{1,2} + \cos \alpha_{2,3}}{2 \cos \frac{\alpha_{1,3}}{2}}$$

$$\text{Restando m. a m.: } 2 \frac{b}{\sqrt{\quad}} \operatorname{sen} \frac{\alpha_{1,3}}{2} = \cos \alpha_{2,3} - \cos \alpha_{1,2}$$

$$b_1 = \frac{b}{\sqrt{1+b^2+c^2}} = \frac{\cos \alpha_{2,3} - \cos \alpha_{1,2}}{2 \operatorname{sen} \frac{\alpha_{1,3}}{2}}$$

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{1+b^2+c^2}} = + \sqrt{1 - \frac{(\cos \alpha_{1,2} + \cos \alpha_{2,3})^2}{4 \cos^2 \frac{\alpha_{1,3}}{2}} - \frac{(\cos \alpha_{2,3} - \cos \alpha_{1,2})^2}{4 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha_{1,3}}{2}}}$$

Operando de la misma forma para el vector  $\vec{V}_4$  :

$$\vec{V}_4 \left\{ \frac{1}{\sqrt{1+B^2+C^2}}, \frac{B}{\sqrt{\quad}}, \frac{C}{\sqrt{\quad}} \right\}$$

$$\widehat{\vec{V}_4, \vec{V}_1} = \alpha_{4,1} ; -\frac{B}{\sqrt{\quad}} \operatorname{sen} \frac{\alpha_{1,3}}{2} - \frac{C}{\sqrt{\quad}} \cos \frac{\alpha_{1,3}}{2} = \cos \alpha_{4,1}$$

$$\widehat{\vec{V}_3, \vec{V}_4} = \alpha_{3,4} ; \frac{B}{\sqrt{\quad}} \operatorname{sen} \frac{\alpha_{1,3}}{2} - \frac{C}{\sqrt{\quad}} \cos \frac{\alpha_{1,3}}{2} = \cos \alpha_{3,4}$$



$$\text{Sumando m. a m.: } -2 \frac{C}{\sqrt{\quad}} \cos \frac{\alpha_{1,3}}{2} = \cos \alpha_{3,4} + \cos \alpha_{4,1}$$

$$c_2 = \frac{C}{\sqrt{1+B^2+C^2}} = - \frac{\cos \alpha_{3,4} + \cos \alpha_{4,1}}{2 \cos \frac{\alpha_{1,3}}{2}}$$

$$\text{Restando m. a m.: } 2 \frac{B}{\sqrt{1+B^2+C^2}} \sin \frac{\alpha_{1,3}}{2} = \cos \alpha_{3,4} - \cos \alpha_{4,1}$$

$$b_2 = \frac{B}{\sqrt{1+B^2+C^2}} = \frac{\cos \alpha_{3,4} - \cos \alpha_{4,1}}{2 \sin \frac{\alpha_{1,3}}{2}}$$

$$a_2 = \frac{1}{\sqrt{1+B^2+C^2}} = \sqrt{1 - \frac{(\cos \alpha_{3,4} + \cos \alpha_{4,1})^2}{4 \cos^2 \frac{\alpha_{1,3}}{2}} - \frac{(\cos \alpha_{3,4} - \cos \alpha_{4,1})^2}{4 \sin^2 \frac{\alpha_{1,3}}{2}}}$$

Se debe cumplir que el ángulo formado por  $\vec{V}_2$  y  $\vec{V}_4$  sea efectivamente  $\alpha_{2,4}$ :

$$\text{Luego: } a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = \cos \alpha_{2,4}$$

$$- \sqrt{1 - \frac{(\cos \alpha_{1,2} + \cos \alpha_{2,3})^2}{4 \cos^2 \frac{\alpha_{1,3}}{2}} - \frac{(\cos \alpha_{2,3} - \cos \alpha_{1,2})^2}{4 \sin^2 \frac{\alpha_{1,3}}{2}}} + \sqrt{1 - \frac{(\cos \alpha_{3,4} + \cos \alpha_{4,1})^2}{4 \cos^2 \frac{\alpha_{1,3}}{2}} - \frac{(\cos \alpha_{3,4} - \cos \alpha_{4,1})^2}{4 \sin^2 \frac{\alpha_{1,3}}{2}}} +$$

$$+ \frac{(\cos \alpha_{2,3} - \cos \alpha_{1,2})(\cos \alpha_{3,4} - \cos \alpha_{4,1})}{4 \sin^2 \frac{\alpha_{1,3}}{2}} + \frac{(\cos \alpha_{1,2} + \cos \alpha_{2,3})(\cos \alpha_{3,4} + \cos \alpha_{4,1})}{4 \cos^2 \frac{\alpha_{1,3}}{2}} = \cos \alpha_{2,4}$$

Multiplicando por  $4 \cos^2 \frac{\alpha_{1,3}}{2}$ :

$$- \sqrt{4 \cos^2 \frac{\alpha_{1,3}}{2} - (\cos \alpha_{1,2} + \cos \alpha_{2,3})^2 - \frac{(\cos \alpha_{2,3} - \cos \alpha_{1,2})^2}{\text{tg}^2 \frac{\alpha_{1,3}}{2}}} + \sqrt{4 \cos^2 \frac{\alpha_{1,3}}{2} - (\cos \alpha_{3,4} + \cos \alpha_{4,1})^2 - \frac{(\cos \alpha_{3,4} - \cos \alpha_{4,1})^2}{\text{tg}^2 \frac{\alpha_{1,3}}{2}}} + \frac{(\cos \alpha_{2,3} - \cos \alpha_{1,2})(\cos \alpha_{3,4} - \cos \alpha_{4,1})}{\text{tg}^2 \frac{\alpha_{1,3}}{2}} + (\cos \alpha_{1,2} + \cos \alpha_{2,3})(\cos \alpha_{3,4} + \cos \alpha_{4,1}) = 4 \cos^2 \frac{\alpha_{1,3}}{2} \cos \alpha_{2,4} \quad (2.31)$$

Luego existe una relación y sólo una entre los 6 ángulos de un rombododecaedro; y - por tanto, un rombododecaedro quedará determinado en cuanto facilitemos 5 de sus ángulos de acuerdo a la simbología adoptada: ya que el sexto lo determinaremos a través de (2.31).

2.4.- RELACIONES QUE LIGAN ENTRE SI A LOS DIEZ ANGULOS QUE INTERVIENEN EN LOS ZONOEDROS EQUILATEROS PROCEDENTES DE ESTRELLAS NO-SINGULARES FORMADAS POR CINCO SEGMENTOS IGUALES.

Definida la estrella no singular formada por cinco segmentos iguales se obtiene el zonoedro equilátero compuesto de veinte caras rombo. De

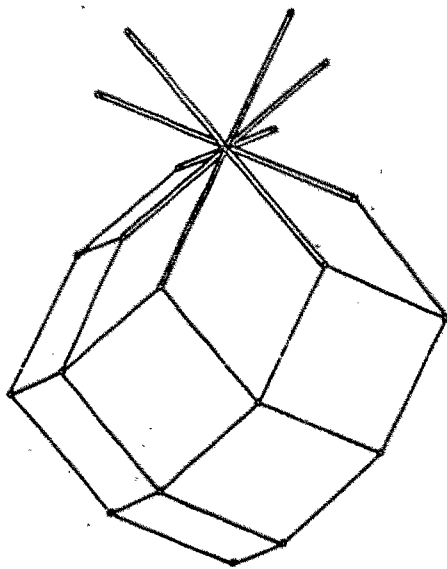


Fig 2.4A

nominaremos a estos poliedros con el nombre genérico de romboicosaedros. Por tener simetría central cada cara será igual a la opuesta y por tanto el número máximo posible de caras rombo diferentes será diez y los ángulos que definen dichas caras serán los que formen entre sí los cinco segmentos

de la estrella tomados dos a dos. Estudiemos a continuación la relación existente entre estos diez ángulos

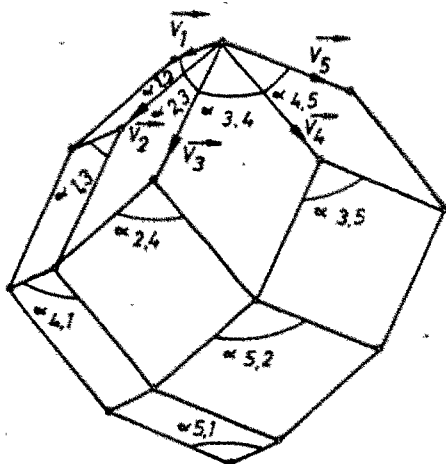


Fig 2.4B

Sean  $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3, \vec{V}_4$  y  $\vec{V}_5$  vectores unitarios dirigidos según los cinco segmentos que forman la estrella y sean:

$\alpha_{i,j}$  ángulo formado por los vectores  $\vec{V}_i$  y  $\vec{V}_j$

Adoptemos la simbología:

$$\begin{array}{ccccc} \alpha_{1,2} & \alpha_{2,3} & \alpha_{3,4} & \alpha_{4,5} & \alpha_{5,1} \\ \alpha_{1,3} & \alpha_{2,4} & \alpha_{3,5} & \alpha_{4,1} & \alpha_{5,2} \end{array}$$

para expresar el romboicosaedro que aparece en la fig. 2.4<sub>B</sub>; donde se ha tomado:

$\alpha_{1,2}$   $\alpha_{2,3}$   $\alpha_{3,4}$   $\alpha_{4,5}$   $\alpha_{5,1}$  en sentido horario y por este orden observados desde el exterior del vértice donde concurren.

$\alpha_{1,3}$	es el ángulo que forma triedro con	$\alpha_{1,2}$	y	$\alpha_{2,3}$
$\alpha_{2,4}$	" " " " " "	"	"	$\alpha_{2,3}$ y $\alpha_{3,4}$
$\alpha_{3,5}$	" " " " " "	"	"	$\alpha_{3,4}$ y $\alpha_{4,5}$
$\alpha_{4,1}$	" " " " " "	"	"	$\alpha_{4,5}$ y $\alpha_{5,1}$
$\alpha_{5,2}$	" " " " " "	"	"	$\alpha_{5,1}$ y $\alpha_{1,2}$

Ahora podemos optar por tomar un camino semejante al recorrido para los rombododecaedros y que a través de penos y engorrosos cálculos nos conduciría al resultado buscado; pero si, observamos detenidamente un romboicosaedro, vemos que hay cinco bandas octogonales que lo recorren; - siendo las generatrices de cualquiera de ellas paralelas a un  $\vec{V}_i$ . Pues bien, SI ELIMINAMOS UNA CUALQUIERA DE ESTAS BANDAS OCTOGONALES Y JUNTAMOS LAS DOS RESTANTES PIEZAS, OBTENEMOS UN ROMBODODECAEDRO.

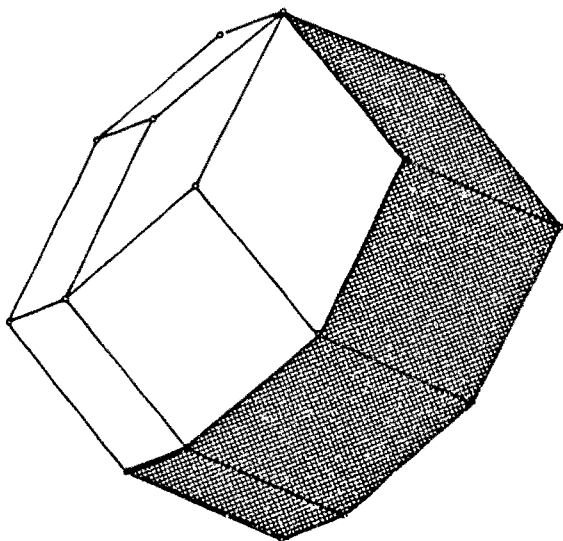


Fig 2.4c

Entonces, PODEMOS CONSIDERAR UN ROMBOICOSAEDRO COMO UN ROMBODODECAEDRO AL CUAL SE LE HA INTERCALADO UNA BANDA OCTOGONAL. (La rayada en la figura).

Para fijar el rombododecaedro se precisaban cinco ángulos; ya que, el sexto se obtenía a partir de la ecuación (2.31); y para materializar la banda octogonal se

necesitarán conocer dos de los cuatro ángulos diferentes - que pueden existir en dicha banda.

Esto último es así, porque, con los dos ángulos de la banda octogonal y la cara adyacente del rombododecaedro tenemos definido un triedro del cual se conocen sus tres caras y por tanto, podemos determinar la arista del prisma octogonal y todas las demás serán paralelas a ella.

En resumen, para quedar definido un romboicosaedro se necesitan conocer 7 de los 10 ángulos diferentes que pueden intervenir, con la restricción de que en ningún caso 6 de estos siete ángulos formen rombododecaedro; ya que, entonces estarían ligados entre sí.

Tenemos pues que encontrar tres condiciones que nos permitan determinar los tres ángulos restantes en función de los siete ángulos conocidos.

La forma más sencilla será localizar tres rombododecaedros de los cinco que pertenecen a este romboicosaedro y obligar a que los ángulos de los rombododecaedros cumplan la condición (2.31).

Empleando la misma simbología adoptada en 2.3; tres posibles rombododecaedros son:

1er. rombododecaedro:

$$\begin{array}{cccc} \alpha_{1,2} & \alpha_{2,3} & \alpha_{3,4} & \alpha_{4,1} \\ & \alpha_{1,3} & \alpha_{2,4} & \end{array}$$

el cual proviene de eliminar la banda cuyas generatrices son paralelas a  $\vec{V}_5$  y nos permite obtener  $\alpha_{2,4}$ .

2º rombododecaedro:

$$\begin{array}{cccc} \alpha_{1,2} & \alpha_{2,3} & \alpha_{3,5} & \alpha_{5,1} \\ & \alpha_{1,3} & \alpha_{5,2} & \end{array}$$

el cual proviene de eliminar la banda cuyas generatrices son paralelas a  $\vec{V}_4$  y nos permite obtener  $\alpha_{5,2}$ .

3er. rombododecaedro:

$$\begin{array}{cccc} \alpha_{1,2} & \alpha_{2,4} & \alpha_{4,5} & \alpha_{5,1} \\ & \alpha_{1,4} & \alpha_{2,5} & \end{array}$$

que proviene de eliminar la banda cuyas generatrices son paralelas a  $\vec{V}_3$  y permite obtener el ángulo que nos falta  $\alpha_{4,5}$ .

Para poder ser obtenido este ángulo de una forma cómoda, es preciso hacer uso del CONCEPTO DE EQUIVALENCIA que se tratará en el próximo capítulo. Según lo que diremos - allí es fácil deducir que el tercer rombododecaedro es equivalente a:

$$\begin{array}{ccc} 180 - \alpha_{5,2} & \alpha_{5,1} & 180 - \alpha_{4,1} \quad \alpha_{2,4} \\ & 180 - \alpha_{1,2} & 180 - \alpha_{4,5} \end{array}$$

Obligando a que los tres cumplen la ecuación (2.31), obtenemos:

$$- \sqrt{4 \cos^2 \frac{\alpha_{1,3}}{2} - \frac{(\cos \alpha_{3,4} - \cos \alpha_{4,1})^2}{2} - (\cos \alpha_{3,4} - \cos \alpha_{4,1})^2} + \sqrt{4 \cos^2 \frac{\alpha_{1,3}}{2} - \frac{(\cos \alpha_{2,3} - \cos \alpha_{1,2})^2}{2} - (\cos \alpha_{1,2} + \cos \alpha_{2,3})^2} + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha_{1,3}}{2}$$

$$+ \frac{(\cos \alpha_{3,4} - \cos \alpha_{4,1})(\cos \alpha_{2,3} - \cos \alpha_{1,2})}{\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha_{1,3}}{2}} + (\cos \alpha_{1,2} + \cos \alpha_{2,3})(\cos \alpha_{3,4} + \cos \alpha_{4,1}) = 4 \cos^2 \frac{\alpha_{1,3}}{2} \cos \alpha_{2,4}$$

De aquí obtenemos  $\alpha_{2,4}$

$$- \sqrt{4 \cos^2 \frac{\alpha_{1,3}}{2} - \frac{(\cos \alpha_{3,5} - \cos \alpha_{5,1})^2}{2} - (\cos \alpha_{3,5} + \cos \alpha_{5,1})^2} + \sqrt{4 \cos^2 \frac{\alpha_{1,3}}{2} - \frac{(\cos \alpha_{2,3} - \cos \alpha_{1,2})^2}{2} - (\cos \alpha_{1,2} + \cos \alpha_{2,3})^2} + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha_{1,3}}{2}$$

$$+ \frac{(\cos \alpha_{3,5} - \cos \alpha_{5,1})(\cos \alpha_{2,3} - \cos \alpha_{1,2})}{\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha_{1,3}}{2}} + (\cos \alpha_{1,2} + \cos \alpha_{2,3})(\cos \alpha_{3,5} + \cos \alpha_{5,1}) = 4 \cos^2 \alpha_{5,2}$$

De aquí obtenemos  $\alpha_{5,2}$



$$- \sqrt{4 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha_{1,2}}{2} - \frac{(\cos \alpha_{2,4} + \cos \alpha_{4,1})^2}{\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha_{1,2}}{2}} - (\cos \alpha_{2,4} - \cos \alpha_{4,1})^2} \sqrt{4 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha_{1,2}}{2} - \frac{(\cos \alpha_{5,1} + \cos \alpha_{5,2})^2}{\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha_{1,2}}{2}} - (\cos \alpha_{5,1} - \cos \alpha_{5,2})^2} -$$

$$- \frac{(\cos \alpha_{2,4} + \cos \alpha_{4,1})(\cos \alpha_{5,1} + \cos \alpha_{5,2})}{\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha_{1,2}}{2}} + (\cos \alpha_{2,4} - \cos \alpha_{4,1})(\cos \alpha_{5,1} - \cos \alpha_{5,2}) = - 4 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha_{1,2}}{2} \cos \alpha_{4,5}$$

De aquí obtenemos  $\alpha_{4,5}$

$$(2.41)$$

Obsérvese que en última instancia se ha obligado a que los rombododecaedros procedentes de tres combinaciones diferentes de cuatro vectores, cumplan con la condición (2.31)

El 1er. rombododecaedro	procede de la combinación	$\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3, \vec{V}_4$
El 2º	"	$\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3, \vec{V}_5$
El 3er.	"	$\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_4, \vec{V}_5$

2.5.- RELACIONES QUE LIGAN ENTRE SI A LOS QUINCE ANGULOS QUE INTERVIENEN EN LOS ZONOEDROS EQUILATEROS PROCEDENTES DE ESTRELLAS NO SINGULARES FORMADAS POR SEIS SEGMENTOS IGUALES.

Definida la estrella no singular formada por seis segmentos iguales, se obtiene un zonoedro equilátero (entre dos posibles, topológicamente diferentes (fig. 2.5<sub>A</sub>)) compuesto de treinta caras rombo. Denominaremos a estos poliedros con el nombre genérico de triakontaedros. Por tener simetría central, cada cara será igual a la opuesta y por tanto, el número máximo posible de caras rombo diferentes será quince y los ángulos que definen dichas caras serán los que forman entre sí los seis segmentos de la estrella tomados dos a dos. Estudiemos a continuación la relación existente entre estos quince ángulos, en primer lugar para los triakontaedros topológicamente iguales al triakontaedro polar, y en segundo para los triakontaedros topológicamente iguales al triakontaedro equifacial.

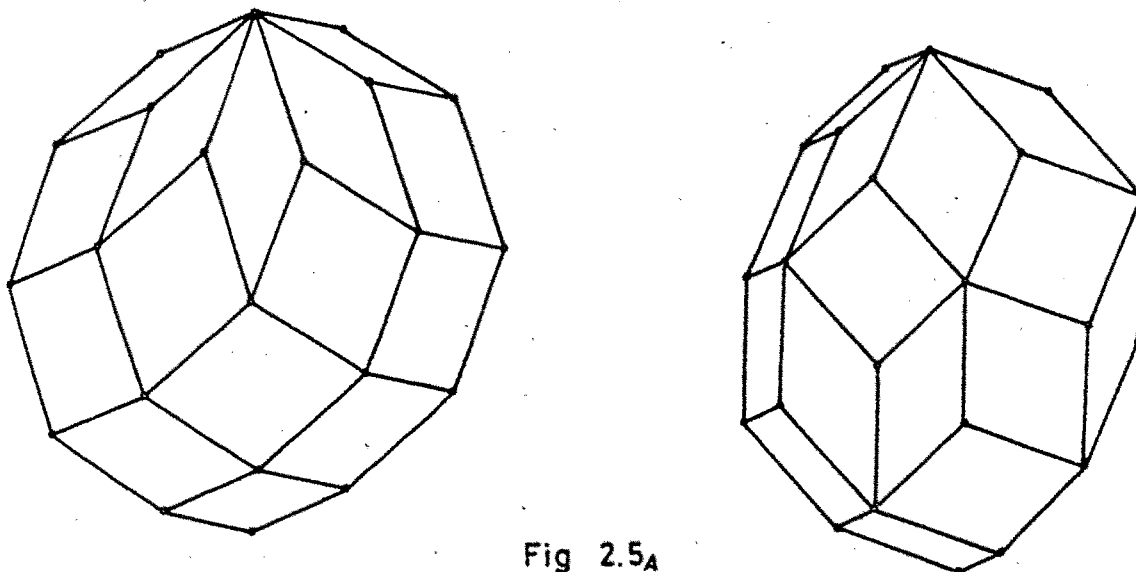


Fig 2.5A

2.5.1.- TRIAKONTAEDROS TOPOLOGICAMENTE IGUALES AL TRIAKONTAEDRO POLAR.

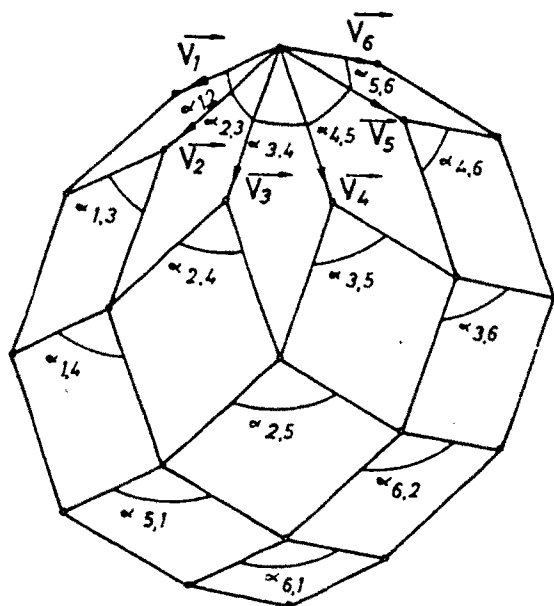


Fig 2.5.1A

Sean  $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3, \vec{V}_4, \vec{V}_5$  y  $\vec{V}_6$  vectores unitarios dirigidos según los seis segmentos que forman la estrella; y sean:

$\alpha_{i,j}$  : ángulo formado por los vectores  $\vec{V}_i$  y  $\vec{V}_j$

Adoptaremos la simbología:

$\alpha_{1,2} \quad \alpha_{2,3} \quad \alpha_{3,4} \quad \alpha_{4,5} \quad \alpha_{5,6} \quad \alpha_{6,1}$   
 $\alpha_{1,3} \quad \alpha_{2,4} \quad \alpha_{3,5} \quad \alpha_{4,6} \quad \alpha_{5,1} \quad \alpha_{6,2}$   
 $\alpha_{1,4} \quad \alpha_{2,5} \quad \alpha_{3,6} \quad \alpha_{1,5} \quad \alpha_{2,6} \quad \alpha_{3,1}$   
 $\alpha_{4,2} \quad \alpha_{5,3} \quad \alpha_{6,4} \quad \alpha_{1,6} \quad \alpha_{2,1} \quad \alpha_{3,2}$   
 $\alpha_{4,3} \quad \alpha_{5,4} \quad \alpha_{6,5}$

para expresar el triakontaedro que aparece en la fig. 2.5.1A; donde se ha tomado:

$\alpha_{1,2} \quad \alpha_{2,3} \quad \alpha_{3,4} \quad \alpha_{4,5} \quad \alpha_{5,6} \quad \alpha_{6,1}$  en sentido horario y por este orden observados desde el exterior del vértice donde concurren.

Podemos seguir un procedimiento análogo al recorrido para los romboicosaedros, si nos fijamos en que hay seis - bandas decagonales que circundan al triakontaedro considerado. Si eliminamos una de estas bandas decagonales y juntamos las dos restantes piezas, obtenemos un romboicosaedro.

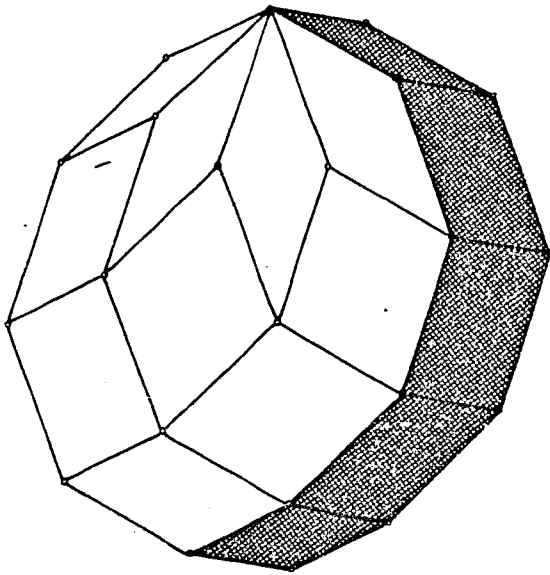


Fig 25.1<sub>B</sub>

Entonces, PODEMOS CONSIDERAR UN TRIAKONTAEDRO (fig. 2.5.1<sub>B</sub>) COMO UN ROMBOICOSAEDRO AL QUE SE LE HA INTERCALADO UNA BANDA DECAGONAL. (La que aparece rayada en la figura).

Para fijar el romboicosaedro se precisaban siete ángulos; ya que los otros tres se obtenían a partir de las ecuaciones (2.41); y para materializar la banda decagonal se necesitarán conocer dos de los cinco ángulos diferentes que pueden existir en dicha banda.

La razón de esto último es la misma que ya se adujo - para los romboicosaedros; ya que con los dos ángulos de la banda decagonal y la cara adyacente del romboicosaedro tenemos definido un triedro del cual se conocen sus tres caras y por tanto, podemos determinar la arista del prisma decago-

nal y todas las demás serán paralelas a ella.

Resumiendo, para definir un triakontaedro se necesitarán conocer nueve de los quince ángulos diferentes que pueden intervenir, con la restricción de que en ningún caso seis de estos nueve ángulos forman rombododecaedro; ya que, entonces estarán ligados entre sí.

Será preciso encontrar seis condiciones que nos permitan determinar los seis ángulos restantes en función de los nueve ángulos conocidos.

La forma más sencilla será localizar seis rombododecaedros que pertenezcan a romboicosaedros derivados del triakontaedro considerado y obligar a que los ángulos de estos rombododecaedros cumplan con la condición (2.31); o lo que es lo mismo, obligar a que los rombododecaedros procedentes de seis combinaciones diferentes de cuatro vectores cumplan con la condición (2.31).

Seis posibles combinaciones diferentes de los vectores  $\vec{v}_1$ ,  $\vec{v}_2$ ,  $\vec{v}_3$ ,  $\vec{v}_4$ ,  $\vec{v}_5$ ,  $\vec{v}_6$  son:

1°.-  $\vec{v}_1$ ,  $\vec{v}_2$ ,  $\vec{v}_3$ ,  $\vec{v}_4$

2°.-  $\vec{v}_1$ ,  $\vec{v}_2$ ,  $\vec{v}_3$ ,  $\vec{v}_5$

3°.-  $\vec{v}_1$ ,  $\vec{v}_2$ ,  $\vec{v}_3$ ,  $\vec{v}_6$

$$4^{\circ}.- \vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_4, \vec{V}_5$$

$$5^{\circ}.- \vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_4, \vec{V}_6$$

$$6^{\circ}.- \vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_5, \vec{V}_6$$

1er. rombododecaedro:

$$\alpha_{1,2} \quad \alpha_{2,3} \quad \alpha_{3,4} \quad \alpha_{4,1}$$
$$\alpha_{1,3} \quad \alpha_{2,4}$$

nos permite obtener  $\alpha_{2,4}$

2° rombododecaedro:

$$\alpha_{1,2} \quad \alpha_{2,3} \quad \alpha_{3,5} \quad \alpha_{5,1}$$
$$\alpha_{1,3} \quad \alpha_{2,5}$$

nos permite obtener  $\alpha_{2,5}$

3er. rombododecaedro:

$$\alpha_{1,2} \quad \alpha_{2,3} \quad \alpha_{3,6} \quad \alpha_{6,1}$$
$$\alpha_{1,3} \quad \alpha_{2,6}$$

nos permite obtener  $\alpha_{2,6}$

4° rombododecaedro:

$$\alpha_{1,2} \quad \alpha_{2,4} \quad \alpha_{4,5} \quad \alpha_{5,1}$$
$$\alpha_{1,4} \quad \alpha_{2,5}$$

nos permite obtener  $\alpha_{4,5}$ , pero para que sea de una forma cómoda es preciso pasar al rombododecaedro equivalente:

$$180 - \alpha_{2,5} \quad \alpha_{5,1} \quad 180 - \alpha_{1,4} \quad \alpha_{2,4}$$
$$180 - \alpha_{1,2} \quad 180 - \alpha_{4,5}$$

que se estudia, como ya se ha dicho en 2.4, en el capítulo siguiente.

5° rombododecaedro:

$$\alpha_{1,2} \quad \alpha_{2,4} \quad \alpha_{4,6} \quad \alpha_{6,1}$$
$$\alpha_{1,4} \quad \alpha_{2,6}$$

nos permite obtener  $\alpha_{4,6}$ , pero si queremos que sea de una forma cómoda es preciso pasar al rombododecaedro equivalente:

$$180 - \alpha_{2,6} \quad \alpha_{6,1} \quad 180 - \alpha_{1,4} \quad \alpha_{2,4}$$
$$180 - \alpha_{1,2} \quad 180 - \alpha_{4,6}$$

6° rombododecaedro:

$$\begin{array}{cccc} \alpha_{1,2} & \alpha_{2,5} & \alpha_{5,6} & \alpha_{6,1} \\ & \alpha_{1,5} & \alpha_{2,6} & \end{array}$$

nos permite obtener  $\alpha_{5,6}$ , pero para que sea de una forma -  
cómoda es necesario pasar al rombododecaedro equivalente:

$$\begin{array}{ccccc} 180 - \alpha_{2,6} & & \alpha_{6,1} & & 180 - \alpha_{1,5} & \alpha_{2,5} \\ & & & & & \\ & 180 - \alpha_{1,2} & & 180 - \alpha_{5,6} & & \end{array}$$

Obligando a que los seis rombododecaedros cumplan la  
condición (2.31) obtenemos



$$- \sqrt{4 \cos^2 \frac{\alpha_{1,3}}{2} - (\cos \alpha_{1,2} + \cos \alpha_{2,3})^2 - \frac{(\cos \alpha_{2,3} - \cos \alpha_{1,2})^2}{\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha_{1,3}}{2}}} + 4 \cos^2 \frac{\alpha_{1,3}}{2} - (\cos \alpha_{3,4} + \cos \alpha_{1,4})^2 - \frac{(\cos \alpha_{3,4} - \cos \alpha_{1,4})^2}{\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha_{1,3}}{2}} +$$

$$+ \frac{(\cos \alpha_{2,3} - \cos \alpha_{1,2})(\cos \alpha_{3,4} - \cos \alpha_{1,4})}{\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha_{1,3}}{2}} + (\cos \alpha_{1,2} + \cos \alpha_{2,3})(\cos \alpha_{3,4} + \cos \alpha_{1,4}) = 4 \cos^2 \frac{\alpha_{1,3}}{2} \cos \alpha_{2,4}$$

Nos permite obtener  $\alpha_{2,4}$

1  
3  
1

$$- \sqrt{4 \cos^2 \frac{\alpha_{1,3}}{2} - (\cos \alpha_{1,2} + \cos \alpha_{2,3})^2 - \frac{(\cos \alpha_{2,3} - \cos \alpha_{1,2})^2}{\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha_{1,3}}{2}}} + 4 \cos^2 \frac{\alpha_{1,3}}{2} - (\cos \alpha_{3,5} + \cos \alpha_{5,1})^2 - \frac{(\cos \alpha_{3,5} - \cos \alpha_{5,1})^2}{\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha_{1,3}}{2}} +$$

$$+ \frac{(\cos \alpha_{2,3} - \cos \alpha_{1,2})(\cos \alpha_{3,5} - \cos \alpha_{5,1})}{\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha_{1,3}}{2}} + (\cos \alpha_{1,2} + \cos \alpha_{2,3})(\cos \alpha_{3,5} + \cos \alpha_{5,1}) = 4 \cos^2 \frac{\alpha_{1,3}}{2} \cos \alpha_{2,5}$$

Nos permite obtener  $\alpha_{2,5}$

$$- \sqrt{4 \cos^2 \frac{\alpha_{1,3}}{2} - (\cos \alpha_{1,2} + \cos \alpha_{2,3})^2} - \frac{(\cos \alpha_{2,3} - \cos \alpha_{1,2})^2}{\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha_{1,3}}{2}} + \frac{4 \cos^2 \frac{\alpha_{1,3}}{2} - (\cos \alpha_{3,6} + \cos \alpha_{6,1})^2}{\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha_{1,3}}{2}} +$$

$$+ \frac{(\cos \alpha_{2,3} - \cos \alpha_{1,2})(\cos \alpha_{3,6} - \cos \alpha_{6,1})}{\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha_{1,3}}{2}} + (\cos \alpha_{1,2} + \cos \alpha_{2,3})(\cos \alpha_{3,6} + \cos \alpha_{6,1}) = 4 \cos^2 \frac{\alpha_{1,3}}{2} \cos \alpha_{6,2}$$

Nos permite obtener  $\alpha_{6,2}$

$$- \sqrt{4 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha_{1,2}}{2} - (\cos \alpha_{5,1} - \cos \alpha_{2,5})^2} - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha_{1,2}}{2} (\cos \alpha_{5,1} + \cos \alpha_{2,5})^2 \sqrt{4 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha_{1,2}}{2} - (\cos \alpha_{2,4} - \cos \alpha_{1,4})^2} - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha_{1,2}}{2} (\cos \alpha_{2,4} + \cos \alpha_{1,4})^2 -$$

$$- \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha_{1,2}}{2} (\cos \alpha_{5,1} + \cos \alpha_{2,5})(\cos \alpha_{2,4} + \cos \alpha_{1,4}) + (\cos \alpha_{5,1} - \cos \alpha_{2,5})(\cos \alpha_{2,4} - \cos \alpha_{1,4}) = -4 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha_{1,2}}{2} \cos \alpha_{4,5}$$

Nos permite obtener  $\alpha_{4,5}$

$$-\sqrt{4 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha_{1,2}}{2} - (\cos \alpha_{6,1} - \cos \alpha_{6,2})^2 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha_{1,2}}{2} (\cos \alpha_{6,1} + \cos \alpha_{6,2})^2} \sqrt{4 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha_{1,2}}{2} - (\cos \alpha_{2,4} - \cos \alpha_{1,4})^2 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha_{1,2}}{2} (\cos \alpha_{2,4} + \cos \alpha_{1,4})^2} -$$

$$- \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha_{1,2}}{2} (\cos \alpha_{6,1} + \cos \alpha_{6,2}) (\cos \alpha_{2,4} + \cos \alpha_{1,4}) + (\cos \alpha_{6,1} - \cos \alpha_{6,2}) (\cos \alpha_{2,4} - \cos \alpha_{1,4}) = -4 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha_{1,2}}{2} \cos \alpha_{4,6}$$

Nos permite obtener  $\alpha_{4,6}$

$$-\sqrt{4 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha_{1,2}}{2} - (\cos \alpha_{6,1} - \cos \alpha_{6,2})^2 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha_{1,2}}{2} (\cos \alpha_{6,1} + \cos \alpha_{6,2})^2} \sqrt{4 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha_{1,2}}{2} - (\cos \alpha_{2,5} - \cos \alpha_{5,1})^2 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha_{1,2}}{2} (\cos \alpha_{2,5} + \cos \alpha_{5,1})^2} -$$

$$- \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha_{1,2}}{2} (\cos \alpha_{6,1} + \cos \alpha_{6,2}) (\cos \alpha_{2,5} + \cos \alpha_{5,1}) + (\cos \alpha_{6,1} - \cos \alpha_{6,2}) (\cos \alpha_{2,5} - \cos \alpha_{5,1}) = -4 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha_{1,2}}{2} \cos \alpha_{5,6}$$

Nos permite obtener  $\alpha_{5,6}$

(2.5.11)

2.5.2.- TRIAKONTAEDROS TOPOLOGICAMENTE IGUALES AL TRIAKONTAEDRO EQUIFACIAL.

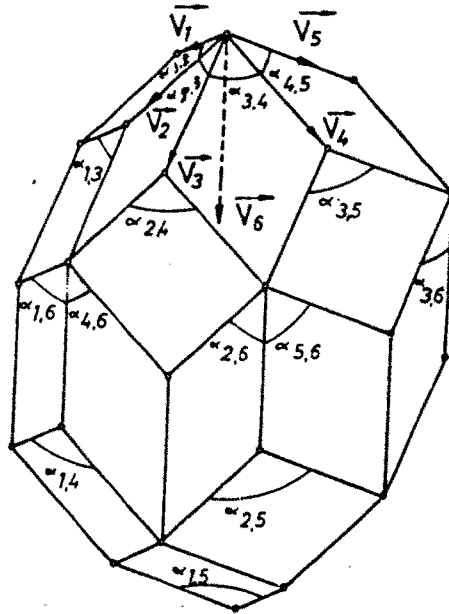


Fig 2.5.2<sub>A</sub>

Sean  $\vec{V}_1$ ,  $\vec{V}_2$ ,  $\vec{V}_3$ ,  $\vec{V}_4$ ,  $\vec{V}_5$  y  $\vec{V}_6$  vectores unitarios dirigidos según los seis segmentos que forman la estrella, y sea:

$\alpha_{i,j}$ : ángulo formado por los vectores  $\vec{V}_i$  y  $\vec{V}_j$

Adoptaremos la simbología:

$\alpha_{1,2}$        $\alpha_{2,3}$        $\alpha_{3,4}$        $\alpha_{4,5}$        $\alpha_{5,1}$   
 $\alpha_{1,3}$        $\alpha_{2,4}$        $\alpha_{3,5}$        $\alpha_{4,1}$        $\alpha_{5,2}$   
 $\alpha_{1,6}$   $\alpha_{4,6}$   $\alpha_{2,6}$   $\alpha_{5,6}$   $\alpha_{3,6}$   $\alpha_{1,6}$   $\alpha_{4,6}$   $\alpha_{2,6}$   $\alpha_{5,6}$   $\alpha_{3,6}$

para expresar el triakontaedro que aparece en la figura - 2.5.2<sub>A</sub> ; donde se ha tomado:

$\alpha_{1,2}$   $\alpha_{2,3}$   $\alpha_{3,4}$   $\alpha_{4,5}$   $\alpha_{5,1}$  en sentido horario y por este orden observados desde el exterior del vértice donde concurren.

Este triakontaedro también está circundado por seis

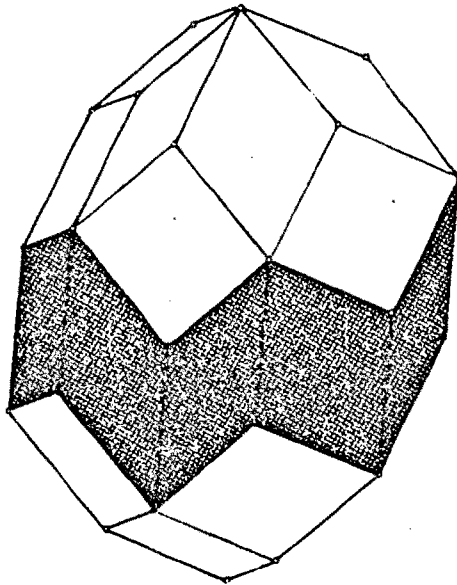


Fig 2.5.2 B

bandas decagonales y por tanto, se le puede considerar como un romboicosaedro al que SE LE HA INTERCALADO UNA BANDA DECAGONAL. (La rayada en la figura).

Al igual que para el otro triakontaedro se precisará conocer nueve de los quince -

ángulos diferentes que puedan intervenir y las condiciones que permiten determinar los restantes seis ángulos son las (2.5.11).

## 2.6.- ZONOEDROS EQUILATEROS PROCEDENTES DE ESTRELLAS NO-SINGULARES FORMADAS POR N SEGMENTOS IGUALES.

Definida la estrella no singular formada por n segmentos iguales se obtiene el zonoedro equilátero compuesto de  $n(n-1)$  caras rombo. Por tener simetría central - - cada cara será igual a la opuesta y por tanto, el número máximo posible de caras rombo diferentes será  $\binom{n}{2}$  y los ángulos que definen dichas caras serán los que formen entre sí los n segmentos de la estrella tomados dos a dos.

Sean  $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3, \vec{V}_4, \vec{V}_5, \dots, \vec{V}_n$  vectores unitarios dirigidos según los  $n$  segmentos que forman la estrella y sea:

$\alpha_{i,j}$  : el ángulo formado por los vectores  $\vec{V}_i$  y  $\vec{V}_j$

Si  $n$  es impar ( $n = 2k + 1$ ), solamente podrá existir un zonoedro; topológicamente igual al zonoedro polar. Adoptaremos la simbología:

$\alpha_{1,2}$	$\alpha_{2,3}$	$\alpha_{3,4}$	$\alpha_{4,5}$	$\dots$	$\alpha_{2k,2k+1}$	$\alpha_{2k+1,1}$
$\alpha_{1,3}$	$\alpha_{2,4}$	$\alpha_{3,5}$	$\dots$	$\dots$	$\alpha_{2k-1,2k+1}$	$\alpha_{2k,1}$
$\alpha_{1,4}$	$\alpha_{2,5}$	$\alpha_{3,6}$	$\dots$	$\dots$	$\alpha_{2k-1,1}$	$\alpha_{2k,2}$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\alpha_{2k+1,2}$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\alpha_{2k+1,3}$
$\alpha_{1,k}$	$\alpha_{2,k+1}$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

Si  $n$  es par ( $n = 2k$ ), además del zonoedro topológicamente igual al zonoedro polar, existirá otro diferente. Adoptaremos la simbología:

- $\alpha_{1,2}$     $\alpha_{2,3}$     $\alpha_{3,4}$     $\alpha_{4,5}$    .....    $\alpha_{2k-2,2k-1}$     $\alpha_{2k-1,1}$
- $\alpha_{1,3}$     $\alpha_{2,4}$     $\alpha_{3,5}$    .....    $\alpha_{2k-3,2k-1}$     $\alpha_{2k-2,1}$     $\alpha_{2k-1,2}$
- $\alpha_{1,4}$     $\alpha_{2,5}$     $\alpha_{3,6}$    .....    $\alpha_{2k-3,1}$     $\alpha_{2k-2,2}$     $\alpha_{2k-1,3}$
- .....
- .....
- $\alpha_{1,2k}$     $\alpha_{k+1,2k}$     $\alpha_{2,2k}$     $\alpha_{k+2,2k}$  .....

Para definir los  $n$  segmentos de la estrella en el espacio será necesario conocer  $(2n-3)$  ángulos; ya que, para fijar los dos primeros segmentos es preciso un ángulo y a continuación cada vez que se añada un segmento más hacen falta dos ángulos, de lo cual se deduce fácilmente que para definir  $n$  segmentos son necesarios  $(2n-3)$  ángulos con la restricción de que seis cualesquiera de ellos no definan rombododecaedros.

El resto de los ángulos  $\binom{n}{2} - (2n-3) = \binom{n-2}{2}$  se deducirán a partir de los  $(2n-3)$  precisos para definir los  $n$  segmentos de la estrella; y para su obtención habrá que obligar a que los rombododecaedros procedentes de  $\binom{n-2}{2}$  combinaciones diferentes de cuatro vectores, cumplan con la condición (2.31).

Si llamamos  $V_i$  al número de vértices en que concurren  $i$  caras, la distribución de  $V_i$  para un zonoedro topológicamente igual al zonoedro polar será:

$n$	$V_n$	....	$V_6$	$V_5$	$V_4$	$V_3$	Total
$n = 3$						$2+6=8$	8
$n = 4$					$2+4=6$	8	14
$n = 5$				2	10	10	22
⋮							
$n = n$	2				$n(n-3)$	$2n$	$n(n-1)+2$

Obsérvese que para  $n=3$ , se suman los  $V_n$  con los  $V_3$  y para  $n=4$  se suman los  $V_n$  con los  $V_4$



Para  $n$  par  $\geq 6$  la distribución de  $V_i$  para un zonoedro topológicamente diferente al zonoedro polar será:

$n$	$V_{n-1}$	.....	$V_7$	$V_6$	$V_5$	$V_4$	$V_3$	Total
6					2+10	0	20	32
8			2		14	14	28	58
⋮								
$n$	2				$2(n-1)$	$(n-1)(n-6)$	$4(n-1)$	$n(n-1)+2$

Observese que para  $n=6$  se suman los  $V_{n-1}$  con los  $V_5$ .

## 2.7.- CONCLUSIONES

Para definir un zonoedro equilátero procedente de una estrella no-singular formada por  $n$  segmentos iguales, habrá que facilitar  $(2n-3)$  ángulos con la restricción de que seis cualquiera de ellos no formen rombododecaedro ; obteniéndose los  $\binom{n-2}{2}$  restantes por resolución de otros tantos rombododecaedros mediante la ecuación (2.31).

CAPITULO III

### CAPITULO III

SOBRE LA EQUIVALENCIA Y CONVEXIDAD DE LOS ZONOEDROS, ASI COMO DE LA OBTENCION DE LOS MISMOS A PARTIR DE LAS CARAS NO RELACIONADAS ENTRE SI.

#### 3.1.- EQUIVALENCIA ENTRE ZONOEDROS

El concepto de equivalencia entre zonoedros es consecuencia de la simbología adoptada; ya que, así como una determinada definición de las que se han estudiado en el capítulo anterior particularizada para ángulos cualesquiera de partida nos definirá un zonoedro y sólo uno; en cambio, un zonoedro podrá tener diferentes denominaciones como consecuencia de la simbología propuesta.

