Construccions amb generadors i relacions d'anells i monoides amb condicions de cadena

Ramon Antoine Riolobos

Construccions amb generadors i relacions d'anells i monoides amb condicions de cadena

Ramon Antoine Riolobos

Memòria presentada per aspirar al grau de doctor en Ciències Matemàtiques.

Departament de Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona.

Bellaterra, juny de 2001.

CERTIFICO que aquesta memòria ha estat realitzada per Ramon Antoine Riolobos sota la direcció del Dr. Ferran Cedó Giné

Bellaterra, juny de 2001.

Dr. Ferran Cedó Giné.

Índex

Capítol 1

Introducció

Certes estructures algebraiques, com és el cas dels monoides, els grups o els anells, es poden definir per un conjunt de lleis o identitats axiomàtiques que ens relacionen els seus elements mitjançant una o més operacions.

Això ens permet introduir nous axiomes que impliquin l'existència de certs elements (*generadors*), noves identitats incorporant els generadors anteriors (*relacions*), i construir de manera universal estructures que satisfacin aquestes propietats i cap altra que no es derivi d'aquestes. Això s'anomena usualment una presentació per generadors i relacions.

Aquesta construcció es realitza generalment en dos passos, primer construir una estructura lliure que contingui els generadors, i després introduir les relacions fent quocient. Aquestes presentacions són molt usuals en el cas de grups o monoides. Per exemple l'associativitat del producte ens permet expressar els elements del monoide lliure sobre X com a paraules en un abecedari format pels elements de X, on el producte consisteix en concatenar paraules.

En el cas d'anells, la construcció de l'anell lliure generat per un conjunt d'elements X haurà de contenir el monoide lliure generat per X, que denotarem per $\langle X \rangle$, i que tanca X universalment sota l'operació multiplicativa amb un element neutre. Ara, per a imposar una estructura additiva, haurem de prendre l'anell de monoide $\mathbb{Z}\langle X \rangle$. Aquesta construcció, es pot realitzar també fent els dos passos anteriors al revés. És a dir, primer generem A el grup abelià lliure sobre el conjunt

X i després introduïm un producte de la forma usual sobre l'àlgebra tensorial

$$\mathbb{Z} \oplus A \oplus (A \otimes A) \oplus (A \otimes A \otimes) \oplus \dots.$$

Les relacions s'introdueixen fent quocient per l'ideal que generen. Observem que si reemplacem les $\mathbb{Z}$ d'aquesta construcció per cossos K, obtenim presentacions de K-àlgebres.

Malgrat tot, no totes les estructures algebraiques admeten una presentació per generadors i relacions. Per exemple, la classe del anells de divisió no forma una varietat (vegeu [15, Chapter IV]) i per tant aquests no poden ser presentats per generadors i relacions. De fet, si un intenta construir l'anell de divisió lliure sobre el conjunt $\{x, y\}$, es troba amb la necessitat de construir de forma universal un "cos de fraccions" per l'àlgebra lliure en el conjunt $\{x, y\}$. A [17, Chapter 6] podem trobar un anàleg per a la presentació d'anells de divisió en termes de matrius que esdevenen singulars.

La construcció d'anells i monoides per generadors i relacions ens permet construir amb certa facilitat estructures satisfent propietats universals. Això ens permet demostrar certes propietats d'una forma general i també ens pot ser útil en la construcció de contraexemples.

Per exemple, per demostrar que la propietat següent,

$$(x^{-1}yx)^{-1}(x^{-1}zx)(x^{-1}yx) = (yx)^{-1}z(yx),$$

és vàlida per a tot grup G, és suficient demostrar-la al grup lliure generat per $\{x, y, z\}$.

En el cas d'anells, la construcció següent, per exemple, és bastant il·lustrativa de la tècnica de construcció per generadors i relacions. Recordem que un anell és directament finit si $xy = 1$ implica que $yx = 1$. Davant la pregunta de si la propietat de ser directament finit passa a l'anell de matrius, J.C. Shepherdson a [50] presenta l'exemple següent:

Sigui $R = K\langle x, y, z, t, a, b, c, d\rangle$ on K és un cos i sigui I l'ideal generat per les relacions que ens determina el producte de matrius següent:

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Prenem $S = R/I$. És clar que si hi ha un exemple d'una K-àlgebra, directament finita tal que l'anell de matrius 2x2 sobre ella no ho sigui, aquesta ha de contenir una subàlgebra isomorfa a un quocient de S. Shepherdson demostra que efectivament S és directament finit i que $M_2(S)$ no ho és.

En situacions com la de l'exemple anterior, la dificultat es planteja en poder decidir quines expressions corresponen als mateixos elements. Això ens porta a intentar trobar formes normals que ens determinin els elements de manera única. Tot i això, no sempre és possible obtenir una forma normal. Per exemple, a [37], podem trobar exemples de grups presentats per generadors i relacions que sorgeixen arran del *problema de Burnside* [6] i que no admeten una forma normal per als seus elements.

En aquest treball, estudiarem diferents exemples de construccions d'anells i de monoides. En cada cas hem intentat fer notables les idees en la construcció per generadors i relacions. Una eina que utilitzarem bastant per a trobar formes normals a partir de presentacions de monoides és el Lema del Diamant [15, Theorem I.4.9]. En altres casos, no obtenim formes normals d'elements pròpiament dites, però podem aconseguir expressions per als elements, com la forma reduïda que tractarem al capítol 4, que no són úniques però si conserven certes propietats. En altres casos, ens és molt útil definir funcions sobre els generadors d'un anell per poder treballar amb l'estructura graduada de l'anell i les components homogènies dels elements.

Els exemples que tractarem, seran anells i monoides amb condicions de cadena. Tractar les condicions de cadena amb generadors i relacions ens planteja la dificultat de que generalment ens calen una quantitat infinita d'aquests. Per exemple, en els exemples d'anells de Goldie del capítol 5, tractem amb dues condicions de cadena (condició de cadena ascendent per a sumands directes i condició de cadena ascendent per anul·ladors). Això fa que l'exemple vingui presentat per molts generadors i moltes relacions.

1.1 Estructura de la memòria

La memòria està dividida bàsicament en 3 parts i un primer capítol introductori per als conceptes que utilitzarem als capítols 3 i 4.

La primera part es basa en el treball *On rigid monoids with right acc*$_1$ [1], en que presentem un contraexemple a una conjectura de P.M. Cohn per a monoides satisfent condicions de cadena.

Kozhukhov al 1982 caracteritza els anells de monoide que són firs per la dreta, provant que $R[M]$ és un fir per la dreta per a un monoide M no trivial si i només si R és un anell de divisió i M és un monoide rígid, irreflexiu, satisfent acc_1 per la dreta i amb grup d'unitats lliure. Els monoides d'aquest tipus els anomenarem firs per la dreta.

P.M. Cohn a [14] estudia monoides satisfent condicions de cadena utilitzant productes ordinals. En aquest treball, s'intenta donar una descripció més senzilla dels anells de monoide que són firs per la dreta, per a la qual conjectura el següent:

Conjectura (Cohn). *Si M és un monoide rígid, irreflexiu i satisfent acc*$_1$ *per la dreta, llavors M és el producte lliure del grup de les unitats $\mathcal{U}(M)$ i un submonoide cònic, rígid i satisfent acc*$_1$ *per la dreta.*

En el cas que la conjectura tingués una resposta afirmativa, s'obtindria que si M és un monoide no trivial, llavors $R[M]$ és un fir per la dreta si i només si R és un anell de divisió i M és un producte lliure d'un grup lliure per un monoide cònic, rígid i satisfent acc_1 per la dreta. A més, observant que un monoide cònic, rígid i satisfent acc_1 per la dreta i per l'esquerra ha de ser lliure, obtindríem també una demostració més del Teorema de Wong que caracteritza els anells de monoide que són firs.

Al capítol 3 veiem que l'anterior conjectura de Cohn és falsa, construint un exemple de monoide fir per la dreta que no és el producte lliure del seu grup d'unitats i cap altre submonoide. La construcció es basa en l'aplicació de les tècniques de Cedó i Pitarch per a la construcció de monoides fir per la dreta, tot i que un estudi posterior del monoide ens permet presentar-lo com a submonoide d'un grup lliure:

Teorema A. *El submonoide M del grup lliure de rang 3, $F_3 = gr\langle u, a, x_0\rangle$, generat per*

$$\{u, u^{-1}, a, (x_n : n \geq 0)\},$$

on $x_n = u^n x_{n-1}$ per a cada $n > 0$, és un fir per la dreta que no és el producte lliure del seu grup d'unitats i cap altre submonoide.

Al capítol 4, seguim amb l'estudi dels monoides que apareixen en la caracterització dels anells de monoide que són 2-fir. Aquesta caracterització és encara un problema obert tot i que es tenen alguns resultats parcials. Tant la definició de monoide arquimedià, que és una generalització no commutativa de la noció de monoide commutatiu arquimedià, com les altres definicions sobre monoides generalment degudes a Cohn, seran introduïdes al capítol 2.

Al igual que en el cas de monoides fir per la dreta, Menal prova que si $R[M]$ és un 2-fir i M és un monoide no trivial, aleshores R és un anell de divisió i M és un monoide rígid i irreflexiu. D'altra banda, Cedó prova que si $R[M]$ és un 2-fir aleshores M ha de ser arquimedià.

Donat que M és un monoide rígid, el Teorema de Doss, ens diu que podem incloure M en el seu grup universal G. A més, existeix una construcció que ens permet invertir formalment conjunts d'elements S d'un monoide rígid M per obtenir monoides M_S que es troben entre M i G. Cedó i Pitarch, estudien els monoides obtinguts d'aquesta manera i proven que si M és un monoide rígid i $S \subseteq M$, aleshores M_S és també un monoide rígid.

Al capítol 4 estudiem els monoides rígids, irreflexius i arquimedians i provem el resultat següent:

Teorema B. *Sigui M un monoide rígid, irreflexiu i arquimedià. Sigui $S \subseteq M$ un subconjunt qualsevol de M. Aleshores M_S és un monoide rígid, irreflexiu i arquimedià.*

Aquest resultat el completem donant exemples de monoides que proven que les dues propietats anteriors (irreflexiu i arquimedià) per separat no es conserven necessariament al invertir elements.

Finalment, el capítol 5 està basat en el treball *Polynomial rings over Goldie rings* [2], realitzat conjuntament amb Ferran Cedó. En aquest treball generalitzem una construcció de J.W. Kerr sobre un exemple d'anell de Goldie tal que el seu anell de polinomis no és de Goldie.

A.W. Goldie caracteritza els anells que són ordres per la dreta en anells artinians semisimples com a anells semiprimers amb dimensió de Goldie per la dreta finita, satisfent la condició de cadena ascendent per anul·ladors per la dreta. S'ha estudiat a diversos articles, sota quines condicions la propietat de ser un anell de Goldie pot passar a l'anell de polinomis o a l'anell de matrius. J.W. Kerr a [34, 36], dóna un exemple d'una $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-àlgebra R commutativa de Goldie tal que $R[X]$ no és de Goldie.

Camillo i Guralnick a [7] demostren que si R és un K-àlgebra de Goldie sobre un cos no numerable, aleshores $R[x]$ també és de Goldie. Això planteja la pregunta de què passa en el cas que R sigui una K-àlgebra sobre un cos finit (que no sigui $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$) o un cos numerable infinit.

Treballant sobre aquest problema, construïm un exemple de K-àlgebra commutativa de Goldie per a cada cos finit K tal que $R[x]$ no satisfà acc$\perp$ i per tant no és de Goldie.

Teorema C. *Per a tot cos finit K, existeix una K-àlgebra de Goldie commutativa R tal que el seu anell de polinomis $R[x]$ no és de Goldie.*

Això deixa oberta la pregunta de què passa en el cas de que R sigui una K-àlgebra sobre un cos infinit numerable. A la secció 5.4 fem alguns comentaris sobre aquest cas.

1.2 Agraïments

Primer de tot, vull agrair al meu director Ferran Cedó per tot l'ajut que m'ha donat en l'elaboració d'aquest treball i per la seva paciència i dedicació, ja que si no fos per ell, està clar que jo encara estaria "*por ahí*" tocant la gaita.

Al Departament de Matemàtiques de la UAB, i en especial al grup de Teoria d'Anells per haver-me acollit i haver-me donat tot el seu suport i les facilitats necessàries per a fer aquest treball.

També he de donar les gràcies a Warren Dicks pel seu ajut en el que va ser la versió final dels resultats del capítol 3.

A més, vull agrair molt especialment a tots aquells companys que m'han fet passar estones entretingudes i que han procurat per la meva alimentació, a l'Albert, en Francesc, la Gemma, la Laura, en Llorenç, la Natàlia, la Sílvia, en Xavi... I també als companys de despatx que m'han d'aguantar cada dia, i tots aquells que vulguin agraïments i que m'hagi deixat.

Capítol 2

Anells de Monoide

En aquest capítol introduïm les definicions i alguns resultats que ens seran necessaris per als capítols 3 i 4. Recordem primer la següent definició deguda a P.M. Cohn.

Definició 2.1. Sigui R un anell. Direm que R és un *fir* per la dreta (esquerra) si tot ideal per la dreta (esquerra) és lliure de rang únic. Direm que R és un *fir* si és un fir per la dreta i per l'esquerra.

Si només exigim que els ideals siguin finitament generats o n-generats, per algun $n \geq 1$, tenim:

Un anell R és un *semifir* (n-*fir*) si tot ideal per la dreta finitament generat (n-generat) és lliure de rang únic.

Observacions 2.2. Si M_R és un R-mòdul per la dreta lliure, diem que M_R té rang únic si $M_R \simeq R_R^I$ i $M_R \simeq R_R^J$ aleshores $\mid I \mid = \mid J \mid$.

La definició de n-fir apareix naturalment al demanar que certes relacions entre elements siguin trivialitzables (vegeu [16, Theorem 1.1]), d'aquí s'obté directament que la propietat és simètrica dreta-esquerra. Per tant és clar que la definició de semifir també és simètrica i per aquesta raó fem les definicions sols per un costat.

Els anells fir per la dreta, semifir o n-fir, tenen moltes propietats homològiques, ja que són hereditaris on tot projectiu és lliure i de rang únic, o semihereditaris en el cas de semifirs. A [16], podem trobar un estudi extens sobre aquesta classe d'anells.

El nostre interès es centra en l'estudi d'aquestes propietats en determinades construccions d'anells. Concretament, si tenim un anell R i un monoide M, podem construir l'anell de monoide $R[M]$ de la forma usual,

$$R[M] = \{\sum_{x \in M} r_x x \text{ tal que } r_x \in R \text{ i } r_x = 0 \text{ gairebé per a tot } x \in M\}.$$

La suma es defineix de la forma natural i el producte s'obté estenent el producte de R i M i usant el fet que $xr = rx$ per a tot $r \in R, x \in M$. La definició d'anell de grup, és un cas particular de l'anterior en el cas que M és un grup.

Existeixen molts resultats i problemes sobre les propietats d'aquests anells. Per exemple, és ben conegut el Teorema de Maschke que ens diu que si G és un grup finit i K un cos de característica coprimera amb l'ordre de G, llavors $K[G]$ és artinià semisimple, o el problema dels divisors de zero a $K[G]$. Aquí ens centrarem en la pregunta de G.M. Bergman següent que apareix a [14],

Pregunta 1 (Bergman). Per a quins grups, o més generalment monoides M no trivials, l'anell de monoide $K[M]$ és un fir, semifir, 2-fir o semihereditari? depèn de K la resposta?

Observem que un anell R és un 1-fir si i només si R és un domini, i per tant, podem pensar la pregunta anterior com una generalització del problema dels divisors de zero.

El problema de Bergman no es planteja sobre anells R qualsevols ja que de fet, si $R[M]$ és un 2-fir per a un monoide M no trivial i un anell R, automàticament tenim que R és un anell de divisió (vegeu la demostració de [20, Theorem]). A més, l'estudi de l'anterior pregunta sembla centrar-se més en les propietats dels monoides M. De fet, les caracteritzacions obtingudes i els resultats parcials que tractarem no depenen del cos K que escollim.

A les seccions següents explicarem breument els resultats necessaris en la caracterització dels anells de monoide fir per la dreta i 2-fir, i les definicions que se'n deriven.

2.1 Anells de Monoide fir.

És ben sabut [12, 13, 5] que si R és un cos i M un producte lliure d'un grup lliure per un monoide lliure, aleshores $R[M]$ és un fir. Podem trobar diverses demostracions alternatives d'aquest resultat [4, 41, 19, 47] utilitzant diferents aproximacions al problema. Però la caracterització definitiva dels anells de monoide que són firs, és deguda a R.W. Wong [54], que prova el següent:

Teorema 2.3 (Wong). *Sigui R un anell i M un monoide no trivial. Aleshores, l'anell de monoide $R[M]$ és un fir si i només si R és un anell de divisió i M és el producte lliure d'un grup lliure i un monoide lliure.*

La caracterització dels anells de monoide que són fir per la dreta és deguda a Kozhukhov [38]. Aquesta caracterització, ens requerirà algunes definicions sobre monoides degudes a P.M. Cohn.

Definició 2.4. Sigui M un monoide. Direm que M és cancel·latiu si $ab = ac$ o $ba = ca$ per alguns $a, b, c \in M$, implica $b = c$.

Direm que un monoide M és rígid si M és cancel·latiu i si $aM \cap bM \neq \emptyset$ aleshores o bé $aM \subseteq bM$ o bé $bM \subseteq aM$.

Direm que M és un monoide irreflexiu si M és un monoide cancel·latiu tal que donat $a \in M$ no unitat, llavors $bac = a$ per alguns $b, c \in M$ implica que $b = c = 1$.

Direm que un monoide M satisfà la condició de cadena ascendent per a ideals principals per la dreta (esquerra) (que denotarem per acc_1 dreta (esquerra)) si tota cadena ascendent d'ideals principals per la dreta (esquerra) (aM (Ma) per algun $a \in M$), és estacionaria.

Teorema 2.5 (Kozhukhov). *Sigui M un monoide no trivial i R un anell. Aleshores, $R[M]$ és un fir per la dreta si i només si:*

1. *R és una anell de divisió.*
2. *M és rígid.*
3. *M és irreflexiu.*

4. *M satisfà la condició de cadena ascendent per a ideals principals per dreta acc_1.*

5. *El grup de les unitats de M, $\mathcal{U}(M)$ és lliure.*

A diferència del Teorema de Wong, aquesta caracterització ve donada per propietats dels elements, i per tant, no és tan fàcil veure quins monoides cauen dins de la caracterització anterior. F. Cedó i A. Pitarch a [11] donen un mètode per a la construcció de tots els monoides que satisfan les condicions (2-5) del teorema 2.5. Seguint [11], definim:

Definició 2.6. Sigui M un monoide. Direm que M és un monoide fir per la dreta (esquerra) si M és rígid, irreflexiu, amb acc_1 per la dreta (esquerra) i grup d'unitats lliure.

Aquests monoides s'estudien extensament a [11]. A més, Kozhukhov prova a [38] el següent:

Proposició 2.7 (Kozhukhov). *Sigui M un monoide fir per la dreta. Aleshores M s'inclou en un grup lliure.*

Recordem que un element $a \in M$ no unitat, és un àtom si no es pot escriure com a producte de dues no unitats. Un monoide M és atòmic si està generat per àtoms i unitats. Direm que un monoide M és cònic si $ab = 1$ per alguns $a, b \in M$ implica $a = b = 1$.

Cohn observa a [16, Exercise 6.6.2] que un monoide rígid, irreflexiu i atòmic ha de ser el producte lliure del seu grup d'unitats i un submonoide lliure F. A més, P. Menal a [45], observa que si M és rígid i irreflexiu i M és finitament generat sobre $\mathcal{U}(M)$, llavors M és atòmic.

Cohn conjectura a [18]:

Conjectura (Cohn). *Si M és un monoide rígid, irreflexiu amb acc_1 per la dreta, llavors M és el producte lliure de $\mathcal{U}(M)$ i un submonoide cònic, rígid i satisfent acc_1 per la dreta.*

Si aquesta conjectura fos certa, tindríem que un monoide M és un monoide fir per la dreta si i només si M és el producte lliure d'un grup lliure per un monoide cònic, rígid i amb acc_1 per la dreta.

Al capítol 3 construïm un monoide fir per la dreta que no és el producte lliure del seu grup de les unitats i cap altre submonoide, i per tant aquesta conjectura de Cohn és falsa.

2.2 Anells de Monoide 2-fir

La caracterització dels anells de monoide que són 2-fir, a diferència del cas anterior, encara és un pregunta oberta, fins i tot en el cas d'anells de grup. De fet no es coneix encara cap exemple d'anell de grup (amb grup no trivial) que sigui 2-fir, però que no sigui semifir.

Els anells de grup que són semifir són caracteritzats per W. Dicks i P. Menal a [20], que proven que l'anell de grup $R[G]$, amb G un grup no trivial, és un semifir si i només si R és un anell de divisió i G és localment lliure (és a dir, tot subgrup finitament generat de G és lliure). Al mateix article, donen una condició necessària per a que $R[G]$ sigui un n-fir (amb $n > 1$), provant que G ha de ser n-lliure (és a dir, tot subgrup n-generat és lliure).

És un resultat conegut i que podem comprovar usant els resultats exposats a la secció anterior, que si M és una unió dirigida de productes lliures de monoides lliures per grups lliures, aleshores, $K[M]$ és un semifir per a tot anell de divisió K. D'altra banda, la implicació contraria és la conjectura de Dicks que encara és una pregunta oberta:

Conjectura (Dicks). *Sigui R un anell i M un monoide no trivial. Aleshores $R[M]$ és un semifir si i només si R és un anell de divisió i M és una unió dirigida de productes lliures de monoides lliures per grups lliures.*

Menal a [45], prova que si R és un anell i M un monoide tal que $R[M]$ és un 2-fir, aleshores R és un anell de divisió i M és un monoide rígid i irreflexiu. Posteriorment a [9] Cedó troba una nova condició necessària per a un monoide per tal que $R[M]$ sigui un 2-fir. Concretament prova que si M és un monoide no trivial, R un anell i $R[M]$ un 2-fir aleshores:

- Donats $a, b, c, d \in M$, si $ab = cad$ aleshores, o bé $c = 1$ o bé existeix $n \in \mathbb{Z}$ i $b' \in M$ tals que $ab' = c^n$.

