

H. B  
846  
. G65  
1994

UNIVERSITAT DE BARCELONA  
FACULTAT DE CIÈNCIES ECONÒMIQUES

---

---

# MACRODINAMICA I SISTEMES DE SEGURETAT SOCIAL

---

---

---

Memòria presentada per  
**Josep González Calvet**  
per a obtenir el grau de  
Doctor en Ciències Econòmiques  
Barcelona 1994

## ***CAPITOL 2***

---

### ***La Dinàmica Demogràfica***



## 2.1 Introducció

En els models econòmics *standard* la població es considera exògena i només es té en compte de forma indirecta, com a determinant de l'oferta de mà d'obra. La seva influència sobre l'economia s'exerceix a través del mercat laboral, afectant el nivell de salaris i la distribució del producte.

Pels economistes clàssics, en canvi, la població era un element essencial per a explicar el comportament de l'economia en el llarg termini. De fet, l'estat estacionari sorgia com a solució d'equilibri entre la dinàmica de la població i les capacitats expansives del sistema econòmic.

Per Adam Smith, l'escassetat relativa de mà d'obra feia variar els salaris reals de forma que el nivell d'aquests estimulava o desestimulava la reproducció de la mà d'obra:

"La demanda de homes, al igual que la de otras mercancías, regula de una manera necesaria la producción de la especie, acelerándola cuando va lenta o frenándola cuando se aviva demasiado. Esta misma demanda es la que regula las condiciones de procreación en todos los países del mundo" (*Smith, 1776, pg.77*)

Aquesta escassetat relativa de força de treball depenia, en el seu sistema, de tres factors: a) l'anomenada "extensió del mercat", és a dir, el nivell d'activitat econòmica que, segons el grau de desenvolupament econòmic i el grau de funcionament de la concurrència era creixent a llarg termini; b) l'evolució del procés de "divisió del treball" que no era contínua i que tendia a reduir la mà d'obra requerida pel procés de producció; c) els moviments demogràfics que seguien amb el retard d'una generació l'evolució dels salaris reals i que, per tant,

dins d'una tendència expansiva derivada de la millora general del nivell de vida, podien presentar fluctuacions (*Smith, 1776*).

En el sistema d'Smith, l'expansió de la població era la causa d'un estat estacionari al qual l'economia arribaria en el molt llarg termini un cop esgotades totes les possibilitats del procés de divisió del treball, dins de l'entorn natural i institucional d'aquella societat. L'estat estacionari s'explicava perquè el creixement de la població portava a un increment de la demanda d'aliments, mentre que la producció zootècnica presentava rendiments decreixents. Per tant, a llarg termini, l'agricultura estrangulava el creixement econòmic del sistema.

A més dins d'aquest procés els aliments es feien cada cop més costosos perquè la productivitat del sector agropequari creixia més lentament que la del sector manufacturer. Aquesta evolució dels costos d'alimentació anava erosionant el marge de benefici fins que aquest era insuficient per a continuar el procés d'acumulació. En aquest punt, doncs, el sistema arribaria al màxim desenvolupament possible, s'estabilitzaria el nivell dels salaris i els beneficis serien els justos per a reposar el capital. Finalment, com a conseqüència, la població tendiria a estabilitzarse (*Sylos Labini, 1988*).

David Ricardo va fer seva la doctrina malthusiana de la població tot i que, per a ell, el primer factor limitant de l'expansió eren les rendes creixents dels terratinents. És fàcil, però, adonar-se que, en darrer terme, el creixement de les rendes és una conseqüència lògica de la pressió que una població en augment exerceix sobre una oferta limitada de terres conreables que, a més, presenta una fertilitat en el marge progressivament inferior -i, per tant, uns costos marginals en augment-. L'estat estacionari sorgeix del fet que l'explotació de terres menys productives permet augmentar les rendes a costa dels beneficis, amb la qual cosa s'acaba detenint el procés d'acumulació (*Ricardo, 1817*).

Però aquesta conclusió es pot generalitzar al cas en què no hi hagués terratinents. La principal diferència es trobaria en el fet que, en no haver-se de pagar rendes, augmentaria la intensitat dels conreus fins que la taxa de benefici s'igualés per a tothom al mateix nivell que el de la terra menys fèrtil, la qual cosa permetria ampliar molt més la producció. Però, de nou, a partir d'aquesta situació, qualsevol augment de la producció d'aliments faria disminuir el tipus

de benefici per sota del necessari per a la reposició del capital (*Pasinetti, 1960; Robinson i Fatwell, 1976*). Mentrestant, la població hauria anat creixent al ritme de la producció alimentària i, finalment, tendiria a estabilitzar-se per la impossibilitat d'ampliar la producció alimentària.

La principal diferència entre les anàlisis d'Smith i Ricardo rau en el fet que Ricardo fa seva la tesi malthusiana que la població tendeix a reproduir-se més ràpidament del que creix la producció d'aliments ja que la terra conreable presenta una fertilitat decreixent, la qual cosa donarà lloc a una pressió demogràfica que mantindrà els salaris en el nivell de subsistència, llevat de les oscil·lacions de conjuntura. En canvi, per a Smith els salaris reals són creixents a mesura que la divisió del treball fa que el "treball (directe) requerit" sigui més productiu. Allò important és que, per ambdós autors, el creixement de la població interacciona amb el sistema i condiona el procés de producció, distribució i acumulació. I més encara, Adam Smith diu explícitament que la dinàmica de la població ve regulada per les forces econòmiques a través del lligam de l'evolució del salari. Aquest salari, per tant, acaba operant com l'element regulador de la taxa neta de reproducció de la població.

Tot i així, cal destacar que els arguments d'Smith i Ricardo tenen limitacions molt importants: es refereixen només a posicions de molt llarg termini, no consideren per a res els efectes de l'estructura demogràfica i no contempen les immenses possibilitats dels canvis tècnics.

En l'anàlisi de la dinàmica del sistema capitalista, Karl Marx realitzà una sèrie d'agudes observacions demogràfiques. Segons Marx, el sistema capitalista tendeix a crear una sobrepoblació relativa -l'anomenat exèrcit industrial de reserva- que té, com a mínim, dos efectes importants: el primer, el de pressionar sobre l'oferta de mà d'obra de forma que els salaris tendeixen a ésser sempre el més baixos possible -un mínim de subsistència condicionat socialment i històrica-; el segon, el de tenir sempre a disposició un sobrant de treballadors utilitzables en els moments d'expansió excepcional. Tot i així, la mida limitada de la població total acaba sempre jugant un paper clau en el final dels períodes d'expansió, perquè a mesura que la diferència entre mà d'obra emprada i mà d'obra disponible per a treballar es redueix en termes relatius, els

salaris reals comencen a augmentar, els marges de benefici s'erosionen i l'acumulació s'atura.

Quant a la mida de la població total, a diferència de Malthus, Marx pensava que el creixement de la població no és autònom ni desbordant sinó que ve determinat per les condicions socials i tècniques de cada societat. A més, per a Marx, les forces productives -el canvi tècnic i l'acumulació- creixien més ràpidament que la població -i d'aquí la sobre població relativa i el sobrant de mà d'obra-, per la qual cosa la misèria de les classes inferiors era un problema de distribució del producte i no de reproducció excessiva de la mà d'obra. L'optimisme científista de Marx el portà a pensar fins gairebé al final de la seva vida que era possible una expansió enorme del nivell de vida material, amb una població en augment.

Aquestes idees dels clàssics han tingut molt poc ressò en l'anàlisi econòmica moderna, que només n'ha incorporat parcialment alguna. Per un costat, les teories heterodoxes del cicle econòmic han incorporat només el mecanisme marxista de la sobre població relativa com a determinant de l'evolució dels salaris i la distribució (*Kalecki, 1954; Goodwin, 1967; Kalecki, 1971*). Per altra banda, des de la teoria econòmica convencional, s'ha reprès alguna de les idees d'Smith i s'ha tractat d'explicar el comportament reproductor de la família (*Becker, 1960; Becker, 1981*) amb resultats que tot i ésser molt suggestius des del punt de vista teòric, no deixen d'ésser força discutibles (*Carrasco Bengoa, 1991*) i, per sobre de tot, tenen una escassa rellevància en el treball de l'anàlisi i la predicció demogràfica (*Hoyo Bernat i García Ferrer, 1988*).

L'oblit de la qüestió demogràfica en la literatura sobre dinàmica econòmica es pot justificar des de dos punts de vista. El primer, que si allò que es tracta d'esbrinar són els mecanismes econòmics que expliquen la trajectòria del sistema econòmic, aleshores els canvis demogràfics es poden considerar exògens. Des d'un altre punt de vista, la relació amb la població no s'aborda perquè no hi ha teories clarament acceptades i contrastades que vinculin economia i demografia. Tot i que, en els darrers deu anys, les publicacions sobre aquest tema han crescut molt ràpidament -per exemple, el *Journal of Population Economics* va començar a editar-se el 1988-, la seva significació pràctica segueix sent gairebé nul·la, ja que es tracta de treballs teòrics no



especificables empíricament (*Day, et al., 1989; Feichtinger i Sorger, 1989; Feichtinger i Dockner, 1990; Blanchet i Kessler, 1991*) llevat dels treballs sobre el mercat laboral (*Johnson i Zimmerman, 1993*) i d'algunes rares excepcions (*Lee i Lapkoff, 1988*).

En qualsevol cas, els demògrafs han identificat diversos fenòmens de covariació entre condicions econòmiques i comportament demogràfic, de forma que es poden establir una sèrie de proposicions genèriques que són d'acceptació general. Així, és sabut que hi ha factors econòmics molt importants per a explicar el canvi demogràfic del segle XX tals com la incorporació de la dona al mercat de treball i la instauració dels sistemes de protecció social. També s'accepta que les situacions d'expansió econòmica faciliten la independència econòmica dels joves i la convivència de les parelles. Anàlogament, en temps de recessió les parelles tendeixen a retrassar el tenir fills, tot i que l'edat de la mare acaba sent el factor determinant de la fecunditat. Finalment, també es sap que l'augment del nivell de vida va acompanyat de la reducció de la natalitat i del retard en l'edat en què es té el primer fill, així com també comporta que es redueixi la mortalitat i s'allargui l'esperança de vida. Però aquestes proposicions no permeten anar gaire més enllà (*Hoyo Bernat i García Ferrer, 1988*) ja que, des del punt de vista demogràfic, l'impacte dels factors socioculturals -religió, costums, educació obligatòria- i tècnics -sanitat, contracepció- segueix sent molt més important (*Keyfitz, 1985; Leguina, 1973*).

El fet que els factors econòmics semblin explicar només una petita part del comportament demogràfic recolça la posició de prendre la població com una variable exògena a l'hora de realitzar anàlisis econòmiques. Tot i així, cal recordar que la mà d'obra és un *input* del sistema econòmic i que, per altre costat, el conjunt de la població és, també, la destinatària de l'*output*. En conseqüència, tant la *quantia* com la *composició* de la població afecten de forma simultània el funcionament del sistema econòmic des de tres àmbits diferents: la producció, la distribució i la demanda final. D'aquí que la posició simplista de considerar una taxa  $n$  de creixement fix de la població -i, per tant, una població de composició estable- és una simplificació que, en molts de casos, no és acceptable (*Fair i Domínguez, 1991*), i menys encara si l'objecte d'estudi són els sistemes de pensions i de benestar social.



El model de Samuelson (*Samuelson, 1958*) vist al capítol primer permet il·lustrar la importància de la composició de la població fins i tot en contextos elementals. Així, en el seu model, una població estable simplificada no només determina la taxa de creixement econòmic i el tipus d'interès d'equilibri sinó que pot portar a sendes dinàmiques socialment ineficients. Per tant, és fàcil veure que un comportament demogràfic més complicat pot tenir uns efectes econòmics molt complexos.

— D'aquí que qualsevol anàlisi d'un sistema de Seguretat Social hagi d'incorporar algun tipus de representació de la dinàmica demogràfica. I si l'anàlisi vol referir-se als sistemes reals, aleshores *el supòsit de població estable només és vàlid com a referència teòrica o com distribució límit de condicions demogràfiques fixes*, però mai no servirà per a representar situacions d'importants canvis demogràfics com els de la segona meitat del s. XX. Aquest extrem és molt important perquè una gran part de la literatura teòrica -models de generacions successives- considera només poblacions estables per la senzilla raó que són formalment molt fàcils de tractar. Tampoc s'ha de caure en l'extrem oposat de gran part de la literatura empírica, que acaba reduint-se a simples projeccions sense un marc teòric on poder-les encaixar.

En els apartats següents es presenta un model demogràfic, més general que el de la població estable, i que es pot especificar directament en termes de les dades de les que es disposa. El model té una limitació important que convé ressaltar d'entrada: és un model que depèn exclusivament de factors demogràfics i, per tant, és exogen al sistema econòmic. La raó per la qual no s'introdueixen *feed-backs* des de l'economia a la població és bàsicament heurística: tot i que no hi ha cap problema d'especificació i es poden incorporar les equacions corresponents, pel moment no sembla que hi hagi cap teoria suficientment satisfactòria, des del punt de vista de la seva capacitat explicativa, com per a incloure-la

## 2.2 El model demogràfic en temps continu

La dinàmica d'una població a través del temps es pot formular d'una forma relativament simple a partir de les funcions de fecunditat i supervivència, partint d'una població inicial. La primera formulació completa d'aquest model fou realitzada pel demògraf Alfred J. Lotka el 1911. El model es referix només a la població femenina per consideracions d'ordre pràctic -la fecunditat femenina està fisiològicament molt més ben acotada i definida i, estadísticament, les dades són molt més fiables-, però és extensible al conjunt de la població (Samuelson, 1976).

En el moment inicial es té una població femenina amb una estructura d'edats determinada,  $P_0(a)$ . Els futurs naixements només podran provenir de la descendència que directament tinguin aquestes dones o de la que tingui la seva descendència femenina.

La probabilitat que una dona tingui una nena entre l'edat  $a$  i l'edat  $a + da$  és  $b(a)$ , la funció de fecunditat, que depèn de l'edat. Una altra forma de dir-ho és que entre l'edat  $a$  i l'edat  $a + da$  cada dona dona a llum  $b(a)$  nenes. Es considera que la fertilitat femenina té uns límits d'edat, de forma que l'edat mínima per a poder engendrar fills és  $\alpha$  i la màxima és  $\beta$ .

*Funció de fecunditat*

La probabilitat que una dona estigui viva a l'edat  $a$  es definirà per la funció de supervivència,  $l(a)$ , que també depèn de l'edat.

A partir d'aquestes dades es pot expressar el nombre de nenes que naixeran entre el moment  $t$  i el moment  $t + dt$ , com una funció  $B(t)$  que tindrà dos components: el nombre de nenes engendrada per la població inicial de dones i el nombre de nenes engendrades per las descendents de la població inicial.

El nombre de nenes engendrades entre  $t$  i  $t + dt$  per la població inicial serà (sempre que  $t$  sigui menor que  $\beta$  anys ja que, de no ser així, totes les dones de la població inicial haurien superat l'edat reproductiva):

$$G(t) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{l(a)}{l(a-t)} P_0(a-t) b(a) da \quad [2.1]$$

on el primer terme expressa la proporció de la població inicial que sobreviu als  $t$  anys que, en ser multiplicat per la població inicial d'edat  $a-t$  dona la població

inicial sobrevivent en edat de reproducció en el moment  $t$ . En multiplicar aquesta població per la taxa de fecunditat dóna el nombre de nenes que s'engendra per cada edat  $a$ , entre  $t$  i  $t+dt$ . Finalment, en integrar, s'obté el nombre total de nenes nascudes de la població inicial entre el moment  $t$  i el moment  $t+dt$ .

El nombre de naixements provinents de la descendència de la població inicial entre el moment  $t$  i  $t+dt$ , dependrà del nombre de nenes nascudes  $a$  anys abans que encara estiguin vives, és a dir, de  $B(t-a)l(a)$ , de forma que es podrà expressar com:

$$\int_{\alpha}^{\beta} B(t-a)l(a)b(a)da \quad [2.2]$$

Així, el nombre total de naixements en qualsevol moment  $t$  es podrà expressar com la suma de les expressions [2.1] i [2.2]:

$$B(t) = \int_{\alpha}^{\beta} B(t-a)l(a)b(a)da + G(t) \quad [2.3]$$

Finalment, quan  $t$  sigui més gran que  $\beta$ , aleshores  $G(t)$  es fa zero.

Aquesta equació determina totalment la trajectòria de la població femenina. Per extensió, coneixent la taxa de masculinitat dels naixements, la funció de supervivència masculina i la població masculina inicial s'obtidria la trajectòria pel conjunt de la població.

La solució de l'equació integral [2.3] es pot obtenir de diverses formes (*Keyfitz, 1968; Hoppensteadt, 1976; Impagliazzo, 1985*). Lotka ho resolgué provant directament funcions exponencials i mostrant que, per les propietats demogràfiques de les funcions, hi havia una exponencial dominant que donava la taxa de reproducció neta o taxa de renovació de la població. Però probablement, la forma més simple i elegant és mitjançant l'aplicació de transformades de Laplace, aprofitant que la part dreta de [2.3] és una convolució, és a dir, una integral de límits finits amb uns arguments a l'integrand,  $B(t-a)$  i  $\Phi(a) = l(a)b(a)$ , tals que la seva suma dóna  $t$ , que és una variable independent de la variable

d'integració,  $a$ . Prenent les transformades sobre [2.3], i representant amb un asterisc la transformada de cada funció es tindrà que  $B^*(r)$  és la transformada de  $B(t)$ :

$$B^*(r) = \int_0^{\infty} e^{-rt} B(t) dt \quad [2.4]$$

Pel teorema de la convolució, la transformada d'una convolució és el producte de les transformades. Per tant, anomenant  $G^*(r)$  a la transformada de  $G(t)$  i  $\Phi^*(r)$  a la de  $\Phi(a)$ , es tindrà que l'expressió [3] es converteix en:

$$B^*(r) = G^*(r) + B^*(r) \Phi^*(r) \quad [2.5]$$

que es pot resoldre molt fàcilment per la transformada  $B^*(r)$ :

$$B^*(r) = \frac{G^*(r)}{1 - \Phi^*(r)} \quad [2.6]$$

Si el costat dret de l'expressió [2.6] té transformada inversa, aleshores aquesta funció és la funció  $B(t)$  que s'està cercant, és a dir, la inversa de  $B^*(r)$ . Es pot demostrar que aquesta funció existeix i és única sempre que  $B^*(r)$  es pugui expandir en fraccions parcials i que la sèrie sigui absolutament convergent (*Keyfitz, 1968; Impagliazzo, 1985*), així que queda:

$$B^*(r) = \frac{Q_1}{r - r_1} + \frac{Q_2}{r - r_2} + \frac{Q_3}{r - r_3} + \dots \quad [2.7]$$

on les  $r_i$  són les arrels, en nombre finit o infinit, de l'equació característica que deriva de la funció de fecunditat neta,  $\Phi(a)$ :

$$\Phi^*(r) = \int_0^{\infty} e^{-ra} \Phi(a) da = 1 \quad [2.8]$$

Prenent la transformada inversa de [2.7] s'obté la funció que s'està cercant:

$$B(t) = G(t) + Q_1 e^{r_1 t} + Q_2 e^{r_2 t} + Q_3 e^{r_3 t} + \dots \quad [2.9]$$

on les  $r_i$  són les arrels de l'equació característica [2.8] i les  $Q_i$  són constants arbitràries, el valor de les quals ve donat per les expressions:

$$Q_i = \frac{\int_0^{\beta} e^{-r_i t} G(t) dt}{\int_0^{\beta} a e^{-r_i a} l(a) b(a) da}, \quad i=1,2,3 \dots \quad [2.10]$$

Degut a les propietats demogràfiques de les funcions emprades -totes les funcions demogràfiques són no negatives-, es compleixen totes les condicions necessàries i suficients per a permetre el desenvolupament en sèrie de [2.6] i que la sèrie [2.7] sigui absolutament convergent.

Quan a la trajectòria de la solució cal destacar que només una de les arrels  $r_i$  de l'equació [2.8] és real i totes les altres són arrels complexes conjugades que tenen una part real menor en valor absolut, ja que  $\Phi^*(r)$  és una funció monòtonament decreixent -la primera derivada de la funció és negativa- que pren el valor  $\infty$  per  $r = -\infty$  i pren el valor 0, per  $r = \infty$ . Per tant, la trajectòria de la solució està dominada per l'arrel real mentre que les arrels complexes determinen oscil·lacions decreixents a mesura que  $t$  augmenta. En el punt de creuament de  $\Phi^*(r)$  amb l'eix de les ordenades, la funció pren un valor que es coneix com la *taxa neta de reproducció* i que representa el potencial reproductiu de la població. A mesura que  $t$  creix, la població es va aproximant paulatinament a una població estable, ja que les funcions de fecunditat i supervivència són constants (Keyfitz, 1968; Hoppenstedt, 1976; Impagliazzo, 1985; Keyfitz, 1985).

El principal avantatge del model en temps continu és que permet expressar de forma exacta i molt sintètica el comportament de la població. Per un altre costat, l'ampliació del seus límits, introduint variacions depenents del temps en la fecunditat i en la supervivència o incloent fluxes migratoris, no presenta cap dificultat analítica, llevat que els càlculs són força més complicats. Així mateix el model permet derivar fàcilment expressions analítiques per als

efectes de canvis en alguna variable que afecti el comportament demogràfic o deduir proposicions demogràfiques de validesa general com, per exemple, l'existència d'una població estable o la taxa neta de reproducció.

Tot i així, aquests resultats s'obtenen precisament pel caràcter genèric de les funcions que s'empren en el model. Quan es tracta de fer-lo servir en la pràctica demogràfica, apareixen gran quantitat de dificultats, ja que si es vol assolir un mínim de precisió cal emprar funcions de supervivència i de fecunditat que poden ser molt complexes. Per una altra banda, les dades empíriques són discretes ja que van referides a períodes o intervals temporals, de forma que, per tal de poder emprar el model, cal interpolar funcions contínues que, normalment, no permeten ajustar ni els pics ni les discontinuïtats molt acusades o, si ho fan, sol ésser a costa d'emprar funcions més complicades i de perdre molta estabilitat numèrica. Amb tot això, la dificultat de solucionar analíticament una especificació empírica del model es fa, tot sovint, insuperable, i no queda més remei que emprar aproximacions de més o menys precisió o utilitzar tècniques d'anàlisi numèrica. En qualsevol cas, l'exactitud formal del model es perd ja que els resultats incorporen diversos errors d'aproximació i d'interpolació.

P, l'elena  
dades és  
discretes  
interval  
no precis  
hòme representa  
caràcter  
numèric

## 2.3 Altres models demogràfics alternatius

De forma alternativa es poden emprar altres models. El més conegut és el model matricial de Leslie (*Keyfitz, 1968; Impagliazzo, 1985; Keyfitz, 1985*) on partint d'un vector inicial de la població, agrupada per intervals d'edat, i d'una matriu que inclou en la primera fila la fecunditat per intervals d'edat i, en la diagonal, la supervivència -la matriu de projecció-, s'obté, multiplicant, el vector de població per al període següent i, repetint el procés de forma iterativa, dona la població per intervals d'edat per qualsevol període futur.

LESLIE

Puix que la matriu de projecció és no negativa i és irreduïble (*Impagliazzo, 1985*), tindrà un autovalor o valor propi dominant que serà una

arrel real positiva de la seva equació característica. Per altre costat, degut a la forma de la matriu, l'equació característica tindrà tots els coeficients negatius excepte el corresponent al terme d'ordre més elevat, per la qual cosa, només hi haurà una arrel real positiva de mòdul més gran que totes les altres. L'equació té una forma similar a [2.8] i la trajectòria de la població tendirà cap a una població estable regida per l'arrel dominant a mesura que vagi augmentant el temps de projecció. Si els intervals d'edat sobre els quals es construeix la matriu es van fent més i més petits, el model matricial es va aproximant al continu, de forma que es pot establir la seva equivalència asimptòtica (*Keyfitz, 1968; Samuelson, 1976; Keyfitz, 1985*).

Lotka i Cole presentaren un model alternatiu formulat com un conjunt d'equacions en diferències finites de forma que la població per cada grup d'edat i període no és més que els sobrevivents del grup d'edat precedent en el període anterior. Els naixements de cada període s'expressen com la suma del nombre de persones de cada interval d'edat pel nombre de fills per persona i interval d'edat. Aquest conjunt d'equacions es pot expressar de forma matricial i, aleshores el model és formalment idèntic al de Leslie (*Samuelson, 1976; Impagliazzo, 1985*) i, per tant, en el límit equival al model continu.

Degut a l'equivalència asimptòtica entre els models discrets i els continus, es pot obtenir el mateix tipus de proposicions teòriques, tot i que tot el treball analític és més laboriós i la notació no és tan sintètica. Però, en canvi, els models discrets presenten l'avantatge d'ésser calculables per simple iteració, sense necessitat de cercar solucions analítiques i, a més, són totalment compatibles amb les dades empíriques, sense haver de realitzar cap mena d'ajust de funcions.

Aquest avantatge de càlcul és, d'altra banda, una font d'error ja que s'aproxima el moviment continu de la població per un procés en diferències finites. L'error que es comet en aproximar una funció exponencial mitjançant una diferència finita de primer ordre -el mètode d'Euler-, es caracteritza perquè és acumulatiu però, al mateix temps, la seva magnitud absoluta i relativa disminueix a mesura que es redueix la diferència o interval de càlcul -si l'error inicial és  $\varepsilon$  i es redueix l'interval de càlcul a  $1/\tau$ , aleshores el nou error  $\varepsilon'$  és menor que  $\varepsilon/\tau$ -, i es fa més petit l'exponent -el mòdul de les arrels de l'equació



característica- (*Gerald i Wheatley, .*). Per a poblacions humanes el grau d'error és petit. A títol d'exemple, emprant intervals de 5 anys i amb taxes altes de fecunditat, l'error en l'arrel real pot ser del 6 per 10000, que en projeccions a 100 anys, representa entorn l'1% d'error, i a 1000 anys, l'error acumulat podria arribar a ser d'entorn al 12 % (*Keyfitz i Flieger, 1971; Keyfitz, 1985*). Però, si l'interval de càlcul és redueix a un any, l'error acumulat, inclús amb alta fecunditat, disminueix a una fracció despreciable.

Aquest error és molt inferior al que es comet si en el treball pràctic es vol emprar el model continu. En interpolar funcions contínues a la població inicial, agrupada per intervals d'edat, es cometen errors de l'ordre d'un 5%, amb polinomis de grau 15 a 20. Àdhuc emprant funcions més complexes o de grau molt més elevat, difícilment baixarà d'un 2%. I a tot això s'ha d'afegir que amb funcions tan complexes normalment no hi ha solució analítica i aleshores cal aproximar la solució o emprar tècniques d'anàlisi numèrica que introdueixen errors addicionals. Per tant, la precisió global del model continu per a la projecció de la població per grups d'edat sol ésser pitjor i el càlcul és, en general, molt més llarg.

Finalment, cal destacar que el model discret permet ser tan precís com ho sigui la recollida de dades, de forma que pot reflectir les discontinuïtats observades o, si es disposa d'informació trimestral o mensual es pot formular el model en períodes més curts i, per tant, augmentar encara més la seva precisió. D'altra banda, des del punt de vista pràctic, és molt més senzill fer simulacions que incorporin especificacions flexibles de les variables demogràfiques, fluxos migratoris o, fins i tot, distribucions de probabilitat.