Del conocimiento, con la simbología que se propone, de las distintas representaciones de un determinado zonoedro, resultan dos interesantes consecuencias:

- 1°.- Elegir en cada caso aquella que nos permita resolver de la forma más cómoda posible los  $\binom{n-2}{2}$  relaciones entre los ángulos de un zonoedro.
- 2°.- Saber distinguir un mismo zonoedro bajo distintas denominaciones.

Se podría argumentar que cuando los  $(2n-3)$  ángulos independientes del zonoedro son fijos, la importancia de -

de la primera consecuencia es relativa, ya que, únicamente se complica el programa cuando se quieren obtener los  $\binom{n-2}{2}$  ángulos relacionados entre sí y con los anteriores. Sin embargo, su trascendencia hay que buscarla en el caso de que algunos de los  $(2n-3)$  ángulos sean variables.

Digamos también que aunque en el capítulo II ya se hizo un uso relativo de la primera consecuencia; será en el capítulo V donde ésta y la segunda tengan su máxima aplicación.

### 3.1.1.- ROMBODECAEDROS EQUIVALENTES

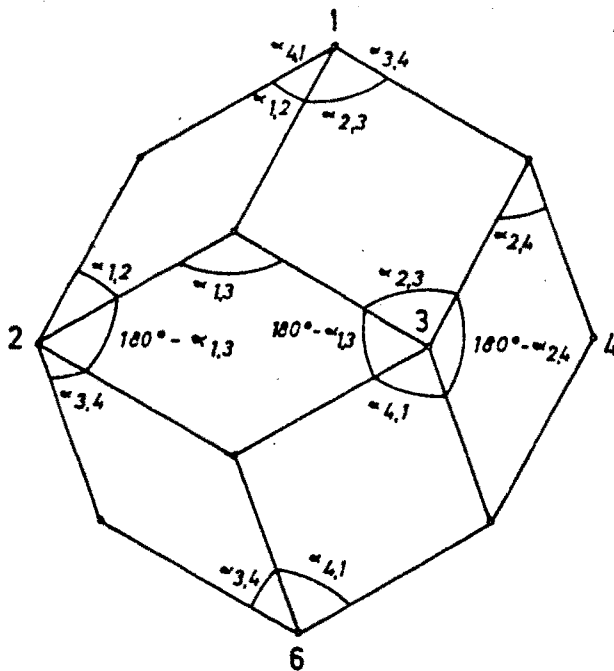


Fig 3.1.1A

Llamaremos rombododecaedros equivalentes a todos aquellos que procedan de un mismo rombododecaedro base y que pueda tener expresiones diferentes por causa de la simbología adoptada.

Al rombododecaedro de la figura 3.1.1<sub>A</sub> se

le define, de acuerdo con la simbología que proponemos, por:

$$\alpha_{1,2} \quad \alpha_{2,3} \quad \alpha_{3,4} \quad \alpha_{4,1}$$

$$\alpha_{1,3} \quad \alpha_{2,4}$$

Pero si le giramos de  $\frac{1}{4}$  en  $\frac{1}{4}$  obtendremos las definiciones siguientes:

$$- \alpha_{2,3} \quad \alpha_{3,4} \quad \alpha_{4,1} \quad \alpha_{1,2}$$

$$\alpha_{2,4} \quad \alpha_{1,3}$$

$$- \alpha_{3,4} \quad \alpha_{4,1} \quad \alpha_{1,2} \quad \alpha_{2,3}$$

$$\alpha_{1,3} \quad \alpha_{2,4}$$

$$- \alpha_{4,1} \quad \alpha_{1,2} \quad \alpha_{2,3} \quad \alpha_{3,4}$$

$$\alpha_{2,4} \quad \alpha_{1,3}$$

Estas cuatro definiciones diferentes se han obtenido a partir del vértice 1 como vértice en que concurren cuatro caras; pero existen otros cinco vértices en que se dé la misma circunstancia. Si nos referimos a ellos, obtenemos las definiciones siguientes:

$$\text{Vértice 2} \quad \alpha_{3,4} \quad 180-\alpha_{1,3} \quad \alpha_{1,2} \quad 180-\alpha_{2,4}$$

$$180-\alpha_{4,1} \quad 180-\alpha_{2,3}$$

y todos sus giros  $\frac{1}{4}$

$$\text{Vértice 3} \quad \alpha_{2,3} \quad 180-\alpha_{1,3} \quad \alpha_{4,1} \quad 180-\alpha_{2,4}$$

$$180-\alpha_{1,2} \quad 180-\alpha_{3,4}$$

y todos sus giros  $\frac{1}{4}$

Vértice 4     $\alpha_{3,4}$      $180-\alpha_{2,4}$      $\alpha_{1,2}$      $180-\alpha_{1,3}$   
 (opuesto al vértice 2)     $180-\alpha_{2,3}$      $180-\alpha_{4,1}$

y todos sus girados  $\frac{1}{4}$

Vértice 5     $\alpha_{2,3}$      $180-\alpha_{2,4}$      $\alpha_{4,1}$      $180-\alpha_{1,3}$   
 (opuesto al vértice 3)     $180-\alpha_{3,4}$      $180-\alpha_{1,2}$

y todos sus girados  $\frac{1}{4}$

Vértice 6     $\alpha_{1,2}$      $\alpha_{4,1}$      $\alpha_{3,4}$      $\alpha_{2,3}$   
 (opuesto al vértice 1)     $\alpha_{2,4}$      $\alpha_{1,3}$

y todos sus girados  $\frac{1}{4}$

En consecuencia, un mismo rombododecaedro puede aparecer bajo 24 formas diferentes debido a la simbología adoptada. Estas 24 representaciones distintas se pueden reducir fundamentalmente a tres que proceden de tres vértices distintos (no opuestos dos a dos); ya que las restantes se compondrán de sus girados  $\frac{1}{4}$  y en los vértices opuestos figurarán los mismo ángulos recorridos en sentido contrario.

### 3.1.2.- ROMBOICOSAEDROS EQUIVALENTES

Entenderemos por romboicosaedros equivalentes a todos

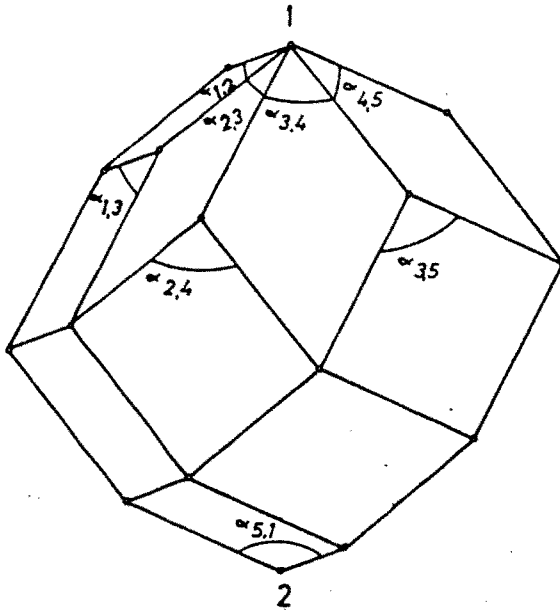


Fig 3.1.2<sub>A</sub>

aqueellos que procedan de un mismo romboicosaedro base y que puedan tener expresiones diferentes a causa de la simbología adoptada.

Al romboicosaedro de la figura 3.1.2<sub>A</sub> le hemos representado por:

$$\begin{array}{cccccc} \alpha_{1,2} & \alpha_{2,3} & \alpha_{3,4} & \alpha_{4,5} & \alpha_{5,1} & \\ & \alpha_{1,3} & \alpha_{2,4} & \alpha_{3,5} & \alpha_{4,1} & \alpha_{5,2} \end{array}$$

Pero si le giramos de  $\frac{1}{5}$  en  $\frac{1}{5}$  obtendremos las expresiones siguientes:

$$\begin{array}{cccccc} - & \alpha_{2,3} & \alpha_{3,4} & \alpha_{4,5} & \alpha_{5,1} & \alpha_{1,2} \\ & \alpha_{2,4} & \alpha_{3,5} & \alpha_{4,1} & \alpha_{5,2} & \alpha_{1,3} \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} - & \alpha_{3,4} & \alpha_{4,5} & \alpha_{5,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{2,3} \\ & \alpha_{3,5} & \alpha_{4,1} & \alpha_{5,2} & \alpha_{1,3} & \alpha_{2,4} \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} - & \alpha_{4,5} & \alpha_{5,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{2,3} & \alpha_{3,4} \\ & \alpha_{4,1} & \alpha_{5,2} & \alpha_{1,3} & \alpha_{2,4} & \alpha_{3,5} \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc}
 - & \alpha_{5,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{2,3} & \alpha_{3,4} & \alpha_{4,5} \\
 & \alpha_{5,2} & \alpha_{1,3} & \alpha_{2,4} & \alpha_{3,5} & \alpha_{4,1}
 \end{array}$$

Estas cinco expresiones o definiciones diferentes se han obtenido a partir del vértice 1, como vértice en que concurren cinco caras; pero al existir otro vértice con la misma particularidad, la definición del romboicosaedro partiendo de este vértice sería:

$$\begin{array}{cccccc}
 \text{Vértice 2} & \alpha_{1,2} & \alpha_{5,1} & \alpha_{4,5} & \alpha_{3,4} & \alpha_{2,3} \\
 & \alpha_{2,5} & \alpha_{4,1} & \alpha_{3,5} & \alpha_{2,4} & \alpha_{1,3}
 \end{array}$$

y todos sus girados  $\frac{1}{5}$

Así pues, un mismo romboicosaedro puede aparecer bajo 10 formas diferentes debido a la simbología adoptada. Estas 10 representaciones diferentes se pueden reducir fundamentalmente a una; ya que las restantes se compondrán de sus girados  $\frac{1}{5}$  y en el vértice opuesto figurarán los mismo ángulos recorridos en sentido inverso.

### 3.1.3.- TRIAKONTAEDROS EQUIVALENTES

Denominaremos triakontaedros equivalentes a todos aquellos que procedan de un mismo triakontaedro base y que que puedan tener diferentes expresiones como consecuencia



de la simbología adoptada:

Distinguiremos dos casos:

3.1.3.1.- TRIAKONTAEDROS TOPOLOGICAMENTE IGUALES AL TRIAKONTAEDRO POLAR

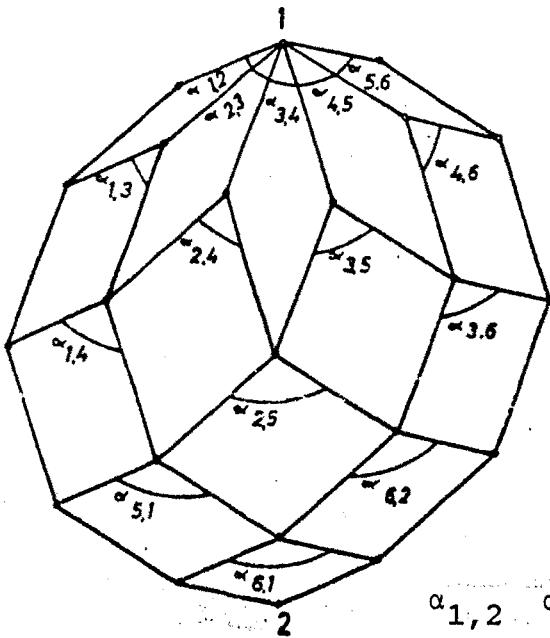


Fig 3i.3.1A

Al triakontaedro de la figura 3.1.3.1<sub>A</sub> se le define de acuerdo con la simbología propuesta por:

- $\alpha_{1,2}$   $\alpha_{2,3}$   $\alpha_{3,4}$   $\alpha_{4,5}$   $\alpha_{5,6}$   $\alpha_{6,1}$
- $\alpha_{1,3}$   $\alpha_{2,4}$   $\alpha_{3,5}$   $\alpha_{4,6}$   $\alpha_{5,1}$   $\alpha_{6,2}$
- $\alpha_{1,4}$   $\alpha_{2,5}$   $\alpha_{3,6}$   $\alpha_{1,4}$   $\alpha_{2,5}$   $\alpha_{3,6}$

Pero si le giramos de  $\frac{1}{6}$  en  $\frac{1}{6}$  obtendremos las expresiones siguientes:

- $\alpha_{2,3}$   $\alpha_{3,4}$   $\alpha_{4,5}$   $\alpha_{5,6}$   $\alpha_{6,1}$   $\alpha_{1,2}$
- $\alpha_{2,4}$   $\alpha_{3,5}$   $\alpha_{4,6}$   $\alpha_{5,1}$   $\alpha_{6,2}$   $\alpha_{1,3}$
- $\alpha_{2,5}$   $\alpha_{3,6}$   $\alpha_{1,4}$   $\alpha_{2,5}$   $\alpha_{3,6}$   $\alpha_{1,4}$

$$\begin{array}{l}
 - \quad \alpha_{3,4} \quad \alpha_{4,5} \quad \alpha_{5,6} \quad \alpha_{6,1} \quad \alpha_{1,2} \quad \alpha_{2,3} \\
 \quad \alpha_{3,5} \quad \alpha_{4,6} \quad \alpha_{5,1} \quad \alpha_{6,2} \quad \alpha_{1,3} \quad \alpha_{2,4} \\
 \quad \quad \alpha_{3,6} \quad \alpha_{1,4} \quad \alpha_{2,5} \quad \alpha_{3,6} \quad \alpha_{1,4} \quad \alpha_{2,5}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 - \quad \alpha_{4,5} \quad \alpha_{5,6} \quad \alpha_{6,1} \quad \alpha_{1,2} \quad \alpha_{2,3} \quad \alpha_{3,4} \\
 \quad \alpha_{4,6} \quad \alpha_{5,1} \quad \alpha_{6,2} \quad \alpha_{1,3} \quad \alpha_{2,4} \quad \alpha_{3,5} \\
 \quad \quad \alpha_{1,4} \quad \alpha_{2,5} \quad \alpha_{3,6} \quad \alpha_{1,4} \quad \alpha_{2,5} \quad \alpha_{3,6}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 - \quad \alpha_{5,6} \quad \alpha_{6,1} \quad \alpha_{1,2} \quad \alpha_{2,3} \quad \alpha_{3,4} \quad \alpha_{4,5} \\
 \quad \alpha_{5,1} \quad \alpha_{6,2} \quad \alpha_{1,3} \quad \alpha_{2,4} \quad \alpha_{3,5} \quad \alpha_{4,6} \\
 \quad \quad \alpha_{2,5} \quad \alpha_{3,6} \quad \alpha_{1,4} \quad \alpha_{2,5} \quad \alpha_{3,6} \quad \alpha_{1,4}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 - \quad \alpha_{6,1} \quad \alpha_{1,2} \quad \alpha_{2,3} \quad \alpha_{3,4} \quad \alpha_{4,5} \quad \alpha_{5,6} \\
 \quad \alpha_{6,2} \quad \alpha_{1,3} \quad \alpha_{2,4} \quad \alpha_{3,5} \quad \alpha_{4,6} \quad \alpha_{5,1} \\
 \quad \quad \alpha_{3,6} \quad \alpha_{1,4} \quad \alpha_{2,5} \quad \alpha_{3,6} \quad \alpha_{1,4} \quad \alpha_{2,5}
 \end{array}$$

Estas seis definiciones diferentes se han obtenido a partir del vértice 1, como vértice en que concurren seis caras; pero como ya sabemos, en el vértice opuesto se da la misma circunstancia y así se puede escribir:

$$\begin{array}{l}
 \text{Vértice 2 : } \alpha_{1,2} \quad \alpha_{6,1} \quad \alpha_{5,6} \quad \alpha_{4,5} \quad \alpha_{3,4} \quad \alpha_{2,3} \\
 \quad \alpha_{2,6} \quad \alpha_{1,5} \quad \alpha_{4,6} \quad \alpha_{3,5} \quad \alpha_{2,4} \quad \alpha_{1,3} \\
 \quad \quad \alpha_{2,5} \quad \alpha_{1,4} \quad \alpha_{3,6} \quad \alpha_{2,5} \quad \alpha_{1,4} \quad \alpha_{3,6}
 \end{array}$$

y todos sus girados  $\frac{1}{6}$

Luego un mismo triakontaedro topológicamente idéntico al triakontaedro polar puede aparecer bajo 12 formas diferentes debido a la simbología adoptada.

Estas 12 representaciones diferentes se pueden reducir a una; ya que las restantes se compodrán de sus giros  $\frac{1}{6}$  y en el vértice opuesto figurarán los mismos ángulos recorridos en sentido contrario.

3.1.3.2.- TRIAKONTAEDROS TOPOLOGICAMENTE IGUALES AL TRIAKONTAEDRO EQUIFACIAL

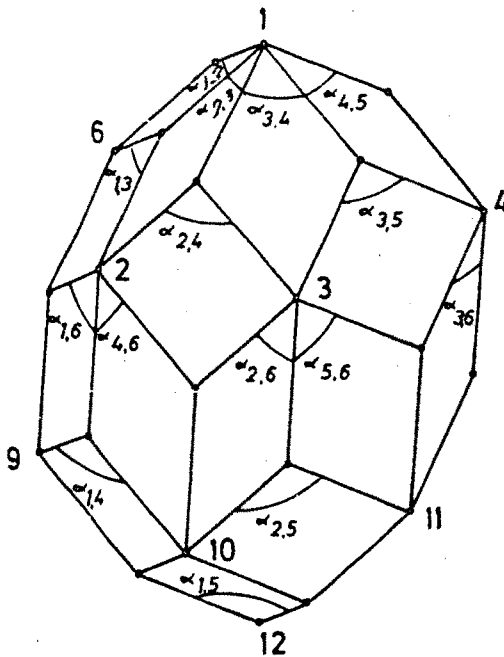


Fig 3.1.3.2<sub>A</sub>

Al triakontaedro de la figura 3.1.3.2<sub>A</sub> se le define de la siguiente forma:

- $\alpha_{1,2}$        $\alpha_{2,3}$        $\alpha_{3,4}$        $\alpha_{4,5}$        $\alpha_{5,1}$   
 $\alpha_{1,3}$        $\alpha_{2,4}$        $\alpha_{3,5}$        $\alpha_{4,1}$        $\alpha_{5,2}$   
 $\alpha_{1,6}$   $\alpha_{4,6}$   $\alpha_{2,6}$   $\alpha_{5,6}$   $\alpha_{3,6}$   $\alpha_{1,6}$   $\alpha_{4,6}$   $\alpha_{2,6}$   $\alpha_{5,6}$   $\alpha_{3,6}$

Pero si le giramos de  $\frac{1}{5}$  en  $\frac{1}{5}$  obtendremos las expresiones siguientes:

-  $\alpha_{2,3}$        $\alpha_{3,4}$        $\alpha_{4,5}$        $\alpha_{5,1}$        $\alpha_{1,2}$   
 $\alpha_{2,4}$        $\alpha_{3,5}$        $\alpha_{4,1}$        $\alpha_{5,2}$        $\alpha_{1,3}$   
 $\alpha_{2,6}$   $\alpha_{5,6}$   $\alpha_{3,6}$   $\alpha_{1,6}$   $\alpha_{4,6}$   $\alpha_{2,6}$   $\alpha_{5,6}$   $\alpha_{3,6}$   $\alpha_{1,6}$   $\alpha_{4,6}$

-  $\alpha_{3,4}$        $\alpha_{4,5}$        $\alpha_{5,1}$        $\alpha_{1,2}$        $\alpha_{2,3}$   
 $\alpha_{3,5}$        $\alpha_{4,1}$        $\alpha_{5,2}$        $\alpha_{1,3}$        $\alpha_{2,4}$   
 $\alpha_{3,6}$   $\alpha_{1,6}$   $\alpha_{4,6}$   $\alpha_{2,6}$   $\alpha_{5,6}$   $\alpha_{3,6}$   $\alpha_{1,6}$   $\alpha_{4,6}$   $\alpha_{2,6}$   $\alpha_{5,6}$

-  $\alpha_{4,5}$        $\alpha_{5,1}$        $\alpha_{1,2}$        $\alpha_{2,3}$        $\alpha_{3,4}$   
 $\alpha_{4,1}$        $\alpha_{5,2}$        $\alpha_{1,3}$        $\alpha_{2,4}$        $\alpha_{3,5}$   
 $\alpha_{4,6}$   $\alpha_{2,6}$   $\alpha_{5,6}$   $\alpha_{3,6}$   $\alpha_{1,6}$   $\alpha_{4,6}$   $\alpha_{2,6}$   $\alpha_{5,6}$   $\alpha_{3,6}$   $\alpha_{1,6}$

-  $\alpha_{5,1}$        $\alpha_{1,2}$        $\alpha_{2,3}$        $\alpha_{3,4}$        $\alpha_{4,5}$   
 $\alpha_{5,2}$        $\alpha_{1,3}$        $\alpha_{2,4}$        $\alpha_{3,5}$        $\alpha_{4,1}$   
 $\alpha_{5,6}$   $\alpha_{3,6}$   $\alpha_{1,6}$   $\alpha_{4,6}$   $\alpha_{2,6}$   $\alpha_{5,6}$   $\alpha_{3,6}$   $\alpha_{1,6}$   $\alpha_{4,6}$   $\alpha_{2,6}$

Estas cinco representaciones diferentes se han obtenido a partir del vértice 1, como vértice en el que concurren cinco caras; pero, como se sabe, existen otros once vértices con la misma particularidad que nos permiten las nuevas definiciones del poliedro siguientes:

Vértice 2:  $\alpha_{1,6}$   $\alpha_{4,6}$   $180 - \alpha_{2,4}$   $\alpha_{2,3}$   $180 - \alpha_{1,3}$   
 $\alpha_{4,1}$   $180 - \alpha_{2,6}$   $180 - \alpha_{3,4}$   $180 - \alpha_{1,2}$   $180 - \alpha_{3,6}$   
 $\alpha_{5,1}$   $180 - \alpha_{5,2}$   $\alpha_{5,6}$   $180 - \alpha_{3,5}$   $\alpha_{4,5}$   $\alpha_{5,1}$   $180 - \alpha_{5,2}$   $\alpha_{5,6}$   $180 - \alpha_{3,5}$   $\alpha_{4,5}$

y todos sus girados  $\frac{1}{5}$

Vértice 3:  $\alpha_{2,6}$   $\alpha_{5,6}$   $180 - \alpha_{3,5}$   $\alpha_{3,4}$   $180 - \alpha_{2,4}$   
 $\alpha_{5,2}$   $180 - \alpha_{3,6}$   $180 - \alpha_{4,5}$   $180 - \alpha_{2,3}$   $180 - \alpha_{4,6}$   
 $\alpha_{1,2}$   $180 - \alpha_{1,3}$   $\alpha_{1,6}$   $180 - \alpha_{4,1}$   $\alpha_{5,1}$   $\alpha_{1,2}$   $180 - \alpha_{1,3}$   $\alpha_{1,6}$   $180 - \alpha_{4,1}$   $\alpha_{5,1}$

y todos sus girados  $\frac{1}{5}$

Vértice 4:  $\alpha_{3,6}$   $\alpha_{1,6}$   $180 - \alpha_{4,1}$   $\alpha_{4,5}$   $180 - \alpha_{3,5}$   
 $\alpha_{1,3}$   $180 - \alpha_{4,6}$   $180 - \alpha_{5,1}$   $180 - \alpha_{3,4}$   $180 - \alpha_{5,6}$   
 $\alpha_{2,3}$   $180 - \alpha_{2,4}$   $\alpha_{2,6}$   $180 - \alpha_{5,2}$   $\alpha_{1,2}$   $\alpha_{2,3}$   $180 - \alpha_{2,4}$   $\alpha_{2,6}$   $180 - \alpha_{5,2}$   $\alpha_{1,2}$

y todos sus girados  $\frac{1}{5}$

Vértice 5:  $\alpha_{4,6}$   $\alpha_{2,6}$   $180 - \alpha_{5,2}$   $\alpha_{5,1}$   $180 - \alpha_{4,1}$

$\alpha_{2,4}$   $180 - \alpha_{5,6}$   $180 - \alpha_{1,2}$   $180 - \alpha_{4,5}$   $180 - \alpha_{1,6}$   
 $\alpha_{3,4}$   $180 - \alpha_{3,5}$   $\alpha_{3,6}$   $180 - \alpha_{1,3}$   $\alpha_{2,3}$   $\alpha_{3,4}$   $180 - \alpha_{3,5}$   $\alpha_{3,6}$   $180 - \alpha_{1,3}$   $\alpha_{2,3}$

Y todos sus girados  $\frac{1}{5}$

Vértice 6:  $\alpha_{5,6}$   $\alpha_{3,6}$   $180 - \alpha_{1,3}$   $\alpha_{1,2}$   $180 - \alpha_{5,2}$   
 $\alpha_{3,5}$   $180 - \alpha_{1,6}$   $180 - \alpha_{2,3}$   $180 - \alpha_{5,1}$   $180 - \alpha_{2,6}$   
 $\alpha_{4,5}$   $180 - \alpha_{4,1}$   $\alpha_{4,6}$   $180 - \alpha_{2,4}$   $\alpha_{3,4}$   $\alpha_{4,5}$   $180 - \alpha_{4,1}$   $\alpha_{4,6}$   $180 - \alpha_{2,4}$   $\alpha_{3,4}$

Y todos sus girados  $\frac{1}{5}$

Vértice 7:  $\alpha_{4,6}$   $\alpha_{1,6}$   $180 - \alpha_{1,3}$   $\alpha_{2,3}$   $180 - \alpha_{2,4}$   
(opuesto al 2)  $\alpha_{4,1}$   $180 - \alpha_{3,6}$   $180 - \alpha_{1,2}$   $180 - \alpha_{3,4}$   $180 - \alpha_{2,6}$   
 $\alpha_{4,5}$   $180 - \alpha_{3,5}$   $\alpha_{5,6}$   $180 - \alpha_{5,2}$   $\alpha_{5,1}$   $\alpha_{4,5}$   $180 - \alpha_{3,5}$   $\alpha_{5,6}$   $180 - \alpha_{5,2}$   $\alpha_{5,1}$

Y todos sus girados  $\frac{1}{5}$

Vértice 8:  $\alpha_{5,6}$   $\alpha_{2,6}$   $180 - \alpha_{2,4}$   $\alpha_{3,4}$   $180 - \alpha_{3,5}$

(opuesto al 3)  $\alpha_{5,2}$   $180 - \alpha_{4,6}$   $180 - \alpha_{2,3}$   $180 - \alpha_{4,5}$   $180 - \alpha_{3,6}$

$\alpha_{5,1}$   $180 - \alpha_{4,1}$   $\alpha_{1,6}$   $180 - \alpha_{1,3}$   $\alpha_{1,2}$   $\alpha_{5,1}$   $180 - \alpha_{4,1}$   $\alpha_{1,6}$   $180 - \alpha_{1,3}$   $\alpha_{1,2}$

y todos sus girados  $\frac{1}{5}$

Vértice 9:  $\alpha_{1,6}$   $\alpha_{3,6}$   $180 - \alpha_{3,5}$   $\alpha_{4,5}$   $180 - \alpha_{4,1}$

(opuesto al 4)  $\alpha_{1,3}$   $180 - \alpha_{5,6}$   $180 - \alpha_{3,4}$   $180 - \alpha_{5,1}$   $180 - \alpha_{4,6}$

$\alpha_{1,2}$   $180 - \alpha_{5,2}$   $\alpha_{2,6}$   $180 - \alpha_{2,4}$   $\alpha_{2,3}$   $\alpha_{1,2}$   $180 - \alpha_{5,2}$   $\alpha_{2,6}$   $180 - \alpha_{2,4}$   $\alpha_{2,3}$

y todos sus girados  $\frac{1}{5}$

Vértice 10:  $\alpha_{2,6}$   $\alpha_{4,6}$   $180 - \alpha_{4,1}$   $\alpha_{5,1}$   $180 - \alpha_{5,2}$

(opuesto al 5)  $\alpha_{2,4}$   $180 - \alpha_{1,6}$   $180 - \alpha_{4,5}$   $180 - \alpha_{1,2}$   $180 - \alpha_{5,6}$

$\alpha_{2,3}$   $180 - \alpha_{1,3}$   $\alpha_{3,6}$   $180 - \alpha_{3,5}$   $\alpha_{3,4}$   $\alpha_{2,3}$   $180 - \alpha_{1,3}$   $\alpha_{3,6}$   $180 - \alpha_{3,5}$   $\alpha_{3,4}$

y todos sus girados  $\frac{1}{5}$

Vértice 11:  $\alpha_{3,6}$   $\alpha_{5,6}$   $180 - \alpha_{5,2}$   $\alpha_{1,2}$   $180 - \alpha_{1,3}$   
 (opuesto  
 al 6)  $\alpha_{3,5}$   $180 - \alpha_{2,6}$   $180 - \alpha_{5,1}$   $180 - \alpha_{2,3}$   $180 - \alpha_{1,6}$   
 $\alpha_{3,4}$   $180 - \alpha_{2,4}$   $\alpha_{4,6}$   $180 - \alpha_{4,1}$   $\alpha_{4,5}$   $\alpha_{3,4}$   $180 - \alpha_{4,6}$   $180 - \alpha_{4,1}$   $\alpha_{4,5}$   
 Y todos sus girados  $\frac{1}{5}$

Vértice 12:  $\alpha_{1,2}$   $\alpha_{5,1}$   $\alpha_{4,5}$   $\alpha_{3,4}$   $\alpha_{2,3}$   
 (opuesto  
 al 1)  $\alpha_{5,2}$   $\alpha_{4,1}$   $\alpha_{3,5}$   $\alpha_{2,4}$   $\alpha_{1,3}$   
 $\alpha_{2,6}$   $\alpha_{4,6}$   $\alpha_{1,6}$   $\alpha_{3,6}$   $\alpha_{5,6}$   $\alpha_{2,6}$   $\alpha_{4,6}$   $\alpha_{1,6}$   $\alpha_{3,6}$   $\alpha_{5,6}$   
 Y todos sus girados  $\frac{1}{5}$



Resulta así, que un mismo triakontaedro topológicamente igual al triakontaedro equifacial puede aparecer bajo 60 formas diferentes como consecuencia de la simbología adoptada.

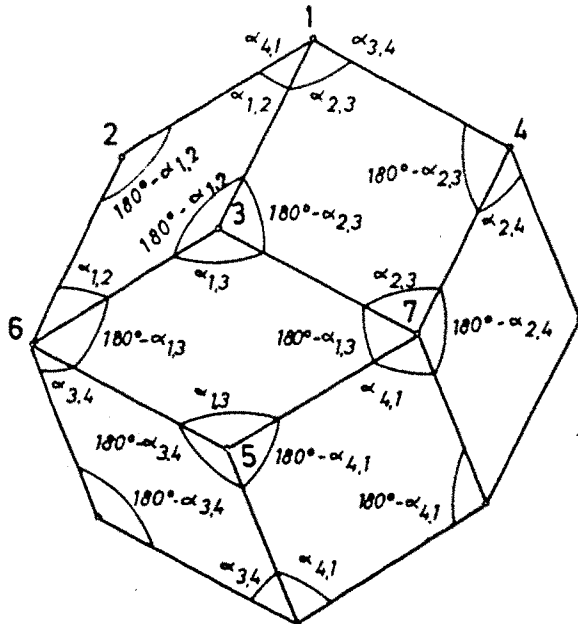
Estas 60 denominaciones distintas se pueden reducir fundamentalmente a seis que proceden de seis vértices diferentes (no opuestos dos a dos); ya que las restantes se compondrán de sus girados  $\frac{1}{5}$  y en los vértices opuestos figurarán los mismos ángulos recorridos en sentido inverso.

### 3.2.- CONVEXIDAD DE LOS ZONOEDROS

Cualquiera de las definiciones que se han recogido en el capítulo anterior, particularizada para ángulos dados, nos definirá un zonoedro y solamente uno, el cual podrá ser o no convexo. Este problema es el que se estudia a continuación, particularizado para los rombododecaedros y exigiendo en el caso general que los  $\binom{n}{4}$  rombododecaedros que se pueden obtener a partir de un zonoedro cualquiera, eliminando sucesivamente las bandas respectivas, sean convexos.

CONDICIONES NECESARIAS Y SUFICIENTES QUE DEFINEN LA CONVEXIDAD DE UN ROMBODODECAEDRO.

3.2.1.- CONDICIONES NECESARIAS DE CONVEXIDAD



Basta exigir que la suma de ángulos en cada vértice sea menor que  $360^\circ$ . Dada la simetría central del poliedro, - bastará con aplicarlo a la mitad de los vértices.

- Fig 3.2.1<sub>A</sub>

- 1.-  $\alpha_{1,2} + \alpha_{2,3} + \alpha_{3,4} + \alpha_{4,1} < 360$
- 2.-  $360 - \alpha_{1,2} - \alpha_{4,1} + \alpha_{2,4} < 360 \rightarrow \alpha_{1,2} + \alpha_{4,1} > \alpha_{2,4}$
- 3.-  $360 - \alpha_{1,2} - \alpha_{2,3} + \alpha_{1,3} < 360 \rightarrow \alpha_{1,2} + \alpha_{2,3} > \alpha_{1,3}$
- 4.-  $360 - \alpha_{2,3} - \alpha_{3,4} + \alpha_{2,4} < 360 \rightarrow \alpha_{2,3} + \alpha_{3,4} > \alpha_{2,4}$
- 5.-  $360 - \alpha_{3,4} - \alpha_{4,1} + \alpha_{1,3} < 360 \rightarrow \alpha_{3,4} + \alpha_{4,1} > \alpha_{1,3}$
- 6.-  $360 + \alpha_{1,2} + \alpha_{3,4} - \alpha_{1,3} - \alpha_{2,4} < 360 \rightarrow \alpha_{1,3} + \alpha_{2,4} > \alpha_{1,2} + \alpha_{3,4}$
- 7.-  $360 + \alpha_{2,3} + \alpha_{4,1} - \alpha_{1,3} - \alpha_{2,4} > 360 \rightarrow \alpha_{1,3} + \alpha_{2,4} > \alpha_{2,3} + \alpha_{4,1}$

(3.2.11.)

- Obsérvese que al combinar:
- 2 con 6 y 7
  - 3 con 6 y 7
  - 4 con 6 y 7
  - 5 con 6 y 7

aparecen el resto de las condiciones necesarias para que

se puedan formar los cuatro triedros fundamentales del rom**o**dodecaedro.

$$\begin{aligned} & (\alpha_{1,2} \alpha_{2,3} \alpha_{1,3}) \quad (\alpha_{2,3} \alpha_{3,4} \alpha_{2,4}) \\ & (\alpha_{3,4} \alpha_{4,1} \alpha_{1,3}) \quad (\alpha_{1,2} \alpha_{4,1} \alpha_{2,4}) \end{aligned}$$

En un principio parece que estas condiciones además de necesarias son las suficientes para definir la convexidad de un rombododecaedro. Sin embargo no es así; y bastará - para ello proponer un contraejemplo en el que se cumplan las condiciones impuestas y el poliedro al que se llegue no sea convexo.

$$\begin{aligned} \text{Sea: } & \alpha_{1,2} = \alpha_{2,3} = 90 \\ & \alpha_{3,4} = \alpha_{4,1} = \alpha_{2,4} \\ & \alpha_{1,3} = 180 - \alpha_{2,4}; \quad \frac{\alpha_{1,3}}{2} = 90 - \frac{\alpha_{2,4}}{2} \end{aligned} \left\{ \begin{aligned} \cos \frac{\alpha_{1,3}}{2} &= \sin \frac{\alpha_{2,4}}{2} \\ \operatorname{tg} \frac{\alpha_{1,3}}{2} &= \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\alpha_{2,4}}{2}} \end{aligned} \right.$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación (2.31) obtenemos:

$$- \sqrt{A \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha_{2,4}}{2}} \sqrt{A \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha_{2,4}}{2} - A \cos^2 \alpha_{2,4}} = A \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha_{2,4}}{2} \cos \alpha_{2,4}$$

Elevando al cuadrado:

$$\operatorname{sen}^2 \frac{\alpha_{2,4}}{2} (\operatorname{sen}^2 \frac{\alpha_{2,4}}{2} - \cos^2 \alpha_{2,4}) = \operatorname{sen}^4 \frac{\alpha_{2,4}}{2} \cos^2 \alpha_{2,4}$$

$$\operatorname{sen}^2 \frac{\alpha_{2,4}}{2} - \cos^2 \alpha_{2,4} = \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha_{2,4}}{2} \cos^2 \alpha_{2,4}$$

$$\operatorname{sen}^2 \frac{\alpha_{2,4}}{2} (1 - \cos^2 \alpha_{2,4}) = \cos^2 \alpha_{2,4}$$

$$\frac{(1 - \cos \alpha_{2,4})}{2} (1 - \cos^2 \alpha_{2,4}) = \cos^2 \alpha_{2,4}$$

$$\cos^3 \alpha_{2,4} - 3 \cos^2 \alpha_{2,4} - \cos \alpha_{2,4} + 1 = 0$$

Haciendo:  $\cos \alpha_{2,4} = x$  ;  $x^3 - 3x^2 - x + 1 = 0$

las raíces de  $|x| < 1$  son:  $x_1 \approx 0,460811127$  ;  $\alpha_{2,4} \approx 62,56053956$

$$x_2 \approx -0,6751308706 ; \alpha_{2,4} \approx 132,4643139$$

Evidentemente, la primera solución:  $\alpha_{2,4} \approx 62,56053956 \dots$  cumple con todas y cada una de las siete condiciones de convexidad.

Sin embargo, la segunda solución:  $\alpha_{2,4} \approx 132,4643139 \dots$  no cumple ni siquiera la primera condición de convexidad, - por lo que debe desecharse.

Continuemos ahora el estudio de la primera solución que cumple las siete ecuaciones de partida y que, en principio, hace suponer que nos encontramos ante un rombodecaedro que ha de ser convexo.

Las caras obtenidas nos permiten dibujar su desarrollo que es el que se ofrece a continuación:

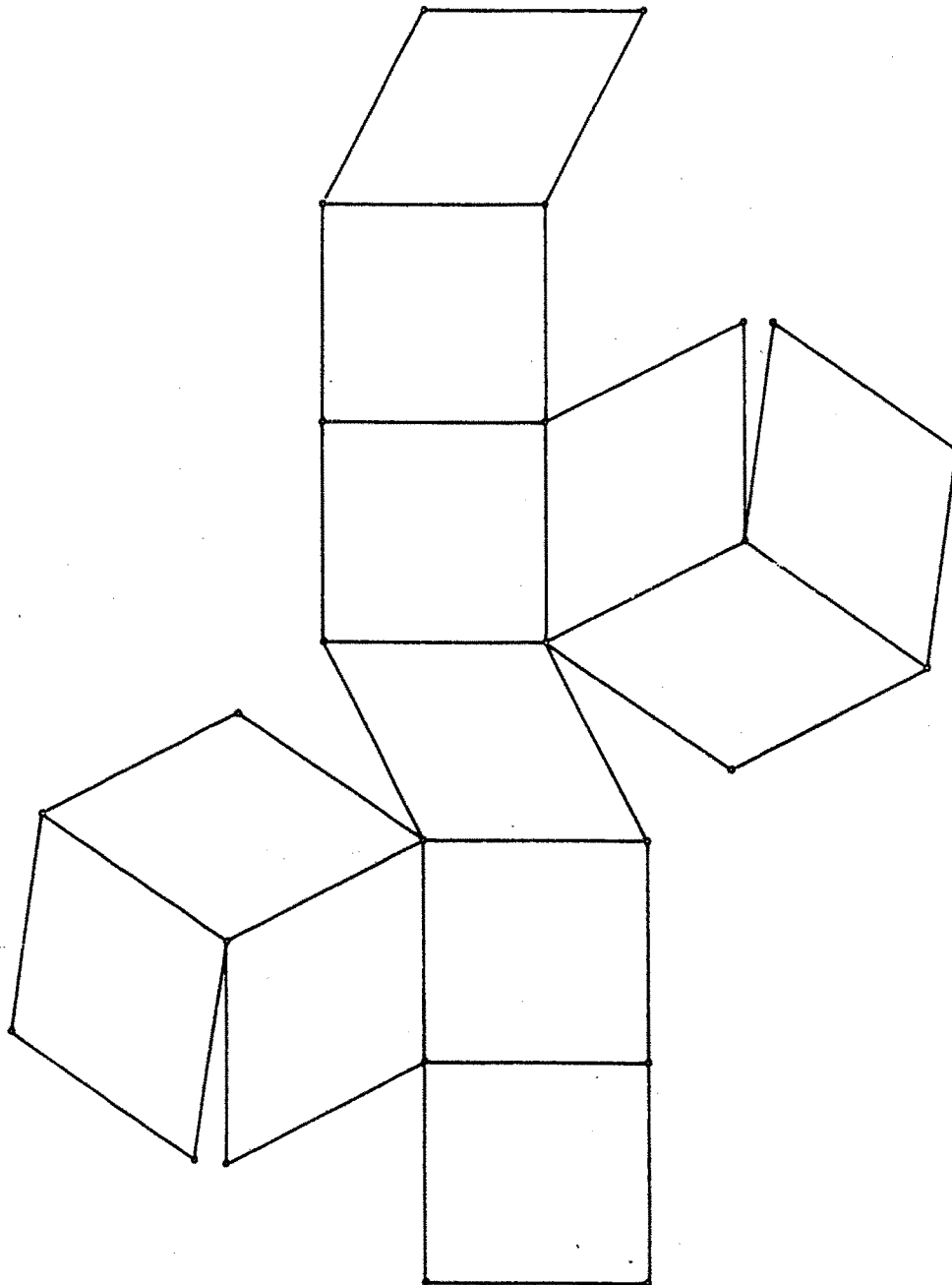


Fig 3.2.1b

Si intentamos materializar este poliedro, resulta que no es convexo; y por tanto, las condiciones necesarias (3.2.11) no son suficientes para poder afirmar que el poliedro sea convexo.

Hallemos pues, las condiciones que nos faltan y que en principio no eran tan evidentes que se tuviesen que exigir.

3.2.2.- OTRAS CONDICIONES EXIGIBLES PARA ASEGURAR LA CONVEXIDAD DEL ROMBODODECAEDRO

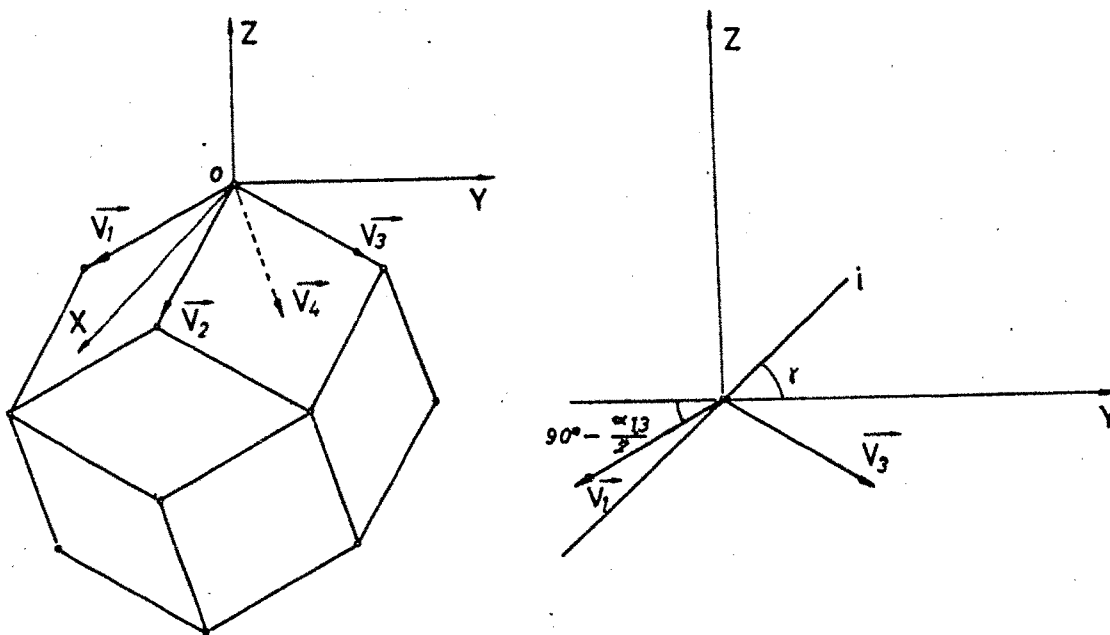


Fig. 3.22A

Los vectores  $\vec{V}_2$  y  $\vec{V}_4$  definen un plano cuya intersección con el plano coordenado  $yz$  nos proporciona la recta  $i$ . El ángulo  $\gamma$  formado por esta recta con el eje  $y$  debe ser:

$$90 - \frac{\alpha_{1,3}}{2} < \gamma < 90 + \frac{\alpha_{1,3}}{2}$$

y por tanto,  $\gamma$  debe satisfacer a:

$$\operatorname{tg} \gamma > \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\alpha_{1,3}}{2}} \quad \text{o bien a} \quad \operatorname{tg} \gamma > \frac{-1}{\operatorname{tg} \frac{\alpha_{1,3}}{2}}$$

Ambas se pueden reunir en una sola:

$$\operatorname{tg}^2 \gamma > \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha_{1,3}}{2}}$$

Calculemos a continuación el valor de  $\operatorname{tg} \gamma$ . Para ello, en primer lugar, hallaremos el plano definido por  $\vec{v}_2$  y  $\vec{v}_4$

$$\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_4 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

donde  $(a_1 \ b_1 \ c_1)$  y  $(a_2 \ b_2 \ c_2)$  son los valores ya calculados en 2.3.