- Donats $a, b, c, d \in M$, si $ba = cad$ aleshores, o bé $d = 1$ o bé existeix $m \in \mathbb{Z}$ i $b' \in M$ tals que $b'a = d^m$.

En el cas que M sigui un monoide rígid, podem simplificar aquestes condicions fent us de la següent definició de Cohn que és una generalització no commutativa de la noció d'arquimedià per a monoides commutatius [31, pàg. 99].

Definició 2.8. Sigui M un monoide cancel·latiu. Direm que M és *arquimedià* si $ab = ca$ per a certs $a, b, c \in M$ amb b, c no unitats implica que existeix un $r \geq 0$ tal que $a \notin c^r M$.

Observacions 2.9. La propietat d'arquimedià, és equivalent a la seva dual dreta-esquerra. Suposem que tenim $a, b, c \in M$ tals que $ab = ca$ amb b, c no unitats de M. Aleshores, si $a = xb^s$ per algun $x \in M$ i $s \geq 0$, tenim que $xb^{s+1} = cxb^s$. Com que M és cancel·latiu, tindrem que $xb = cx$ i per tant $a = c^s x$.

Proposició 2.10 (Cedó). *Sigui M un monoide rígid, aleshores són equivalents:*

1. *Donats $a, b, c, d \in M$, si $ab = cad$ aleshores, o bé $c = 1$ o bé existeix $n \in \mathbb{Z}$ i $b' \in M$ tals que $ab' = c^n$.*

2. *Donats $a, b, c, d \in M$, si $ba = cad$ aleshores, o bé $d = 1$ o bé existeix $m \in \mathbb{Z}$ i $b' \in M$ tals que $b'a = d^m$.*

3. *M és un monoide irreflexiu i arquimedià.*

D'aquesta manera, tenim el següent:

Teorema 2.11 ([9, 45]). *Sigui R un anell i M un monoide no trivial. Si $R[M]$ és un 2-fir, aleshores:*

1. *R és un anell de divisió.*

2. *M és un monoide rígid.*

3. *M és un monoide irreflexiu.*

4. *M és un monoide arquimedià.*

Així doncs, tenim que si M és un monoide no trivial tal que $K[M]$ és un 2-fir per algun anell de divisió K, aleshores M és un monoide rígid, irreflexiu i arquimedià. Al capítol 4 estudiarem els monoides rígids, irreflexius i arquimedians, sota inversió d'elements.

Capítol 3

Monoides fir dreta.

En aquest capítol construirem un monoide rígid, irreflexiu, satisfent la condició de cadena ascendent per a ideals principals per la dreta i amb grup d'unitats lliure que no es pot escriure com el producte lliure del seu grup de les unitats i cap altre submonoide. Amb aquesta construcció contestem negativament a una conjectura de P.M. Cohn [18] tal i com explicàvem al capítol 2.

Per a la construcció d'aquest contraexemple vàrem utilitzar el mètode de F. Cedó i A. Pitarch [11] per construir monoides fir esquerra amb profunditat de factorització determinada. Amb això aconseguim provar l'existència d'un monoide satisfent les condicions necessàries. Tot i això, la presentació d'aquest monoide ens queda donada en funció d'una aplicació φ de la qual només en provem l'existència.

Partint d'aquesta construcció inicial, i tinguen en compte que pel resultat de Kozhukhov que hem vist anteriorment 2.7, aquest monoide es pot incloure en un grup lliure, aconseguim trobar un exemple presentat com a submonoide d'un grup lliure que contesta negativament a la pregunta de P.M. Cohn. A més, aquest exemple coincideix amb l'exemple descrit anteriorment, per a una determinada aplicació φ.

Incloem el mètode utilitzat per a demostrar l'existència d'aquest monoide per tal de fer més entenedora la idea de la construcció.

Utilitzarem la següent notació per a la presentació de grups i de monoides.

Definició 3.1. Sigui S un conjunt d'elements. Denotarem per $\langle S \rangle$ el monoide lliure sobre S. Si R és un conjunt de relacions, denotarem per $\langle S \mid R\rangle$, el monoide generat per S amb relacions R.

Anàlogament denotarem per $\mathrm{gr}\langle S \rangle$ el grup lliure sobre S i $\mathrm{gr}\langle S \mid R\rangle$ el grup generat per S amb relacions R.

3.1 Construcció de Cedó i Pitarch.

Primerament descriurem alguns conceptes en monoides rígids amb condicions de cadena com és la forma normal donada per Kozhukhov [38], i també descriurem breument el mètode de Cedó i Pitarch [11] per a la construcció de monoides fir per la dreta.

Definirem primer seguint [38], uns subconjunts i submonoides d'un monoide M que generalitzaran en certa manera el concepte d'àtom.

Definició 3.2. Sigui M un monoide. Definim

$$A^{(0)} = \emptyset, \quad M^{(0)} = \mathcal{U}(M).$$

Si tenim un ordinal $\alpha > 0$ i tenim definit $A^{(\beta)}$ i $M^{(\beta)}$ per a tot $\beta < \alpha$, aleshores

$$A^{(\alpha)} = \{a \in M \setminus (\cup_{\beta<\alpha} M^{(\beta)}) \mid \text{ si } aM \subset bM \text{ aleshores } b \in \cup_{\beta<\alpha} M^{(\beta)}\},$$

$$M^{(\alpha)} = \langle (\cup_{\beta\leq\alpha} A^{(\beta)}) \cup \mathcal{U}(M)\rangle,$$

(la inclusió $\subset$ denota inclusió pròpia).

Kozhukhov a [38] demostra que si M és un monoide cancel·latiu satisfent la condició de cadena ascendent per a ideals principals per la dreta acc_1, aleshores existeix un ordinal ψ tal que $M = M^{(\psi)}$, i defineix:

Definició 3.3. Sigui M un monoide cancel·latiu i satisfent acc_1 per la dreta. Aleshores definim la profunditat de factorització de M, com

$$\tau(M) = \min\{\alpha \mid \alpha > 0 \text{ i } A^{(\alpha)} = \emptyset\}.$$

Per a poder donar la forma normal dels elements abans descrita, caldrà definir uns nous subconjunts de M derivats dels anteriors.

Definició 3.4. Sigui M un monoide rígid amb acc_1 per la dreta, definim per a cada $x \in M$

$$w(x) = \min \{\alpha \mid x \in M^{(\alpha)}\},$$

que està ben definit per l'observació anterior. Definim per a cada ordinal α una relació binària al conjunt $A^{(\alpha)}$, de tal manera que $a_1 \sim a_2$ si existeixen $\tilde{a} \in A^{(\alpha)}$, $g_1, g_2 \in \mathcal{U}(M)$ i $b_1, b_2 \in M$ amb $w(b_1), w(b_2) < \alpha$ tals que $a_1 = b_1\tilde{a}g_1$ i $a_2 = b_2\tilde{a}g_2$. Kozhukhov demostra que aquesta és una relació d'equivalència.

Sigui $X^{(\alpha)}$ un conjunt de representants de classes d'equivalència a $A^{(\alpha)}$. Aleshores definim

$$\begin{aligned}\tilde{A}^{(\alpha)} = \{a \in A^{(\alpha)} \mid \text{ existeixen } \tilde{a} \in A^{(\alpha)} \text{ i } b, c \in M \text{ amb } w(b), w(c) < \alpha \\ \text{tals que } c\tilde{a} \in X^{(\alpha)} \text{ i } a = b\tilde{a}\}.\end{aligned}$$

Aleshores tenim,

Proposició 3.5 ([38]). *Sigui M un monoide rígid, irreflexiu i complint acc_1 per la dreta i $G = \mathcal{U}(M)$. Donat un element $x \in M$, el podem escriure de manera única com*

$$x = a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 g,$$

on $g \in G$, $a_i \in \tilde{A}^{(\alpha_i)}$ i $\alpha_n \geq \cdots \geq \alpha_1$. En particular G i $\tilde{A}^{(\alpha)}$ s'inclouen de forma natural a M, per a tot $1 \leq \alpha < \tau$.

Donada la caracterització dels monoides que són fir per la dreta i per l'esquerra (Wong [54]) com a productes lliures de monoides lliures per grups lliures, és fàcil provar que aquests monoides tenen profunditat de factorització $\tau(M) \leq 2$. El primer exemple de monoide fir per la dreta i que no és fir per l'esquerra (i per tant amb profunditat de factorització estrictament més gran que 2) és de Skornyakov [52]

$$\langle x_n, y_n \mid y_n x_n = x_{n-1}, n \in \mathbb{Z} \rangle,$$

i posteriorment tenim un exemple de Cohn (vegeu [16, pàg 142])

$$\langle x_n, y \mid y x_n = x_{n-1}, n \in \mathbb{Z} \rangle.$$

Ara explicarem breument el mètode de construcció de monoides fir per la dreta de Cedó i Pitarch.

Sigui G un grup i τ un ordinal qualsevol. Siguin $\{A_\alpha\}_{1\leq\alpha<\tau}$ una família de G-conjunts per l'esquerra no buits, i dotem els conjunts $A_\beta \times A_\alpha$ per a tot $1 \leq \beta < \alpha < \tau$ d'una estructura de G-conjunt donada per $g(b, a) = (gb, a)$ per a tot $b \in A_\beta$, $a \in A_\alpha$ i $g \in G$. Siguin $\{h_{\beta,\alpha} : A_\alpha \to A_\beta \times A_\alpha\}_{1\leq\beta<\alpha<\tau}$ una família de G-morfismes.

Ara, considerem $\pi^{(1)}_{\beta,\alpha} : A_\beta \times A_\alpha \to A_\beta$, i $\pi^{(2)}_{\beta,\alpha} : A_\beta \times A_\alpha \to A_\alpha$ les projeccions naturals per a tot $1 \leq \beta < \alpha < \tau$, i considerem $g_{\beta,\alpha} = \pi^{(1)}_{\beta,\alpha} \circ h_{\beta,\alpha}$ i $f_{\beta,\alpha} = \pi^{(2)}_{\beta,\alpha} \circ h_{\beta,\alpha}$.

Seguint [11] definim el monoide $M(\{h_{\beta,\alpha}\}, G\})$ com el semigrup presentat amb generadors:

$$(\dot{\bigcup}_{1\leq\alpha<\tau} A_\alpha) \dot{\cup} G,$$

(on $\dot{\cup}$ denota la unió disjunta), i les relacions:

les relacions del grup G,

les relacions dels G-conjunts A_α per a cada $1 \leq \alpha < \tau$,

$a1 = a$ per a cada $a \in A_\alpha$ i $1 \leq \alpha < \tau$,

$g_{\beta,\alpha}(a) f_{\beta,\alpha}(a) = a$ per a tot $a \in A_\alpha$ i $1 \leq \beta < \alpha$.

Observem que la presentació bé donada com a semigrup, tot i això obtenim un monoide on la identitat és la identitat de G.

Aleshores, tenim

Teorema 3.6 (Cedó, Pitarch [11]). *Sigui M un monoide no trivial i sigui $G = \mathcal{U}(M)$. Aleshores, M és un monoide fir per la dreta amb profunditat de factorització $\tau(M) = \tau > 1$ si i només si G és un grup lliure i M és isomorf a $M(\{h_{\beta,\alpha}\}, G)$ per alguna família de G-morfismes $h_{\beta,\alpha} : A_\alpha \to A_\beta \times A_\alpha$ per a tot $1 \leq \beta < \alpha < \tau$ on $\{A_\alpha\}_{1\leq\alpha<\tau}$ és una família no buida de G-conjunts per l'esquerra lliures tals que*

1. *$h_{\beta,\alpha}$ és bijectiva, per a tot $1 \leq \beta < \alpha < \tau$.*

2. *Per a tot $1 \leq \gamma < \beta < \alpha < \tau$, el següent diagrama és commutatiu*

$$\begin{tikzcd} A_\alpha \arrow[r, "h_{\beta,\alpha}"] \arrow[d, "h_{\gamma,\alpha}"'] & A_\beta \times A_\alpha \arrow[d, "(h_{\gamma,\beta}, 1_{A_\alpha})"] \\ A_\gamma \times A_\alpha \arrow[r, "(1_{A_\gamma}, h_{\beta,\alpha})"] & A_\gamma \times A_\beta \times A_\alpha \end{tikzcd}$$

3. *Per a cada $1 \leq \beta < \alpha < \tau$, $a \in A_\alpha$ i tot enter positiu n,*

$$(\pi^{(2)}_{\beta,\alpha} \circ h_{\beta,\alpha})^n(a) \neq a,$$

   on $\pi^{(2)}_{\beta,\alpha} : A_\beta \times A_\alpha \to A_\alpha$ és la projecció natural.

Posteriorment a [11] construeixen per a tot grup lliure G i tot ordinal τ, G-conjunts i aplicacions, per a construir monoides fir per l'esquerra amb profunditat de factorització τ.

A la demostració del teorema anterior, l'isomorfisme entre M i $M(\{h_{\beta,\alpha}\}, G)$ fa correspondre els conjunts A_α's amb els subconjunts $\tilde{A}^{(\alpha)}$ definits anteriorment. Per tant, disposem d'una forma normal com la descrita abans.

Usant aquesta construcció, trobarem un grup G, G-conjunts A_1, A_2 i un G-morfisme $h_{1,2} : A_1 \to A_1 \times A_2$ satisfent les condicions del teorema 3.6 i de tal manera que el monoide $M(h_{1,2}, G)$ no es pugui escriure com a producte lliure de G i cap altre submonoide. Aquest serà un monoide amb profunditat de factorització 3.

3.2 Construcció de M (I)

Prenem G un grup cíclic lliure $G = \langle u \rangle$, i els G-conjunts per l'esquerra,

$$A_1 = G \times \{a\} \text{ i } A_2 = G \times \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\},$$

amb l'acció natural de G. Donem a $A_1 \times A_2$ una estructura de G-conjunt amb l'acció descrita anteriorment,

$$u^n((u^m, a), (u^l, x_r)) = ((u^{n+m}, a), (u^l, x_r)),$$

per a tot n, m, l enters i $r \geq 0$.

Sigui φ una aplicació bijectiva, $\varphi : \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \to G \times \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ de tal manera que per a tot $n \in \mathbb{N}$ i tot enter positiu m, $\varphi_2^m(x_n) \neq x_n$, on $\varphi_2 = \pi_2 \circ \varphi$ i π_2 és la projecció natural de $G \times \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \to \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Podem construir una aplicació d'aquesta manera gràcies a [11, Lemma 16].

Aleshores, definim el G-morfisme següent:

$$h = h_{1,2} : A_2 \longrightarrow A_1 \times A_2,$$

de tal manera que $h(u^z, x_n) = ((u^z, a), \varphi(x_n))$. Observem que h és bijectiva si i només si φ és bijectiva i que h és clarament un morfisme de G-conjunts.

Definim $f(u^z, x_n) = (u^z, a)$ i $g(u^z, x_n) = \varphi(x_n)$ (són les composicions amb les projeccions naturals de $A_1 \times A_2$). Per tant és clar que per a tot enter positiu m, per a tot enter no negatiu n i per a tot $z \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} g^m(u^z, x_n) &= g^{m-1}(\varphi_1(x_n), \varphi_2(x_n)) \\ &= g^{m-2}(\varphi_1\varphi_2(x_n), \varphi_2^2(x_n)) \\ &= \dots \\ &= (\varphi_1\varphi_2^{m-1}(x_n), \varphi_2^m(x_n)). \end{aligned}$$

on ara, $\varphi_1 = \pi_1 \circ \varphi$ i π_1 és la projecció natural $\pi_1 : G \times \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \to G$.

Per tant, com que $\varphi_2^m(x_n) \neq x_n$, tenim que $g^m(u^z, x_n) \neq (u^z, x_n)$, per a tot $(u^z, x_n) \in A_2$ i enter positiu m, i estem en condicions d'utilitzar el teorema 3.6. Així tindrem que $M = M(h, G)$ és un monoide rígid i irreflexiu que satisfà acc_1 per la dreta, amb grup d'unitats G lliure. És a dir, M és un monoide fir dreta.

Ara, suposarem que M és un producte lliure de G i un altre submonoide, i utilitzant la forma normal abans descrita i la forma normal dels elements en un producte lliure, veurem que la funció φ ha de complir algunes condicions addicionals.

Suposem doncs que existeix un submonoide F de M tal que $M = G * F$. Aleshores tenim que $F \cap G = \{1\}$ i utilitzant la forma normal descrita a la proposició 3.5 podem veure que $(1, a)$ es un àtom a M, de tal manera que existiran z, z' tals que

$$(u^z, a)u^{z'} \in F.$$

A més, donat $i \in \mathbb{N}$, existeixen $f_1, \ldots, f_r \in F \setminus \{1\}$ i $g_1, \ldots, g_{r+1} \in G$ per algun $r \in \mathbb{N}$ tals que:

$$(1, x_i) = g_1 f_1 g_2 \ldots g_r f_r g_{r+1},$$

on $g_2, \ldots, g_r \neq 1$.

De nou, usant la forma normal descrita a la proposició 3.5, és fàcil veure que $f_r g_{r+1} = (u^{z_1}, x_{n_i})$, per algun $z_1 \in \mathbb{Z}$, $n_i \in \mathbb{N}$, i que $f_l = [(u^z, a)u^{z'}]^{s_l}$ per algun enter positiu s_l, $(l = 1, \ldots, r-1)$.

Així, existeix $z_2 \in \mathbb{Z}$ tal que $u^{z_2} = g_{r+1}^{-1}$ i per tant

$$(u^{z_1}, x_{n_i})u^{z_2} \in F.$$

Però així tindrem,

$$\begin{aligned}
(u^{z_1}, x_{n_i})u^{z_2} &= f(u^{z_1}, x_{n_i}) g(u^{z_1}, x_{n_i}) u^{z_2} \\
&= (u^{z_1}, a)(\varphi_1(x_{n_i}), \varphi_2(x_{n_i}))u^{z_2} \\
&= u^{z_1 - z}(u^z, a)u^{z'} u^{-z'}(\varphi_1(x_{n_i}), \varphi_2(x_{n_i}))u^{z_2},
\end{aligned}$$

i com que M és el producte lliure de G i F, i $(u^z, a)u^{z'} \in F$, tindrem que necessàriament

$$u^{z_1 - z} = 1 \;\; \text{i} \;\; u^{-z'}(\varphi_1(x_{n_i}), \varphi_2(x_{n_i}))u^{z_2} \in F.$$

Repetint inductivament aquests arguments, aconseguim provar que

$$u^{-z'}\varphi_1\varphi_2^m(x_{n_i}) = u^z \ \text{ i } \ u^{-z'}(\varphi_1\varphi_2^m(x_{n_i}), \varphi_2^{m+1}(x_{n_i}))u^{z_2} \in F,$$

per a tot $m \geq 0$, i per tant $\varphi_1\varphi_2^m(x_{n_i}) = \varphi_1(x_{n_i})$ per a tot $m \geq 0$.

Similarment podem provar que per a tot $i \in \mathbb{N}$, existeix un enter positiu k tal que $x_{n_i} = \varphi_2^k(x_i)$. Aleshores veiem que φ compleix la propietat següent:

Per a tot $i \in \mathbb{N}$, existeix un enter positiu k_i, tal que

$$\varphi_1(\varphi_2^m)(x_i) = \varphi_1(\varphi_2^{k_i}(x_i)), \quad \text{per a tot } m \geq k_i. \tag{3.1}$$

Per tant l'únic que resta per fer és trobar una funció φ satisfent les condicions necessàries per a la construcció anterior i que no satisfaci (3.1).

Amb el lema següent, provem l'existència d'una aplicació φ amb aquestes propietats, tot i que no podem dir exactament quina és l'aplicació.

Lema 3.7. *Existeix una aplicació bijectiva $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tal que si denotem per $\pi_i : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ les projeccions naturals i $\varphi_i = \pi_i \circ \varphi$ per $i = 1, 2$ llavors:*

i) Per a cada $a \in \mathbb{Z}$ i cada enter positiu n, $\varphi_2^n(a) \neq a$

ii) Existeix un $b \in \mathbb{Z}$ tal que, per a cada $m \in \mathbb{N}$ existeix un enter $m' > m$ tal que $\varphi_1(\varphi_2^m(b)) \neq \varphi_1(\varphi_2^{m'}(b))$

Demostració. Per [11, Lemma 16], existeix una bijecció $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ de tal manera que si denotem $\varphi(a) = (\varphi_1(a), \varphi_2(a))$ per a tot $a \in \mathbb{Z}$, llavors $\varphi_2^n(a) \neq a$ per a cada $a \in \mathbb{Z}$ i cada enter positiu n. Així, ja tenim la primera condició del lema per a φ.

Ara, suposem que per a cada $b \in \mathbb{Z}$ existeix $m \in \mathbb{Z}$ tal que per a tot $m' > m$,

$$\varphi_1(\varphi_2^m(b)) = \varphi_1(\varphi_2^{m'}(b)).$$

Sigui $h : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'aplicació definida per $h(a, c) = (a + c, c)$ per a tot $a, c \in \mathbb{Z}$. Sigui $\psi = h \circ \varphi$. És clar que h és una bijecció i per tant també ho és ψ. Si $\psi(a) = (\psi_1(a), \psi_2(a))$ per a cada $a \in \mathbb{Z}$, llavors, tindrem que $\psi_2 = \varphi_2$ i la primera condició del lema es satisfarà per a ψ.

Ara, observem que per a cada $n \in \mathbb{N}$ i $a \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}\psi_1(\psi_2^n(a)) &= \varphi_1(\psi_2^n(a)) + \varphi_2(\psi_2^n(a)) \\ &= \varphi_1(\varphi_2^n(a)) + \varphi_2^{n+1}(a).\end{aligned}$$

Sigui $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\varphi_1(\varphi_2^{m_0}(0)) = \varphi_1(\varphi_2^{m'}(0))$ per a tot $m' > m_0$. Com que $\varphi_2^{m_1}(0) \neq \varphi_2^{m_2}(0)$ per a cada $m_2 > m_1 > m_0$, tenim que

$$\psi_1(\psi_2^{m_1}(0)) \neq \psi_1(\psi_2^{m_2}(0)),$$

per a tot $m_2 > m_1 > m_0$. Així la segona condició del lema es satisfà per a ψ, i per tant tindrem que o bé φ o bé ψ satisfà ambdues condicions. □

Així, si prenem φ satisfent les condicions anteriors, tindrem que M és un monoide fir per la dreta que no és el producte lliure del seu grup de les unitats i cap altre submonoide. Per tant, M és un contraexemple a la conjectura de Cohn.