Per tant, hi ha prou raons d'ordre pràctic per a decantar-se per l'ús d'estructures discretes a l'hora de construir un model demogràfic per a realitzar projeccions.

## 2.4 Un model demogràfic en temps discret

En el model en diferències finites que es presenta a continuació s'adopta com a duració de l'interval temporal una unitat de temps que correspondria a un any per la simple raó que les dades demogràfiques de què es disposa estan referides a períodes anuals. El model es planteja pel conjunt de la població però es mantenen separats els dos sexes en tot moment. La separació de sexes és convenient perquè les dades sobre fecunditat femenina són molt més exactes i perquè l'edat reproductora en la dona està biològicament ben delimitada. A més, s'ha de considerar el fet que el potencial reproductiu màxim d'una població humana vé determinat per la població femenina ja que un grup reduït d'homes seria suficient per a la reproducció. En conseqüència, des del punt de vista demogràfic, la variable més determinant és el nombre de dones en edat reproductora.

Com abans, es parteix d'una població inicial  $P_0$  de la qual es coneix la seva distribució per intervals d'edat i sexe,

$$P_0 = \sum_0^{\infty} P_0^a = \sum_0^{\infty} D_0^a + \sum_0^{\infty} H_0^a \quad [2.11]$$

on el subíndex expressa el moment del temps al qual estan referides les variables, el sobreíndex es refereix als diferents grups d'edat, D són les dones i H els homes. El límit de la suma es pren com infinit tot i que, a efectes pràctics i en rigor es pot fixar una cota màxima de la vida humana,  $\omega$ . De forma anàloga, la fecunditat vindrà donada per la funció  $b(a)$ , només referida a les dones i que pot consistir en un conjunt de valors discrets. La proporció de dones en els naixements vindrà donada per  $0 < d < 1$  que es considera fix. Mitjançant aquesta convenció s'evita el tenir un doble conjunt de variables independents i tots els problemes que porta associats (*Samuelson, 1976*). Les edats mínima i màxima de procreació per a les dones són, respectivament,  $\alpha$  i  $\beta$ . La supervivència vindrà donada per cada sexe per les funcions  $\{l_D(a), l_H(a)\}$ , que també poden ser un conjunt de valors discrets. Totes aquestes funcions i paràmetres podrien especificar-se de forma que experimentin variació en el

temps -i així es fa en les projeccions- o, fins i tot, que incorporessin distribucions de probabilitat.

D'acord amb això, el nombre de naixements  $B_t$  en cada període serà la descendència provinent de la població inicial més la que prové de les generacions posteriors, de forma similar a com s'havia fet pel model continu. Per tant, sempre que  $\alpha < t < \beta$ , es tindrà:

$$B_t = \sum_{\alpha}^{\beta} dB_{t-a} b(a) Y(a) + \sum_t^{\beta} D_0^{a-t} b(a) \frac{l_D(a)}{l_D(a-t)} \quad [2.12]$$

El primer terme de l'equació [2.12] expressa el nombre de naixements provinents de les dones nascudes fa  $a$  anys, mentre que el segon terme recull la descendència directa de la població femenina inicial que encara està en edat reproductora,  $G(t)$ . És fàcil veure que aquesta expressió és la mateixa que l'equació [2.3] del model continu, però en termes discrets. En forma més sintètica, l'equació de naixements es pot escriure referint-la només al nombre de dones en edat reproductora en qualsevol moment del temps:

$$B_t = \sum_{\alpha}^{\beta} D_{t-a}^0 b(a) Y_D(a) + G(t) = \sum_{\alpha}^{\beta} D_t^a b(a) \quad [2.13]$$

és a dir, la suma del nombre de dones de cada grup d'edat entre  $\alpha$  i  $\beta$  multiplicat per la seva fecunditat específica. Finalment, si es separen els nounats per sexes, anomenant  $d$  a la proporció de dones entre els nounats, queda:

$$B_t = P_t^0 = D_t^0 + H_t^0 = \sum_{\alpha}^{\beta} D_t^a b(a) = d \sum_{\alpha}^{\beta} D_t^a b(a) + (1-d) \sum_{\alpha}^{\beta} D_t^a b(a) \quad [2.14]$$

Per tant, la dinàmica de la població per edats i sexes queda recollida per les equacions dels naixements més les que expressen l'evolució de cada grup d'edat com el conjunt dels supervivents del grup d'edat precedent en el període anterior:

$$D_t^0 = dB_t = d \sum_{\alpha}^{\beta} D_{t-\alpha}^0 b(\alpha) l_D(\alpha), \forall t > \beta \quad [2.15a]$$

$$D_t^a = D_{t-1}^{a-1} l_D(a-1), \forall a \geq 1 \quad [2.15b]$$

$$H_t^0 = (1-d) \sum_{\alpha}^{\beta} D_{t-\alpha}^0 b(\alpha) l_D(\alpha), \forall t > \beta \quad [2.16a]$$

$$H_t^a = H_{t-1}^{a-1} l_H(a-1), \forall a \geq 1 \quad [2.16b]$$

Les expressions [2.15] i [2.16] recullen el moviment complet del conjunt de la població per sexes i per tots els grups d'edat. Tot i així, l'equació que regeix el moviment del sistema és la de la descendència femenina [2.15 a], que és una equació en diferències finites, homogènia, de coeficients constants i d'ordre  $\beta$ . En el cas que  $t < \beta$ , s'hauria d'afegir el terme  $G(t)$  a l'expressió anterior la qual, en estar formulada en termes de les condicions inicials, és directament calculable. L'equació característica de l'expressió [2.15 a] s'obté d'immediat en substituir  $D_{t-k}$  per  $r^k$  i igualar a zero.

$$r^{\beta} - \Phi(\alpha)r^{\beta-\alpha} - \Phi(\alpha+1)r^{\beta-\alpha-1} - \Phi(\alpha+2)r^{\beta-\alpha-2} \dots - \Phi(\beta) = 0 \quad [2.17]$$

Puix que l'edat mínima per procrear és  $\alpha$ , tot i que l'ordre del polinomi és  $\beta$ , tots els termes d'ordre més gran que  $\beta-\alpha$  i menors que  $\beta$  seran nuls. Els coeficients són els mateixos que els de l'equació original, és a dir, que es tindrà  $\Phi(a) = dl(a)b(a) > 0$ . En conseqüència, el polinomi només presenta un canvi de signe i un sol coeficient positiu, per la qual cosa, d'acord amb la regla dels signes de Descartes només hi haurà una arrel real positiva i, a més, pel caràcter real dels  $\Phi(a)$ , si hi ha arrels complexes, apareixeran en parells conjugats.

Degut als valors que prenen els coeficients  $\Phi(a)$  i als valors de  $\alpha \approx 15$  i  $\beta \approx 50$ , normalment hi haurà una altra arrel real negativa quan  $\beta$  sigui parell o, si  $\beta$  és senar, totes les altres seran complexes. En qualsevol cas es pot demostrar que el mòdul de l'arrel positiva és més gran que el de qualsevol altre arrel o bé, reformulant l'equació [2.15 a] en termes d'un sistema simultani de primer ordre, es pot provar que la matriu del sistema és no negativa i irreduïble (*Impagliazzo*,

1985), per la qual cosa, pels teoremes de Perron-Frobenius tindrà un valor propi dominant real que serà l'única arrel positiva de l'equació característica del sistema. Finalment, com que les condicions inicials són números reals, la solució ha de ser real i, en conseqüència, no contindrà part imaginària.

La solució de l'equació tindrà la forma d'una suma de funcions exponencials:

$$D_t^0 = a_1 r_1^t + \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^{\rho_i} a_{ij} t^{j-1} r_i^t \quad [2.18]$$

on  $a_i$  i  $a_{ij}$  són constants que es calculen a partir de les dades inicials per grups d'edat,  $n$  és el nombre d'arrels diferents,  $\rho_j$  el nombre d'arrels idèntiques a  $r_j$  o multiplicitat de  $r_j$ , el primer terme recull la dinàmica originada per l'única arrel real positiva i el segon la dinàmica provinent de les arrels complexes i/o negatives.

Per les característiques de les arrels, la trajectòria de la solució estarà regida per  $r_1$  i experimentarà oscil·lacions, regides per les altres  $r_i$ , que aniran disminuint a mesura que augmenti el temps de projecció.

Coneixent  $D_t^0$  s'obté d'immediat  $H_t^0$  per simple substitució en l'equació [2.16 a] i, per les expressions [2.15 b], [2.16 b] es va obtenint per simple iteració la trajectòria dels altres grups de la població, per edat i sexe.

L'especificació empírica per a la simulació de la població s'ha realitzat en termes del sistema d'equacions en diferències finites [2.15] i [2.16] tot i que, de fet, les rutines informàtiques s'han programat emprant els instruments de l'àlgebra matricial. En concret, la matriu de projecció i els vectors de composició de la població poden expressar-se de la següent forma:

$$\begin{bmatrix} D_t^0 \\ \vdots \\ D_t^\alpha \\ \vdots \\ D_t^\beta \\ \vdots \\ \frac{D_t^\omega}{H_t^0} \\ \vdots \\ H_t^\omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & d\Phi(\alpha) & \dots & d\Phi(\beta) & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ l_D(1) & & & & & & & & & \vdots & & & \vdots \\ & l_D(2) & & & & & & & & \vdots & & & \vdots \\ & & \ddots & & & & & & & \vdots & & & \vdots \\ & & & l_D(\alpha) & & & & & & \vdots & & & \vdots \\ & & & & \ddots & & & & & \vdots & & & \vdots \\ & & & & & l_D(\beta) & & & & \vdots & & & \vdots \\ & & & & & & \ddots & & & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & l_D(\omega-1) & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & (1-d)\Phi(\alpha) & \dots & (1-d)\Phi(\beta) & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & & & & l_H(1) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & & & & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & l_H(\omega-1) & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} D_{t-1}^0 \\ \vdots \\ D_{t-1}^{\alpha-1} \\ \vdots \\ D_{t-1}^{\beta-1} \\ \vdots \\ \frac{D_{t-1}^\omega}{H_{t-1}^0} \\ \vdots \\ H_{t-1}^\omega \end{bmatrix}$$

[2.19]

En l'expressió anterior,  $\omega$  és l'edat límit de vida i, les  $\Phi(a)$ , les funcions de fecunditat neta, és a dir,  $b(a)l_D(a)$ . La partició separa les submatrius corresponents als homes i a les dones. Altrament, està clar que la matriu de projecció és no negativa, ja que tots els elements són nuls o positius i que la submatriu formada per les  $\beta$  primeres files i columnes és una matriu irreduïble i regeix la dinàmica del sistema.

### 2.5 Projecció de la fecunditat

En l'exposició anterior, els coeficients  $l_D, l_H$  i  $\Phi(a) = b(a)l_D(a)$  que recullen la informació sobre supervivència i fecunditat per edats s'han suposat fixes a fi i efecte de mostrar les propietats formals del model discret. Si aquests valors van variant amb el temps també aniran variant els valors de les arrels característiques i, per tant, la trajectòria dinàmica de la població s'anirà ajustant constantment a les noves condicions. Tot i així, la major part de les propietats del model es mantindran, ja que deriven de les característiques formals de qualsevol relació demogràfica. L'estudi d'aquests canvis té molt d'interès des de la perspectiva pràctica ja que permet avaluar els efectes de diferents comportaments demogràfics.

En l'especificació empírica és possible introduir modificacions en el valor dels paràmetres a mesura que va variant el temps, d'acord amb hipòtesis

prèviament establertes. Amb aquest objectiu, es modifica la rutina de càlcul de forma que abans de realitzar cada iteració avaluï primer els nous valors dels coeficients. Novament, amb aquest sistema es torna a emprar la tècnica d'aproximar un comportament continu -els canvis de comportament demogràfics- mitjançant instruments discrets però, tal com hem vist anteriorment, els errors que es cometien són d'un ordre despreciable ja que els canvis en la mortalitat o en la fecunditat són suaus i lents -dins l'escala temporal de validesa d'un model de projecció-.

La fecunditat femenina ha experimentat tres menes de canvis durant les darreres dues dècades. Per un costat hi ha hagut una important disminució en valors absoluts del nombre de fills per dona a cada edat. Per un altre, a grans trets, s'ha donat un endarreriment progressiu de l'edat a la qual la dona té el primer fill i de l'edat modal. Finalment, hi ha hagut un canvi en la distribució dels naixements per edat de la mare, tendint a concentrar-se cada cop més en l'interval central d'edats, entre els 25 i 35 anys.

A la figura que segueix es representa la fecunditat femenina a Catalunya pels anys 1975, 1986 i 1991 [Figura 2.1]. Així mateix també es representa la fecunditat femenina pel conjunt d'Espanya pels anys 1975, 1986 i 1990, per grups d'edat de 5 anys [Figura 2.2] i que mostra un patró molt similar en la distribució.

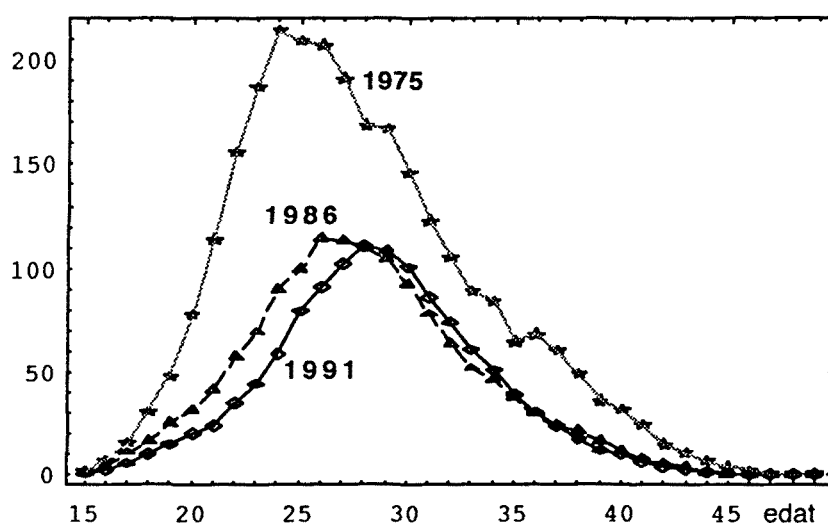


Figura 2.1: Fecunditat per 1000 dones segons l'edat. Catalunya



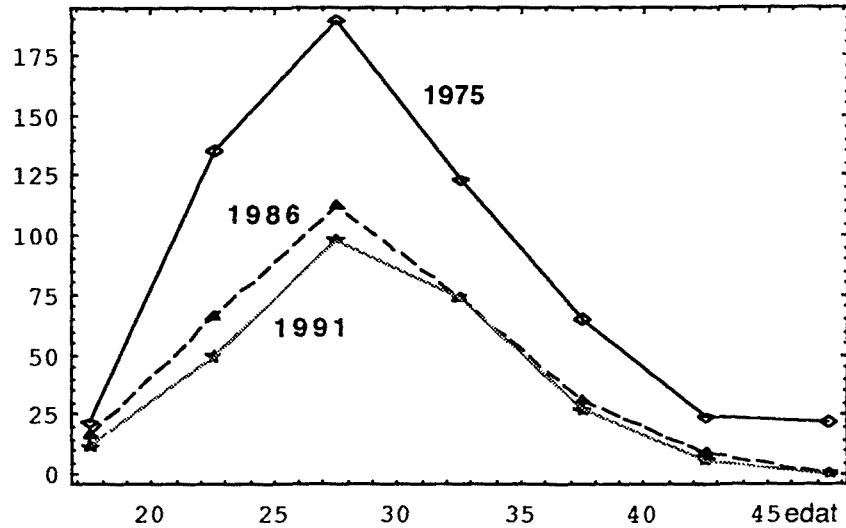


Figura 2.2: Fecunditat per 1000 dones segons l'edat. Espanya.

A partir de l'evolució observada és de preveure que en el futur immediat seguirà augmentant l'edat en la qual es té el primer fill i també l'edat modal tot i que, per raons biològiques, aquest canvi ja no pot anar molt més enllà.

Per tal de poder expressar els canvis en la fecunditat segons els patrons observats i previsibles, s'ha procedit a l'ajust de diferents funcions a les dades<sup>1</sup> i d'entre les diferents especificacions satisfactòries s'ha triat aquella que, mantenint un bon ajust a les observacions, fos susceptible d'ésser formulada en termes que permetessin expressar aquestes variacions.

A títol de curiositat val a dir que per cada conjunt de dades s'hi ajusta molt bé alguna de les funcions de densitat clàssiques. Així, les dades de 1975 queden molt ben ajustades per una funció de Valor Extrem, amb un  $|R^2|$  de 0.991. Les dades de 1986 s'ajusten amb una LogNormal, amb un  $|R^2|$  de 0.992. Finalment, les dades per a 1991 s'ajusten molt bé a una Logística, amb  $|R^2|$  de 0.996 o amb una Normal, amb  $|R^2|$  de 0.993. Observi's però, que es tracta de quatre distribucions força diferents entre si i que, per tant, no serveixen al propòsit abans enunciat de permetre un desplaçament important del centre de la distribució des d'un extrem a l'altre.

<sup>1</sup>Els ajustos s'han efectuat sobre les dades de Catalunya puix que no es disposava encara de les dades calculades sobre el cens de 1991 pel conjunt d'Espanya i per intervals d'edat d'un any. A efectes pràctics no hi ha gairebé diferència en la forma de les corbes, excepció feta de la quantia que, a Catalunya, està per sota del promig de l'Estat espanyol. Per altre banda, el que aquí es vol exposar és el mètode de projecció emprat.

L'opció adoptada ha consistit en cercar per tempteig una formulació que complís les següents tres propietats. En primer lloc, que donés un bon ajust a les dades observades des de 1975. En segon lloc, que fos possible modificar-la a conveniència mitjançant funcions dependents del temps. Finalment, que tingués prou estabilitat numèrica com per ser projectada cap el futur per períodes llargs.

Després de diverses proves, la relació que s'ha triat és una modificació del pic logístic on es fan variar els paràmetres fixes:

$$b(a,t) = \alpha(t) \frac{f(a,t)}{(1 + f(a,t))^{\beta(t)}} \quad [2.20]$$

En el pic logístic l'exponent del denominador,  $\beta(t)$  val 2. En canvi aquí s'ha convertit en un paràmetre que depèn del temps i que serveix per a desplaçar el centre de la distribució cap un extrem o l'altre de la funció de densitat. De forma anàloga, el paràmetre d'escala  $\alpha(t)$  aquí s'ha fet variable per tal de recollir els canvis en la quantia total de la fecunditat. Per últim, la funció  $f(a,t)$  també varia amb el temps per tal d'equilibrar, juntament amb els altres paràmetres, els canvis que es produeixen en la distribució.

La funció  $f(a,t)$  és la següent:

$$f(a,t) = e^{-(a-\mu(t)) \sigma(t)} \quad [2.21]$$

on  $\mu(t)$  és el paràmetre que fixa el centre de la distribució i  $\sigma(t)$  és un paràmetre de dispersió. En els dos casos s'ha procedit a fer-los variables en el temps. En la corba logística, aquests paràmetres corresponen a la mitja i a l'error standard.

L'ajust dels paràmetres d'aquesta funció pseudològica s'ha efectuat en dos intervals. Per al primer interval, que agafa el període mostral 1975-1991, s'ha ajustat la corba sobre cada conjunt de dades i, després, s'ha interpolat una funció dependent del temps entre els valors estimats per cada paràmetre en cadascun dels tres anys. Si bé els valors estimats per cada any tenen una significació molt alta, és molt probable que els coeficients de les funcions interpolades no superin els tests estadístics, ja que s'han triat de forma

arbitrària entre les moltes possibles per tal d'obtenir una funció de fecunditat de comportament suau entre els tres períodes mostrals.

Pel segon interval, que abarca tot el període de projecció, s'ha agafat la corba ajustada pel 1991 com a punt de partida i s'han reconstruït les funcions que regulen els paràmetres de la corba per tal d'adequar-les a les diferents hipòtesis d'evolució.

Aquest procedir és poc ortodox, però convé recordar que l'única finalitat d'aquesta funció de fecunditat és, només, la de fer projeccions hipotètiques però no la de fer prediccions o anàlisi demogràfiques ja que, en aquest cas, l'estratègia d'aproximació a l'estimació de la fecunditat i de la seva evolució és completament diferent (*Keyfitz i Flieger, 1971; Leguina, 1973; Keyfitz, 1985; Hacienda, 1986*) i queda fora de l'abast d'aquest treball.

A la Taula 2.1 s'indiquen les especificacions dels paràmetres de la pseudo-logística ajustada a les dades i el coeficient de determinació d'aquesta corba per cada any,  $|R^2|$ . A les Figures 2.3, 2.4, 2.5 s'il.lustren aquests ajustos.

$\alpha(t) = 5589.75 e^{-0.4135 t^{309.500}}$	$\beta(t) = 10 e^{-0.0803977 t^{83.80}}$
$\mu(t) = 15.5 + 0.095902 t^{2703/3000}$	$\alpha(t) = 4.4 e^{-0.01246965 t^{24321/20000}}$
$ R^2  (1975) = 0.9805$	$ R^2  (1986) = 0.9911$
$ R^2  (1991) = 0.9953$	

Taula 2.1: Ajust d'una pseudo-logística a la fecunditat

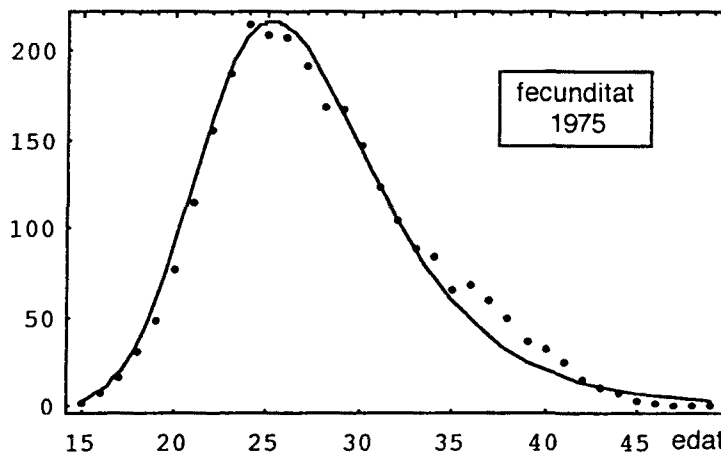
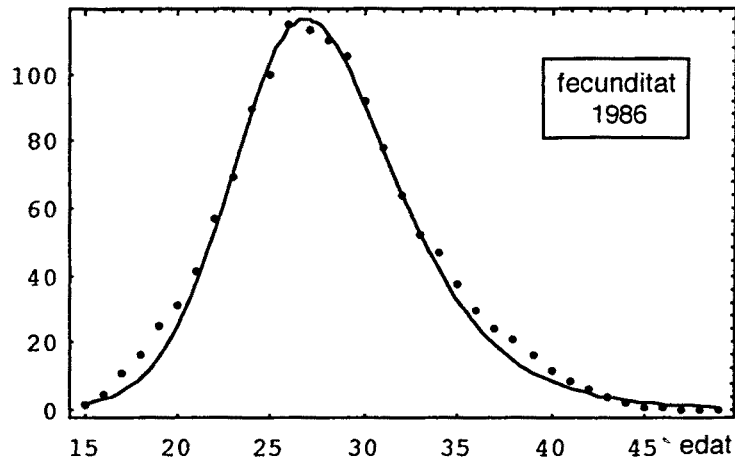
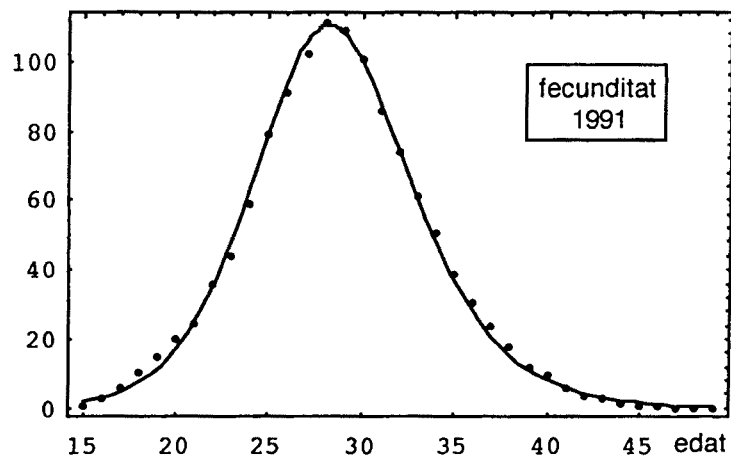


Figura 2.3 : Fecunditat per 1000 dones segons l'edat. Catalunya, 1975



**Figura 2.4:** Fecunditat per 1000 dones segons l'edat. Catalunya, 1986.



**Figura 2.5:** Fecunditat per 1000 dones segons l'edat. Catalunya, 1991.

En la Taula 2.2 s'indiquen les especificacions de les funcions per a les diferents hipòtesis de projecció. Per a gairebé tots els coeficients s'ha emprat una logística per tal que el període de transició i els valors límit siguin fàcilment ajustables.

$$\alpha(t) = 420.339 + (350.633\alpha - 420.339) / (1 + e^{-\varphi(t-21)})$$

( $\alpha$  són els fills per dona.  $\varphi$  regula el temps de transició:  $\varphi = 0.6$  són uns 10 anys)

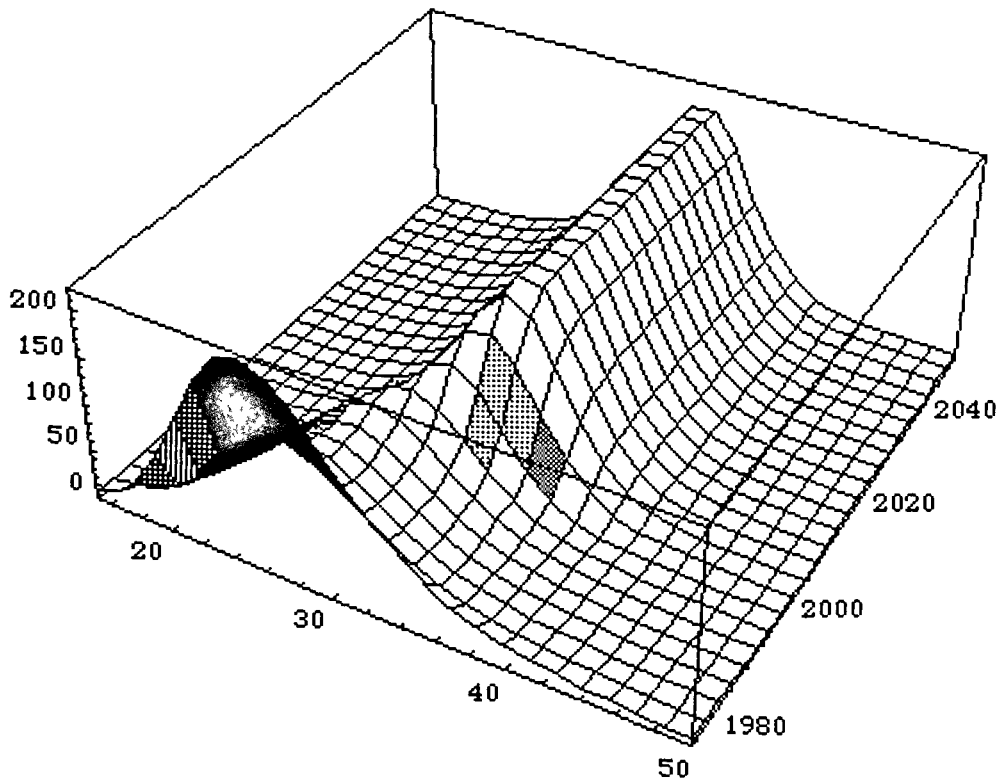
$$\beta(t) = \text{Màx} [1.7, 10 e^{-0.1352336 t^{17/80}}]$$

$$\mu(t) = 17 + (\mu - 17) / (1 + e^{-0.25(t-14.8)}) \quad (\mu \text{ és l'edat modal limit en anys})$$

$$\alpha(t) = 4.4 e^{-0.000354677 t^{5/2}}$$

**Taula 2.2:** Valors dels coeficients per a la projecció

Finalment, la Figura 2.6 il.lustra el comportament de la funció de fecunditat en el temps sota la hipòtesi que la fecunditat retornarà a 1.8 fills per dona, amb un període de transició de 15 anys a comptar des de 1991, i que l'edat modal s'anirà aproximant al límit de 34 anys, en un període similar. Aquestes hipòtesis es poden reformular només canviant el valor del coeficient que correspongui i, per tant, no tenen major transcendència.