Ecuación del plano definido por  $\vec{v}_2$  y  $\vec{v}_4$ :

$$\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} z = 0$$

Intersección con  $x = 0$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} z = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} y$$

Luego:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

Por tanto:

$$\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}^2}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2} > \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha_{1,3}}{2}}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2 < \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha_{1,3}}{2} \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}^2 \quad (3.2.21)$$



Asimismo, los vectores  $\vec{V}_1$  y  $\vec{V}_3$  definirán un plano cuya intersección con el definido por  $\vec{V}_2$  y  $\vec{V}_4$  nos proporcionará una recta que debe estar comprendida entre la parte positiva de ambos. En vez de rehacer todos los cálculos, podemos aprovechar los anteriores sin más que cambiar los ángulos de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rcl}
 \alpha_{1,2} \text{ (nuevo)} & = & \alpha_{2,3} \text{ (anterior)} \\
 \alpha_{2,3} & " & \alpha_{3,4} & " \\
 \alpha_{3,4} & " & \alpha_{4,1} & " \\
 \alpha_{4,1} & " & \alpha_{1,2} & " \\
 \alpha_{1,3} & " & \alpha_{2,4} & " \\
 \alpha_{2,4} & " & \alpha_{1,3} & "
 \end{array}$$

Según esto, la ecuación (2.42) se transformará en:

$$\left| \begin{array}{cc} a'_1 & b'_1 \\ a'_2 & b'_2 \end{array} \right|^2 < \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha_{2,4}}{2} \left| \begin{array}{cc} a'_1 & c'_1 \\ a'_2 & c'_2 \end{array} \right|^2 \quad (3.2.22)$$

donde  $(a'_1 \ b'_1 \ c'_1)$  y  $(a'_2 \ b'_2 \ c'_2)$  son los  $(a_1 \ b_1 \ c_1)$  y  $(a_2 \ b_2 \ c_2)$  ya calculados en 2.3 y en los cuales se han sustituido los  $\alpha_{i,j}$  (nuevos) por los  $\alpha_{i,j}$  (antiguos)

Por tanto, estas dos nuevas condiciones permiten, - finalmente, asegurar la convexidad de un rombododecaedro.

LAS CONDICIONES QUE DEFINEN LA CONVEXIDAD DE UN ROMBODECAEDRO SON, EN DEFINITIVA, LAS NUEVE SIGUIENTES:

$$\begin{aligned}
 1.- & \alpha_{1,2} + \alpha_{2,3} + \alpha_{3,4} + \alpha_{4,1} < 360 \\
 2.- & \alpha_{1,2} + \alpha_{4,1} > \alpha_{2,4} \\
 3.- & \alpha_{1,2} + \alpha_{2,3} > \alpha_{1,3} \\
 4.- & \alpha_{2,3} + \alpha_{3,4} > \alpha_{2,4} \\
 5.- & \alpha_{3,4} + \alpha_{4,1} > \alpha_{1,3} \\
 6.- & \alpha_{1,3} + \alpha_{2,4} > \alpha_{1,2} + \alpha_{3,4} \\
 7.- & \alpha_{1,3} + \alpha_{2,4} > \alpha_{2,3} + \alpha_{4,1} \\
 8.- & \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2 < \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha_{1,3}}{2} \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}^2 \\
 9.- & \begin{vmatrix} a'_1 & b'_1 \\ a'_2 & b'_2 \end{vmatrix}^2 < \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha_{2,4}}{2} \begin{vmatrix} a'_1 & c'_1 \\ a'_2 & c'_2 \end{vmatrix}^2
 \end{aligned}
 \tag{3.2.23}$$

donde:

$$a_1 = + \sqrt{1 - \frac{(\cos \alpha_{1,2} + \cos \alpha_{2,3})^2}{4 \cos^2 \frac{\alpha_{1,3}}{2}} - \frac{(\cos \alpha_{2,3} - \cos \alpha_{1,2})^2}{4 \sin^2 \frac{\alpha_{1,3}}{2}}}$$

$$b_1 = \frac{\cos \alpha_{2,3} - \cos \alpha_{1,2}}{2 \sin \frac{\alpha_{1,3}}{2}}$$

$$c_1 = - \frac{\cos \alpha_{1,2} + \cos \alpha_{2,3}}{2 \cos \frac{\alpha_{1,3}}{2}}$$

$$a_2 = -\sqrt{1 - \frac{(\cos\alpha_{3,4} + \cos\alpha_{4,1})^2}{4 \cos^2 \frac{\alpha_{1,3}}{2}} - \frac{(\cos\alpha_{3,4} - \cos\alpha_{4,1})^2}{4 \sin^2 \frac{\alpha_{1,3}}{2}}}$$

$$b_2 = \frac{\cos\alpha_{3,4} - \cos\alpha_{4,1}}{2 \sin \frac{\alpha_{1,3}}{2}}$$

$$c_2 = -\frac{\cos\alpha_{3,4} + \cos\alpha_{4,1}}{2 \cos \frac{\alpha_{1,3}}{2}}$$

$$a'_1 = +\sqrt{1 - \frac{(\cos\alpha_{2,3} + \cos\alpha_{3,4})^2}{4 \cos^2 \frac{\alpha_{2,4}}{2}} - \frac{(\cos\alpha_{3,4} - \cos\alpha_{2,3})^2}{4 \sin^2 \frac{\alpha_{2,4}}{2}}}$$

$$b'_1 = \frac{\cos\alpha_{3,4} - \cos\alpha_{2,3}}{2 \sin \frac{\alpha_{2,4}}{2}}$$

$$c'_1 = -\frac{\cos\alpha_{2,3} + \cos\alpha_{3,4}}{2 \cos \frac{\alpha_{2,4}}{2}}$$

$$a'_2 = -\sqrt{1 - \frac{(\cos\alpha_{4,1} + \cos\alpha_{1,2})^2}{4 \cos^2 \frac{\alpha_{2,4}}{2}} - \frac{(\cos\alpha_{4,1} - \cos\alpha_{1,2})^2}{4 \sin^2 \frac{\alpha_{2,4}}{2}}}$$

$$b'_2 = \frac{\cos\alpha_{4,1} - \cos\alpha_{1,2}}{2 \sin \frac{\alpha_{2,4}}{2}}$$

$$c'_2 = -\frac{\cos\alpha_{4,1} + \cos\alpha_{1,2}}{2 \cos \frac{\alpha_{2,4}}{2}}$$

Volvamos al contraejemplo desarrollado anteriormente para ver qué condición es la que incumplía:

En nuestro caso:

$$a_1 = 1 \quad a_2 = -0,4608$$

$$b_1 = 0 \quad b_2 = 0$$

$$c_1 = 0 \quad c_2 = -0,8874$$

Con estos datos pasamos a comprobar la condición 8 de (3.2.23):

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -0,4608 & 0 \end{vmatrix} 2 < 2,7092 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -0,4608 & -0,8874 \end{vmatrix} 2$$

$0 < 2,1334$  : Luego cumple la condición 8

Nos falta comprobar por último la condición 9 y para ello calculemos previamente  $(a_1' b_1' c_1')$  y  $(a_2' b_2' c_2')$

$$\begin{array}{ll} a_1' = 0,8546 & a_2' = -0,8546 \\ b_1' = 0,4437 & b_2' = 0,4437 \\ c_1' = -0,2696 & c_2' = -0,2696 \end{array}$$

Entrando en la condición 9 :

$$\left| \begin{array}{cc|c} 0,8546 & 0,4437 & 2 \\ -0,8546 & 0,4437 & \end{array} \right| < 0,3691 \cdot \left| \begin{array}{cc|c} 0,8546 & -0,2696 & 2 \\ -0,8546 & -0,2696 & \end{array} \right|$$

$$0,5751 \neq 0,0783$$

Luego era la condición 9 de (3.2.23) la que incumplía el contraejemplo propuesto aunque en principio tenía toda la apariencia de ser convexo.

En consecuencia, han de ser nueve las condiciones exigibles a un rombododecaedro para que sea convexo y no las siete que aparecían en un planteamiento simplista y, como se ha visto, falso.

Omitimos para no hacer más extenso este estudio la demostración de que estas nueve condiciones necesarias para asegurar la convexidad de un rombododecaedro son también las suficientes para definirle, pero es fácilmente comproba

ble que las dos últimas condiciones impuestas para un vértice donde concurren cuatro caras, implica que se cumplan en los otros cinco vértices con la misma particularidad.

### 3.3.- OBTENCION DE LOS ZONOEDROS EQUILATEROS A PARTIR DE LAS CARAS NO RELACIONADAS ENTRE SI.

Ya se dedujo en el Capítulo II que el número de ángulos independientes de las caras de un zonoedro equilátero - procedente de una estrella no singular formada por  $n$  segmentos iguales, es  $2n-3$ , deduciéndose los restantes  $\binom{n-2}{2}$  a partir de las fórmulas que allí se facilitan.

La obtención de estos  $\binom{n-2}{2}$  ángulos es fácilmente programable, lo cual nos permite resolver de una forma rápida, todos los zonoedros equiláteros deseados a partir de sus ángulos determinados.

Resolvamos a título de ejemplo, diferentes zonoedros equiláteros, partiendo de los  $(2n-3)$  ángulos independientes, con la condición de que seis cualesquiera de ellos no formen rombododecaedro.

#### 3.3.1.- OBTENCION DE UN ROMBODODECAEDRO A PARTIR DE CINCO DE SUS ANGULOS

Sean:

$$\begin{aligned} \alpha_{1,2} &= 60^\circ & \alpha_{4,1} &= 135^\circ \\ \alpha_{2,3} &= 80^\circ & \alpha_{1,3} &= 130^\circ \\ \alpha_{3,4} &= 65^\circ \end{aligned}$$

Entrando en la ecuación (2.31), obtenemos:

$$\alpha_{2,4} \approx 141,9454854$$

Resolvemos a continuación este mismo ejercicio GEOMETRICAMENTE. Se reducirá a la construcción de dos triedros de los que se conocen las tres caras, y hallar el ángulo formado por dos aristas de ambos triedros.

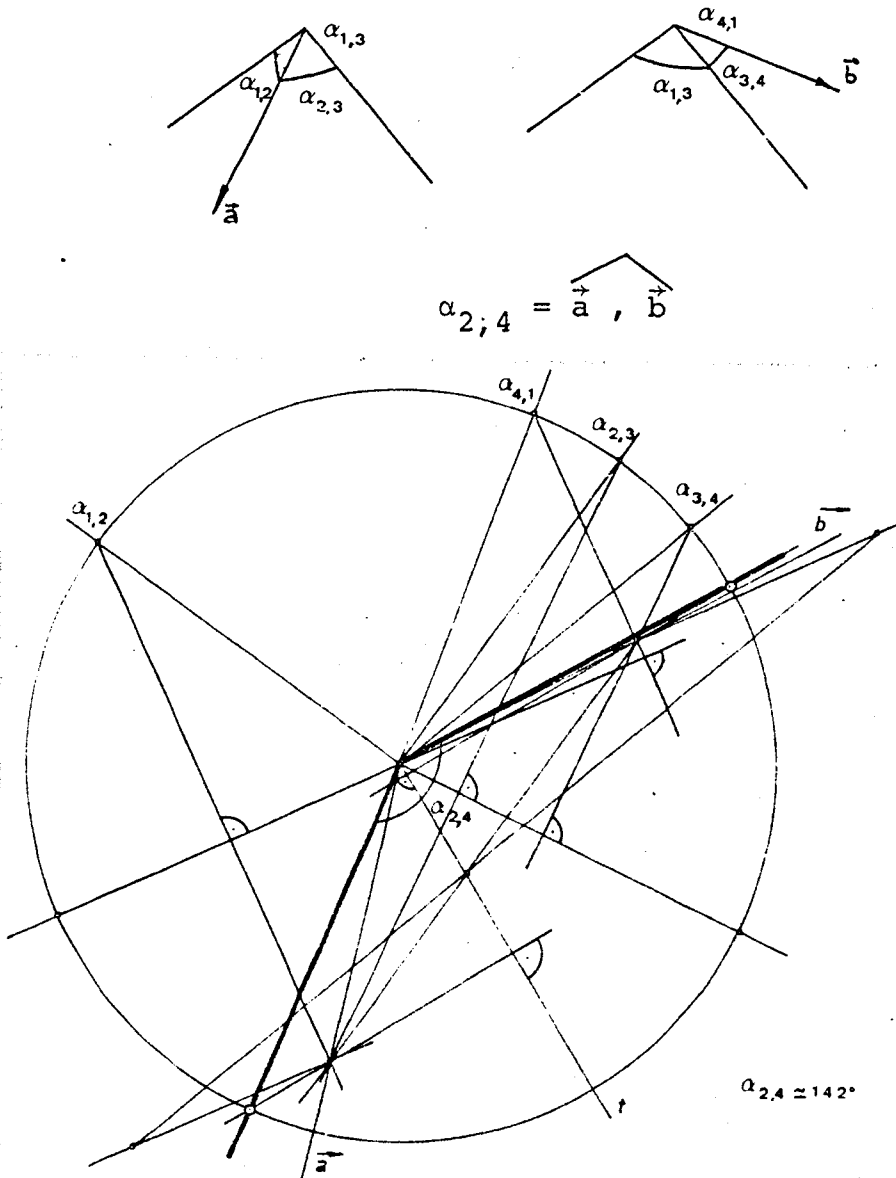


Fig 3.3.1A

3.3.2.- OBTENCION DE UN ROMBOICOSAEDRO A PARTIR DE SIETE DE SUS ANGULOS NO RELACIONADOS ENTRE SI

Sean:  $\alpha_{1,2} = 60^\circ$                        $\alpha_{1,3} = 130^\circ$   
 $\alpha_{2,3} = 80^\circ$                        $\alpha_{3,5} = 125^\circ$   
 $\alpha_{3,4} = 65^\circ$                        $\alpha_{4,1} = 135^\circ$   
 $\alpha_{5,1} = 75^\circ$

Entrando en las ecuaciones (2.41), obtenemos:

	RESULTADO ANALITICO	RESULTADO GEOMETRICO
$\alpha_{2,4}$	$\approx 141,94548$	$142^\circ$
$\alpha_{5,2}$	$\approx 132,77185$	$133^\circ$
$\alpha_{4,5}$	$\approx 65,894695$	$65,5^\circ$

Eliminando una de las bandas octogonales de este romboicosaedro, se puede obtener el rombododecaedro anterior

3.3.3.- OBTENCION DE UN TRIAKONTAEDRO TOPOLOGICAMENTE IGUAL AL TRIAKONTAEDRO POLAR A PARTIR DE NUEVE DE SUS ANGULOS, NO RELACIONADOS ENTRE SI.

Sean:  $\alpha_{1,2} = 60^\circ$                        $\alpha_{3,5} \approx 97,8834$   
 $\alpha_{2,3} = 80^\circ$                        $\alpha_{5,1} = 113^\circ$   
 $\alpha_{3,4} = 65^\circ$                        $\alpha_{1,4} = 135^\circ$   
 $\alpha_{6,1} = 75^\circ$                        $\alpha_{3,6} = 125^\circ$   
 $\alpha_{1,3} = 130^\circ$



Sustituyendo estos valores en las ecuaciones (2.5.11)

obtenemos:

	RESULTADO ANALITICO	RESULTADO GEOMETRICO
$\alpha_{2,4}$	$\approx 141,94548$	$142^\circ$
$\alpha_{2,5}$	$= 165^\circ$	$165^\circ$
$\alpha_{6,2}$	$\approx 132,77185$	$133^\circ$
$\alpha_{4,5}$	$\approx 32,885$	$33^\circ$
$\alpha_{4,6}$	$\approx 65,894695$	$66^\circ$
$\alpha_{5,6}$	$= 38^\circ$	$38^\circ$

Si eliminamos una banda decagonal de este triakontaedro, se puede obtener el romboicosaedro anterior

3.3.4.- OBTENCION DE UN TRIAKONTAEDRO TOPOLOGICAMENTE IGUAL AL TRIAKONTAEDRO EQUIFACIAL, A PARTIR DE NUEVE DE SUS ANGULOS NO RELACIONADOS ENTRE SI

Sean:

$\alpha_{1,2} = 60^\circ$	$\alpha_{3,5} = 125^\circ$
$\alpha_{2,3} = 80^\circ$	$\alpha_{4,1} = 135^\circ$
$\alpha_{3,4} = 65^\circ$	$\alpha_{1,6} \approx 65,83902435$
$\alpha_{5,1} = 75^\circ$	$\alpha_{3,6} = 70^\circ$
$\alpha_{1,3} = 130^\circ$	

Sustituyendo estos valores en las ecuaciones (2.5.11), obtenemos:

		RESULTADO ANALITICO	RESULTADO GEOMETRICO
$\alpha_{2,4}$	$\approx$	141,94548	142°
$\alpha_{5,2}$	$\approx$	132,77185	133°
$\alpha_{2,6}$	$\approx$	63,13624	63,5°
$\alpha_{4,5}$	$\approx$	65,89469	65,5°
$\alpha_{4,6}$	$=$	90°	90°
$\alpha_{5,6}$	$\approx$	86,88776	87°

Se puede obtener el romboicosaedro anterior eliminando una de las bandas diagonales de este triakontaedro.

### 3.4.- CONCLUSIONES

- Son precisas nueve condiciones para definir la convexidad de un rombododecaedro. Estas nueve condiciones son las que se expresan en (3.2.23).
- Definidos los  $(2n-3)$  ángulos no relacionados entre sí de un zonoedro equilátero, pueden ser obtenidos los  $\binom{n-2}{2}$  restantes, tanto analítica como geométricamente.

CAPITULO IV

## CAPITULO IV

PROPIEDADES COMUNES A TODOS LOS ROMBODODECAEDROS: LA EQUIPARTICION DEL ESPACIO, EL ELIPSOIDE INSCRITO Y EL EMPAQUETAMIENTO DE CUALQUIER ELIPSOIDE SEA O NO DE REVOLUCION POR MEDIO DE UN DETERMINADO ROMBODODECAEDRO.

### 4.1.- LA EQUIPARTICION DEL ESPACIO

Por medio de una afinidad, se puede transformar el - rombododecaedro equifacial en un cuerpo cuyas caras sean paralelogramos. Existen pues infinitas afinidades que permiten obtener a partir del rombododecaedro equifacial sólidos configurados por doce caras paralelogramos. Solamente en casos muy particulares estos paralelogramos serán rombos como veremos en 4.3. El cubo inscrito al rombododecaedro equifacial (aquel cuyos vértices son los vértices triedros del rombododecaedro) se transformará en un paralelepípedo, y la esfera inscrita a dicho rombododecaedro en un elipsoide tangente - en el punto medio de las caras del poliedro afín.

En general, un rombododecaedro cualquiera (entendiendo por tal un cuerpo con doce caras rombo, de las cuales puede haber hasta seis diferentes), no es un cuerpo directamente - afín del rombododecaedro equifacial; pero siempre, podremos encontrar un cuerpo afín del rombododecaedro equifacial cuyas caras son paralelogramos (no rombos) tales que sus ángulos son iguales a los del rombododecaedro (de caras rombo) - no obtenido por afinidad.

La forma de asociar o relacionar un rombododecaedro (de caras rombos de distintos ángulos) al cuerpo correspondiente que sea afín del rombododecaedro equifacial es la siguiente:

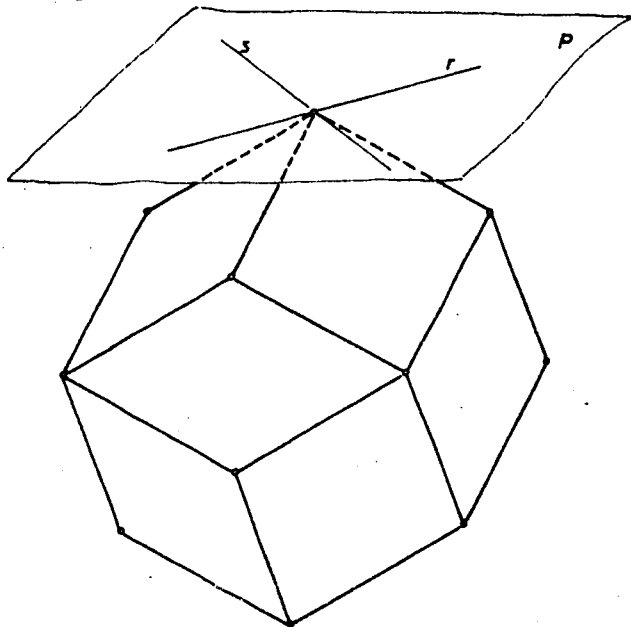


Fig 4.1A

Se parte del rombododecaedro de caras rombo cualesquiera y en uno de sus vértices donde concurren cuatro caras se hallan las intersecciones de las caras no adyacentes obteniendo las rectas  $r$  y  $s$ , las cuales definen un plano  $P$ . Si cortamos a los segmentos de la es-

trella por un plano paralelo al  $P$  obtendremos la magnitud de los segmentos de las aristas que definen el cuerpo afín del rombododecaedro equifacial y cuyos ángulos de sus caras serán iguales a los del rombododecaedro considerado.

Podemos decir pues que, aunque no todo rombododecaedro puede provenir del rombododecaedro equifacial por medio de una afinidad espacial, es posible pasar por medio de acortamientos y/o alargamientos de los segmentos de la estrella que define un vértice en el que concurren cuatro caras a un cuerpo de caras paralelogramo (y ángulos de sus caras iguales

a los del rombododecaedro considerado) afín del rombododecaedro equifacial. La magnitud de los acortamientos y/o alargamientos se obtienen de la forma indicada en el párrafo anterior.

Puesto que, mediante acortamientos y alargamientos - de las aristas de un sólido de caras paralelogramos (afín del rombododecaedro equifacial) pueden convertirse sus caras en rombos y los ángulos sólidos y ángulos diedros de sus vértices y aristas no varían, es evidente que, estos rombododecaedros rellenan el espacio; ya que, así lo hacían los sólidos afines del rombododecaedro equifacial por rellenar éste el espacio.

En consecuencia, CUALQUIER ROMBODODECAEDRO (*de hasta seis caras rombos distintas*) PERMITE LA EQUIPARTICION DEL ESPACIO POR YUXTAPOSICION DE CUERPOS IDENTICOS QUE QUEDAN IGUALMENTE ORIENTADOS.

4.2.- CONDICIONES QUE DEBEN CUMPLIR LOS ROMBODODECAEDROS DE CARAS CUALESQUIERA SUSCEPTIBLES DE RELLENAR EL ESPACIO SIN EXIGIR QUE ESTEN IGUALMENTE ORIENTADOS

Diremos que dos cuerpos iguales entre sí están igualmente orientados cuando se pasa de uno a otro por medio de traslaciones.

Dos cuerpos iguales entre sí están desigualmente orientados

tados cuando es preciso efectuar un giro además de una traslación para hacerlos coincidir.

Veamos en qué condiciones un rombododecaedro, además de equipartir el espacio (propiedad común a todo rombododecaedro) es capaz de rellenar el espacio aunque no quede - igualmente orientado.

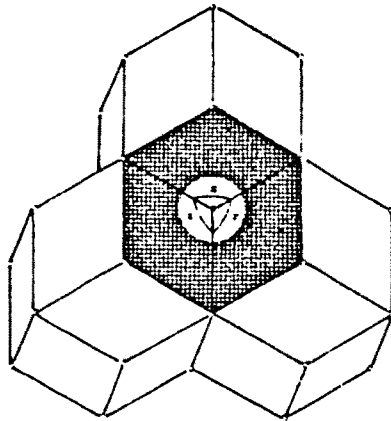


Fig 4.2<sub>A</sub>

Se debe cumplir en uno de los cuatro vértices triedros diferentes, que los tres ángulos sean iguales, lo cual se expresa por medio de una de las siguientes condiciones:

$$\left. \begin{aligned} 180 - \alpha_{1,2} &= 180 - \alpha_{2,3} = \alpha_{1,3} \\ 180 - \alpha_{2,3} &= 180 - \alpha_{3,4} = \alpha_{2,4} \\ 180 - \alpha_{3,4} &= 180 - \alpha_{4,1} = \alpha_{1,3} \\ 180 - \alpha_{4,1} &= 180 - \alpha_{1,2} = \alpha_{2,4} \end{aligned} \right\} (4.21)$$

Cualquiera de las igualdades (4.21) es una condición necesaria y suficiente para poder disponer los rombododecaedros desigualmente orientados rellenando el espacio. Pero, como veremos en el punto 4.3 de todos los rombododecaedros

que cumplan alguna de las condiciones (4.21) nos interesarán aquellos en que  $\alpha_{1,2} = \alpha_{2,3} = \alpha_{3,4} = \alpha_{4,1}$ . Teniendo en cuenta ésto, obligamos a que se cumplan simultáneamente las condiciones primera y tercera de (4.21)

En consecuencia

$$\alpha_{1,2} = \alpha_{2,3} = \alpha_{3,4} = \alpha_{4,1}$$

$$\alpha_{1,3} = 180 - \alpha_{1,2}$$

$$\alpha_{2,4}$$

Obligando a que estos ángulos cumplan la condición de rombododecaedros (2.31)

$$-\sqrt{4 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha_{1,2}}{2} - 4 \cos^2 \alpha_{1,2}} \sqrt{4 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha_{1,2}}{2} - 4 \cos^2 \alpha_{1,2}} +$$

$$+ 4 \cos^2 \alpha_{1,2} = 4 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha_{1,2}}{2} \cos \alpha_{2,4}$$

$$-(\operatorname{sen}^2 \frac{\alpha_{1,2}}{2} - \cos^2 \alpha_{1,2}) + \cos^2 \alpha_{1,2} = \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha_{1,2}}{2} \cos \alpha_{2,4}$$

$$\cos \alpha_{2,4} = \frac{2 \cos^2 \alpha_{1,2}}{\operatorname{sen}^2 \frac{\alpha_{1,2}}{2}} - 1 ; \quad \cos^2 \frac{\alpha_{2,4}}{2} = \frac{\cos^2 \alpha_{1,2}}{\operatorname{sen}^2 \frac{\alpha_{1,2}}{2}}$$

$$\cos \frac{\alpha_{2,4}}{2} = \frac{\cos \alpha_{1,2}}{\operatorname{sen} \frac{\alpha_{1,2}}{2}} \quad (4.22)$$



En consecuencia, de la familia considerada de rombo  
dodecaedros con dos tipos de caras rombo

$$\begin{array}{cccc} \alpha_{1,2} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,2} \\ & 180 - \alpha_{1,2} & \alpha_{2,4} & \end{array}$$

proporcionado un  $\alpha_{1,2}$  ; es posible, obtener mediante (4.22)  
el otro ángulo del ROMBODODECAEDRO QUE SEA CAPAZ DE RELLE-  
NAR EL ESPACIO QUEDANDO DESIGUALMENTE ORIENTADO.

Si obligamos a que todas las caras del rombododecae-  
dro sean iguales, habrá de suceder que:

$$\alpha_{2,4} = \begin{array}{l} \alpha_{1,2} \\ 180 - \alpha_{1,2} \end{array}$$

Para  $\alpha_{2,4} = \alpha_{1,2}$ , sustituyendo en (4.22):

$$\cos \frac{\alpha_{1,2}}{2} = \frac{\cos \alpha_{1,2}}{\operatorname{sen} \frac{\alpha_{1,2}}{2}}$$

$$\frac{1}{2} \operatorname{sen} \alpha_{1,2} = \cos \alpha_{1,2}$$

$$\operatorname{tg} \alpha_{1,2} = 2 \rightarrow \alpha_{1,2} \approx 63,4349\dots$$

Este rombododecaedro cuyas caras son todas iguales, siendo éstas ROMBOS CON DIAGONALES EN RELACION AUREA, será exhaustivamente estudiado en el capítulo VI. A este interesantísimo poliedro nos referiremos en lo sucesivo denominándolo R 3.

Para  $\alpha_{2,4} = 180 - \alpha_{1,2} \rightarrow \cos \frac{\alpha_{2,4}}{2} = \sin \frac{\alpha_{1,2}}{2}$ . Sustituyendo en (4.22)

$$\sin \frac{\alpha_{1,2}}{2} = \frac{\cos \alpha_{1,2}}{\sin \frac{\alpha_{1,2}}{2}}$$

$$\frac{1 - \cos \alpha_{1,2}}{2} = \cos \alpha_{1,2}$$

$$\cos \alpha_{1,2} = \frac{1}{3} \rightarrow \alpha_{1,2} \approx 70,5287\dots \rightarrow \text{ROMBODODECAEDRO}$$

EQUIFACIAL

Aunque el rombododecaedro equifacial cumple con las condiciones (4.22) debido a su simetría queda igualmente orientado.

#### 4.3.- OBTENCION DEL ELIPSOIDE INSCRITO A UN ROMBODODECAEDRO DADO DE CARAS CUALESQUIERA Y DEL ROMBODODECAEDRO CIRCUNSCRITO A UN ELIPSOIDE DADO.

Como se sabe para determinar una cuádrica se necesi-

tan nueve condiciones. En este caso, ha de ser tangente a doce planos, o bien, haciendo uso de la condición de centro (tres condiciones), y ser tangente a seis caras (seis condiciones); en total, las nueve condiciones necesarias que determinan la existencia del elipsoide inscrito.

El objetivo que perseguimos y que desarrollaremos en el próximo apartado es que dado un elipsoide cualquiera, - determinemos el rombododecaedro cuyas caras son todas tangentes a ese elipsoide. Por tanto, para determinar los - seis ángulos correspondientes al rombododecaedro, tenemos las siguientes tres condiciones:

Una, dada por la ecuación (2.31)

Dos, por las relaciones entre los semiejes del elipsoide

Faltan de imponer otras tres condiciones que quedan a nuestra elección. Las más sencillas son:

$$\alpha_{2,3} = \alpha_{1,2}$$

$$\alpha_{3,4} = \alpha_{1,2}$$

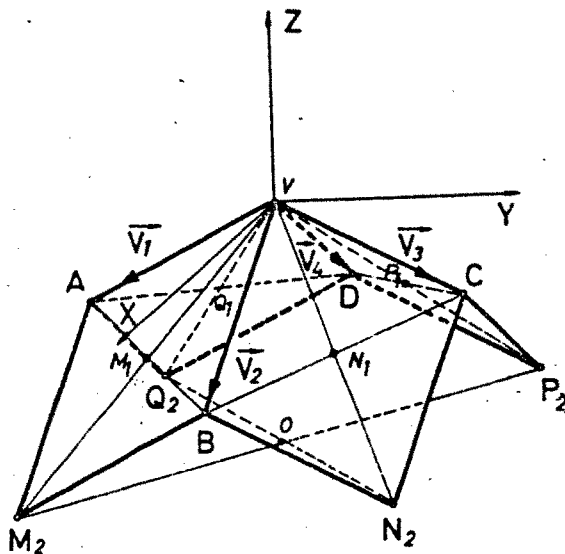
$$\alpha_{4,1} = \alpha_{1,2}$$

El que  $\alpha_{1,2} = \alpha_{2,3} = \alpha_{3,4} = \alpha_{4,1}$  no quiere decir que el elipsoide vaya a ser de revolución; ya que, mientras -  $\alpha_{1,3} \neq \alpha_{2,4}$  los segmentos que forman la estrella correspon

diente al rombododecaedro, no tendrán igual inclinación.

4.3.1.- OBTENCION DEL ELIPSOIDE INSCRITO A UN ROMBODECAEDRO DADO.

Para hallar la ecuación del elipsoide inscrito a un rombododecaedro que cumple las anteriores condiciones nos vamos a apoyar en lo ya deducido y calculado en 2.3.



En nuestro caso:

$$\vec{V}_1(0, -\text{sen} \frac{\alpha_{1,3}}{2}, -\text{cos} \frac{\alpha_{1,3}}{2}) \equiv A$$

$$\vec{V}_2(a_1, 0, c_1) \equiv B$$

$$\vec{V}_3(0, \text{sen} \frac{\alpha_{1,3}}{2}, -\text{cos} \frac{\alpha_{1,3}}{2}) \equiv C$$

$$\vec{V}_4(-a_1, 0, c_1) \equiv D$$

Fig 4.3.1A

$$M_1 = \frac{A + B}{2} \equiv \left( \frac{a_1}{2}, -\frac{1}{2} \text{sen} \frac{\alpha_{1,3}}{2}, \frac{c_1 - \text{cos} \frac{\alpha_{1,3}}{2}}{2} \right)$$

$$N_1 = \frac{B + C}{2} \equiv \left( \frac{a_1}{2}, \frac{1}{2} \text{sen} \frac{\alpha_{1,3}}{2}, \frac{c_1 - \text{cos} \frac{\alpha_{1,3}}{2}}{2} \right)$$

$$P_1 = \frac{C + D}{2} \equiv \left( -\frac{a_1}{2}, \frac{1}{2} \text{sen} \frac{\alpha_{1,3}}{2}, \frac{c_1 - \text{cos} \frac{\alpha_{1,3}}{2}}{2} \right)$$

$$Q_1 = \frac{D + A}{2} \equiv \left( -\frac{a_1}{2}, -\frac{1}{2} \operatorname{sen} \frac{\alpha_{1,3}}{2}, \frac{c_1 - \cos \frac{\alpha_{1,3}}{2}}{2} \right)$$

$$M_2 = 2 M_1 \equiv \left( a_1, -\operatorname{sen} \frac{\alpha_{1,3}}{2}, c_1 - \cos \frac{\alpha_{1,3}}{2} \right)$$

$$N_2 = 2 N_1 \equiv \left( a_1, \operatorname{sen} \frac{\alpha_{1,3}}{2}, c_1 - \cos \frac{\alpha_{1,3}}{2} \right)$$

$$P_2 = 2 P_1 \equiv \left( -a_1, \operatorname{sen} \frac{\alpha_{1,3}}{2}, c_1 - \cos \frac{\alpha_{1,3}}{2} \right)$$

$$Q_2 = 2 Q_1 \equiv \left( -a_1, -\operatorname{sen} \frac{\alpha_{1,3}}{2}, c_1 - \cos \frac{\alpha_{1,3}}{2} \right)$$

$$O = \frac{M_2 + P_2}{2} \equiv \left( 0, 0, c_1 - \cos \frac{\alpha_{1,3}}{2} \right)$$

$$O = \frac{N_2 + Q_2}{2} \equiv \left( 0, 0, c_1 - \cos \frac{\alpha_{1,3}}{2} \right)$$

Trasladando los ejes de  $V$  a  $O$ , y teniendo en cuenta que el centro del elipsoide va a ser el centro del rombo dodecaedro, su ecuación será:

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{\operatorname{sen}^2 \frac{\alpha_{1,3}}{2}} + \frac{z^2}{C^2} = 1 \quad (4.3.11)$$

donde  $C$  es un parámetro a determinar por la condición de

que el elipsoide sea tangente al plano V A B . Después -  
de la traslación, las coordenadas de V serán

$$(0, 0, \cos \frac{\alpha_{1,3}}{2} - c_1)$$

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -\text{sen} \frac{\alpha_{1,3}}{2} & -\text{cos} \frac{\alpha_{1,3}}{2} \\ a_1 & 0 & c_1 \end{vmatrix} = -c_1 \text{sen} \frac{\alpha_{1,3}}{2} \vec{i} -$$

$$-a_1 \text{cos} \frac{\alpha_{1,3}}{2} \vec{j} +$$

$$+a_1 \text{sen} \frac{\alpha_{1,3}}{2} \vec{k}$$

La ecuación del plano V A B será:

$$c_1 \text{sen} \frac{\alpha_{1,3}}{2} x + a_1 \text{cos} \frac{\alpha_{1,3}}{2} y - a_1 \text{sen} \frac{\alpha_{1,3}}{2} z + D = 0$$

que para  $x = 0, y = 0, z = \cos \frac{\alpha_{1,3}}{2} - c_1$

$$z = \frac{D}{a_1 \text{sen} \frac{\alpha_{1,3}}{2}} = \cos \frac{\alpha_{1,3}}{2} - c_1$$

$$D = a_1 \text{sen} \frac{\alpha_{1,3}}{2} (\cos \frac{\alpha_{1,3}}{2} - c_1)$$

$$\text{Plano V A B} \equiv c_1 \text{sen} \frac{\alpha_{1,3}}{2} x + a_1 \text{cos} \frac{\alpha_{1,3}}{2} y - a_1 \text{sen} \frac{\alpha_{1,3}}{2} z +$$

$$+ a_1 \text{sen} \frac{\alpha_{1,3}}{2} (\cos \frac{\alpha_{1,3}}{2} - c_1) = 0 \quad (4.3.12)$$

El plano tangente al elipsoide (4.3.11) en el punto (u , v , w), será:

$$\frac{2u}{a_1^2} x + \frac{2v}{\text{sen}^2 \frac{\alpha_{1,3}}{2}} y + \frac{2w}{c^2} z - 2 = 0 \quad (4.3.13)$$

Estableciendo la identidad entre (4.3.12) y (4.3.13) tendremos:

$$\frac{\frac{2u}{a_1^2}}{c_1 \text{sen} \frac{\alpha_{1,3}}{2}} = \frac{\frac{2v}{\text{sen}^2 \frac{\alpha_{1,3}}{2}}}{a_1 \cos \frac{\alpha_{1,3}}{2}} = \frac{\frac{2w}{c^2}}{- a_1 \text{sen} \frac{\alpha_{1,3}}{2}} = \frac{- 2}{a_1 \text{sen} \frac{\alpha_{1,3}}{2} (\cos \frac{\alpha_{1,3}}{2} - c_1)}$$

$$u = - \frac{a_1 c_1}{(\cos \frac{\alpha_{1,3}}{2} - c_1)}$$

$$v = - \frac{\text{sen} \frac{\alpha_{1,3}}{2} \cos \frac{\alpha_{1,3}}{2}}{\cos \frac{\alpha_{1,3}}{2} - c_1}$$

$$w = \frac{c^2}{\cos \frac{\alpha_{1,3}}{2} - c_1}$$

Por pertenecer el punto (u , v , w) al elipsoide, satisfará la ecuación (4.3.11)

$$\frac{c_1^2}{\left(\cos \frac{\alpha_{1,3}}{2} - c_1\right)^2} + \frac{\cos^2 \frac{\alpha_{1,3}}{2}}{\left(\cos \frac{\alpha_{1,3}}{2} - c_1\right)^2} + \frac{c_1^2}{\left(\cos \frac{\alpha_{1,3}}{2} - c_1\right)^2} = 1$$

$$c^2 = -2 c_1 \cos \frac{\alpha_{1,3}}{2}$$

Pero según 2.3 y para nuestro caso:  $c_1 = -\frac{\cos \alpha_{1,2}}{\cos \frac{\alpha_{1,3}}{2}}$

Sustituyendo:  $c^2 = 2 \cos \alpha_{1,2}$

La ecuación del elipsoide será:

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{\sin^2 \frac{\alpha_{1,3}}{2}} + \frac{z^2}{2 \cos \alpha_{1,2}} = 1$$

Pero  $a_1$  según 2.3 y para nuestro caso vale:

$$a_1^2 = 1 - \frac{\cos^2 \alpha_{1,2}}{\cos^2 \frac{\alpha_{1,3}}{2}}$$

Por fin, la ecuación del elipsoide inscrito al rombo-dodecaedro  $\alpha_{1,2} \quad \alpha_{1,2} \quad \alpha_{1,2} \quad \alpha_{1,2}$  será:  
 $\alpha_{1,3} \quad \alpha_{2,4}$



$$\frac{x^2}{1 - \frac{\cos^2 \alpha_{1,2}}{\cos^2 \frac{\alpha_{1,3}}{2}}} + \frac{y^2}{\sin^2 \frac{\alpha_{1,3}}{2}} + \frac{z^2}{2 \cos \alpha_{1,2}} = 1 \quad (4.3.14)$$

Es fácilmente comprobable que las coordenadas de  $(u, v, w)$  no se corresponden en general con las de  $M_1$  (punto medio de la cara V A B), las cuales, teniendo en cuenta la traslación efectuada son:

$$M_1 \left\{ \frac{a_1}{2}, -\frac{1}{2} \sin \frac{\alpha_{1,3}}{2}, \frac{\cos \frac{\alpha_{1,3}}{2} - c_1}{2} \right\}$$

La condición para que coincidan  $(u, v, w)$  y  $M_1$ ; es decir, para que la serie de rombododecaedros

$$\alpha_{1,2} \quad \alpha_{1,2} \quad \alpha_{1,2} \quad \alpha_{1,2}$$

$$\alpha_{1,3} \quad \alpha_{2,4}$$

sean cuerpos afines del rombododecaedro equifacial, es que  $\cos \alpha_{1,2} = \cos^2 \frac{\alpha_{1,3}}{2}$ , equivalente a  $\alpha_{1,3} = \alpha_{2,4}$ . En este caso, el elipsoide (4.3.14) será de revolución.

#### 4.3.2.- EMPAQUETAMIENTO DE CUALQUIER ELIPSOIDE SEA O NO DE REVOLUCION POR MEDIO DE UN DETERMINADO ROMBODECAEDRO

Se ha visto en este capítulo que todo rombododecaedro es capaz de equipartir el espacio y además admitir elipsoi

de inscrito; por tanto, si somos capaces de encontrar el rombododecaedro cuyas caras sean todas tangentes a un elipsoide determinado, habremos logrado un empaquetamiento de elipsoides y en general, sucederá que cada uno de ellos no será tangente a otros doce.

Si disponemos de un elipsoide cualquiera de semiejes  $a$ ,  $b$  y  $c$  y establecemos la proporcionalidad entre estos semiejes y los de la ecuación (4.3.14), deduciremos los ángulos del rombododecaedro que permita el empaquetamiento de estos elipsoides. Aunque el valor de  $\alpha_{2,4}$  no aparece premeditadamente en la ecuación (4.3.14), lo deduciremos de la ecuación (2.31) que liga a los ángulos del rombododecaedro

$$\begin{array}{cccc} \alpha_{1,2} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,2} \\ & \alpha_{1,3} & & \alpha_{2,4} \end{array}$$

Distinguiremos dos casos según que el elipsoide sea o no de revolución.

#### 4.3.2.1.- EL ELIPSOIDE NO ES DE REVOLUCION

Sean:

$$\frac{a}{b} = k_1$$
$$\frac{c}{b} = k_2$$

Obligando a que los semiejes del elipsoide (4.3.14) estén en la misma relación, tendremos

$$\left. \begin{aligned} 1 - \frac{\cos^2 \alpha_{1,2}}{\cos^2 \frac{\alpha_{1,3}}{2}} &= k_1^2 \\ \frac{2 \cos \alpha_{1,2}}{\sin^2 \frac{\alpha_{1,3}}{2}} &= k_2^2 \end{aligned} \right\} \quad (4.3.2.11)$$

De la segunda ecuación de (4.3.2.11) obtenemos:

$$\sin^2 \frac{\alpha_{1,3}}{2} = \frac{2}{k_2^2} \cos \alpha_{1,2} \quad (4.3.2.12)$$

Desarrollando la primera ecuación de (4.3.2.11) tendremos:

$$1 - \frac{\cos^2 \alpha_{1,2}}{\cos^2 \frac{\alpha_{1,3}}{2}} = k_1^2 \sin^2 \frac{\alpha_{1,3}}{2} \quad (4.3.2.13)$$

Eliminando  $\alpha_{1,3}$  entre (4.3.2.12) y (4.3.2.13):

$$\cos^2 \alpha_{1,2} = \cos^2 \frac{\alpha_{1,3}}{2} (1 - k_1^2 \sin^2 \frac{\alpha_{1,3}}{2})$$

$$\cos^2 \alpha_{1,2} = (1 - \frac{2}{k_2^2} \cos \alpha_{1,2}) (1 - k_1^2 \frac{2}{k_2^2} \cos \alpha_{1,2})$$

$$\cos^2 \alpha_{1,2} \left(1 - \frac{k_1^2}{k_2^2}\right) + \frac{2}{k_2^2} (1 + k_1^2) \cos \alpha_{1,2} - 1 = 0 \quad (4.3.2.14)$$

$$\cos \alpha_{1,2} = \frac{-k_2^2 (1 + k_1^2) + k_2^2 \sqrt{(1 - k_1^2)^2 + k_2^4}}{k_2^4 - 4k_1^2} \quad (4.3.2.15)$$

Válida para  $k_2^2 \neq 2k_1$

En el caso de que  $k_2^2 = 2k_1$  la ecuación (4.3.2.14) se transforma en  $\frac{1}{k_1} (1 + k_1^2) \cos \alpha_{1,2} - 1 = 0$

$$\cos \alpha_{1,2} = \frac{k_1}{1 + k_1^2} \quad (4.3.2.16)$$

Una vez conocido  $\alpha_{1,2}$  el valor de  $\alpha_{1,3}$  lo obtenemos de la ecuación (4.3.2.12). Nos falta por fin hallar  $\alpha_{2,4}$ , el cual lo obtenemos a partir de la relación que liga a los ángulos del rombododecaedro

mediante la ecuación (2.31)

$$-(4 \cos^2 \frac{\alpha_{1,3}}{2} - 4 \cos^2 \alpha_{1,2}) + 4 \cos^2 \alpha_{1,2} = 4 \cos^2 \frac{\alpha_{1,3}}{2} \cos \alpha_{2,4}$$

$$\cos \alpha_{2,4} = \frac{2 \cos^2 \alpha_{1,2}}{\cos^2 \frac{\alpha_{1,3}}{2}} - 1$$

$$\cos^2 \frac{\alpha_{2,4}}{2} = \frac{\cos^2 \alpha_{1,2}}{\cos^2 \frac{\alpha_{1,3}}{2}}$$

$$\cos \frac{\alpha_{2,4}}{2} = \frac{\cos \alpha_{1,2}}{\cos \frac{\alpha_{1,3}}{2}} \quad (4.3.2.17)$$

Luego, dado un elipsoide de semiejes  $a$ ,  $b$  y  $c$  donde  $k_1 = \frac{a}{b}$  y  $k_2 = \frac{c}{b}$ ; los ángulos del rombododecaedro

$$\begin{array}{cccc} \alpha_{1,2} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,2} \\ \alpha_{1,3} & \alpha_{2,4} & & \end{array}$$

que permiten su empaquetamiento vienen definidos por

$$\text{Si } k_2^2 \neq 2 k_1$$

$$\cos \alpha_{1,2} = \frac{-k_2^2 (1+k_1^2) + k_2^2 \sqrt{(1-k_1^2)^2 + k_2^4}}{k_2^4 - 4 k_1^2}$$

$$\text{sen}^2 \frac{\alpha_{1,3}}{2} = \frac{2}{k_2^2} \cos \alpha_{1,2}$$

$$\cos \frac{\alpha_{2,4}}{2} = \frac{\cos \alpha_{1,2}}{\cos \frac{\alpha_{1,3}}{2}}$$

(4.3.2.18)

$$\text{Si } k_2^2 = 2 k_1$$

$$\cos \alpha_{1,2} = \frac{k_1}{1 + k_1^2}$$

$$\sin^2 \frac{\alpha_{1,3}}{2} = \frac{1}{k_1} \cos \alpha_{1,2} = \frac{1}{1 + k_1^2}$$

$$\cos \frac{\alpha_{2,4}}{2} = \frac{\cos \alpha_{1,2}}{\cos \frac{\alpha_{1,3}}{2}} = \frac{\frac{k_1}{1 + k_1^2}}{\sqrt{1 - \frac{1}{1 + k_1^2}}} = \frac{\sqrt{1 + k_1^2}}{1 + k_1^2}$$

(4.3.2.19)

Dado que los semiejes  $a$ ,  $b$  y  $c$  del elipsoide se pueden ordenar de seis formas diferentes, habrá seis pares  $k_1$ ,  $k_2$ ; que introducidos en las ecuaciones (4.3.2.18) o (4.3.2.19) nos proporcionará seis rombododecaedros del tipo

$$\begin{array}{cccc} \alpha_{1,2} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,2} \\ & \alpha_{1,3} & \alpha_{2,4} & \end{array}$$

capaces de empaquetar dicho elipsoide.