Observant que per 2.7, aquest M es pot incloure al seu grup universal i que aquest serà un grup lliure de rang 3 generat per a, u i x_0, es va obtenir la construcció explícita següent.

3.3 Construcció de M (II)

Sigui F_3 el grup lliure sobre $\{a, u, x_0\}$ i sigui M el submonoide de F_3 generat per $\{u, u^{-1}, a, (x_n : n \geq 0)\}$, on cada x_n per $n > 0$ és definit recursivament com $x_n = u^n a^{-1} x_{n-1}$. Provarem que M és un monoide fir per la dreta que no és producte lliure del seu grup d'unitats i cap altre submonoide.

Recordem que els elements $\alpha \in F_3 \setminus \{1\}$ tenen una forma normal única

$$\alpha = y_{i_1}^{n_1} y_{i_2}^{n_2} \dots y_{i_r}^{n_r}$$

on $y_{i_j} \in \{a, u, x_0\}$, $n_j \neq 0$ per a tot $1 \leq j \leq r$ i $y_{i_k} \neq y_{i_{k+1}}$ per a tot $1 \leq k < r$.

Intentarem trobar una *forma reduïda* per als elements de M en funció dels seus generadors.

3.3.1 Forma reduïda de M.

Sigui M' el submonoide de M generat per $\{u, u^{-1}, a\}$. Observem que M' és el producte lliure del grup lliure generat per u i el monoide lliure generat per a. Així, M' és un monoide fir per la dreta i per l'esquerra.

Observem que per a cada $n \geq 0$, la forma normal de x_n al grup lliure F_3 és

$$x_n = u^n a^{-1} u^{n-1} a^{-1} \dots u a^{-1} x_0$$

i que M és el monoide generat per M' i x_n per a tot $n \geq 0$. Així, per a cada $\alpha \in M$,

$$\alpha = \overline{\alpha}_0 x_{n_1} \overline{\alpha}_1 x_{n_2} \overline{\alpha}_2 \dots x_{n_i} \overline{\alpha}_i, \tag{3.2}$$

per algun enter no negatiu $i, n_1, \dots, n_i \geq 0$ i $\overline{\alpha}_0, \dots, \overline{\alpha}_i \in M'$. Veiem també que i és únic per a cada $\alpha \in M$ i que si prenem $n_1 + \cdots + n_i$ el mínim possible, aleshores la descomposició (3.2) és única, és a dir, si

$$\alpha = \beta_0 x_{m_1} \beta_1 \dots x_{m_j} \beta_j,$$

amb $\beta_0, \dots, \beta_j \in M'$ i $m_1 + \cdots + m_j = n_1 + \cdots + n_i$, llavors $i = j$, $n_k = m_k$ per a tot $k = 1, \dots, i$ i $\beta_l = \overline{\alpha}_l$ per a tot $l = 0, \dots, i$.

Anomenarem a la descomposició (3.2), amb $n_1 + \cdots + n_i$ el mínim possible, la *forma reduïda* de α.

3.3.2 M és un monoide fir dreta.

Intentarem reduir totes les condicions per a que M sigui fir per la dreta a M' que ja sabem que és un monoide fir dreta i esquerra, i per tant satisfà totes les condicions necessàries. Per això, usarem el lema següent.

Lema 3.8. *Si $\alpha, \beta \in M$ i $\overline{\alpha}_0 x_{n_1} \overline{\alpha}_1 \dots x_{n_i} \overline{\alpha}_i$ i $\overline{\beta}_0 x_{m_1} \overline{\beta}_1 \dots x_{m_j} \overline{\beta}_j$ són les formes reduïdes de α i β respectivament, llavors la forma reduïda de $\alpha\beta$ és*

$$\overline{\alpha}_0 x_{n_1} \overline{\alpha}_1 \dots \overline{\alpha}_{i-1} x_{n_i} \alpha' x_{m'} \overline{\beta}_1 \dots \overline{\beta}_{j-1} x_{n_j} \overline{\beta}_j,$$

on $\alpha' \in M'$,$\alpha' x_{m'} = \overline{\alpha}_i \overline{\beta}_0 x_{m_1}$ i m' és el mínim possible.

Demostració. És clar, estudiant com són les formes normals a F_3 i tinguen en compte que no podem cancel·lar cap x_0. □

Lema 3.9. *M és un monoide rígid.*

Demostració. Com que M és un submonoide del grup lliure F_3, M és un monoide cancel·latiu.

Ara, suposem que $\alpha\beta = \gamma\delta$ per alguns $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in M$ i siguin

$$\overline{\alpha}_0 x_{n_1} \overline{\alpha}_1 \ldots x_{n_{i_1}} \overline{\alpha}_{i_1},$$

$$\overline{\beta}_0 x_{m_1} \overline{\beta}_1 \ldots x_{m_{i_2}} \overline{\beta}_{i_2},$$

$$\overline{\gamma}_0 x_{l_1} \overline{\gamma}_1 \ldots x_{l_{i_3}} \overline{\gamma}_{i_3} \text{ i}$$

$$\overline{\delta}_0 x_{p_1} \overline{\delta}_1 \ldots x_{p_{i_4}} \overline{\delta}_{i_4},$$

les formes reduïdes de α, β, γ i δ respectivament. Podem suposar sense pèrdua de generalitat que $i_1 \geq i_3$.

Suposem que $i_1 > i_3$.

Usant el lema 3.8, per a cada $k = 0, \ldots, i_3 - 1$, tenim que $\overline{\alpha}_k = \overline{\gamma}_k$, $n_{k+1} = l_{k+1}$ i $\overline{\alpha}_{i_3} x_{n_{i_3+1}} = \overline{\gamma}_{i_3} \overline{\delta}_0 x_{p_1}$. Per tant,

$$\begin{aligned} \alpha &= \overline{\alpha}_0 x_{n_1} \overline{\alpha}_1 x_{n_2} \ldots \overline{\alpha}_{i_3-1} x_{n_{i_3}} \overline{\alpha}_{i_3} x_{n_{i_3}+1} \overline{\alpha}_{i_3} \ldots x_{n_{i_1}} \overline{\alpha}_{i_1} \\ &= \overline{\gamma}_0 x_{l_1} \overline{\gamma}_1 x_{l_2} \ldots \overline{\gamma}_{i_3-1} x_{l_{i_3}} \overline{\gamma}_{i_3} \overline{\delta}_0 x_{p_1} \overline{\alpha}_{i_3+1} \ldots x_{n_{i_1}} \overline{\alpha}_{i_1} \\ &= \gamma \overline{\delta}_0 x_{p_1} \overline{\alpha}_{i_3+1} \ldots x_{n_{i_1}} \overline{\alpha}_{i_1} \end{aligned}$$

i tindrem que $\alpha \in \gamma M$.

Suposem doncs que $i_1 = i_3$.

En aquest cas tenim que per a cada $k = 0, \ldots, (i_1 - 1)$, $\overline{\alpha}_k = \overline{\delta}_k$, $n_{k+1} = l_{k+1}$ i $\overline{\alpha}_{i_1} \overline{\beta}_0 x_{m_1} = \overline{\gamma}_{i_1} \overline{\delta}_0 x_{p_1}$. Ara, podem suposar que $m_1 \geq p_1$. Llavors

$$\overline{\alpha}_{i_1} \overline{\beta}_0 = \overline{\gamma}_{i_1} \overline{\delta}_0 a u^{-(p_1+1)} a p^{-(p_1+2)} \ldots a u^{-m_1}.$$

Com que aquesta és una relació a M', que és rígid ja que és un monoide fir dreta, tenim que,

$$\bar{\alpha}_{i_1} M' \subseteq \bar{\gamma}_{i_1} M' \quad \text{o} \quad \bar{\alpha}_{i_1} M' \subseteq \bar{\gamma}_{i_1} M'.$$

Així hem obtingut que o bé $\alpha M \subseteq \gamma M$ o bé $\gamma M \subseteq \alpha M$ completant la demostració. □

Lema 3.10. *M satisfà la condició de cadena ascendent per a ideals principals per la dreta (acc$_1$ dreta).*

Demostració. Suposem que tenim una cadena d'ideals principals a M de la forma:

$$\alpha_1 M \subseteq \alpha_2 M \subseteq \alpha_3 M \subseteq \dots \tag{3.3}$$

aleshores,

$$\alpha_1 = \alpha_2 \beta_1 = \alpha_3 \beta_2 \beta_1 = \dots,$$

per alguns $\beta_1, \beta_2, \dots \in M$.

Siguin $\overline{(\alpha_i)}_0 x_{n_{i,1}} \dots x_{n_{i,j_i}} \overline{(\alpha_i)}_{j_i}$ les formes reduïdes dels α_i per $i \geq 0$. Pel lema 3.8, és clar que $j_1 \geq j_2 \geq \dots$. Per tant existeix un $k_0 \geq 0$ tal que per a cada $i \geq k_0$, $j_i = j_{k_0}$. Llavors, podem suposar que $j_i = j_k$ per a tot enter positiu i, k. De nou, usant el lema 3.8, $\beta_l \in M'$ per a tot $l \geq 1$, i aleshores,

$$\overline{(\alpha_1)}_{j_1} = \overline{(\alpha_2)}_{j_2} \beta_1 = \overline{(\alpha_3)}_{j_3} \beta_2 \beta_1 = \dots.$$

Així aconseguim una cadena ascendent d'ideals per la dreta a M':

$$\overline{(\alpha_1)}_{j_1} M' \subseteq \overline{(\alpha_2)}_{j_2} M' \subseteq \dots \tag{3.4}$$

Però com que M' és un monoide fir, M' satisfà acc$_1$ dreta i per tant (3.4) ha de ser estacionària. Aleshores (3.3) també esdevé una cadena estacionària, i el lema queda provat. □

Observem que M no satisfà acc_1 per l'esquerra ja que podem considerar la cadena

$$Mx_0 \subset Mx_1 \subset Mx_2 \subset \ldots,$$

que clarament no és estacionària.

Lema 3.11. *M és un monoide irreflexiu.*

Demostració. Suposem que tenim $\gamma\alpha\beta = \alpha$ per algun $\alpha \in M$ no unitat i alguns $\beta, \gamma \in M$.

Pel lema 3.8, és clar que $\beta, \gamma \in M'$. Sigui $\overline{\alpha}_0 x_{n_1} \overline{\alpha}_1 \ldots x_{n_i} \overline{\alpha}_i$ la forma reduïda de α. Si $i \geq 1$, llavors, pel lema 3.8, $\overline{\alpha}_i = \overline{\alpha}_i\beta$. Com que M és cancel·latiu, $\beta = 1$, i així $\alpha = \gamma\alpha$ de tal manera que $\gamma = 1$.

Si $i = 0$ llavors $\alpha, \beta, \gamma \in M'$, i com que M' és un monoide fir dreta, aquest és irreflexiu, per tant $\beta = \gamma = 1$. □

Corol·lari 3.12. *El monoide M és un monoide fir per la dreta.*

Demostració. Hem provat als lemes 3.9, 3.11 i 3.10 que M és un monoide rígid irreflexiu i que satisfà acc_1 per la dreta. És clar que el grup d'unitats de M és $\langle u \rangle$ que és lliure de rang 1, per tant M és un monoide fir per la dreta. □

3.3.3 M és un contraexemple a la conjectura de Cohn

Ara provarem que M no és producte lliure del seu grup d'unitats i cap altre submonoide.

Lema 3.13. *Sigui N un monoide tal que $N = \mathcal{U}(N) * L$ per algun submonoide L de N. Si $abc \in L$ per alguns $b \in L \setminus \{1\}$ i $a, c \in N$ aleshores $a, c \in L$.*

Demostració. Observem que L és un monoide cònic. Siguin $b \in L \setminus \{1\}$ i $a, c \in N$ tals que $abc \in L$.

Usant la forma normal dels elements en un producte lliure, existeixen enters no negatius n, m, i $a_0, c_0, a_n, c_m \in L$, $a_1, \ldots, a_{n-1}, c_1, \ldots, c_{m-1} \in L \setminus \{1\}$, $u_0, \ldots, u_{n-1}, v_0, \ldots, v_{m-1} \in \mathcal{U}(N) \setminus \{1\}$ tals que

$$a = a_0 u_0 a_1 u_1 \ldots a_{n-1} u_{n-1} a_n$$

i

$$c = c_0 v_0 c_1 v_1 \ldots c_{m-1} v_{m-1} c_m.$$

Aleshores, $abc = a_0 u_0 \ldots u_{n-1} a_n b c_0 v_0 c_1 \ldots v_{m-1} c_m$. Ara, com que L és cònic, $a_n b c_0 \neq 1$, i per la forma normal dels elements al producte lliure, $n = m = 0$. Per tant $a, c \in L$ □

Teorema 3.14. *El submonoide M de F_3 =gr$\langle u, a, x_0 \rangle$ generat per*

$$\{u, u^{-1}, a, \ (x_n : n \geq 0)\},$$

on $x_n = u^n a^{-1} x_{n-1}$ per a cada $n > 0$ és un monoide fir per la dreta que no és el producte lliure del seu grup d'unitats i cap altre submonoide.

Demostració. Pel corol·lari 3.12, M és un monoide fir dreta. Suposem que $M = F * G$, on $G = \mathcal{U}(M)$ i F és un submonoide de M.

Com que a és un àtom a M, existeixen enters z', z, tals que $u^{z'} a u^z \in F$. Sigui $a' = u^{z'} a u^z$ i observem que $x_n = u^{-z'} a' u^{-n-1-z} x_{n+1}$. Ara prenem x_0 que es pot escriure com

$$x_0 = g_1 f_1 \ldots g_r f_r g_{r+1},$$

on $f_i \in F \setminus \{1\}$ per a cada $1 \leq i \leq r$, $g_1, g_{r+1} \in G$ i $g_j \in G \setminus \{1\}$ per a cada $1 < j < r + 1$.

Pel lema 3.8, existeixen $\alpha \in M'$ i un enter no negatiu n tal que $f_r = \alpha x_n g_{r+1}^{-1}$, i $f_1, \ldots, f_{r-1} \in M'$. Per tant existeixen un enter no negatiu i, $z_0, \ldots, z_i \in \mathbb{Z}$ i enters positius $k_1, \ldots, k_i$ tals que $\alpha = u^{z_0} a^{k_1} u^{z_1} \ldots a^{k_i} u^{z_i}$.

Per tant

$$\begin{aligned} f_r &= u^{z_0} a^{k_1} u^{z_1} \dots a^{k_i} u^{z_i} x_n g_{r+1}^{-1} \\ &= u^{z_0} a^{k_1} u^{z_1} \dots a^{k_i} u^{z_i - z'} a' u^{-n-1-z} x_{n+1} g_{r+1}^{-1}. \end{aligned}$$

Com que $a' \in F \setminus \{1\}$, pel lema 3.13,

$$u^{-n-1-z} x_{n+1} g_{r+1}^{-1} \in F.$$

Ara tenim que

$$u^{-n-1-z} x_{n+1} g_{r+1}^{-1} = u^{-n-1-z-z'} a' u^{-n-2-z} x_{n+2} g_{r+1}^{-1} \in F.$$

Pel lema 3.13,

$$u^{-n-1-z-z'}, u^{-n-2-z} x_{n+2} g_{r+1}^{-1} \in F.$$

Així $z' = -n - 1 - z$. Però, com que

$$u^{-n-2-z} x_{n+2} g_{r+1}^{-1} = u^{-n-2-z-z'} a' u^{-n-3-z} x_{n+3} g_{r+1}^{-1} \in F,$$

de nou, usant el lema 3.13,

$$u^{-n-2-z-z'}, u^{-n-3-z} x_{n+3} g_{r+1}^{-1} \in F.$$

Així $z' = -n - 2 - z$, però $z' = -n - 1 - z$, una contradicció, per tant M no és el producte lliure del seu grup d'unitats i cap altre submonoide. □

Observacions 3.15. L'exemple que acabem de donar, prové de la construcció inicial prenent els subconjunts de F_3 següents,

$$\begin{gathered} G = \mathrm{gr}\langle u \rangle, \\ A_1 = \{u^z a \mid z \in \mathbb{Z}\}, \\ M_1 = \langle u, u^{-1}, a \rangle \ \text{ i} \\ A_2 = \{b x_n \mid b \in M_1, n \in \mathbb{N}\}. \end{gathered}$$

Com que tot element $b \in M_1$ s'escriu de manera única com

$$b = u^{z_1} a^{k_1} u^{z_2} \dots a^{k_i} u^{z_{i+1}},$$

amb $k_1, \dots, k_i$ enters positius, $i \geq 0$, $z_1, \dots, z_i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ i $z_1, z_{i+1} \in \mathbb{Z}$, tenim que tot element de A_2 s'escriu de manera única com

$$u^{z_1} a^{k_1} u^{z_2} \dots a^{k_i} u^{z_{i+1}} x_n,$$

amb $i \geq 0$, $k_1, \dots, k_i$ enters positius, $z_2, \dots, z_i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $z_1, z_{i+1} \in \mathbb{Z}$ i si $i > 0$, llavors $z_{i+1} \neq -n$. Direm que aquesta és la forma normal dels elements a A_2.

Definim també sobre A_1, A_2 la G-acció natural. Llavors, l'aplicació φ està definida per

$$\varphi(u^{z_1} a^{k_1} \dots a^{k_i} u^{z_{i+1}} x_n) = \begin{cases} (u^{z_1} a, a^{k_1 - 1} \dots a^{k_i} u^{z_{i+1}} x_n) & \text{si } i > 0, \\ (u^{z_1} a, u^{-n+1} x_{n+1}) & \text{si } i = 0, \end{cases}$$

on $u^{z_1} a^{k_1} \dots a^{k_i} u^{z_{i+1}} x_n$ és la forma normal d'un element de A_2.

Capítol 4

Monoides Rígids

En aquest capítol estudiarem certes propietats dels monoides que estan entre un monoide rígid i el seu grup universal. Concretament, els monoides rígids es poden incloure al seu grup universal i donarem una construcció per als monoides que es troben entre aquest i el seu grup universal obtinguts al invertir elements. Primerament veurem algunes propietats dels monoides rígids sota aquestes construccions.

4.1 El grup universal d'un monoide.

Donat un monoide M, ens preguntem sota quines condicions podem pensar M com a submonoide d'un grup, o més generalment com construir morfismes de M a un grup. El primer que podem intentar fer és invertir tots els elements, o si tenim una presentació donada per generadors i relacions, invertir tots els generadors. Això equival a considerar la mateixa presentació que tenim com a monoide i pensar-la com a presentació d'un grup. El grup G que en resulta es diu grup universal del monoide M. La presentació d'aquest com a monoide resulta d'afegir per a cada generador g de M un nou generador g^{-1} i 2 relacions $gg^{-1} = g^{-1}g = 1$. Així, és fàcil obtenir un morfisme de M a G que resulta de la composició d'una inclusió ι (afegir els nous generadors) i un quocient π (afegir les noves relacions).

$$M \overset{\iota}{\hookrightarrow} M' \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} G.$$

Aleshores, si M s'inclou en un grup G, aquesta composició serà clarament una inclusió, de fet és fàcil veure que aquest grup G junt amb el morfisme $M \to G$, té la propietat universal de que tot morfisme de M a un grup H, factoritza a través de G. D'aquesta propietat se'n deriva el fet de que la construcció de G és independent de la presentació que escollim per a M.

No tot monoide es pot incloure en un grup. Observem que que M sigui cancel·latiu és un condició necessària ja que per exemple, el monoide $M = \langle x, y, z \mid xz = yz\rangle$ no es pot incloure en un grup. Tot i això la condició de cancel·latiu no és una condició suficient. L'exemple següent degut a A.I. Mal'tsev [43] és un monoide cancel·latiu,

$$M = \langle a, b, c, d, x, y, z, t \mid ax = by, cx = dy, az = bt\rangle.$$

Al grup universal de M tenim que $cz = dt$. Mal'tsev prova que aquesta relació no es compleix a M i per tant aquest no es pot incloure en cap grup.

Els treballs de A.I. Mal'tsev, estudien el problema de la inclusió de semigrups en grups i d'anells en anells de divisió. A [44] es donen condicions necessàries i suficients per a la inclusió d'un monoide en un grup.

Una de les aplicacions de les condicions de Mal'tsev per a l'inclusió de semigrups en grups, és la dels monoides que aquí ens interessen. Concretament, recordem que un monoide M és *rígid* si és un monoide cancel·latiu tal que per a tot $x, y \in M$, si $xM \cap yM \neq \emptyset$ llavors o bé $xM \subseteq yM$ o bé $yM \subseteq xM$.

Observacions 4.1. Veiem que la definició de monoide rígid és simètrica. Suposem que $xz = yt$ per alguns $x, y, z, t \in M$. Si $x = yv$ per algun $v \in M$, llavors tenim que $yvz = yt$ i com que M és cancel·latiu, tindrem que $vz = t$. Simètricament, si tenim $y = xw$ per algun $w \in M$, aleshores $z = wt$.

La definició de rigidesa apareix per primera vegada a un treball de Dubreil-Jacotin [22], en que es caracteritzen alguns monoides que s'inclouen en grups lliures. Aquesta condició és suficient per a poder incloure els monoides en grups com demostra es següent resultat de Doss [21]:

Teorema 4.2 (Doss, [21]). *Tot monoide rígid es pot incloure en un grup.*

En particular, veiem que tot monoide rígid M s'inclou al seu grup universal.

La demostració d'aquest teorema es basa en la comprovació de les condicions de Mal'tsev abans esmentades. P.M. Cohn a [16, Theorem 0.8.12] dóna una demostració utilitzant altres tècniques, tot i que a la seva demostració hi ha alguns errors. Una versió corregida de la demostració de Cohn es pot trobar a [48].

La condició de rigidesa és suficient, però clarament no necessària per a poder incloure un monoide en un grup. Per exemple, el monoide $\langle x, y \mid xy = yx \rangle$ no és rígid però, en canvi, es pot incloure en un grup abelià.

4.2 Invertint elements en monoides rígids.

Els elements del grup universal G de M, es poden escriure com a productes d'elements de M i els seus inversos, que són els generadors del monoide M' en l'anterior descripció de la construcció de G. És a dir, donat $\alpha \in G$, α té una expressió de la forma:

$$a_0 b_1^{-1} a_1 \dots a_{n-1} b_n^{-1} a_n,$$

on $a_i, b_i \in M$.