**Figura 2.6 :** Projecció de la fecunditat per edat de la mare, amb la hipòtesi de 1.8 fills / dona i edat modal de 34 anys.

## 2.6 Projecció de la mortalitat

L'esperança de vida a Espanya ha experimentat un augment substancial en els darrers 30 anys, passant dels quasi bé 70 anys de 1960 als 78 de 1991. Aquest allargament de l'esperança de vida vé produït per la disminució de la mortalitat a totes les edats. En termes relatius, les reduccions més importants s'han donat a les edats més joves encara que, des del punt de vista de reducció en nombre absolut, els avenços més importants s'han donat a les edats més avançades. Cal destacar que, en la major part de països industrialitzats, aquest fenomen ja s'havia adelantat entre deu i vint anys i que, per tant, és ben conegut.

Es de preveure que aquesta reducció proseguirà en el futur i que, per tant, seguirà canviant l'estructura per edats de la població. En conseqüència, per tal de poder realitzar projeccions raonables, també és convenient que el model demogràfic incorpori patrons de mortalitat canviant. El problema és, aquí, que no hi ha distribucions simples que s'ajustin molt bé als comportaments reals i que, per tant, es puguin especificar fàcilment per diferents hipòtesis de projecció.

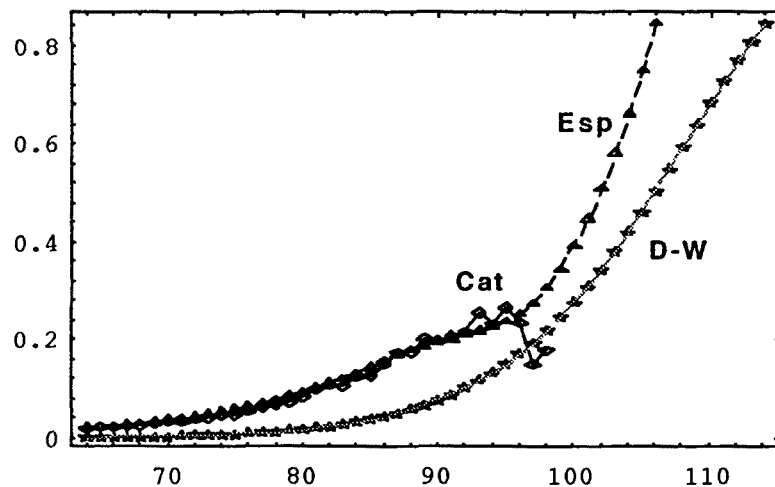
L'estratègia habitual enfront d'aquest problema és el de projectar les taxes de mortalitat per a intervals d'edat, bé per extrapolació de la taxa de variació, bé mitjançant indicadors sintètics que es poden deduir de la matriu de projecció (*Pollard, 1987; Keyfitz, 1985; Lee i Carter, 1992*).

Des del punt de vista de la realització de projeccions del conjunt de la població, l'ús d'aquestes tècniques obliga a realitzar molts més càlculs sense que, en definitiva, les poblacions projectades finals siguin molt diferents del que s'obtindria emprant altres instruments més senzills (*Keyfitz, 1981*). L'opció que s'adopta en aquest treball és d'un tipus intermedi que, salvant tot el possible l'economia de càlcul, pugui recollir de forma acceptable la disminució de la mortalitat en tots els intervals d'edat.

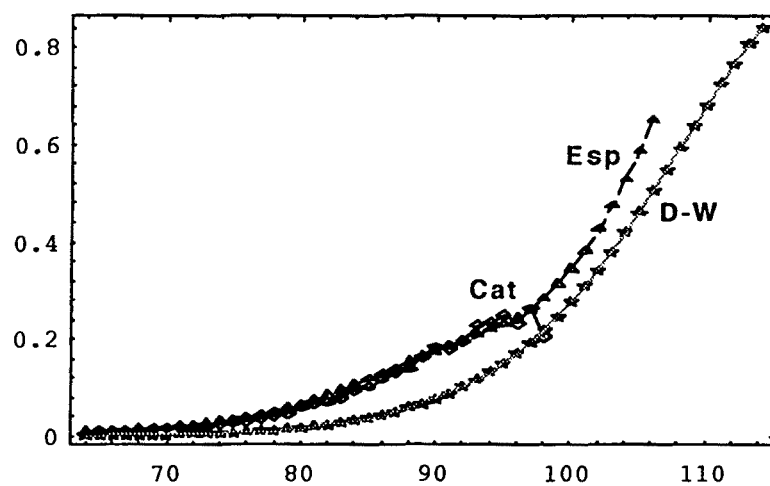
Amb aquest objectiu es parteix del treball de Duchene i Wunsh on presenten una taula de mortalitat límit, deguda només a l'envelliment, en la que l'edat límit de vida és de 115 anys, l'esperança de vida és 91.6 i l'edat modal de mort és 94.5 anys (*Duchene i Wunsh, 1986*). Mitjançant aquesta taula límit, els autors calculen l'impacte del càncer sobre la mortalitat a Suècia. L'interès d'una

distribució de mortalitat límit és òbvia perquè permet ajustar molt bé les funcions de mortalitat per edats elevades

A les Figures 2.7 i 2.8, s'il·lustra la mortalitat per sexes a partir dels 62 anys segons la taula de mortalitat de 1991 per a Catalunya, segons la taula de mortalitat corregida per a Espanya de Navarro i Meneu, pel 1981, (Navarro i Meneu, 1990) i segons la funció límit de Duchene i Wunsh, amb una supervivència de 1 entre un mil llió als 115 anys



**Figura 2.7:** Probabilitat de mort a Catalunya (1991), Espanya (1981) i Duchene i Wunsh (1986) Homes



**Figura 2.8:** Probabilitat de mort a Catalunya (1991) Espanya (1981) i Duchene i Wunsh (1986) Dones



Queda clar que la mortalitat observada a partir dels 95 anys s'aproxima ràpidament a la distribució teòrica. La raó és simple: les persones que han sobreviscut fins aquestes edats ja han superat gairebé totes les causes de mortalitat, excepció feta de la vellesa (*Caselli i Frova, 1993*).

La solució que s'adopta aquí és mixta. A partir de les dades per Espanya de 1985, i de Catalunya per 1991, s'ajusta una funció similar a la proposada per Heligman i Pollard (*Pollard, 1981*), en la qual hi ha un paràmetre que recull l'evolució de la mortalitat infantil, un altre per recollir l'evolució de la mortalitat accidental al principi de l'edat adulta i un tercer component que és una funció de Weibull de comportament molt similar a la proposada per Duchene i Wunsh, per a les edats més avançades. Per a la projecció, es converteixen els paràmetres en funcions depenents del temps que, en general prenen una forma exponencial decreixent. El criteri de referència adoptat per als valors futurs són les taules de supervivència estimades per Lee i Carter (*Lee i Carter, 1992*) i, per les edats avançades, una distribució amb vida límit similar a la de Duchene i Wunsh.

La forma que agafa la funció ajustada a la probabilitat de mort masculina és la següent:

$$\frac{A_t}{e^{2x}} + B_t \frac{e^{-\frac{x-14}{5.5}}}{(1 + e^{-\frac{x-14}{5.5}})^6} + e^{(-C_t + D_t x)} + E_t \quad [2.22]$$

on els paràmetres tenen el següent comportament:

$$A_t = 0.007 e^{-0.04175 t}$$

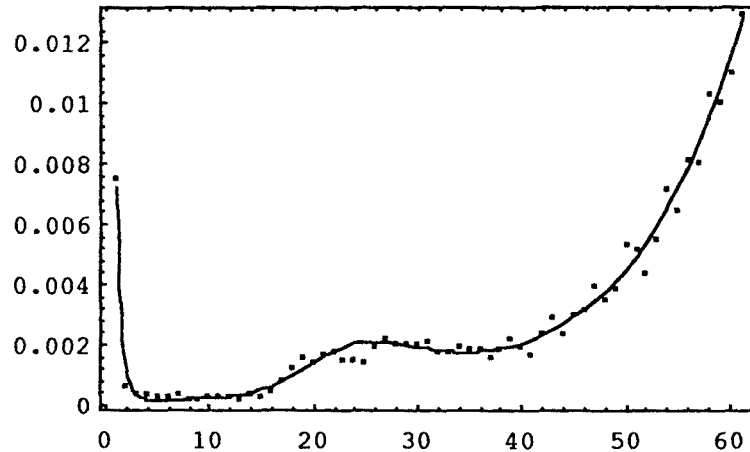
$$B_t = 0.028 e^{-0.0425 t}$$

$$C_t = 10.2 + 0.03544 t$$

$$D_t = 0.09714 + 0.000157 t$$

$$E_t = 0.00015 e^{-0.005 t}$$

A la Figura 2.9 es mostra l'ajust de la corba a les dades de mortalitat de Catalunya per a l'any 1991, fins a una edat de 60 anys.



**Figura 2.9:** Ajust de la corba a la mortalitat masculina, Catalunya 1991

Per a l'ajust de la mortalitat de les dones s'ha hagut de modificar lleugerament la funció anterior ja que la mortalitat 'accidental' és molt més reduïda i la mortalitat a partir dels 60 anys fins els 95 no creix de forma exponencial -com en el cas dels homes- sinó que segueix un comportament més lineal. Per ajustar-ho correctament, l'exponencial de l'expressió [2.22] s'ha reduït de valor i s'ha sumat un component logístic, amb el centre situat a una edat de 88 anys. Finalment, la funció ajustada pren la forma:

$$\frac{A_t}{e^{2t}} + B_t \frac{e^{-\frac{t-19}{5}}}{(1 + e^{-\frac{t-19}{5}})^6} + e^{-(C_t + D_t t)} + E_t + \frac{F_t}{1 + e^{-0.2(t-88)}} \quad [2.23]$$

i els paràmetres tenen la següent especificació:

$$A_t = 0.006 e^{-0.04175 t}$$

$$B_t = 0.005 e^{-0.0425 t}$$

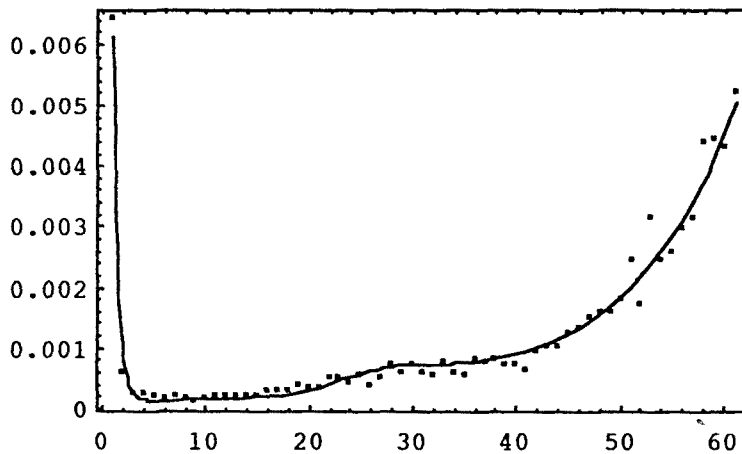
$$C_t = 10.5 + 0.03344 t$$

$$D_t = 0.0835 + 0.00043 t$$

$$E_t = 0.00015 e^{-0.005 t}$$

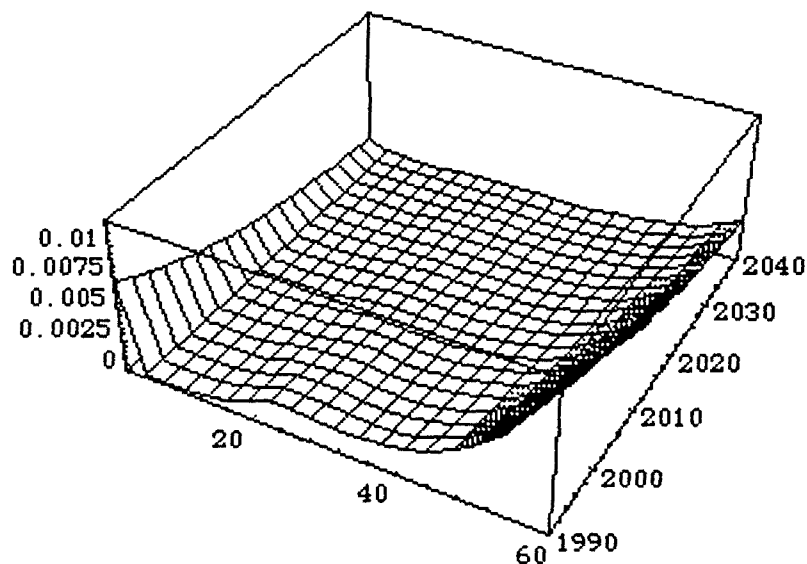
$$F_t = 0.18 e^{-0.02 t}$$

A la Figura 2.10 es representa l'ajust de la funció anterior a les dades de probabilitat de mort femenina a Catalunya, l'any 1991.

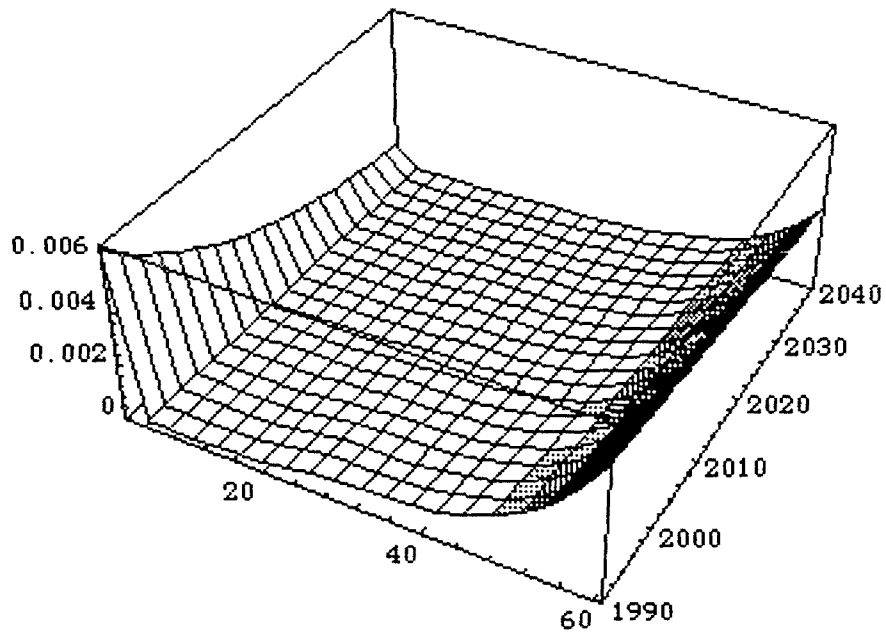


**Figura 2.10 :** Ajust de la corba a la mortalitat femenina, Catalunya 1991

Finalment, s'il·lustra la projecció de la mortalitat per sexes per als propers 50 anys, a les Figures 2.11 i 2.12. Cal destacar que la projecció adopta la hipòtesi que amb aquest període l'esperança de vida haurà arribat als 86 anys que és el resultat que obtenen Lee i Carter en les seves projeccions a 70 anys (*Lee i Carter, 1992*). Aquesta hipòtesi és molt més optimista que les projeccions de la ONU o d'alguns organismes i governs europeus (*Meslé, F. 1993*).



**Figura 2.11 :** Projecció de la mortalitat masculina, per 0 a 60 anys d'edat



**Figura 2. 12 :** *Projecció de la mortalitat femenina, des de 0 a 60 anys d'edat*

A diferència de les projeccions de natalitat, en la simulació no s'han adoptat hipòtesis alternatives de mortalitat perquè en considerar-se una funció que sobrestima el grau d'envelliment de la població, ja estan englobats tots els altres casos de menor esperança de vida i que són més favorables per a la viabilitat d'un sistema de pensions de repartiment.

## ***CAPITOL 3***

---

***Un model de creixement cíclic***



### 3.1 Introducció

En el capítol primer s'ha vist que una de les insuficiències notables de l'anàlisi teòrica dels sistemes de seguretat social és que molt sovint es realitzen en contextes estàtics o bé, quan s'empren models dinàmics, es tracta sempre d'economies estables que, davant de qualsevol perturbació, convergeixen sempre cap a un equilibri dinàmic sostingut o trajectòria de creixement equilibrat (*steady state*).

Una de les aportacions més importants de Harrod a l'anàlisi econòmica dinàmica és el conegut problema del tall de la navalla, és a dir, que la trajectòria de creixement equilibrat és inestable (*Harrod, 1948*). Contra aquest notable argument per a defensar la intervenció pública en l'esfera econòmica de la societat, es poden esgrimir els models de creixement de tipus neoclàssic que, pel contrari, mostren que si es donen les condicions de flexibilitat dels preus, de substituïbilitat dels inputs i de convexitat de les tècniques de producció, el sistema econòmic assoleix la taxa de creixement equilibrada i òptima i segueix una trajectòria estable estructuralment i asimptòtica (*Solow, 1956; Meade, 1961; Solow, 1970*). Aquest resultat de la teoria neoclàssica depèn críticament dels supòsits que s'efectuïn sobre la funció de producció i sobre el comportament estalviador dels individus (*Hahn, 1987*).

En un article que aixecà molt d'enrenou en el camp de la teoria econòmica i que partia del treball previ de Kaldor (*Kaldor, 1956*), Pasinetti demostrà l'anomenat teorema de Cambridge, a saber, que la taxa d'estalvi dels posseïdors del capital és la que determina la taxa de creixement de l'economia (*Pasinetti, 1962*). Quatre premis Nobel i alguns dels representants més capaços de



l'economia neoclàssica -Samuelson, Modigliani, Meade, Solow, Hahn, Stiglitz-, junts o per separat, tractaren de rebatre l'argument de Pasinetti sense gaire èxit perquè, finalment, es provà que l'àmbit de validesa del model neoclàssic és només un petit fragment del conjunt de comportaments plausibles, força allunyat de les condicions observades en les economies reals (*Pasinetti, 1974*). Més recentment, el mateix Pasinetti ha demostrat el teorema en el context molt més ample del seu model dinàmic multisectorial (*Pasinetti, 1981*). És convenient recordar que el teorema culmina tota una tradició de la ciència econòmica, perquè ja en els anys trenta, i agafant el referent de Marx, Kalecki formulà en un marc més simple i referit al curt termini, una proposició similar, que es resumia en la seva coneguda frase "els capitalistes guanyen el que gasten" i, per tant, "són els amos del seu destí" (*Kalecki, 1954; Kalecki, 1971*). Així, doncs, el paper determinant de l'estalvi dels posseïdors del capital és un dels trets fonamentals que cal incorporar en una anàlisi rigurosa de l'evolució dinàmica del sistema econòmic.

Per altra banda, un dels resultats provats i acceptats (*Samuelson, 1966*) de la famosa polèmica sobre la teoria del capital i la reversibilitat de tècniques (*Harcourt, 1975*), que es barrejà amb l'anterior, consisteix en que la funció de producció agregada dels models neoclàssics només pot construir-se si tots els sectors de l'economia tenen la mateixa composició del capital (*Garegnani, 1970*). Aquest resultat formal implica necessàriament que les funcions de producció agregades no reflecteixen correctament el fenomen de la producció ni tan sols com a "paràbola" (*Samuelson, 1962*) i que, per tant, el seu ús en l'anàlisi resta molta rellevància a les conclusions i, fins i tot, pot falsejar-les.

Aquestes deficiències dels models de creixement *standard* aconsellen seguir un altre camí quan es tracta de construir un model que permeti reflectir alguns dels trets dinàmics més importants dels sistemes econòmics. Els models d'arrel post-keynesiana, del tipus de l'escola de Cambridge, proporcionen un punt de partida sobre el qual començar que, al menys, salva bona part d'aquests problemes. Tot i així, són models que estudien el comportament del sistema en condicions d'equilibri dinàmic de llarg termini, però no entren en l'estudi de la seva estabilitat, suposant -implícitament- o bé que l'economia està en creixement equilibrat (*Fleck i Domenghino, 1987*) o bé que és inestable a la

Harrod (*Pasinetti, 1962; Pasinetti, 1989; Dalziel, 1991*). Així, doncs, els models postkeynesians agregats habituals també presenten limitacions importants; en especial, la manca d'anàlisi de les propietats de la trajectòria dinàmica i la seva interrelació amb la distribució i la demanda efectiva.

Es un fet incontrovertible que el procés d'expansió de les economies capitalistes no segueix una trajectòria suau, sinó que presenta una evolució fluctuant amb un marcat component erràtic. Aquest tipus d'evolució té una especial importància en allò referent a la política de benestar social ja que, durant les fases recessives, els ingressos del sistema de protecció social disminueixen i les despeses augmenten dràsticament, seguint l'evolució conjuntural de l'ocupació. En conseqüència, és necessari que els models teòrics que s'emprin en l'anàlisi del sistema de seguretat social també siguin capaços d'incorporar la dinàmica oscil·latòria que caracteritza les economies reals.

Un darrer element a considerar en l'anàlisi dels sistemes de protecció social és la seva incidència sobre la distribució *funcional* de la renda. Tot i que hi ha una gran quantitat de treballs, teòrics i empírics, en torn als efectes sobre la distribució *personal* dels ingressos, de diferents programes redistributius o del conjunt del sistema (*Atkinson, 1987; Goodin i Le Grand, 1987; Haveman, 1987; Le Grand, 1987; Atkinson, 1989; Deakin i Wilkinson, 1991*), hi ha molt poques referències sobre com queda afectada la distribució entre els ingressos de la propietat i els del treball. Aquesta carència és important perquè el sistema de protecció social podria influir sobre el comportament dinàmic de l'economia a través dels canvis en la distribució funcional, tancant, així, un circuit addicional de retroalimentació entre distribució i equilibri dinàmic.

En el model que es desenvolupa en aquest treball es tenen en compte totes aquestes qüestions i es resolen amb major o menor fortuna. El model és de tipus dinàmic i agregat, genera fluctuacions endògenes, recull el paper central de l'estalvi dels capitalistes, considera la interacció entre la distribució, la demanda i la dinàmica i no té cap funció de producció explícita -és compatible amb moltes formulacions diferents, agregades o desagregades-. El model permet incloure especificacions pel sector públic, pel sector exterior i pel sistema financer que enriqueixen notablement la seva capacitat explicativa. Finalment,

tot i que no es construeix explícitament, és possible la seva desagregació en un model multisectorial (Lorenz, 1987).

### 3.2 Macrodinàmica postkeynesiana

Les crisis econòmiques i/o financeres s'havien vist tradicionalment com episodis erràtics, amb causes específiques per cada cas (*Kindleberger, 1989*) fins que Clément Juglar, a l'any 1860, va identificar clarament la periodicitat del cicle de negocis de durada mitja -uns 8 anys-. Karl Marx fou dels primers a interpretar aquesta evolució fluctuant de l'activitat econòmica com una característica fonamental del sistema capitalista i, així mateix, fou el primer en donar una explicació endògena sistemàtica del fenomen. Per Marx, les fluctuacions apareixien per l'efecte combinat del canvi tècnic, dels desajustos entre producció i demanda efectiva i dels canvis en l'evolució dels salaris i de la distribució del producte. Emprant el seu mateix vocabulari, es tractaria dels problemes del desenvolupament de les forces productives, del problema de la realització de la plusvàlua, de la lluita de classes i del paper de l'exèrcit de reserva en la "lleï general" de l'acumulació capitalista.

Aquesta rica aportació només va ser continuada pels pensadors marxistes però no va entrar a formar part del corrent principal de la ciència econòmica, precisament pel seu caràcter heterodoxe. Va ser durant els anys trenta, sota els efectes de la Gran Depressió, que varen començar a sortir nous treballs sobre el cicle econòmic produïts, en bona part, per economistes heterodoxes (*Frisch, 1931; Kalecki, 1935; Kalecki, 1937; Samuelson, 1939; Kaldor, 1940*). D'entre ells destaquen especialment els treballs de Kalecki, que va condensar en models molt senzills alguns dels ingredients de la(es) teoria(es) de la crisi de Marx. Així, el seu model de 1937 donava una explicació del cicle econòmic lligant l'efecte de la inversió sobre la demanda efectiva amb l'efecte sobre la rendibilitat. Més tard, va captar el paper clau de la distribució de la renda en la dinàmica cíclica de l'acumulació capitalista (*Kalecki, 1938; Kalecki, 1954; Kalecki, 1971*).

Un treball notable per la seva elegància, concisió i potència analítica, que suposa un avanç substancial en la teoria del cicle de negocis és el model de

Goodwin (*Goodwin, 1967*). En aquest model interaccionen una corba de Phillips lineal amb l'acumulació i el canvi tècnic, donant com a resultat una trajectòria fluctuant entorn la senda de creixement de Harrod. En unes equacions molt senzilles -lineals- s'integren les idees clàssiques de Marx sobre l'exèrcit de reserva, la lluita de classes i la inestabilitat inherent a l'expansió capitalista -la relació negativa entre salaris i nivell de desocupació, interacció entre distribució i acumulació, creixement cíclic- amb el problema del tall de la navalla de Harrod i les propostes de Kalecki i Kaldor sobre la distribució com a determinants fonamentals de la dinàmica. Tot i mostrar l'endogeneïtat i l'origen distributiu dels cicles, el model de Goodwin presenta algunes limitacions molt importants. Pel costat formal, el model és estructuralment inestable ja que es tracta d'un sistema conservatiu (*Samuelson, 1967; Samuelson, 1971; Hirsch i Smale, 1974; Samuelson, 1974; Vaart, 1976; Guckenheimer i Holmes, 1990*). D'altra banda, des d'un punt de vista econòmic, el model no considera per res els problemes de demanda efectiva i considera que la tècnica de producció és de coeficients fixes.

Hi ha molts autors que han corregit diferents limitacions del model de Goodwin i han ampliat el seu camp d'aplicació. Entre ells cal destacar alguns treballs on es solucionen els problemes formals i permeten incorporar canvis en la relació capital-producte i en la demanda (*Desai, 1973; Velupillai, 1977; Medio, 1980*). Altres autors incorporen el problema de la demanda efectiva, els canvis en el nivell d'utilització de la capacitat i/o del ratio capital producte (*Velupillai, 1983; Jarsulic, 1986; Skott, 1989*), empen funcion d'inversió kaleckianes (*Jarsulic, 1986*) o kaldorianes (*Skott, 1989*) introdueixen sistemes de fixació de preus tipus *mark-up* (*Skott, 1989*), estudien l'efecte de l'evolució del conflicte distributiu (*Van der Ploeg, 1983; Van der Ploeg, 1983*) o les implicacions de taxes d'estalvi diferenciades (*Van der Ploeg, 1984*), hi afegixen formació d'expectatives (*Balducci, et al., 1984*), sector públic i altres (*Glombowski i Krüger, 1984; Glombowski i Krüger, 1986*). En l'apèndix d'aquest capítol es fa una altra ampliació i s'incorpora una funció no lineal de reacció dels salaris i el creixement logístic de la població.