#### 4.3.2.2.- EL ELIPSOIDE ES DE REVOLUCION

Dado que el elipsoide es de revolución, dos de los tres semiejes  $a$ ,  $b$  y  $c$  son iguales y se podrán ordenar -

de tres formas diferentes; por tanto, habrá tres pares -  
 $k_1$  ,  $k_2$  , que, introducidos en las ecuaciones (4.3.2.18) o  
 (4.3.2.19) nos proporcionará tres rombododecaedros del -  
 tipo:

$$\begin{matrix} \alpha_{1,2} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,2} \\ & \alpha_{1,3} & \alpha_{2,4} & \end{matrix}$$

capaces de empaquetar dicho elipsoide.

4.4.- EMPAQUETAMIENTO DE ELIPSOIDES EN ROMBODODECAEDROS QUE  
 SEAN SUSCEPTIBLES DE RELLENAR EL ESPACIO DESIGUALMEN-  
 TE ORIENTADOS.

Para este tipo de rombododecaedros según se vio en -  
 4.2. ,  $\alpha_{1,3} = 180 - \alpha_{1,2}$  y por tanto la ecuación (4.3.14) -  
 del elipsoide inscrito se transformará en

$$\frac{x^2}{1 - \frac{\cos^2 \alpha_{1,2}}{\sin^2 \frac{\alpha_{1,2}}{2}}} + \frac{y^2}{\cos^2 \frac{\alpha_{1,2}}{2}} + \frac{z^2}{2 \cos \alpha_{1,2}} = 1 \quad (4.41)$$

Como este elipsoide no tiene más que un parámetro -  
 ( $\alpha_{1,2}$ );  $k_1$  y  $k_2$  estarán relacionados entre sí a través de  
 dicho parámetro.

$$\begin{aligned} k_1^2 &= \frac{a^2}{b^2} = \frac{1 - \frac{\cos^2 \alpha_{1,2}}{\sin^2 \frac{\alpha_{1,2}}{2}}}{\cos^2 \frac{\alpha_{1,2}}{2}} = \frac{1 - \frac{\cos \alpha_{1,2}}{2} - \cos^2 \alpha_{1,2}}{\frac{1}{4} \sin^2 \alpha_{1,2}} = \\ &= \frac{2 - 2\cos \alpha_{1,2} - 4\cos^2 \alpha_{1,2}}{1 - \cos^2 \alpha_{1,2}} \end{aligned}$$

$$k_1^2 = \frac{2 - 4 \cos \alpha_{1,2}}{1 - \cos \alpha_{1,2}} \quad (4.42)$$

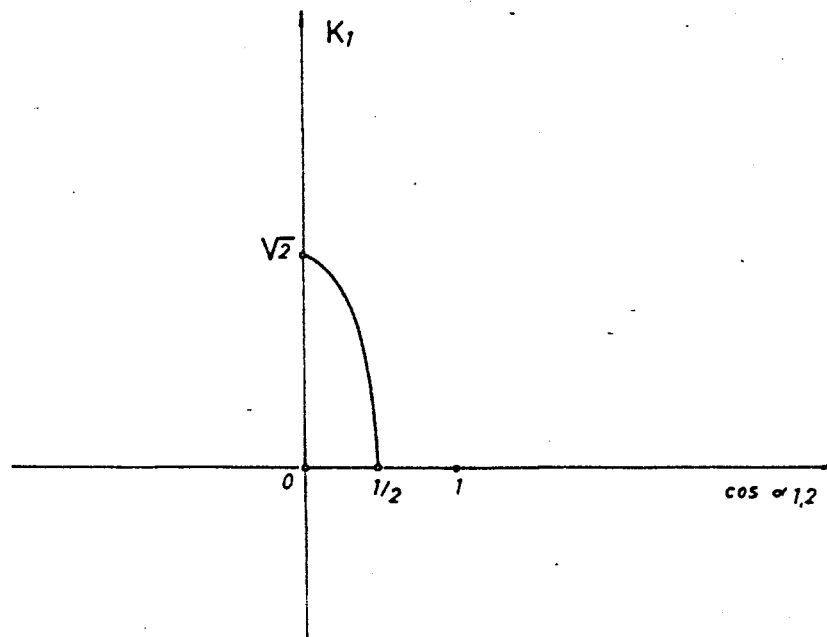
$$k_2^2 = \frac{c^2}{b^2} = \frac{2 \cos \alpha_{1,2}}{\cos^2 \frac{\alpha_{1,2}}{2}} = \frac{4 \cos \alpha_{1,2}}{1 + \cos \alpha_{1,2}}$$

$$k_2^2 = \frac{4 \cos \alpha_{1,2}}{1 + \cos \alpha_{1,2}} \quad (4.43)$$

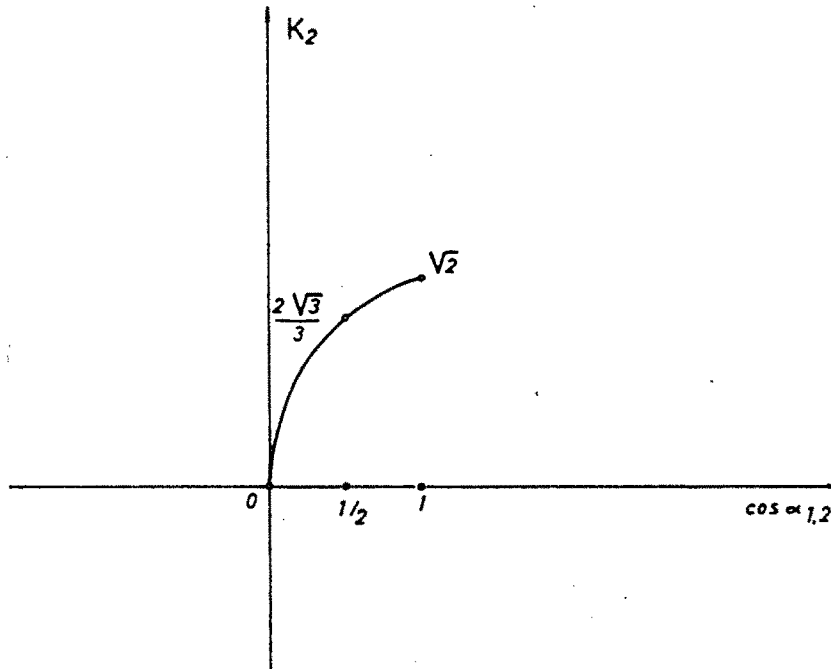
Eliminando  $\cos \alpha_{1,2}$  entre (4.42) y (4.43), obtenemos:

$$k_1^2 = \frac{4 - 3 k_2^2}{2 - k_2^2} \quad (4.44)$$

Y si además representamos las ecuaciones (4.42) y (4.43) para valores de  $0 < \cos \alpha_{1,2} < 1$  siendo  $k_1$  y  $k_2$  mayores que cero







El campo de existencia común será  $0 < \cos \alpha_{1,2} < \frac{1}{2}$   
lo cual proporciona:

$$\left. \begin{array}{l} 0 < k_1 < \sqrt{2} \\ 0 < k_2 < \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{array} \right\} \quad (4.45)$$

En consecuencia, definido un elipsoide por sus semiejes  $a$ ,  $b$  y  $c$  (habrá seis pares  $k_1$ ,  $k_2$ ); LA CONDICION - NECESARIA Y SUFICIENTE para que dicho elipsoide pueda ser empaquetado por medio de un rombododecaedro que puede rellenar espacio desigualmente orientado, es que al menos uno de los pares  $k_1$ ,  $k_2$  cumpla las siguientes condiciones:

$$\left. \begin{aligned} k_1^2 &= \frac{4 - 3 k_2^2}{2 - k_2^2} \\ 0 < k_1 < \sqrt{2} \\ 0 < k_2 < \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{aligned} \right\} \quad (4.46)$$

Los ángulos del rombododecaedro

$$\begin{array}{cccc} \alpha_{1,2} & & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,2} \\ & & 180-\alpha_{1,2} & \alpha_{2,4} & \end{array}$$

que permiten este tipo de empaquetamiento desigualmente orientado son:

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha_{1,2} &= \frac{k_2^2}{4 - k_2^2} \\ \cos \frac{\alpha_{2,4}}{2} &= \frac{\cos \alpha_{1,2}}{\operatorname{sen} \frac{\alpha_{1,2}}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (4.47)$$

El valor de  $\alpha_{2,4}$  para este tipo de rombododecaedros ya fue calculado en (4.22).

#### 4.5.- CONCLUSIONES

- No todo rombododecaedro puede provenir del rombododecaedro equifacial por medio de una afinidad espacial, pero es posible pasar por medio de acortamientos y/o alargamientos de los segmentos de la estrella a un cuerpo de caras paralelogramos que tenga los mismo ángulos en las caras y que puede ser afín del rombododecaedro equifacial.
- PARTIENDO DE CINCO ROMBOS CUALESQUIERA DE IGUAL ARISTA, ES POSIBLE OBTENER MEDIANTE LA ECUACION (2.31), EL SEXTO ROMBO, CON EL QUE COMPLETAR LAS SEIS CARAS ROMBO DISTINTAS POSIBLES DE UN ROMBODODECAEDRO, CON EL QUE SIEMPRE PODREMOS EQUIPARTIR EL ESPACIO.
- TODO ROMBODODECAEDRO QUE CUMPLA UNA DE LAS CONDICIONES (4.21), ADEMAS DE EQUIPARTIR EL ESPACIO, LO RELLENARA, QUEDANDO DESIGUALMENTE ORIENTADO.
- DADO UN ELIPSOIDE CUALQUIERA (SEA O NO DE REVOLUCION) ES POSIBLE ENCONTRAR EL ROMBODODECAEDRO CIRCUNSCRITO QUE PERMITA SU EMPAQUETAMIENTO.
- DADO UN ELIPSOIDE CUYOS SEMIEJES CUMPLAN LAS CONDICIONES (4.46), ES POSIBLE ENCONTRAR UN ROMBODODECAEDRO CAPAZ DE PERMITIR SU EMPAQUETAMIENTO, TANTO IGUALMENTE ORIENTADOS, COMO DESIGUALMENTE DISPUESTOS.

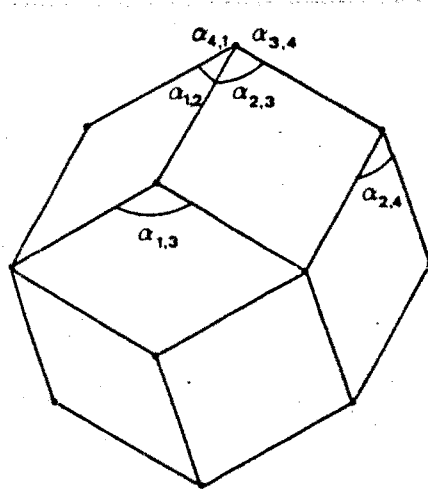
CAPITULO V

# CAPITULO V

DONDE SE OBTIENEN LOS SIETE ROMBODECAEDROS CONVEXOS CON DOS TIPOS DE CARA ROMBO, SIENDO UNA DE ELLAS CUADRADO, COMO CASO PARTICULAR DE UN ESTUDIO EXHAUSTIVO SOBRE LAS RELACIONES QUE LIGAN ENTRE SI A LOS ANGULOS - DE UN ROMBODECAEDRO CON DOS TIPOS DE CARA ROMBO,

## 5.1.- PLANTEAMIENTO GENERAL DEL PROBLEMA

Si al rombododecaedro de la figura 5.1<sub>A</sub>, al cual le

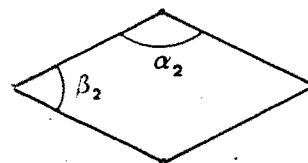
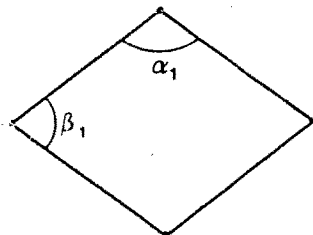


hemos designado por:

$$\begin{matrix} \alpha_{1,2} & \alpha_{2,3} & \alpha_{3,4} & \alpha_{4,1} \\ & \alpha_{1,3} & \alpha_{2,4} & \end{matrix}$$

le exigimos que todas las caras sean rombos de arista ta unidad de alguno de los dos tipos siguientes:

Fig. 5.1<sub>A</sub>



resultará que:  $\alpha_{1,2} \alpha_{2,3} \alpha_{3,4} \alpha_{4,1}$  será alguna de las siguientes cuaternas:

$$\begin{array}{l}
 1.- \alpha_1 \quad \alpha_1 \quad \alpha_1 \quad \alpha_1 \\
 2.- \alpha_1 \quad \alpha_1 \quad \alpha_1 \quad \alpha_2 \\
 3.- \alpha_1 \quad \alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_2 \\
 4.- \alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_1 \quad \alpha_2 \\
 5.- \alpha_1 \quad \alpha_1 \quad \alpha_1 \quad \beta_1 \\
 6.- \alpha_1 \quad \alpha_1 \quad \beta_1 \quad \alpha_2 \\
 7.- \alpha_1 \quad \beta_1 \quad \alpha_1 \quad \alpha_2 \\
 8.- \alpha_1 \quad \beta_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_2 \\
 9.- \alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \beta_1 \quad \alpha_2
 \end{array} \tag{5.11}$$

El resto de las cuaternas, o bien no son posibles - por condiciones de convexidad, o bien son permutaciones - circulares de (5.11), o por lo contrario se pueden reducir a ellas sustituyendo:

$$\begin{array}{l}
 \alpha_1 \text{ por } \beta_1 \text{ y/o } \alpha_2 \text{ por } \beta_2 \\
 \alpha_1 \text{ por } \alpha_2 \text{ ó } \beta_2 \text{ y } \alpha_2 \text{ por } \alpha_1 \text{ ó } \beta_1
 \end{array} \tag{5.12}$$

$\alpha_{1,3} \quad \alpha_{2,4}$  será alguno de los siguientes pares:

$$\begin{array}{llll}
 1.- \alpha_1 \alpha_1 & 5.- \alpha_2 \alpha_1 & 9.- \beta_1 \alpha_1 & 13.- \beta_2 \alpha_1 \\
 2.- \alpha_1 \alpha_2 & 6.- \alpha_2 \alpha_2 & 10.- \beta_1 \alpha_2 & 14.- \beta_2 \alpha_2 \\
 3.- \alpha_1 \beta_1 & 7.- \alpha_2 \beta_1 & 11.- \beta_1 \beta_1 & 15.- \beta_2 \beta_1 \\
 4.- \alpha_1 \beta_2 & 8.- \alpha_2 \beta_2 & 12.- \beta_1 \beta_2 & 16.- \beta_2 \beta_2
 \end{array} \tag{5.13}$$

Luego en principio habrá 144 tipos de rombododecaedros con dos caras diferentes, aunque como veremos más adelante, este número se reducirá considerablemente.

Como en todo rombododecaedro, sucederá que sus seis ángulos deberán cumplir la ecuación (2.31), que una vez simplificada resultará una expresión del tipo  $f(\alpha_1, \alpha_2) = 0$ ; y se estudiará para los tres casos siguientes:

$\alpha_1 = \alpha_2$  que nos proporcionará los rombododecaedros en que todas las caras sean iguales.

$\alpha_1 = 90^\circ$  de la cual resultarán rombododecaedros con dos tipos de cara, siendo una de ellas cuadrado.

$\alpha_2 = 90^\circ$  igual que la anterior condición.

El proceso a seguir será el siguiente:

- 1º) Comprobar, a priori, si puede ser eliminado el rombododecaedro por no poder ser convexo.
- 2º) Transformarlo en los equivalentes que permitan resolver de una manera más cómoda la ecuación (2.31); o bien, ponerlo bajo la forma de un caso ya resuelto.
- 3º) Reducirlo a otro rombododecaedro ya resuelto. Diremos

que un rombodedecaedro con dos tipos de cara se reduce a otro, cuando haciendo una sustitución del tipo (5.12), coincide con el segundo.

La primera sustitución de (5.12) equivale a pasar de  $f(\alpha_1, \alpha_2) = 0$  a alguna de las tres siguientes:

$$f(\beta_1, \alpha_2) = 0 ; f(\alpha_1, \beta_2) = 0 ; f(\beta_1, \beta_2) = 0$$

La segunda sustitución de (5.12) equivale a pasar de  $f(\alpha_1, \alpha_2) = 0$  a alguna de las cuatro siguientes:

$$f(\alpha_2, \alpha_1) = 0 ; f(\alpha_2, \beta_1) = 0$$

$$f(\beta_2, \alpha_1) = 0 ; f(\beta_2, \beta_1) = 0$$

## 5.2.- ESTUDIO DETALLADO DE CADA UNO DE LOS POSIBLES 144 ROMBODECAEDROS CON DOS TIPOS DE CARAS ROMBO

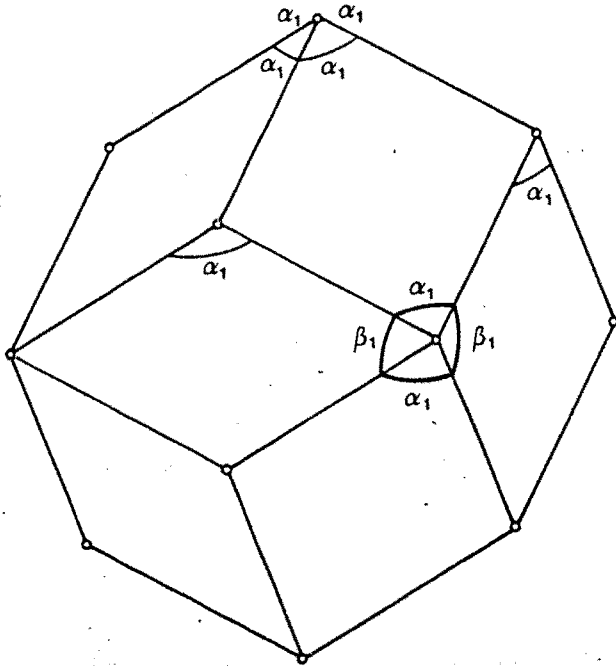
5.2.1.- Rombodedecaedros tipo  $\alpha_1 \quad \alpha_1 \quad \alpha_1 \quad \alpha_1$   
 $\alpha_{1,3} \quad \alpha_{2,4}$

donde  $\alpha_{1,3} \quad \alpha_{2,4}$  es cada una de las (5.13)



$$1.- \alpha_1 \quad \alpha_1 \quad \alpha_1 \quad \alpha_1$$

$$\alpha_1 \quad \alpha_1$$



No puede ser convexo, ya que en el vértice V la suma de ángulos es  $360^\circ$

$$2.- \alpha_1 \quad \alpha_1 \quad \alpha_1 \quad \alpha_1$$

$$\alpha_1 \quad \alpha_2$$

$$\alpha_{1,2} = \alpha_{2,3} = \alpha_{3,4} = \alpha_{4,1} = \alpha_{1,3} = \alpha_1$$

$$\alpha_{2,4} = \alpha_2$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación (2.31), obtenemos:

$$\cos \alpha_1 = \cos \frac{\alpha_1}{2} \quad \cos \frac{\alpha_2}{2}$$

Para  $\alpha_1 = \alpha_2 \rightarrow \underline{\alpha_1 = 0}$  NO CONVEXO

Para  $\alpha_1 = 90^\circ \rightarrow \alpha_2 = 180^\circ$  NO CONVEXO

Para  $\alpha_2 = 90^\circ \rightarrow \alpha_1 = \arccos \frac{1+\sqrt{17}}{8} \approx 50,1792\dots$  CONVEXO

$$3.- \begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_1 \\ & \alpha_1 & \beta_1 & \end{array}$$

$$\alpha_{1,2} = \alpha_{2,3} = \alpha_{3,4} = \alpha_{4,1} = \alpha_{1,3} = \alpha_1$$
$$\alpha_{2,4} = 180 - \alpha_1$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación (2.31) obtenemos

$$\operatorname{tg} \alpha = 2 \quad \alpha \approx 63,4349\dots \quad R 3$$

$$4.- \begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_1 \\ & \alpha_1 & \beta_2 & \end{array}$$

Este caso se puede reducir al 2, cambiando  $\beta_2$  por  $\alpha_2$

$$5.- \begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_1 \\ & \alpha_2 & \alpha_1 & \end{array}$$

Este caso es equivalente al 2.

$$6.- \begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_1 \\ & \alpha_2 & \alpha_2 & \end{array}$$

$$\alpha_{1,2} = \alpha_{2,3} = \alpha_{3,4} = \alpha_{4,1} = \alpha_1$$

$$\alpha_{1,3} = \alpha_{2,4} = \alpha_2$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación (2.31) obtenemos

$$\text{sen } \frac{\alpha_2}{2} = \sqrt{2} \text{ sen } \frac{\alpha_1}{2}$$

Para  $\alpha_1 = \alpha_2$        $\alpha_1 = 0$       NO CONVEXO

Para  $\alpha_1 = 90^\circ$        $\alpha_2 = 180^\circ$       NO CONVEXO

Para  $\alpha_2 = 90^\circ$        $\alpha_1 = 60^\circ$       CONVEXO

7.-  $\alpha_1$        $\alpha_1$        $\alpha_1$        $\alpha_1$   
                   $\alpha_2$        $\beta_1$

$$\alpha_{1,2} = \alpha_{2,3} = \alpha_{3,4} = \alpha_{4,1} = \alpha_1$$

$$\alpha_{1,3} = \alpha_2$$

$$\alpha_{2,4} = 180 - \alpha_1$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación (2.31) obtenemos

$$\cos \alpha_1 = \text{sen } \frac{\alpha_1}{2} \quad \cos \frac{\alpha_2}{2}$$

Para  $\alpha_1 = \alpha_2$        $\text{tg } \alpha_1 = 2$       R 3

Para  $\alpha_1 = 90^\circ$        $\alpha_2 = 180^\circ$       NO CONVEXO

Para  $\alpha_2 = 90^\circ$        $\alpha_1 = \text{arc cos } \frac{\sqrt{17}-1}{8} \approx 67,021343$       CONVEXO



$$11.- \begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_1 \\ & \beta_1 & \beta_1 & \end{array}$$

$$\alpha_{1,2} = \alpha_{2,3} = \alpha_{3,4} = \alpha_{4,1} = \alpha_1$$

$$\alpha_{1,3} = \alpha_{2,4} = 180 - \alpha_1$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación (2.31) obtenemos

$$\alpha = \arccos \frac{1}{3} \quad \text{ROMBODOCAEDRO EQUIFACIAL}$$

$$12.- \begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_1 \\ & \beta_1 & \beta_2 & \end{array}$$

Este caso es equivalente al 15

$$13.- \begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_1 \\ & \beta_2 & \alpha_1 & \end{array}$$

Este caso es equivalente al 4

$$14.- \begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_1 \\ & \beta_2 & \alpha_2 & \end{array}$$

Este caso es equivalente al 8

$$15.- \begin{matrix} \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_1 \\ & \beta_2 & \beta_1 & \end{matrix}$$

Este caso se puede reducir al 7 cambiando  $\beta_2$  por  $\alpha_2$

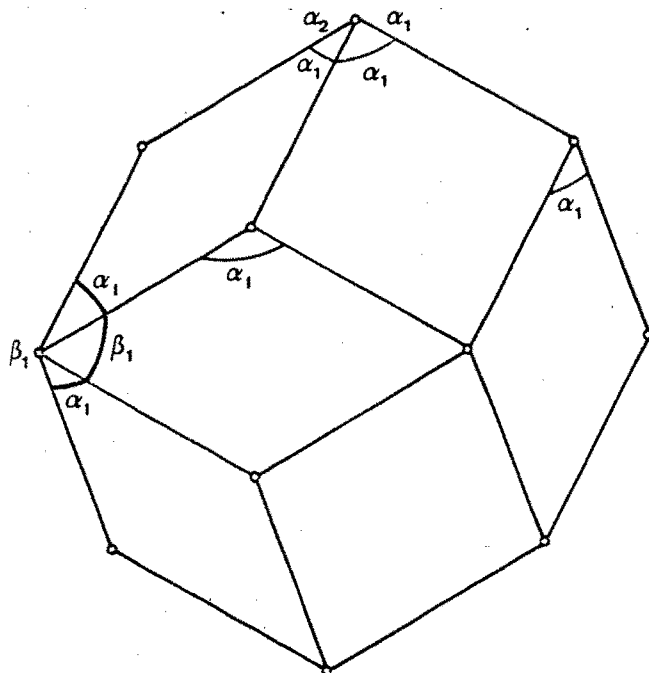
$$16.- \begin{matrix} \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_1 \\ & \beta_2 & \beta_2 & \end{matrix}$$

Este caso se puede reducir al 6 cambiando  $\beta_2$  por  $\alpha_2$

$$5.2.2.- \text{ROMBODODECAEDROS TIPO } \begin{matrix} \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ & \alpha_{1,3} & \alpha_{2,4} & \end{matrix}$$

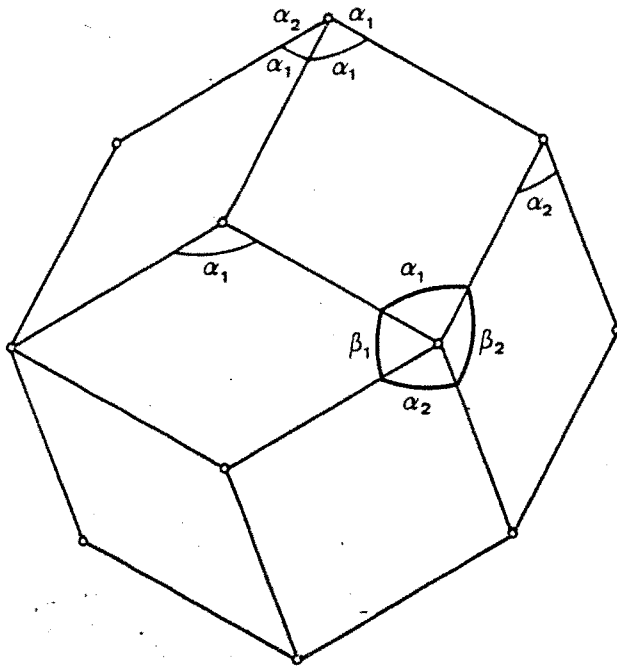
donde  $\alpha_{1,3} \alpha_{2,4}$  es una de las (5.13)

$$17.- \begin{matrix} \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ & \alpha_1 & \alpha_1 & \end{matrix}$$



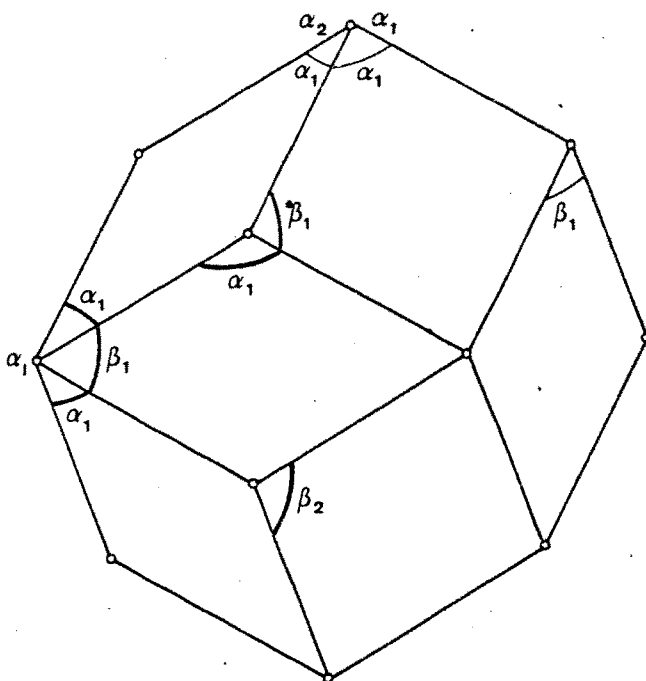
No puede ser convexo, ya que en el vértice V la suma de los ángulos es  $360^\circ$

18.-  $\alpha_1 \quad \alpha_1 \quad \alpha_1 \quad \alpha_2$   
 $\alpha_1 \quad \alpha_2$



No puede ser convexo, por la misma razón que el anterior

19.-  $\alpha_1 \quad \alpha_1 \quad \alpha_1 \quad \alpha_2$   
 $\alpha_1 \quad \beta_1$



Este rombododecaedro es equivalente a  $\alpha_1 \quad \alpha_1 \quad \alpha_1 \quad \beta_1$   
 $\beta_1 \quad \beta_2$

$$\alpha_{1,2} = \alpha_{2,3} = \alpha_{3,4} = \alpha_1$$

$$\alpha_{4,1} = \alpha_{1,3} = 180 - \alpha_1$$

$$\alpha_{2,4} = 180 - \alpha_2$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación (2.31) obtenemos

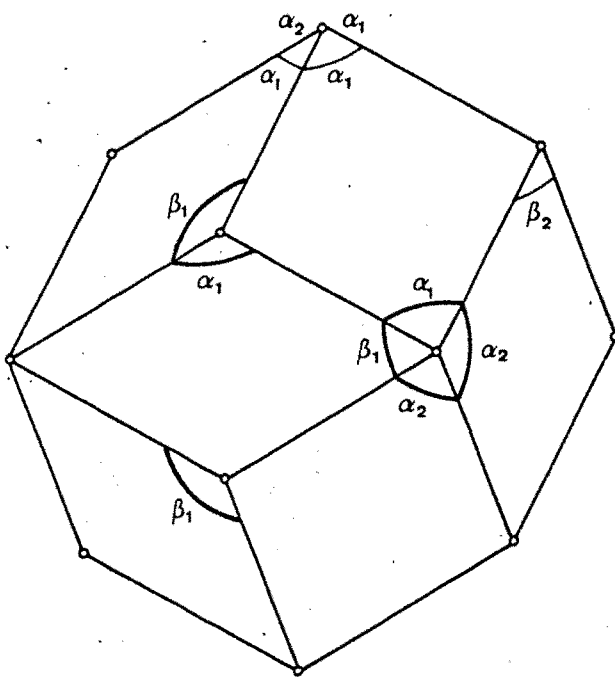
$$\text{sen } \alpha_2 = 2 \cos \alpha_1$$

Para  $\alpha_1 = \alpha_2 \rightarrow \operatorname{tg} \alpha = 2 \quad R \ 3$

$\alpha_1 = 90^\circ \rightarrow \alpha_2 = 0 \quad \text{NO CONVEXO}$

$\alpha_2 = 90^\circ \rightarrow \alpha_1 = 60^\circ \quad \text{NO CONVEXO}$

20, -  $\alpha_1 \quad \alpha_1 \quad \alpha_1 \quad \alpha_2$   
 $\alpha_1 \quad \beta_2$



Este rombododecaedro es equi-  
valente a  $\alpha_1 \quad \beta_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_2$   
 $\beta_1 \quad \beta_1$

$$\alpha_{1,2} = \alpha_1$$

$$\alpha_{2,3} = \alpha_{1,3} = \alpha_{2,4} = 180 - \alpha_1$$

$$\alpha_{3,4} = \alpha_{4,1} = \alpha_2$$

Sustituyendo estos valores en  
 la ecuación (2.31) obtenemos

$$\cos^2 \alpha_2 = \frac{1 + \cos \alpha_1 - 3 \cos^2 \alpha_1 - \cos^3 \alpha_1}{2(1 + 2 \cos \alpha_1)}$$

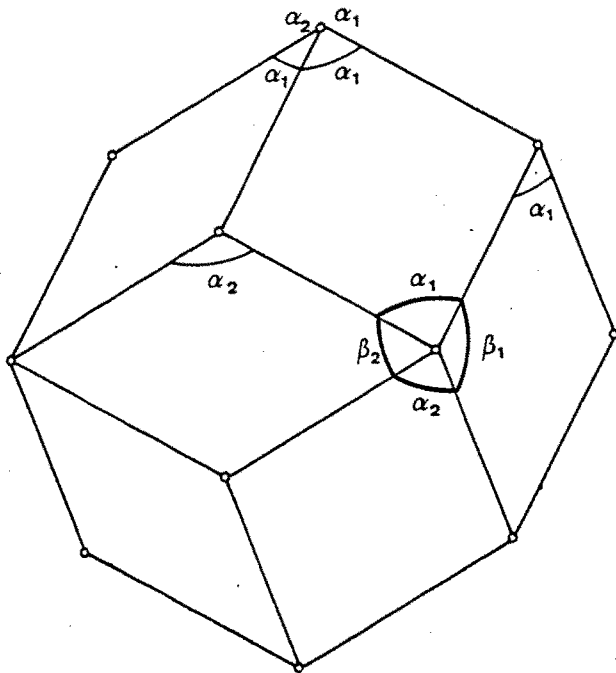
Para  $\alpha_1 = \alpha_2 \quad \alpha = \operatorname{arc} \operatorname{tg} 2 \quad R.3$

Para  $\alpha_1 = 90^\circ \quad \alpha_2 = 45^\circ \quad \text{NO CONVEXO}$

Para  $\alpha_2 = 90^\circ \quad \alpha_1 \approx 47,53568612... \quad \text{NO CONVEXO}$

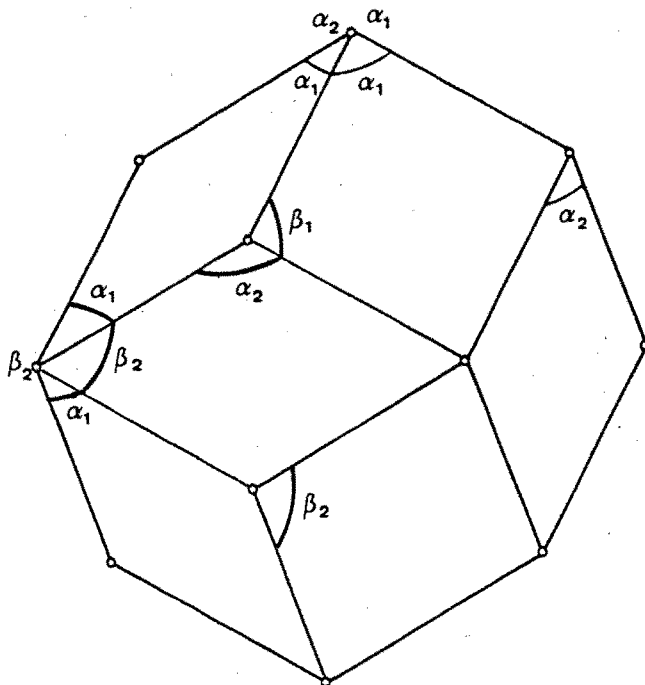


21.-  $\alpha_1$   $\alpha_1$   $\alpha_1$   $\alpha_2$   
 $\alpha_2$   $\alpha_1$



No puede ser convexo, ya que en el vértice V la suma de ángulos es  $360^\circ$

22.-  $\alpha_1$   $\alpha_1$   $\alpha_1$   $\alpha_2$   
 $\alpha_2$   $\alpha_2$

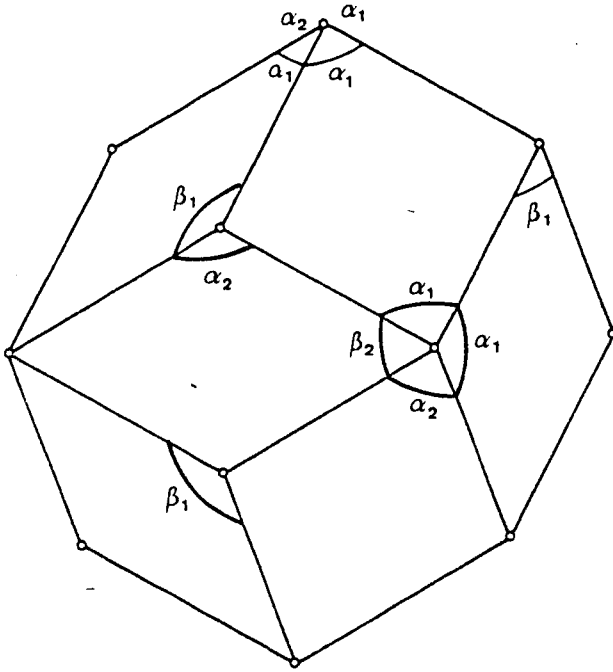


Este rombododecaedro es equivalente a  $\alpha_1$   $\beta_2$   $\alpha_1$   $\beta_2$   
 $\beta_2$   $\beta_1$

y este último a su vez se puede reducir al que estudiaremos en 55 cambiando  $\beta_2$  por  $\alpha_2$

$$23.- \alpha_1 \quad \alpha_1 \quad \alpha_1 \quad \alpha_2$$

$$\alpha_2 \quad \beta_1$$



Este rombododecaedro es equivalente a  $\alpha_1 \quad \alpha_1 \quad \beta_2 \quad \alpha_2$   
 $\beta_1 \quad \beta_1$

$$\alpha_{1,2} = \alpha_{2,3} = \alpha_1$$

$$\alpha_{3,4} = 180 - \alpha_2$$

$$\alpha_{4,1} = \alpha_2$$

$$\alpha_{1,3} = \alpha_{2,4} = 180 - \alpha_1$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación (2.31), obtenemos

$$\cos^2 \alpha_2 = \frac{\cos^3 \alpha_1 - 3 \cos^2 \alpha_1 - \cos \alpha_1 + 1}{2(1 - 2\cos \alpha_1)}$$

Para  $\alpha_1 = \alpha_2 \rightarrow \alpha = \arctg 2 \rightarrow R 3$

$\alpha_1 = 90^\circ \rightarrow \alpha_2 = 45^\circ$  NO CONVEXO

$\alpha_2 = 90^\circ \quad \alpha_1 \approx 62,56053956\dots$  CONVEXO

$$24.- \alpha_1 \quad \alpha_1 \quad \alpha_1 \quad \alpha_2$$

$$\alpha_2 \quad \beta_2$$

$$\alpha_{1,2} = \alpha_{2,3} = \alpha_{3,4} = \alpha_1$$

$$\alpha_{4,1} = \alpha_{1,3} = \alpha_2$$

$$\alpha_{2,4} = 180 - \alpha_2$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación (2.31) obtenemos:

$$\cos^2 \alpha_1 (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2)^2 + \cos^2 \alpha_2 (\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2)^2 +$$

$$+ \cos^2 \alpha_1 \cos^2 \alpha_2 - 3(\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2) + 1 = 0$$

Para  $\alpha_1 = \alpha_2 \rightarrow \alpha = \text{arc tg } 2 \rightarrow R 3$

$$\alpha_1 = 90^\circ \rightarrow \alpha_2 = \text{arc cos } \frac{1}{\phi} \approx 51,827292\dots \text{ NO CONVEXO}$$

$$\alpha_2 = 90^\circ \rightarrow \alpha_1 = \text{arc cos } \frac{1}{\phi} \approx 51,827292\dots \underline{\underline{\underline{\underline{\underline{\text{CONVEXO}}}}}}} \text{ (coincide con 52)}$$

$$25.- \alpha_1 \quad \alpha_1 \quad \alpha_1 \quad \alpha_2$$

$$\beta_1 \quad \alpha_1$$

Es equivalente al 19

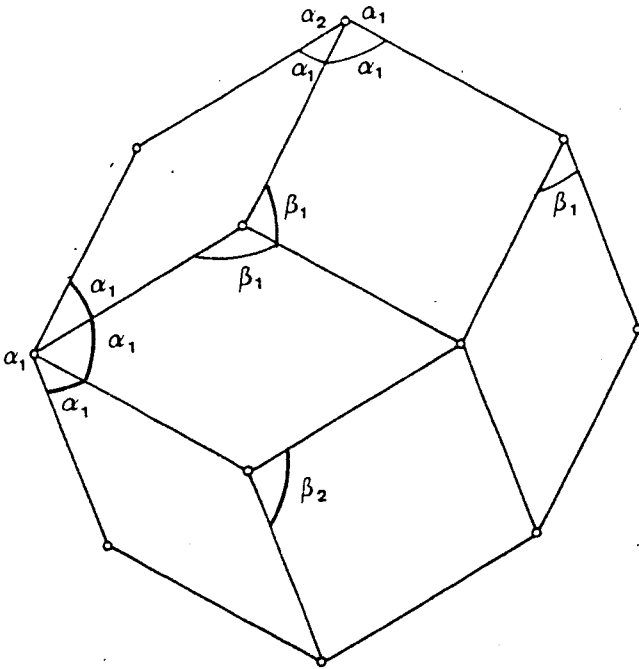
$$26.- \alpha_1 \quad \alpha_1 \quad \alpha_1 \quad \alpha_2$$

$$\beta_1 \quad \alpha_2$$

Es equivalente al 23

$$27.- \alpha_1 \quad \alpha_1 \quad \alpha_1 \quad \alpha_2$$

$$\beta_1 \quad \beta_1$$

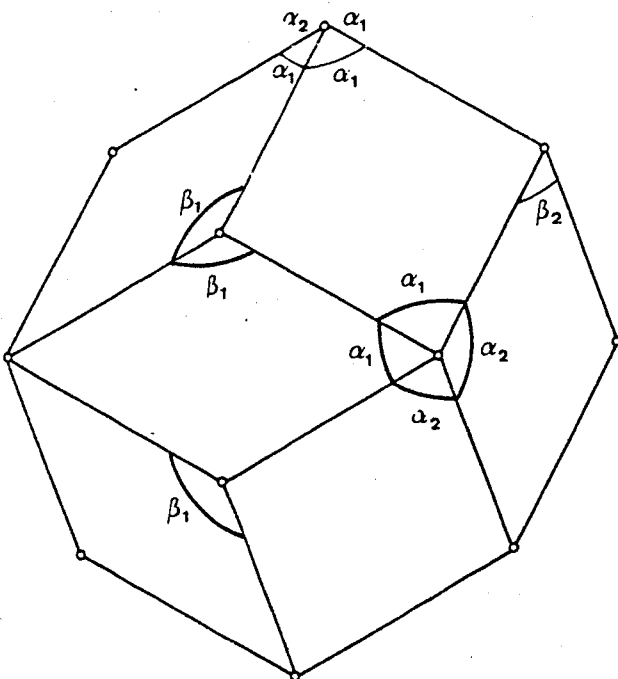


Es equivalente al

$$\begin{matrix} \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_1 \\ & \beta_2 & \beta_1 & \end{matrix}$$

ya estudiado en el 15

28.-  $\begin{matrix} \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ & \beta_1 & \beta_2 & \end{matrix}$



Es equivalente al

$$\begin{matrix} \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_2 \\ & \beta_1 & \beta_1 & \end{matrix}$$

que se verá más adelante en el 43

29.-  $\alpha_1 \quad \alpha_1 \quad \alpha_1 \quad \alpha_2$   
 $\beta_2 \quad \alpha_1$

Es equivalente al 20

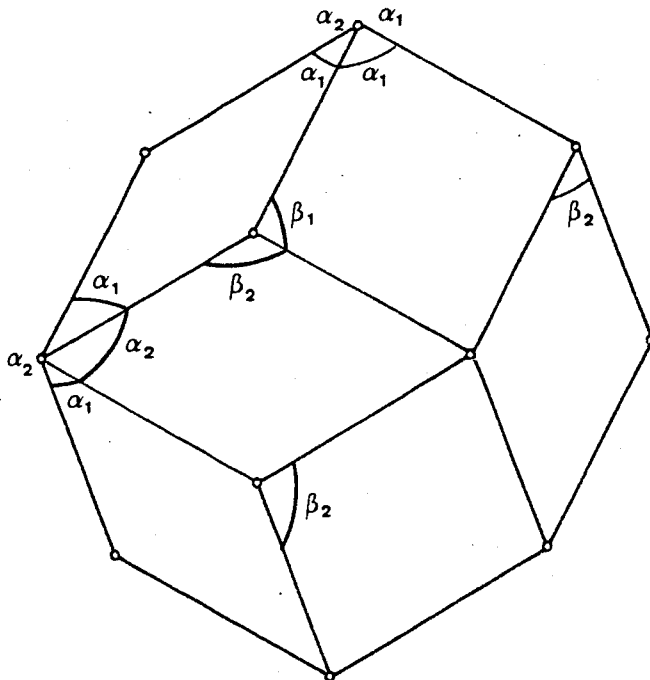
30.-  $\alpha_1 \quad \alpha_1 \quad \alpha_1 \quad \alpha_2$   
 $\beta_2 \quad \alpha_2$

Es equivalente al 24

31.-  $\alpha_1 \quad \alpha_1 \quad \alpha_1 \quad \alpha_2$   
 $\beta_2 \quad \beta_1$

Es equivalente al 28 y por lo tanto al 43

32.  $\alpha_1 \quad \alpha_1 \quad \alpha_1 \quad \alpha_2$   
 $\beta_2 \quad \beta_2$



Es equivalente al rombodode-

caedro  $\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_1 \quad \alpha_2$

$\beta_2 \quad \beta_1$

que se estudiará en el 63

5.2.3.- ROMBODODECAEDROS TIPO  $\alpha_1 \quad \alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_2$   
 $\alpha_{1,3} \quad \alpha_{2,4}$

donde  $\alpha_{1,3} \quad \alpha_{2,4}$  es una de las (5.13)

33.-  $\alpha_1 \quad \alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_2$   
 $\alpha_1 \quad \alpha_1$

$\alpha_{1,2} = \alpha_{2,3} = \alpha_{1,3} = \alpha_{2,4} = \alpha_1$

$\alpha_{3,4} = \alpha_{4,1} = \alpha_2$

Sustituyendo estos valores en la ecuación (2.31) obtenemos

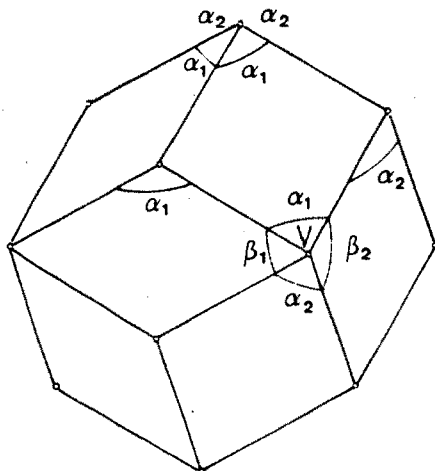
$$\cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \alpha_1 (1 - 2 \cos \alpha_2) = \cos^2 \frac{\alpha_1}{2} \sin^2 \alpha_1$$