De la mateixa manera que obtenim el grup universal G, podem obtenir altres monoides entre M i G, invertint només certs elements.

Prenem M un monoide rígid i G el seu grup universal. Donat un subconjunt $S \subseteq M$, denotem per $S^{-1} = \{s^{-1} \in G \mid s \in S\} \subseteq G$. Observem que si invertim els elements de S, també invertirem tots els seus factors, ja que si $xyz = s \in S$, aleshores $zs^{-1}x = y^{-1}$, i per tant, tot el submonoide que generen. Per aquesta raó introduïm els següents subconjunts:

Definició 4.3. Sigui M un monoide rígid i $S \subseteq M$ un subconjunt qualsevol. Definim

$$\mathrm{Fact}(S) = \{y \in M \mid \exists x, z \in M \text{ tal que } xyz \in S\}.$$

Denotem per $\tilde{S}$ el submonoide generat per $\mathrm{Fact}(S)$, i M_S el submonoide de G generat per M i S^{-1}.

És fàcil veure que M_S junt amb el morfisme natural $\iota : M \hookrightarrow M_S$ és un monoide amb la propietat universal de que tot morfisme $f : M \to N$, tal que $f(S) \subseteq \mathcal{U}(N)$ factoritza a través de ι.

Els elements de M_S tenen una expressió de la forma

$$a_0 b_1^{-1} a_1 \dots a_{n-1} b_n^{-1} a_n,$$

on $n \geq 0$, $a_i \in M$, per a tot $i = 0, \dots, n$ i $b_j \in \tilde{S}$ per a tot $j = 1, \dots, n$.

Aquestes expressions no són úniques, clarament, però podem disposar d'un cert tipus de forma normal o forma reduïda per als elements de M_S en funció de M i de S. Per això ens cal definir:

Definició 4.4. Donat M un monoide rígid i $a, b \in M$, definim el conjunt

$$\{a.b\} = \{x \in M \mid \exists a', a'', b', b'' \in M \text{ tals que } a = a'a'', b = b'b'' \text{ i } x = a'b''\}.$$

Seguidament donem algunes propietats bàsiques d'aquests conjunts.

Proposició 4.5 ([16]). *Sigui M un monoide rígid i $x, a, b, c \in M$. Aleshores,*

1. *Si $x \in \{a.b\}$ llavors $x \in \{ac.b\}$.*

2. *Si $cx \in \{ca.b\}$ llavors $x \in \{a.b\}$.*

3. *Si $x \notin \{ac.b\}$ i $x \in \{ad.b\}$ llavors $x = ay$ per algun $y \in M$ i $y \in \{d.b\}$.*

A més, es compleixen les propietats simètriques dreta-esquerra, que referirem com 1'),2'),3').

Definició 4.6. Sigui M un monoide rígid i $\alpha \in M_S$. Una expressió d'α de la forma

$$a_0 b_1^{-1} a_1 \dots a_{n-1} b_n^{-1} a_n,$$

amb $n \geq 0$, $a_i \in M$ i $b_j \in \tilde{S}$ per a tot $i, j = 1, \dots n$, direm que és reduïda, si:

1. $a_i \notin \{b_i.b_{i+1}\}$ per a tot $i = 1, \ldots, n-1$.

2. $b_j \notin \{a_j.a_{j-1}\}$ per a tot $j = 1, \ldots, n$.

Proposició 4.7. *Sigui M un monoide rígid i S un subconjunt qualsevol de M. Si tenim dues expressions reduïdes d'un element $\alpha \in M_S$ de la forma*

$$a_0 b_1^{-1} a_1 \ldots a_{n-1} b_n^{-1} a_n = c_0 d_1^{-1} c_1 \ldots c_{m-1} d_m^{-1} c_m,$$

per a certs $a_i, c_i \in M$ i $b_j, d_j \in \tilde{S}$, llavors $m = n$.

Observacions 4.8. La demostració d'aquest resultat està implícita en la demostració corregida del Teorema de Doss [48].

Observem també que l'anterior proposició ens permet definir una longitud sobre els elements de M_S en funció del monoide M. En aquest cas direm que $l_M(\alpha) = n$. Sempre que no hi hagi possible confusió simplificarem la notació per $l(\alpha)$.

Definició 4.9. Direm que un element $\alpha \in M_S$ és cíclicament reduït si $l(\alpha^n) = nl(\alpha)$ per a tot $n \geq 1$.

Observacions 4.10. El nom de cíclicament reduït prové del fet següent. Observem, que si $\alpha \in M_S$ és cíclicament reduït, llavors té una expressió reduïda de la forma

$$\alpha = a_0 b_1^{-1} a_1 \ldots a_{n-1} b_n^{-1} a_n,$$

tal que $a_{n-1} b_n^{-1} (a_n a_0) b_1^{-1} a_1$ és també reduïda. Aleshores, si movem cíclicament els elements de l'expressió reduïda d'α, anem obtenint expressions reduïdes.

Si observem que moure els elements d'una expressió cíclicament equival a conjugar l'expressió per l'element corresponent a G, el grup universal de M, obtenim el resultat següent.

Lema 4.11. *Sigui M un monoide rígid, $S \subseteq M$ i $\alpha \in M_S$. Si α no és una unitat a M_S, aleshores existeix un $g \in \mathcal{U}(M_S)$ tal que $g\alpha g^{-1} \in M_S$ és cíclicament reduït.*

Demostració. Suposem que α té l'expressió reduïda següent,

$$a_0 b_1^{-1} a_1 \dots a_{n-1} b_n^{-1} a_n,$$

on $a_i \in M$, $b_j \in \tilde{S}$ i que no és cíclicament reduïda.

Aleshores $a_{n-1} b_n^{-1} (a_n a_0) b_1^{-1} a_1$ no és una expressió reduïda i per tant tenim que,

$$b_n \in \{a_n a_0 . a_{n-1}\} \text{ o bé } a_n a_0 \in \{b_n . b_1\} \text{ o bé } b_1 \in \{a_1 . a_n a_0\}.$$

Farem inducció sobre n. Suposem que $n \geq 1$. Si $b_n \in \{a_n a_0 . a_{n-1}\}$, llavors pel lema 4.5(*3*) tenim que $a_0 = a_0' a_0''$, $a_{n-1} = a_{n-1}' a_{n-1}''$ Per alguns a_0', a_0'', a_{n-1}' i $a_{n-1}'' \in M$ tals que $b_n = a_n a_0' a_{n-1}''$. Com que $b_n \in \mathcal{U}(M_S)$, tindrem que a_n, a_0' i $a_{n-1}'' \in \mathcal{U}(M_S)$ i

$$(a_0')^{-1} \alpha a_0',$$

té longitud menor que α.

Si $a_n a_0 \in \{b_n . b_1\}$, llavors clarament $a_n, a_0 \in \mathcal{U}(M_S)$ i

$$(b_n^{-1} a_n) \alpha (b_n^{-1} a_n)^{-1},$$

té longitud menor que α.

Finalment si $b_1 \in \{a_1 . a_n a_0\}$, pel lema 4.5(*3'*), tindrem que $a_1 = a_1' a_1''$, $a_n = a_n' a_n''$ per alguns a_1', a_1'', a_n', i $a_n'' \in M$ tals que $b_1 = a_1' a_n'' a_0$. Com que $b_1 \in \mathcal{U}(M_S)$, tindrem que a_1', a_n'' i $a_0 \in \mathcal{U}(M_S)$ i

$$(a_n'') \alpha (a_n'')^{-1},$$

té longitud menor que α.

Per inducció sobre la longitud de α, ens podem reduir al cas en que $n = 1$. (Si $n = 0$, α ja és cíclicament reduït.)

Suposem doncs que $n = 1$, α és una no unitat a M_S i α no és cíclicament reduït. Aleshores com que $\alpha \notin \mathcal{U}(M_S)$, no podem tenir el cas $a_0 a_n \in \{b_1 . b_n\}$.

Suposem, sense pèrdua de generalitat, que $b_1 \in \{a_1 . a_1 a_0\}$. Com que $b_1 \notin \{a_1 . a_0\}$, haurem de tenir pel lema 4.5(*3'*) que $a_1 = a_1' a_1''$, $a_1 = a_1^* a_1^{**}$ i $b_1 = a_1^* a_1'' a_0$, on a_1^*, a_1'' són unitats de M_S i a_1^{**} i a_1' són no unitats. Ara, $a_1 = a_1^* a_1^{**} = a_1' a_1''$. Com que M és rígid, o bé $a_1^* \in a_1' M$ o bé $a_1' \in a_1^* M$. Però a_1' és una no unitat de M_S i per tant no pot ser un factor de a_1^*. Així doncs $a_1' = a_1^* x$ per algun $x \in M$. Per tant tenim,

$$\alpha = a_0(a_1^* a_1'' a_0)^{-1} a_1^* x a_1'' = (a_1'')^{-1} x (a_1''),$$

i així $x = (a_1'')\alpha(a_1'')^{-1}$, que és cíclicament reduït.

□

A les seccions següents estudiarem els monoides que es troben entre un monoide rígid i el seu grup universal. Partirem del següent resultat de F. Cedó i A. Pitarch.

Teorema 4.12 ([10]). *Sigui M un monoide rígid i $S \subseteq M$ un subconjunt qualsevol. Aleshores M_S és un monoide rígid.*

4.3 Monoides irreflexius.

Ara veurem que si tenim M un monoide rígid, irreflexiu i arquimedià, i $S \subseteq M$ un subconjunt de M qualsevol, aleshores M_S és irreflexiu.

Primerament necessitarem un petit lema que ens permetrà argumentar sobre la longitud d'expressions reduïdes per a monoides rígids.

Lema 4.13. *Sigui M un monoide rígid i $S \subseteq M$. Sigui $\alpha \in M_S$ amb una expressió reduïda de la forma*

$$\alpha = a_0 b_1^{-1} a_1 \dots a_{n-1} b_n^{-1} a_n,$$

on $n \geq 0$, $a_i \in M$ i $b_i \in \tilde{S}$ amb $a_n \notin \mathcal{U}(M_S)$, i sigui $\beta \in M_S$. Aleshores l'expressió reduïda de $\alpha\beta$ és de la forma

$$a_0 b_1^{-1} a_1 \dots a_{n-1} b_n^{-1} (a_n' e_0) f_1^{-1} \dots f_r^{-1} e_r,$$

per algun $r \geq 0$, $e_j \in M$, $f_j \in \tilde{S}$, on $a_n = a_n' a_n''$, per a certs $a_n', a_n'' \in M$ amb a_n' no unitat a M_S, a_n'' unitat a M_S i $a_n''\beta = e_0 f_1^{-1} \dots f_r^{-1} e_r$.

Demostració. Farem inducció sobre la longitud de β. Si $l(\beta) = 0$, tenim que $\beta = b \in M$. Si $a_0 b_1^{-1} a_1 \dots a_{n-1} b_n^{-1}(a_n b)$ no és reduïda, només pot ser que $b_n \in \{a_n b.a_{n-1}\}$. Com que $b_n \notin \{a_n \cdot a_{n-1}\}$, forçosament tindrem que $b_n = a_n b' a''_{n-1}$, on $b = b'b''$ i $a_{n-1} = a'_{n-1} a''_{n-1}$. Però així, a_n és un factor de b_n, d'on tenim que a_n és una unitat a M_S, contradicció. Per tant l'expressió ja és reduïda i podem prendre $r = 0$, $a'_n = a_n$, $a''_n = 1$ i $e_0 = b$.

Suposem ara que $l(\beta) = m \geq 1$, $\beta = c_0 d_1^{-1} c_1 \dots c_{m-1} d_m^{-1} c_n$ per alguns $c_j \in M$ i $d_j \in \tilde{S}$. Si

$$a_0 b_1^{-1} a_1 \dots a_{n-1} b_n^{-1}(a_n c_0) d_1^{-1} \dots c_{m-1} d_m^{-1} c_m$$

no és reduïda, com que les expressions d'α i β ja són reduïdes, haurà de reduir a $a_{n-1} b_n^{-1} a_n c_0$, a $b_n^{-1} a_n c_0 d_1^{-1}$ o a $a_n c_0 d_1^{-1} c_1$. Els dos primers casos no es poden donar ja que, com a l'apartat anterior, obtindríem que a_n és una unitat de M_S. En el primer cas, per ser un factor de b_n, i en el segon cas, per ser un producte d'un factor de b_n i un de d_1.

Per tant tenim que $a_n c_0 d_1^{-1} c_1$ no és reduïda, i aleshores $d_1 \in \{c_1 \cdot a_n c_0\}$. Pel lema 4.5(*3'*) existeixen $c'_1, c''_1, \overline{a}'_n, \overline{a}''_n \in M$ tals que, $d_1 = c'_1 \overline{a}''_n c_0$, $c_1 = c'_1 c''_1$ i $a_n = \overline{a}'_n \overline{a}''_n$, $\overline{a}'_n$ és no unitat a M_S i $\overline{a}''_n$ és una unitat a M_S tal que

$$\overline{a}''_n \beta = c_1 d_2^{-1} \dots c_{m-1} d_m^{-1} c_m,$$

que és de longitud $m - 1$. Per tant si apliquem la hipòtesi d'inducció a l'expressió

$$(a_0 b_1^{-1} a_1 \dots a_{n-1} b_n^{-1} \overline{a}'_n)(\overline{a}''_n \beta),$$

tenim que l'expressió reduïda de $\alpha\beta = (a_0 b_1^{-1} a_1 \dots a_{n-1} b_n^{-1} \overline{a}'_n)(\overline{a}''_n \beta)$ és

$$a_0 b_1^{-1} a_1 \dots a_{n-1} b_n^{-1}(a'_n e_0) f_1^{-1} \dots f_r^{-1} e_r,$$

on $\overline{a}'_n = a'_n \tilde{a}_n$ i $\tilde{a}_n \overline{a}''_n \beta = e_0 f_1^{-1} \dots e_r$ per alguns $a'_n, \tilde{a}_n \in M$. Per tant posem $a''_n = \tilde{a}_n \overline{a}''_n$, i tenim el resultat que volíem.

□

Anomenarem al resultat simètric dreta esquerra de l'anterior resultat, lema 4.13'.

Per provar que si M és rígid, irreflexiu i arquimedià aleshores M_S és irreflexiu, argumentarem per inducció sobre la longitud de $\alpha \in M_S$ on α és tal $\beta\alpha\gamma = \alpha$. Per exposar més clarament els resultats, el cas de longitud 0, en que $\alpha \in M$, el mostrem en un lema apart.

Lema 4.14. *Sigui M un monoide rígid, irreflexiu i arquimedià. Sigui $a \in M \setminus \mathcal{U}(M_S)$ i siguin $\beta, \delta \in M_S$ tals que $\beta a \delta = a$. Aleshores $\beta = \delta = 1$.*

Demostració. Donat que $a \notin \mathcal{U}(M_S)$, pel lema 4.13, existeixen $r \geq 0$, $e_0, \ldots, e_r \in M$, $f_1, \ldots, f_r \in \tilde{S}$, $a'' \in M \cap \mathcal{U}(M_S)$ i $a' \in M$ no unitat a M_S, tals que $a = a'a''$ i l'expressió reduïda de $a\delta$ és

$$a' e_0 f_1^{-1} \ldots f_r^{-1} e_r.$$

Simètricament, utilitzant el lema 4.13', existeixen $s \geq 0$, $g_0, \ldots, g_s \in M$, $h_1, \ldots, h_s \in \tilde{S}$, $a^* \in M \cap \mathcal{U}(M_S)$ i $a^{**} \in M$ no unitat a M_S, tals que $a = a^* a^{**}$ i l'expressió reduïda de βa és

$$g_0 h_1^{-1} \ldots h_s^{-1} g_s a^{**}.$$

Aleshores, tenim que $a'a'' = a = a^* a^{**}$ i com que M és rígid, $a^*, a'' \in \mathcal{U}(M_S)$ i $a^{**}, a' \notin \mathcal{U}(M_S)$, és fàcil veure que $a' = a^* x$ i $a^{**} = x a''$ per algun $x \in M$ no unitat a M_S.

Donat que x és una no unitat i

$$h_s \notin \{g_s x a''.g_{s-1}\} \text{ i } f_1 \notin \{e_1.a^* x e_0\},$$

tenim que l'expressió

$$g_0 h_1^{-1} \ldots h_s^{-1} (g_s x e_0) f_1^{-1} \ldots f_r^{-1} e_r,$$

és una expressió reduïda de $\beta a \delta = a$, per tant, tindrem que $r = s = 0$.

Aleshores, tenim que $a = a^* x a''$ amb $a'', a^* \in M \cap \mathcal{U}(M_S)$, $x \in M \setminus \mathcal{U}(M_S)$ i

$$a^* x a'' = g_0 x e_0,$$

on $\beta a^* = g_0 \in M$ i $a''\delta = e_0 \in M$.

Donat que M és rígid, podem suposar sense pèrdua de generalitat que se satisfà algun dels casos següents.

1. $a'' \in Me_0$ i $a^* \in g_0M$.

2. $e_0 \in Ma''$ i $g_0 \in a^*M$.

3. $a'' \in Me_0$ i $g_0 \in a^*M$.

Als casos 1) i 2) obtenim que $txz = x$ per alguns $z, t \in M$ tals que $a'' = ze_0$ i $a^* = g_0t$ (Cas 1) o bé $e_0 = za$ i $g_0 = a^*t$ (Cas 2). Com que M és irreflexiu i $x \notin \mathcal{U}(M_S)$ tindrem que $z = t = 1$, $g_0 = a^*$, $e_0 = a''$, i per tant $\beta = \delta = 1$.

Al cas 3), obtenim $tx = xz$ per a certs $t, z \in M$ tals que $a'' = ze_0$ i $g_0 = a^*x$. A més $t, z \in \mathcal{U}(M_S)$, ja que són factors de a'' i de a^*. Si t o z són unitats a M tenim $x = t^{-1}xz$ o $x = txz^{-1}$ i ens podem reduir als casos 1) o 2).

Per tant podem suposar que t, z no són unitats a M. Com que M és arquimedià, existeix un enter no negatiu k tal que $x \in t^kM$ i $x \notin t^{k+1}M$. Així, si posem $x = t^ku$ per algun $u \in M$, tenim que $u \notin tM$ i $tu = uz$. Aleshores com que M és rígid $t = uv$ per algun $v \in M$. Però així $u, v \in \mathcal{U}(M_S)$ i tindrem que $x \in \mathcal{U}(M_S)$, una contradicció.

$\square$

Anem a veure ara el cas general.

Teorema 4.15. *Sigui M un monoide rígid, irreflexiu i arquimedià. Aleshores M_S és irreflexiu.*

Demostració. Siguin $\alpha, \beta, \delta \in M_S$ tals que $\alpha \notin \mathcal{U}(M_S)$ i $\beta\alpha\delta = \alpha$, on l'expressió reduïda d'α és:

$$\alpha = a_0 b_1^{-1} a_1 \ldots a_{n-1} b_n^{-1} a_n$$

amb $n \geq 0$, $a_i \in M$ i $b_i \in \tilde{S}$.

Si $n = 0$, podem usar el lema 4.14 i tenim que $\beta = \delta = 1$. Suposem doncs que $n > 0$.

Si $a_0 \in \mathcal{U}(M_S)$ o $a_n \in \mathcal{U}(M_S)$, tindrem que o bé

$$(b_1 a_0^{-1} \beta a_0 b_1^{-1})(a_1 b_2^{-1} \dots a_{r-1} b_n^{-1} a_n)\delta = a_1 b_2^{-1} \dots a_{n-2} b_{n-1}^{-1} a_n,$$

o bé

$$\beta(a_0 b_1^{-1} \dots a_{n-2} b_n^{-1} a_{n-1})(b_n^{-1} a_n \delta a_n^{-1} b_n) = a_0 b_1^{-1} \dots a_{n-2} b_{n-1}^{-1} a_{n-1},$$

i per inducció sobre n, $(b_1 a_0^{-1} \beta a_0 b_1^{-1}) = 1$ i així $\beta = 1$, o bé $b_n^{-1} a_n \delta a_n^{-1} b_n = 1$, i així $\delta = 1$. En conseqüència $\beta = \delta = 1$. Per tant, podem suposar que $a_0, a_n \notin \mathcal{U}(M_S)$.

Usem ara que M_S és rígid pel teorema 4.12, a l'expressió

$$\beta(a_0 b_1^{-1} \dots a_{n-1} b_n^{-1} a_n)\delta = (a_0 b_1^{-1} \dots a_{n-1} b_n^{-1} a_n)$$

i tenim que o bé $\beta a_0 = a_0 \gamma$ o bé $\beta a_0 \gamma = a_0$ per algun $\gamma \in M_S$.

Si $\beta a_0 = a_0 \gamma$, tindrem

$$(b_1 \gamma b_1^{-1}) a_1 b_2^{-1} \dots a_{n-1} b_n^{-1} a_n \delta = a_1 b_2^{-1} \dots a_{n-1} b_n^{-1} a_n,$$

on $a_1 b_2^{-1} \dots a_{n-1} b_n^{-1} a_n \notin \mathcal{U}(M_s)$, ja que $a_n \notin \mathcal{U}(M_s)$. Per inducció sobre n, obtenim que $\delta = 1$ i així $\beta = 1$.

Si $\beta a_0 \gamma = a_0$, com que $a_0 \notin \mathcal{U}(M_S)$, pel lema 4.14 tenim que $\beta = \gamma = 1$ i per tant $\delta = 1$. □

4.3.1 Monoides irreflexius i no arquimedians

En aquesta secció, donarem un exemple de monoide rígid i irreflexiu M amb un subconjunt $S \subseteq M$ tal que M_S no és irreflexiu, de tal manera que no podem eliminar la condició de que M sigui arquimedià al teorema 4.15.

Aquest exemple va ser construït primerament com a un exemple de monoide rígid i irreflexiu amb grup d'unitats trivial i grup universal lliure, tal que $R[M]$ no és un 2-fir per a cap anell R [9, Example 4].