Finalment, val a dir que el mateix Goodwin ha ampliat i estès considerablement el seu model de creixement cíclic en dues direccions. Per una

banda, l'ha incorporat als seus treballs de dinàmica multisectorial (*Goodwin i Punzo, 1987*) Per una altra, ha estès el model fins apropar-lo al camp de les dinàmiques complexes i el caos determinístic (*Goodwin, 1990*)

Es pot parlar, per tant, que hi ha tot un corrent dins l'anàlisi econòmica dinàmica que estudia les fluctuacions i el creixement econòmics amb un enfocament molt heterodoxe, partint d'un conjunt d'idees que poden remuntar-se a Marx i que, en general, troben els seus referents més immediats en els treballs d'autors postkeynesians, en especial Kalecki i Kaldor en allò referent a la imbricació entre inversió, distribució i demanda efectiva (*Kaldor, 1940; Kalecki, 1971*) i, quan a la especificació dinàmica, es basen en les aportacions de Goodwin, be perquè usen no linealitats, bé perquè empen alguna derivació del model de lluita de classes (*Goodwin, 1951, 1967*) Aquest tipus de models són especialment atractius perquè amb unes equacions relativament simples permeten dinàmiques molt complexes Cal afegir, a més, que poden ser especificats exclouent gairebé la totalitat dels problemes que s'han comentat a la introducció

### 3.3 Un model genèric d'acumulació cíclica

#### 3.3.1 Definicions i relacions bàsiques

El model que es desenvolupa en aquesta secció recull diverses característiques dels models postkeynesians del cicle Al igual que tots els models dels autors anteriors, es tracta d'un model agregat, però que pot especificar-se en termes desagregats El nivell de producció ve fixat per la demanda, sense cap altre límit que la mà d'obra disponible, ja que es suposa que les empreses treballen sempre amb excés de capacitat<sup>1</sup> En una primera aproximació la demanda està constituïda només per la inversió i el consum, amb

---

<sup>1</sup> Aquest supòsit, força habitual entre els autors postkeynesians, té una forta base de racionalitat microeconòmica quan hi han comportaments oligopolistes -l'excés de capacitat dissuadeix l'entrada d'altres competidors- però, a més, és un fet empíricament irrefutable Per exemple, en el cas de l'economia espanyola, el màxim històric d'utilització de capacitat s'assolí el 1973, quan es va arribar a superar el 90 % Normalment, l'índex d'utilització oscil·la entre el 80% i el 87 % (*Corrales i Laguarda, 1991*)

especificacions clarament kaleckianes: els treballadors gasten tot el que guanyen i només estalvien els capitalistes, que són els que prenen les decisions d'inversió. Finalment, la distribució de la renda ve decidida pel comportament del mercat de treball on els salaris reals es determinen pel nivell d'ocupació. Es considera que la població activa ve exògenament determinada i que el canvi tècnic és exogen i estalviador de treball (neutral en el sentit de Harrod). Finalment, el model es formula a preus constants tot i que, incorporant algun tipus de funció d'oferta agregada, es pot estendre al cas de preus variables. Tot i així, la poca fiabilitat d'aquest tipus de funcions aconsellen deixar els models amb preus variables per als desenvolupaments multisectorials.

Quant a l'especificació del model, s'han tingut en compte dos criteris guia: el primer, tractar d'emprar les funcions més senzilles possible; el segon, que els paràmetres puguin prendre valors plausibles i reproduir els patrons dinàmics observats en economies reals com, per exemple, l'espanyola.

Les definicions bàsiques del model vénen donades per les equacions:

$$I = K g \quad [3.1]$$

$$v = L/N \quad [3.2]$$

$$L = y/\lambda \quad [3.3]$$

$$\omega = w L/y = w \lambda \quad [3.4]$$

on la inversió,  $I$ , no és sinó la taxa d'acumulació  $g$  per l'stock de capital  $K$ , la taxa d'ocupació  $v$  ve definida pel quocient entre població ocupada  $L$  i població activa  $N$ . La població ocupada  $L$  és el quocient entre la producció  $y$  i la productivitat del treball  $\lambda$ , i la participació dels salaris en la renda  $\omega$  és igual al quocient entre la massa salarial  $w L$  i la renda  $y$ . Les relacions que vénen determinades exògenament són el creixement de la població activa i el de la productivitat:

$$N = N_0 e^{nt} \quad [3.5]$$

$$\lambda = \lambda_0 e^{\alpha t} \quad [3.6]$$

on  $n$  és la taxa de creixement de la població i  $\alpha$  la taxa de creixement de la productivitat. En les simulacions  $n$  es substituirà per una funció que recollirà el comportament projectat de la població. Tot i així, donat que les variacions que experimenta estan compreses dins d'interval·ls molt petits -des de -3% a +3 %-, es pot adoptar, pel raonament teòric, una  $n$  constant sense pèrdua de generalitat.

Finalment, les relacions de comportament endògenes del model vénen recollides en les següents expressions:

$$S = \Phi(\pi, y), \quad \Phi'_\pi > 0, \Phi'_y > 0 \quad [3.7]$$

$$\hat{g} = \Gamma(g, \omega), \quad \Gamma'_g > 0, \Gamma''_g < 0, \Gamma'_\omega < 0, 0 \leq g \leq \bar{g} \quad [3.8]$$

$$\hat{w} = \Psi(v), \quad \Psi'_v > 0 \quad [3.9]$$

$$\hat{K} = g - \delta \quad \delta > 0 \quad [3.10]$$

L'estalvi  $S$  és una funció creixent de la renda  $y$ , i de la participació dels beneficis en el producte  $\pi$ . El creixement de la taxa d'acumulació  $\hat{g}$ , depèn positivament del nivell d'acumulació -en l'entorn proper a l'equilibri-, amb una sensibilitat decreixent -segona derivada negativa-, i negativament de la participació dels salaris en el producte. Però la funció és no lineal, de forma que fins i tot en el cas que els treballadors poguessin viure de l'aire, hi hauria una taxa màxima d'acumulació  $\bar{g}$ . Així mateix, com que la taxa d'acumulació és bruta, tindrà un valor mínim igual a 0. L'equació [3.9] expressa que el creixement del salari real  $\hat{w}$  és una funció creixent del nivell d'ocupació. Finalment, la relació [3.10] recorda que la taxa de creixement de la capacitat instal·lada -capital- és la diferència entre la nova inversió i la depreciació i que, per tant, el producte  $y$  és el producte brut i que els beneficis inclouen les amortitzacions i, per tant, són bruts. No està de més destacar que les relacions [3.7] i [3.8] recullen una típica formulació postkeynesiana de l'estalvi i de la inversió i que la

relació [3.9] recull la idea del paper regulador de l'exèrcit de reserva amb una corba de Phillips expressada a preus constants.

Per a l'anàlisi de la dinàmica del sistema cal trobar primer les especificacions dinàmiques de totes les variables i després es procedirà a l'estudi del sistema subjacent. De les expressions [3.4], [3.6] i [3.9] es pot deduir la taxa de creixement de la participació dels salaris i dels beneficis en el producte. Prenent taxes de creixement instantani (la derivada del logaritme de la variable respecte del temps), sobre la participació dels salaris, l'expressió [3.4] es converteix en  $\hat{\omega} = \hat{w} + \hat{\lambda}$ , i substituint per les expressions [3.9] i [3.6] dóna:

$$\hat{\omega} = \Psi(v) + \alpha \quad [3.11]$$

D'altra banda, la taxa de creixement de la participació dels beneficis serà:

$$\hat{\pi} = \frac{d\pi/dt}{\pi} = \frac{d(1-\omega)/dt}{(1-\omega)} = \frac{-\dot{\omega}}{(1-\omega)} = \frac{-\omega\hat{\omega}}{(1-\omega)}$$

de on, substituint per l'expressió [3-11] queda:

$$\hat{\pi} = \frac{-\omega(\Psi(v) + \alpha)}{(1-\omega)} \quad [3.12]$$

Tant l'equació [3.11] com [3.12] estan acotades pels valors que poden prendre les participacions en el producte, que van de 0 a 1. Així, quan qualsevol de les participacions val 0, la seva taxa de creixement només pot ésser 0 o positiva. De forma anàloga, quan valen 1, la seva taxa de creixement només pot prendre valors negatius o nuls.

Per a trobar la taxa de creixement del producte es parteix de la condició d'equilibri a curt termini o condició de demanda efectiva,  $S = I$ . En conseqüència,

$$\Phi(\pi, y) = K g \quad [3.13]$$

de on aïllant  $y$  es té:



$$y = \frac{Kg}{\theta(\pi)}, \quad \theta'_\pi > 0 \quad [3.14]$$

la funció  $\theta(\pi)$  és creixent, perquè la funció original d'estalvi és creixent en relació a la participació dels beneficis. Convé notar que  $1/\theta(\pi)$  és el multiplicador kaleckià de la inversió. A partir de l'expressió [3.14] es troba l'equació de moviment del producte:

$$\hat{y} = \hat{K} + \hat{g} - \hat{\theta}(\pi)$$

que, substituint per [3.10] i [3.8] dóna:

$$\hat{y} = g - \delta + \Gamma(g, \omega) - \hat{\theta}(1 - \omega) \quad [3.15]$$

Finalment, la taxa de creixement de la ocupació s'obté directament de l'expressió [3.2]:

$$\hat{v} = \hat{L} - \hat{N} = \hat{y} - \hat{\lambda} - \hat{N}$$

i considerant les relacions [3.15], [3.5] i [3.6] queda:

$$\hat{v} = g - \delta + \Gamma(g, \omega) - \hat{\theta}(1 - \omega) - \alpha - n \quad [3.16]$$

L'equació [3.16] està acotada pel valor de  $v$ , que només pot estar comprès entre 0 i 1. Per tant, quan  $v = 0$ , la seva taxa de creixement ha d'ésser 0 ó positiva. De forma anàloga, quan  $v = 1$ , la seva taxa de creixement es fa 0 ó és negativa.

La dinàmica del model queda completament determinada pel sistema de tres equacions diferencials que es deriven de les expressions [3.8], [3.11] i [3.16]:

$$\dot{g} = g \cdot \Gamma(g, \omega) \quad [3.17 a]$$

$$\dot{\omega} = \omega(\Psi(v) + \alpha) \quad [3.17 b]$$

$$\dot{v} = v(g - \delta + \Gamma(g, \omega) - \hat{\theta}(1 - \omega) - \alpha - n) \quad [3.17 \text{ c}]$$

Aquest sistema és, en principi, molt més complex que la major part de models de cicle econòmic d'enfoc postkeynesià. Això és així perquè, per la seva formulació, no és possible reduir el sistema dinàmic a només dues equacions, tal com assoleix, per exemple, Peter Skott a costa de formular unes funcions força complicades (*Skott, 1989; Skott, 1989*). Tampoc tenia interès adoptar la solució massa simple de Jarsulic que, en la seva equació salarial, elimina explícitament la taxa d'ocupació perquè postula una relació fixa entre nivell d'ocupació i taxa d'acumulació (*Jarsulic, 1986; Jarsulic, 1988*). En la major part dels altres treballs citats es simplifica al màxim la dinàmica de l'acumulació i es redueix a dues equacions diferencials ja que els interessa esbrinar altres qüestions.

### 3.3.2 Existència d'un equilibri i anàlisi de la seva estabilitat

Del sistema [3.17] es dedueix que quan  $\omega, g, v$  prenen el valor 0, les seves taxes de variació són nul·les. Així, l'origen de coordenades és un punt d'equilibri trivial del sistema. Però hi haurà un altre punt crític en què el sistema romandrà en equilibri sempre que els segons termes de les equacions [3.17] s'igualin a 0. Es a dir, en l'equilibri es complirà que:

$$\Gamma(g, \omega) = 0 \quad [3.18 \text{ a}]$$

$$\Psi(v) + \alpha = 0 \quad [3.18 \text{ b}]$$

$$g - \delta + \Gamma(g, \omega) - \hat{\theta}(1 - \omega) - \alpha - n = 0 \quad [3.18 \text{ c}]$$

Es fàcil trobar la taxa d'ocupació d'equilibri  $v^*$  que fa  $\dot{v} = 0$  a partir de l'expressió [3.18 b], ja que  $\Psi'(v) > 0$  i  $\Psi(v)$  pren valors negatius per  $v$  baixos i positius per  $v$  alts. D'altra banda, donat que en l'equilibri les taxes de variació s'anul·len, es tindrà que l'expressió  $\hat{\theta}(1 - \omega)$  dins de [3.18 c] s'anul·la ja que el

creixement de la funció depèn només del creixement del seu argument  $\omega$  i, en equilibri,  $\dot{\omega} = 0$ . També s'anul·la, per la condició [18 a] l'expressió  $\Gamma(g, \omega)$  dins de [18 c], de forma que la condició d'equilibri  $\dot{v} = 0$  es redueix a:

$$g^* - \delta - \alpha - n = 0 \quad [3.19]$$

que no és sinó la condició de creixement equilibrat de Harrod.

Finalment, a partir de l'expressió [3.18 a] es dedueix el valor de  $\omega^*$  en termes de  $g^*$ , ja que  $\Gamma'_\omega < 0$  en tot el seu recorregut i, des del punt de vista econòmic, hi ha d'haver algun valor de  $\omega$  prou gran com per fer que  $g$  deixi d'augmentar i un valor de  $\omega$  prou petit com per fer que  $g$  deixi de disminuir.

Per definició, es tindrà que  $0 < v^*, \omega^* < 1$  per qualssevol funcions amb sentit econòmic. Si les funcions tenen un comportament suau, només hi haurà un sol equilibri no trivial, ja que només hi haurà un valor d'equilibri per  $v^*$  i per  $\omega^*$ . Si, en canvi, la funció d'inversió, que ve recollida per  $g$ , té comportaments estranys -per exemple un polinomi de grau elevat, amb diversos màxims i mínims per valors plausibles de  $v$  i  $\omega$ -, o si l'equació de salaris té més d'una arrel, aleshores poden donar-se diferents punts crítics.

Per conèixer la dinàmica del sistema n'hi ha prou d'estudiar el seu comportament en l'entorn dels punts crítics -anàlisi de l'estabilitat local- i la direcció del seu fluxe en l'espai. Pels teoremes de linealització i de Hartman-Grobman se sap que el comportament del sistema linealitzat -desenvolupat en sèrie de Taylor- en l'entorn del punt crític és topològicament equivalent al del sistema original -hi ha un homeomorfisme entre els mapes de les trajectòries del sistema original i del sistema linealitzat-, sempre que el punt crític sigui hiperbòlic -és a dir, que les arrels de l'equació característica del sistema linealitzat tinguin totes una part real no nul·la- (*Verhulst, 1985; Guckenheimer i Holmes, 1990; Perko, 1991; Arrowsmith i Place, 1992*).

El sistema linealitzat es pot representar per la matriu de derivades parcials o jacobiana del sistema original que després s'avalua en un punt. En aquest cas el jacobiana quedarà:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{g}}{\partial g} & \frac{\partial \dot{g}}{\partial \omega} & \frac{\partial \dot{g}}{\partial v} \\ \frac{\partial \dot{\omega}}{\partial g} & \frac{\partial \dot{\omega}}{\partial \omega} & \frac{\partial \dot{\omega}}{\partial v} \\ \frac{\partial \dot{v}}{\partial g} & \frac{\partial \dot{v}}{\partial \omega} & \frac{\partial \dot{v}}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g\Gamma'_g + \Gamma(g, \omega) & g\Gamma'_\omega & 0 \\ 0 & \Psi(v) & \omega\Psi'_v \\ v\Theta'_g & v\Theta'_\omega & \Theta(g, \omega) + v\Theta'_v \end{bmatrix} \quad [3.20]$$

on l'expressió  $\Theta(g, \omega)$  és una notació reduïda del creixement de la taxa d'ocupació que ve donat per l'expressió [3.16]. Quan s'avalua el jacobià en el punt crític no trivial, aleshores queda més simplificat, ja que les taxes de variació de les tres variables s'anul·len. Anomenant A al punt crític no trivial, es tindrà que el jacobià avaluat a A és:

$$J_A = \begin{bmatrix} g\Gamma'_g & g\Gamma'_\omega & 0 \\ 0 & 0 & \omega\Psi'_v \\ v\Theta'_g & v\Theta'_\omega & v\Theta'_v \end{bmatrix} \quad [3.21]$$

Dins de  $J_A$ , el terme  $v\Theta'_v$  no és zero perquè l'expressió [3.16] inclou la taxa de creixement d'una funció que depèn de la participació dels salaris en el producte i, per tant, depèn de la taxa de creixement de la participació dels salaris que inclou  $v$  com a argument. L'equació característica del sistema linealitzat aleshores queda com:

$$-r^3 + r^2(g\Gamma'_g + \Theta'_v) + rv(\omega\Psi'_v\Theta'_\omega - \Gamma'_g\Theta'_v) + vg\omega\Psi'_v(\Theta'_g\Gamma'_\omega - \Theta'_\omega\Gamma'_g) = 0 \quad [3.22]$$

Segons els valors dels paràmetres i l'especificació de les funcions, els coeficients de l'equació poden prendre un o altre signe. Per tant, en principi, l'únic que es pot afirmar sobre les arrels de l'equació característica és que ja que l'equació és de tercer grau amb coeficients reals, hi haurà com a mínim una arrel real. En conseqüència, segons els valors que prenguin els paràmetres, el sistema pot presentar comportaments estables o comportaments inestables que, en qualsevol cas, sempre quedaran acotats pels límits màxims i mínims que poden prendre les variables econòmiques. En general, es pot trobar des de l'estabilitat

assimptòtica a dinàmiques molt complexes, depenent només del tipus d'especificació del model que es realitzi.

Convé destacar, a més, que si s'avalua el jacobià a l'origen de coordenades tots els elements s'anul·len i, en conseqüència, es tracta d'un punt no hiperbòlic, és a dir, que no poden aplicar-se els teoremes de linealització i, per l'anàlisi de la seva estabilitat es necessita disposar de més informació sobre les funcions del sistema.

### 3.4 Especificació del model bàsic

#### 3.4.1 Les relacions funcionals

El model genèric presentat a la secció anterior té un comportament indeterminat per la senzilla raó que les condicions imposades a les funcions genèriques són insuficients per a determinar com seran les arrels característiques del sistema. En conseqüència, s'ha de procedir a una especificació més detallada de les funcions a fi i efecte de poder dir quelcom més.

En primer lloc, la funció d'estalvi que es farà servir és la clàssica, és a dir, una funció lineal dels beneficis bruts. Així, l'expressió [3.7] quedarà reduïda a:

$$S = s \pi y, \quad 0 < s < 1 \quad [3.23]$$

on  $s$  és la propensió a l'estalvi dels capitalistes. En conseqüència, l'estalvi dels treballadors serà nul, tot i que el model pot ampliar-se per incloure taxes d'estalvi diferencials, tal com fan altres autors (*Van der Ploeg, 1984; Stone, 1990*).

Quan a la funció de reacció dels salaris reals, s'especificarà en termes d'una corba de Phillips. Tot i que pel funcionament del model n'hi ha prou amb una especificació lineal, s'ha afegit un terme no lineal per tal de recollir el fet que quan l'economia està gairebé en la plena ocupació els salaris s'acceleren. Per tant, l'expressió [3.9] ara passarà a ser:

$$\hat{w} = -\rho + jv + \frac{h}{1-v} \quad [3.24]$$

on  $\rho, j, h > 0$  són coeficients que serveixen per ajustar la taxa màxima de descens dels salaris, el nivell d'ocupació d'equilibri i el nivell d'acceleració dels salaris quan l'ocupació s'apropa al 100 % de la població activa. La corba tindrà la forma que s'il·lustra a la Figura 3.1.

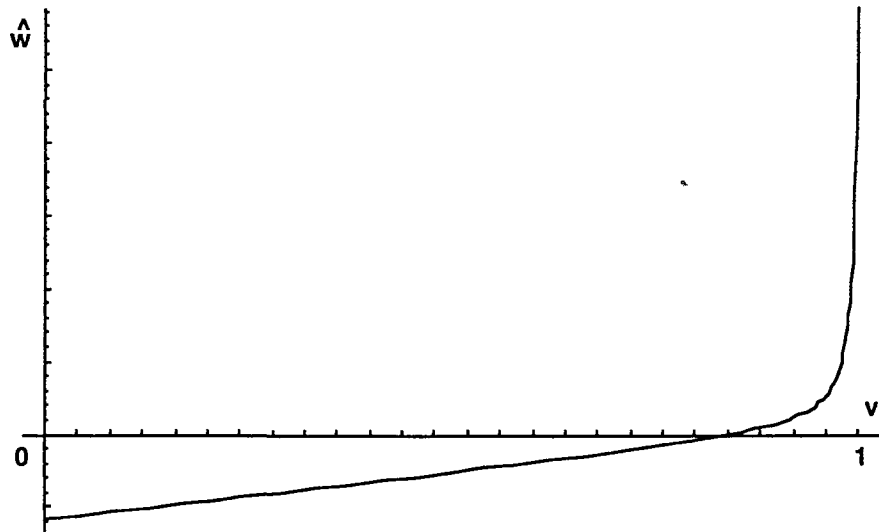


Figura 3.1. Funció de reacció dels salaris

S'ha triat aquesta relació perquè recull molt bé el conflicte distributiu i hi ha molts treballs empírics que la recolzen. Una de les darreres estimacions d'una corba d'aquesta mena per a llargs períodes és la de Desai on, partint de les dades de Phillips completades fins a temps més recents, confirma els resultats clàssics de Phillips que, a més, reben una segona font de validació a partir de les sèries de participació de salaris en la renda nacional (Desai, 1984).

Els requisits que ha de complir la funció d'inversió exigeixen que sigui necessàriament una funció no lineal, bé perquè es defineixi per intervals, bé perquè la mateixa relació funcional sigui no lineal. Hi ha diverses especificacions possibles que podrien complir els requisits anteriors. D'entre elles destaquen l'especificació per intervals de Kaldor o l'especificació no lineal de Goodwin (Kaldor, 1940; Goodwin, 1951). Ambdós casos poden recollir-se amb un polinomi de tercer grau que proporciona una aproximació suficient a les variacions de la inversió en la seva transició des del mínim al màxim. Aquestes

especificacions són les que s'usen en tota una sèrie de treballs on es desenvolupa el model de Kaldor (*Chang i Smyth, 1971; Lorenz, 1987; Skott, 1989; Skott, 1989; Puu, 1991; Lorenz, 1993*). Així mateix, també s'empren aquestes funcions en altres articles on es desenvolupa el model de Goodwin (*Thio, 1984; Goodwin i Punzo, 1987; Chiarella, 1990; Goodwin, 1990; Lorenz, 1993*). En altres treballs s'empren funcions d'inversió de tipus logístic, que poden portar a dinàmiques molt complexes (*Dana i Malgrange, 1983; Goodwin, 1990*).

L'ús d'especificacions relativament complicades com les acabades d'esmentar no sempre és compatible amb un funcionament raonable del model, amb paràmetres i resultats realistes. Per exemple, en una primera versió del model que aquí es presenta es va tractar d'especificar el model d'Skott i es va trobar que la funció d'inversió havia d'ésser força més complexa que una simple equació cúbica si es volia obtenir la forma teòrica genèrica que Skott emprava en els gràfics (*Skott, 1989*). En cap de les especificacions provades es va aconseguir generar un cicle econòmic de característiques acceptables des de l'evidència empírica. A més, es pot demostrar que no hi ha cap polinomi de tercer grau que pugui representar la funció d'inversió i que, al mateix temps, compleixi totes les característiques que Skott exigeix a les funcions genèriques del model<sup>2</sup>.

La solució que s'ha adoptat aquí és, de nou, emprar les especificacions més senzilles possible. En aquest sentit, la funció d'inversió de Jarsulic és molt raonable i compleix totes les propietats exigibles (*Jarsulic, 1986; Jarsulic, 1988*). Seguint aquest autor, la relació [3.8] es pot especificar com:

$$\hat{g} = a + bg - cg^2 - d\omega, \quad a, b, c, d > 0 \quad [3.25]$$

Aquesta equació recull en una forma molt senzilla tres elements molt importants que tota funció d'inversió agregada ha de considerar. En primer lloc,

---

<sup>2</sup> En el model d'Skott, si la funció d'inversió és un polinomi de tercer ordre, aleshores la funció de la taxa de variació de l'ocupació és necessàriament un polinomi d'ordre dos i que, per tant, presenta un tram creixent i un tram decreixent dins l'interval rellevant  $0 < v < 1$ , en lloc de la corba creixent que suposa Skott (*Skott, 1989; Skott, 1989*). Això implica que per assolir formulacions adequades cal emprar funcions encara més complexes sense que això signifiqui afegir més capacitat d'explicació al model.

l'existència d'un element autònom de la inversió  $a$  que, en cas necessari, pot reescriure's per tal de recollir la formació d'expectatives. En segon lloc, recull un mecanisme d'accelerador flexible, que ve incorporat en els termes en  $g$  i  $g^2$ , i que pot considerar-se el mecanisme fonamental de la funció d'inversió. Finalment, inclou un terme que reflecteix la distribució de la renda  $i$ , per tant, el comportament dels beneficis agregats. És de destacar que l'expressió [3.25] coincideix gairebé del tot amb les funcions d'inversió agregades que s'han estimat per economies com per exemple l'espanyola (*Andrés, et al., 1990; Andrés, et al., 1991*). L'únic element diferencial és que l'equació [3.25] no incorpora encara cap element que reculli l'efecte del cost de finançament, però és possible afegir un sector financer al model i establir el lligam amb la funció d'inversió (*González Calvet i Sánchez Chóliz, 1994*)<sup>3</sup>.

Amb les especificacions [3.23], [3.24] i [3.25] es tindrà que, a partir de l'expressió [3.15] la taxa de creixement del producte s'expressarà:

$$\hat{y} = a - \delta + (1+b)g - cg^2 - d\omega - \frac{\omega(\alpha - \rho + jv + \frac{h}{1-v})}{1-\omega} \quad [3.26]$$

i, substituint aquesta expressió en l'equació de moviment de la taxa d'ocupació [3.16] es tindrà que:

$$\hat{v} = a - \delta - \alpha - n + (1+b)g - cg^2 - d\omega - \frac{\omega(\alpha - \rho + jv + \frac{h}{1-v})}{1-\omega} \quad [3.27]$$

i, en conseqüència, el sistema dinàmic consistirà en les tres equacions diferencials:

$$\dot{g} = g[a + bg - cg^2 - d\omega] \quad [3.28 a]$$

$$\dot{\omega} = \omega[\alpha - \rho + jv + \frac{h}{1-v}] \quad [3.28 b]$$

$$\dot{v} = v[a - \delta - \alpha - n + (1+b)g - cg^2 - d\omega - \frac{\omega(\alpha - \rho + jv + h/(1-v))}{1-\omega}] \quad [3.28 c]$$

---

<sup>3</sup> En la secció 3.6 s'aborda el tema i en l'apèndix 2 s'obtenen les condicions generals per a l'existència d'un cicle d'origen financer quan la distribució no varia



### 3.4.2 Anàlisi de l'estabilitat

El punt crític s'obtindrà, com abans, igualant els segons termes de les equacions a zero. De l'equació [3.28 c] s'obté que, en el punt crític,  $g^* = \delta + \alpha + n$ , per tal que  $\dot{v} = 0$ , ja que en equilibri,  $\hat{g} = 0, \hat{\omega} = 0$ . Així mateix, de l'expressió [3.28 a], s'aïlla el valor de  $\omega^*$  que fa  $\dot{g} = 0$ , donat  $g^*$ . Per últim, de l'expressió [3.28 b] s'aïlla  $v^*$  que fa  $\dot{\omega} = 0$ . En aquest darrer cas es troben dos valors de  $v$ , un dels quals és, per construcció, més gran que 1 i que no té significat econòmic.