Para  $\alpha_1 = \alpha_2 \rightarrow \alpha = 0$  NO CONVEXO

$\alpha_1 = 90^\circ \rightarrow \alpha_2 = 45^\circ$  NO CONVEXO

$\alpha_2 = 90^\circ \rightarrow \alpha_1 \approx 47,53568612\dots$  NO CONVEXO

34.-  $\alpha_1 \quad \alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_2$   
 $\alpha_1 \quad \alpha_2$



No puede ser convexo ya que en el vértice V la suma de ángulos es  $360^\circ$

$$35.- \begin{matrix} \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_2 \\ & \alpha_1 & \beta_1 & \end{matrix}$$

$$\alpha_{1,2} = \alpha_{2,3} = \alpha_{1,3} = \alpha_1$$

$$\alpha_{3,4} = \alpha_{4,1} = \alpha_2$$

$$\alpha_{2,4} = 180 - \alpha_1$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación (2.31) obtenemos

$$\cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \alpha_1 (1 + 2 \cos \alpha_2) = \cos^2 \frac{\alpha_1}{2} \sin^2 \alpha_1$$

Para $\alpha_1 = \alpha_2$	$\alpha = 180^\circ$	NO CONVEXO
	$\alpha = \text{arc tg } 2$	R3

Para $\alpha_1 = 90^\circ$	$\alpha_2 = 45^\circ$	NO CONVEXO
----------------------------	-----------------------	------------

$\alpha_2 = 90^\circ$	$\alpha_1 \approx 47,53568612$	<u>CONVEXO</u>
-----------------------	--------------------------------	----------------

$$36.- \begin{matrix} \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_2 \\ & \alpha_1 & \beta_2 & \end{matrix}$$

$$\alpha_{1,2} = \alpha_{2,3} = \alpha_{1,3} = \alpha_1$$

$$\alpha_{3,4} = \alpha_{4,1} = \alpha_2$$

$$\alpha_{2,4} = 180 - \alpha_2$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación (2.31) obtenemos

$$\cos^2 \alpha_2 = \frac{1 + \cos \alpha_1 - 2\cos^2 \alpha_1}{3 + 5\cos \alpha_1}$$

$\alpha = 180^\circ$  NO CONVEXO

Para  $\alpha_1 = \alpha_2$

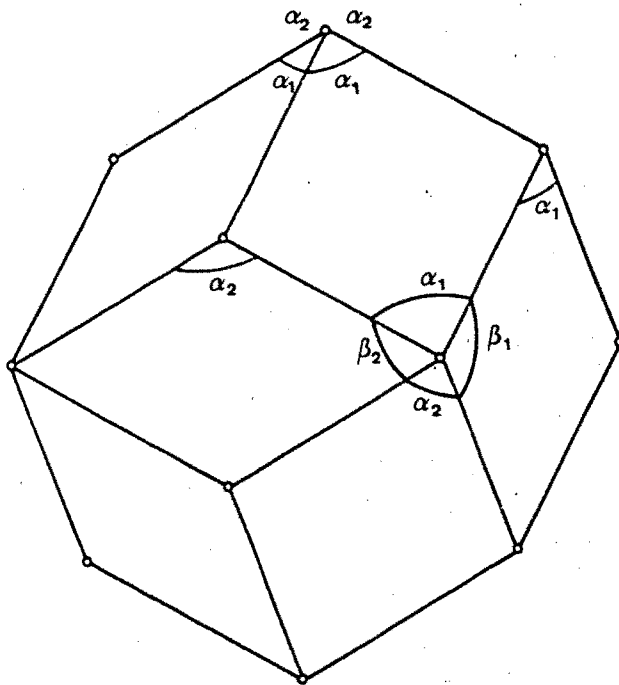
$\alpha = \text{arc tg} 2$  R 3

Para  $\alpha_1 = 90$   $\alpha_2 = \text{arc tg } \sqrt{2} \approx 54,735610$  CONVEXO

Para  $\alpha_2 = 90$   $\alpha_1 = 0$  NO CONVEXO

$\alpha_1 = 120^\circ$  NO CONVEXO

37.-  $\alpha_1 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_2$   
 $\alpha_2 \alpha_1$



No puede ser convexo ya que en el vértice V la suma de ángulos es  $360^\circ$



$$38.- \begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_2 \\ & \alpha_2 & \alpha_2 & \end{array}$$

Si cambiamos  $\alpha_1$  por  $\alpha_2$  y  $\alpha_2$  por  $\alpha_1$ , éste rombododecaedro se puede reducir a  $\alpha_2 \alpha_2 \alpha_1 \alpha_1$   
 $\alpha_1 \alpha_1$

el cual a su vez es equivalente al 33

$$39.- \begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_2 \\ & \alpha_2 & \beta_1 & \end{array}$$

Si cambiamos  $\alpha_1$  por  $\alpha_2$  y  $\alpha_2$  por  $\alpha_1$ , éste rombododecaedro se puede reducir a  $\alpha_2 \alpha_2 \alpha_1 \alpha_1$   
 $\alpha_1 \beta_2$

el cual a su vez es equivalente al 36

$$40.- \begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_2 \\ & \alpha_2 & \beta_2 & \end{array}$$

Si cambiamos  $\alpha_1$  por  $\alpha_2$  y  $\alpha_2$  por  $\alpha_1$ , éste rombododecaedro se puede reducir a  $\alpha_2 \alpha_2 \alpha_1 \alpha_1$   
 $\alpha_1 \beta_1$

el cual a su vez es equivalente al 35

$$41.- \begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_2 \\ & \beta_1 & \alpha_1 & \end{array}$$

$$\alpha_{1,2} = \alpha_{2,3} = \alpha_{2,4} = \alpha_1$$

$$\alpha_{3,4} = \alpha_{4,1} = \alpha_2$$

$$\alpha_{1,3} = 180 - \alpha_1$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación (2.31) obtenemos

$$\cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \alpha_1 (1 - 2 \cos \alpha_2) = \sin^2 \frac{\alpha_1}{2} \sin^2 \alpha_1$$

Para  $\alpha_1 = \alpha_2$   $\alpha = \arctg 2$  R 3

Para  $\alpha_1 = 90^\circ \rightarrow \alpha_2 = 45^\circ$  NO CONVEXO

$\alpha_2 = 90^\circ \rightarrow \alpha_1 \approx 62,56053956$  NO CONVEXO

Este último rombododecaedro fue analizado en el punto (3.2.1)

$$42.- \begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_2 \\ & \beta_1 & \alpha_2 & \end{array}$$

$$\alpha_{1,2} = \alpha_{2,3} = \alpha_1$$

$$\alpha_{3,4} = \alpha_{4,1} = \alpha_{2,4} = \alpha_2$$

$$\alpha_{1,3} = 180 - \alpha_1$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación (2.31) obtenemos

$$\cos^2 \alpha_2 = \frac{1 - \cos \alpha_1 - 2\cos^2 \alpha_1}{3 - 5\cos \alpha_1}$$

Para  $\alpha_1 = \alpha_2$      $\alpha = \text{arc tg } 2$     R 3

Para  $\alpha_1 = 90^\circ$      $\alpha_2 = \text{arc tg } \sqrt{2} \approx 54,7356$     NO CONVEXO

$\alpha_2 = 90^\circ$      $\alpha_1 = 60^\circ$     NO CONVEXO

43.-  $\alpha_1$      $\alpha_1$      $\alpha_2$      $\alpha_2$   
 $\beta_1$      $\beta_1$

$$\alpha_{1,2} = \alpha_{2,3} = \alpha_1$$

$$\alpha_{3,4} = \alpha_{4,1} = \alpha_2$$

$$\alpha_{1,3} = \alpha_{2,4} = 180 - \alpha_1$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación (2.31) obtenemos

$$\cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \alpha_1 (1 + 2\cos \alpha_2) = \sin^2 \frac{\alpha_1}{2} \sin^2 \alpha_1$$

Para  $\alpha_1 = \alpha_2$      $\alpha = \text{arc cos } \frac{1}{3}$     ROMBODECAEDRO EQUIFACIAL

Para  $\alpha_1 = 90^\circ \rightarrow \alpha_2 = 45^\circ$     NO CONVEXO

$\alpha_2 = 90^\circ \rightarrow \alpha_1 \approx 62,56053956$     CONVEXO (coincide con 23)

$$44.- \begin{matrix} \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 & & \end{matrix}$$

$$\alpha_{1,2} = \alpha_{2,3} = \alpha_1$$

$$\alpha_{3,4} = \alpha_{4,1} = \alpha_2$$

$$\alpha_{1,3} = 180 - \alpha_1$$

$$\alpha_{2,4} = 180 - \alpha_2$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación (2.31) obtenemos

$$\cos \frac{\alpha_1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ sen } \alpha_2$$

Para  $\alpha_1 = \alpha_2$        $\alpha = \text{arc cos } \frac{1}{3}$       ROMBODODECAEDRO EQUIFACIAL

Para  $\alpha_1 = 90^\circ \rightarrow \alpha_2 = \text{arc tg } \sqrt{2} \approx 54,73561$       CONVEXO (coincide con 36)  
 $\alpha_2 = 90 \rightarrow \alpha_1 = 60^\circ$       NO CONVEXO

$$45.- \begin{matrix} \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_2 \\ \beta_2 & \alpha_1 & & \end{matrix}$$

Si cambiamos  $\alpha_1$  por  $\alpha_2$  y  $\alpha_2$  por  $\alpha_1$ , este rombododecaedro se puede reducir a  $\alpha_2 \ \alpha_2 \ \alpha_1 \ \alpha_1$

$$\beta_1 \ \alpha_2$$

el cual es equivalente al estudiado en el 42

$$46.- \begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_2 \\ & \beta_2 & \alpha_2 & \end{array}$$

Si cambiamos  $\alpha_1$  por  $\alpha_2$  y  $\alpha_2$  por  $\alpha_1$ , este rombododecaedro se puede reducir a  $\alpha_2 \alpha_2 \alpha_1 \alpha_1$

$$\beta_1 \alpha_1$$

el cual a su vez es equivalente al estudiado en el 41

$$47.- \begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_2 \\ & \beta_2 & \beta_1 & \end{array}$$

Si cambiamos  $\alpha_1$  por  $\alpha_2$  y  $\alpha_2$  por  $\alpha_1$ , este rombododecaedro se puede reducir a  $\alpha_2 \alpha_2 \alpha_1 \alpha_1$

$$\beta_1 \beta_2$$

el cual a su vez es equivalente al estudiado en el 44

$$48.- \begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_2 \\ & \beta_2 & \beta_2 & \end{array}$$

Si cambiamos  $\alpha_1$  por  $\alpha_2$  y  $\alpha_2$  por  $\alpha_1$ , este rombododecaedro se puede reducir a  $\alpha_2 \alpha_2 \alpha_1 \alpha_1$

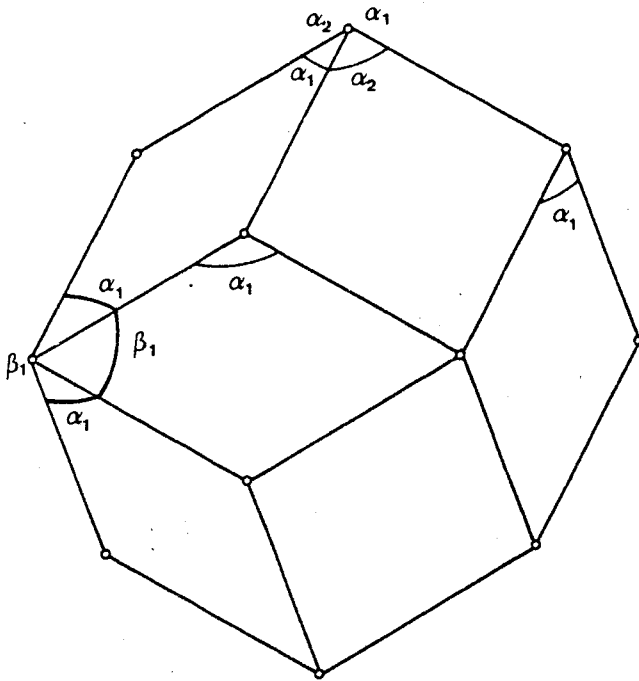
$$\beta_1 \beta_1$$

el cual es equivalente al estudiado en el 43

5.2.4.- ROMBODODECAEDROS TIPO  $\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_1 \quad \alpha_2$   
 $\alpha_{1,3} \quad \alpha_{2,4}$

donde  $\alpha_{1,3} \quad \alpha_{2,4}$  es cada una de las (5.13)

49.-  $\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_1 \quad \alpha_2$   
 $\alpha_1 \quad \alpha_1$



No puede ser convexo ya que  
 la suma de ángulos en el vértice V es  $360^\circ$

50.-  $\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_1 \quad \alpha_2$   
 $\alpha_1 \quad \alpha_2$

$$\alpha_{1,2} = \alpha_{3,4} = \alpha_{1,3} = \alpha_1$$

$$\alpha_{2,3} = \alpha_{4,1} = \alpha_{2,4} = \alpha_2$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación (2.31) obtenemos

$$\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 = 2 \cos \frac{\alpha_1}{2} \cos \frac{\alpha_2}{2}$$

Para  $\alpha_1 = \alpha_2 \rightarrow \alpha = 0$  NO CONVEXO

Para  $\alpha_1 = 90 \rightarrow \alpha_2 = \arccos\left(-\frac{1}{\phi}\right) \approx 128,1727$  NO CONVEXO

$\alpha_2 = 90 \rightarrow \alpha_1 = \arccos\left(-\frac{1}{\phi}\right) \approx 128,1727$  NO CONVEXO

51.-  $\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_1 \quad \alpha_2$   
 $\alpha_1 \quad \beta_1$

$$\alpha_{1,2} = \alpha_{3,4} = \alpha_{1,3} = \alpha_1$$

$$\alpha_{2,3} = \alpha_{4,1} = \alpha_2$$

$$\alpha_{2,4} = 180 - \alpha_1$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación (2.31) obtenemos

$$\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 = \text{sen } \alpha_1$$

Para  $\alpha_1 = \alpha_2 \rightarrow \text{tg} \alpha = 2$  R 3

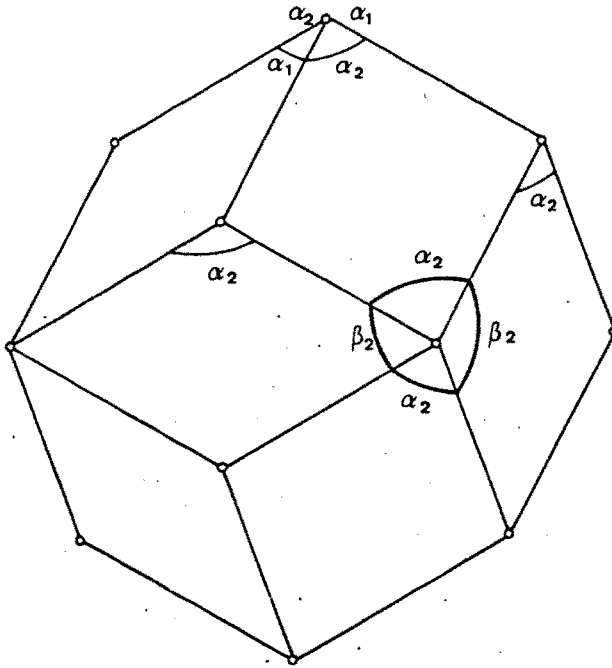
$\alpha_1 = 90^\circ \rightarrow \alpha_2 = 0$  NO CONVEXO

$\alpha_2 = 90^\circ \rightarrow \alpha_1 = 45^\circ$  NO CONVEXO





54.-  $\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_1 \quad \alpha_2$   
 $\alpha_2 \quad \alpha_2$



No es convexo, ya que en el vértice V la suma de ángulos es  $360^\circ$ .

55.-  $\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_1 \quad \alpha_2$   
 $\alpha_2 \quad \beta_1$

Cambiando  $\alpha_1$  por  $\alpha_2$  y  $\alpha_2$  por  $\alpha_1$ , este rombododecaedro se puede reducir a  $\alpha_2 \quad \alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_1$   
 $\alpha_1 \quad \beta_2$

el cual a su vez es equivalente al ya estudiado en el 52

$$56.- \begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ & \alpha_2 & \beta_2 & \end{array}$$

Cambiando  $\alpha_1$  por  $\alpha_2$  y  $\alpha_2$  por  $\alpha_1$ , este rombododecaedro se puede reducir a  $\alpha_2 \ \alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_1$

$$\alpha_1 \ \beta_1$$

el cual a su vez es equivalente al estudiado en el 51

$$57.- \begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ & \beta_1 & \alpha_1 & \end{array}$$

Es equivalente al rombododecaedro estudiado en el 51

$$58.- \begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ & \beta_1 & \alpha_2 & \end{array}$$

Es equivalente al rombododecaedro estudiado en el 55

$$59.- \begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ & \beta_1 & \beta_1 & \end{array}$$

$$\alpha_{1,2} = \alpha_{3,4} = \alpha_1$$

$$\alpha_{2,3} = \alpha_{4,1} = \alpha_2$$

$$\alpha_{1,3} = \alpha_{2,4} = 180 - \alpha_1$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación (2.31) obtenemos

$$\cos \alpha_1 = \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha_2}{2}$$

Para  $\alpha_1 = \alpha_2 \rightarrow \alpha = \arccos \frac{1}{3}$  ROMBODODECAEDRO EQUIFACIAL

Para  $\alpha_1 = 90^\circ \rightarrow \alpha_2 = 0$  NO CONVEXO

$\alpha_2 = 90^\circ \rightarrow \alpha_1 = 60^\circ$  CONVEXO (coincide con el 6)

60.-  $\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_1 \quad \alpha_2$   
 $\beta_1 \quad \beta_2$

$$\alpha_{1,2} = \alpha_{3,4} = \alpha_1$$

$$\alpha_{2,3} = \alpha_{4,1} = \alpha_2$$

$$\alpha_{1,3} = 180 - \alpha_1$$

$$\alpha_{2,4} = 180 - \alpha_2$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación (2.31) obtenemos

$$\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 = 2 \operatorname{sen} \frac{\alpha_1}{2} \operatorname{sen} \frac{\alpha_2}{2}$$

Para  $\alpha_1 = \alpha_2 \rightarrow \alpha = \arccos \frac{1}{3}$  ROMBODODECAEDRO EQUIFACIAL

$\alpha_1 = 90^\circ \rightarrow \alpha_2 = \arccos \frac{1}{\phi} \approx 51,82729$  CONVEXO Ambos coinciden con  
 $\alpha_2 = 90^\circ \rightarrow \alpha_1 = \arccos \frac{1}{\phi} \approx 51,82729$  CONVEXO el 52

$$61.- \begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ & \beta_2 & \alpha_1 & \end{array}$$

Es equivalente al rombododecaedro estudiado en el 52

$$62.- \begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ & \beta_2 & \alpha_2 & \end{array}$$

Es equivalente al rombododecaedro estudiado en el 56

$$63.- \begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ & \beta_2 & \beta_1 & \end{array}$$

Es equivalente al rombododecaedro estudiado en el 60

$$64.- \begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ & \beta_2 & \beta_2 & \end{array}$$

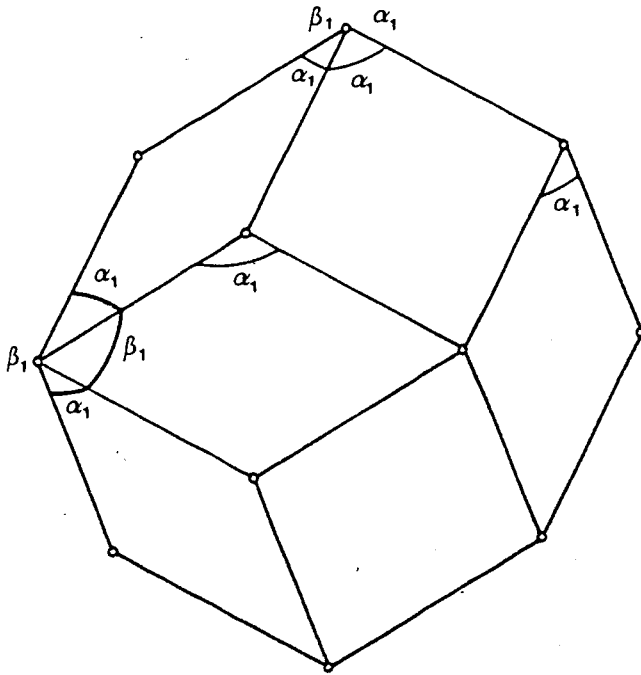
Cambiando  $\alpha_1$  por  $\alpha_2$  y  $\alpha_2$  por  $\alpha_1$ , este rombododecaedro se puede reducir a  $\alpha_2 \ \alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_1$   
 $\beta_1 \ \beta_1$

el cual, a su vez, es equivalente al ya estudiado en el 59

$$5.2.5.- \text{ROMBODODECAEDROS TIPO } \begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_1 & \beta_1 \\ & \alpha_{1,3} & \alpha_{2,4} & \end{array}$$

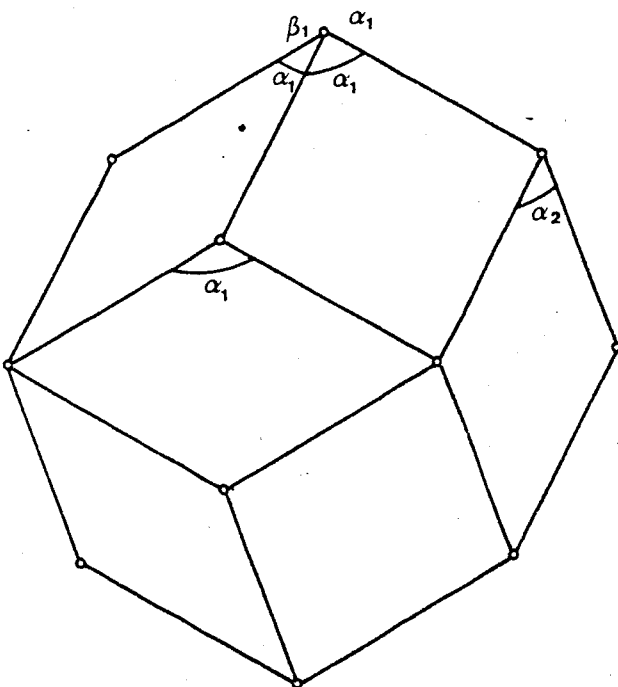
donde  $\alpha_{1,3} \ \alpha_{2,4}$  es cada una de las (5.13)

65.-  $\alpha_1 \quad \alpha_1 \quad \alpha_1 \quad \beta_1$   
 $\alpha_1 \quad \alpha_1$



No puede ser convexo, ya que en el vértice V la suma de ángulos es  $360^\circ$

66.-  $\alpha_1 \quad \alpha_1 \quad \alpha_1 \quad \beta_1$   
 $\alpha_1 \quad \alpha_2$



$$\alpha_{1,2} = \alpha_{2,3} = \alpha_{3,4} = \alpha_{1,3} = \alpha_1$$

$$\alpha_{4,1} = 180 - \alpha_1$$

$$\alpha_{2,4} = \alpha_2$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación (2.31) obtenemos:

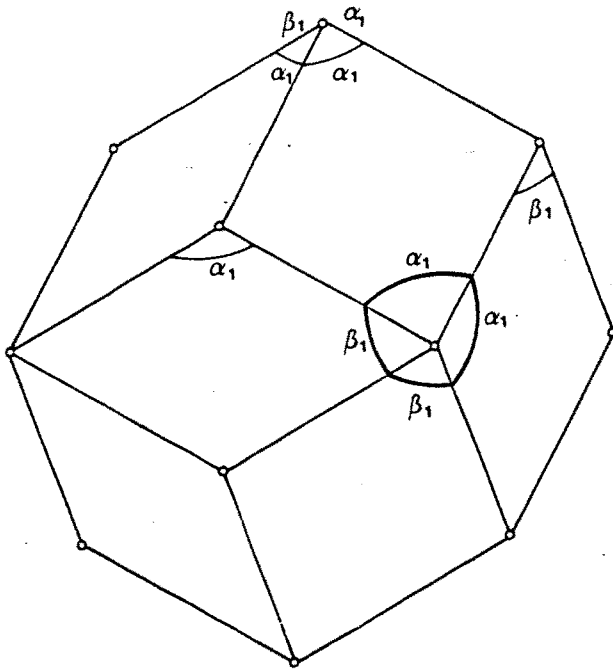
$$\text{sen} \alpha_2 = 2 \cos \alpha_1$$

Para  $\alpha_1 = \alpha_2$  NO CONVEXO

Para  $\alpha_1 = 90 + \alpha_2 = 0$  NO CONVEXO

$\alpha_2 = 90 + \alpha_2 = 60$  NO CONVEXO

$$67.- \begin{matrix} \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_1 & \beta_1 \\ & \alpha_1 & \beta_1 & \end{matrix}$$



No puede ser convexo ya que en el vértice V la suma de ángulos es  $360^\circ$

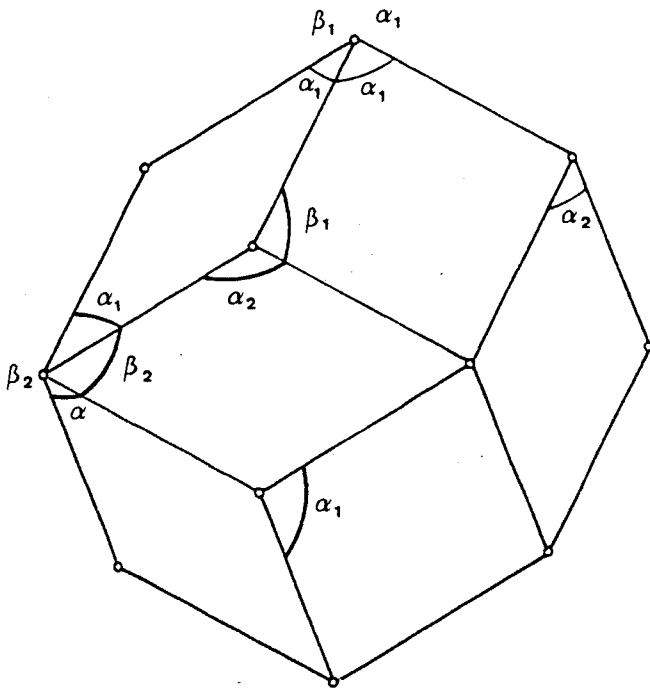
$$68.- \begin{matrix} \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_1 & \beta_1 \\ & \alpha_1 & \beta_2 & \end{matrix}$$

Este caso se puede reducir al 66, cambiando  $\beta_2$  por  $\alpha_2$

$$69.- \begin{matrix} \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_1 & \beta_1 \\ & \alpha_2 & \alpha_1 & \end{matrix}$$

Este caso es equivalente al 66

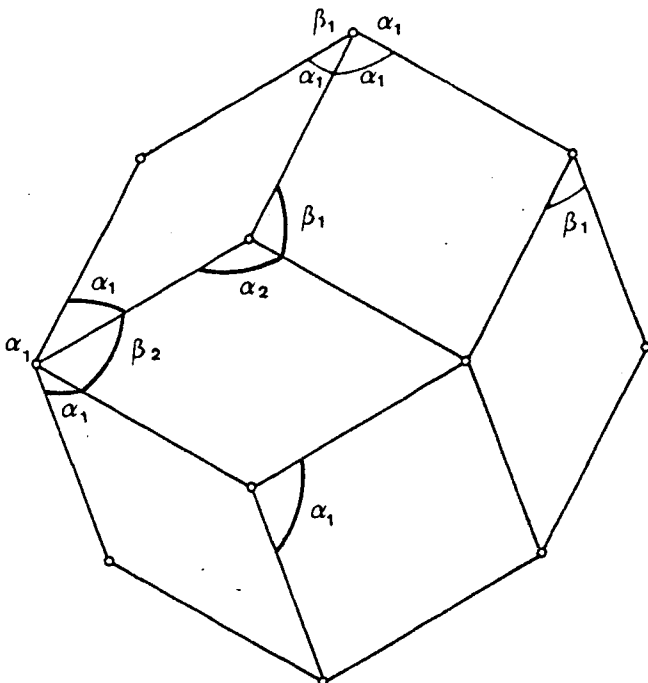
70.-  $\alpha_1 \alpha_1 \alpha_1 \beta_1$   
 $\alpha_2 \alpha_2$



Este rombododecaedro es equi-  
valente a  $\alpha_1 \beta_2 \alpha_1 \beta_2$   
 $\alpha_1 \beta_1$

el cual se puede reducir a su  
 vez al 5] cambiando  $\beta_2$  por  $\alpha_2$

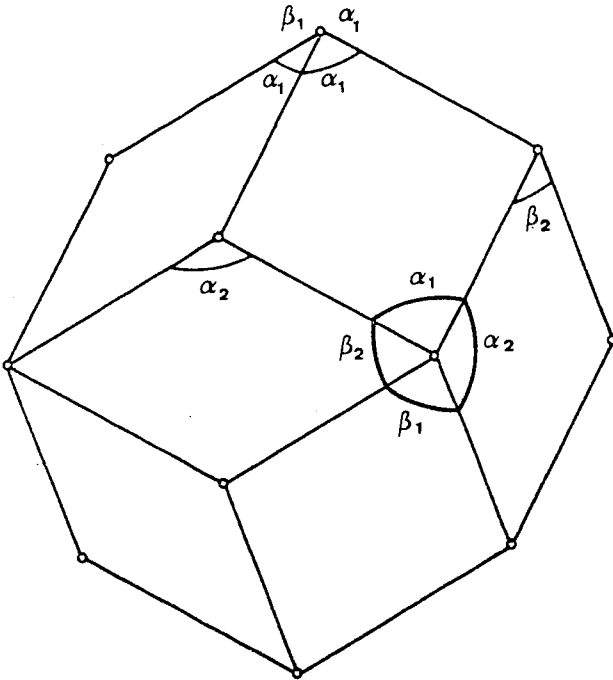
71.-  $\alpha_1 \alpha_1 \alpha_1 \beta_1$   
 $\alpha_2 \beta_1$



Este rombododecaedro es equi-  
valente a  $\alpha_1 \alpha_1 \alpha_1 \beta_2$   
 $\alpha_1 \beta_1$

el cual se puede reducir a su  
 vez al 19 cambiando  $\beta_2$  por  $\alpha_2$

72.-  $\alpha_1 \quad \alpha_1 \quad \alpha_1 \quad \beta_1$   
 $\alpha_2 \quad \beta_2$



No puede ser convexo ya que  
 en el vértice V la suma de  
 ángulos es  $360^\circ$

73.-  $\alpha_1 \quad \alpha_1 \quad \alpha_1 \quad \beta_1$   
 $\beta_1 \quad \alpha_1$

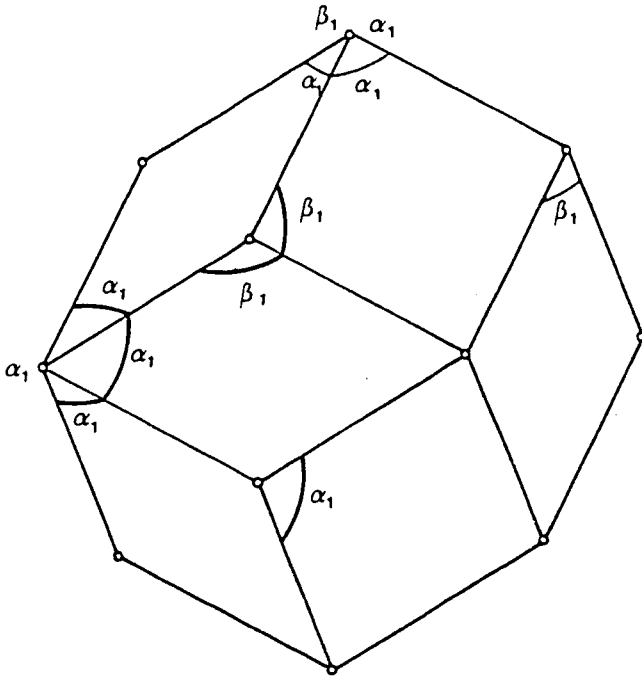
Es equivalente al 67 y por tanto, no convexo

74.-  $\alpha_1 \quad \alpha_1 \quad \alpha_1 \quad \beta_1$   
 $\beta_1 \quad \alpha_2$

Es equivalente al 71



75.-  $\alpha_1 \alpha_1 \alpha_1 \beta_1$   
 $\beta_1 \beta_1$



Es equivalente a

$\alpha_1 \alpha_1 \alpha_1 \alpha_1$   
 $\alpha_1 \beta_1$

ya estudiado en el 3

76.-  $\alpha_1 \alpha_1 \alpha_1 \beta_1$   
 $\beta_1 \beta_2$

Este rombododecaedro es equivalente a  $\alpha_1 \alpha_1 \alpha_1 \beta_1$   
 $\beta_2 \beta_1$

el cual a su vez se puede reducir al 71, cambiando  $\beta_2$  por  $\alpha_2$

77.-  $\alpha_1 \alpha_1 \alpha_1 \beta_1$   
 $\beta_2 \alpha_1$

Es equivalente al 68

$$78.- \begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_1 & \beta_1 \\ & \beta_2 & \alpha_2 & \end{array}$$

Es equivalente al 72 , y por tanto, no convexo

$$79.- \begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_1 & \beta_1 \\ & \beta_2 & \beta_1 & \end{array}$$

Es equivalente al 76

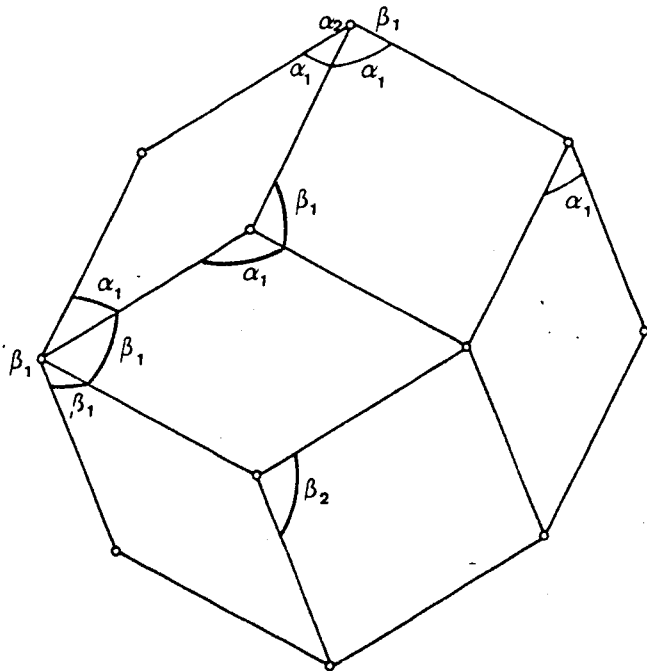
$$80.- \begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_1 & \beta_1 \\ & \beta_2 & \beta_2 & \end{array}$$

Se puede reducir al 70 , cambiando  $\beta_2$  por  $\alpha_2$

$$5.2.6.- \text{ROMBODODECAEDROS TIPO } \begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_1 & \beta_1 & \alpha_2 \\ & \alpha_{1,3} & \alpha_{2,4} & \end{array}$$

donde  $\alpha_{1,3}$   $\alpha_{2,4}$  es cada una de las (5.13)

81.-  $\alpha_1 \quad \alpha_1 \quad \beta_1 \quad \alpha_2$   
 $\alpha_1 \quad \alpha_1$

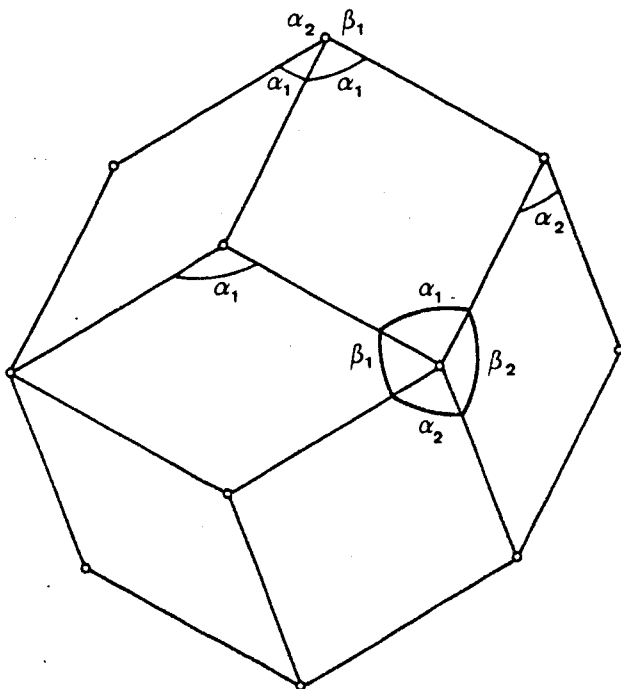


Es equivalente a

$\beta_1 \quad \beta_1 \quad \beta_1 \quad \alpha_1$   
 $\beta_1 \quad \beta_2$

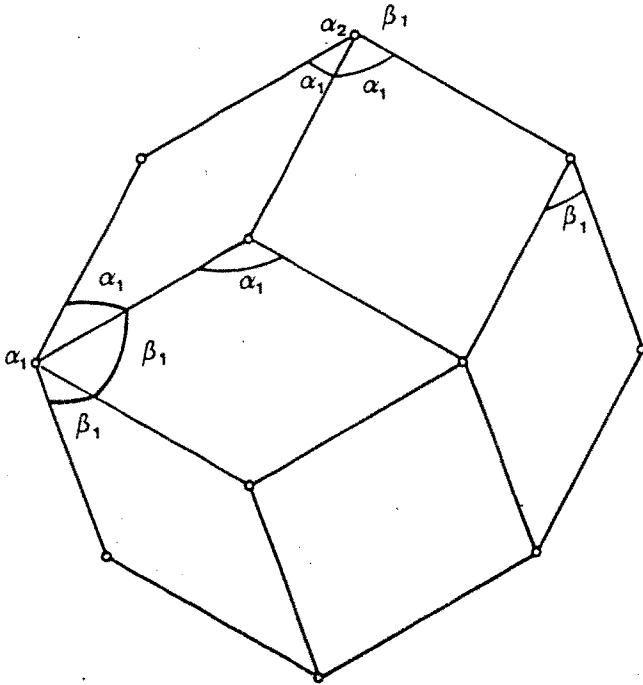
y éste a su vez se puede reducir al 68 cambiando  $\alpha_1$  por  $\beta_1$

82.-  $\alpha_1 \quad \alpha_1 \quad \beta_1 \quad \alpha_2$   
 $\alpha_1 \quad \alpha_2$



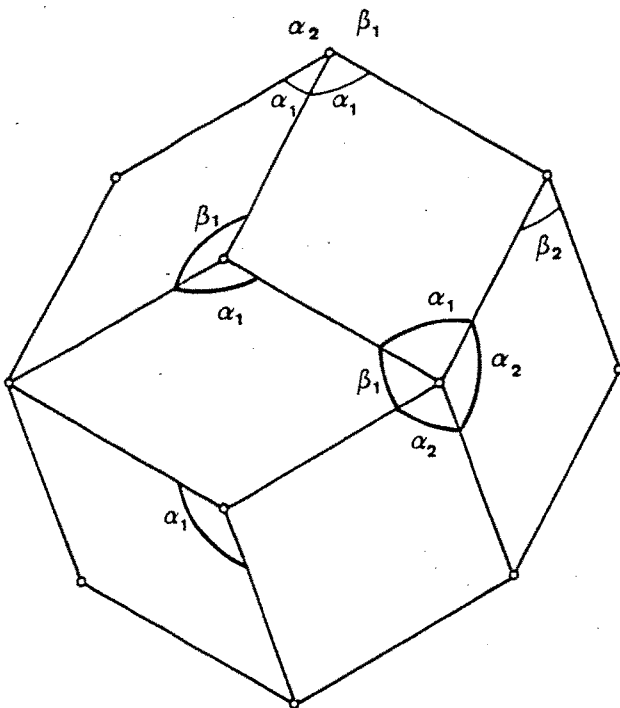
No puede ser convexo, ya que en el vértice V la suma de los ángulos es  $360^\circ$

$$83.- \begin{matrix} \alpha_1 & \alpha_1 & \beta_1 & \alpha_2 \\ & \alpha_1 & \beta_1 & \end{matrix}$$



No puede ser convexo, ya que en el vértice V la suma de ángulos es  $360^\circ$

$$84.- \begin{matrix} \alpha_1 & \alpha_1 & \beta_1 & \alpha_2 \\ & \alpha_1 & \beta_2 & \end{matrix}$$



Es equivalente a:

$$\begin{matrix} \alpha_1 & \beta_1 & \alpha_2 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \alpha_1 & & \end{matrix}$$

$$\alpha_{1,2} = \alpha_{2,4} = \alpha_1$$

$$\alpha_{2,3} = \alpha_{1,3} = 180 - \alpha_1$$

$$\alpha_{3,4} = \alpha_{4,1} = \alpha_2$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación (2.31) obtenemos:

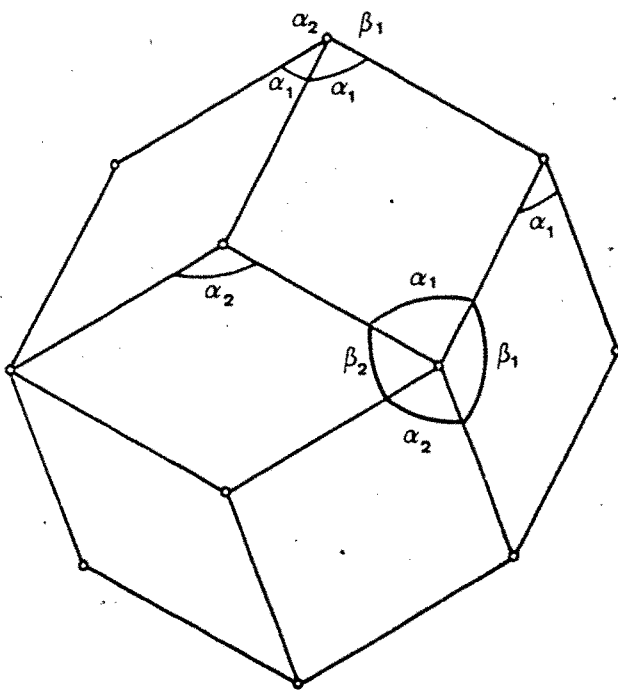
$$\cos^2 \alpha_2 = \frac{1 + \cos \alpha_1 - 3 \cos^2 \alpha_1 - \cos^3 \alpha_1}{2(2 \cos \alpha_1 + 1)}$$

Para  $\alpha_1 = \alpha_2 \rightarrow$  NO CONVEXO

$\alpha_1 = 90^\circ \rightarrow \alpha_2 = 45^\circ$  NO CONVEXO

$\alpha_2 = 90^\circ \rightarrow \alpha_1 \approx 47,53568612$  NO CONVEXO

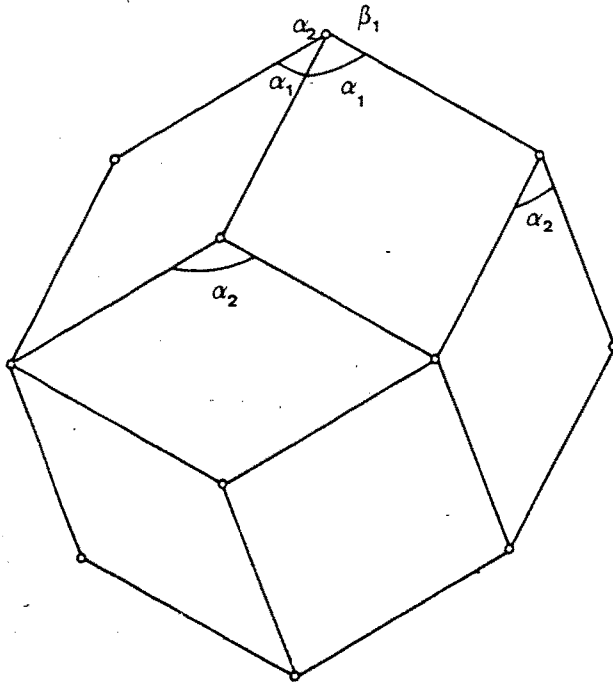
85,-  $\alpha_1 \alpha_1 \beta_1 \alpha_2$   
 $\alpha_2 \alpha_1$



No puede ser convexo, ya que en el vértice V la suma de ángulos es  $360^\circ$

$$86.- \alpha_1 \quad \alpha_1 \quad \beta_1 \quad \alpha_2$$

$$\alpha_2 \quad \alpha_2$$



$$\alpha_{1,2} = \alpha_{2,3} = \alpha_1$$

$$\alpha_{3,4} = 180 - \alpha_1$$

$$\alpha_{4,1} = \alpha_{1,3} = \alpha_{2,4} = \alpha_2$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación (2.31), obtenemos:

Para  $\alpha_1 = \alpha_2$  NO CONVEXO

$$\alpha_1 = 90 \rightarrow \alpha_2 = \arccos \frac{1}{\phi} \approx 51,82729 \quad \text{NO CONVEXO}$$

$$\alpha_2 = 90 \rightarrow \alpha_1 = \arccos \frac{1}{\phi} \approx 51,82729 \quad \text{NO CONVEXO}$$