Teorema 4.16. *Existeix un monoide rígid i irreflexiu M amb un subconjunt $S \subseteq M$ tal que M_S no és irreflexiu.*

Demostració. Sigui G el grup lliure sobre $\{x, y\}$. Sigui $x_i = y^{-i}x$ per a tot $i \geq 0$, $z = y^{-1}x^{-1}yx$, i sigui M el submonoide de G generat per $\{y, z, x_i\ (i \geq 0)\}$. És fàcil veure que,

$$\{x_i yz = x_i, x_i = yx_{i+1} \ \ (i \geq 0)\},$$

és un sistema complet de relacions per a M amb els generadors anteriors, i a [9] es prova que M és un monoide rígid.

Ara, per a cada $g \in M$, denotem per $\deg_x(g)$ la funció de grau usual per a $x \in G$ prenent valors a $\mathbb{Z}$.

Sigui $S = \{y\}$. És clar que $M_S = \langle x, y, y^{-1}, z\rangle$, i observem que tots els generadors tenen $\deg_x \geq 0$, per tant $x \notin \mathcal{U}(M_S)$.

Però ara, la relació $(y^{-1})x(yz) = x$, on $y^{-1}, yz \neq 1$, implica que M_S no és irreflexiu.

□

4.4 Monoides arquimedians

Ara provarem que la propietat d'arquimedià també es conserva en invertir elements en monoides rígids, irreflexius i arquimedians.

Primer veurem el lema següent.

Lema 4.17. *Sigui M un monoide rígid irreflexiu i arquimedià, $S \subseteq M$ un subconjunt qualsevol. Suposem que un element $\alpha \in M_S$ té dues expressions reduïdes de la forma*

$$a_0 b_1^{-1} a_1 \ldots a_{n-1} b_n^{-1} a_n = e_0 f_1^{-1} e_1 \ldots e_{n-1} f_n^{-1} e_n,$$

per algun $n > 0$, $a_i, e_i \in M$, $b_i, f_i \in \tilde{S}$, i existeix un $\beta \in M_S$ tal que $e_n = a_n\beta$. Aleshores, si $a_n \notin \mathcal{U}(M_S)$, $\beta = 1$.

Demostració. Observem que si $a_n \notin \mathcal{U}(M_S)$, llavors e_n tampoc pot ser unitat a M_S ja que a_n és un factor de e_n.

Mirem doncs la igualtat següent al grup universal de M,

$$e_0 f_1^{-1} e_1 \dots e_{n-1} f_n^{-1} e_n a_n^{-1} b_n = a_0 b_1^{-1} a_1 \dots f_{n-1}^{-1} a_{n-1}. \tag{4.1}$$

L'expressió de la dreta seguirà essent reduïda, i per tant l'expressió de l'esquerra no pot esser reduïda ja que té longitud més gran.

Aleshores, com que les dues expressions inicials eren reduïdes, tindrem un dels casos següents

1. $e_n \in \{f_n.a_n\}$.
2. $a_n \in \{b_n.e_n\}$.

Al primer cas, si $e_n \in \{f_n.a_n\}$, tenim que $f_n = f_n' f_n''$, $a_n = a_n' a_n''$ i $e_n = f_n' a_n''$, per a alguns $f_n', f_n'', a_n', a_n'' \in M$. Per tant veiem que

$$f_n' a_n'' = e_n = a_n \beta = a_n' a_n'' \beta.$$

Com que f_n' és un factor de f_n, haurà de ser unitat a M_S i com que e_n no és unitat a M_S, tindrem que a_n'' no és unitat a M_S. Així, podrem escriure a M_S

$$a_n'' = ((f_n')^{-1} a_n') a_n'' \beta,$$

i com que M_S és irreflexiu pel lema 4.15, tindrem que $f_n' = a_n'$ i $\beta = 1$.

Al cas 2, tindrem que $b_n = b_n' b_n''$, $e_n = e_n' e_n''$ i $a_n = b_n' e_n''$, per a alguns $b_n', b_n'', e_n', e_n'' \in M$.

Com que b_n' és un factor de b_n, haurà de ser una unitat a M_S, i com que a_n no és unitat a M_S, $e_n'' \notin \mathcal{U}(M_S)$. Aleshores

$$e_n' e_n'' = e_n = a_n \beta = b_n' e_n'' \beta.$$

Si $e_n' \in \mathcal{U}(M_S)$, podem fer com en el cas anterior i obtenim que $e_n' = b_n'$ i $\beta = 1$.

Si $e_n' \notin \mathcal{U}(M_S)$, reduint l'expressió (4.1), obtenim

$$e_0 f_1^{-1} e_1 \dots e_{n-1} f_n^{-1}(e_n' b_n'') = a_0 b_1^{-1} a_1 \dots f_{n-1}^{-1} a_{n-1},$$

on l'expressió de l'esquerra encara no és reduïda, per tant $f_n \in \{e_n' b_n''.e_{n-1}\}$ però com que e_n' no és una unitat de M_S, no pot ser un factor de f_n i tindrem que $f_n \in \{e_n'.e_{n-1}\}$, però això ens diu que $f_n \in \{e_n.e_{n-1}\}$, una contradicció.

□

Ara anem a veure que M_S és arquimedià.

Teorema 4.18. *Sigui M un monoide rígid, irreflexiu i arquimedià. Sigui $S \subseteq M$ un subconjunt qualsevol. Aleshores M_S és arquimedià.*

Demostració. Suposem que el teorema no és cert. Considerem $\alpha, \beta, \gamma \in M_S$, tals que

$$\alpha\beta = \gamma\alpha,$$

amb $\beta, \gamma \notin \mathcal{U}(M_S)$, i $\alpha \in \gamma^k M_S$ per a tot $k \geq 0$. Primerament intentarem aplicar reduccions per veure que podem suposar que les longituds d'alguns elements són 0.

Pel lema 4.11, com que $\gamma \notin \mathcal{U}(M_S)$, podem trobar un $g \in \mathcal{U}(M_S)$ tal que $g\gamma g^{-1} \in M_S$ té una expressió cíclicament reduïda. Aleshores,

$$(g\alpha)\beta = (g\gamma g^{-1})(g\alpha),$$

$g\alpha \in (g\gamma g^{-1})^k M$ i a més $(g\gamma g^{-1})$ és unitat si i només si γ és unitat. Per tant podem suposar que γ és cíclicament reduït.

Sigui $\gamma = e_0 f_1^{-1} \dots e_{r-1} f_r^{-1} e_r$ una expressió reduïda de γ. Com que γ no és unitat a M_S, existeix un e_i que no és unitat a M_S. Ara, pel lema 4.13 i el fet que γ és cíclicament reduït, tenim que la longitud de $\gamma^k \delta$ és més gran o igual que $r(k-1)+i$ per a qualsevol $\delta \in M_S$. Així, com que $\alpha \in \gamma^k M_S$ per a tot $k \geq 0$, tenim que $l(\gamma) = 0$ i escriurem $\gamma = c \in M$.

Suposem doncs que hem triat α de longitud n mínima tal que $\alpha\beta = c\alpha$ amb $c \in M, \beta \in M_S$ no unitats a M_S i tal que $\alpha \in c^k M$ per a tot $k \geq 0$.

Sigui $a_0 b_1^{-1} a_1 \dots a_{n-1} b_n^{-1} a_n$ una expressió reduïda d'α amb $a_i \in M$ i $b_i \in \tilde{S}$. Si a_n és unitat a M_S, prenent $\overline{\alpha} = \alpha a_n^{-1} b_n$ de longitud menor que n, tindrem que

$$\overline{\alpha}(b_n^{-1} a_n \beta a_n^{-1} b_n) = c\overline{\alpha},$$

amb c i $b_n^{-1} a_n \beta a_n^{-1} b_n$ clarament no unitats a M_S i a més, si existeixen $\delta_k \in M_S$ tals que $\alpha = c^k \delta_k$ per a tot $k \geq 0$, llavors $\overline{\alpha} = c^k \delta_k a_n^{-1} b_n$. Per tant, com que hem pres n mínim, a_n haurà de ser una no unitat a M_S.

Aleshores,

$$a_0 b_1^{-1} a_1 \dots a_{n-1} b_n^{-1} a_n \beta = c a_0 b_1^{-1} a_1 \dots a_{n-1} b_n^{-1} a_n.$$

Donat que els dos costats han de tenir la mateixa longitud, com que a_n és una no unitat a M_S, pel lema 4.13, tindrem que l'expressió de l'esquerra té longitud més gran o igual que n. Per tant l'expressió de la dreta és una expressió reduïda i tindrem dues expressions reduïdes a M_S de la forma,

$$a_0 b_1^{-1} a_1 \dots a_{n-1} b_n^{-1} a'_n b' = c a_0 b_1^{-1} a_1 \dots a_{n-1} b_n^{-1} a_n,$$

per alguns $a'_n, a''_n, b' \in M$ tals que $a_n = a'_n a''_n$ i $a''_n \beta = b'$. A més $a'_n, b' \notin \mathcal{U}(M_S)$, i $a''_n \in \mathcal{U}(M_S)$.

Si $n > 0$, aplicant el lema 4.17 a aquestes expressions, tenim que $\beta = 1$, una contradicció ja que β no és una unitat a M_S.

Per tant podem suposar que $l(\alpha) = 0$, i $\alpha \in M$. Escrivim doncs $\alpha = a$ i tenim $a\beta = ca$, per alguns $c \in M$ i $\beta \in M_S$ no unitats a M_S, tals que $a \in c^k M_S$ per a tot $k \geq 0$.

Així, tenim que $a\beta \in M$. Per tant tindrem que

$$a'\beta' = ca,$$

on $a = a'a''$ per a alguns $a', a'' \in M$ tals que $a''\beta = \beta' \in M$. A més $a'' \in \mathcal{U}(M_S)$ i $a', \beta' \notin \mathcal{U}(M_S)$. Així $a'\beta' = ca'a''$.

Com que M és rígid, tenim que existeix un $x \in M$ tal que o bé $\beta' = xa''$ o bé $a'' = x\beta'$, però com que a'' és unitat a M_S i β' no, només pot ser $\beta' = xa''$ i $x \notin \mathcal{U}(M_S)$. Aleshores tindrem que

$$a'x = ca'.$$

Com que x, c són no unitats a M_S, tampoc ho són a M i com que M és arquimedià, existeix un $t \geq 0$ tal que $a' \notin c^t M$.

Ara, com que $a \in c^{t+1} M_S$ i $a'' \in \mathcal{U}(M_S)$, existeix un $\eta \in M_S$ tal que $a' = c^{t+1}\eta$. Pel lema 4.13, existeixen $c', c \in M$ tals que $c^{t+1} = c'c''$, on $c'' \in \mathcal{U}(M_S)$ i $c''\eta \in M$. Com que M és rígid, tenim que o bé $c' \in c^t M$ o bé $c^t \in c'M$. En el segon cas tindríem que $c^t = c'y$ per algun $y \in M$ i a més, $yc = c''$ de tal manera que $c \in \mathcal{U}(M_S)$, contradicció. Per tant $c' = c^t y$ per algun $y \in M$ i

$$a' = c^t y(c''\eta) \in c^t M,$$

contradicció.

Per tant M_S és arquimedià com volíem demostrar. □

Resumim en el següent corol·lari, els teoremes 4.15, 4.18 i [10, Theorem C].

Corol·lari 4.19. *Sigui M un monoide rígid, irreflexiu i arquimedià i $S \subseteq M$ un subconjunt qualsevol. Aleshores M_S és un monoide rígid, irreflexiu i arquimedià.*

4.4.1 Monoides arquimedians i no irreflexius.

Al igual que en el cas del teorema 4.15, veurem que la propietat de que M és un monoide irreflexiu no es pot treure de les hipòtesis del teorema 4.18. Així, construirem un exemple de monoide rígid i arquimedià amb un subconjunt S de tal manera que M_S no sigui arquimedià.

En aquest cas, ens podríem preguntar si tot monoide M rígid i arquimedià tal que M_S és arquimedià per a tot $S \subseteq M$, és necessàriament irreflexiu. Veurem que això no passa.

Sigui N el monoide generat per tres elements i una única relació que faci que no sigui irreflexiu, és a dir:

$$N = \langle x, y, z \mid xyz = y\rangle,$$

Clarament aquest monoide no és irreflexiu.

Proposició 4.20. *N és un monoide rígid, arquimedià i no irreflexiu, i per a tot $S \subseteq M$, M_S és arquimedià.*

Demostració. Primer buscarem una forma normal per als elements de N. Veurem que tenim una correspondència bijectiva entre elements de N i paraules amb x, y, z que no contenen la subparaula xyz.

Clarament, tot element es pot escriure d'una manera com aquesta i tota expressió així, es correspon amb un element de N.

Considerem $\mathcal{N}$ el conjunt de totes les paraules amb x, y, z.

- Direm que una paraula $s \in \mathcal{N}$ cobreix a $s' \in \mathcal{N}$ si podem passar de l'expressió de s a la de s' canviant xyz per y.

- Direm que $s \geq s'$ si existeix $n \in \mathbb{N}$ i $s_0 = s, s_1, \ldots, s_n = s'$ a $\mathcal{N}$, tals que s_i cobreix s_{i+1}.

Per la longitud de les paraules a $\mathcal{N}$, és fàcil veure que $s \geq s'$ i $s' \geq s$ implica $s = s'$. També és clar que la relació $(\geq)$ és transitiva. Així doncs tenim un ordre parcial definit a $\mathcal{N}$.

Observem que usant la longitud a $\mathcal{N}$, es satisfà la condició de cadena descendent per a $(\leq)$, ja que cada pas redueix la longitud en 2.

A més, si tenim que $s \in \mathcal{S}$ cobreix a t_1, t_2, els dos canvis que fem a partir de s per obtenir t_1, t_2, o bé són el mateix o bé són disjunts donada la forma de la paraula xyz. Per tant l'ordre en que els fem és irrellevant, i podem aconseguir una paraula $s' \in \mathcal{S}$ tal que $t_1, t_2 \geq s'$.

És clar que dues paraules amb x, y, z es troben a la mateixa component connexa del graf de $\mathcal{N}$ [15, pàg.25], si i només si corresponen al mateix element de N. D'aquesta manera podem aplicar el Lema del Diamant [15, Theorem I.4.9] per a tenir una correspondència bijectiva entre elements de N i elements minimals per l'ordre ($\geq$) a $\mathcal{N}$, que són clarament paraules sense la subparaula xyz (en direm forma normal).

Aquesta forma normal ens permet definir una longitud a N, $l(-)$, com el nombre d'x, y i z's a la forma normal d'un element de N. També tenim un altre invariant, $l_y(-)$, que és el nombre de y's a cada expressió d'un element de N, ja que la relació $xyz = y$ conserva el nombre de y's. Observem també que la component connexa d'una paraula $\alpha \in N$ amb $l_y(\alpha) = 0$, consta d'un sol element (les expressions no poden reduir).

És clar que les unitats a N només poden ser els elements de longitud 0, per tant és clar que $\mathcal{U}(N) = \{1\}$. Així, y no pot ser unitat i clarament per la relació $xyz = y$, N no és irreflexiu.

Donats dos elements $\alpha, \beta \in N$, direm que l'expressió $\alpha\beta$ és reduïda, si la seva forma normal s'obté concatenant les formes normals de α i de β.

Per simetria de la construcció de N, és clar que totes les propietats que provem per a N per un costat també seran vàlides per l'altre costat.

Observem que donat $\alpha \in N$, existeixen $r, s \in \mathbb{N}$ únics tals que $\alpha = z^r \alpha' x^s$ amb $\alpha' \notin zN, \alpha' \notin Nx$.

Anem a provar que N és un monoide cancel·latiu. Suposem que $\alpha\beta = \alpha\gamma$ amb $\alpha, \beta, \gamma \in N$. Farem inducció sobre $l(\alpha)$. Si $l(\alpha) = 0$, és clar.

Suposem ara $l(\alpha) \geq 1$. Ara, si l'expressió de $\alpha\beta$ redueix, podem escriure $\alpha = \alpha' x^r y^a$ amb $a = 0$ o 1, i per altra banda $\beta = y^{1-a} z^r \beta'$ amb $r > 0$ de tal manera que o be $\alpha' \notin Nx$ o bé $\beta' \notin zN$. D'aquesta manera tenim que $\alpha' y \beta'$ és una expressió reduïda. Reduint l'expressió de $\alpha\gamma$ i cancel·lant α' obtenim per inducció, que $y\beta' = x^r y^a \gamma$. Com que la forma de l'esquerra és reduïda, hem de tenir que $\gamma = y^{1-a} z^r \gamma'$. Així tenim $y\beta' = y\gamma'$. Com que $y\beta'$ i $y\gamma'$ són expressions reduïdes, $\gamma' = \beta'$, d'on $\beta = \gamma$.

Per simetria dreta-esquerra, tenim que N és cancel·latiu. Anem a veure que és rígid.

Suposem que tenim $\alpha\beta = \gamma\delta$ per alguns α, β, γ i $\delta \in N$. Si les dues expressions $\alpha\beta, \gamma\delta$ ja són reduïdes, aleshores, observant la forma normal, és clar que o bé

$\alpha \in \gamma N$ o bé $\gamma \in \alpha N$.

Suposem que les dues expressions redueixen. Aleshores, podem escriure:

$$\alpha = \alpha' x^n y^a \ , \ \beta = y^{1-a} z^m \beta',$$

i

$$\gamma = \gamma' x^r y^i \ , \ \delta = y^{1-i} z^s \delta'$$

on $a, i = 0$ o 1 i $n, m, r, s > 0$, de tal manera que $\alpha\beta = \alpha' x^b y z^c \beta'$ i $\gamma\delta = \gamma' x^j y z^k \delta'$ ja són expressions reduïdes amb $bc = jk = 0$ i $b < n, c < m$, $j < r$ i $k < s$.

Tenim doncs $\alpha' x^b y z^c \beta' = \gamma' x^j y z^k \delta'$. Ara tenim que o bé $\gamma' x^j \in \alpha' x^b N$ o bé $\alpha' x^b \in \gamma' x^j N$.

Suposem que $\alpha' x^b \in \gamma' x^j N$, i observem que l'altre cas és totalment simètric. Tenim que $\alpha' x^b = \gamma' x^j \eta$. Observem, que si $\eta \neq 1$, aleshores $\eta = y\eta'$, per tant

$$\begin{aligned}
\alpha' x^b &= \gamma' x^j y \eta' \\
&= \gamma' x^j x^{r-j} y z^{r-j} \eta' \\
&= \gamma' x^r y z^{r-j} \eta' \\
&= \gamma y^{1-i} z^{r-j} \eta',
\end{aligned}$$

i llavors $\alpha \in \gamma N$.

Suposem doncs que $\eta = 1$. Aleshores tenim $\alpha' x^b = \gamma' x^j$. Si $n - b \leq r - j$, escrivim $\alpha' x^n = \gamma' x^{j+n-b}$. Si $a = 0$ aleshores $\alpha = \gamma' x^{n-b+j}$ d'on tenim que $\gamma = \alpha x^{r-n+b-j} y^i$. Si $a = 1$ llavors, $\alpha = \gamma' x^{n-b+j} y = \gamma y^{1-i} z^{r-n-b+j}$.

El cas que $n - b > r - j$ es resol de manera similar i no exposarem els detalls.

Si només una de les dues expressions és reduïda, suposem sense pèrdua de generalitat que és $\alpha\beta$, llavors arribem igual que abans a $\alpha\beta = \gamma' x^j y z^k \delta'$. Comparant les expressions reduïdes α i $\gamma' x^j$, s'obté el resultat de manera semblant. Amb això tenim provat que N és rígid.

Ara ens fa falta veure que N és arquimedià.

Suposem que tenim $\alpha, \beta, \gamma \in N$ amb β, γ no unitats, i tals que $\alpha\beta = \gamma\alpha$. Volem veure que existeix algun $m \geq 0$ tal que $\alpha \notin \gamma^m N$. Suposem que no, és a dir, per a tot $n \geq 0$, existeix $\delta_n \in N$ tal que $\alpha = \gamma^n \delta_n$.

Usant l_y, és clar que γ no pot tenir cap y a la seva expressió. També és clar que a l'expressió de $\gamma^n\delta_n$ el nombre de $z's$ de l'expressió de γ no es pot reduir al multiplicar per la dreta per δ_n. Per tant $\gamma = x^r$ per algun $r > 0$.

Tindrem que $\alpha = x^{nr}\delta_n$. Aquesta expressió haurà de reduir i per tant, haurem de tenir $l_y(\delta_n) = l_y(\alpha) > 0$. De fet, tindrem $\delta_n = yz\delta'_n$ i per exemple,

$$\alpha = x^r yz\delta'_1.$$

Observem per tant, que si reduïm l'anterior expressió, podem trobar $s \geq 0$ de tal manera que $\alpha = x^s y\alpha'$ amb $\alpha' \notin zN$.

Ara tenim de l'igualtat inicial,

$$\begin{aligned} x^s y\alpha'\beta &= x^{r+s} y\alpha' \\ x^{r+s} yz^r\alpha' &= x^{r+s} y\alpha' \\ z^r\alpha'\beta &= \alpha'. \end{aligned}$$

Com que $\alpha' \notin zN$, hem de tenir $r = 0$ i per tant $\gamma = 1$ però γ era no unitat, contradicció.

Així tenim que N és un monoide rígid, arquimedià que no és irreflexiu.

Ara veurem que per a qualsevol $S \subseteq N$, N_S és també arquimedià. Observem que si invertim qualsevol element, també estem invertint els seus factors. Sigui $S \subseteq N$ un subconjunt no buit.

Suposem que $y \in \tilde{S}$. Com que $y = xyz$, tenim que $x, y, z \in \tilde{S}$. Per tant N_S és el grup universal de N que és clarament arquimedià.

Suposem que $y \notin \tilde{S}$. Suposem que tenim $\alpha, \beta, \gamma \in N_S$ tals que β, γ són no unitats, $\alpha\beta = \gamma\alpha$ i $\alpha \in \gamma^n N_S$ per a tot $n \geq 0$. Com que $y \notin \tilde{S}$ és clar que podem utilitzar l_y i per tant $\gamma \in \langle x, z\rangle_S$. Però com que $\gamma \notin \mathcal{U}(N_S)$, només podem tenir els casos

$$\tilde{S} = \langle x\rangle \text{ o } \tilde{S} = \langle z\rangle.$$

Si $\tilde{S} = \langle x\rangle$, tindrem que

$$\gamma \in \langle x, x^{-1}, z \mid xx^{-1} = x^{-1}x = 1\rangle,$$

i és clar, igual que abans, que no podem reduir el nombre de z's a l'expressió reduïda de γ^n (a $\langle x, x^{-1}, z \mid xx^{-1} = x^{-1}x = 1\rangle$), multiplicant per la dreta per elements de N_S. Aleshores $\gamma = x^r$ per algun $r \in \mathbb{Z}$, i tenim una contradicció ja que $\gamma \notin \mathcal{U}(N_S)$.