Degut a la forma de les funcions, només hi ha un sol punt crític, llevat de l'origen de coordenades. Donat que quan s'està sobre cadascun dels eixos la taxa de variació de la variable corresponent es fa zero, si les superfícies issoclines de dues variables s'intersecten sobre l'eix de la tercera variable, aleshores apareixeria un altre punt crític. Com que això només passarà si es seleccionen els valors dels paràmetres per aquesta finalitat expressa, s'exclouen de l'anàlisi.

Per a l'anàlisi de l'estabilitat local de l'equilibri s'obté el jacobià del sistema:

$$J = \begin{bmatrix} a+2bg-3cg^2-d\omega & -gd & 0 \\ 0 & \alpha-\rho+jv+\frac{h}{1-v} & \omega\left[j+\frac{h}{(1-v)^2}\right] \\ v(1+b)-2vcg & -vd-\frac{\alpha-\rho+jv+\frac{h}{1-v}}{1-\omega} & \frac{a-\delta-\alpha-n+(1+b)g-cg^2-d\omega-\frac{vh}{(1-v)^2}}{1-\omega} \end{bmatrix}$$

que, avaluat en el punt crític, dóna:

$$J_{,1} = \begin{bmatrix} bg-2cg^2 & -gd & 0 \\ 0 & 0 & \omega\left[j+\frac{\omega h}{(1-v)^2}\right] \\ v(1+b-2cg) & -vd-\frac{v\omega(j+h/(1-v)^2)}{1-\omega} & \end{bmatrix} \quad [3.29]$$

L'equació característica del sistema pren la forma:

$$\begin{aligned}
 & -\phi^3 + \phi^2 \left[ bg - 2cg^2 - \frac{v\omega \left( j + \frac{h}{(1-v)^2} \right)}{1-\omega} (2cg^2 + 1) \right] + \\
 & + \phi v \omega \left( j + \frac{h}{(1-v)^2} \right) \left( \frac{bg}{1-\omega} - d \right) - gvd\omega \left( j + \frac{h}{(1-v)^2} \right) = 0 \quad [3.30]
 \end{aligned}$$

Donat que l'equació és de tercer grau amb coeficients reals, aleshores hi ha, com a mínim, una arrel real. Tanmateix, no es pot estar segur de quin signe prendran els coeficients dels altres termes, a excepció del terme independent, que és negatiu. Com a màxim, podrien haver-hi dos canvis de signe cosa que, segons la regla dels signes de Descartes, implicaria que el nombre d'arrels positives seria o dues o zero. En qualsevol d'ambdós casos, el signe del terme independent hauria de ser positiu, però resulta que és negatiu. En conseqüència, totes les arrels reals de l'equació característica seran negatives. Finalment, el nombre d'arrels negatives serà una o tres, ja que pel teorema fonamental de l'àlgebra, en les equacions polinòmiques amb coeficients reals les arrels complexes apareixen en parells conjugats.

Per tant, es poden donar els següents casos: (a) Les tres arrels són negatives. En aquest cas, en el punt crític el sistema és asimptòticament estable (*Hirsch i Smale, 1974; Guckenheimer i Holmes, 1990; Arrowsmith i Place, 1992*). (b) Hi ha una arrel negativa i dues arrels complexes conjugades amb la part real negativa. Novament, el sistema és asimptòticament estable però l'aproximació a l'equilibri segueix una trajectòria cíclica decreixent en dues de les tres direccions de l'espai de fases (*Hirsch i Smale, 1974; Guckenheimer i Holmes, 1990; Arrowsmith i Place, 1992*). (c) Hi ha una arrel negativa i dues arrels complexes conjugades amb la part real positiva. Aleshores el sistema serà localment inestable i presentarà oscil·lacions divergents en dues de les direccions de l'espai de fases (*Hirsch i Smale, 1974; Guckenheimer i Holmes, 1990; Arrowsmith i Place, 1992*).

En principi no hi ha cap raó per pensar que es dona una o altra situació, ja que depèn exclusivament dels valors que prenguin els diferents paràmetres. El que està clar és que les condicions necessàries i suficients per tal que un sistema

com el descrit presenti fluctuacions sostingudes és que l'equilibri sigui localment inestable i que es pugui acotar un subespai tancat i invariant a l'entorn del punt crític, en el qual entrin totes les trajectòries i no tornin a sortir. En el cas del sistema econòmic, aquestes cotes existeixen de forma natural, ja que  $0 < v, \omega < 1$ ,  $0 \leq g \leq \bar{g}$ . Tanmateix, un sistema que fluctués segons aquestes cotes presentaria unes oscil·lacions catastròfiques, amb molt poca relació amb l'economia real. Tot i així, el ventall de possibilitats que obre el model és prou ample com per a tractar de precisar més.

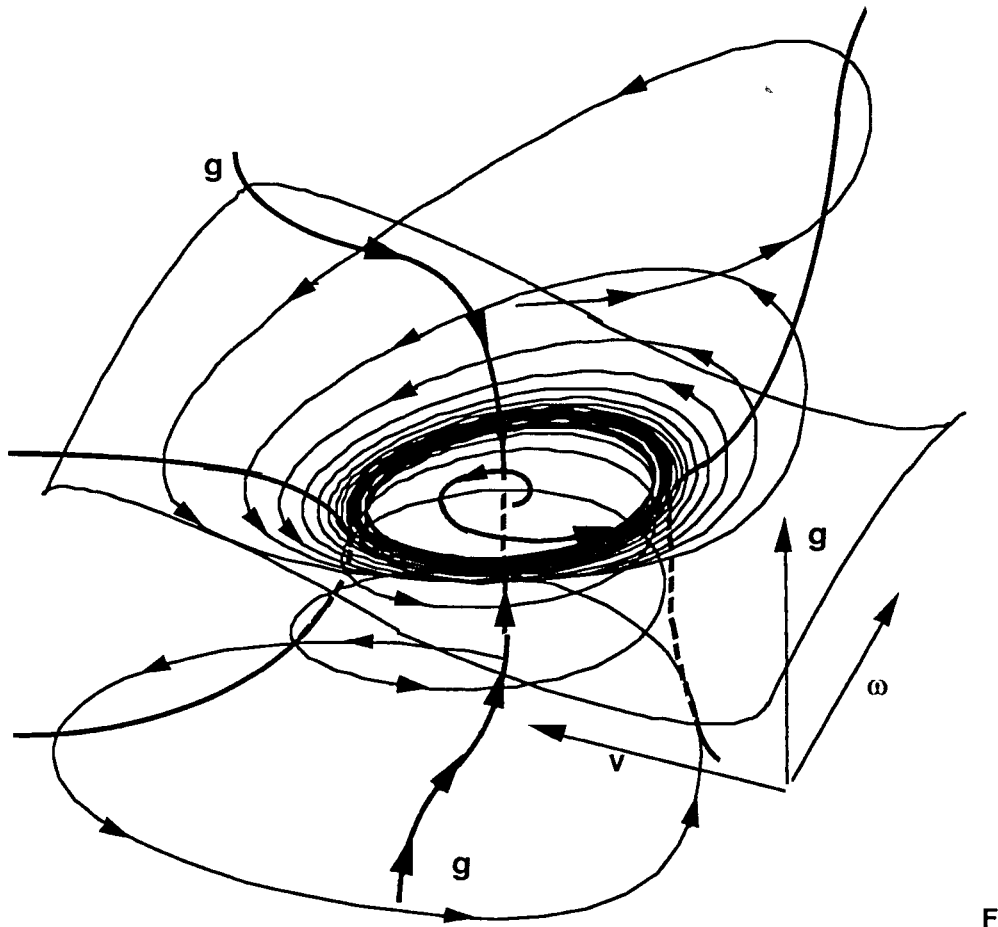
Una de les situacions que poden donar-se consisteix que el mòdul de les arrels complexes sigui positiu però molt petit en valor absolut -proper a zero- i que, en comparació, el valor absolut de l'arrel negativa sigui gran. Si es comprova que, en variar els valors d'algun paràmetre, els mòduls de les dues arrels complexes es van fent més petits i acaben sent negatius, aleshores, donat que les funcions són contínues, diferenciables i de comportament suau, donat que els mòduls de les arrels complexes es fan zero i donat que la derivada del mòdul respecte del paràmetre en aquest punt és diferent de zero, es podrà aplicar el teorema de la bifurcació de Hopf, que diu que hi ha una superfície bidimensional de solucions periòdiques, tangent al centre  $n$ -dimensional (*center manifold*) i quadràticament tangent a l'espai propi de les arrels complexes (*eigenspace*) -construït a partir de la norma de les arrels- que tindrà una forma de paraboloid. Aquestes solucions periòdiques seran cicles límit estables o seran solucions periòdiques repel·lides depenent dels valors que prengui el coeficient del terme de segon ordre de l'expansió de Taylor del sistema en el punt crític no hiperbòlic -el centre- (*Verhulst, 1985; Guckenheimer i Holmes, 1990; Perko, 1991; Arrowsmith i Place, 1992*).

Segons a quina variable correspongui cada arrel es pot donar una situació en què apareixen aquests cicles límit, de forma que el sistema fluctuaria en un entorn tancat, molt més petit que les cotes que fixen les condicions econòmiques generals.

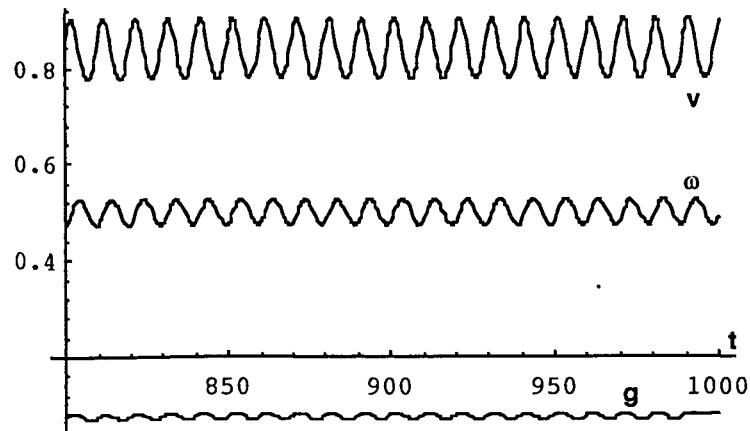
En el model aquesta situació pot donar-se quan l'arrel negativa correspon a  $g$  i té un valor absolut prou gran en comparació al mòdul de les arrels de  $\omega$ ,  $v$ . Això s'explica perquè les variacions de la taxa d'acumulació afecten directament al nivell d'ocupació i, per tant, als salaris. Però, a més,  $g$  depèn d'ella mateixa i

no depèn directament del nivell d'ocupació, sinó a través de la corba de Phillips. En conseqüència,  $g$  té una certa autonomia o inèrcia en el seu funcionament que, per segons quins paràmetres, li permet exercir un control efectiu sobre les altres variables.

En la Figura 3.2. es representa l'ajust cap a una fluctuació límit en el cas que es compleixin les condicions anteriors. A la Figura 3.3. es mostra la sèrie temporal que resulta quan el sistema està sobre el cicle límit, després que  $t$  s'ha fet molt gran ( $t = 1000$ ).



**Figura 3.2:** Diagrama de fluxes del sistema d'equacions no lineal en l'espai  $v$ - $\omega$ - $g$



**Figura 3.3:** Sèrie temporal des de  $t = 800$  fins  $t = 1000$  anys

El problema, per tant, consisteix a veure si hi ha alguna especificació raonablement realista dels paràmetres que permetin l'existència d'un entorn acotat estable com el que s'il·lustra a la Figura 3.2 i, de ser així, veure com varia aquest comportament davant de canvis en els paràmetres. A tal fi, cal realitzar simulacions numèriques amb algun algoritme adequat. L'elecció de l'algoritme és important perquè el diferent grau de precisió de la simulació numèrica pot portar a errors de percepció qualitativa del sistema (*Gerald i Wheatley, 1989; Lorenz, 1993*) com, per exemple, pensar que hi ha un atractor caòtic on només hi ha un espai estable (*stable manifold*) (*Lorenz, 1993*). En el cas d'atractors caòtics, la diferent precisió en el càlcul porta a resultats diferents, tal com pot comprovar-se, per exemple, amb l'equació de Duffing o amb l'atractor de Lorenz (*Guckenheimer i Holmes, 1990; Arrowsmith i Place, 1992; Medio, 1992*).

### 3.4.3 Simulació i anàlisi dels paràmetres

En les simulacions que es mostren i, seguint el consell de Lorenz, s'han emprat dos algoritmes diferents molt precisos. Per una banda, l'algoritme que incorpora el programa Mathematica, del qual només se sap que és un algoritme multietàpic amb control d'etapa variable, que serveix per sistemes no ajustats, i que es pot fixar un nivell d'error arbitràriament petit. Per a la prova del model

s'ha fixat el nivell d'error en menys de 12 xifres decimals i s'han fet els càlculs amb una precisió de 25 xifres. Els resultats s'han comparat amb els que s'obtenien amb un algoritme de Runge-Kutta-Fehlberg de 8è ordre, amb un nivell d'error fixat en menys de 15 xifres decimals i no s'ha apreciat cap diferència.

En bona ciència, l'estratègia a seguir per triar els paràmetres ha de començar per uns valors el més realistes possible i, si no funciona, anar provant noves especificacions cada cop menys plausibles. Afortunadament, en el model que ens ocupa la primera especificació realista ja va portar a unes arrels característiques de valors adequats i la simulació va mostrar que es donaven comportaments oscil·latoris acotats. Només després es va procedir a un reajustament raonable dels paràmetres per tal que els resultats del model tinguessin l'ordre de magnitud de les dades de l'economia espanyola

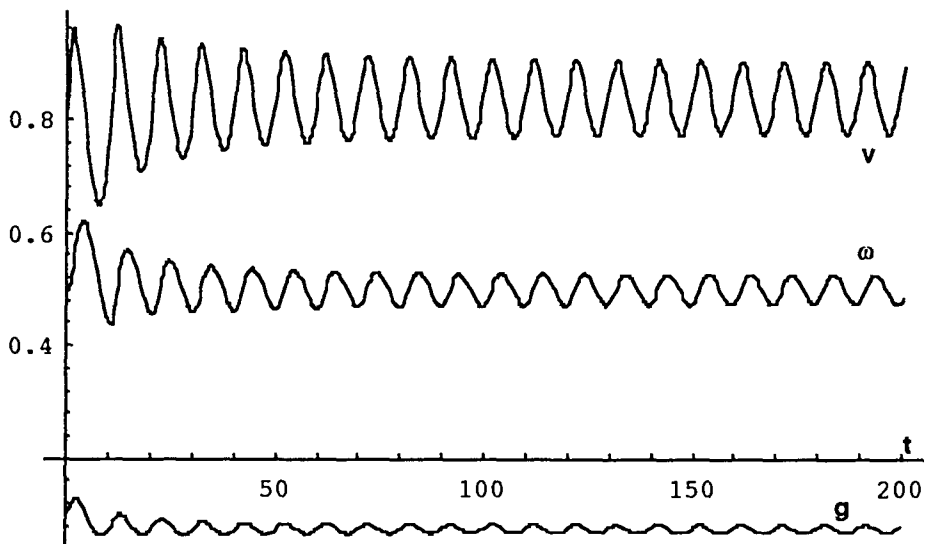
A la Taula 3.1. s'especifiquen els valors dels paràmetres, els valors de les arrels característiques i els valors de les variables en l'equilibri.

<b>Paràmetres</b>	$a = 0.87, \quad b = 5.5, \quad c = 6, \quad d = 2.5$ $n = 0.000, \quad \alpha = 0.01, \quad \delta = 0.065$ $\rho = 0.3, \quad j = 0.32, \quad h = 0.005$
<b>Arrels característiques</b>	$\phi_1 = 0.00817898 + 0.626811 i$ $\phi_2 = 0.00817898 - 0.626811 i$ $\phi_3 = - 0.103107$
<b>Valors d'equilibri</b>	$v = 0.839903$ $\omega = 0.4995$ $g = 0.075$
<b>Durada aproximada del cicle</b>	10 anys

**Taula 3.1:** Paràmetres de simulació, arrels característiques i equilibri

De la taula anterior destaca que, en primer lloc, el nivell d'atur d'equilibri -16 %- i la participació dels salaris en el PIB -50 %- corresponen als de l'economia espanyola. Per altra banda, la taxa d'acumulació d'equilibri correspon a una taxa d'inversió del 18.75 % del PIB, en equilibri, prenent una relació capital producte de 2.5 (Corrales i Taguas, 1991). Quan al comportament dels salaris reals, els paràmetres triats impliquen que el salari real varia un punt percentual per cada tres punts de variació de la taxa d'ocupació, excepte a partir d'una ocupació de més del 90 % ja que els salaris s'acceleren. S'ha pres un creixement nul de la població activa i un creixement de la productivitat de l'1 % anual. S'ha pres una taxa de depreciació del 6.5 % (Corrales i Taguas, 1991).

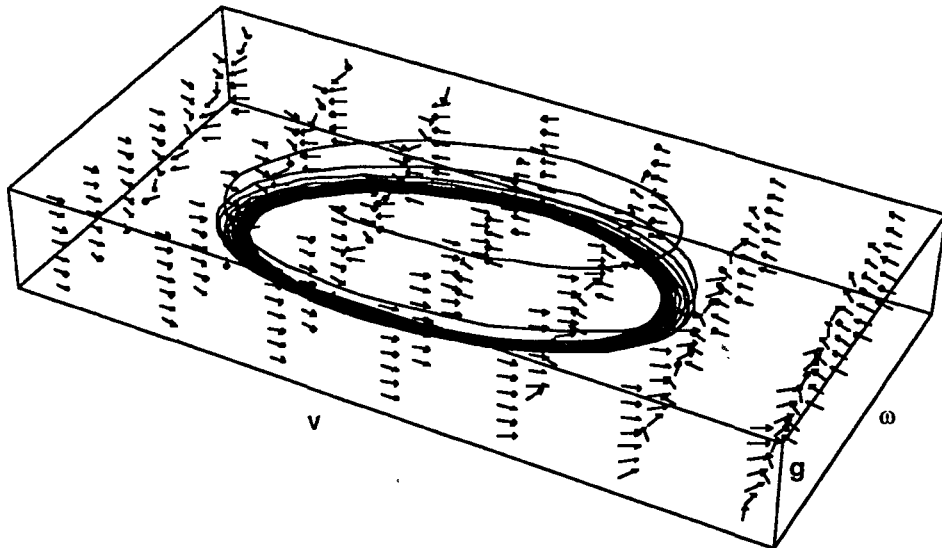
L'evolució temporal de les tres variables  $v, \omega, g$  es representa a la Figura 3.4 on destaca que els marges d'oscil·lació de cadascuna de les variables es corresponen amb els ordres de magnitud observats per a l'economia espanyola.



**Figura 3.4:** Evolució de  $v, \omega, g$ , des de  $t = 0$  fins  $t = 200$ .

Els valors inicials adoptats per a la simulació són  $v = 0.8$ ,  $\omega = 0.5$ ,  $g = 0.1$ . Els marges de fluctuació són, per l'ocupació, del 77 % al 90 %, per la participació dels salaris va del 46 % al 54 % i, per  $g$  va de 0.055 a 0.095, que representa fluctuacions de la inversió bruta des del 13.75% al 23.75 % del PIB.

La trajectòria en l'espai de fases i les direccions dominants en cada punt es representen a la Figura 3.5 on s'han emprat els mateixos paràmetres i condicions inicials.



**Figura 3.5:** Trajectòria en l'espai de fases i direcció del moviment

El comportament del model davant de canvis de valor en els paràmetres és el que es pot esperar. Així, per exemple, l'estabilitat de l'equilibri és molt sensible a la funció de reacció dels salaris. Quan més ràpidament varien els salaris reals en relació a les variacions en l'ocupació, més fàcil és que les arrels es facin negatives i l'equilibri sigui localment estable. Tot i així, si el paràmetre  $j$  es dobla i passa a ser de 0.6 -és a dir, per cada punt de canvi en l'ocupació la taxa de creixement dels salaris varia en 0.6 punts- el sistema encara manté la inestabilitat, quan  $n + \alpha = 0.015$ . De forma anàloga, si el nivell d'ocupació d'equilibri és més petit que el 84 %, el sistema es fa més inestable i les fluctuacions s'amplien. Així mateix, la inestabilitat augmenta quan més gran és  $n + \alpha$ .

Amb els paràmetres de la Taula 3.1, el sistema és inestable a partir de valors de  $n + \alpha = -0.00575$ , però si augmenta el paràmetre  $d$ , que recull la sensibilitat de la inversió a la distribució de la renda, el sistema augmenta la seva inestabilitat i permet taxes de creixement de la població i la productivitat molt més negatives. Així mateix, un augment del valor del coeficient  $\alpha$  -l'acumulació



autònoma- estabilitza el model, però si disminueix, augmenta la inestabilitat. Quant al paràmetre  $b$ , quan més gran més inestable és el model i si es fa prou gran en relació a  $d$  -aproximadament, si  $b > 4d$ -, aleshores es produeix una bifurcació, l'arrel negativa canvia de variable i el sistema pren els valors extrems entre els quals està acotat.

En qualsevol cas, l'anàlisi numèrica mostra que el comportament cíclic del sistema es dona dins d'un rang molt ample de valors realistes dels paràmetres la qual cosa suggereix que les fluctuacions econòmiques poden ser correctament descrites mitjançant models senzills, com el que aquí es presenta, que no necessiten d'hipòtesis gaire atrevides.

### 3.5 Interpretació econòmica del model bàsic

La dinàmica cíclica del model de la secció anterior té una interpretació econòmica directa i clara. El mecanisme de les fluctuacions endògenes ve generat per la interacció entre acumulació i distribució.

Quan augmenta l'acumulació, augmenta la demanda de mà d'obra i això fa augmentar els salaris. En augmentar els salaris segueix creixent la demanda i, a través del mecanisme accelerador, creix la inversió a un ritme encara més ràpid i augmenta més l'ocupació. Però a mesura que l'ocupació comença a arribar a nivells elevats, els beneficis comencen a erosionar-se degut a l'acceleració dels salaris mentre que, d'altra banda, comencen a aparèixer excessos de capacitat perquè totes les empreses han ampliat la capacitat durant l'expansió. Així, a la pèrdua de posicions distributives per la pressió salarial s'hi afegeix un excés de capacitat instal·lada i una major competència. Com a resultat, decau la rendibilitat de les empreses i es frena la inversió. El fre de la inversió porta, de nou per l'efecte accelerador, a una major caiguda de la inversió, que arrossega redera seu l'ocupació i amb ella els salaris. La caiguda de l'ocupació i de la inversió no tindria fons de no ser per dos elements: la inversió autònoma i la caiguda dels salaris reals. Quan els salaris han caigut prou i s'ha eliminat capacitat productiva -per l'efecte de la depreciació-, la inversió torna a ser atractiva i recomença el cicle.

Des del punt de vista econòmic, quan més ràpidament pugin i baixin els salaris en relació al nivell d'ocupació, més ràpidament reaccionarà la inversió. Per això el sistema es fa més estable si els salaris reals són més flexibles. De forma anàloga, si la inversió és molt sensible als salaris, augmentarà la inestabilitat o si l'efecte accelerador és molt important en relació a l'efecte capacitat, la inversió i el sistema seran molt més inestables. Per tant, els comportaments que s'han observat pels canvis de valors en els paràmetres  $j$ ,  $b$ ,  $d$  són els que, econòmicament, s'haurien d'esperar. Així mateix, quan més gran sigui el component autònom de la inversió -o de la despesa-, més estable serà el sistema. D'altra banda, si el nivell d'ocupació corresponent a un creixement nul dels salaris reals és més gran, és lògic que el sistema sigui més estable perquè arriba més ràpidament a les cotes superiors i els salaris s'acceleren abans.

Finalment, l'efecte del creixement de la productivitat i de la població activa sobre l'estabilitat del sistema té el sentit esperable. Si  $n+\alpha$  creixen molt ràpidament, les fluctuacions s'ampliaran perquè el sistema generarà amb molta més facilitat excedents de mà d'obra en els cicles recessius i, en els cicles expansius, podrà créixer més ràpidament perquè tardarà més d'arribar a la plena ocupació. De forma anàloga, si el creixement de la productivitat i de la població són negatius, l'economia es troba molt més sovint amb escassetat de mà d'obra i, per tant, els salaris arriben molt ràpidament al màxim, de forma que l'ajust de la inversió és més ràpid.

## 3.6 Ampliacions del model

### 3.6.1 El sector financer

En definir el comportament de la taxa d'acumulació  $g$ , s'ha esmentat que mancava una variable explicativa important, el cost financer,  $r$ . Els treballs econòmics atribueixen molta importància als costos financers de la inversió (*Andrés, et al., 1990; Andrés, et al., 1991*), tot i que la seva influència directa no pot ser massa gran, per la senzilla raó que els projectes d'inversió productiva, depenen molt més de les expectatives i de la capacitat d'endeutament de

l'empresa (*Kalecki, 1971*). El que sí està clar és que els costos financers afecten molt la demanda dels productes duradors i d'habitatge i que, a més, solen seguir el patró fluctuant de la conjuntura, per la qual cosa la seva influència sobre la inversió agregada recolliria els efectes dels canvis d'expectatives i dels canvis en la demanda.

Marc Jarsulic va posar de manifest que la consideració del tipus d'interès en un model molt senzill, on no es tenen en compte els efectes dels canvis en la distribució, pot portar a l'aparició de cicles econòmics (*Jarsulic, 1988; Jarsulic, 1989*). Però, tal com es demostra en un treball de propera publicació (*González Calvet i Sánchez Chóliz, 1994*), l'article de Jarsulic conté nombrosos errors que restringeixen l'abast de la seva anàlisi<sup>4</sup>. Tot i així, les conseqüències de la introducció del sector financer quan la distribució pot canviar no estan tractades. Per aquesta raó i perquè, al llarg de la història, les catàstrofes financeres han afectat profundament al món de la producció, val la pena entrar en l'anàlisi del model quan incorpora el sector financer.

L'especificació del sector financer és molt simple i segueix el patró de molts altres treballs amb models similars (*Di Matteo, 1984; Gandolfo i Padoan, 1984; Flaschel i Picard, 1986; Jarsulic, 1988; Jarsulic, 1989*). Així, es considera que hi ha crèdit endogen, però no es té en compte el mercat dels bons, ja que la llei de Walras permet ignorar-lo i, d'altra banda, no tindria massa sentit en un model agregat a preus constants.