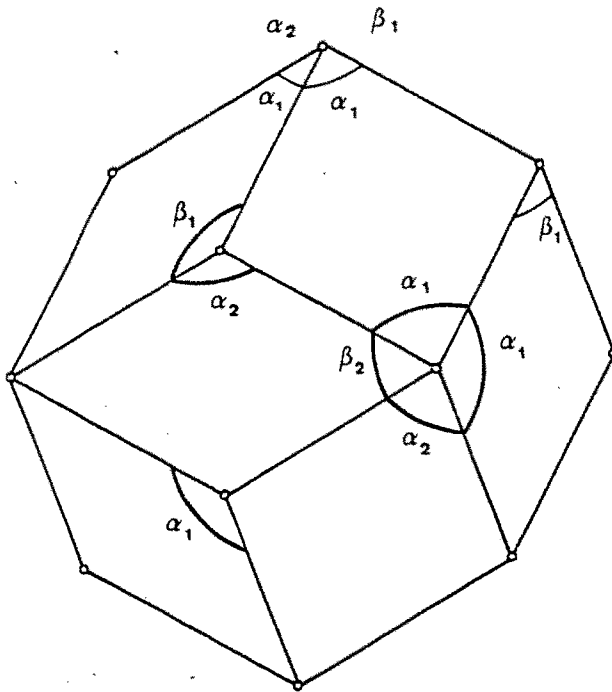
$$87.- \alpha_1 \quad \alpha_1 \quad \beta_1 \quad \alpha_2$$

$$\alpha_2 \quad \beta_1$$

Este rombododecaedro es equivalente a

$$\alpha_1 \quad \alpha_1 \quad \beta_2 \quad \alpha_2$$

$$\alpha_1 \quad \beta_1$$



$$\alpha_{1,2} = \alpha_{2,3} = \alpha_1$$

$$\alpha_{3,4} = \alpha_{2,4} = 180 - \alpha_1$$

$$\alpha_{4,1} = \alpha_{1,3} = \alpha_2$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación (2.31) obtenemos:

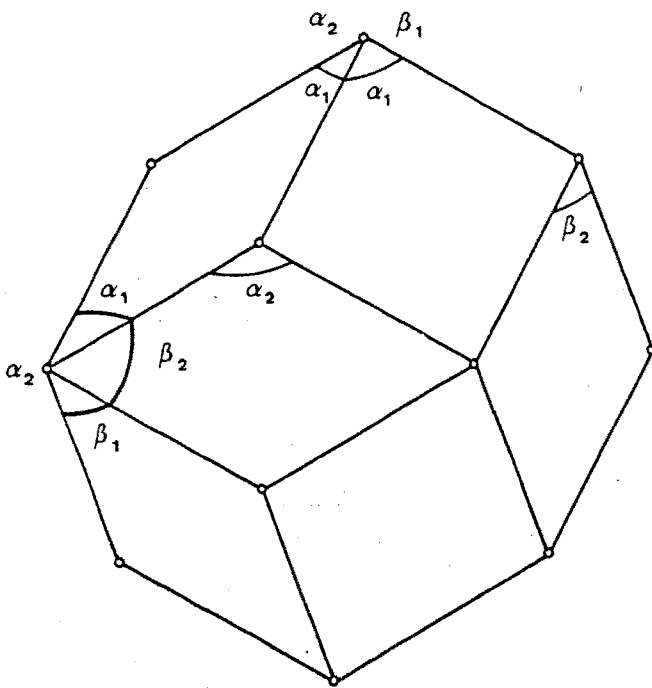
$$\cos^2 \alpha_2 = \frac{1 + \cos \alpha_1 - 3 \cos^2 \alpha_1 - \cos^3 \alpha_1}{2(2 \cos \alpha_1 + 1)}$$

Para  $\alpha_1 = \alpha_2$  NO CONVEXO

$\alpha_1 = 90^\circ \rightarrow \alpha_2 = 45^\circ$  NO CONVEXO

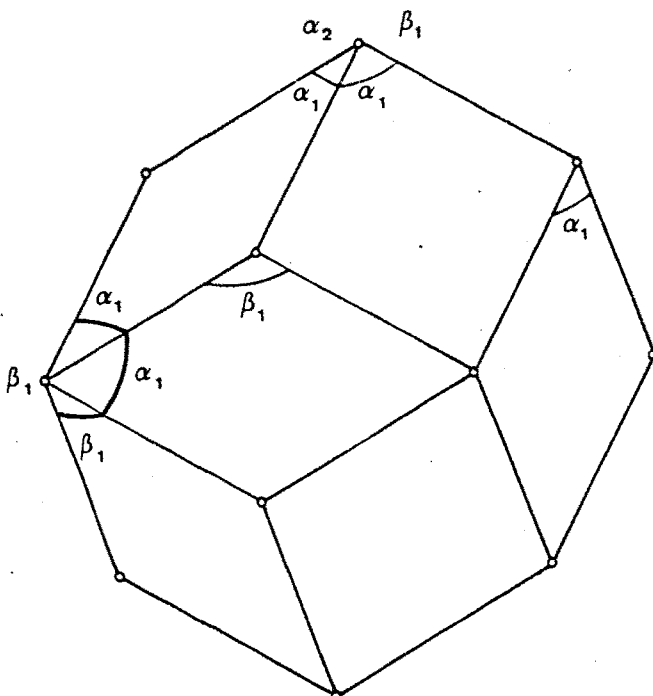
$\alpha_2 = 90^\circ \rightarrow \alpha_1 \approx 47,53568612$  CONVEXO (coincide con 35)

88.-  $\alpha_1$   $\alpha_1$   $\beta_1$   $\alpha_2$   
 $\alpha_2$   $\beta_2$



No puede ser convexo ya que  
 en el vértice V la suma de  
 ángulos es  $360^\circ$

89.-  $\alpha_1$   $\alpha_1$   $\beta_1$   $\alpha_2$   
 $\beta_1$   $\alpha_1$

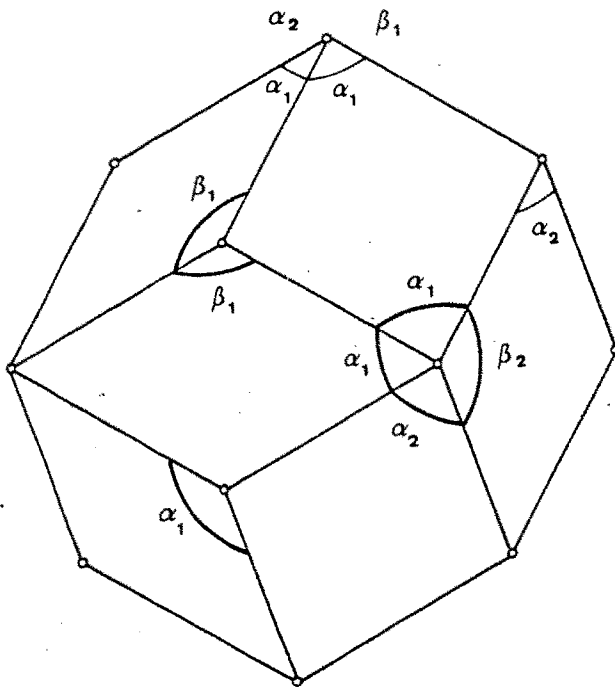


No puede ser convexo ya que  
 en el vértice V la suma de  
 ángulos es  $360^\circ$



$$90, - \alpha_1 \quad \alpha_1 \quad \beta_1 \quad \alpha_2$$

$$\beta_1 \quad \alpha_2$$



Este rombododecaedro es equivalente a  $\alpha_1 \quad \alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \beta_2$   
 $\beta_1 \quad \alpha_1$

$$\alpha_{1,2} = \alpha_{2,3} = \alpha_{2,4} = \alpha_1$$

$$\alpha_{3,4} = \alpha_2$$

$$\alpha_{4,1} = 180 - \alpha_2$$

$$\alpha_{1,3} = 180 - \alpha_1$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación (2.31) obtenemos

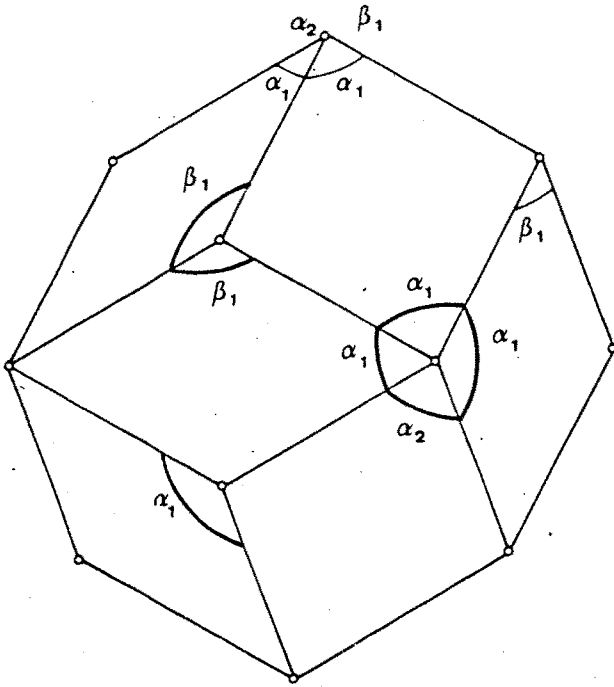
$$\cos^2 \alpha_2 = \frac{1 - \cos \alpha_1 - 3 \cos^2 \alpha_1 + \cos^3 \alpha_1}{2(1 - 2 \cos \alpha_1)}$$

Para  $\alpha_1 = \alpha_2$  - NO CONVEXO

$\alpha_1 = 90^\circ \rightarrow \alpha_2 = 45^\circ$  NO CONVEXO

$\alpha_2 = 90^\circ \rightarrow \alpha_1 \approx 62,56053956$  NO CONVEXO

91.-  $\alpha_1 \alpha_1 \beta_1 \alpha_2$   
 $\beta_1 \beta_1$

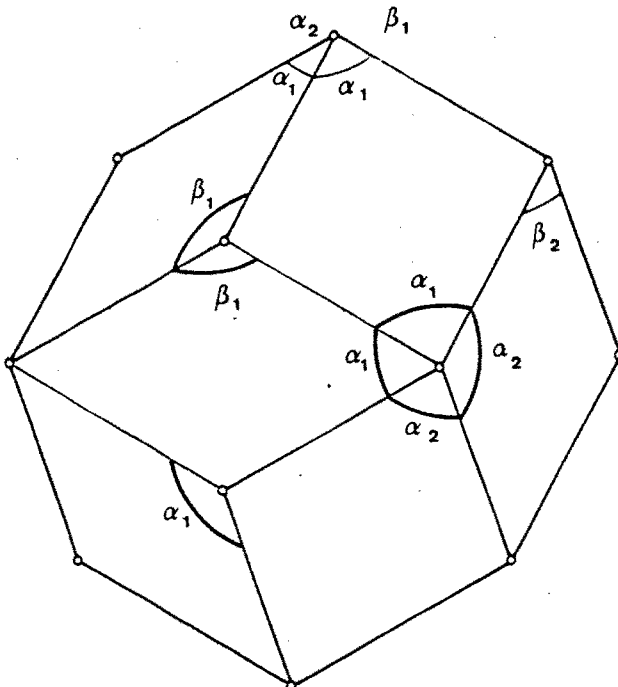


Es equivalente a

$\alpha_1 \alpha_1 \alpha_1 \alpha_2$   
 $\alpha_1 \beta_1$

ya estudiado en el 19

92.-  $\alpha_1 \alpha_1 \beta_1 \alpha_2$   
 $\beta_1 \beta_2$

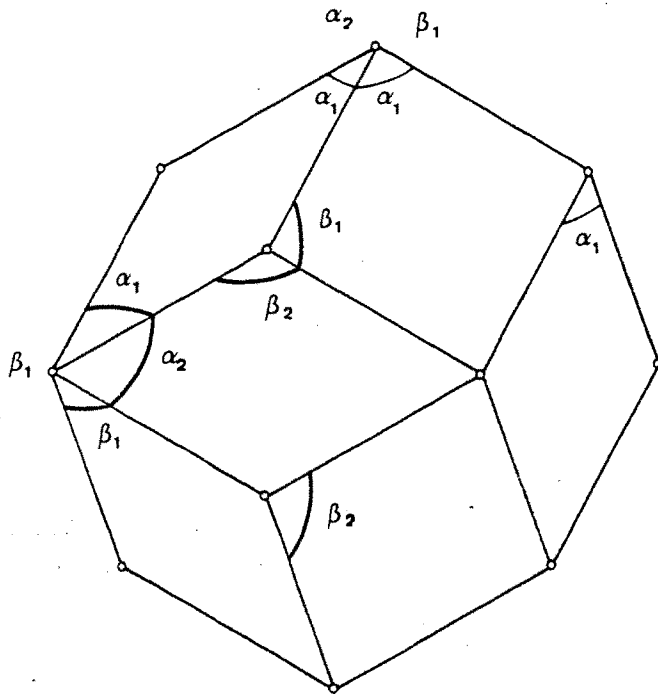


Es equivalente a

$\alpha_1 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_2$   
 $\beta_1 \alpha_1$

ya estudiado en el 41

93.-  $\alpha_1 \cdot \alpha_1 \beta_1 \alpha_2$   
 $\beta_2 \alpha_1$



Es equivalente a

$\beta_1 \beta_1 \alpha_1 \alpha_2$   
 $\beta_1 \beta_2$

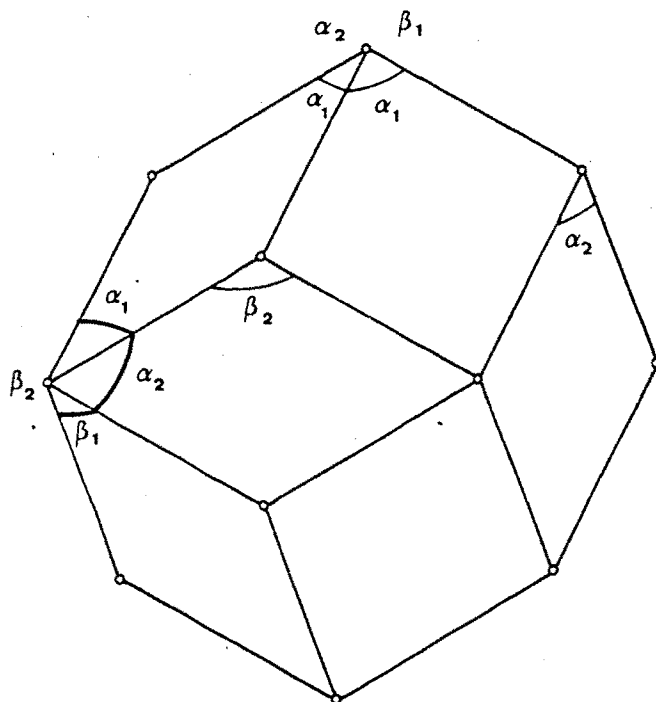
el cual a su vez, cambiando

$\alpha_1$  por  $\beta_1$  se puede reducir

a  $\alpha_1 \alpha_1 \beta_1 \alpha_2$   
 $\alpha_1 \beta_2$

ya estudiado en el 84

94.-  $\alpha_1 \alpha_1 \beta_1 \alpha_2$   
 $\beta_2 \alpha_2$

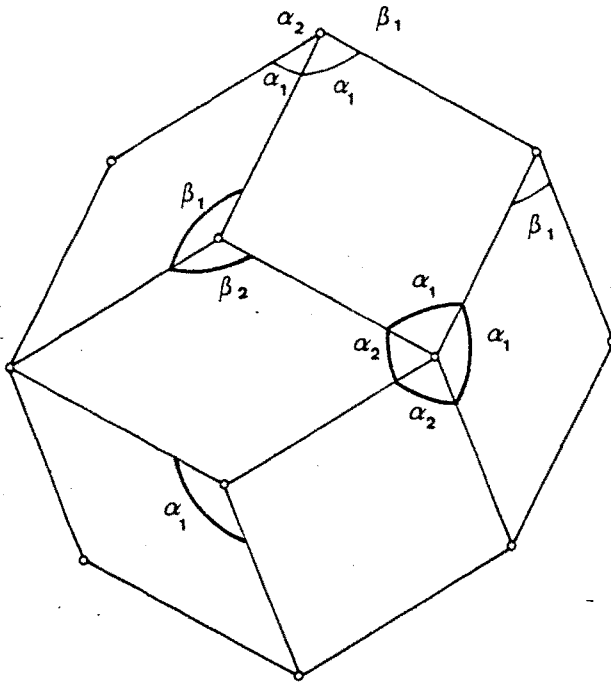


No puede ser convexo, ya que

en el vértice V la suma de

ángulos es  $360^\circ$

95.-  $\alpha_1 \alpha_1 \beta_1 \alpha_2$   
 $\beta_2 \beta_1$

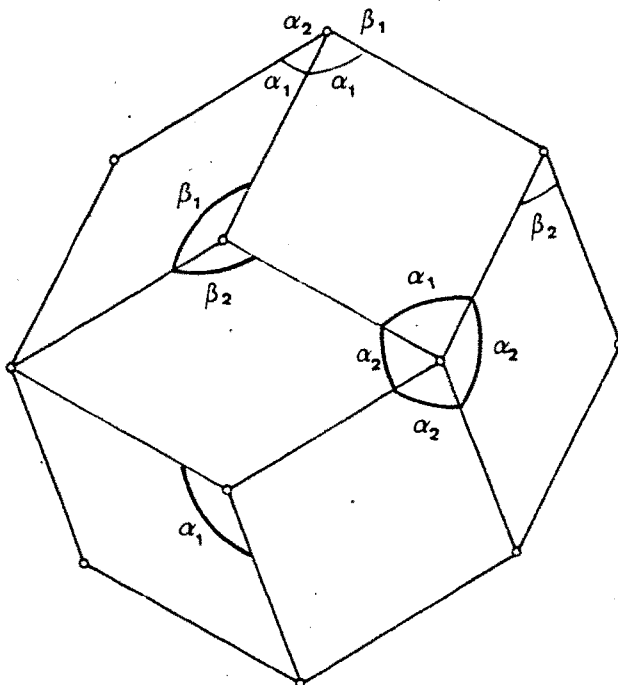


Es equivalente a

$\alpha_1 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_2$   
 $\alpha_1 \beta_1$

ya estudiado en el 35

96.-  $\alpha_1 \alpha_1 \beta_1 \alpha_2$   
 $\beta_2 \beta_2$



Es equivalente a

$\alpha_2 \alpha_2 \alpha_2 \alpha_1$   
 $\alpha_1 \beta_1$

el cual, cambiando  $\alpha_1$  por  $\alpha_2$   
 y  $\alpha_2$  por  $\alpha_1$  se puede reducir

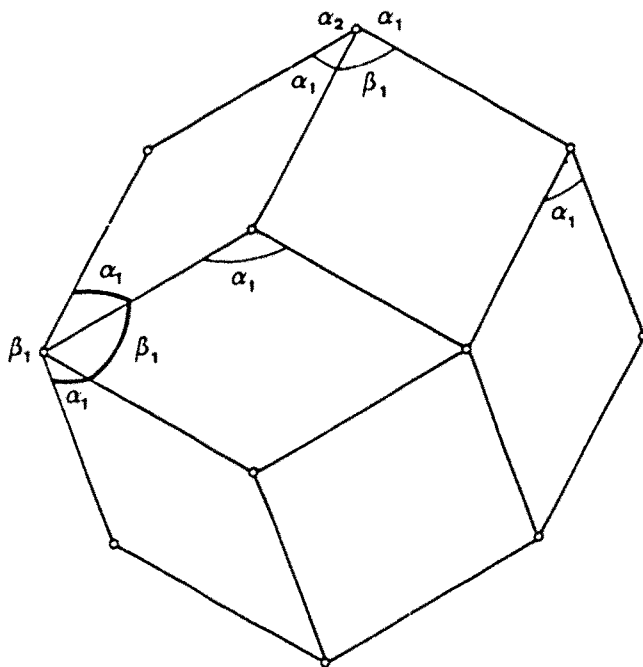
a  $\alpha_1 \alpha_1 \alpha_1 \alpha_2$   
 $\alpha_2 \beta_2$

ya estudiado en el 24

5.2.7.- ROMBODODECAEDROS TIPO  $\alpha_1 \quad \beta_1 \quad \alpha_1 \quad \alpha_2$   
 $\alpha_{1,3} \quad \alpha_{2,4}$

donde  $\alpha_{1,3} \quad \alpha_{2,4}$  es cada una de las (5.13)

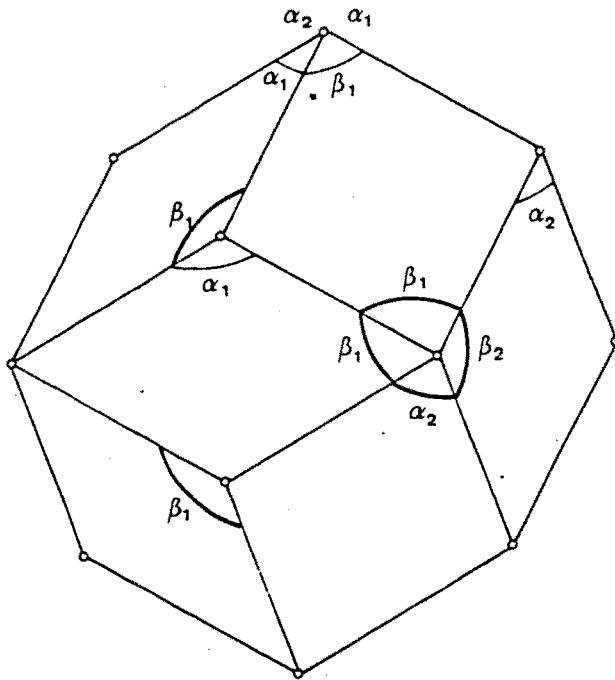
97.-  $\alpha_1 \quad \beta_1 \quad \alpha_1 \quad \alpha_2$   
 $\alpha_1 \quad \alpha_1$



No puede ser convexo ya que en el vértice V la suma de ángulos es  $360^\circ$

$$98.- \alpha_1 \quad \beta_1 \quad \alpha_1 \quad \alpha_2$$

$$\alpha_1 \quad \alpha_2$$



Es equivalente a

$$\beta_1 \quad \beta_1 \quad \alpha_2 \quad \beta_2$$

$$\beta_1 \quad \beta_1$$

$$\alpha_{1,2} = \alpha_{2,3} = \alpha_{1,3} = \alpha_{2,4} = 180 - \alpha_1$$

$$\alpha_{3,4} = \alpha_2$$

$$\alpha_{4,1} = 180 - \alpha_2$$

Sustituyendo estos valores  
en la ecuación (2.31) obte-  
nemos

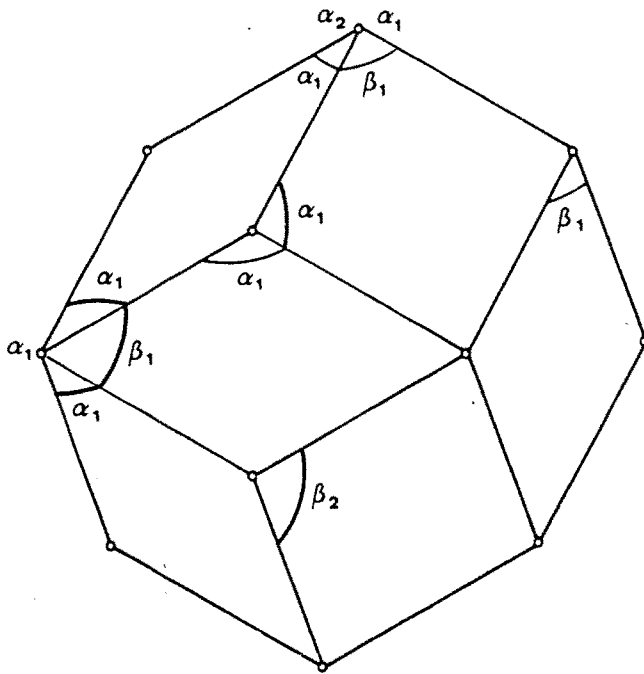
$$\cos^2 \alpha_2 = \frac{\cos^3 \alpha_1 - 3\cos^2 \alpha_1 - \cos \alpha_1 + 1}{2(1 - 2\cos \alpha_1)}$$

Para  $\alpha_1 = \alpha_2$  NO CONVEXO

$$\alpha_1 = 90^\circ \rightarrow \alpha_2 = 45^\circ \quad \text{NO CONVEXO}$$

$$\alpha_2 = 90^\circ \rightarrow \alpha_1 \approx 62,56053956 \quad \text{NO CONVEXO}$$

99.-  $\alpha_1 \beta_1 \alpha_1 \alpha_2$   
 $\alpha_1 \beta_1$

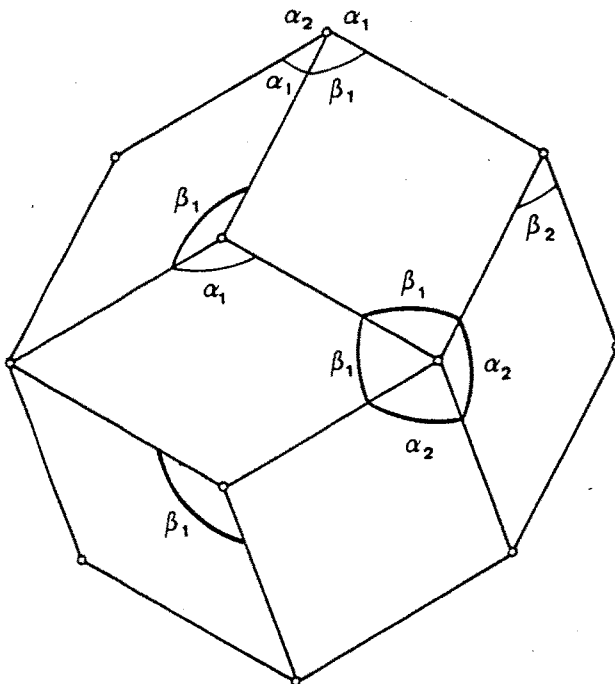


Es equivalente a

$\alpha_1 \alpha_1 \alpha_1 \beta_1$   
 $\beta_2 \alpha_1$

ya estudiado en el 77

100.-  $\alpha_1 \beta_1 \alpha_1 \alpha_2$   
 $\alpha_1 \beta_2$



Es equivalente a

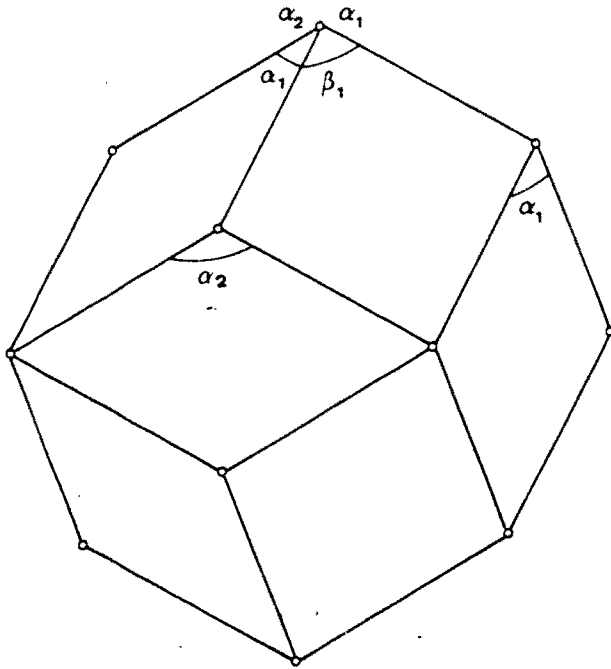
$\beta_1 \beta_1 \alpha_2 \alpha_2$   
 $\beta_1 \beta_1$

el cual, cambiando  $\alpha_1$  por  $\beta_1$   
se puede reducir a

$\alpha_1 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_2$   
 $\alpha_1 \alpha_1$

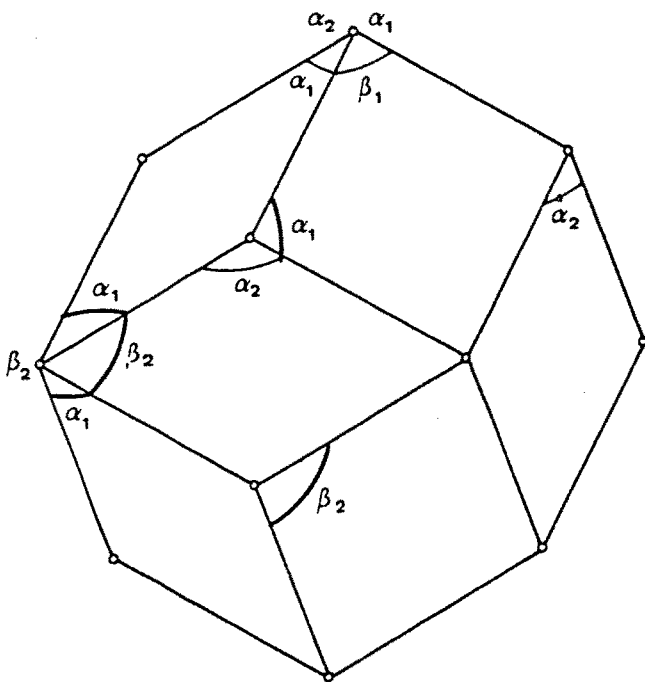
ya estudiado en el 33

101.-  $\alpha_1 \beta_1 \alpha_1 \alpha_2$   
 $\alpha_2 \alpha_1$



Es equivalente al 98

102.-  $\alpha_1 \beta_1 \alpha_1 \alpha_2$   
 $\alpha_2 \alpha_2$



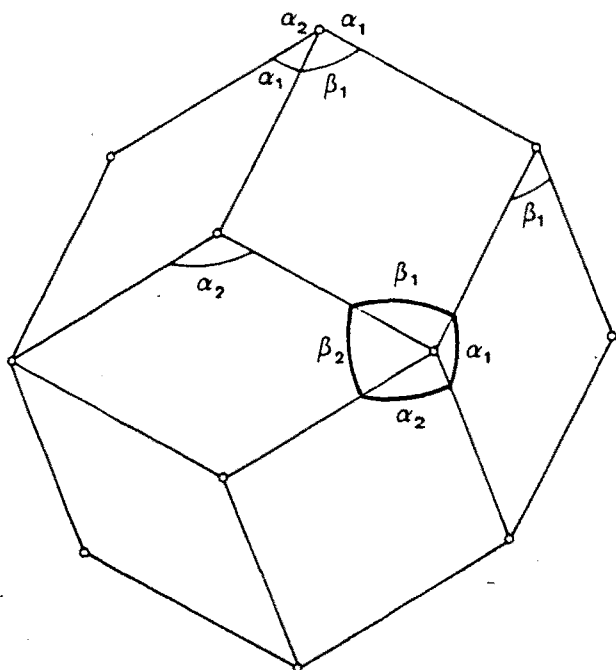
Es equivalente a

$\alpha_1 \beta_2 \alpha_1 \beta_2$   
 $\beta_2 \alpha_1$

el cual a su vez, se puede  
 reducir al 53 cambiando  $\beta_2$   
 por  $\alpha_2$

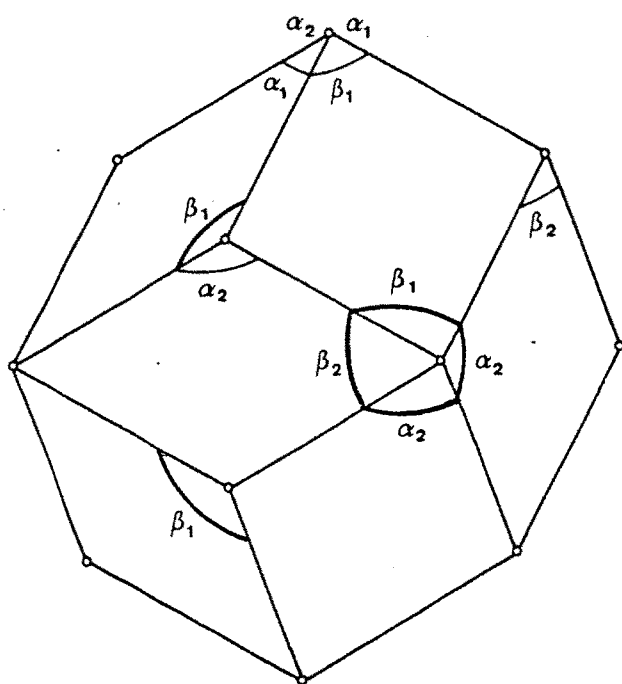


103.-  $\alpha_1 \beta_1 \alpha_1 \alpha_2$   
 $\alpha_2 \beta_1$



No puede ser convexo ya que  
 en el vértice V la suma de  
 ángulos es  $360^\circ$

104.-  $\alpha_1 \beta_1 \alpha_1 \alpha_2$   
 $\alpha_2 \beta_2$



Es equivalente a

$\alpha_2 \alpha_2 \beta_2 \beta_1$   
 $\beta_1 \beta_1$

el cual, cambiando  $\alpha_2$  por  $\alpha_1$   
 y  $\beta_1$  por  $\alpha_2$  se puede reducir  
 a  $\alpha_1 \alpha_1 \beta_1 \alpha_2$   
 $\alpha_2 \alpha_2$

ya estudiado en el 86

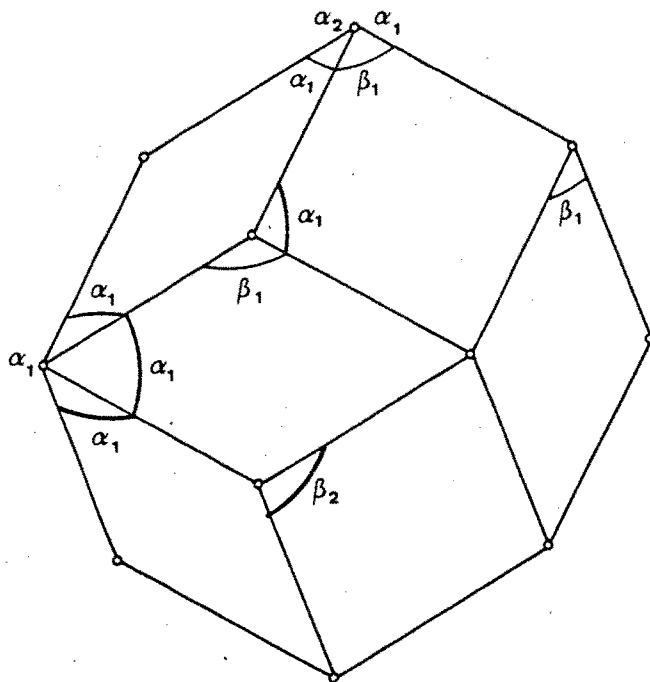
$$105.- \begin{matrix} \alpha_1 & \beta_1 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ & \beta_1 & \alpha_1 & \end{matrix}$$

Es equivalente al 99

$$106.- \begin{matrix} \alpha_1 & \beta_1 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ & \beta_1 & \alpha_2 & \end{matrix}$$

Es equivalente al 103 y por tanto no convexo

$$107.- \begin{matrix} \alpha_1 & \beta_1 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ & \beta_1 & \beta_1 & \end{matrix}$$

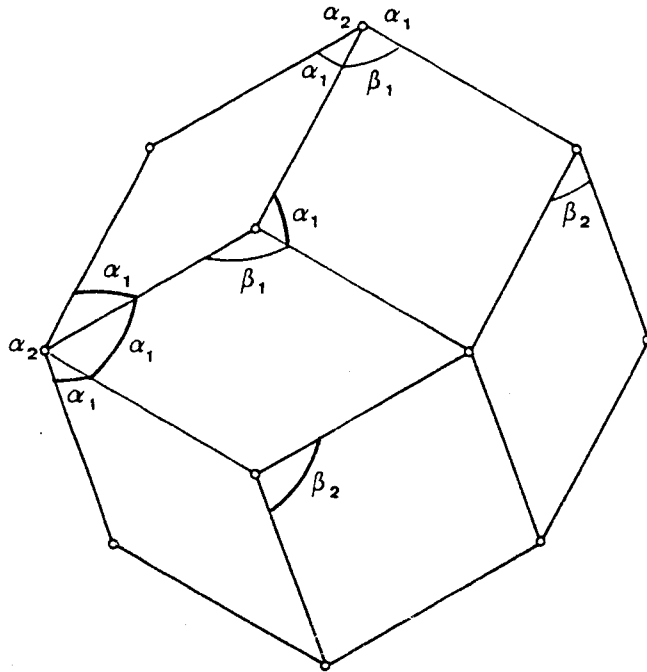


Es equivalente a

$$\begin{matrix} \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_1 \\ & \alpha_1 & \beta_2 & \end{matrix}$$

ya estudiado en el 4

108.-  $\alpha_1 \beta_1 \alpha_1 \alpha_2$   
 $\beta_1 \beta_2$



Es equivalente a

$\alpha_1 \alpha_1 \alpha_1 \alpha_2$   
 $\beta_2 \alpha_1$

ya estudiado en el 29

109.-  $\alpha_1 \beta_1 \alpha_1 \alpha_2$   
 $\beta_2 \alpha_1$

Es equivalente al 100

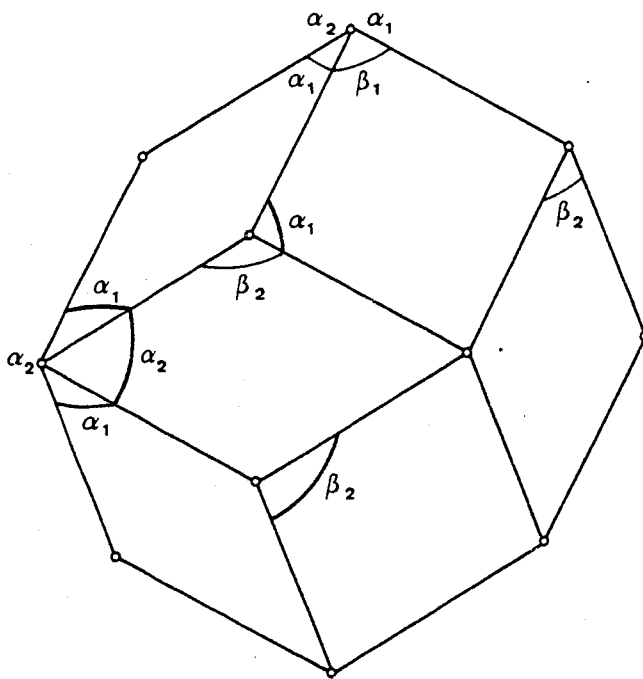
110.-  $\alpha_1 \beta_1 \alpha_1 \alpha_2$   
 $\beta_2 \alpha_2$

Es equivalente al 104

$$111.- \begin{matrix} \alpha_1 & \beta_1 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ & \beta_2 & \beta_1 & \end{matrix}$$

Es equivalente al 108

$$112.- \begin{matrix} \alpha_1 & \beta_1 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ & \beta_2 & \beta_2 & \end{matrix}$$



Es equivalente al

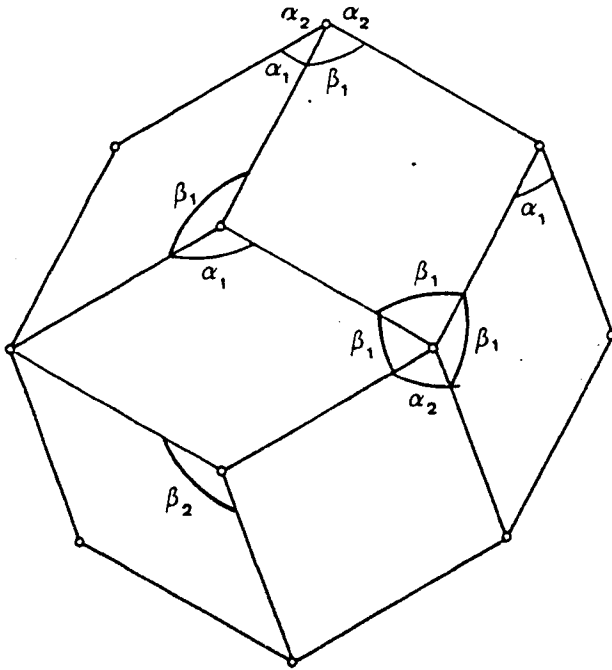
$$\begin{matrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ & \beta_2 & \alpha_1 & \end{matrix}$$

ya estudiado en el 61

5.2.8.- ROMBODECAEDROS TIPO  $\begin{matrix} \alpha_1 & \beta_1 & \alpha_2 & \alpha_2 \\ & \alpha_{1,3} & \alpha_{2,4} & \end{matrix}$

donde  $\alpha_{1,3}$   $\alpha_{2,4}$  es cada una de las (5.13)

113.-  $\alpha_1 \beta_1 \alpha_2 \alpha_2$   
 $\alpha_1 \alpha_1$

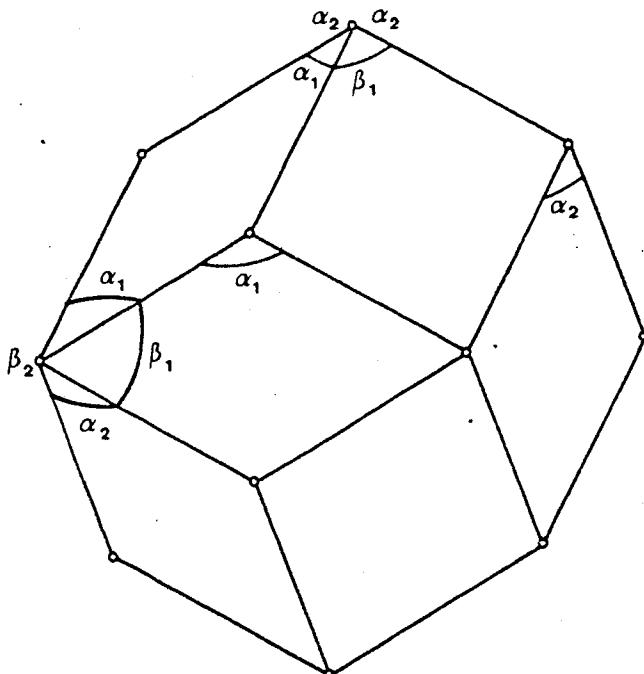


Es equivalente a

$\beta_1 \beta_1 \beta_1 \alpha_2$   
 $\beta_2 \beta_1$

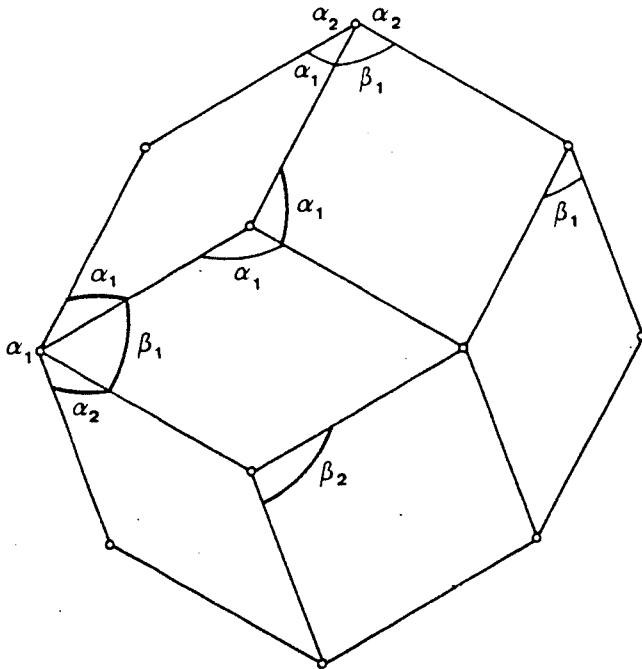
el cual se puede reducir al  
 29 cambiando  $\beta_1$  por  $\alpha_1$

114.-  $\alpha_1 \beta_1 \alpha_2 \alpha_2$   
 $\alpha_1 \alpha_2$



No puede ser convexo ya que  
 en el vértice V la suma -  
 de ángulos es  $360^\circ$

115.-  $\alpha_1 \beta_1 \alpha_2 \alpha_2$   
 $\alpha_1 \beta_1$

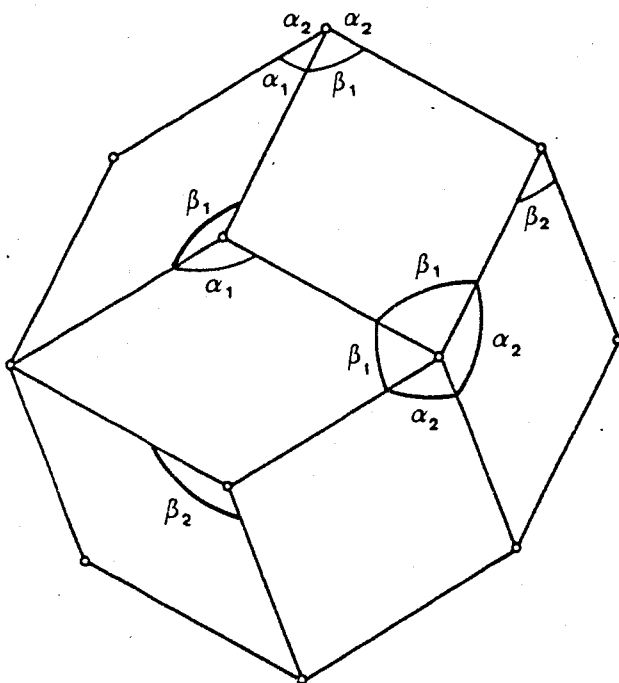


Es equivalente a

$\alpha_1 \alpha_1 \beta_1 \alpha_2$   
 $\beta_2 \alpha_1$

ya estudiado en el 93

116.-  $\alpha_1 \beta_1 \alpha_2 \alpha_2$   
 $\alpha_1 \beta_2$

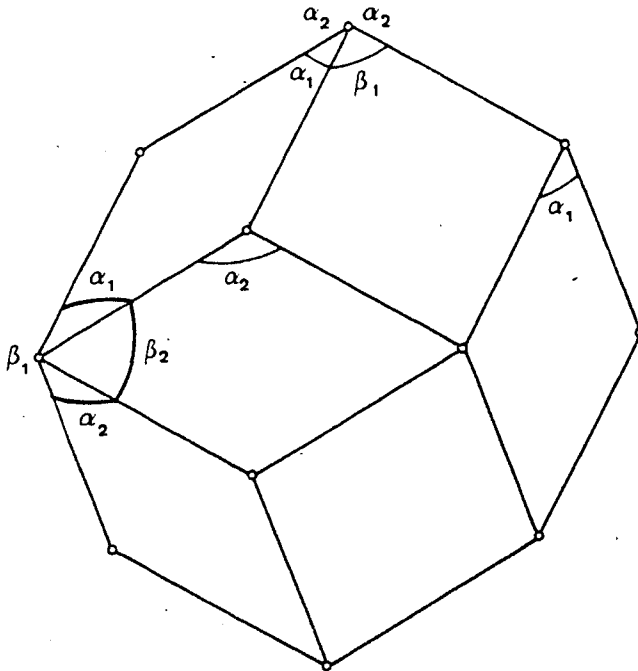


Es equivalente a

$\beta_1 \beta_1 \alpha_2 \alpha_2$   
 $\beta_1 \beta_2$

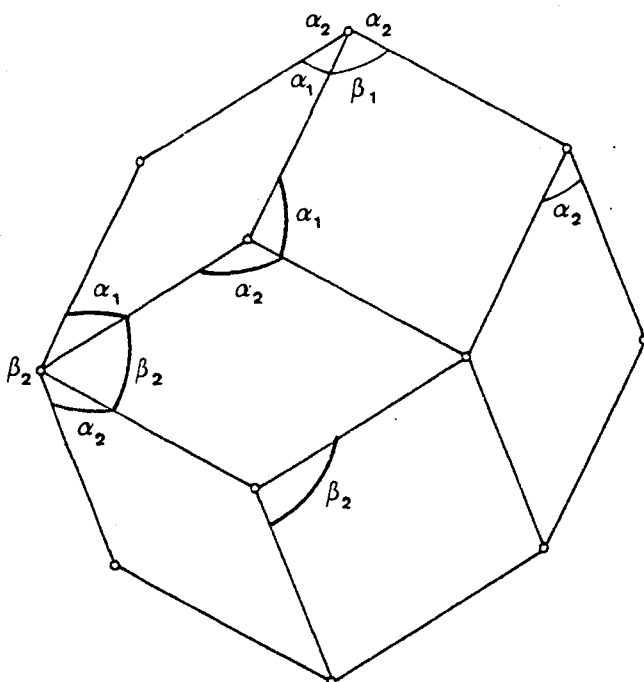
el cual se puede reducir al  
 36 cambiando  $\beta_1$  por  $\alpha_1$