Si $\tilde{S} = \langle z\rangle$, podem fer un raonament simètric a l'anterior, observant que $\alpha \in \gamma^n N_S$ si i només si $\alpha \in N_S\beta^n$.

□

Si intentem provar el teorema 4.18 sense la hipòtesi de que M és irreflexiu, podem arribar a fer un raonament inductiu sobre la longitud d'$\alpha \in M_S$ tal que $\alpha\beta = \gamma\alpha$, el qual ens permet reduir fins al cas $l(\alpha) = 1$.

Per tant, en la construcció d'un contraexemple, intentarem tenir a M_S una relació com:

$$a(xy^{-1}z) = (xy^{-1}z)b,$$

amb $(xy^{-1}z) \in a^nM$ per a tot $n \geq 0$. Per això ens caldran relacions com per exemple:

$$ax = xc^{-1}, \quad c^{-1}y^{-1} = y^{-1}d^{-1}, \quad d^{-1}z = zb,$$

per alguns $c, d \in M$. Aquestes relacions es deriven de les següents relacions a M,

$$yc = dy, \quad axc = x \ \text{ i } dzb = z.$$

Ara, per tal de que M sigui rígid, podem prendre c, d unitats a M.

Al llarg d'aquesta secció, M denotarà el monoide

$$\begin{aligned} M = \langle x, y, z, a, b, c, d, c^{-1}, d^{-1} \quad | \quad & axc = x,\ dzb = z,\ dy = yc, \\ & cc^{-1} = c^{-1}c = dd^{-1} = d^{-1}d = 1\rangle. \end{aligned}$$

Denotarem també el conjunt de generadors de M per

$$A = \{x, y, z, a, b, c, d, c^{-1}, d^{-1}\}.$$

Provarem que aquest monoide és rígid i arquimedià, i que conté un subconjunt $S \subseteq M$, tal que M_S no és arquimedià, fallant així la conclusió del teorema 4.18.

Primerament buscarem una forma normal per als elements de M, que ens permeti treballar amb els seus elements.

Lema 4.21. *Els elements de M es poden escriure de manera única com a productes*

$$x_1 x_2 \dots x_n,$$

on $x_i \in A$, de tal manera que.

(i) $x_i \neq x_{i+1}^{-1}$ *per a tot* $i = 1, \dots, n-1$.

(ii) *Si* $x_i = a$ *llavors* $x_{i+1} \neq x$ *per a tot* $i = 1, \dots, n-1$.

(iii) *Si* $x_i = y$ *llavors* $x_{i-1} \neq d, d^{-1}$ *per a tot* $i = 2, \dots, n$.

(iv) *Si* $x_i = z$ *llavors* $x_{i+1} \neq b$ *per a tot* $i = 1, \dots, n-1$.

Demostració. Prenem $\mathcal{M}$ el monoide lliure sobre el conjunt A. Els elements de $\mathcal{M}$ tenen una forma normal com a paraules en els elements de A. Per tal de poder trobar una forma normal en M, usarem el Lema del Diamant [15, Theorem I.4.9], de tal manera que haurem de trobar una relació d'ordre en $\mathcal{M}$ segons els canvis que podem fer a les expressions dels elements de $\mathcal{M}$ aplicant les relacions que tenim a M.

Donats $w, w' \in \mathcal{M}$, direm que w cobreix w' si w' s'obté a partir de w mitjançant una de les següents operacions:

1. Eliminar un dels següents productes a la forma normal de w:

$$cc^{-1}, c^{-1}c, dd^{-1}, d^{-1}d.$$

2. Canviar una aparició del producte ax a la forma normal de w per xc^{-1}.

3. Canviar una aparició del producte dy a la forma normal de w per yc.

4. Canviar una aparició del producte $d^{-1}y$ a la forma normal de w per yc^{-1}.

5. Canviar una aparició del producte zb a la forma normal de w per $d^{-1}z$.

Diem que $w \geq w'$ si o bé $w = w'$ o bé existeix una successió finita d'elements a $\mathcal{M}$,

$$w = w_0, w_1, \dots, w_n = w',$$

de manera que w_i cobreix w_{i+1} per a tot $i = 0, \dots, n-1$.

Ens cal provar que aquesta relació és una relació d'ordre que satisfà la condició de cadena descendent. Per això definirem a $\mathcal{M}$ el grau següent:

$$\deg(c) = \deg(c^{-1}) = 1,$$

$$\deg(d) = \deg(d^{-1}) = 2,$$

$$\deg(a) = \deg(b) = \deg(x) = \deg(y) = \deg(z) = 3.$$

Aleshores, si $x_1 x_2 \dots x_n$ és la forma normal d'un element a $w \in \mathcal{M}$, definim,

$$\deg(w) = \sum_{i=1}^{n} \deg x_i.$$

La forma normal que volem provar correspon a escollir de cada una de les relacions de M, un canvi que ens proporcioni una expressió de grau menor. Així, *(i)*-*(iv)* equival a dir que no hi tenim les subparaules cc^{-1}, $c^{-1}c$, dd^{-1}, $d^{-1}d$, ax, dy, $d^{-1}y$ i zb, que poden ser reemplaçades per altres subparaules de grau menor.

És clar que $(\mathcal{M}, \geq)$ és un conjunt ordenat i que tota cadena descendent d'elements és estacionaria. La versió del Lema del Diamant que apareix a [15, Theorem I.4.9], exigeix que per a cada element $w \in \mathcal{M}$ existeixi una cota per a la longitud de les cadenes descendents que parteixen de w. Però com que $\deg(w)$ és sempre un nombre finit, és clar que aquesta cota també existeix.

Per acabar, ens falta provar que donat $v \in \mathcal{M}$ tal que v cobreix w i w', llavors, existeix $v' \in \mathcal{M}$ tal que $w, w' \geq v'$.

Per a veure això, només caldrà estudiar els casos en que les subparaules que podem canviar tinguin superposicions entre elles, ja que els altres casos es solucionen de forma trivial. És a dir, hem d'estudiar l'aparició de les subparaules

$$cc^{-1}c,\ dd^{-1}d,\ c^{-1}cc^{-1},\ d^{-1}dd^{-1},\ d^{-1}dy \text{ i } dd^{-1}y.$$

D'aquests, els quatre primes casos també es solucionen trivialment i per als altres casos podem fer el següent:

Si la forma normal de v és $x_1 \dots x_i d^{-1} dy x_{i+1} \dots x_n$ i

$$w = x_1 \dots x_i y x_{i+1} \dots x_n\ ,\ w' = x_1 \dots x_i d^{-1} yc x_{i+1} \dots x_n.$$

En aquest cas, $v > w' > x_1 \dots x_i yc^{-1} c x_{i+1} \dots x_n > w$.

Si la forma normal de v és $x_1 \dots x_i dd^{-1} y x_{i+1} \dots x_n$ i

$$w = x_1 \dots x_i y x_{i+1} \dots x_n\ ,\ w' = x_1 \dots x_i dyc^{-1} x_{i+1} \dots x_n.$$

En aquest cas, $v > w' > x_1 \dots x_i ycc^{-1} x_{i+1} \dots x_n > w$.

Ara estem en condicions d'aplicar el Lema del Diamant. Sigui $\mathcal{C}$ el conjunt de les components connexes del graf de $\mathcal{M}$ (vegeu [15, p.25]). Sigui

$$\mathcal{M}' = \{w \mid w \text{ és un element minimal a } \mathcal{M}\}.$$

Aleshores per [15, Theorem I.4.9], l'aplicació

$$\varphi : \mathcal{M}' \to \mathcal{C}$$

definida per $\varphi(w)$ és la component connexa que conté w, és una aplicació bijectiva.

Ara, és fàcil comprovar que totes les relacions del monoide M són igualtats entre expressions de $\mathcal{M}$ que es troben a la mateixa component connexa del graf de

$\mathcal{M}$. A més si w cobreix w' a $\mathcal{M}$, les paraules w, w' corresponen al mateix element de M. Per tant les components convexes del graf de M es corresponen a diferents expressions a M d'un mateix element. També és clar que els elements minimals del graf de $\mathcal{M}$, són els únics que satisfan les condicions *(i)-(iv)*.

Així tots els elements de M tenen una expressió única satisfent les condicions *(i)-(iv)*.

□

Direm doncs que una expressió d'un element $w \in M$ escrita com a producte d'elements de A i que no conté cap dels productes,

$$cc^{-1}, c^{-1}c, dd^{-1}, d^{-1}d, ax, dy, d^{-1}y, zb,$$

està en forma normal (correspon a un element minimal del graf de $\mathcal{M}$). Si $x_1 \dots x_n$ és la forma normal de $w \in M$, direm que la seva longitud és $\mathrm{long}(w) = n$ ($\mathrm{long}(1) = 0$).

Utilitzarem aquesta forma normal per a provar que M és un monoide rígid, i arquimedià.

Lema 4.22. *M és un monoide rígid.*

Demostració. Per a veure que M és un monoide rígid, primerament hem de veure que M és un monoide cancel·latiu.

Suposem que tenim $u, v, w \in M$ de tal manera que $uv = uw$.

Per inducció en la longitud de u, podem reduir-nos al cas $\mathrm{long}(u) = 1$, és a dir, u és un element de A.

Suposem que les formes normals de v, w són

$$v = v_1 \dots v_n \ \text{ i } \ w = w_1 \dots w_m.$$

on $v_i, w_j \in A$.

Observem que si u és una unitat ($u \in \{c, c^{-1}, d, d^{-1}\}$), aleshores $u^{-1}uv = u^{-1}uw$ i per tant $v = w$.

D'altra banda, si els productes uv_1 i uw_1 estan en forma normal, aleshores com que els canvis que podem aplicar per obtenir la forma normal s'apliquen a parelles d'elements, per unicitat de la forma normal, tindrem $v = w$.

Per tant podem suposar sense pèrdua de generalitat que u no és una unitat i que el producte uv_1 no està en forma normal.

Aleshores, o bé $u = a$ i $v_1 = x$ o bé $u = z$ i $v_1 = d^{-1}$.

Si $u = a$ i $v_1 = x$, la forma normal de uv començarà amb x. Per tant és clar que $w_1 = x$, i tindrem

$$xc^{-1}v_2 \dots v_n = xc^{-1}w_2 \dots w_m.$$

Suposem que $u', u \in M$ són els primers elements de la forma normal de $c^{-1}v_2 \dots v_n$ i $c^{-1}w_2 \dots w_m$ respectivament. Aleshores xu' i xu són expressions que estan en forma normal i pel que hem observat abans, podem cancel·lar, i tenim

$$c^{-1}v_2 \dots v_n = c^{-1}w_2 \dots w_m.$$

De nou, com que c^{-1} és una unitat, cancel·lant tenim que

$$v_2 \dots v_n = w_2 \dots w_m,$$

i com que $v_1 = w_1 = x$, $v = w$.

Si $u = z$ i $v_1 = b$, la forma normal de uv començarà amb d^{-1}. Per tant $w_1 = b$ i tindrem que

$$d^{-1}zv_2 \cdots v_n = d^{-1}zw_2 \cdots w_m.$$

Ara, si $v_2 = b$, llavors és clar que $w_2 = b$. Per tant, podem trobar un enter $k \leq \min(m, n)$ de tal manera que $v_1 = \cdots = v_k = w_1 = \cdots = w_k = b$,

$$d^{-k}zv_{k+1} \cdots v_n = d^{-k}zw_{k+1} \cdots w_m$$

i les expressions zv_{k+1}, zw_{k+1} estiguin en forma normal. Així, com que d^{-1} és una unitat, podem cancel·lar i tenim que $v_{k+1} \dots v_n = w_{k+1} \dots w_m$. Com que $v_1 = \cdots = v_k = w_1 = \cdots = w_k = b$, aleshores $v = w$.

Per acabar de demostrar que M és un monoide cancel·latiu, caldria comprovar també que $vu = wu$ implica que $v = w$. El procediment per demostrar-ho és molt similar al cas anterior i no exposarem els detalls.

Ara provem que M és rígid,

Siguin $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in M$ tals que $\alpha\beta = \gamma\delta$. Com que M és cancel·latiu, podem suposar que les formes normals de α i γ no comencen igual. A més, també podem suposar que les formes normals de α i γ no acaben amb una unitat.

Siguin $a_1 \dots a_n$ i $c_1 \dots c_m$ on $a_i, c_j \in A$, les formes normals de α i γ respectivament. Aleshores, com que α i γ no comencen amb el mateix element, podem suposar sense pèrdua de generalitat que la forma normal de $\alpha\beta$ no comença amb a_1 i per tant, només podem tenir que

$$a_1 \in \{a, z, c, c^{-1}, d, d^{-1}\}.$$

Però si a_1 és una unitat, és fàcil veure estudiant les relacions de M que llavors α és una unitat i per tant a_n també. Però havíem suposat que a_n no era una unitat.

Mirem ara els casos $a_1 = a$ i $a_1 = z$.

Suposem que $a_1 = a$. Llavors, si mirem la forma normal de $\alpha\beta$, tindrem que $c_1 = x$ i la forma normal de α serà a^s per algun $s \geq 1$. Per tant

$$\alpha x c^s c_2 \dots c_m = \gamma.$$

En el cas que $a_1 = z$, si examinem la forma normal de $\alpha\beta$, veiem que $c_1 = d^{-1}$. Per tant $c_2 = z$, $\alpha = z$ i

$$\alpha b c_3 \dots c_n = \gamma.$$

Per tant, tenim que M és rígid. □

Lema 4.23. *M és un monoide arquimedià.*

Demostració. Suposem que és fals. Siguin $\alpha, \beta, \gamma \in M$ no unitats tals que $\alpha\beta = \gamma\alpha$, i per a tot $n \geq 0$, existeix un $\delta_n \in M$ tal que $\alpha = \gamma^n \delta_n$.

Podem suposar que la forma normal de γ no acaba amb una unitat, ja que si conjuguem les anteriors igualtat per qualsevol $u \in \mathcal{U}(M)$ obtenim el mateix resultat per a $u\gamma u^{-1}$.

Donat $s \in \{x, y, z, a, b\}$, definim $d_s(\phi)$ com el nombre de s's a la forma normal d'un element $\phi \in M$.

Observem que les relacions que defineixen M conserven el nombre de x's, y's i z's, per tant d_x, d_y, d_z són morfismes (i.e. $d_*(\phi\psi) = d_*(\phi) + d_*(\psi)$) prenent valors a $\mathbb{N} \cup \{0\}$, i és clar que si $\alpha = \gamma^n\delta_n$ per a tot $n \geq 0$ llavors $\gamma \in \langle a, b, c, d, c^{-1}, d^{-1}\rangle$.

A més, al submonoide $\langle a, b, c, d, c^{-1}, d^{-1}\rangle$, d_b és també un morfisme i el nombre de b's a la forma normal de γ^n només es pot reduir multiplicant per l'esquerra per z's (i.e. $d_b(\phi\psi) \geq d_b(\phi)$). Així doncs, tenim que $\gamma \in \langle a, d, d^{-1}, c, c^{-1}\rangle$.

Suposem ara que la forma normal de γ és $\gamma' a^r$ on $\gamma' \notin Ma$ i $r > 0$ donat que γ no és una unitat. Llavors la forma normal de γ^n serà de la forma $\gamma' a^r \ldots \gamma' a^r$ ja que les subparaules ac, ac^{-1}, ad, ad^{-1} estan en forma normal. Per tant $d_a(\gamma^n) \geq nr$ i veiem que hem de tenir $\delta_n = x\delta'_n$ per algun $\delta'_n \in M$. Llavors, $\gamma^n\delta_n = \gamma' a^r \ldots \gamma' xc^{-r}\delta'_n$, i com que la forma normal de γ' no acaba amb a i les subparaules $cx, c^{-1}x, dx$ i $d^{-1}x$ estan en forma normal, és clar que $\gamma' = 1$ donat que necessitem $d_a(\alpha) = d_a(\gamma^n\delta_n)$ per a tot $n \geq 0$. Així doncs, $\gamma = a^r$ per algun $r > 0$.

Ara prenem la igualtat $\alpha = a^r\delta_1$ i suposem que la forma normal de δ_1 és $\delta_1 = xc^s\delta''_1$ on la forma normal de δ''_1 no comença amb c ni c^{-1}. Llavors tenim que

$$a^r xc^s\delta''_1\beta = a^r a^r xc^s\delta''_1 = a^r xc^{s-r}\delta''_1.$$

Cancel·lant $a^r xc^s$, obtenim $\delta''_1\beta = c^{-r}\delta''_1$, on l'expressió de la dreta està en forma normal.

Suposem doncs que $s_1 \ldots s_m$, on $s_i \in A$ i $m \geq 0$, és la forma normal de δ''_1. Si $\delta''_1 \notin \mathcal{U}(M)$, llavors existeix un $1 \leq k \leq m$ tal que $s_k \notin \mathcal{U}(M)$ i $s_{k+1} \ldots s_m \in \mathcal{U}(M)$. Aleshores com que la forma normal de

$$(s_1 \ldots s_k)(s_{k+1} \ldots s_m)\beta,$$

ha de començar amb c^{-1} i $s_1 \neq s_2^{-1}$, si $t_1 \ldots t_q$, on $t_i \in A$ i $q \geq 0$, és la forma normal de $(s_{k+1} \ldots s_m)\beta$, tindrem que o bé $s_k = a$ i $t_1 = x$, o bé $s_k = z$ i $t_1 = b$. Aleshores la forma normal de $\delta_1''\beta$ serà

$$s_1 \ldots s_{k-1} x c^{-1} t_2 \ldots t_q, \text{ o bé}$$

$$s_1 \ldots s_{k-1} d^{-1} z t_2 \ldots t_q.$$

En qualsevol dels casos, observant les relacions de M, és clar que cap d'aquestes expressions pot començar amb c^{-1}. Per tant δ_1 serà una unitat. Però llavors

$$\beta = (\delta_1)^{-1} c^{-r} \delta_1,$$

i β també serà una unitat, contradicció.

Per tant M és un monoide arquimedià.

□

Teorema 4.24. *M és un monoide rígid i arquimedià amb un subconjunt $S \subseteq M$ tal que M_S no és arquimedià.*

Demostració. Els lemes 4.22 i 4.23, ens proven que M és un monoide rígid i arquimedià. Ara prenem $S = \{y\}$.

És clar que $\tilde{S} = \langle y, \mathcal{U}(M)\rangle$, de tal manera que els elements de M_S tenen expressions reduïdes de la forma

$$a_0 y^{r_1} a_1 \ldots a_{n-1} y^{r_n} a_n,$$

on $n \geq 0$, $a_i \in M$ i $r_i < 0$. Ara, si mirem la forma de les relacions de M, és clar que a, b no són unitats a M_S.

Mirem ara la següent relació a M_S,

$$a(xy^{-1}z) = xc^{-1}y^{-1}z = xy^{-1}d^{-1}z = (xy^{-1}z)b.$$

on a, b són no unitats a M_S i per a tot $k \geq 0$,

$$xy^{-1}z = a^k(xc^k y^{-1}z).$$

Per tant $xy^{-1}z \in a^k M_S$ per a tot $k \geq 0$ i M_S no és un monoide arquimedià. □

Capítol 5

Anells de Polinomis sobre Anells de Goldie

L'objectiu d'aquest capítol és el de construir un exemple de k-àlgebra per a cada cos finit k satisfent la condició de Goldie i tal que el seu anell de polinomis no sigui un anell de Goldie. Així generalitzem una construcció de J.W. Kerr [36, 34], que va construir una $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-àlgebra amb aquesta propietat.

5.1 Anells de quocients

Una construcció freqüent en àlgebra commutativa és la construcció del cos de fraccions Q d'un domini R, invertint formalment els elements de $R \setminus \{0\}$, de tal manera que els element de Q s'escriuen de la forma rs^{-1} amb $r, s \in R$ i $s \neq 0$. A més, és fàcil estendre aquesta construcció per a invertir subconjunts multiplicativament tancats $S \subset R$, i obtenir un anell R_S i un morfisme $\iota : R \to R_S$ de tal manera que els elements de $\iota(S)$ són invertibles.

La localització no commutativa és un problema molt més complex. Tenim per exemple, un famós treball de A.I. Mal'tsev [43] en que construeix un domini R que no es pot incloure a cap anell de divisió. Aquest exemple s'obté construint un monoide cancel·latiu H que no es pot incloure en cap grup i tal que $\mathbb{Q}[H]$ és un domini (l'exemple és el mateix que hem comentat al capítol 4). A més, existeixen moltes construccions per a incloure anells no commutatius a anells de divisió D, però en molts d'aquests casos no podem tenir expressions dels elements de D de la forma rs^{-1} com en el cas commutatiu. Per exemple, la construcció del cos de fraccions universal, que s'obté a partir d'invertir no només els no divisors de zero sinó també un determinat tipus de matrius (vegeu P. Malcolmson [42] i V.N. Gerasimov [26, 27]).

La construcció de localització més similar en el cas no commutatiu és la següent. Sigui R un anell i

$$S = \{r \in R \mid r \text{ no és un divisor de zero }\}.$$

L'anell clàssic de quocients per la dreta de R, és un anell Q que conté R com a subanell i cada element $q \in Q$ és de la forma $q = rs^{-1}$ amb $r \in R$ i $s \in S$. Aquest anell de quocients no sempre existeix, la condició necessària i suficient per a que l'anell clàssic de quocients per la dreta existeixi, és que R sigui un anell d'Ore per la dreta. Aquest resultat és degut a O. Ore per al cas d'anells de divisió i fou generalitzat posteriorment per K. Asano [3] per a un anell R qualsevol. Si T és un anell i $R \subseteq T$ un subanell, direm que R és un ordre per la dreta a T si T és l'anell clàssic de quocients per la dreta de R.