En conseqüència, es pot especificar una funció molt senzilla de l'oferta de crèdit endògen, del tipus

$$C^s = C r^\alpha y^\beta \quad [3.31]$$

on  $r$  és el tipus d'interès,  $\alpha, \beta > 0$  són les elasticitats tipus d'interès i renda de l'oferta de crèdit. Es de destacar, que es parla de crèdit en lloc de diners per tal de ressaltar la capacitat del sistema financer per a crear diner o actius. La  $C$  tracta de reflectir el paper de la base monetària i és una variable exògena manipulada pel banc central.

---

<sup>4</sup>En l'apèndix 2 d'aquest capítol es resumeixen els resultats de l'article de González i Sánchez i es generalitzen les conclusions per qualsevol forma funcional de les equacions del moviment de la taxa d'acumulació i del tipus d'interès

Quant a la demanda de crèdit, pot formular-se similarment:

$$C^d = y^{\gamma} r^{-\kappa} \quad [3.32]$$

i  $\gamma, \kappa > 0$  són també les elasticitats renda i tipus d'interès de la demanda de crèdit, amb el signe habitual.

Si es prenen taxes de creixement de l'oferta i demanda de crèdit queda:

$$\hat{C}^s = \varepsilon + \chi \hat{r} + \beta \hat{y} \quad [3.33]$$

$$\hat{C}^d = \gamma \hat{y} - \kappa \hat{r} \quad [3.34]$$

on  $\varepsilon$  és la taxa de creixement de les reserves bancàries que depèn, per sobre de tot, de la política monetària. Per la condició d'equilibri del mercat financer es té que les taxes de creixement de l'oferta i demanda de crèdit han de coincidir:

$$\varepsilon + \chi \hat{r} + \beta \hat{y} = \gamma \hat{y} - \kappa \hat{r}$$

d'on s'aïlla la taxa de creixement del tipus d'interès:

$$\hat{r} = \frac{\gamma - \beta}{\chi + \kappa} \hat{y} - \frac{\varepsilon}{\chi + \kappa} = \lambda_1 \hat{y} - \lambda_2 \quad [3.35]$$

Noti's que si bé el signe de  $\lambda_2$  és sempre positiu, el seu valor pot apropar-se ràpidament a zero, depenent de la política monetària i del comportament de la demanda "especulativa" de crèdit. Normalment, el seu valor serà reduït, entorn d'algunes centèsimes, perquè la taxa de creixement de la base monetària, que, aproximadament és  $\varepsilon$ , sol ser petita. Quan al valor i signe de  $\lambda_1$ , la qüestió ja és més polèmica i, de fet, pot anar de  $-\infty$  a  $+\infty$ . Tot i així, el rang més probable es situa en valors positius al voltant de la unitat.

D'altra banda, s'ha de modificar la funció d'inversió, introduint-hi com a nou argument el tipus d'interès. La forma més simple de fer-ho és emprar un terme lineal que s'afegeix a l'expressió del canvi de la taxa d'acumulació [3.25]:

$$\hat{g} = a + bg - cg^2 - d\omega - er, \quad a, b, c, d, e > 0 \quad [3.36]$$

Amb el canvi dels condicionants de la taxa d'acumulació també variarà l'expressió de la demanda total. Així, l'equació [3.26] ara serà:

$$\hat{y} = a - \delta + (1+b)g - cg^2 - d\omega - er - \frac{\omega(\alpha - \rho + jv + \frac{h}{1-v})}{1-\omega} \quad [3.37]$$

i, en conseqüència, es pot reescriure l'equació del moviment del tipus d'interès:

$$\hat{r} = \lambda_1(a - \delta + (1+b)g - cg^2 - d\omega - er - \frac{\omega(\alpha - \rho + jv + \frac{h}{1-v})}{1-\omega}) - \lambda_2 \quad [3.38]$$

Així mateix, l'equació del moviment de l'ocupació, que ara quedarà com:

$$\hat{v} = a - \delta - \alpha - n + (1+b)g - cg^2 - d\omega - er - \frac{\omega(\alpha - \rho + jv + \frac{h}{1-v})}{1-\omega} \quad [3.39]$$

Com a resultat d'aquests canvis, el sistema d'equacions diferencials [3.28] incorpora una nova equació, la del tipus d'interès, i queda expressat de la següent manera

$$\dot{r} = r[\lambda_1(a - \delta + (1+b)g - cg^2 - d\omega - er - \frac{\omega(\alpha - \rho + jv + \frac{h}{1-v})}{1-\omega}) - \lambda_2] \quad [3.40a]$$

$$\dot{g} = g(a + bg - cg^2 - d\omega - er) \quad [3.40b]$$

$$\dot{\omega} = \omega(\alpha - \rho + jv + \frac{h}{1-v}) \quad [3.40c]$$

$$\dot{v} = v[a - \delta - \alpha - n + (1+b)g - cg^2 - d\omega - er - \frac{\omega(\alpha - \rho + jv + \frac{h}{1-v})}{1-\omega}] \quad [3.40d]$$

Amb aquesta nova configuració  $i$ , tal com passava al sistema original, hi ha un punt d'equilibri trivial a l'origen de coordenades de l'espai de dimensió 4 en el que es mou el sistema. Tot i així, pot deixar de tenir punts d'equilibri no trivials.

Per cercar l'existència d'equilibris es comença, com abans, per l'equació del moviment de l'ocupació. De l'equació [3.40d] s'extreu directament un valor d'equilibri per  $g$ , que s'anomenarà  $g^*_v = \alpha + n + \delta$ , que correspon a la taxa de creixement garantit de Harrod. Però, d'altra banda, l'equació del tipus d'interès [3.40a] permet aïllar un altre valor d'equilibri independent  $g^*_r = \lambda_1/\lambda_2 + \delta$  que pot coincidir o no amb l'anterior i que, com es veu, ve completament determinat pel sector financer.

En conseqüència, només hi haurà una sola situació casual en la que el sistema estarà en equilibri complet, quan  $g^*_v = g^*_r$  i que no té perquè ser estable. En totes les demés situacions o bé s'estarà movent l'ocupació i els salaris o bé ho farà el tipus d'interès.

Uns pocs experiments numèrics mostren que el sistema és capaç d'exhibir comportaments de tota mena, des dels purament estables als cíclics, de la plena ocupació al col.lapse total, o fins i tot, pot presentar fluctuacions catastròfiques, la qual cosa mostra que té una important inestabilitat estructural. Tot i així, el comportament és diferent segons que  $g^*_v$  sigui més gran, igual o més petit que  $g^*_r$ .

En primer lloc cal destacar que el sistema sempre acaba agafant la senda d'acumulació més reduïda. Això és fàcil de comprendre considerant que tant el salari com el tipus d'interès poden pujar tant com calgui com a reacció a una alta taxa d'acumulació  $i$ , per tant, acaben frenant-la mentre que, ambdues variables, tenen un sostre inferior del que no poden baixar. En conseqüència, les dues tenen capacitat il.limitada per frenar l'economia, però la seva capacitat d'estímul és limitada. Per tant, la taxa d'acumulació d'equilibri sempre quedarà fixada en el seu mínim.

Es interessant considerar què passa quan  $g^*_r < g^*_v$ , perquè aleshores pot aparèixer un cicle de tipus financer que es sobreposa al cicle d'acumulació d'origen distributiu, canviant-ne el període i la intensitat. En aquesta situació, les grans fluctuacions, de caràcter catastròfic apareixen amb molta facilitat per

petits canvis en els valors dels paràmetres  $\omega$ , senzillament amb canvis de la situació inicial. Això mostra que el model pot arribar a fer-se especialment inestable o que pot anar al col.lapse. A la Figura 3.6 s'il.lustra un d'aquests casos i es mostra que el cycle tendeix a reduir-se, però, que finalment, comencen a caure l'ocupació i el salaris fins que el sistema es col.lapsa per la puja del tipus d'interès  $\omega$ , en altres casos, entra en una zona d'oscil.lacions catastròfiques.

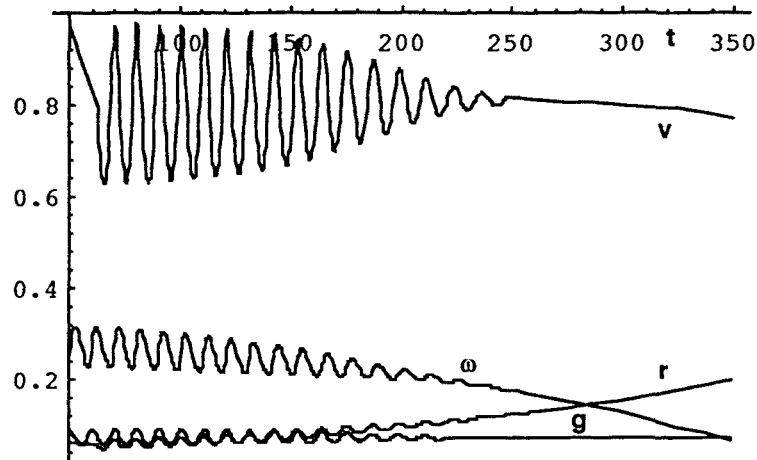


Figura 3.6: *Cicle econòmic amb crèdit endògen  $g^*r < g^*v$*

En el cas invers, quan la taxa d'acumulació d'equilibri determinada pel sector financer és més gran que la provinent de l'equació d'ocupació, aleshores la dinàmica queda clarament dominada pel cycle distributiu i el tipus d'interès acaba tendint a zero, tal com s'il.lustra a la Figura 3.7. Però aquesta no és l'única situació, sinò que també poden arribar a donar-se oscil.lacions catastròfiques o, en altres casos, comportaments estables.

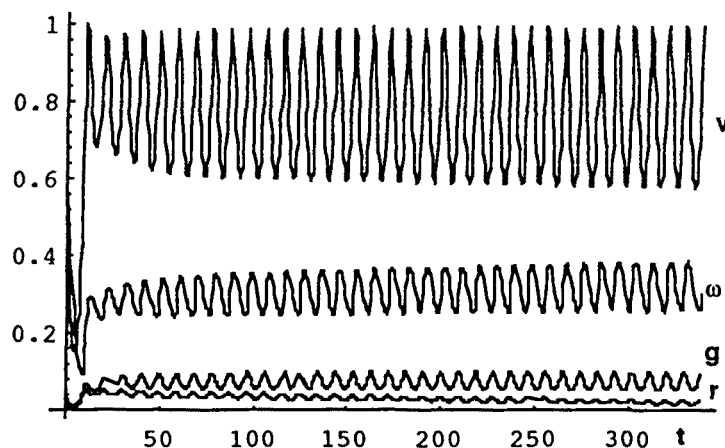


Figura 3.7: *Cicle econòmic amb crèdit endògen,  $g^*v < g^*r$*

En qualsevol cas, sembla que la inestabilitat del sistema augmenta quan  $g^*_r > g^*_v$ , és a dir, que per raons purament financeres el sistema econòmic podria presentar situacions de creixement més baix amb inestabilitat més alta.

Un dels casos en què podria donar-se aquesta situació és quan hi ha una política monetària restrictiva. En aquests casos, la taxa de creixement de la base monetària,  $\epsilon$  és molt petit i l'elasticitat-renda de l'oferta de crèdit,  $\beta$ , serà més reduïda. Per tant, el coeficient  $\lambda_2$  prendrà valors molt petits i  $\lambda_1$  serà més gran, amb la qual cosa  $g^*_r$  es farà més petit i, fins i tot, es pot arribar a  $g^*_r < g^*_v$ .

Per altre costat, una alta elasticitat-renda de la demanda de crèdit podria dur a una situació similar si no anés acompanyada d'un creixement més ràpid de la base monetària.

Tot i l'estructura mínima del model, és capaç de donar llum sobre la possibilitat de crisis d'origen financer que afecten profundament el sector real de l'economia. Les condicions per tal que això pugui passar són vàries. La primera, que l'acumulació sigui prou sensible als canvis en el tipus d'interès és a dir, que el paràmetre  $e$  tingui un ordre de magnitud igual o superior a un terç de  $d$ . La segona condició consisteix que la taxa d'acumulació d'equilibri determinada pel sector financer sigui inferior a la que determina el sector real. Finalment, cal que el tipus d'interès sigui prou sensible als canvis en l'acumulació.

### 3.6.2 Incorporació del sector exterior i del sector públic

El model es pot ampliar per tal que pugui incloure alguns elements addicionals, en especial, que tingui en compte el sector exterior ja que pot ser una font important de pertorbacions i, per sobre de tot, que inclogui una especificació del sistema de seguretat social i de l'assegurança d'atur.

En introduir aquests canvis, la demanda de l'economia ja no pot expressar-se només en termes de la despesa d'inversió sinó que ha d'incloure les altres despeses autònomes. Així mateix, el multiplicador ja no tindrà l'especificació kaleckiana senzilla sinó que haurà d'incloure els nous elements com els tipus impositius, la propensió a importar o la proporció entre salari i prestació d'atur. En conseqüència, si la funció d'inversió està basada en el mecanisme de



l'accelerador flexible s'haurà d'incloure els nous elements de la demanda, canviarà l'especificació de la inversió  $i$ , per tant, canviarà l'equació de la taxa d'acumulació.

L'especificació que s'ha triat per a la funció d'inversió té la mateixa forma funcional que abans però ara s'ha substituït la taxa d'acumulació per un argument que reculli el moviment de tota la demanda. L'equació del moviment de la taxa d'acumulació queda, per tant:

$$\hat{g} = a + b\mu\left(g + \frac{A}{K}\right) - d\left[\mu\left(g + \frac{A}{K}\right)\right]^2 - d\omega \quad [3.41]$$

on  $A$  és la despesa autònoma, que inclourà bàsicament les exportacions  $X$  (ja netes de les importacions autònomes) i la despesa del sector públic en béns i serveis  $G$ .  $K$  és l'stock de capital de l'economia i  $\mu$  el multiplicador kaleckià de la despesa autònoma. Es de notar que el quocient  $A/K$  és l'element que recull els nous components de la despesa autònoma  $i$ , donat que l'equació es formula referida a la taxa d'acumulació, entra en l'equació dividit per  $K$ .

Les exportacions es suposen totalment exògenes ja que, en aquest model, no es té en compte la variació dels preus  $i$ , per tant, no s'inclouen els tipus de canvi. Per a la simulació es considerarà que la demanda d'exportacions té una taxa de creixement fixa  $i$  que, segons  $i$  com, pot presentar fluctuacions autònomes. Quant a les importacions, tenen un component autònom que ja s'ha deduït de les exportacions i un component induït que es suposa que depèn del nivell de renda intern segons una relació lineal, amb una propensió marginal a importar,  $m$ .

L'especificació del sistema de protecció social s'ha fet d'una forma molt simple però reflecteix prou bé els seus trets principals. Per la banda de les despeses s'ha suposat que hi ha un sistema de pensions que paga unes prestacions proporcionals als salaris vigents. S'ha pres aquest supòsit a fi de simplificar el tractament formal, però tot i així, en termes de poder adquisitiu, el conjunt de les pensions segueixen de molt aprop les fluctuacions dels salaris ja que es paguen a partir de la massa salarial. De totes formes, l'argument pot mantenir-se igualment si la quantia de la pensió es fixa d'una altra forma, aliena al nivell corrent del salari. Amb aquesta especificació, la despesa de pensions té

un grau molt elevat d'autonomia, perquè el nombre de pensionistes només depèn de les condicions demogràfiques. Així, la despesa en pensions  $B$  serà:

$$B = N \tau w p = N \tau p \omega y / L = \omega y \tau p v \quad [3.42]$$

on  $N$  és la població activa,  $\tau$  el nombre de jubilats per actiu,  $w$  el salari vigent i  $p$  la proporció que la pensió representa sobre el salari. Per altra banda s'ha introduït una assegurança de desocupació en la qual la prestació és una proporció  $\eta$  del salari vigent. Si es considera que tots els treballadors aturats cobren l'assegurança, es tindrà que la despesa per desocupació,  $U$  serà:

$$U = (N - L) \eta w = (N - L) \eta \omega y / L = \omega y (\eta v - \eta) \quad [3.43]$$

Finalment, es considera que ambdós sistemes de protecció social es financen amb un impost proporcional sobre els salaris, la cotització al sistema de seguretat social  $q$ , i que no tenen cap component de capitalització.

Per tal d'aïllar completament els efectes del sistema de seguretat social de la resta del sistema fiscal i del sector públic, s'ha optat per excloure els altres impostos i despeses del sector públic i considerar que són zero. Tot i així, es poden introduir fàcilment en el model, encara que la notació s'allarga molt més.

Considerant que tant la població jubilada com la desocupada es comporten com els assalariats en allò referent a la despesa, es tindrà que consumeixen tots els seus ingressos i que, per tant, la funció de la demanda de consum prendrà una altra forma:

$$C = \omega(1 - q)y + (1 - \omega)(1 - s)y + \omega y \left( \frac{\eta}{v} - \eta \right) + \omega y \frac{p\tau}{v} \quad [3.44]$$

El primer element correspon a la despesa de consum dels assalariats que és igual als seus ingressos nets de quotes de seguretat social,  $q$ . El segon terme és el consum dels capitalistes. El tercer terme és el consum dels aturats i finalment, l'últim terme recull el consum dels jubilats.

A partir de la funció de consum es podrà obtenir l'expressió per a la demanda efectiva:

$$y = \frac{Kg + A}{m + s - \omega\left(\frac{p\tau}{v} + \frac{\eta}{v} - \eta - q - s\right)} = \mu(Kg + A) \quad [3.45]$$

D'acord amb aquestes especificacions les equacions de moviment del sistema es podran escriure de la següent manera:

$$\hat{g} = a + b\mu\left(g + \frac{A}{K}\right) - d\left[\mu\left(g + \frac{A}{K}\right)\right]^2 - d\omega \quad [3.46a]$$

$$\hat{\omega} = f(v) - \alpha \quad [3.46b]$$

$$\hat{k} = g - \delta \quad [3.46c]$$

$$\hat{X} = x(t) \quad [3.46d]$$

$$\hat{v} = \frac{-\mu\omega\hat{\omega}\left(\frac{p\tau}{v} + \frac{\eta}{v} - \eta - t + s\right) + \left(\frac{Kg(\hat{K} + \hat{g}) + \hat{A}A}{Kg + A}\right) - \alpha - n}{1 - \mu\omega\left(\frac{p\tau}{v} + \eta\right)} \quad [3.46e]$$

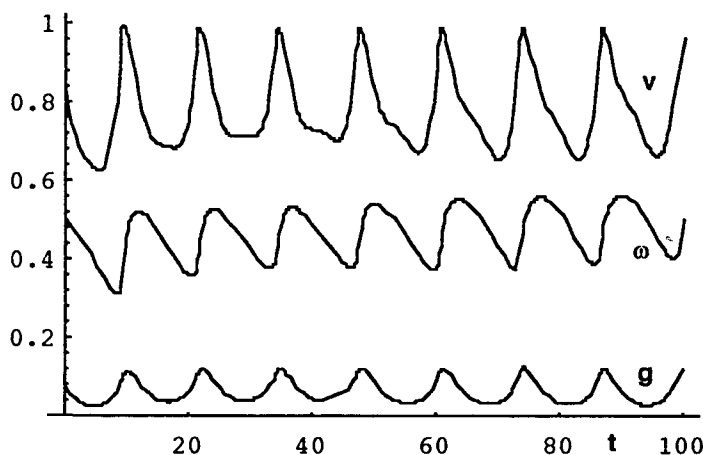
El sistema descrit per les equacions [3.46] es caracteritza perquè també pot presentar fluctuacions cícliques. Però, a més, ara hi ha altres elements autònoms que poden influir molt sobre la seva dinàmica. Un element que pot produir canvis qualitatiu molt importants és el sector exterior. De fet s'ha introduït en el model per tal de veure els efectes que pot produir l'apertura a l'exterior i els efectes de les fluctuacions internacionals.

Així, si la demanda d'exportacions té oscil·lacions autònomes, aleshores el sistema es comportarà com un oscil·lador forçat ja que, a més de les fluctuacions d'origen intern, la seva demanda autònoma oscil·larà segons el patró de les exportacions i, si la demanda d'exportació i la magnitud de les seves fluctuacions és prou gran, el sistema pot arribar a a presentar comportaments molt estranys i fins i tot, caòtics (*Goodwin, 1990*).

A la Figura 3.8 s'il·lustra una típica oscil·lació forçada que apareix quan les exportacions segueixen un creixement exponencial amb una oscil·lació associada, de la forma  $X = X_0 e^{\kappa t} + \kappa \sin(t/2)$  i on els paràmetres prenen els valors de la Taula 3.2 (en absència de sector públic):

$a = 1.2$	$b = 5$	$c = 6$	$d = 4.5$
$\delta = 0.065$	$\rho = 0.3$	$j = 0.32$	$h = 0.005$
$s = 0.85$	$a = 0.01$	$x = 0.0145$	$m = 0.1$
$n = 0.005$	$X_0 = 10$	$K_0 = 250$	$\kappa = 0.2$

**Taula 3.2 :** Paràmetres de simulació del sistema amb sector exterior



**Figura 3.8:** Fluctuacions de  $v$ ,  $w$ ,  $g$  en presència de sector exterior

El sistema [3.46] tindrà una taxa  $g^*$  d'equilibri que vindrà determinada per l'equació del canvi en l'ocupació. En termes sintètics, aquesta equació es pot escriure en termes de taxes de creixement de la demanda i del multiplicador:

$$\hat{v} = \hat{y} - \alpha - n = \hat{\mu} + (Kg \hat{A}) - \alpha - n \quad [3.47]$$

Dins del multiplicador hi ha diversos elements que poden variar: el nivell d'ocupació, la proporció passius/actius o els paràmetres del sistema de seguretat social -si, per exemple, hi ha algun sistema d'ajust del saldo pressupostari. D'entre ells la taxa d'ocupació és la variable endògena i fa variar en sentit invers al multiplicador.

De l'expressió [3.46e], es pot aïllar  $g^*$ . Suposant que existeix aquest  $g^*$  que fa  $\hat{v} = 0$ , es tindrà que  $\hat{w} = 0$  i que el multiplicador només varia per arguments exògens que, per facilitar l'anàlisi, es poden considerar momentàneament fixes. En conseqüència, l'expressió que es troba per a  $g^*$  és relativament senzilla:

$$g^* = \frac{\alpha + n + \delta \pm \sqrt{(\alpha + n + \delta)^2 - 4 \frac{A}{K} (\hat{A} - \alpha - n)}}{2} \quad [3.48]$$

Per tant,  $g^*$  prendrà valors positius superiors a  $\alpha + n + \delta$  sempre que la taxa de creixement de la demanda autònoma sigui menor que la taxa de creixement de la productivitat més la taxa de creixement de la població. Quan la demanda autònoma creixi més ràpidament, aleshores es tindrà que  $g^*$  prendrà valors positius només si  $A/K$  té valors prou petits o  $\hat{A}$  no és massa gran. En general, quan més tancada sigui una economia més petit serà  $A/K$  però, probablement més gran serà  $\hat{A}$ . Tot i així, dins d'un ample marge de valors raonables es troba que hi ha un  $g^* > 0$  i, per tant, un equilibri, amb  $g^* < \alpha + n + \delta$ . En els demés casos no hi ha equilibri i, per tant, les variables canvien permanentment i podrien donar lloc a dinàmiques molt més complexes o catastròfiques.

Es important ressaltar un aspecte de l'equilibri. Si  $\hat{A} > \alpha + n$ , aleshores el capital creix més lentament que la demanda autònoma, augmenta el ratio  $A/K$  i  $g^*$  anirà disminuint fins arribar a zero. A més, durant el procés, l'ocupació anirà augmentant per la pressió de la demanda autònoma. La participació dels salaris també creixerà fins arribar al màxim. Aquesta situació es dona degut a l'especificació massa simple del model ja que, en créixer els salaris, els preus de venda de la producció també augmentarien i es frenarien les exportacions.

Val a dir que la incorporació d'un element de despesa pública autònoma que presentés fluctuacions cícliques -el cicle polític- tindria exactament el mateix efecte de modificar la forma, la periodicitat i l'amplitud de la fluctuació.

En qualsevol cas, la dinàmica del model és força complexa i l'estudi de les simulacions, amb diferents conjunts de paràmetres, ajudarà a apreciar-ne el comportament.

## ***Apèndix 1***

---

***Una ampliació del model de Goodwin***



El model que es planteja és una reformulació del model de Goodwin (*Goodwin, 1967*) on s'han modificat dues hipòtesis. D'una banda, s'utilitza una funció de reacció dels salaris no lineal, la qual cosa introdueix un element d'assimetria en l'ajust del model. D'altra banda, s'introdueix un creixement variable de la població, que sigui capaç de recollir transicions demogràfiques. Com es veurà, cap dels dos canvis és prou rellevant com per a alterar els sòlids resultats del model original.

Quan a la notació, tal com s'ha vingut fent fins aquí, un punt sobre una variable indica la seva taxa de variació instantània respecte del temps ( $d/dt$ ), mentre que l'accent circumflex indica la taxa de creixement instantània o derivada del logaritme natural de la variable respecte del temps ( $d/dt (\ln x)$ ). S'empren taxes instantànies per comoditat de notació i de càlcul.

Les definicions bàsiques del model són:

$$\sigma = k / q$$

on  $\sigma$  és la raó capital-producte,  $k$  el capital i  $q$  el producte brut.

$$L = q / a, \quad L \leq N$$

on  $L$  és la demanda de mà d'obra o població ocupada,  $a$  la productivitat del treball i  $N$  la població activa. Per definició, l'ocupació mai no pot ser més gran que la població activa. Així mateix,

$$u = (N - L) / N$$

on  $u$  és la taxa de desocupació.

$$\omega = w L / q = w a, \quad 0 < \omega < 1$$

on  $w$  és el salari i  $\omega$  la participació dels salaris en el producte brut.



$$\pi = 1 - \omega,$$

on  $\pi$  és la participació dels beneficis en el producte brut.

$$\dot{k} = I - \delta k$$

on  $k$  és l'stock de capital,  $\delta > 0$  representa el ratio de depreciació i  $I$  és la inversió.

Les hipòtesis de partida del model són les següents:

(1)  $q = \min(k / \sigma, N a)$ , la producció utilitza una tècnica de coeficients fixos,  $k$  i  $N$  són homogenis i no específics,  $\sigma$  és constant.

(2)  $N_t = N_0 + \frac{(N_1 - N_0)}{1 + e^{-\beta(t-t_0)}}$  la població activa o força de treball creix segons una logística on  $\beta$  és una constant exògena,  $N_0$  el nivell inicial de població i  $N_1$  el nivell final quan  $t \rightarrow \infty$ .

(3)  $a_t = a_0 e^{\alpha t}$  hi ha progrés tècnic constant, estalviador de treball, on  $\alpha$  és la taxa instantània de creixement de la productivitat.

(4)  $I = \pi q$ ,  $C = \omega q$ . Tots els beneficis són estalviats i invertits. Tots els salaris es consumeixen. La inversió i els beneficis inclouen la depreciació (són "bruts").

(5)  $\hat{w} = \frac{\dot{w}}{w} = -\gamma + \frac{\rho}{u}$ ,  $\gamma, \rho > 0$ . El salari real creix inversament amb la taxa d'atur. Quan la taxa d'atur s'apropa a zero, el salari real s'accelera.

(6) Totes les magnituds econòmiques es mesuren a preus constants.