117.-  $\alpha_1 \beta_1 \alpha_2 \alpha_2$   
 $\alpha_2 \alpha_1$



No puede ser convexo ya que  
 en el vértice V la suma de  
 ángulos es  $360^\circ$

118.-  $\alpha_1 \beta_1 \alpha_2 \alpha_2$   
 $\alpha_2 \alpha_2$

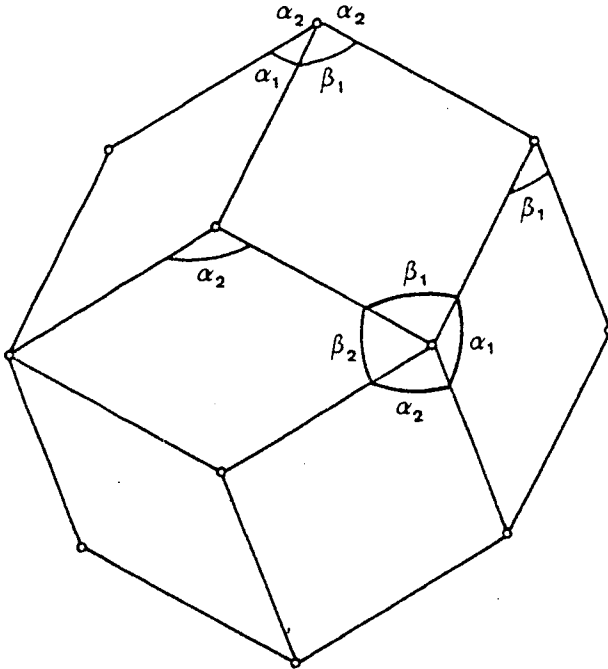


Es equivalente a

$\beta_2 \alpha_2 \beta_2 \alpha_1$   
 $\alpha_1 \beta_2$

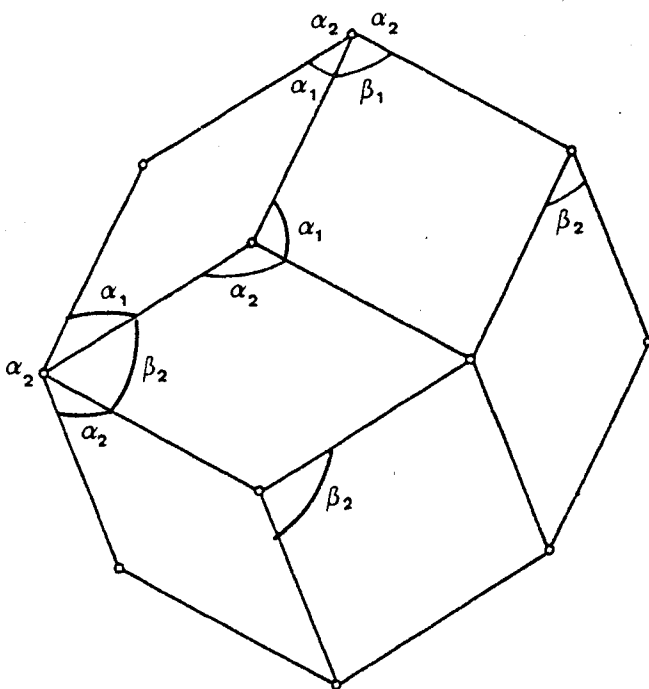
el cual se puede reducir al  
 101 cambiando  $\alpha_2$  por  $\beta_1$  y  
 $\alpha_1$  por  $\alpha_2$

119.-  $\alpha_1 \beta_1 \alpha_2 \alpha_2$   
 $\alpha_2 \beta_1$



No puede ser convexo ya que en el vértice V la suma de ángulos es  $360^\circ$

120.-  $\alpha_1 \beta_1 \alpha_2 \alpha_2$   
 $\alpha_2 \beta_2$



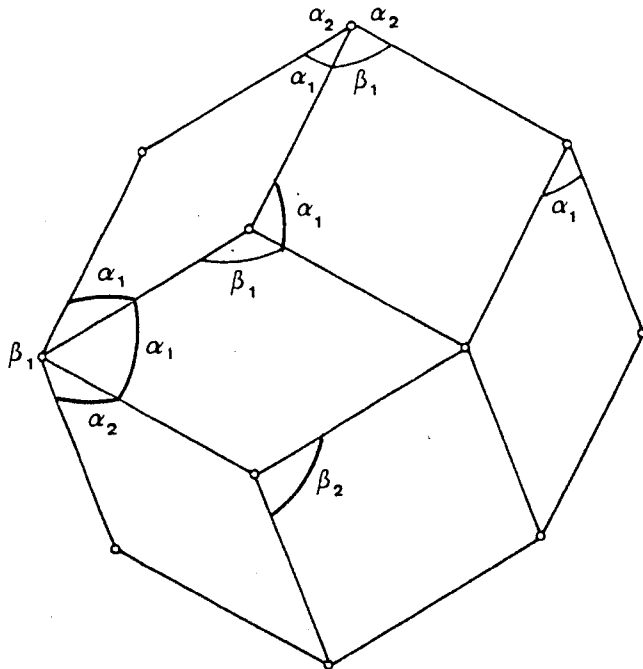
Es equivalente a

$\alpha_2 \alpha_2 \beta_2 \alpha_1$   
 $\alpha_1 \beta_2$

el cual se puede reducir al 87 cambiando  $\alpha_2$  por  $\alpha_1$  y  $\alpha_1$  por  $\alpha_2$



121.-  $\alpha_1 \beta_1 \alpha_2 \alpha_2$   
 $\beta_1 \alpha_1$

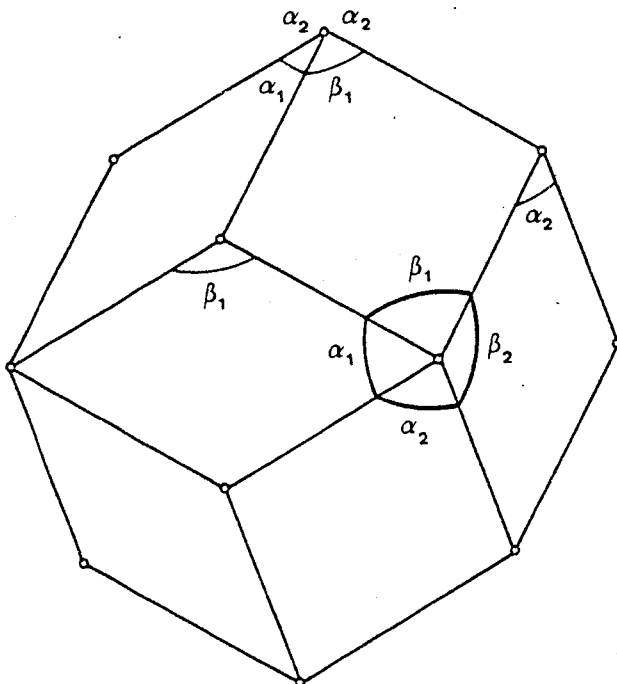


Es equivalente a

$\alpha_1 \alpha_1 \beta_1 \alpha_2$   
 $\alpha_1 \beta_2$

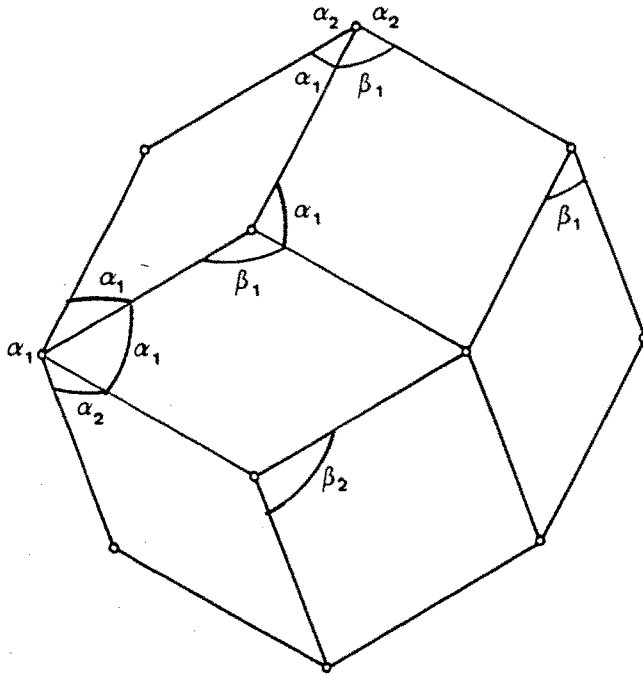
ya estudiado en el 84

122.-  $\alpha_1 \beta_1 \alpha_2 \alpha_2$   
 $\beta_1 \alpha_2$



No puede ser convexo ya que  
 en el vértice V la suma de  
 ángulos es  $360^\circ$

123.-  $\alpha_1 \beta_1 \alpha_2 \alpha_2$   
 $\beta_1 \beta_1$

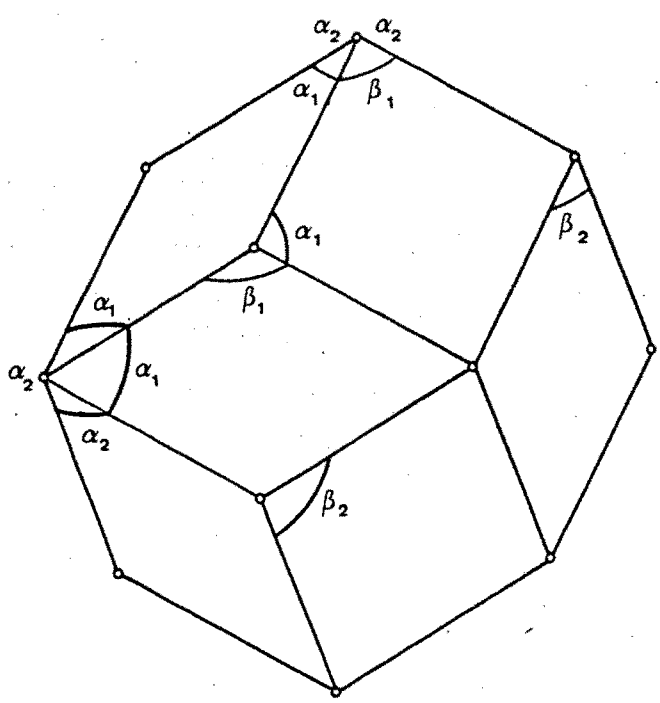


Es equivalente a

$\alpha_1 \alpha_1 \alpha_1 \alpha_2$   
 $\alpha_1 \beta_2$

ya estudiado en el 20

124.-  $\alpha_1 \beta_1 \alpha_2 \alpha_2$   
 $\beta_1 \beta_2$

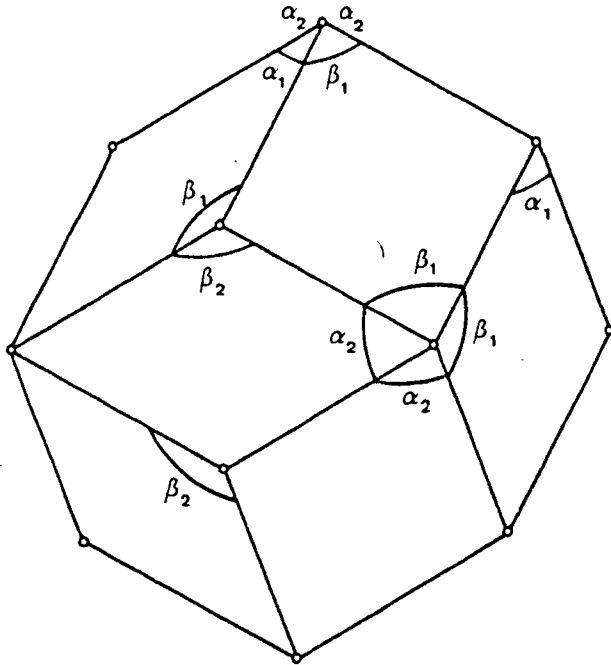


Es equivalente a

$\alpha_1 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_2$   
 $\alpha_1 \beta_2$

ya estudiado en el 36

125.-  $\alpha_1 \beta_1 \alpha_2 \alpha_2$   
 $\beta_2 \alpha_1$

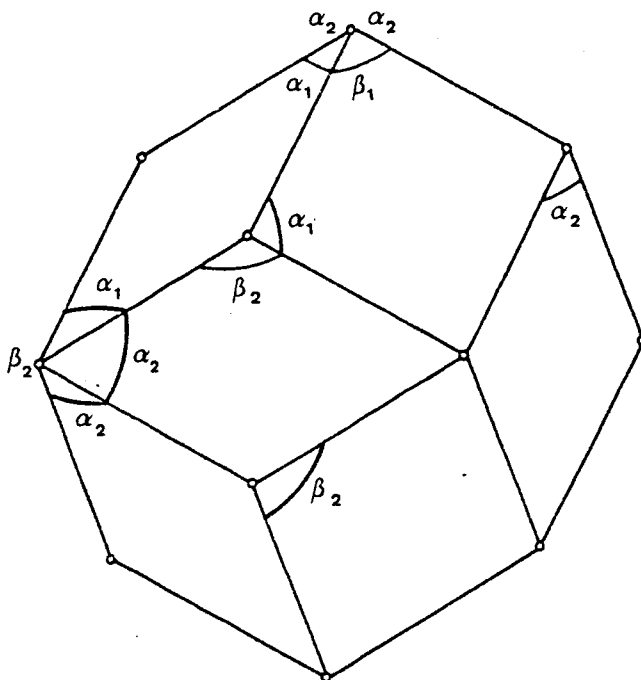


Es equivalente a

$\beta_1 \beta_1 \alpha_2 \alpha_2$   
 $\beta_2 \beta_1$

el cual se puede reducir al  
 45 cambiando  $\beta_1$  por  $\alpha_1$

126.-  $\alpha_1 \beta_1 \alpha_2 \alpha_2$   
 $\beta_2 \alpha_2$

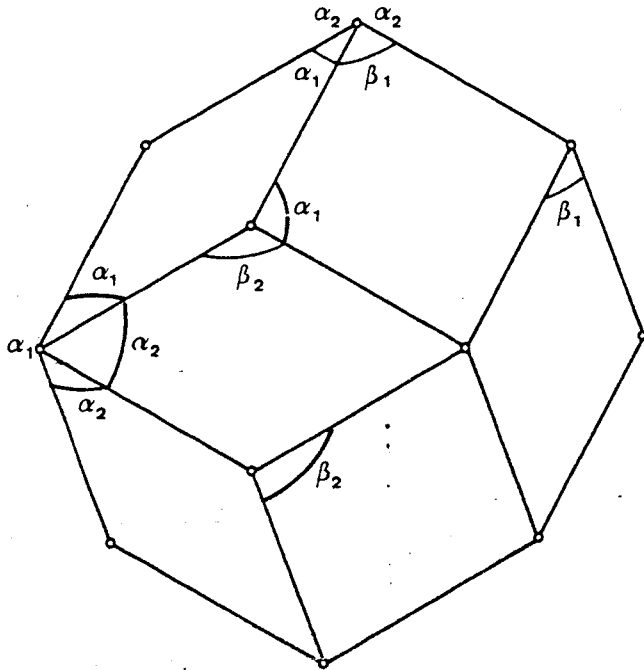


Es equivalente a

$\alpha_2 \alpha_2 \beta_2 \alpha_1$   
 $\beta_2 \alpha_1$

el cual se puede reducir al  
 90 cambiando  $\alpha_1$  por  $\alpha_2$  y  $\alpha_2$   
 por  $\alpha_1$ .

127.-  $\alpha_1 \beta_1 \alpha_2 \alpha_2$   
 $\beta_2 \beta_1$

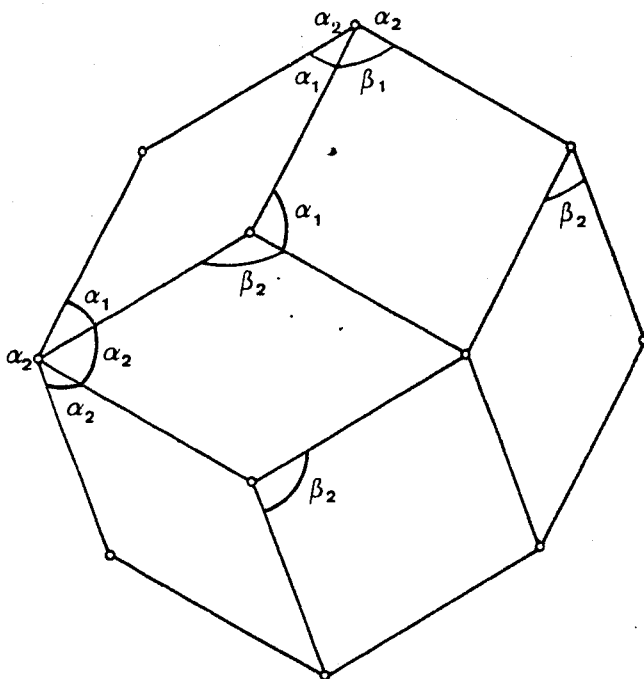


Es equivalente a

$\alpha_1 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_2$   
 $\beta_2 \alpha_1$

ya estudiado en el 45

128.-  $\alpha_1 \beta_1 \alpha_2 \alpha_2$   
 $\beta_2 \beta_2$



Es equivalente a

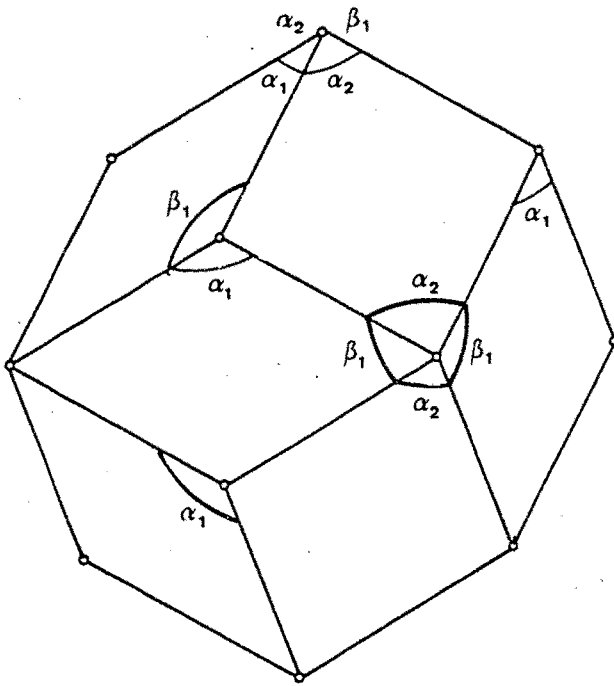
$\alpha_2 \alpha_2 \alpha_2 \alpha_1$   
 $\alpha_1 \beta_2$

el cual se puede reducir al 23 cambiando  $\alpha_1$  por  $\alpha_2$  y  $\alpha_2$  por  $\alpha_1$ .

5.2.9.- COMBINACIONES TIPO  $\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \beta_1 \quad \alpha_2$   
 $\alpha_{1,3} \quad \alpha_{2,4}$

donde  $\alpha_{1,3} \quad \alpha_{2,4}$  es cada una de las (5.13)

129.-  $\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \beta_1 \quad \alpha_2$   
 $\alpha_1 \quad \alpha_1$



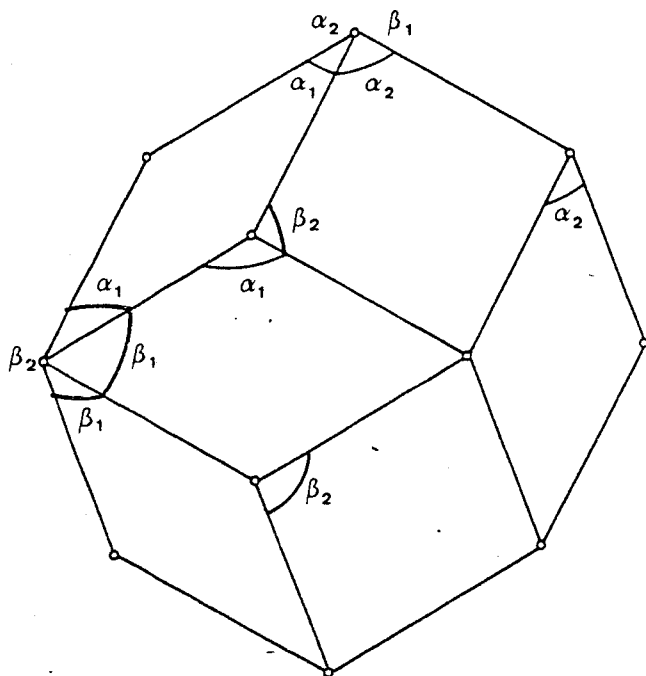
Es equivalente a

$\beta_1 \quad \alpha_2 \quad \beta_1 \quad \alpha_2$   
 $\alpha_1 \quad \beta_1$

el cual se puede reducir al

57 cambiando  $\alpha_1$  por  $\beta_1$

130.-  $\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \alpha_2$   
 $\alpha_1 \alpha_2$

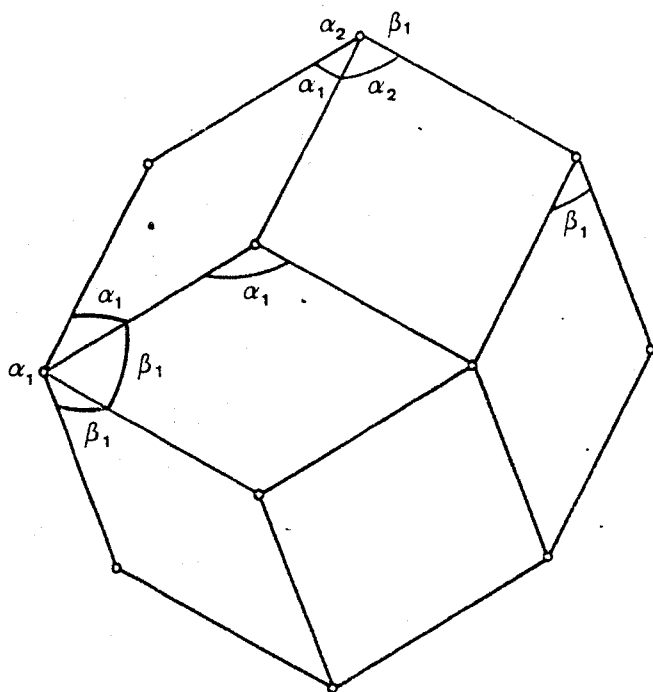


Es equivalente a

$\beta_1 \beta_1 \alpha_1 \beta_2$   
 $\beta_2 \beta_2$

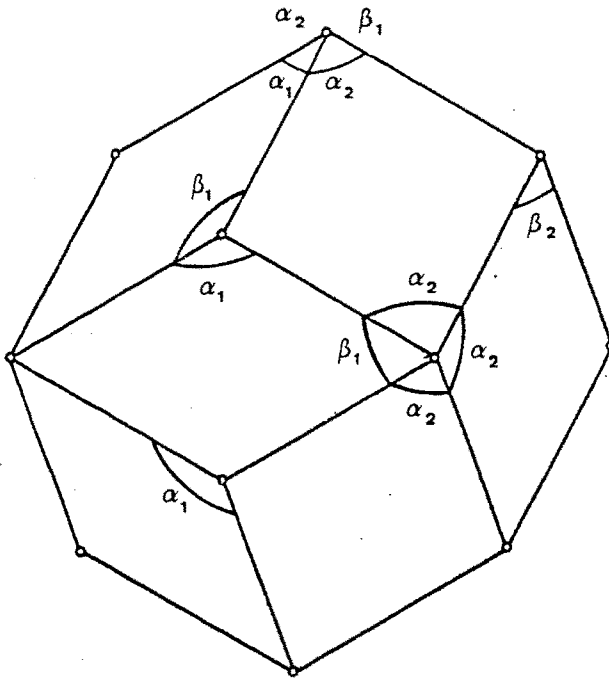
el cual se puede reducir al 86 cambiando  $\alpha_1$  por  $\beta_1$  y  $\alpha_2$  por  $\beta_2$

131.-  $\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \alpha_2$   
 $\alpha_1 \beta_1$



No puede ser convexo ya que en el vértice V la suma de ángulos es  $360^\circ$

132.-  $\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \alpha_2$   
 $\alpha_1 \beta_2$



Es equivalente a

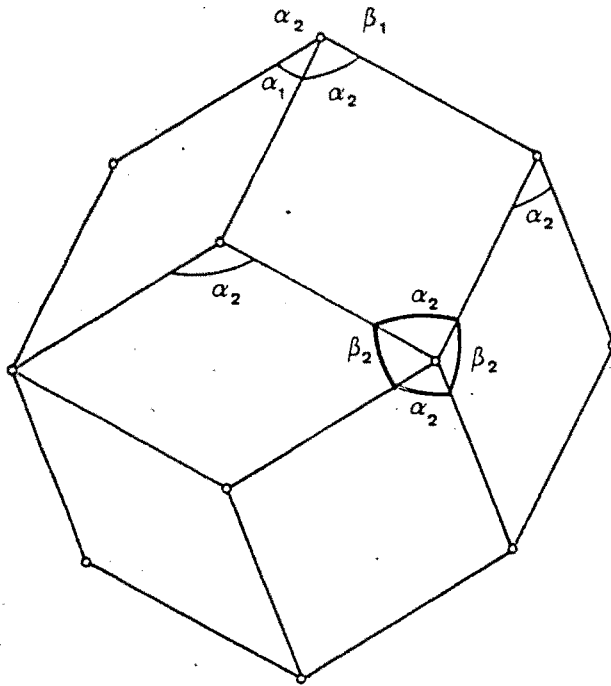
$\alpha_2 \alpha_2 \alpha_2 \beta_1$   
 $\beta_1 \alpha_1$

el cual se puede reducir al  
24 cambiando  $\alpha_2$  por  $\alpha_1$  y  $\alpha_1$   
 $\beta_2$

133.-  $\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \alpha_2$   
 $\alpha_2 \alpha_1$

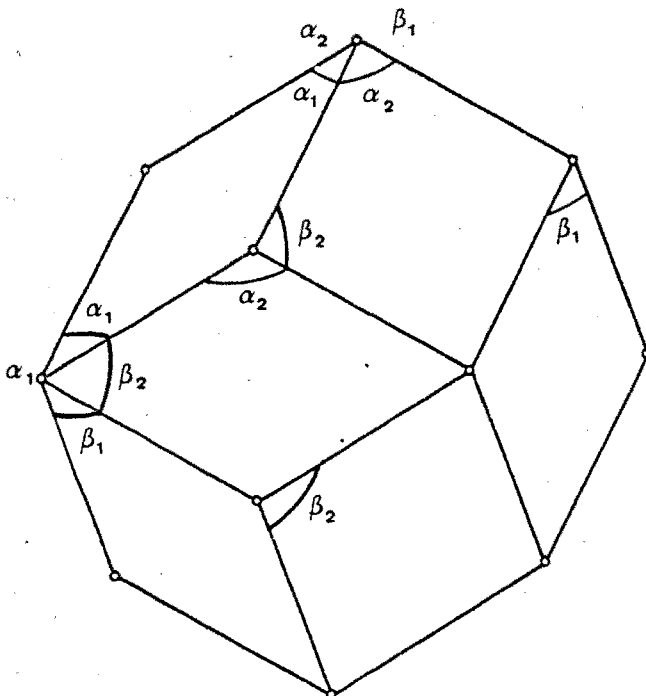
Es equivalente al 130

134.-  $\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \alpha_2$   
 $\alpha_2 \alpha_2$



No puede ser convexo ya que en el vértice V la suma de los ángulos es  $360^\circ$

135.-  $\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \alpha_2$   
 $\alpha_2 \beta_1$



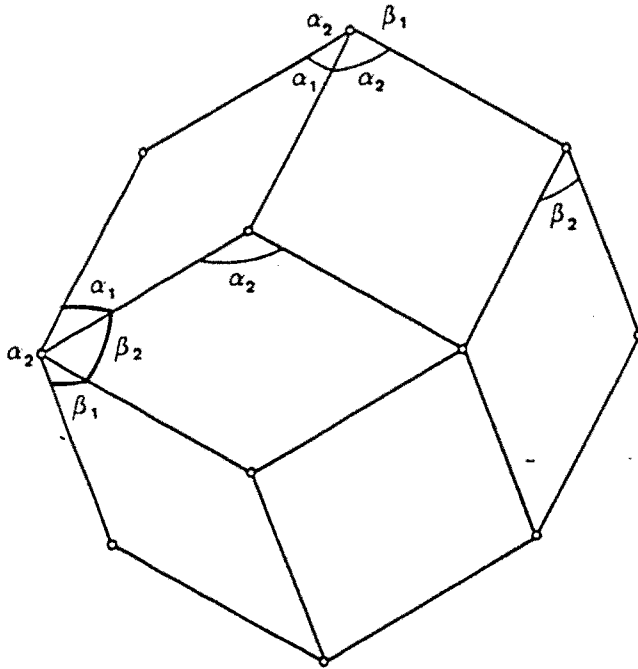
Es equivalente a

$\alpha_1 \alpha_1 \beta_1 \beta_2$   
 $\beta_2 \beta_2$

el cual se puede reducir al 86 cambiando  $\beta_2$  por  $\alpha_2$

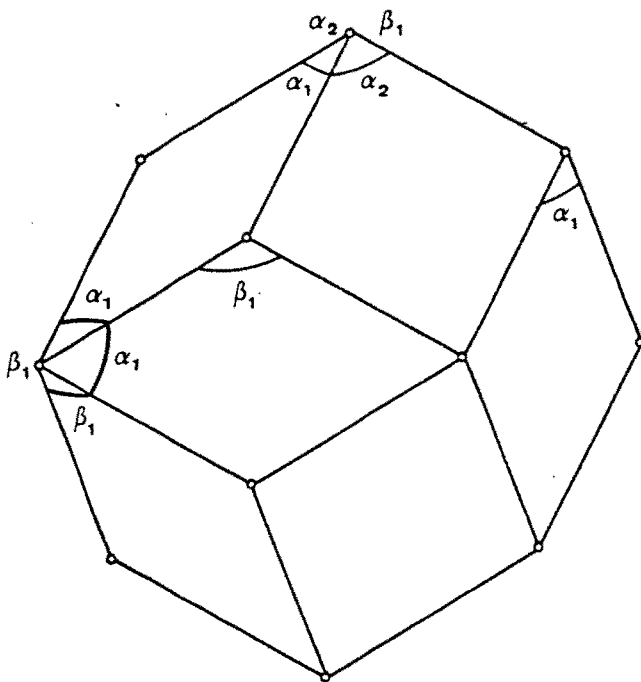


136.-  $\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \alpha_2$   
 $\alpha_2 \beta_2$



No puede ser convexo, ya que la suma de los ángulos en el vértice V es  $360^\circ$

137.-  $\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \alpha_2$   
 $\beta_1 \alpha_1$

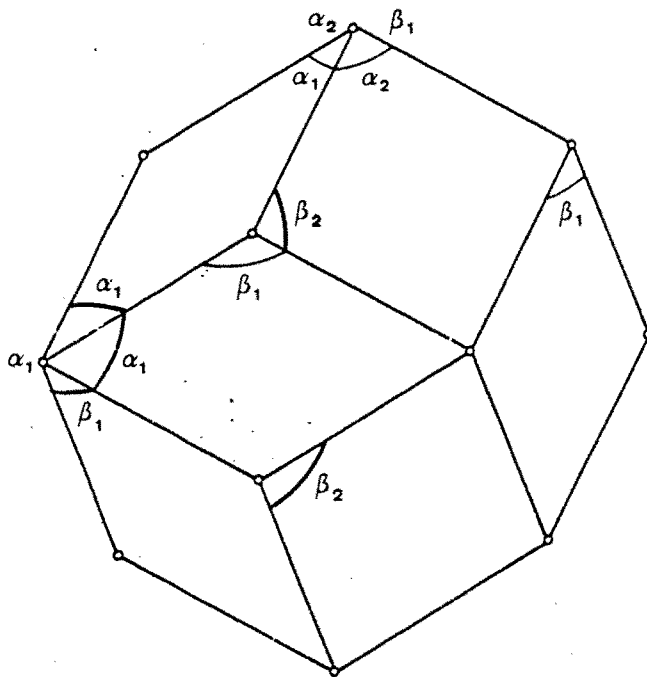


No puede ser convexo, ya que la suma de los ángulos en el vértice V es  $360^\circ$

138.-  $\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \alpha_2$   
 $\beta_1 \alpha_2$

Es equivalente al 135

139.-  $\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \alpha_2$   
 $\beta_1 \beta_1$

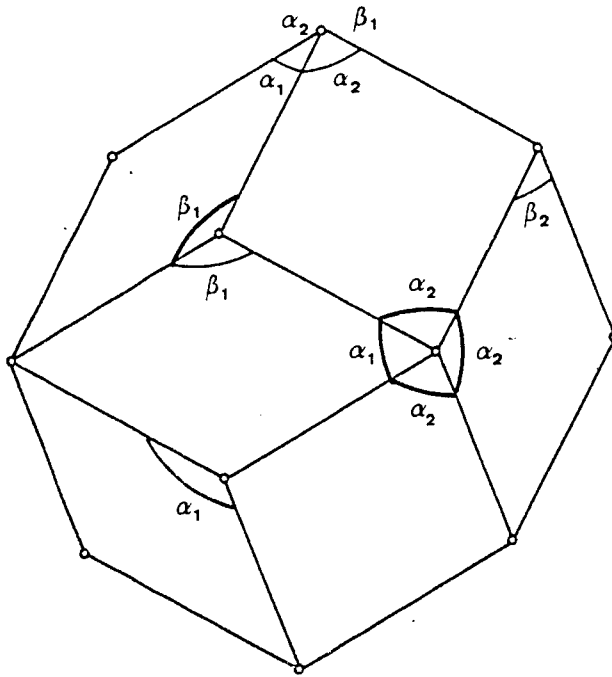


Es equivalente a

$\alpha_1 -\alpha_1 \alpha_1 \beta_1$   
 $\beta_2 \beta_2$

ya estudiado en el 80

140.-  $\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \alpha_2$   
 $\beta_1 \beta_2$



Es equivalente a

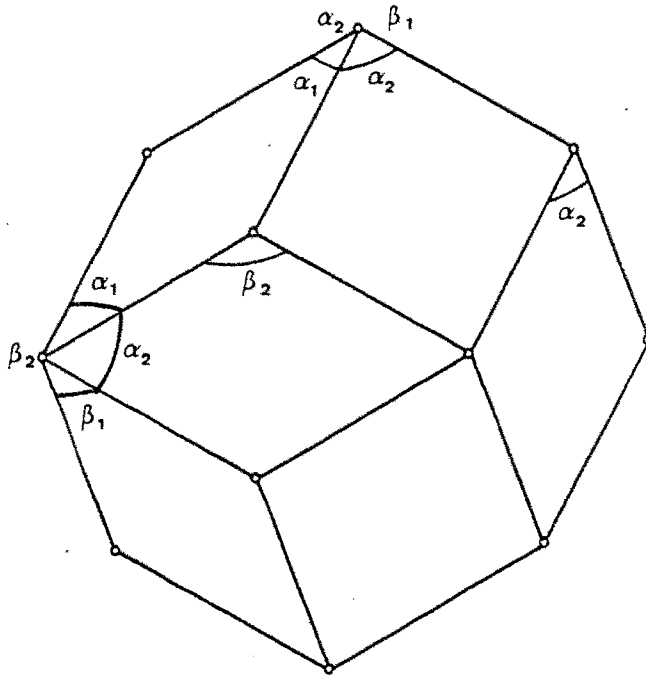
$\alpha_2 \alpha_2 \alpha_2 \alpha_1$   
 $\beta_1 \alpha_1$

el cual se puede reducir al  
30 cambiando  $\alpha_1$  por  $\alpha_2$  y  $\alpha_2$   
por  $\alpha_1$

141.-  $\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \alpha_2$   
 $\beta_2 \alpha_1$

Es equivalente al 132

142.-  $\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \alpha_2$   
 $\beta_2 \alpha_2$

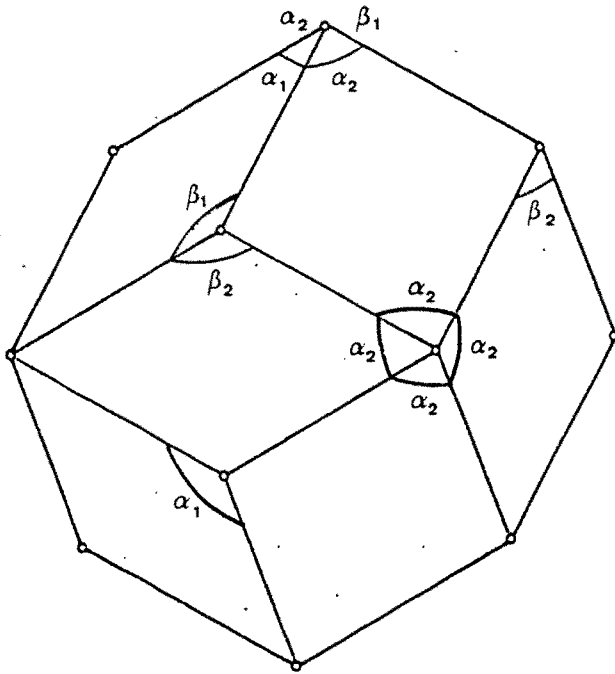


No puede ser convexo ya que  
en el vértice V la suma  
de los ángulos es  $360^\circ$

143.-  $\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \alpha_2$   
 $\beta_2 \beta_1$

Es equivalente al 140

144.-  $\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \alpha_2$   
 $\beta_2 \beta_2$



Es equivalente a

$\alpha_2 \alpha_2 \alpha_2 \alpha_2$   
 $\alpha_1 \beta_1$

el cual a su vez se puede  
reducir al 8 cambiando  $\alpha_1$   
por  $\alpha_2$  y  $\alpha_2$  por  $\alpha_1$

5.2.10.- RESUMEN

- De las 144 familias iniciales de rombododecaedros con dos tipos de cara rombo, hay ocho que tienen todas sus caras iguales, cuatro de las cuales se puede asegurar desde el principio que son no convexas, y las otras cuatro resultan ser el rombododecaedro equifacial (una vez) y el R 3 (tres veces).

Estamos pues ante un primer conjunto de poliedros que tienen todas sus caras iguales, como caso particular de suponer de partida que existen caras rombo de dos tipos.

- Las 136 familias restantes son rombododecaedros con dos tipos de caras rombo, de las cuales, 27 resultan ser a priori no convexas, cualesquiera que sean los valores de  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$ .

- Las 109 familias que quedan se pueden limitar a 26; - ya que, las otras 83 se pueden agrupar en formas equivalentes a estas 26 o bien se pueden reducir a ellas.

- Si a estas 26 familias las imponemos la condición de que  $\alpha_1 = \alpha_2$ ; es decir, que las caras sean iguales, aparece 4 veces el rombododecaedro equifacial, 12 veces el R 3 y 10 rombododecaedros no convexas.

Si exigimos que una de las caras sea cuadrado, se ob-

tienen 7 rombododecaedros convexos con dos tipos de caras - rombo, siendo una de ellas cuadrado.

Estos 7 rombododecaedros son los que se especifican - en el epígrafe 5.2.11.

5.2.11.- ROMBODODECAEDROS CONVEXOS CON DOS TIPOS DE CARA ROMBO, SIENDO UNA DE ELLAS CUADRADO.

Los 7 posibles rombododecaedros con dos tipos de cara, siendo una de ellas cuadrado, a los que nos acabamos de referir, son los siguientes

$$2.- \begin{matrix} \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_1 \\ & \alpha_1 & \alpha_2 & \end{matrix}$$

$$\alpha_2 = 90^\circ$$

$$\alpha_1 = \arccos \frac{1+\sqrt{17}}{8} \approx 50,1792\dots$$

2 caras cuadrado

$$6.- \begin{matrix} \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_1 \\ & \alpha_2 & \alpha_2 & \end{matrix}$$

$$\alpha_2 = 90^\circ$$

$$\alpha_1 = 60^\circ$$

4 caras cuadrado. Este poliedro se puede obtener prolongando las caras triángulo del cuboctaedro o "Dymaxion"

$$7.- \begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_1 \\ & \alpha_2 & \beta_1 & \end{array}$$

$$\alpha_2 = 90^\circ$$

$$\alpha_1 = \arccos \frac{\sqrt{17}-1}{8} \approx 67,021343\dots$$

2 caras cuadrados

$$23.- \begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ & \alpha_2 & \beta_1 & \end{array}$$

$$\alpha_2 = 90^\circ$$

$$\alpha_1 \approx 62,56053956\dots$$

4 caras cuadrados

$$35.- \begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_2 \\ & \alpha_1 & \beta_1 & \end{array}$$

$$\alpha_2 = 90^\circ$$

$$\alpha_1 \approx 47,53568612\dots$$

4 caras cuadrados

$$36.- \begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_2 \\ & \alpha_1 & \beta_2 & \end{array}$$

$$\alpha_1 = 90^\circ$$

$$\alpha_2 = \arccos \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 54,735610\dots$$

6 caras cuadrados. Este poliedro se puede obtener a partir del cubo, desplazando dos vértices opuestos en la dirección de la diagonal que las une.



52.-  $\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_1 \quad \alpha_2$

$\alpha_1 \quad \beta_2$

$$\alpha_1 = 90^\circ$$

$$\alpha_2 = \arccos \frac{1}{\phi} \approx 51,82729\dots$$

6 caras cuadrados.

Los rombododecaedros 7 y 23, además de equipartir el espacio, pueden rellenarlo quedando desigualmente orientados por cumplir una de las condiciones de (4.21).

### 5.3.- GENERALIZACION DEL PROBLEMA

Como complemento y aplicación de cuanto se ha venido desarrollando, veamos la posibilidad de obtener romboicosaedros y triakontaedros con dos tipos de caras rombo con la particularidad de que una de ellas sea cuadrado.

#### 5.3.1.- ROMBOICOSAEDROS CON DOS TIPOS DE CARAS ROMBO, SIENDO UNA DE ELLAS CUADRADO.

Si existiera un romboicosaedro convexo con dos tipos de caras rombo, siendo una de ellas cuadrado, y elimináramos sus bandas octogonales, obtendríamos rombododecaedros que cumplieran esas condiciones. Podemos pues, partir de los rombododecaedros ya conocidos del epígrafe anterior y transformarlos en romboicosaedros añadiéndoles una banda octogonal -

formada por cuadrados y/o rombos (del mismo tipo que ya tenía el rombododecaedro). Si se sigue este artificio con cada uno de los siete rombododecaedros ya conocidos, solamente en un caso se obtienen romboicosaedros del tipo buscado. Se trata del rombododecaedro 52, y se obtiene el siguiente romboicosaedro:

$$\begin{array}{cccccc} \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_1 & \\ & \alpha_2 & \alpha_2 & \alpha_2 & \alpha_2 & \alpha_2 \end{array} \quad \begin{array}{l} \alpha_2 = 90^\circ \\ \alpha_1 = \arccos \frac{1}{\phi} \approx 51,82729\dots \end{array}$$

10 cuadrados

De este único romboicosaedro de 20 caras, de las que 10 son cuadrados y 10 rombos de ángulo  $\arccos \frac{1}{\phi}$  se ofrece un croquis del mismo y su desarrollo

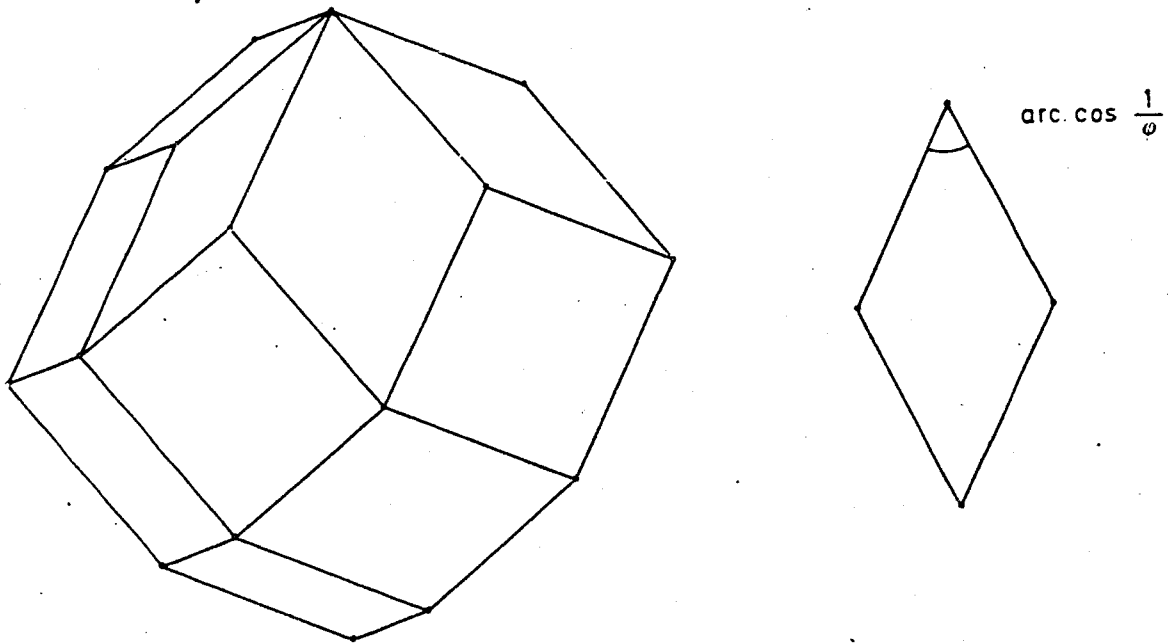


Fig 5.3.1<sub>A</sub>

5.3.2.- TRIAKONTAEDROS CON DOS TIPOS DE CARA ROMBO, SIENDO UNA DE ELLAS CUADRADO.