En la construcció de l'anell clàssic de quocients per la dreta, és clar que no sempre obtindrem un anell de divisió. Com que els anells artinians semisimples tenen una estructura ben coneguda i cada no divisor de zero és invertible, és natural estudiar quins anells són ordres en aquesta classe d'anells. En aquest camp, són fonamentals els treballs de A.W. Goldie. Aquest, a [29, 28], caracteritza els anells que són ordres per la dreta i per l'esquerra en anells artinians simples. Posteriorment Lesieur i Croisot a [39, 40], proven la versió per un sol costat d'aquest resultat, i finalment a [30], A.W. Goldie caracteritza els anells que són ordres per la dreta en anells artinians semisimples.

Recordem les definicions següents:

Definició 5.1. Sigui R un anell i M_R un R-mòdul per la dreta. Un submòdul $N_R \leq M_R$ és essencial en M_R si, per a tot submòdul $L_R \leq M_R$ no nul, $N_R \cap L_R \neq \{0\}$. En aquest cas escriurem $N_R \leq_e M_R$.

D'altra banda, direm que un R-mòdul per la dreta no nul M_R és uniforme si tots els seus submòduls no nuls són essencials en M_R. És a dir, per a tota parella de submòduls no nuls $L_R, N_R \leq M_R$, $L_R \cap N_R \neq \{0\}$.

És ben sabut que si un R-mòdul per la dreta M_R té un submòdul essencial que és suma directa de n submòduls uniformes, aleshores aquest n és únic, i per tant un invariant de M_R.

Definició 5.2. Sigui R un anell i M_R un R-mòdul per la dreta tal que existeixen $U_1, \ldots, U_n \leq M_R$ submòduls uniformes tals que

$$U_1 \oplus \cdots \oplus U_n \leq_e M_R,$$

aleshores direm que M té *dimensió de Goldie* n, i escriurem $\dim(M_R) = n$ (A la literatura també podem trobar el nom de dimensió uniforme). En el cas d'anells, $\dim({}_RR)$ i $\dim(R_R)$ reben el nom de dimensió de Goldie per l'esquerra i dimensió de Goldie per la dreta de R respectivament i que denotarem de $\dim_l(R)$ i $\dim_r(R)$.

Si R és un anell que no conté sumes directes infinites d'ideals per la dreta no nuls, aleshores, és fàcil construir una col·lecció d'ideals per la dreta uniformes no nuls $J_1, \ldots, J_n$ tals que $J_1 \oplus \cdots \oplus J_n \leq_e R$ per algun n enter positiu i per tant té dimensió de Goldie per la dreta finita. Recíprocament, també es pot veure que si R té dimensió de Goldie per la dreta finita, aleshores R no conté sumes directes infinites d'ideals per la dreta no nuls. (Goldie)

Definició 5.3. Sigui R un anell. Direm que R satisfà la condició de cadena ascendent per anul·ladors per la dreta (acc$\perp$ per la dreta), si tota cadena ascendent d'ideals per la dreta

$$I_0 \leq I_1 \leq I_2 \leq \ldots$$

tals que $I_i =$r.ann(X_i) per algun $X_i \subseteq R$, és estacionaria.

Direm que R és un anell de *Goldie per la dreta*, si R té dimensió de Goldie per la dreta finita i satisfà acc$\perp$ per la dreta.

Enunciem el Teorema de Goldie [30] que caracteritza els ordres per la dreta en anells artinians semisimples. Recordem que un anell R és semiprimer si R no conté ideals nilpotents no nuls. És a dir, si $I \trianglelefteq R$ tal que $I^n = \{0\}$ per algun $n \geq 1$, aleshores $I = \{0\}$.

Teorema 5.4 (Goldie). *Sigui R un anell. R és un ordre per la dreta en un anell artinià semisimple si i només si R és un anell de Goldie per la dreta i semiprimer.*

El Teorema de Lesieur-Croisot, caracteritza els anells que són ordres per la dreta en anells artinians simples, com anells de Goldie per la dreta primers. Aquests resultats formen una part important en el desenvolupament de la teoria d'anells i sobretot en l'estudi dels anells noetherians, donat que la classe dels anells de Goldie conté pròpiament a la classe dels anells noetherians.

5.2 Canvi d'anells

Una pregunta usual que ens podem fer, és el comportament de la propietat de Goldie, sota determinades construccions d'anells.

1. Si R és un anell de Goldie per la dreta i $n \geq 1$, és $M_n(R)$ un anell de Goldie per la dreta?

2. Si R és un anell de Goldie per la dreta i $n \geq 1$, és $R[x_1, \ldots, x_n]$ un anell de Goldie per la dreta?

Per exemple, és ben sabut que en el cas d'anells noetherians les dues preguntes tenen resposta afirmativa. En el cas d'anells de Goldie, és natural estudiar les dues condicions de cadena que els caracteritzen per separat. De fet, respecte de la dimensió de Goldie, disposem d'una bona correspondència entre els ideals de R i els de $M_n(R)$ per a qualsevol enter positiu n, i per tant és fàcil comprovar que si R té dimensió de Goldie per la dreta finita, aleshores $M_n(R)$ també té dimensió de Goldie per la dreta finita. En el cas dels polinomis, el Teorema de la base de Hilbert ens diu que si R és un anell noetherià, aleshores per a tot enter n,

$R[x_1, \ldots, x_n]$ és també un anell noetherià. Com dèiem abans, la classe dels anells de Goldie, i per tant la dels anells de dimensió de Goldie finita és una classe més extensa que la dels anells noetherians. Per tant, el teorema següent de Shock [51] el podem veure com a una generalització d'aquest resultat.

Teorema 5.5 (Shock). *Sigui R un anell i n un enter positiu. R té dimensió de Goldie per la dreta finita si i només si $R[x_1, \ldots, x_n]$ té dimensió de Goldie per la dreta finta. A més,*

$$dim_r(R) = dim_r(R[x_1, \ldots, x_n]).$$

Per tant, en tots dos casos, l'únic que ens cal comprovar és quan la condició de cadena ascendent per anul·ladors per la dreta es manté en passar a polinomis o a matrius.

L.W. Small a [53] prova que si R és un anell que és un ordre per la dreta en un anell artinià per la dreta, aleshores $R[x]$, i $M_n(R)$ també són ordres per la dreta en anells artinians per la dreta. D'aquesta manera tenim respostes afirmatives a les preguntes anteriors sota condicions addicionals.

Teorema 5.6 (Small). *Sigui R un anell. Si R és un anell de Goldie per la dreta semiprimer, aleshores*

1. *Per a tot $n \geq 0$, $R[x_1, \ldots, x_n]$ és un anell de Goldie per la dreta semiprimer.*

2. *Per a tot $n \geq 0$, $M_n(R)$ és una anell de Goldie per la dreta semiprimer.*

A [24] C. Faith, prova que si R és un anell commutatiu on tot divisor de zero té un anul·lador essencial, aleshores R és un ordre en un anell artinià. D'aquí juntament amb el Teorema de Small, deduïm que en el cas d'anells commutatius de dimensió de Goldie 1, la propietat de Goldie passa a matrius i a polinomis.

V. Camillo i R. Guralnick, a [7], també donen una resposta parcial a la pregunta de si la propietat de Goldie passa a polinomis, amb la condició addicional de que R ha de contenir un cert tipus de subconjunt no numerable al seu centre (per exemple que R sigui una K-àlgebra sobre un cos K no numerable). A més, aquesta propietat, és independent de la dimensió de Goldie de R.

Teorema 5.7 (Camillo-Guralnik). *Sigui R una K-àlgebra sobre un cos K no numerable, i sigui X un conjunt d'indeterminades commutatives sobre R. Aleshores, R satisfà acc$\perp$ per la dreta si i només si $R[X]$ satisfà acc$\perp$ per la dreta.*

Observacions 5.8. Com dèiem, el fet que R sigui una àlgebra sobre un cos no numerable és un cas particular d'una condició més tècnica. La idea de la demostració d'aquest cas particular consisteix en observar que la propietat acc$\perp$ per la dreta involucra només una quantitat numerable d'elements. A més, avaluant en determinats elements del cos, podem passar una cadena d'ideals de $R[x]$ a una cadena d'ideals de R. Aquesta idea la utilitzarem més endavant aplicada al cas numerable.

Per al cas de matrius, J.W. Kerr a [33] respon negativament a la pregunta de si la propietat de Goldie passa a l'anell de matrius, construint un exemple d'anell commutatiu de Goldie R tal que $M_2(R)$ no és un anell de Goldie. Aquest exemple és una àlgebra sobre un domini commutatiu arbitrari, per tant, no sembla que es puguin aconseguir resultats com els de Camillo-Guralnik.

Per al cas de polinomis, J.W. Kerr dóna també una resposta negativa a la seva tesi [34], on construeix una $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-àlgebra commutativa de Goldie R tal que $R[x]$ no és de Goldie. A la demostració de les propietats d'aquest exemple, s'utilitza fortament el fet que R sigui una $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-àlgebra.

A la secció següent construirem per a cada cos finit K, una K-àlgebra commutativa de Goldie R, tal que $R[x]$ no és de Goldie, generalitzant així la construcció de Kerr. Veiem doncs que en el cas què R sigui una K-àlgebra, la cardinalitat de K juga un paper important en respondre la pregunta de si la propietat de Goldie passa a l'anell de polinomis. El cas en que K és un cos numerable infinit, aquesta és encara una pregunta oberta. A la secció 5.4 farem alguns comentaris i observacions sobre aquest cas.

5.3 El cas finit

Observem que la condició de cadena ascendent per anul·ladors per la dreta, es pot estudiar com una propietat local sobre conjunts numerables d'elements tal i com veiem en el conegut lema següent. Aquesta caracterització la utilitzarem d'ara endavant sense referenciar.

Lema 5.9. *Sigui R un anell. R satisfà la condició de cadena ascendent per a anul·ldors per la dreta si i només si per a cada parella de successions d'elements de R no nuls $\{a_i\}_{i\geq 0}$ i $\{b_j\}_{j\geq 0}$ tals que $a_i b_j = 0$ si $i > j$, existeix un $m \in \mathbb{N}$ tal que $a_k b_k = 0$ per a tot $k \geq m$.*

Demostració. Suposem que R conté una cadena estrictament ascendent d'anul·ladors per la dreta no nuls:

$$B_0 < B_1 < B_2 < \dots$$

Podem escriure aquests anul·ladors com $B_i =$r.ann(A_i) per a alguns subconjunts $A_i \subseteq R$. Ara agafem $b_j \in B_{j+1} \setminus B_j$. Llavors per a cada $j \geq 0$, existeix algun $a_j \in A_j$ tal que $a_j b_j \neq 0$. Així, tenim dues successions $\{a_i\}_{i\geq 0}$ i $\{b_j\}_{j\geq 0}$ que satisfan $a_i b_j = 0$ si $i > j$ i $a_k b_k \neq 0$ per a tot $k \geq 0$, contradient així la propietat de l'enunciat.

Recíprocament, suposem que tenim dues successions d'elements de R no nuls $\{a_i\}_{i\geq 0}$ i $\{b_j\}_{j\geq 0}$ tals que $a_i b_j = 0$ si $i > j$, i $a_k b_k \neq 0$ per a tot $k \geq 0$. Ara, prenent $A_i = \{a_i, a_{i+1}, \dots\}$, tindrem que els $B_i =$r.ann(A_i) formen una cadena estrictament ascendent d'anul·ladors per la dreta no nuls.

□

Observem que per provar que R no satisfà acc⊥, és suficient construir dues successions d'elements $\{a_i\}_{i\geq 0}$ i $\{b_j\}_{j\geq 0}$ tals que $a_i b_j \neq 0$ si i només si $i = j$.

Sigui K un cos finit amb q elements. Construirem una K-àlgebra commutativa R tal que R és un anell de Goldie i $R[x]$ no és de Goldie.

Considerem els següents conjunt d'indeterminades commutatives sobre K:

$$
\begin{gathered}
A = \{a_{ir} \mid i \geq 1,\ r = 0,1\},\\
B = \{b_{js} \mid j \geq 1,\ 0 \leq s \leq q\},\\
U = \{u_0, u_1\},\\
V = \{v_0, v_1, \ldots, v_q\},\\
X = \{x_i \mid i \geq 1\},\\
X' = \{x'_j \mid j \geq 1\},\\
\{c\}.
\end{gathered}
$$

Definim ara $f\colon K[A,B,U,V] \to K[X,X',U,V,U^{-1},V^{-1},c]$ un homomorfisme de K-àlgebres de tal manera que:

$$
\begin{gathered}
f(a_{ir}) = c^r x_i u_0 u_r^{-1},\\
f(b_{js}) = c^s x'_j v_0 v_s^{-1},\\
f(u_r) = u_r,\\
f(v_s) = v_s,
\end{gathered}
$$

per a tot $i, j \geq 1$; $0 \leq s \leq q$ i $r = 0, 1$.

Sigui P=Ker(f). Donat que $K[X,X',U,V,U^{-1},V^{-1},c]$ és un domini, P és un ideal primer. El fet que P sigui primer, serà fonamental en molts dels raonaments que utilitzarem posteriorment.

Ara, introduirem unes funcions de grau amb pes i algunes funcions de grau usuals sobre $K[X,X',U,V,U^{-1},V^{-1},c]$ i $K[A,B,U,V]$ que faran de f una funció graduada. Aquestes funcions de grau, seran útils a l'hora de definir l'anell R i per tal de poder estudiar els seus elements.

Definim doncs els graus següents:

1. $w_1(a_{ir}) = r$, $w_1(b_{js}) = s$, $w_1(c) = 1$ i $w_1(u_r) = w_1(v_s) = w_1(x_i) = w_1(x'_j) = 0$ per a tot $i, j \geq 1$, $r = 0, 1$ i $0 \leq s \leq q$.

2. $w_2(u_r) = r$, $w_2(v_s) = s$, $w_2(c) = 1$ i $w_2(a_{ir}) = w_2(b_{js}) = w_2(x_i) = w_2(x'_j) = 0$ per a tot $i, j \geq 1$, $r = 0, 1$ i $0 \leq s \leq q$.

3. $d_{ai}(a_{ir}) = 1$, $d_{ai}(x_i) = 1$ i $d_{ai}(a_{kr}) = d_{ai}(b_{js}) = d_{ai}(c) = d_{ai}(u_r) = d_{ai}(v_s) = d_{ai}(x_k) = d_{ai}(x'_j) = 0$ per a tot $i, j, k \geq 1$, $i \neq k$, $r = 0, 1$ i $0 \leq s \leq q$.

4. $d_{bj}(b_{js}) = 1$, $d_{bj}(x'_j) = 1$ i $d_{bj}(a_{ir}) = d_{bj}(b_{ks}) = d_{bj}(c) = d_{bj}(u_r) = d_{bj}(v_s) = d_{bj}(x_i) = d_{bj}(x'_k) = 0$ per a tot $i, j, k \geq 1$, $j \neq k$, $r = 0, 1$ i $0 \leq s \leq q$.

5. $d_U(u_r) = 1$, i $d_U(a_{ir}) = d_U(b_{js}) = d_U(c) = d_U(v_s) = d_U(x_i) = d_U(x'_j) = 0$ per a tot $i, j \geq 1$, $r = 0, 1$ i $0 \leq s \leq q$.

6. $d_V(v_s) = 1$, i $d_V(a_{ir}) = d_V(b_{js}) = d_V(c) = d_V(u_r) = d_V(x_i) = d_V(x'_j) = 0$ per a tot $i, j \geq 1$, $r = 0, 1$ i $0 \leq s \leq q$.

7. $d_A = \sum_{i\geq 1} d_{ai}$.

8. $d_B = \sum_{j\geq 1} d_{bj}$.

Observem, com dèiem abans, que f conserva tots aquests graus i que per tant P és homogeni respecte de tots aquests. A més, es pot veure fàcilment que està generat per diferències de monomis.

Sigui I l'ideal de $K[A, B, U, V]$ generat per:

(i) Tots els elements de $P \cap K[A, B]$, tots els elements de P amb d_A,d_B,d_U o $d_V \geq 2$,

(ii) $a_{i0}b_{js}u_0v_s - a_{i1}b_{j,s-1}u_1v_{s-1}$ per a tot $1 \leq s \leq q$, si $i \neq j$ o $s \neq 1, q$,

(iii) $(a_{i0}b_{i1}u_0v_1 - a_{i1}b_{i0}u_1v_0) - (a_{1,0}b_{1,1}u_0v_1 - a_{1,1}b_{1,0}u_1v_0)$,
$(a_{i0}b_{iq}u_0v_q - a_{i1}b_{i,q-1}u_1v_{q-1}) + (a_{1,0}b_{1,1}u_0v_1 - a_{1,1}b_{1,0}u_1v_0)$, per a tot $i \geq 1$,

(iv) u_0v_0, u_1v_q, i tots els monomis amb $(d_U + d_V) \geq 3$.

És clar que I és un ideal homogeni respecte als graus d_A, d_B, d_U i d_V. Observem també que tots els generadors de I excepte els de (iv) són de P.

Definim $R = \frac{K[A,B,U,V]}{I}$. Donarem ara dues notacions per a R segons les seves estructures graduades. Denotem per $R_{i,j}$ la part homogènia de grau (i, j) de R respecte al grau induït per (d_U, d_V) i denotem per R_{i_1,i_2,i_3,i_4} les parts homogènies de R de grau (i_1, i_2, i_3, i_4) respecte al grau induït per (d_A, d_B, d_U, d_V). Així podem escriure R com,

$$R = R_{0,0} + R_{0,1} + R_{1,0} + R_{1,1} + R_{0,2} + R_{2,0},$$

i

$$R = \sum_{j_1=0}^{\infty} \sum_{j_2=0}^{\infty} \sum_{i_1+i_2 \leq 2} R_{j_1, j_2, i_1, i_2}.$$

Observem que

$$R_{0,0} \cong \frac{K[A, B]}{P \cap K[A, B]}$$

ja que tos els generadors de I excepte $P \cap K[A, B]$ tenen $d_U + d_V > 0$ i per tant $R_{0,0}$ és un domini. Anomenem $D = R_{0,0}$.

Donat $z \in K[A, B, U, V]$, denotarem per $\overline{z}$ la imatge per la projecció canònica de z a R.

Provarem ara que les relacions que hem definit a R fan que $R[x]$ no satisfaci acc$\perp$.

Lema 5.10. *$R[x]$ no satisfà acc$\perp$ i per tant no és un anell de Goldie.*

Demostració. Considerem les següents successions de polinomis no nuls a $R[x]$,

$$p_i(x) = \overline{a}_{i0}\overline{u}_0 - \overline{a}_{i1}\overline{u}_1 x,$$

$$q_j(x) = \overline{b}_{j0}\overline{v}_0 + \cdots + \overline{b}_{js}\overline{v}_s x^s + \cdots + \overline{b}_{jq}\overline{v}_q x^q,$$

per a tot $i, j \geq 1$. Observem que

$$\begin{aligned} p_i(x)q_j(x) &= \overline{a_{i0}b_{j0}u_0v_0} + \textstyle\sum_{r=1}^{q}(\overline{a_{i0}b_{jr}u_0v_r - a_{i1}b_{j,r-1}u_1v_{r-1}})x^r \\ &\quad + \overline{a_{i1}b_{jq}u_1v_q}\, x^{q+1} \\ &= \textstyle\sum_{r=1}^{q}(\overline{a_{i0}b_{jr}u_0v_r - a_{i1}b_{j,r-1}u_1v_{r-1}})x^r \\ &= \begin{cases} 0 & \text{if } i \neq j \\ \beta(x^q - x) & \text{if } i = j \end{cases} \end{aligned}$$

on $\beta = -(\overline{a_{1,0}b_{1,1}u_0v_1 - a_{1,1}b_{1,0}u_1v_0})$.

És fàcil veure que $\beta \neq 0$, per tant, tenim dues famílies infinites a $R[x]$, $\{p_i(x)\}_{i\geq 1}$ i $\{q_j(x)\}_{j\geq 1}$ tals que $p_i(x)q_j(x) = 0$ si i només si $i \neq j$. Aleshores $R[x]$ no satisfà acc$\perp$. □

Ara ens caldrà provar que R és un anell de Goldie.

Denotem per $\overline{P}$ l'ideal $\frac{P+I}{I}$ de R. El lema següent ens caracteritza el elements de $\overline{P}$. Observem d'aquí i del lema anterior que $p_iq_i \in \overline{P}[x]$.

Lema 5.11. *$\overline{P} = K\beta$.*

Demostració. Sigui $y \in P$ tal que $\overline{y} \neq 0$. Podem suposar sense pèrdua de generalitat que y és homogeni respecte de tots els graus definits i que $d_U(y)$,$d_V(y)$,$d_A(y)$ i $d_B(y) \leq 1$ per tal i com hem definit l'ideal I. Llavors $1 \leq (d_U + d_V)(y) \leq 2$. Distingim doncs els casos següents:

Cas 1 $(d_U + d_V)(y) = 1$.

Si $d_U(y) = 1$ llavors $y = y_0u_0 + y_1u_1$, per a certs $y_0, y_1 \in K[A, B]$. Com que y és homogeni respecte de w_2, $y = y_0u_0$ o $y = y_1u_1$. Ara, com que P és un ideal primer i $u_0, u_1 \notin P$, tindrem que $y_0, y_1 \in P \cap K[A, B]$. Així $y \in I$, però $\overline{y} \neq 0$, una contradicció. Per tant tenim que $d_V(y) = 1$. Aleshores $y = \sum_{s=0}^{q} y_sv_s$, per alguns $y_s \in K[A, B]$. Com que y és homogeni respecte del grau w_2, $y = y_sv_s$ per algun s. Igual que abans, com que P és un ideal primer i $v_s \notin P$, tindrem que $y_s \in P \cap K[A, B]$. Per tant $y \in I$, una contradicció. Així aquest cas no es pot donar.

Cas 2 $(d_U + d_V)(y) = 2$.

En aquest cas $d_U(y) = d_V(y) = 1$. Observem que podem suposar que y és una diferència de dos monomis. Aleshores $y = y_{rs}u_rv_s - y'_{r's'}u_{r'}v_{s'}$, on $y_{rs}, y'_{r's'}$ són monomis de $K[A, B]$. Pel Cas 1, com que P és primer i $u_i, v_j \notin P$, tenim que $r \neq r'$ i $s \neq s'$. Podem suposar sense pèrdua de generalitat que $u_r = u_0$ i $u_{r'} = u_1$. Per la forma dels generadors de I i utilitzant el grau w_2, l'única possibilitat que ens queda és $s' = s - 1$ i $y = y_{0s}u_0v_s - y'_{1,s-1}u_1v_{s-1}$ per algun $1 \leq s \leq q$.