Aquestes hipòtesis difereixen de les de Goodwin només en la seva especificació. La hipòtesis (2) implica que la taxa de creixement de la població sigui variable i no constant, tal com suposa Goodwin. La hipòtesi (5) és una funció tipus corba de Phillips, en lloc de l'aproximació lineal que empra Goodwin. Finalment, s'introdueix una taxa de depreciació constant, per la qual cosa la hipòtesi (4) es refereix a quantitats brutes.

Per definició, la taxa de benefici en termes nets serà:

$$r = \frac{\pi q - \delta k}{k} = \frac{(1 - \omega)q - \delta k}{k} = \frac{(1 - \omega)}{\sigma} - \delta \quad \text{[A1.1 a]}$$

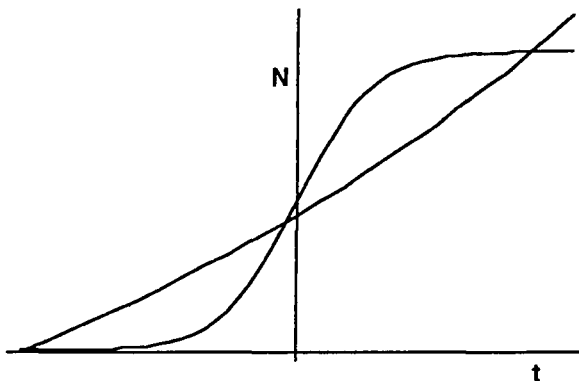
que, es pot reescriure en termes de la taxa de creixement del capital productiu

$$r = \frac{\pi q - \delta k}{k} = \frac{l - \delta k}{k} = \frac{\dot{k}}{k} = \hat{k} \quad [A1.1 b]$$

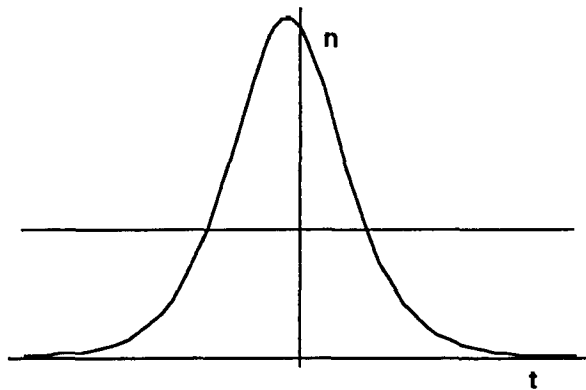
Un dels canvis introduïts consisteix que la població creix segons una logística. Aquesta especificació -o qualsevol altra de tipus sigmoïdal- és la que els demògrafs acostumen a prendre per a representar les transicions demogràfiques i que, normalment, no es té en compte en els models de creixement econòmic. (Stone, 1990) és una excepció i emprava un sigmoide de Gompertz. Quan la població no creix exponencialment, aleshores la taxa de creixement de la població  $n_t$  és variable. Aquí, la taxa de creixement instantani de la població resulta ser, a partir de la hipòtesi (2):

$$n_t = \frac{\dot{N}}{N} = \frac{(N_1 - N_0)\beta}{e^{\beta(t-t_0)}(1 + e^{-\beta(t-t_0)})^2 (N_0 + \frac{N_1 - N_0}{1 + e^{-\beta(t-t_0)}})} \quad [A1.2]$$

El paràmetre  $\beta$  regula la rapidesa de la transició des de la població inicial a la final. A les Figures A1.1a i A1.1b es representen el comportament de la població total i el de les taxes de creixement, per al cas exponencial i pel cas logístic. Queda clar que el canvi en la taxa de creixement de la població significa una perturbació addicional pel sistema econòmic.

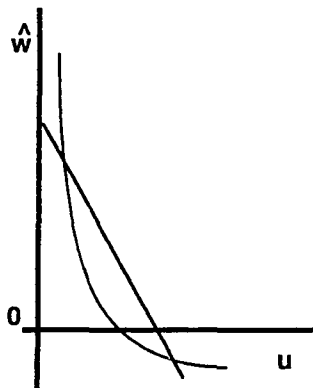


**Figura A1.1a:**  
 Creixement  
 exponencial i logístic  
 d'una població al llarg  
 de 100 anys.



**Figura A1.1b:**  
Evolució de les taxes de creixement exponencial i logística de la població .

Per altra banda l'especificació de la hipòtesi (5) no és més que una especificació senzilla d'una corba de Phillips a preus constants. L'aproximació lineal que pren Goodwin presenta l'avantatge d'un descens més ràpid dels salaris quan l'atur augmenta, la qual cosa permet que el mecanisme d'ajust del model en la recessió funcioni abans i millor.



**Figura A1.2:** Corba de Phillips i aproximació lineal de Goodwin

En canvi, en l'especificació que s'adopta aquí, la taxa de descens és menor o, com a molt, igual a  $\gamma$ , tal com es mostra a la Figura A1.2, però al mateix temps, la no linealitat, quan la taxa de desocupació és petita, fa que el mecanisme d'ajust durant les fases expansives funcioni més ràpidament. En certa forma, les

duracions relatives de l'expansió i la recessió s'inverteixen en relació al model de Goodwin.

Aquests canvis s'introdueixen per tal d'augmentar el grau de realisme en el comportament salarial i per tal de captar els efectes d'una transició demogràfica. D'altra banda, el fet que ambdós canvis siguin no lineals fa pensar que la trajectòria del sistema podria alterar-se molt.

Una altra modificació és la introducció de la depreciació. Amb la depreciació, el capital no només s'acumula sinó que també es destrueix i, per tant, hi ha la possibilitat que el sistema pugui col·lapsar-se, mentre que, en el cas de Goodwin, al no existir depreciació, ni el capital ni la producció total mai no disminueixen. Tot i així, com es veurà, aquestes modificacions no alteren el funcionament qualitatiu del model que depèn, per sobre de tot, del joc que hi ha entre acumulació i consum a través de la participació dels salaris en el producte brut. En un model en què tota la producció és sempre absorbida per la demanda, el ritme de creixement estarà lligat a les fluctuacions distributives, les quals determinen quina part de la producció s'acumula.

El mecanisme d'ajust del model rau en el mercat de treball i el paper que hi juga l'exèrcit de reserva de la força de treball. Quan l'ocupació s'apropa al màxim,  $w$  creix ràpidament i fa augmentar la participació dels salaris  $\omega = w/u$ . En conseqüència, els beneficis es contrauen i, per tant, la inversió es redueix, ralentint-se el ritme d'acumulació i d'expansió de la producció i l'ocupació. Però, com que l'ocupació és alta, la taxa de creixement dels salaris segueix accelerant-se i, per tant, els salaris segueixen augmentant. En conseqüència, els beneficis i la inversió segueixen disminuint fins que, eventualment, s'igualen a la depreciació. En aquest moment, l'stock de capital deixa d'augmentar i, per tant, la producció i l'ocupació arriben al seu màxim. Però, en aquesta situació, com que l'ocupació és propera al 100%, la taxa de creixement dels salaris és positiva, tot i que deixa d'accelerar-se i, per tant, els salaris creixen. Això implica que els beneficis i la inversió segueixen reduint-se i que, per tant, es fan inferiors a la depreciació i comença a destruir-se capital. En destruir-se el capital, disminueix la producció i l'ocupació i s'inicia la fase recessiva.

Cal recordar que, malgrat la disminució en l'ocupació, els salaris seguiran augmentant, a taxes cada cop més petites, mentre el nivell de desocupació no

sigui prou gran com per a fer-los disminuir. Degut a la no linealitat de la funció de reacció dels salaris, una petita disminució de l'ocupació porta a una desaceleració notable de la taxa de creixement dels salaris i, per tant, la participació dels salaris en el producte deixa d'augmentar ràpidament. Després, puix que segueix destruïnt-se capital i, per tant, disminuint l'ocupació, els salaris comencen a decreixer, i la participació salarial disminueix. Com a conseqüència, els beneficis i la inversió tornen a créixer i comencen a frenar el ritme de destrucció de capital i, per tant, comença a frenar-se la caiguda de la producció i de l'ocupació. Com que, en aquesta situació, la taxa d'atur és alta, els salaris segueixen baixant i els beneficis i la inversió segueixen augmentant fins al punt que compensen la destrucció del capital. En aquest punt, els nivells de producció i d'ocupació estan en el mínim i la taxa a la qual disminueixen els salaris és la màxima. A partir d'aquí, l'acumulació neta de capital serà positiva, tornarà a créixer la producció i l'ocupació, es frenarà la caiguda dels salaris i s'iniciarà un nou procés expansiu.

En aquesta versió, el col.lapse es precipita abans degut a la no linealitat de la hipòtesi (5) que fa que, poc abans d'arribar a la plena ocupació, els salaris creixen molt ràpidament i l'acumulació s'atura molt bruscament. Així mateix, el procés de recuperació genera taxes d'atur més elevades ja que els salaris es redueixen més lentament que en el model de Goodwin. La no linealitat de la funció de reacció dels salaris porta que els cicles tinguin forma de dent de serra. A diferència del model de Goodwin, l'aparició d'atur és, més que res, el resultat de la depreciació de l'equip productiu que, en principi, té una quantia més important que el creixement de la població i de la productivitat de la força de treball.

La força d'aquest mecanisme d'ajust per l'exèrcit de reserva és tan gran que, malgrat les modificacions, el model manté totes les seves característiques bàsiques. Així, es demostra formalment que existeix un punt d'equilibri, entorn el qual s'estableixen òrbites estables -depenents de les condicions inicials- que determinen les oscil.lacions del sistema per a qualsevol valor de la taxa de creixement de la població i de la productivitat dins d'un marge realista d'aquestes variables -entre - 5% i + 5% per cadascuna-. Així mateix, l'estabilitat del model tampoc resulta afectada per la forma de la relació entre salaris i atur,

sempre que sigui negativa. Finalment, la possibilitat de destrucció de capacitat productiva a través de la depreciació fa que el mecanisme d'ajust cíclic funcioni amb més rapidesa.

Totes aquestes proposicions poden demostrar-se formalment.

En primer lloc, a partir de la hipòtesi (1) es pot determinar la taxa de creixement de la producció. Prenent taxes de creixement instantani es tindrà que:

$$\hat{q} = \min(k / \sigma, n_t + \alpha) \quad [\text{A1.3}]$$

Si  $n_t + \alpha$  no pren valors negatius més grans, en valor absolut, que la taxa de depreciació del capital, aleshores no existeix mai capacitat productiva no utilitzada, ja que la relació inversa entre atur i salaris fa que l'acumulació de capital quedi aturada abans d'arribar als límits demogràfics. Per tant, el creixement del producte depèn només de la capacitat productiva i la relació anterior queda reduïda a

$$\hat{q} = \hat{k} = \frac{(1 - \omega)}{\sigma} - \delta \quad [\text{A1.4}]$$

És a dir, la taxa de creixement del producte és igual a la taxa d'acumulació i a la taxa de benefici.

Per a determinar la trajectòria del producte i, per tant, de l'acumulació del capital cal trobar, primer, la trajectòria de la distribució de la renda, ja que els beneficis apareixen com residuals, això és, com el sobrant del producte després de deduir-ne els salaris. Per la hipòtesi (5) la taxa de creixement dels salaris depèn del nivell de desocupació  $u$  i, per tant, de l'evolució de la població activa  $N$  i de la demanda de mà d'obra  $L$ .

Donat que  $L = q a$ , es tindrà que la taxa de creixement de l'ocupació és

$$\frac{\dot{L}}{L} = \hat{L} = \hat{q} - \hat{a} = \hat{k} - \alpha = \frac{(1 - \omega)}{\sigma} - \delta - \alpha \quad [\text{A1.5}]$$

En conseqüència, la variació de la taxa d'atur quedarà:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \frac{du}{dt} = \frac{d\left(\frac{N-L_t}{N}\right)}{dt} = \frac{L}{N}(\hat{N} - \hat{L}_t) = (1-u)\left[n_t - \left(\frac{1-\omega}{\sigma} - \delta - \alpha\right)\right] \\ \dot{u} &= \left[(n_t + \delta + \alpha) - \frac{1}{\sigma} + \frac{\omega}{\sigma}\right](1-u) \end{aligned} \quad [A1.6]$$

Aquesta relació correspon simètricament a la que obté Goodwin en termes de la taxa d'ocupació, amb la diferència que  $n_t$  (el creixement de la població) varia amb el temps segons l'expressió [A1.2] i que s'incorpora el paràmetre de la depreciació del capital  $\delta$ .

Com es pot comprovar, l'evolució d' $u$  està totalment lligada a l'evolució de la distribució  $\omega$ . D'altra banda, com que  $\omega = w \cdot a$ , es tindrà que la seva taxa de creixement serà  $\hat{\omega} = \hat{w} - \hat{a}$  i, per la hipòtesi (5) es tindrà que:

$$\hat{\omega} = -\gamma + \frac{\rho}{u} - \alpha \quad [A1.7]$$

que expressada en termes de taxa de variació dóna:

$$\dot{\omega} = \left(-\gamma - \alpha + \frac{\rho}{u}\right)\omega \quad [A1.8]$$

que és una expressió equivalent a la de Goodwin, en termes de la taxa d'atur.

Les equacions [A1.6] i [A1.8] que recullen  $\dot{u}$  i  $\dot{\omega}$  formen un sistema de dues equacions diferencials acoplades de primer ordre d'un tipus semblant al sistema de Lotka-Volterra. En efecte, si s'anomena:

$$\begin{aligned} n_t - \delta - \alpha - \frac{1}{\sigma} + \frac{\omega}{\sigma} &= a & \frac{1}{\sigma} - \frac{\omega}{\sigma} &= b \\ -\gamma - \alpha &= c & \rho &= d \end{aligned} \quad [A1.9]$$

es tindrà que, per el marge realista de valors dels paràmetres,

$$a < 0, b > 0, c < 0, d > 0, |b| > |a| > |c| \gg |d| \quad [A1.10]$$

i el sistema es podrà reescriure:

$$\dot{u} = (1-u)(a+b\omega) \quad [\text{A1.11a}]$$

$$\dot{\omega} = \omega\left(c + \frac{d}{u}\right) \quad [\text{A1.11b}]$$

que presenta algunes variacions en relació al de Lotka-Volterra.

El sistema està en equilibri quan no varien ni  $u$  ni  $\omega$ . En conseqüència, llevat del cas trivial en què  $u = 1$ ,  $\omega = 0$ , hi haurà un punt crític quan  $u = -d/c$  i quan  $\omega = -a/b$  (cal recordar que  $a, c < 0$ ). Si es fes l'anàlisi de l'estabilitat local en aquest punt, es trobaria que el determinant del jacobià es fa nul i que, per tant, el punt crític és no hiperbòlic i no procedeix la seva anàlisi a través del sistema linealitzat. Afortunadament, en aquest cas el comportament del sistema es pot trobar directament a través de l'obtenció de la corba integral, que dona la trajectòria de fases. Dividint entre si les dues equacions de [A1.11] es suprimeix  $dt$  i queda l'equació diferencial de la corba integral:

$$\frac{\dot{u}}{\dot{\omega}} = \frac{du}{d\omega} = \frac{(1-u)(a+b\omega)}{\omega\left(c + \frac{d}{u}\right)} \quad [\text{A1.12}]$$

L'equació [A1.12] és integrable per separació de variables. En efecte, reordenant [A1.12] es té:

$$\omega\left(c + \frac{d}{u}\right)du = d\omega(1-u)(a+b\omega)$$

i ajuntant els termes que porten la mateixa variable:

$$\frac{1}{1-u}\left(c + \frac{d}{u}\right)du = \frac{1}{\omega}(a+b\omega)d\omega$$

Reordenant, queda:

$$\left(\frac{c}{1-u} + \frac{d}{u(1-u)}\right)du = \left(\frac{a}{\omega} + b\right)d\omega$$



i que, després d'algunes manipulacions en el costat esquerre dóna una expressió directament integrable:

$$\left(\frac{d}{u} - \frac{-d}{1-u} - \frac{-c}{1-u}\right)du = \left(\frac{a}{\omega} + b\right)d\omega$$

que, en integrar, dóna l'expressió:

$$d \ln(u) - (d + c) \ln(1-u) = a \ln(\omega) + b\omega + A \tag{A1.13}$$

on  $A$  és la constant d'integració, que ve donada per les condicions inicials. Finalment, reordenant i eliminant els logaritmes l'expressió [A1.13] queda:

$$u^d(1-u)^{-(d+c)} = e^A \omega^a e^{b\omega} = B \omega^a e^{b\omega} \tag{A1.14}$$

L'expressió [A1.14] defineix tota una família de corbes integrals, de característiques topològiques semblants, amb l'única diferència del valor de  $B$ , és a dir, de les condicions inicials. L'expressió recorda molt la que obté Goodwin, tot i que presenta algunes diferències de comportament que tot seguit es veuran. Aquestes diferències es deuen, primer, a que  $n_t$  varia amb el temps i, per tant, el coeficient  $a$  varia amb el temps; i, segon, que degut a la no linealitat de la funció de reacció dels salaris, la trajectòria presenta algunes singularitats que la diferencien de la de Goodwin.

Per comoditat, es pot reescriure l'expressió [A1.14] com:

$$\Phi(u) = B\Psi(\omega) \tag{A1.15}$$

Per saber com és la trajectòria n'hi ha prou en veure el comportament d'ambdues funcions a mesura que canvien  $u$  i  $\omega$ . Tant  $\Phi$  com  $\Psi$  són positives per  $0 < u, \omega < 1$ . D'altra banda, les primeres derivades són, respectivament:

$$\Phi'(u) = \frac{d\Phi(u)}{du} = \left(\frac{d}{u} + \frac{d+c}{1-u}\right)\Phi(u) \tag{A1.16}$$

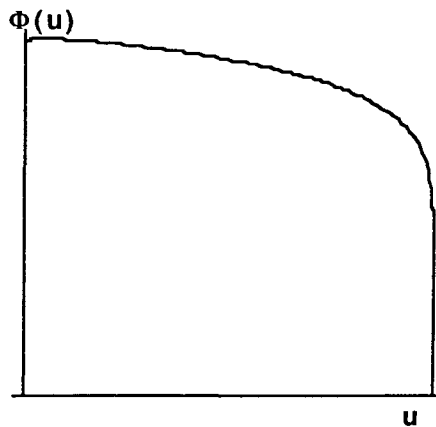
$$\Psi'(\omega) = \frac{d\Psi(\omega)}{d\omega} = \left( \frac{a}{\omega} + b \right) \Psi(\omega) \quad [A1.17]$$

Les expressions [A1.16] i [A1.17] són més complexes que les corresponents al sistema de Goodwin. Per veure el seu comportament, donat que  $\Phi(u)$  i  $\Psi(\omega)$  són positives en el marge rellevant, les seves derivades tindran un signe o un altre segons el comportament del factor que les multiplica.

Així, ja que  $d+c < 0$ , el factor de [A1.16] serà

$$\left( \frac{d}{u} + \frac{d+c}{1-u} \right) \geq \leq 0 \quad [A1.18]$$

segons el valor de  $u$ . Així per  $F'(u) = 0 \implies u = -d'c > 0$ . A més, l'expressió [A1.18] serà positiva per aquells valors de  $u < -d'c$  i serà negativa per als valors de  $u > -d'c$ .



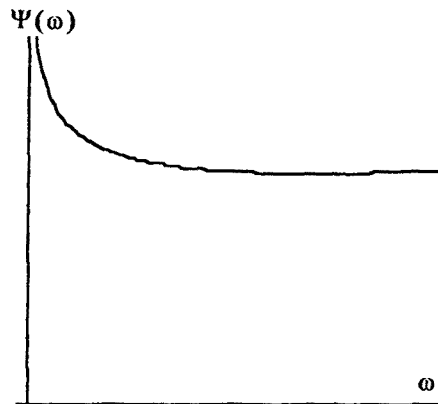
**Figura A1.3:** *Funció  $\Phi(u)$*

En conseqüència,  $\Phi(u)$  pren un valor màxim quan  $u = -d'c$ . Per un marge de valors realista dels paràmetres, aquest màxim s'assoleix per a un valor petit de  $u$  (expressat en les condicions [A1.10]). Com que, a més  $\Phi(u) = 0$  en els valors límit  $\{0, 1\}$  de  $u$  i la segona derivada és negativa, podem dir que la funció és còncaua envers l'eix  $u$  en tot el seu recorregut rellevant i que presenta un màxim. La Figura A1.3 il.lustra la forma de la corba.

De forma anàloga, l'expressió de  $\Psi'(\omega)$  serà positiva o negativa segons que el factor

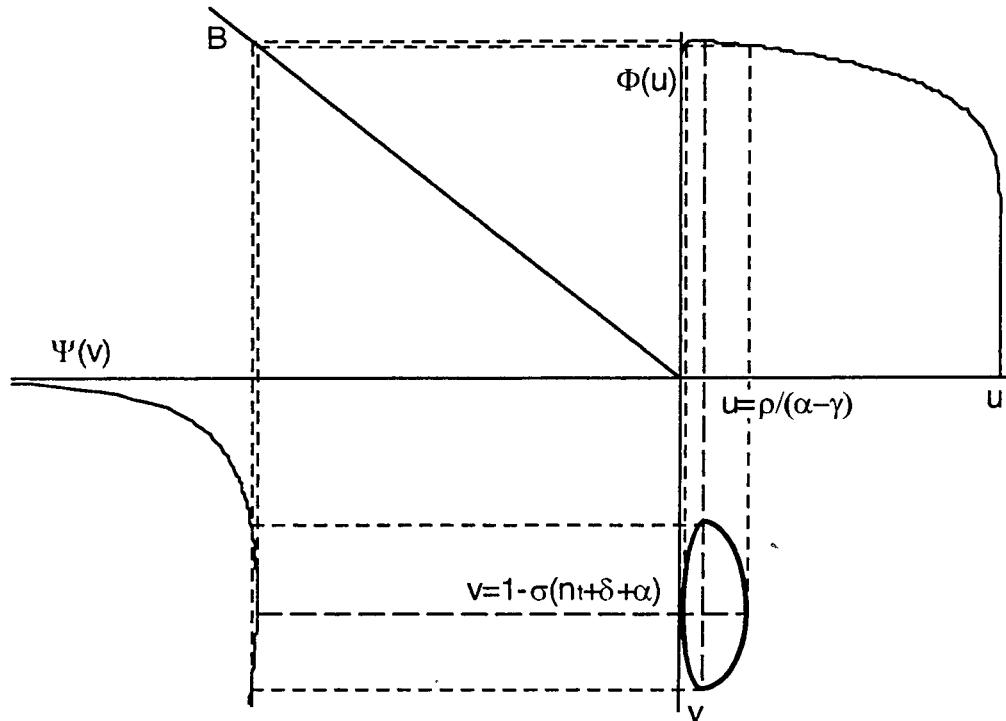
$$\left(\frac{a}{\omega} + b\right) \geq \leq 0 \tag{A1.19}$$

Com que  $a < 0$ , l'expressió [A1.19] tindrà un signe o un altre segons el valor de  $\omega$ . Així, per  $\omega = -a/b$ , el factor val 0. Si  $\omega > -a/b$  aleshores l'expressió [A1.19] és positiva i quan  $\omega < -a/b$ , es fa negativa. Així,  $\Psi(\omega)$  té un mínim quan  $\omega = -a/b$ . Per definició, com que  $|b| > |a|$ , el mínim es dona per un valor de  $\omega$  comprès entre 0 i 1. A més, donat que la segona derivada és sempre positiva, la funció és convexa envers l'eix de  $\omega$  en tot el seu recorregut rellevant. A la Figura A1.4 es representa la funció  $\Psi(\omega)$ .



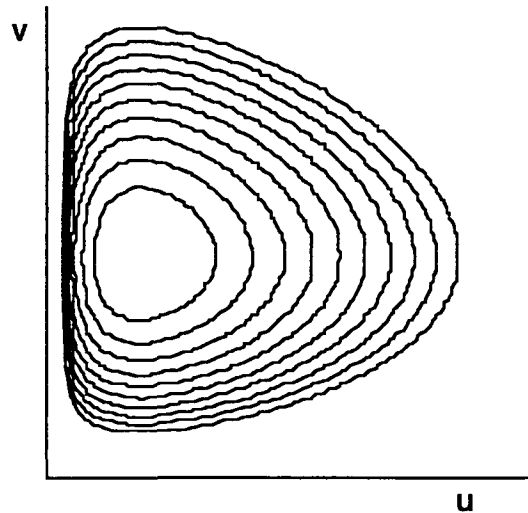
**Figura A1.4:** Funció  $\Psi(\omega)$

A partir d'aquestes dades és suficient per a dir que el sistema té una corba integral tancada i que, en conseqüència, presentarà oscil·lacions periòdiques. A la Figura A1.5 s'il·lustra l'obtenció gràfica de la corba integral.



**Figura A1.5:** Obtenció de la corba integral. Òrbita estable màxima

Convé ressaltar que per a cada  $B$  hi haurà una corba integral  $i$ , en conseqüència, allò que obtenim és una família de corbes de característiques similars. El centre d'aquesta família de corbes serà el punt crític del sistema, és a dir,  $[u^*, \omega^*] = [-d/c, -a/b] = [\rho(\alpha + \gamma), 1 - \sigma(n_t + \delta + \alpha)]$ . Donat que l'equació de les corbes integrals és una superfície còncaua que té el seu màxim en el punt crític, cada contorn d'aquesta superfície donarà una corba integral en la qual el sistema romandria oscil.lant indefinidament. Per aquesta raó es diu que és un sistema conservatiu, perquè en tots els punts del cicle el sistema es manté en el mateix nivell, sobre la mateixa corba integral. El sistema es situarà sobre una corba o una altre, depenent només de les condicions inicials. En la Figura A1.6, es representen algunes òrbites.

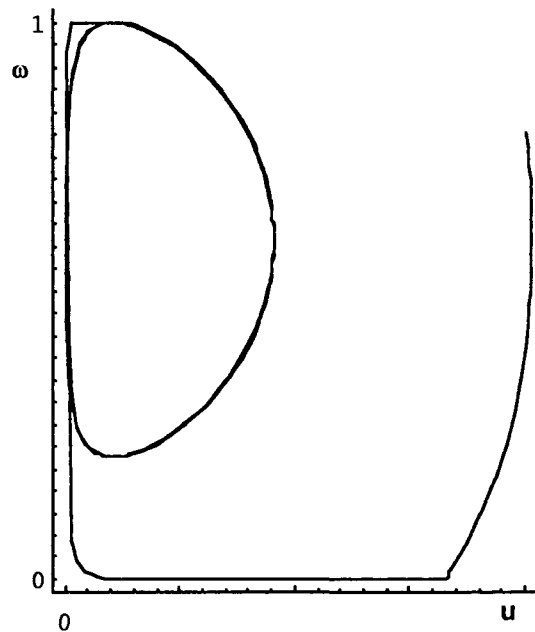


**Figura A1.6:** *Corbes integrals*

Aquests resultats s'obtenen a partir de l'anàlisi merament formal del sistema d'equacions. Però, convé no perdre de vista que aquests resultats matemàtics no estan sotmesos a les restriccions econòmiques. Així, per exemple, indiquen que, per valors plausibles dels paràmetres, hi ha corbes integrals que van més enllà de les acotacions  $0 \leq u, \omega \leq 1$ , la qual cosa no té sentit econòmic. Això implica que, pel sistema econòmic, les úniques corbes integrals estables són aquelles compreses entre ambdós límits.