Se puede seguir un razonamiento análogo al ya hecho para los romboicosaedros.

Si existiera un triakontaedro convexo con dos tipos de cara rombo, siendo una de ellas cuadrado, y elimináramos sus bandas decagonales, obtendríamos romboicosaedros que cumplieran dichas condiciones.

Siguiendo, pues, el camino inverso; partiremos del romboicosaedro ya conocido del punto anterior, y le transformaremos en un triakontaedro añadiéndole una banda decagonal formada por cuadrados y/o rombos (del mismo tipo que el que ya tenía el romboicosaedro).

Si hacemos ésto para el romboicosaedro obtenido a partir del rombododecaedro 52, no es posible obtener esa banda decagonal; y por lo tanto, no existen triakontaedros con caras de dos tipos en las que una de ellas sea cuadrado.

5.4.- CONCLUSIONES

- Los rombododecaedros con dos tipos de cara rombo, se pueden reunir en 26 familias, siendo el resto no convexos, formas equivalentes a estas 26, o bien se pueden reducir a ellas.

- SOLAMENTE EXISTEN SIETE ROMBODODECAEDROS CON DOS TIPOS DE CARA ROMBO, SIENDO UNA DE ELLAS CUADRADO.
- SOLAMENTE EXISTE UN ROMBOICOSAEDRO CON DOS TIPOS DE CARA ROMBO, SIENDO UNA DE ELLAS CUADRADO.
- NO EXISTEN TRIAKONTAEDROS CON DOS TIPOS DE CARA ROMBO, SIENDO UNA DE ELLAS CUADRADO.

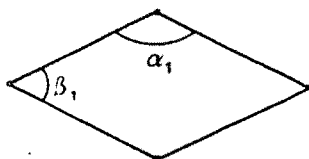
CAPITULO VI

## CAPITULO VI

ZONOEDROS EQUILATEROS CON UN SOLO TIPO DE CARA ROMBO  
PROCEDENTES DE ESTRELLAS NO SINGULARES FORMADOS POR N SEG  
MENTOS IGUALES PARA VALORES DE  $N=3$  ,  $N=4$  ,  $N=5$  ,  $N=6$

### 6.1.- PLANTEAMIENTO GENERAL DEL PROBLEMA

Si a los zonoedros equiláteros estudiados en el capítu  
lo II les exigimos que todas las caras sean rombo iguales  
del tipo



con lo cual los  $\alpha_{ij}$  serán  $\alpha$  o  $\beta$ , y además imponemos que sus  
ángulos cumplan las relaciones allí deducidas, obtendremos  
los zonoedros equiláteros con un sólo tipo de cara rombo.

### 6.2.- ROMBOHEXAEDROS CON UN SOLO TIPO DE CARA ROMBO

Ya se vio en el punto 2.2 que no existe relación algu  
na que ligue los ángulos que intervienen en los rombohexae  
dros; y que, por tanto, definida una cara rombo cualquiera,  
podremos obtener el rombohexaedro correspondiente. Realmen  
te, se obtienen dos diferentes, el que procede de reunir en  
un vértice tres ángulos  $\alpha$ , y el que proviene de reunir en  
un vértice tres ángulos  $\beta$ . En el caso de que el rombo sea  
un cuadrado ( $\alpha=\beta$ ), los dos rombohexaedros coinciden en el -  
cubo.

### 6.3.- ROMBODECAEDROS CON UN SOLO TIPO DE CARA ROMBO

Del estudio exhaustivo realizado en el Capítulo V sobre los rombododecaedros con dos tipos de caras rombo, hemos obtenido como caso particular cuando  $\alpha_1 = \alpha_2$  los dos rombododecaedros con un sólo tipo de cara rombo. Son estos:

- El rombododecaedro equifacial

$$\begin{array}{cccc} \alpha & \alpha & \alpha & \alpha \\ & \beta & \beta & \end{array} \quad \alpha = \arccos \frac{1}{3} \approx 70,5287\dots$$

La cara rombo tiene sus diagonales en la relación  $\frac{\sqrt{2}}{1}$

- El R 3

$$\begin{array}{cccc} \alpha & \alpha & \alpha & \alpha \\ & \alpha & \beta & \end{array} \quad \alpha = \arctg 2 \approx 63,4349\dots$$

La cara rombo tiene sus diagonales en la RELACION AUREA

Este rombododecaedro fue obtenido en 1960 por Bilinski, eliminando una de las bandas octogonales del romboico-saedro y juntando las dos piezas restantes. (über die rhombenisoeder. Glasnik, 15 pp. 251-263).

Se puede asegurar después del estudio realizado en el Capítulo V que no existe un tercer rombododecaedro en que -

se dé la circunstancia de que todas las caras sean rombos iguales.

#### 6.4.- ROMBOICOSAEDROS CON UN SOLO TIPO DE CARA ROMBO

Como máximo, solamente podrán existir dos romboicosaedros con un sólo tipo de cara rombo, la cual será, o bien la cara del rombododecaedro equifacial, o bien la cara rombo del R 3. Si existiera un romboicosaedro más, al eliminar una de sus bandas octogonales obtendríamos un tercer rombododecaedro con todas sus caras rombos iguales, lo cual no es posible.

Además, en el vértice donde concurren cinco caras se habrán reunido necesariamente  $5\alpha$ , ya que, si introdujéramos un  $\beta$ , la suma de ángulos sería  $4\alpha + \beta = 3\alpha + 180$ , que para los valores de  $\alpha$  de 6.3, sería siempre  $> 360^\circ$ .

La expresión del romboicosaedro con la simbología propuesta será;

$$\begin{array}{ccccc} \alpha & \alpha & \alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha_{1,3} & \alpha_{2,4} & \alpha_{3,5} & \alpha_{4,1} & \alpha_{5,2} \end{array}$$

donde  $\alpha_{1,3}$   $\alpha_{2,4}$   $\alpha_{3,5}$   $\alpha_{4,1}$   $\alpha_{5,2}$  deben ser todos iguales entre sí, al objeto de que al eliminar las cinco posibles - bandas octogonales que circundan un romboicosaedro, obtenga



mos siempre el mismo rombododecaedro.

Existirán dos posibilidades:

$$\alpha_{1,3} = \alpha_{2,4} = \alpha_{3,5} = \alpha_{4,1} = \alpha_{5,2} = \alpha$$

$$\alpha_{1,3} = \alpha_{2,4} = \alpha_{3,5} = \alpha_{4,1} = \alpha_{5,2} = \beta$$

que darán lugar a dos romboicosaedros

1er. romboicosaedro:

$$\begin{array}{ccccc} \alpha & \alpha & \alpha & \alpha & \alpha \\ & \alpha & \alpha & \alpha & \alpha \end{array}$$

Este romboicosaedro cumple las condiciones (2.41) para el valor  $\alpha=0$  que da lugar a un romboicosaedro no convexo.

2° romboicosaedro:

$$\begin{array}{ccccc} \alpha & \alpha & \alpha & \alpha & \alpha \\ & \beta & \beta & \beta & \beta \end{array}$$

Este romboicosaedro cumple las condiciones (2.41) para el valor  $\alpha = \text{arc tg } 2$ .

La cara rombo tiene sus diagonales en la RELACION AUREA

A este cuerpo le denominaremos en lo sucesivo R 4

### 6.5.- TRIAKONTAEDROS CON UN SOLO TIPO DE CARA ROMBO

No podrá existir más que un triakontaedro con caras rombo de un sólo tipo, ya que, si existiera un triakontaedro más, al eliminar una de sus bandas decagonales, se obtendría un segundo romboicosaedro con todas las caras rombo iguales, lo cual no es posible.

El triakontaedro:

$\alpha$      $\alpha$      $\alpha$      $\alpha$      $\alpha$   
 $\beta$      $\beta$      $\beta$      $\beta$      $\beta$   
 $\alpha\alpha$     $\alpha\alpha$     $\alpha\alpha$     $\alpha\alpha$     $\alpha\alpha$

Satisface todas y cada una de las condiciones (2.5.11) para  $\alpha = \text{arc tg } 2$

La cara rombo tiene sus diagonales en la RELACION AUREA

El triakontaedro obtenido es el triakontaedro equifacial.

A este cuerpo le denominaremos en lo sucesivo R 5

### 6.6. RELACIONES MUTUAS ENTRE LOS ZONOEDROS EQUILATEROS CON UN SOLO TIPO DE CARA ROMBO

Si eliminamos una banda decagonal del R 5 y juntamos

las dos restantes piezas, obtenemos el R 4. Si sometemos a este último a una operación semejante con uno de sus prismas octogonales, resulta el R 3. Por fin, podemos eliminar dos posibles bandas hexagonales en el R 3 que conducen a dos rombohexaedros diferentes a los que denominaremos R 1 y R 2; sus caras son rombos cuyas diagonales están en

El rombododecaedro equifacial queda fuera de esta ordenación y solamente la podemos relacionar con el rombohexaedro que se obtiene eliminando una de sus bandas hexagonales.

Resumiendo, solamente existen cinco zonoedros equiláteros con caras rombo iguales y CUYAS DIAGONALES ESTAN EN LA RELACION AUREA Son estos: R 1 , R 2 , R 3 , R 4 , R 5 .

6.7.- ANGULOS DIEDROS DE LOS POLIEDROS CON CARAS ROMBO CUYAS DIAGONALES ESTEN EN RELACION AUREA.

6.7.1.- ANGULOS DIEDROS DEL R 1

Tomando una sección ortogonal a las aristas.

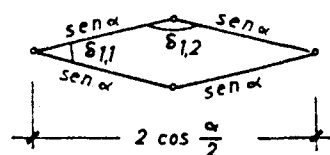
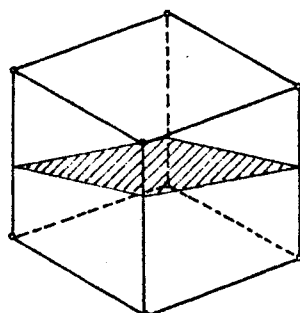


Fig 6.7.1A

$$2 \operatorname{sen} \alpha \cos \frac{\delta_{11}}{2} = 2 \cos \frac{\alpha}{2}$$

$$\cos \frac{\delta_{11}}{2} = \frac{1}{2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}}$$

$$\delta_{11} = 36^\circ$$

$$\delta_{12} = 144^\circ$$

6.7.2.- ANGULOS DIEDROS DEL R 2

Tomando una sección ortogonal a las aristas

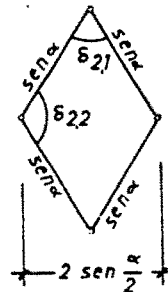
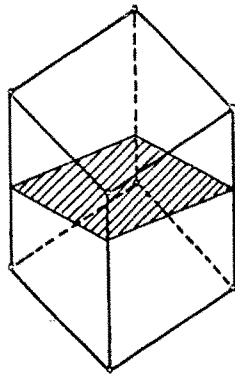


Fig 6.7.2A

$$2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \frac{\delta_{21}}{2} = 2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}$$

$$\operatorname{sen} \frac{\delta_{21}}{2} = \frac{1}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}$$

$$\delta_{21} = 72^\circ$$

$$\delta_{22} = 108^\circ$$

Los ángulos diedros de los demás poliedros son los ya obtenidos para R 1 y R 2.

Es interesante destacar que los ángulos diedros que aparecen, son los ángulos de las figuras utilizadas en el "MOSAICO DE PENROSE" en el que se trata de forma no ordenada y con ramificaciones infinitas de rellenar el plano.

#### 6.8.- ANGULOS SOLIDOS DE LOS POLIEDROS CON CARAS ROMBO CUYAS DIAGONALES ESTEN EN RELACION AUREA.

Una vez conocidos los ángulos diedros, es realmente sencillo obtener el ángulo sólido de un triedro; pues será el área del triángulo esférico que tiene por ángulos los ángulos diedros.

$$\phi_s = \frac{\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 - 180}{180} \pi$$

##### 6.8.1.- ANGULOS SOLIDOS DEL R 1

Hay 6 triedros  $(\alpha, \alpha, \beta)$  cuyos ángulos diedros son - -  
(36, 36, 144)

$$\phi_s = \frac{\pi}{5}$$

Hay 2 triedros  $(\beta, \beta, \beta)$  cuyos ángulos diedros son -  
(144,144,144)

$$\phi_s = \frac{7\pi}{5}$$

### 6.8.2.- ANGULOS SOLIDOS DEL R 2

Hay 6 triedros  $(\alpha, \beta, \beta)$  cuyos ángulos diedros son -  
(72,108,108)

$$\phi_s = \frac{3\pi}{5}$$

Hay 2 triedros  $(\alpha, \alpha, \alpha)$  cuyos ángulos diedros son -  
(72,72,72)

$$\phi_s = \frac{\pi}{5}$$

Los ángulos sólidos de los restantes vértices los ha  
llamos por descomposición, reduciéndoles a combinación li-  
neal de los anteriores.

$$\begin{aligned} 2 (\alpha, \alpha, \alpha) &= \frac{2\pi}{5} \\ (\alpha, \alpha, \alpha, \alpha) &= \\ 2 (\alpha, \alpha, \beta) &= \frac{2\pi}{5} \end{aligned}$$

$$(\alpha, \alpha, \alpha, \beta) = (\alpha, \beta, \beta) + (\alpha, \alpha, \beta) = \frac{3\pi}{5} + \frac{\pi}{5} = \frac{4\pi}{5}$$

$$(\alpha, \alpha, \alpha, \alpha, \alpha) = 5 (\alpha, \alpha, \alpha) = \frac{5\pi}{5}$$

A continuación, se recogen en la tabla I un resumen de las características más importantes de los poliedros en estudio.

T A B L A I

	C	V	A	Nº de vértices del tipo... y ángulo sólido correspondiente a este vértice								Nº de aristas cuyo ángulo diedro es				
				$(\alpha, \alpha, \alpha)$	$(\alpha, \alpha, \beta)$	$(\alpha, \beta, \beta)$	$(\beta, \beta, \beta)$	$(\alpha, \alpha, \alpha, \alpha)$	$(\alpha, \alpha, \alpha, \beta)$	$(\alpha, \alpha, \alpha, \alpha, \alpha)$	36	72	108	144		
R 1	6	8	12	-	6	-	2	-	-	-	-	-	6	-	-	6
R 2	6	8	12	2	-	6	-	-	-	-	-	-	-	6	6	-
R 3	12	14	24	-	-	4	4	2	4	-	-	-	-	4	8	12
R 4	20	22	40	-	-	-	10	-	10	2	-	-	-	-	10	30
R 5	30	32	60	-	-	-	20	-	-	12	-	-	-	-	-	60
				$\frac{\pi}{5}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{5}$	$\frac{7\pi}{5}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{4\pi}{5}$	$\frac{5\pi}{5}$						

6.9.- EL R 3 COMO POLIEDRO CAPAZ DE PRODUCIR LA EQUIPARTICION DEL ESPACIO, ASI COMO DE RELLENAR EL ESPACIO QUEDANDO DESIGUALMENTE ORIENTADO

Ya se vio en el punto 4.1 que todo rombododecaedro es capaz de producir la equipartición del espacio, y en el punto 4.2 que el R 3 es uno de los rombododecaedros susceptibles de rellenar el espacio desigualmente orientado.

Comprobemos la equipartición del R 3 a partir de sus ángulos diedros y ángulos sólidos.

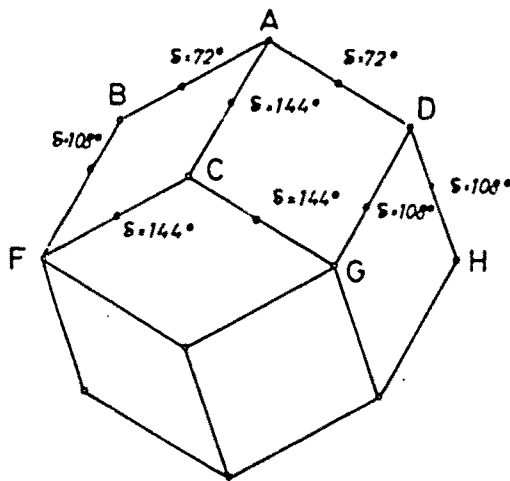


Fig 6.9A

En los puntos anteriores se han obtenido los ángulos diedros y los ángulos sólidos correspondientes a los poliedros con caras rombo cuyas diagonales están en la relación áurea y en particular del R 3.

$$\phi_A = \frac{2\pi}{5}$$

$$\phi_B = \phi_D = \frac{3\pi}{5}$$

$$\phi_C = \phi_E = \frac{7\pi}{5}$$

$$\phi_F = \phi_G = \phi_H = \frac{4\pi}{5}$$



Posibles combinaciones:

$$2 \phi_D + 2 \phi_C = 4\pi$$

$$4 \phi_G + 2 \phi_A = 4\pi$$

Para la 1° combinación, la suma de ángulos diedros alrededor de:

$$AD \rightarrow \Sigma \delta = 72 + 2 \cdot 144 = 360^\circ$$

$$DG \rightarrow \Sigma \delta = 2 \cdot 108 + 144 = 360^\circ$$

Para la 2° combinación:

$$DG \rightarrow \Sigma \delta = 2 \cdot 108 + 144 = 360^\circ$$

$$CG \rightarrow \Sigma \delta = 2 \cdot 144 + 72 = 360^\circ$$

Luego vemos que rellenan volumen:

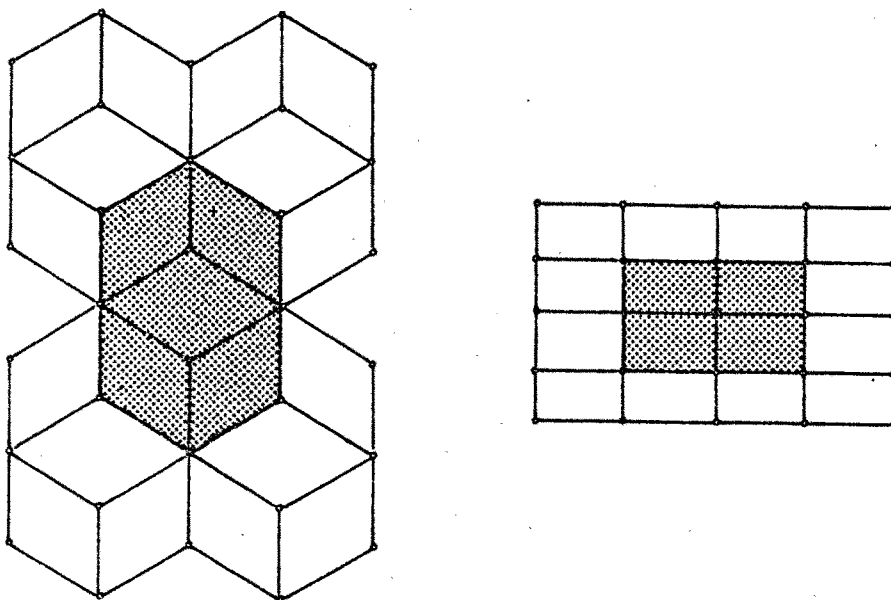


Fig 6.9<sub>B</sub>

6.10.- SOBRE LA IMPOSIBILIDAD DE OBTENER EL R 3 COMO SOLIDO AFIN DEL ROMBODODECAEDRO, LO QUE HACE AUN MAS DESTACABLE LA IMPORTANCIA DE ESTE POLIEDRO

Por analogía con lo que sucede con el cubo y los rombohexaedros, resulta muy tentador pensar en la posible procedencia por afinidad del R 3 a partir del rombododecaedro equifacial; ya que, los dos cuerpos tienen el mismo número de vértices, aristas y caras (siendo rombos en ambos casos aunque la relación de las diagonales sea distinta).

Entonces sucederá, que si existe tal afinidad espacial la esfera inscrita al rombododecaedro equifacial se transformará en un elipsoide que ha de ser tangente en los puntos medios de las caras del R 3; ya que la esfera es tangente en los puntos medios de las caras del rombododecaedro equifacial y la afinidad conserva la proporcionalidad.

Podemos elegir entre hallar el elipsoide inscrito al R 3 y comprobar si es tangente en los puntos medios de las caras, o bien, hallar el elipsoide que pasa por los puntos medios de las caras y comprobar si es tangente a éstas. Optamos por la primera forma.

En el punto 4.3 se obtuvieron todos estos datos para el rombododecaedro

$$\begin{array}{cccc} \alpha_{1,2} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,2} \\ & \alpha_{1,3} & \alpha_{2,4} & \end{array}$$

Su elipsoide inscrito, punto de tangencia y punto medio de la cara para nuestro caso:

$$\begin{array}{cccc} \alpha & \alpha & \alpha & \alpha \\ & \beta & \alpha & \end{array}$$

serán:

Elipsiode inscrito:  $\frac{x^2}{\frac{3-\phi}{5}} + \frac{y^2}{\frac{2+\phi}{5}} + \frac{z^2}{\frac{2(2\phi-1)}{5}} = 1$

Punto de tangencia:  $\left\{ \frac{\sqrt{35-20\phi}}{5}, -\frac{\sqrt{35-20\phi}}{5}, \frac{2\sqrt{35-20\phi}}{5} \right\}$

Punto medio de la cara:  $\left\{ \frac{\sqrt{15-5\phi}}{10}, -\frac{\sqrt{10+5\phi}}{10}, \frac{\sqrt{15+20\phi}}{10} \right\}$

Luego no coinciden las coordenadas del punto medio de la cara con las del punto de tangencia, y, por tanto, no puede existir una afinidad espacial que transforme el rombodecaedro equifacial en el  $R_3$ .

#### 6.11.- CONCLUSIONES

- SOLAMENTE EXISTEN DOS ROMBODECAEDROS CON TODAS SUS CARAS ROMBO IGUALES.
- SOLAMENTE EXISTEN CINCO CUERPOS DE CARAS ROMBO IGUALES Y CUYAS DIAGONALES ESTEN EN RELACION AUREA.

CAPITULO VII

## CAPITULO VII

DONDE SE ESTUDIAN DIVERSAS COMBINACIONES QUE PERMITEN RELLENAR EL ESPACIO CON LOS UNICOS CINCO POLIEDROS CONVEXOS DE CARAS ROMBO CUYAS DIAGONALES ESTAN EN RELACION AUREA.

### 7.1.- PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.

De todas las combinaciones de dos o tres cuerpos que rellenan el espacio (no necesariamente igual orientados), solamente una, aquella en la que intervienen tetraedros y octaedros cumple con la condición de que todas las caras de los poliedros combinados sean iguales.

En este capítulo se van a analizar todas las posibles combinaciones (unitarias, binarias, ternarias, cuaternarias y quınarias) que permitan rellenar el espacio con los cinco cuerpos con caras rombo cuyas diagonales estén en relación aurea.

### 7.2.- COMBINACIONES A ESTUDIAR.

En nuestro caso, con los cinco poliedros de caras rombo y diagonales en relación áurea, tendremos las siguientes combinaciones:

#### COMBINACIONES UNITARIAS (5 casos)

- 1.- R 1 consigo mismo

- 2.- R 2 consigo mismo
- 3.- R 3 " "
- 4.- R 4 " "
- 5.- R 5 " "

COMBINACIONES BINARIAS (10 casos)

- 6.- R 1 - R 2
- 7.- R 1 - R 3
- 8.- R 1 - R 4
- 9.- R 1 - R 5
- 10.- R 2 - R 3
- 11.- R 2 - R 4
- 12.- R 2 - R 5
- 13.- R 3 - R 4
- 14.- R 3 - R 5
- 15.- R 4 - R 5

COMBINACIONES TERNARIAS (10 casos)

- 16.- R 1 - R 2 - R 3
- 17.- R 1 - R 2 - R 4
- 18.- R 1 - R 2 - R 5
- 19.- R 1 - R 3 - R 4
- 20.- R 1 - R 3 - R 5
- 21.- R 1 - R 4 - R 5
- 22.- R 2 - R 3 - R 4

23.- R 2 - R 3 - R 5

24.- R 2 - R 4 - R 5

25.- R 3 - R 4 - R 5

COMBINACIONES CUATERNARIAS (5 casos)

26.- R 1 - R 2 - R 3 - R 4

27.- R 1 - R 2 - R 3 - R 5

28.- R 1 - R 2 - R 4 - R 5

29.- R 1 - R 3 - R 4 - R 5

30.- R 2 - R 3 - R 4 - R 5

COMBINACIONES QUINARIAS (un caso)

31.- R 1 - R 2 - R 3 - R 4 - R 5

7.3.- DESCOMPOSICION DE LOS SIETE POSIBLES TIPOS DE VERTICE QUE SE PUEDEN FORMAR HACIENDO CONCURRIR CARAS ROMBO - CON DIAGONALES EN RELACION AUREA EN OTROS VERTICES EN QUE SE DE LA MISMA CIRCUNSTANCIA

Existe la posibilidad de que un vértice de un poliedro en el que concurran tres o más caras rombo con las diagonales en proporción áurea, se pueda considerar como la agrupación de dos o más vértices de otros poliedros de caras rombo cuyas diagonales estén, también, en proporción áurea.

Los posibles vértices se relacionan a continuación y junto a ellos se ofrece la forma en que podrían o no - descomponerse estos vértices.

$(\alpha, \alpha, \alpha)$  NO TIENE DESCOMPOSICION

$(\alpha, \alpha, \beta)$  NO TIENE DESCOMPOSICION

$(\alpha, \beta, \beta) \rightarrow 2(\alpha, \alpha, \beta) + 1(\alpha, \alpha, \alpha)$

$(\beta, \beta, \beta) \rightarrow 2(\alpha, \beta, \beta) + 1(\alpha, \alpha, \beta)$

$(\alpha, \alpha, \alpha, \alpha) \rightarrow 2(\alpha, \alpha, \alpha)$

$\rightarrow 2(\alpha, \alpha, \beta)$

$(\alpha, \alpha, \alpha, \beta) \rightarrow 1(\alpha, \beta, \beta) + 1(\alpha, \alpha, \beta)$

$(\alpha, \alpha, \alpha, \alpha, \alpha) \rightarrow 5(\alpha, \alpha, \alpha)$

$\rightarrow 2(\alpha, \alpha, \alpha, \alpha) + 1(\alpha, \alpha, \alpha)$

$\rightarrow 1(\alpha, \beta, \beta) + 2(\alpha, \alpha, \beta)$

$\rightarrow 1(\alpha, \alpha, \alpha, \beta) + 1(\alpha, \alpha, \beta)$

7.4.- DESCOMPOSICION DE LOS POLIEDROS CON CARAS ROMBO CUYAS DIAGONALES ESTAN EN RELACION AUREA EN OTROS POLIEDROS CON LA MISMA PARTICULARIDAD.

R 1  $\rightarrow$  NO TIENE DESCOMPOSICION

R 2  $\rightarrow$  NO TIENE DESCOMPOSICION

R 3  $\rightarrow$  2R 1 + 2R 2

R 4  $\rightarrow$  1R 3 + 3R 1 + 3R 2

$\rightarrow$  5R 1 + 5R 2

R 5  $\rightarrow$  1R 4 + 5R 1 + 5R 2

$\rightarrow$  1R 3 + 8R 1 + 8R 2

$\rightarrow$  10R 1 + 10R 2



7.5.- CONSIDERACIONES A TENER EN CUENTA PARA EL ESTUDIO DE LAS COMBINACIONES QUE RELLENAN ESPACIO

- 1.- Consideraremos que una combinación rellena espacio - cuando se puede formar una estructura elemental capaz de reproducirse en tres direcciones no coplanarias - del espacio.
- 2.- Si una determinada combinación formada por uno o varios  $R_i$  rellena espacio, también lo rellenará cualquier otra en que figuren los  $R_i$  y/o sus descompuestos según el punto 7.4
- 3.- Si en una determinada combinación intervienen los - siete tipos de vértices, recogidos en la tabla I del Capítulo VI o en 7.3; o bien, si falta alguno, disponemos de aquellos en que se pueda descomponer (según se ha expuesto en 7.3) tendremos la seguridad de que dicha combinación rellena volumen.  
Esta última condición equivale, por una parte a exigir la presencia de los cuatro tipos de ángulos diedros en sus aristas (y por tanto sus combinaciones posibles), y por otra, la necesidad de que exista una última pieza que cierre el vértice alrededor del cual - se está rellenando volumen.  
Aunque esta condición es, por tanto, superabundante (suficiente pero no necesaria) vamos a utilizarla jun

to con las dos anteriores para nuestro estudio; pues to que, no nos ha sido posible encontrar un algoritmo que nos permita asegurar (en el caso de que falte alguno de los siete vértices -y que a su vez no se pueda descomponer en aquellos de los que se dispone-) que no va a ser necesario ese vértice sólido para ma cizar completamente el punto alrededor del cual nos hallamos compactando.

#### 7.6.- CASOS ESTUDIADOS DE LAS 31 COMBINACIONES POSIBLES

##### 7.6.1.- COMBINACIONES UNITARIAS

1.- R 1

Rellena volumen, por ser un cuerpo afín del cubo

2.- R 2

Rellena volumen, por ser un cuerpo afín del cubo

3.- R 3

Rellena volumen, por ser un rombododecaedro

4.- R 4

No rellena volumen; ya que, no existe una combina ción de ángulos sólidos que permita cerrar el vértice  $(\beta, \beta, \beta)$ .

5.- R 5

No rellena volumen, por la misma razón que el anterior

7.6.2.- COMBINACIONES BINARIAS

6.- R 1 - R 2

Rellena volumen, por rellenarlo R 3 y teniendo en cuenta el punto 2 de 7.5

7.- R 1 - R 3

Si acoplamos los R 3 por el prisma hexagonal, que hay que eliminar para obtener el R 1, y ponemos encima una capa de R 1, solamente habremos variado la posición relativa de los huecos; lo cual, nos permitirá poner otra capa de R 3, y así sucesivamente; por tanto, rellena espacio.

10.- R 2 - R 3

Si acoplamos los R 3 por el prisma hexagonal que hay que eliminar para obtener el R 2, y ponemos encima una capa de R 2, solamente habremos variado la posición relativa de los huecos; lo cual, nos permitirá poner otra capa de R 3 y así sucesivamente; y, por lo tanto, rellena espacio.

11.- R 2 - R 4

Si acoplamos los R 4 (por una de sus bandas oc-

togonales) en dos direcciones e intercalamos en cada uno de los huecos comprendidos entre - cada cuatro bandas octogonales un R 2 y a continuación adosamos convenientemente más unidades de R 2 hasta dejar en la parte superior el negativo de la inferior (huecos donde se pueden alojar R 3), habremos conseguido rellenar volumen.

15.- R 4 - R 5

No rellena espacio; ya que, tiene para combinar los mismo ángulos sólidos que tenía R 4.

Los casos 8, 9, 12, 13 y 14 no han sido estudiados

### 7.6.3.- COMBINACIONES TERNARIAS

16.- R 1 - R 2 - R 3

Rellena volumen, por rellenarlo R 3 y teniendo en cuenta el punto 2 de 7.5

17.- R 1 - R 2 - R 4

Rellena volumen, apoyándose en el punto 3 de - 7.5. En este caso, falta el  $(\alpha, \alpha, \alpha, \alpha)$ , pero lo sustituimos por  $2(\alpha, \alpha, \alpha)$  ó  $2(\alpha, \alpha, \beta)$ .

También, se podría haber visto a partir de la combinación 11 -(R 2 - R 4) ocupando los huecos superiores donde se pueden alojar los R 3 con -

sus equivalentes  $2R_1 + 2R_2$  y añadiendo convenientemente más unidades de  $R_2$ , con lo cual estaremos en el mismo caso, pues solamente habremos variado la posición relativa de los huecos.

18.-  $R_1 - R_2 - R_5$

Rellena volumen, teniendo en cuenta el punto 3 de 7.5. En este caso, faltan el  $(\alpha, \alpha, \alpha, \alpha)$  y el  $(\alpha, \alpha, \alpha, \beta)$ , pero se puede sustituir por sus equivalentes vistos en 7.3

22.-  $R_2 - R_3 - R_4$

Rellena volumen, a partir de la combinación 11 ( $R_2 - R_4$ ), en la cual, alojamos en los huecos superiores una capa de  $R_3$  y añadiendo convenientemente más unidades de  $R_2$ , estaremos en el mismo caso, pues solamente habremos variado la posición relativa de los huecos.

Los casos 19, 20, 21, 23, 24 y 25 no han sido estudiados.

#### 7.6.4.- COMBINACIONES CUATERNARIAS

26.-  $R_1 - R_2 - R_3 - R_4$

Rellena volumen, si tenemos presente el punto 3 de 7.5.- En este caso no falta ningún tipo de vértice.

27.- R 1 - R 2 - R 3 - R 5

Rellena volumen, por la misma razón que la anterior combinación.

28.- R 1 - R 2 - R 4 - R 5

Rellena volumen, teniendo en cuenta el punto 3 de 7.5. En este caso, falta el vértice  $(\alpha, \alpha, \alpha, \alpha)$  pero lo podemos sustituir, bien por  $2(\alpha, \alpha, \alpha)$  o bien por  $2(\alpha, \alpha, \beta)$

Los casos 29 y 30 no han sido estudiados.

#### 7.6.5.- COMBINACIONES QUINARIAS

31.- R 1 - R 2 - R 3 - R 4 - R 5

Rellena volumen, remitiéndonos al punto 3 de 7.5.

#### 7.6.6.- RESUMEN

De los 31 posibles casos relacionados en el apartado 7.2, se han estudiado un total de 18 (60%); dejando los 13 restantes, tanto por su complejidad como por no alargar excesivamente esta parte de Tesis Doctoral. Todo ello se resume en el siguiente cuadro:

C O M B I N A C I O N E S

	POSIBLES	ESTUDIADAS	RELLENAN VOLUMEN	NO RELLENAN VOLUMEN	NO ESTUDIADAS
UNITARIAS	5	5	3	2	0
BINARIAS	10	5	4	1	5
TERNARIAS	10	4	4	0	6
CUATERNARIAS	5	3	3	0	2
QUINARIAS	1	1	1	0	0
	31	18	15	3	13

En definitiva, de los 18 casos estudiados, hemos obtenido 15 combinaciones posibles que rellenan el espacio.

7.7.- COMBINACIONES NO ESTUDIADAS

Como ya se ha dicho en el punto anterior, nos quedan 13 combinaciones por estudiar:

- 5 binarias
- 6 ternarias
- 2 cuaternarias

No existe ninguna razón, para asegurar que entre ellas haya o no alguna que rellene el espacio.

#### 7.8. CONCLUSIONES

- EXISTEN COMBINACIONES CUATERNARIAS Y QUINARIAS (AL MENOS CUATRO) ENTRE LOS CINCO POLIEDROS CON CARAS ROMBO IGUALES Y DIAGONALES EN RELACION AUREA QUE PERMITEN RELLENAR EL ESPACIO; EN TANTO QUE, CON LOS POLIEDROS REGULARES Y SEMIRREGULARES, SOLO SE PUEDEN CONSEGUIR COMO MAXIMO, COMBINACIONES TERNARIAS (QUE EN TOTAL SON OCHO)
  
- EXISTEN AL MENOS ONCE COMBINACIONES (UNITARIAS, BINARIAS Y TERNARIAS) DE POLIEDROS CON CARAS ROMBO IGUALES Y DIAGONALES EN RELACION AUREA QUE RELLENAN EL ESPACIO.



CAPITULO VIII

## CAPITULO VIII

### RESUMEN DE CONCLUSIONES Y NUEVAS LINEAS DE INVESTI- GACION

#### 8.1.- CONCLUSIONES

Reunimos a continuación las conclusiones citadas al final de cada Capítulo. Las de los capítulos II al VII, ambos inclusive, son el resultado de la investigación desarrollada en la presente Tesis Doctoral.

#### CAPITULO I

- Solamente existen cinco poliedros topológicamente diferentes que equiparten el espacio.
- Son posibles cuatro combinaciones binarias de poliedros que rellenen el espacio y en el que todos los sólidos permanezcan igualmente orientados.
- Hay ocho combinaciones ternarias de poliedros regulares y arquimedianos que permiten rellenar el espacio sin quedar igualmente orientados.

(Estado actual del conocimiento)

#### CAPITULO II

- Para definir un zonoedro equilátero procedente de una

estrella no singular formada por  $n$  segmentos iguales habrá que facilitar  $(2n-3)$  ángulos con la restricción de que seis cualesquiera de ellos no formen rombododecaedro; obteniéndose los  $\binom{n-2}{2}$  restantes por resolución de otros tantos rombododecaedros mediante la ecuación (2.31).

### CAPITULO III

- Son precisas nueve condiciones para definir la convexidad de un rombododecaedro. Estas nueve condiciones son las que se expresan en (3.2.23).
- Definidos los  $(2n-3)$  ángulos no relacionados entre sí de un zonoedro equilátero, pueden ser obtenidos los  $\binom{n-2}{2}$  restantes, tanto analíticamente como geométricamente.

### CAPITULO IV

- No todo rombododecaedro puede provenir del rombododecaedro equifacial por medio de una afinidad espacial, pero es posible pasar por medio de acortamientos y/o alargamientos de los segmentos de la estrella a un cuerpo de caras paralelogramos que tenga los mismos ángulos en las caras y que puede ser afín del rombododecaedro equifacial.

- PARTIENDO DE CINCO ROMBOS CUALESQUIERA DE IGUAL ARISTA, ES POSIBLE OBTENER MEDIANTE LA ECUACION (2.31), EL SEXTO ROMBO, CON EL QUE COMPLETAR LAS SEIS CARAS ROMBO DISTINTAS POSIBLES DE UN ROMBODODECAEDRO, CON EL QUE SIEMPRE PODREMOS EQUIPARTIR EL ESPACIO.
- TODO ROMBODODECAEDRO QUE CUMPLA UNA DE LAS CONDICIONES (4.21), ADEMAS DE EQUIPARTIR EL ESPACIO, LO RELLENARA, QUEDANDO DESIGUALMENTE ORIENTADO.
- DADO UN ELIPSOIDE CUALQUIERA (SEA O NO DE REVOLUCION) ES POSIBLE ENCONTRAR EL ROMBODODECAEDRO CIRCUNSCRITO QUE PERMITA SU EMPAQUETAMIENTO.
- DADO UN ELIPSOIDE CUYOS SEMIEJES CUMPLAN LAS CONDICIONES (4.46), ES POSIBLE ENCONTRAR UN ROMBODODECAEDRO CAPAZ DE PERMITIR SU EMPAQUETAMIENTO, TANTO - - IGUALMENTE ORIENTADOS, COMO DESIGUALMENTE DISPUESTOS.

## CAPITULO V

- Los rombododecaedros con dos tipos de cara rombo, se pueden reunir en 26 familias, siendo el resto no convexos, formas equivalentes a estas 26 o bien se pueden reducir a ellas.
- SOLAMENTE EXISTEN SIETE ROMBODODECAEDROS CON DOS TI-

POS DE CARA ROMBO, SIENDO UNA DE ELLAS CUADRADO.

- SOLAMENTE EXISTE UN ROMBOICOSAEDRO CON DOS TIPOS DE CARA ROMBO, SIENDO UNA DE ELLAS CUADRADO.
- NO EXISTEN TRIAKONTAEDROS CON DOS TIPOS DE CARA ROMBO, SIENDO UNA DE ELLAS CUADRADO.

#### CAPITULO VI

- SOLAMENTE EXISTEN DOS ROMBODODECAEDROS CON TODAS SUS CARAS ROMBO IGUALES.
- SOLAMENTE EXISTEN CINCO CUERPOS DE CARAS ROMBO IGUALES Y CUYAS DIAGONALES ESTEN EN RELACION AUREA.

#### CAPITULO VII

- EXISTEN COMBINACIONES CUATERNARIAS Y QUINARIAS (AL MENOS CUATRO) ENTRE LOS CINCO POLIEDROS CON CARAS ROMBO IGUALES Y DIAGONALES EN RELACION AUREA QUE PERMITEN RELLENAR EL ESPACIO; EN TANTO QUE, CON LOS POLIEDROS REGULARES Y SEMIREGULARES, SOLO SE PUEDEN CONSEGUIR COMO MAXIMO, COMBINACIONES TERNARIAS (QUE EN TOTAL SON OCHO).
- EXISTEN AL MENOS ONCE COMBINACIONES (UNITARIAS, BINARIAS Y TERNARIAS) DE POLIEDROS CON CARAS ROMBO IGUA-

LES Y DIAGONALES EN LA RELACION AUREA QUE RELLENAN EL ESPACIO.

## 8.2.- NUEVAS LINEAS DE INVESTIGACION

En el camino seguido para elaborar una investigación, siempre quedan metas por alcanzar, pero también permanecen inexplorados ramales que entroncan en esta vía o que parten de ella

Entre las líneas más interesantes de trabajo futuro que proponemos, destacamos las siguientes:

- Estudio exhaustivo sobre todos los posibles cuerpos con caras pentágonos (no regulares); profundizando en aquellos casos singulares o particulares y en las propiedades de éstos.
- Puesto que todo rombododecaedro equiparte el espacio estudiar la relación  $\text{área}/(\text{volumen})^{2/3}$ , con objeto de conseguir envolturas con menos material para un mismo contenido.

Esta misma cuestión la podemos enunciar de la siguiente manera: Dados cuatro rombos cualesquiera, - encontrar los dos restantes que permitan cerrar un rombododecaedro, tal que la relación  $\text{área}/(\text{volumen})^{2/3}$  sea la mínima de todos los posibles rombododecaedros -

que sean susceptibles de contener aquellas cuatro ca  
ras fijas.

- De las 22 familias de rombododecaedros con dos tipos de caras rombo que resultan de eliminar las cuatro - que tienen como caso particular el rombododecaedro - equifacial, estudiar el rombododecaedro perteneciente a cada una de las familias que hace mínima la relación  $\text{área}/(\text{volumen})^{2/3}$ .
- Encontrar el algoritmo que permita resolver de una forma total cuántas de las 31 combinaciones de poliedros con caras rombo iguales y diagonales en relación áurea rellenan el espacio.

## LIBROS Y TRABAJOS CONSULTADOS



LIBROS Y TRABAJOS CONSULTADOS

Para no hacer una referencia excesiva de la bibliografía relacionada con el tema de esta Tesis Doctoral, listamos solamente aquellos libros y trabajos que por una u otra razón tienen especial interés.

- Berry, L.G. y Mason, Brian: MINERALOGY. W.H. Freeman and Company LTD. San Francisco.
- Bilinski: ÜBER DIE RHOMBENISOEDER. Glasnik, 15 (1960), - pp. 251-263
- Coxeter, H.S.M.: REGULAR POLYTOPES. Dover Publication. - New York. 1973
- Coxeter, Longuet-Higgins y Miller: UNIFORM POLYHEDRA. Royal Society Publications. 1954.
- Critchlow, Keith: ORDER IN SPACE. Thames and Hudson. London. 1969.
- Cundy, H.M. y Rollet, A.P.: MATHEMATICAL MODELS. The Clarendon Press. Oxford. 1952.
- Fedorov, E.S.:ELEMENTE DER LEHRE VON DEN FIGUREN. Bulletin de la Societé Imperiale russe de mineralogie - de Saint Petersburg. 21 (1885)

- Fedorov, E.S.: THE NUMERICAL RELATION BETWEEN THE ZONES AND FACES OF A POLYHEDRON. Mineralogical Magazine, 18 (1919), pp. 99-100.
- Freudenthal, H. y Van der Waerden, B.L.: OVER EEN BEWERING VAN EUCLIDES. Simon Stevin, 25 (1947), pp. - 115-121.
- Gardner, Martin: UN EXTRAORDINARIO MOSAICO NO PERIODICO QUE ENRIQUECE LA TEORIA DEL TESELADO. Investigación y Ciencia. Marzo 1977, pp. 98-108.
- Garrido, Julio: SOBRE LA PARTICION DEL ESPACIO POR POLIEDROS NO EULERIANOS. Reuniones sobre geometría aplicada a la Arquitectura y a la Ingeniería Civil. 1974.
- Ghyka, Matila: EL NUMERO DE ORO. (Dos tomos). Editorial Poseidón. Buenos Aires. 1968
- Ghyka, Matila: THE GEOMETRY OF ART AND LIFE. Dover Publications INC. New York. 1977.
- Leoz, Rafael: REDES Y RITMOS ESPACIALES. Editorial Blume. Madrid. 1969.
- Lines, L.: SOLID GEOMETRY. Dover Publications INC. New York.

- Lyusternik, L.A.: CONVEX FIGURES AND POLYHEDRA. Dover Publications. New York. 1956.
- Phillips, F.C.: AN INTRODUCTION TO CRYSTALLOGRAPHY. Oliver Boyd. Edinburgh.
- Quince, Ricardo: "CUPULAS ESFERICAS MATERIALIZADAS POR MALLAS TRIANGULARES". "PROPIEDADES ELEMENTALES DE LOS POLIEDROS REGULARES". Reuniones sobre geometría aplicada a la Arquitectura y a la Ingeniería Civil. 1974.
- Rovida, Angelo Andes: GEOMETRICAL SOLIDS. London. 1975.
- Sáenz, Clemente: EL ARQUIMEDIANO N° 14. Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid. Tomo LIX, cuaderno 2°. 1965.
- Wenninger, Magnus J.: POLYHEDRON MODELS. Cambridge University Press. 1978.
- Williams, R.E.: HANDBOOK OF STRUCTURE. PART I: POLYHEDRA AND SPHERES. McDonnell Douglas. 1968.
- Zalgaller, Viktor: CONVEX POLYHEDRA WITH REGULAR FACES. Consultants Bureau. New York. 1969.

Lo que ayer a tus ojos se mostró como meta,  
hoy para tí son cadenas;  
la idea es sólo alimento  
de nuevas ideas, y el hambre  
de ellas, es insaciable

Emilio Berharm