En conseqüència, sempre que, per les condicions inicials, el sistema quedés situat sobre una òrbita que va més enllà, aleshores sempre tornaria cap a una òrbita estable màxima que és la que passa per alguna de les cotes. A la Figura A1.7 s'il·lustra el procés d'ajust.

Degut a que les condicions inicials situen al sistema sobre una corba molt allunyada dels límits, hi ha un nivell d'atur i de salaris molt elevats, de forma que el salari segueix disminuint fins tendir a zero. Degut a que l'atur segueix essent elevat, els salaris no es poden moure i, mentrestant, la inversió creix i l'atur va disminuint. Quan l'atur ha baixat el suficient, els salaris comencen a créixer i com que parteixen d'un nivell residual s'arriba a gairebé el 100 % de l'ocupació abans no comencen a despuntar, de forma que, finalment, els salaris es disparen i la seva participació a la renda es fa el 100 %.

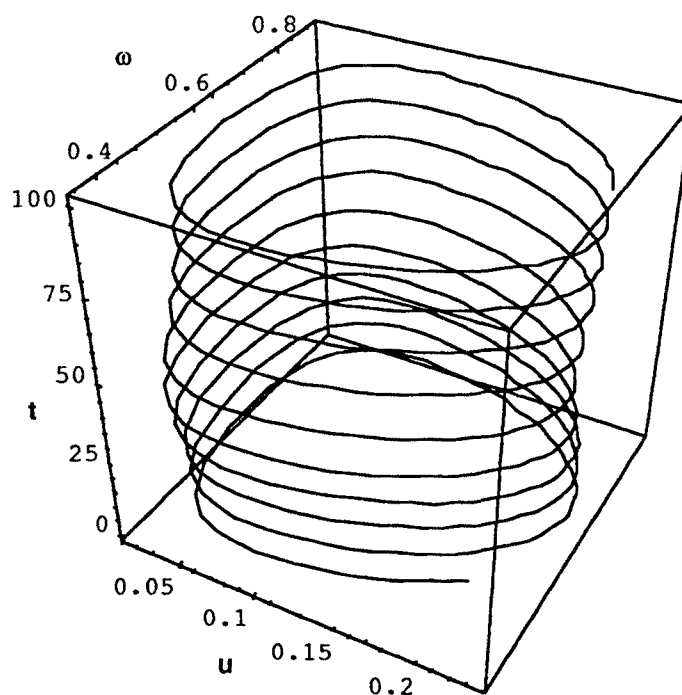


**Figura A1.7:** Procés d'ajust cap a l'òrbita estable màxima

En conseqüència, cau la inversió i torna a créixer l'atur però, mentrestant, el sistema s'ha situat en una nova posició, sobre una nova òrbita que no pot prendre cap valor per  $u$  ó  $\omega$  més enllà de les cotes. Segons els valors dels paràmetres, l'òrbita màxima estable es donarà per  $\omega=1$  o per  $\omega=0$  (o per  $u=0$  ó  $u=1$ ). En l'exemple del gràfic, l'òrbita màxima es dona per  $\omega=1$ . Precisament, aquesta òrbita màxima és la que resulta -per construcció- de l'obtenció gràfica de la corba integral a la Figura A1.5.

Fins aquí s'ha vist que el model de Goodwin manté el seu comportament malgrat que la funció de reacció dels salaris és no lineal. També es pot veure que tal no linealitat fa que el sistema experimenti uns canvis molt ràpids quan l'atur s'aproxima a zero, de forma que el cicle no és suau sinó que presenta fluctuacions molt ràpides i fortes, en forma de dent de serra.

També s'ha introduït un creixement logístic de la població que, de fet, no s'ha considerat en l'anàlisi anterior ja que s'ha emprat l'expressió  $n_t$ . Tot i així, es pot mostrar que una taxa de creixement de la població canviant en el temps no afecta la dinàmica del model.



**Figura A1.8:** Trajectòria del sistema amb creixement logístic de la població

Degut al canvi de paràmetres realitzat a [A1 9], es té que  $n_t$  forma part del paràmetre  $a$ . Així, quant més gran és el creixement de la població, més petit és  $a$  en valor absolut. Aquest efecte es transmet a la funció  $\Psi(\omega)$ , i al seu mínim, de forma que en augmentar  $n$ , més petita es fa  $\Psi$ , per tant, més petita és  $\omega$  -en promig-. Per tant, si  $n$  és variable en el temps les corbes integrals es desplaçaran amunt i avall en relació a  $\omega$  tot i que, per magnituds realistes de  $n$ , aquest moviment és petit. En cap cas, per gran que pugui ser  $n$  -en termes realistes, de -3% a +3 %- no queda afectada la corba integral, ja que les proporcions relatives dels paràmetres gairebé no s'alteren. A la Figura A1 8 s'il·lustra aquest procés<sup>1</sup>.

Finalment, val a dir que els sistemes conservatius són estables però no són ni asimptòtica ni estructuralment estables (*Samuelson, 1967; Samuelson, 1971; Hirsch i Smale, 1974; Vaart, 1976; Guckenheimer i Holmes, 1990; Arrowsmith i Place, 1992*). Per aquesta raó s'ha considerat que el model anterior no era prou satisfactori per a emprar-lo com a base per a l'anàlisi de simulació.

<sup>1</sup> Per a les gràfiques, els paràmetres prenen el valor següent  $N_0=25$ ,  $N_1=50$ ,  $\beta=0.1$ ,  $\alpha=0.02$ ,  $\sigma=3$ ,  $\delta=0.1$ ,  $\gamma=0.1$ ,  $\rho=0.01$ .

## ***Apèndix 2***

---

### ***Generalització del cicle econòmic amb crèdit endògen i distribució constant***





L'ampliació del model de creixement d'aquest capítol per a incloure el sector financer està basada en un model de cicles econòmics d'origen financer proposat per Jarsulic (*Jarsulic, 1988; Jarsulic, 1989*) que, en la seva versió original, contenia nombrosos errors. En un treball de propera publicació es demostra que, un cop corregits, el camp de validesa del model es redueix considerablement (*González Calvet i Sánchez Chóliz, 1994*). Tanmateix, és possible una generalització dels resultats de la crítica al model de Jarsulic que, precisament pel seu caràcter general, són aplicables a gairebé qualsevol model de cicle econòmic que compleixi les característiques que s'esmenten. Gràcies a la generalització, es troba que el model de cicle financer originari té elements valuosos que val la pena rescatar i que s'incorporen en les seccions anteriors.

En aquest apèndix es presenta la generalització dels resultats de la crítica al model de Jarsulic.

El model de Jarsulic parteix d'un sistema econòmic elemental on tots els beneficis s'estalvien i tots els salaris es consumeixen. Les decisions d'acumulació depenen de la demanda efectiva, de la capacitat i del cost financer, en la forma que ja s'ha vist al llarg del capítol. El sector real vé representat per les tres relacions:

$$Y = mgK, \quad m > 1 \quad [\text{A2.1}]$$

$$\hat{K} = \frac{\dot{K}}{K} = g - \delta \quad [\text{A2.2}]$$

$$\hat{g} = \frac{\dot{g}}{g} = a + bg - cr - dg^2 \quad [A2.3]$$

La distribució no s'hi inclou perquè, per tal de simplificar, es suposa que és constant i, per tant, el seu efecte ja està incorporat al paràmetre  $a$ .

D'altra banda hi ha un mercat financer elemental amb generació endògena de crèdit, amb funcions d'oferta i demanda de crèdit de tipus exponencial que tenen com a arguments el nivell de producció i el tipus d'interès. Els sentits de les relacions entre les variables són els habituals, i donen lloc a l'equació de moviment del tipus d'interès que ja s'ha vist a la secció 3.6 d'aquest capítol. Així, el sector financer es pot representar per:

$$C^s = Cr^{\alpha}Y^{\beta} \quad [A2.4]$$

$$C^d = Y^{\gamma}r^{-\kappa} \quad [A2.5]$$

La igualtat de les taxes de creixement de l'oferta i demanda de crèdit permet deduir d'immediat l'equació del moviment del tipus d'interès:

$$\dot{r} = r[\lambda_1(a + bg - cr - dg^2) + \lambda_2g - \lambda_2] \quad [A2.6]$$

essent  $\lambda_1 = \frac{\gamma - \beta}{\alpha + \kappa}$  i  $\lambda_2 = \frac{\varepsilon + (\gamma - \beta)\delta}{\alpha + \kappa}$ , amb tots els coeficients positius.

Jarsulic suposa, per conveniència formal, que  $\gamma - \beta > 0$ , que  $\lambda_2 > 0$ , i que  $a > \lambda_1/\lambda_2$ . A més, totes les magnituds s'expressen a preus constants.

L'equació [A2.3] expressada en taxa de variació i la [A2.6] formen un sistema de dues equacions diferencials no lineals acoplades, que tenen una forma molt similar. Les seves isoclines vénen donades per les equacions:

$$(a + bg - dg^2) \frac{1}{c} = r = r_g(g) \quad [A2.7a]$$

$$\left[ a - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} + (1 + b)g - dg^2 \right] \frac{1}{c} = r = r_r(g) \quad [A2.7b]$$

El sistema té un equilibri no trivial en el punt:

$$A = (g^*, r^*) = [ \lambda_2/\lambda_1, (a+b(\lambda_2/\lambda_1)-d(\lambda_2/\lambda_1)^2)/c ]$$

i, a més, també hi ha equilibri en l'origen de coordenades i en els punts on les isoclines tallen l'eix de l'altra variable. En estudiar el comportament del sistema en aquests altres punts crítics, es demostra que tots ells són punts de sella (González Calvet i Sánchez Chóliz, 1994). Així mateix, els eixos són també isoclines del sistema.

Jarsulic considera que la condició per tal que el punt crític sigui significatiu, és a dir, que  $g^*, r^* > 0$  és que el màxim de la isoclina  $r_r(g)$  sigui més gran que el de la isoclina  $r_g(g)$ . Això és fàcil d'entendre si es té en compte que ambdues isoclines són paràboles invertides i que, degut a les condicions que s'imposa als paràmetres, tallen els eixos en valors positius, tal com es veu a la Figura A2.1:

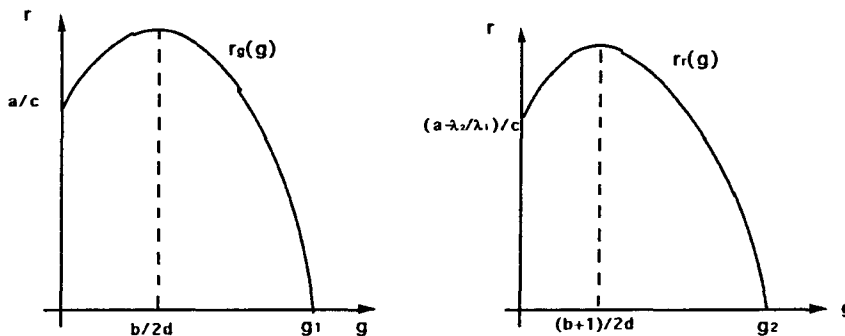


Figura A2.1: Isoclines

Tot i així, la condició de Jarsulic és més restrictiva del que cal. Hi ha altres casos amb intersecció significativa en què la condició de Jarsulic no es compleix, com per exemple les que es representen a la Figura A2.2, ja que en realitat la condició necessària i suficient és que el punt d'intersecció tingui una abscisa compresa entre 0 i l'arrel positiva de  $r_g(g)$ , ja que aquesta isoclina sempre talla ambdós eixos per valors positius.

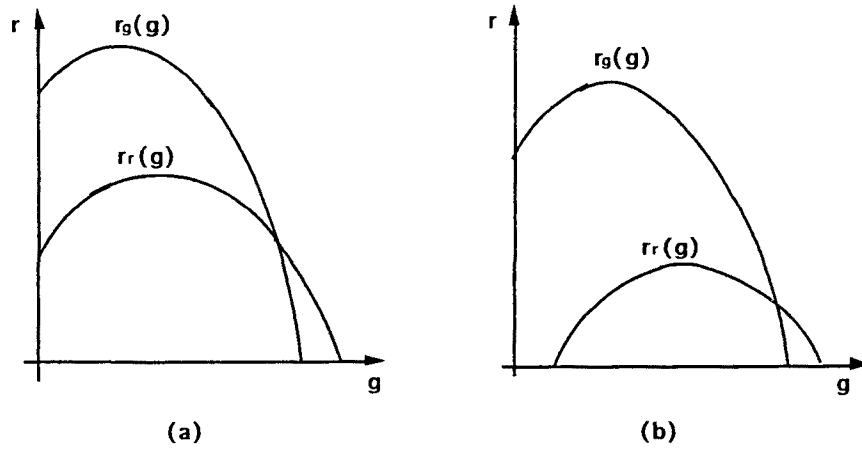


Figura A2.2: Casos exclosos per Jarsulic

En analitzar l'estabilitat local de l'equilibri es demostra (González Calvet i Sánchez Chólitx, 1994) que sota certes condicions l'equilibri és inestable i, donat que es pot construir un subconjunt positivament invariant i tancat entorn al punt crític, pel teorema de Poincaré-Bendixson hi ha d'haver, com a mínim un cycle límit. En la Figura A2.3 es mostra gràficament com es construeix el subconjunt tancat -l'àrea puntejada- i s'il·lustra com totes les trajectòries entren dins d'ell.

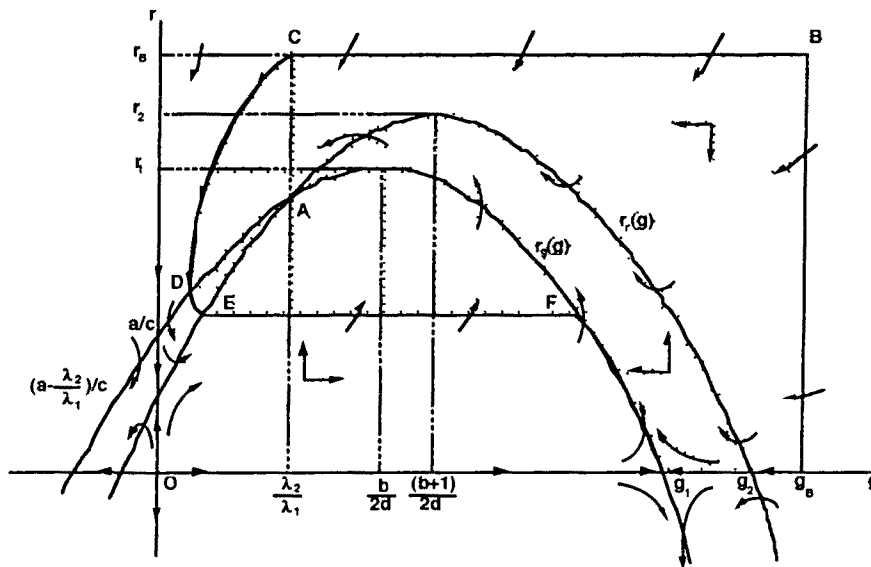


Figura A2.3: Diagrama de fases i construcció del conjunt invariant

Així mateix, donat que els eixos de coordenades separen dinàmicament el quadrant  $\mathbf{R}^n$  dels demés, totes les trajectòries que entren en el subconjunt provenen del quadrant positiu i, per les direccions del moviment, qualsevol trajectòria dins del quadrant positiu acabarà entrant en el subconjunt.

La qüestió rellevant, però, consisteix en quines són les condicions per tal que el punt crític sigui localment inestable en lloc d'ésser asimptòticament estable. En el treball sobre el qual s'ha basat l'exposició fins aquí (*González Calvet i Sánchez Chóliz, 1994*), es demostra que les condicions que proposa Jarsulic són incorrectes degut a diversos errors algebraics i es procedeix a corregir-los.

Com a resultat, es troba que els cicles apareixeran només quan es donin tres circumstàncies, a saber, que  $0 < \lambda_1 < 1$ , que la traça del jacobini del sistema avaluada al punt crític sigui positiva, és a dir que:

$$Tr[J_{.1}] = (1 - \lambda_1)b \frac{\lambda_2}{\lambda_1} + (\lambda_1 - 2)d \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2} - \lambda_1 a > 0 \quad [A2.8]$$

i que el determinant avaluat al punt crític sigui positiu, la qual cosa es pot reescriure:

$$\frac{1 - \lambda_1}{2 - \lambda_1} b \frac{\lambda_1}{\lambda_2} - \frac{\lambda_1}{2 - \lambda_1} a \frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2} < d < b \frac{\lambda_1}{\lambda_2} + a \frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2} \quad [A2.9]$$

La interpretació econòmica d'aquestes condicions és diversa. La condició [A2.8] implica que les dues isoclines s'han d'interseccionar en la seva zona creixent -amb pendent positiva- cosa que, en termes econòmics, significa que l'efecte accelerador sobre l'acumulació és molt més important que l'efecte en sentit contrari del tipus d'interès. Així, la inversió seguirà creixent encara que el tipus d'interès estigui augmentant, o seguirà disminuint, encara que el tipus d'interès baixi. Això implica que la relació, formalment negativa, entre la inversió i el tipus d'interès, queda sobrecompensada pel lligam positiu entre inversió i demanda efectiva. Si aquesta sobrecompensació no es dona, aleshores tampoc hi ha fluctuacions del tipus d'interès i el model és estable. El cas és equivalent al d'un model IS-LM on les dues funcions tenen pendent positiu i la LM té un

pendent superior a la IS. Jarsulic, en canvi, afirma erròniament que les fluctuacions poden donar-se en qualsevol situació.

La relació [A2.9] és senzillament una condició per tal que el tipus d'interès d'equilibri sigui positiu, cosa que, en el marc del model, equival que el determinant sigui positiu.

Quant al valor que ha de prendre  $\lambda_1$ , ja és més difícil de justificar. Aquest paràmetre, en realitat pot anar de  $-\infty$  a  $+\infty$ , però el rang de valors d'inestabilitat és força probable. En la mesura que la diferència d'elasticitats-renda entre l'oferta i la demanda de crèdit sigui petita -entre 0 i 2, per xifres realistes- ja es compleix la condició. Però convé ressaltar que quan  $\lambda_1$  s'apropa als extrems de l'interval  $\{0,1\}$  la inestabilitat disminueix i, tot sovint es troba que el sistema es torna estable perquè deixa de complir-se alguna de les altres condicions. Això implicaria que si l'oferta i la demanda de crèdit són molt rígides i no responen al tipus d'interès o si s'està en una situació de trampa de la liquidesa o de política monetària de manteniment del tipus d'interès, el sistema seria estable. Si, en canvi s'està en situacions intermèdies, augmentarà la probabilitat que el sistema sigui inestable.

De les tres condicions anteriors n'hi ha una que és de caire general per qualsevol tipus de funció de comportament de l'acumulació i de la taxa d'interès. Es tracta de la condició que la intersecció s'efectui en la zona creixent de les funcions i que, per tant, l'efecte accelerador predomini sobre l'efecte del cost financer en les decisions d'inversió. L'explicació econòmica és senzilla i explica la possibilitat d'alguns tipus de crisi i fluctuacions financeres. En efecte, en general la inversió respondrà en sentit contrari a les variacions del cost de finançació excepte quan les expectatives que generen els augments de la demanda són tan importants que s'està disposat a pagar més per realitzar la inversió perquè s'esperen uns nivells de benefici molt superiors. O viceversa, la inversió no es realitza, malgrat que estigui baixant el seu cost de finançament, perquè s'espera que la demanda seguirà deprimida. En conseqüència, aquestes circumstàncies no es poden considerar permanents, sinó que només es donen en moments d'eufòria expansiva o en temps de depressió econòmica i anímica pregon.

Per a demostrar-ho formalment, es parteix del sistema de dues equacions diferencials [A2.3] i [A2.6], convenientment generalitzat:

$$\begin{aligned} \dot{g} &= \gamma(g, r) \\ \dot{r} &= \rho(g, r) \end{aligned} \tag{A2.10}$$

Els supòsits de comportament d'aquestes funcions a l'entorn de l'equilibri són els que, des del punt de vista econòmic, cal esperar:

$$\begin{aligned} \gamma_g'' < 0, \gamma_r' < 0 \\ \rho_r' < 0 \end{aligned} \tag{A2.11}$$

Es a dir, l'efecte capacitat -segona derivada- sobre la taxa d'acumulació és negatiu, l'efecte cost financer també és negatiu i l'efecte de la variació del tipus d'interès sobre ell mateix també és negatiu -el tipus d'interès no s'autoaccelera-. Quant el signe de les primeres derivades parcials d'ambdues funcions en relació a l'acumulació, pot pensar-se raonablement que és positiu en l'entorn de l'equilibri. Tot i així, no es fa cap supòsit explícit.

Així mateix, es suposa que hi ha un equilibri del sistema per  $g^*, r^* > 0$ .

Les condicions necessàries i suficients per a l'existència d'un cicle límit són que es pugui construir el subconjunt acotat, tancat i positivament invariant, en el qual entrin les trajectòries de l'espai  $\mathbf{R}^n$ , i que inclogui un punt crític inestable en el seu interior.

La condició de punt crític inestable en el sistema anterior es redueix que la traça i el determinant del jacobià del sistema siguin positius. El jacobià és:

$$J_{.1} = \begin{bmatrix} \gamma_g' & \gamma_r' \\ \rho_g' & \rho_r' \end{bmatrix} \tag{A2.12}$$

La traça del jacobià vé donada per:  $Tr[J_{.1}] = \gamma_g' + \rho_r'$  i, el determinant, vé donat per l'expressió:  $Det[J_{.1}] = \gamma_g' \rho_r' - \rho_g' \gamma_r'$ .

De la condició de positivitat de la traça es dedueix d'immediat que en l'entorn d'equilibri l'acumulació varia positivament amb la taxa d'acumulació ja que  $\rho_r' < 0$ .



$$Tr[J_A] > 0 \Leftrightarrow \gamma'_g + \rho'_r > 0 \Leftrightarrow \gamma'_g > 0 \quad [A2.13]$$

De la condició de determinant positiu es dedueix també, de forma immediata, que el tipus d'interès ha de variar positivament amb la taxa d'acumulació, ja que,  $\rho'_r, \gamma'_r < 0$  per hipòtesis i ja que  $\gamma'_g > 0$ , segons s'ha deduït en l'expressió [A2.13]:

$$Det[J_A] > 0 \Leftrightarrow \gamma'_g \rho'_r - \rho'_g \gamma'_r > 0 \Leftrightarrow \rho'_g > 0 \quad [A2.14]$$

A més, s'ha de complir que el segon terme de l'expressió [A2.14] sigui més gran, en valor absolut que el primer:

$$Det[J_A] > 0 \Leftrightarrow |\rho'_g \gamma'_r| > |\gamma'_g \rho'_r| \Rightarrow \left| \frac{\rho'_g}{\rho'_r} \right| > \left| \frac{\gamma'_g}{\gamma'_r} \right| \quad [A2.15]$$

Aquestes condicions d'inestabilitat es refereixen a les equacions del moviment de  $g, r$  però es poden traslladar a les funcions issoclines que s'obtenen en igualar cada una de les equacions originals a zero. En efecte, si anomenem  $G_g$  a la issoclina corresponent a  $\gamma(g, r)$  i  $R_g$  a la issoclina corresponent a  $\rho(g, r)$ , expressades com funcions en les quals el tipus d'interès  $r$  depèn de la taxa d'acumulació  $g$ , es tindrà, pel teorema de la funció implícita, que el pendent de les respectives issoclines en el punt crític és positiu:

$$-\frac{\gamma'_g}{\gamma'_r} = G'_g > 0, -\frac{\rho'_g}{\rho'_r} = R'_g > 0 \quad [A2.16]$$

i que, per la condició de determinant positiu, es tindrà que el pendent de la issoclina  $R_g$  ha de ser superior al de  $G_g$ , és a dir,  $R_g$  *talla des de dalt a*  $G_g$ .

$$R'_g > G'_g > 0 \quad [A2.17]$$

La validesa de la conclusió és general per a qualsevol tipus de funció.

Quant a la possibilitat de construir el subconjunt acotat, invariant i tancat en el qual entren totes les trajectòries, serà també possible sempre que es compleixin les hipòtesis i les condicions de traça i determinant positius, ja que ambdues issoclines tenen pendent positiu i les direccions del moviment coincideixen amb les representades a la Figura A2.3

A títol d'il·lustració, s'ha fet una simulació quan  $\gamma(g,r)$  i  $\rho(g,r)$  són dos polinomis de grau prou elevat com per a presentar múltiples interseccions amb moltes posicions diferents i es comprova que només hi ha cicle límit quan es compleixen les condicions de més amunt. En els altres casos o bé són equilibris estables o bé són punts de sella -determinant negatiu-. A la Figura A2.4 es representen les issoclines i les trajectòries per a diferents punts de partida

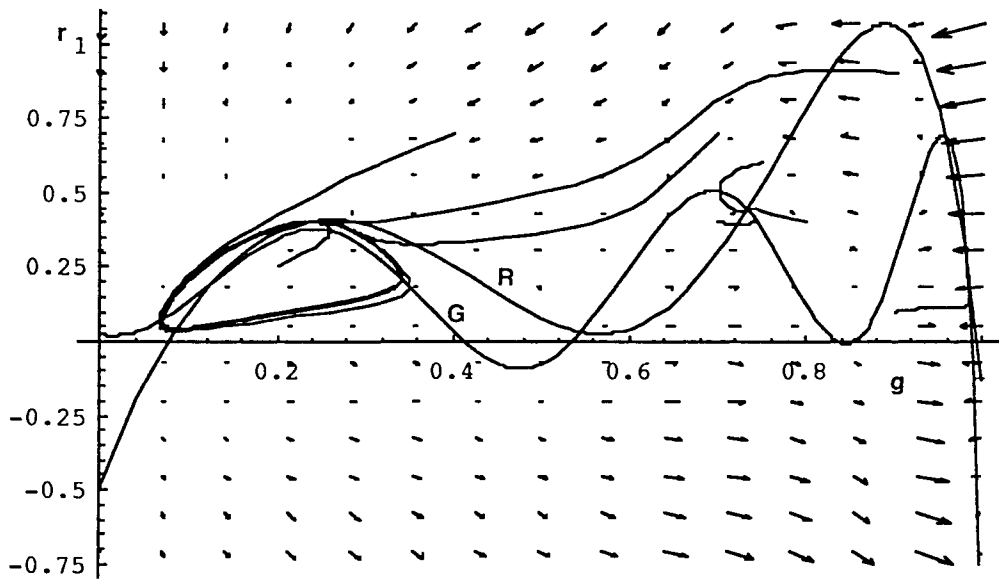


Figura A2.4: Trajectories amb funcions més complexes

S'han demostrat condicions molt similars en el marc d'altres problemes que utilitzen el mateix utilatge formal. El cas més proper, però no igual, és el model de dues espècies competitives de Holling-Tanner que es formula com una resposta a la inestabilitat estructural del model de Lotka-Volterra. En aquest model, tant les hipòtesis com les equacions són més restrictives que les emprades aquí (Arrowsmith i Place, 1992). La revisió més completa de sistemes de dues equacions aplicades a sistemes d'espècies competitives es

troba en el treball de Vaart (*Vaart, 1976*), tot i que de forma més o menys específica es tracta en gairebé tots els manuals avançats (*Hirsch i Smale, 1974; Verhulst, 1985; Guckenheimer i Holmes, 1990; Perko, 1991*). El mateix Samuelson s'ocupà del tema i en derivà importants implicacions filosòfiques sobre la irreversibilitat del procesos descrits per sistemes assintòticament estables (*Samuelson, 1971; Samuelson, 1976*).