Tenim que $f(y) = f(y_{0s})u_0v_s - f(y_{1,s-1})u_1v_{s-1} = 0$. Per tant, $b_{j,s}$ ha de dividir $y_{0,s}$ per algun $j \geq 1$ i a_{i1} ha de dividir $y'_{1,s-1}$ per a algun $i \geq 1$. Ara, utilitzant els graus d_{ai} i d_{bj}, i tinguen en compte que $f(y) = 0$, veiem que existeix un $\lambda \in K$

tal que $y_{0s} = \lambda a_{i0} b_{js}$, i $y'_{1,s-1} = \lambda a_{i1} b_{j,s-1}$ per alguns $i, j \geq 1$. Com que $\overline{y} \neq 0$, observant les relacions de I, tenim que $i = j$ i $s = 1$ o q. Per tant $y = \pm\lambda\beta$.

□

Lema 5.12. *Si $y \in K[A,B]$ i $\overline{y} \neq 0$ llavors*

$$Ann(\overline{y}) = \begin{cases} \overline{P} & si \;\; y \in (A \cup B)K[A,B], \\ \{0\} & en\ altre\ cas, \end{cases}$$

i, $Ann(\overline{P})$ =$Ann(\beta) = \sum_{(i_1,i_2,i_3,i_4)\neq(0,0,0,0)} R_{i_1,i_2,i_3,i_4}$.

Demostració. Sigui $y \in K[A,B]$ tal que $\overline{y} \neq 0$. És clar que si $y \notin (A \cup B)K[A,B]$, llavors $\mathrm{Ann}(\overline{y}) = \{0\}$. Suposem doncs que $y \in (A \cup B)K[A,B]$. Per la forma dels generadors de I, tenim que $\beta\overline{y} = 0$. Ara, usant el lema 5.11, veiem que $\overline{P} \subseteq \mathrm{Ann}(\overline{y})$. Prenem $z \in K[A,B,U,V]$ tal que $zy \in I$. Si observem la forma dels generadors de I, podem escriure

$$z = \sum_{r=0}^{1} \sum_{s=0}^{q} z_{rs} u_r v_s,$$

per alguns $z_{rs} \in K[A,B]$, tals que $z_{00} = z_{1q} = 0$. Aleshores, per la forma dels generadors de I, veiem que $yz \in P$. Així, com que P és un ideal primer i $y \notin P$ ja que $K[A,B] \cap P \subseteq I$, tindrem que $z \in P$. La segona part s'obté usant el lema 5.11. □

Aquest lema, ens permet veure que $\overline{P}$ és de fet un anul·lador a R.

Observem que cada un dels sumands homogenis $R_{i,j}$ respecte del grau (d_U, d_V), és isomorf com a D-mòdul a D mateix, de tal manera que són ideals uniformes de R. Ara, escollint els sumands necessaris i utilitzant els lemes anteriors, podem veure que R té dimensió de Goldie finita.

Lema 5.13. *R té dimensió de Goldie* $3q + 5$.

Demostració. Sigui J l'ideal

$$\begin{aligned} J \;\; = \;\; & R\overline{u}_0^2 + R\overline{u}_0\overline{u}_1 + R\overline{u}_1^2 \\ & + \textstyle\sum_{s=0}^{q} R\overline{v}_0\overline{v}_s + \sum_{t=1}^{q} R\overline{v}_q\overline{v}_t + \sum_{s=1}^{q} R\overline{u}_0\overline{v}_s \,. \end{aligned}$$

Usant els graus (d_U, d_V) i la forma dels generadors de I, veiem que la suma anterior és una suma directa. A més, cadascun dels sumands de J és isomorf com a $R_{0,0}$-mòdul al domini D. Per tant aquests sumands són ideals uniformes.

Pel lema 5.11, és clar que $\overline{P}$ també és un ideal uniforme. A més, com que $\beta \notin J$, la suma $J + \overline{P}$ és una suma directa. Ara veurem que

$$J + \overline{P} \leq_e R,$$

i per tant R tindrà dimensió de Goldie $3q + 5$.

Prenem un element no nul qualsevol $\alpha \in R$. Escrivim $\alpha = \alpha_{0,0} + \alpha_{1,0} + \alpha_{0,1} + \alpha_{0,2} + \alpha_{1,1} + \alpha_{2,0}$, on $\alpha_{r,s}$ és la part homogènia de α de grau (r, s) respecte del grau (d_U, d_V).

Si $\alpha_{0,0} \neq 0$, llavors $\alpha\overline{u}_0^2 = \alpha_{0,0}\overline{u}_0^2 \in J \setminus \{0\}$.

Si $\alpha_{0,0} = 0$ i $\alpha_{0,1} \neq 0$, llavors $\alpha\overline{v}_q = \alpha_{0,1}\overline{v}_q + \alpha_{1,0}\overline{v}_q \in J \setminus \{0\}$.

Si $\alpha_{0,0} = 0$ i $\alpha_{1,0} \neq 0$, llavors $\alpha\overline{u}_0 = \alpha_{1,0}\overline{u}_0 + \alpha_{0,1}\overline{u}_0 \in J \setminus \{0\}$.

Per tant podem suposar que $\alpha_{0,0} = \alpha_{0,1} = \alpha_{1,0} = 0$ i $\alpha \in R_{0,2} + R_{1,1} + R_{2,0}$. En aquest cas, observem que

$$b_{1r}b_{1s}v_r v_s - b_{1,0}b_{1,r+s}v_0 v_{r+s},$$

$$b_{1r'}b_{1s'}v_{r'}v_{s'} - b_{1q}b_{1,r'+s'-q}v_q v_{r'+s'-q} \text{ i}$$

$$a_{2,0}b_{1t}u_0 v_t - a_{2,1}b_{1,t-1}u_1 v_{t-1},$$

són elements de $P \cap I$ per a tot $r + s \leq q$, per a tot $r' + s' > q$ i per a tot $1 \leq t \leq q$. Així, si prenem

$$b = \left(\prod_{s=0}^{q} b_{1s}\right)^2$$

i

$$a = a_{2,1}\prod_{s=0}^{q-1} b_{1s},$$

tindrem que $\overline{b}(R_{0,2}) \subseteq J$ i $\overline{a}(R_{1,1}) \subseteq J$. A més com que $R_{2,0} \subseteq J$, $\overline{a}\overline{b}\alpha \in J$. Però, com que $\overline{a}\overline{b} \neq 0$, si $\overline{a}\overline{b}\alpha = 0$ llavors, pel lema 5.12, $\alpha \in \overline{P}$.

Així, per a qualsevol $\alpha \in R \setminus \{0\}$ existeix $r \in R$ tal que $r\alpha \in (J + \overline{P}) \setminus \{0\}$. Per tant $J \oplus \overline{P} \leq_e R$. □

Els lemes següents ens permetran veure que R satisfà acc⊥.

Lema 5.14. *Siguin $\overline{y}, \overline{z} \in (R_{0,1} + R_{1,0}) \setminus \{0\}$ elements homogenis respecte dels graus d_U, d_V tals que $\overline{yz} = 0$. Aleshores, o bé $\overline{y} \in R_{0,1}$ i $\overline{z} \in R_{1,0}$, o bé $\overline{y} \in R_{1,0}$ i $\overline{z} \in R_{0,1}$.*

Demostració. Podem suposar sense pèrdua de generalitat que $y, z \notin I$ són homogenis respecte als grau d_U, d_V i que $(d_U + d_V)(y) = (d_U + d_V)(z) = 1$. Però és clar, mirant la forma dels generadors de I, que si $yz \in I$, no és possible que $\overline{y}, \overline{z} \in R_{1,0}$ o que $\overline{y}, \overline{z} \in R_{0,1}$. □

Lema 5.15. *Siguin $\overline{y} \in R_{1,0}$, $\overline{z} \in R_{0,1}$ elements no nuls tals que $\overline{yz} = 0$. Llavors se satisfà algun dels casos següents:*

(i) $\overline{y} \in R\overline{u}_0$ *i* $\overline{z} \in R\overline{v}_0$,

(ii) $\overline{y} \in R\overline{u}_1$ *i* $\overline{z} \in R\overline{v}_q$,

(iii) $\overline{y} = \overline{y}_0\overline{u}_0 + \overline{y}_1\overline{u}_1$ *i* $\overline{z} = \overline{z}_0\overline{v}_0 + \ldots + \overline{z}_q\overline{v}_q$, *on* $\overline{y}_0, \overline{y}_1, \overline{z}_0, \ldots, \overline{z}_q$ *són no nuls i*

$$y_0 z_s u_0 v_s + y_1 z_{s-1} u_1 v_{s-1} \in P$$

per a tot $s = 1, \ldots, q$.

Demostració. Siguin

$$y = y_0 u_0 + y_1 u_1$$

i

$$z = z_0 v_0 + \ldots + z_q v_q,$$

on $y_0, y_1, z_0, \ldots, z_q \in K[A, B]$.

Com que

$$yz = y_0z_0u_0v_0 + \sum_{s=1}^{q}(y_0z_su_0v_s + y_1z_{s-1}u_1v_{s-1}) + y_1z_qu_1v_q \in I,$$

tindrem que

$$\sum_{s=1}^{q}(y_0z_su_0v_s + y_1z_{s-1}u_1v_{s-1}) \in P \cap I.$$

Usant el grau w_2, podem veure que

$$y_0z_su_0v_s + y_1z_{s-1}u_1v_{s-1} \in P, \tag{5.1}$$

per a tot $s = 1, \dots, q$.

Si $\overline{y}_1 = 0$, llavors $\overline{y}_0 \neq 0$. Per tant $y_0 \notin P$ i $y_1 \in P$. En aquest cas, per (5.1)

$$y_0z_su_0v_s \in P,$$

per a tot $s = 1, \dots, q$. Però com que P és un ideal primer,

$$z_s \in P \quad (s = 1, \dots, q).$$

Per tant $\overline{z} = \overline{z}_0\overline{v}_0 \in R\overline{v}_0$ i $\overline{y} \in R\overline{u}_0$, i estem en el cas (i).

Si $\overline{y}_0 = 0$, similarment, tenim que $\overline{y}_1 \neq 0$ i per tant $y_1 \notin P$ i $y_0 \in P$. Així, per (5.1)

$$y_1z_{s-1}u_1v_{s-1} \in P,$$

per a tot $s = 1, \dots, q$, i com que P és un ideal primer,

$$z_s \in P \quad (s = 0, \dots, q-1).$$

Llavors $\overline{z} = \overline{z}_q\overline{v}_q \in R\overline{v}_q$ i $\overline{y} \in R\overline{u}_1$, i estem en el cas (ii).

Finalment, si $\overline{y}_0$ i $\overline{y}_1$ són no nuls, llavors $y_0, y_1 \notin P$. Per tant, per (5.1) i com que P és un ideal primer,

$$z_s \in P \Leftrightarrow z_{s-1} \in P,$$

per a tot $s = 1, \dots, q$. Però com que $\overline{z} \neq 0$, tindrem que $\overline{z}_0, \dots, \overline{z}_q$ són no nuls i per tant se satisfà el cas (iii).

□

Ara estem en disposició de demostrar,

Lema 5.16. *R satisfà acc$\perp$.*

Demostració. Suposem que existeixen un parell de successions $\{\overline{y}_m\}_{m\geq 1}$ i $\{\overline{z}_m\}_{m\geq 1}$ d'elements de R no nuls tals que

$$\overline{y}_p\overline{z}_m = 0 \quad \text{per a } 1 \leq p < m$$

i que

$$\overline{y}_m\overline{z}_m \neq 0 \quad \text{per a tot } m \geq 1.$$

Podem suposar que $\overline{y}_m$ i $\overline{z}_m$ són homogenis respecte dels graus d_U i d_V, i que

$$\overline{y}_m, \overline{z}_m \in R_{1,0} + R_{0,1}.$$

Pel lema 5.14, podem suposar que

$$\overline{y}_m \in R_{1,0} \quad \text{i} \quad \overline{z}_m \in R_{0,1}$$

per a tot $m \geq 1$. Per tant existeixen $y_0^{(m)}, y_1^{(m)}, z_0^{(m)}, z_1^{(m)}, \ldots, z_q^{(m)} \in K[A,B]$ tals que

$$\overline{y}_m = \overline{y}_0^{(m)}\overline{u}_0 + \overline{y}_1^{(m)}\overline{u}_1$$

i

$$\overline{z}_m = \overline{z}_0^{(m)}\overline{v}_0 + \overline{z}_1^{(m)}\overline{v}_1 + \ldots + \overline{z}_q^{(m)}\overline{v}_q.$$

Ara, pel lema 5.15, és fàcil veure que no es poden donar els casos (i), (ii) i per tant tenim que

$$\overline{y}_0^{(m)}, \overline{y}_1^{(m)}, \overline{z}_0^{(m)}, \ldots, \overline{z}_q^{(m)}$$

són no nuls i

$$y_0^{(p)} z_s^{(m)} u_0 v_s + y_1^{(p)} z_{s-1}^{(m)} u_1 v_{s-1} \in P$$

per a tot $1 \leq p < m$ i $s = 1, \dots, q$.

Observem que si $1 \leq p, p' < m$ llavors $(y_0^{(p')} y_1^{(p)} - y_0^{(p)} y_1^{(p')}) z_{s-1}^{(m)} u_1 v_{s-1}$

$$\begin{aligned} = \quad & y_0^{(p')}(y_0^{(p)} z_s^{(m)} u_0 v_s + y_1^{(p)} z_{s-1}^{(m)} u_1 v_{s-1}) \\ & - y_0^{(p)}(y_0^{(p')} z_s^{(m)} u_0 v_s + y_1^{(p')} z_{s-1}^{(m)} u_1 v_{s-1}) \in P. \end{aligned}$$

Com que P és un ideal primer i $z_{s-1}^{(m)}, u_1, v_{s-1} \notin P$, tindrem que

$$y_0^{(p')} y_1^{(p)} - y_0^{(p)} y_1^{(p')} \in P \quad \text{per a tot } 1 \leq p, p'.$$

Per a $m > 1$ tenim que $y_0^{(1)} y_1^{(1)} (y_0^{(m)} z_s^{(m)} u_0 v_s + y_1^{(m)} z_{s-1}^{(m)} u_1 v_{s-1})$

$$\begin{aligned} = \quad & (y_1^{(1)} y_0^{(m)} - y_0^{(1)} y_1^{(m)}) y_0^{(1)} z_s^{(m)} u_0 v_s \\ & + y_0^{(1)} y_1^{(m)} (y_0^{(1)} z_s^{(m)} u_0 v_s + y_1^{(1)} z_{s-1}^{(m)} u_1 v_{s-1}) \in P. \end{aligned}$$

Com que P és un ideal primer i $y_0^{(1)} y_1^{(1)} \notin P$, tindrem que

$$y_0^{(m)} z_s^{(m)} u_0 v_s + y_1^{(m)} z_{s-1}^{(m)} u_1 v_{s-1} \in P,$$

per a tot $m > 1$ i tot $s = 1, \dots, q$.

Però com que $\overline{y}_m \overline{z}_m \neq 0$, i $\overline{P} = K\overline{\beta}$, podem suposar que

$$y_0^{(m)} z_s^{(m)} \in \sum_{i,j} a_{i0} b_{js} K$$

i

$$y_1^{(m)} z_{s-1}^{(m)} \in \sum_{i,j} a_{i1} b_{j,s-1} K,$$

per a tot $m > 1$ i tot $s = 1, \dots, q$.

Ara com que $q \geq 2$, haurem de tenir que

$$y_r^{(m)} \in \sum_i a_{ir} K \quad (r = 0, 1)$$

i

$$z_s^{(m)} \in \sum_j b_{js} K \quad (s = 0, 1, \dots, q).$$

Per tant existeixen $\lambda_{ir}^{(m)}, \mu_{js}^{(m)} \in K$ tals que

$$y_m = \sum_{i\geq 1}(\lambda_{i0}^{(m)} a_{i0}u_0 + \lambda_{i1}^{(m)} a_{i1}u_1)$$

i

$$z_m = \sum_{j\geq 1}(\mu_{j0}^{(m)} b_{j0}v_0 + \ldots + \mu_{jq}^{(m)} b_{jq}v_q).$$

Usant els graus d_{ai} i d_{bj}, tenim que

$$\lambda_{i0}^{(m)} a_{i0}u_0\mu_{js}^{(m)} b_{js}v_s + \lambda_{i1}^{(m)} a_{i1}u_1\mu_{j,s-1}^{(m)} b_{j,s-1}v_{s-1} \in P,$$

per a tot $i, j \geq 1$, tot $1 \leq s \leq q$ i per a tot $m > 1$.

Per tant

$$\lambda_{i0}^{(m)}\mu_{js}^{(m)} = -\lambda_{i1}^{(m)}\mu_{j,s-1}^{(m)},$$

per a qualsevol $i, j \geq 1$, qualsevol $1 \leq s \leq q$ i qualsevol $m > 1$.

Com que $z_m \neq 0$, existeixen j i s tals que

$$\mu_{js}^{(m)} \neq 0.$$

Com que $y_0^{(m)} \neq 0$ i $y_1^{(m)} \neq 0$, existeixen i_0 i i_1 tals que

$$\lambda_{i_0 0}^{(m)} \neq 0 \quad \text{i} \quad \lambda_{i_1 1}^{(m)} \neq 0.$$

Per tant

$$\mu_{j0}^{(m)}, \mu_{j1}^{(m)}, \ldots, \mu_{jq}^{(m)}, \lambda_{i_0 1}^{(m)}, \lambda_{i_1 0}^{(m)}$$

són no nuls. Aleshores existeixen $i_0, \ldots, i_t \geq 1$ i $j_0, \ldots, j_{t'} \geq 1$ tals que

$$y_m = \sum_{k=0}^{t}(\lambda_{i_k 0}^{(m)} a_{i_k 0}u_0 + \lambda_{i_k 1}^{(m)} a_{i_k 1}u_1)$$

i

$$z_m = \sum_{l=0}^{t'}(\mu_{j_l 0}^{(m)} b_{j_l 0}v_0 + \ldots + \mu_{j_l q}^{(m)} b_{j_l q}v_q),$$

amb $\lambda_{i_k r}^{(m)}, \mu_{j_l s}^{(m)}$ no nuls per a tot $k = 0, \ldots, t$, tot $l = 0, \ldots, t'$, tot $r = 0, 1$ i qualsevol $s = 0, \ldots, q$.

Sigui

$$\lambda_m = -\frac{\lambda_{i_0 1}^{(m)}}{\lambda_{i_0 0}^{(m)}}.$$

És fàcil veure que

$$\lambda_m = -\frac{\lambda_{i_k 1}^{(m)}}{\lambda_{i_k 0}^{(m)}} = \frac{\mu_{j_l s}^{(m)}}{\mu_{j_l, s-1}^{(m)}}$$

per a tot $k = 0, \ldots, t$, tot $l = 0, \ldots, t'$ i tot $s = 1, \ldots, q$, i que a més

$$\lambda_m^s = \frac{\mu_{j_l s}^{(m)}}{\mu_{j_l 0}^{(m)}}$$

per a tot $l = 0, \ldots, t'$ i $s = 1, \ldots, q$. Ara tenim que

$$\overline{y}_m = \sum_{k=0}^{t} \lambda_{i_k 0}^{(m)} p_{i_k}(\lambda_m) \quad \text{i} \quad \overline{z}_m = \sum_{l=0}^{t'} \mu_{j_l 0}^{(m)} q_{j_l}(\lambda_m).$$

Per tant tindrem

$$\overline{y}_m \overline{z}_m = \sum_{k,l} \lambda_{i_k 0}^{(m)} \mu_{j_l 0}^{(m)} \delta_{i_k, j_l} \beta(\lambda_m^q - \lambda_m) = 0,$$

per a tot $m > 1$, però $\overline{y}_m \overline{z}_m \neq 0$ per a qualsevol $m \geq 1$, una contradicció.

Aleshores R satisfà acc$\perp$.

□

Així, amb els lemes 5.13, 5.16 i 5.10 hem provat:

Teorema 5.17. *Per a tot cos finit K, existeix una K-àlgebra commutativa de Goldie R tal que $R[x]$ no és de Goldie.* □

5.4 El cas infinit numerable.

Si intentem generalitzar la idea de la construcció de l'exemple de la secció anterior per a una K-àlgebra R, sobre un cos numerable infinit, ens trobem amb que no podem controlar la dimensió de Goldie de R. De fet, veiem que la dimensió de Goldie del nostre exemple $(3q + 5)$ està fortament relacionada amb la cardinalitat del cos K (q).

M. Roitman a [49], construeix per a cada cos K numerable una K-àlgebra commutativa R satisfent acc$\perp$ tal que $R[x]$ no satisfà acc$\perp$. Així, veiem que el resultat de Camillo-Guralnik [7] només és cert per al cas de cossos de cardinalitat no numerable. Però aquests exemples són tots de dimensió de Goldie infinita independentment de si el cos és finit o no.

En aquesta situació C. Faith a [23], defineix els anells de *Kerr* com anells R tals que $R[x]$ satisfà acc$\perp$. Al mateix article, Faith planteja la pregunta de si R Kerr, implica $R[x]$ Kerr. Aquesta pregunta la contesten negativament F. Cedó i D. Herbera a [8], on construeixen per a cada cos numerable K i enter no negatiu n, una K-àlgebra commutativa R tal que $R[x_1, \ldots, x_n]$ satisfà acc$\perp$ però $R[x_1, \ldots, x_{n+1}]$ no. Al igual que els exemples de Roitman, aquests són també tots de dimensió de Goldie infinita.

La pregunta de si la propietat de Goldie en K-àlgebres sobre un cos numerable infinit es manté en passar a polinomis, és encara una pregunta oberta. Com dèiem anteriorment, analitzant la demostració del Teorema de Camillo-Guralnik, podem aplicar la mateixa idea al cas numerable i infinit, per a veure que un contraexemple a la pregunta anterior hauria de satisfer algunes propietats addicionals.

Proposició 5.18. *Sigui K un cos de cardinalitat infinita. Sigui R una K-àlgebra. Si $R[x]$ no satisfà acc$\perp$ per la dreta, llavors R té cadenes d'anul·ladors per la dreta de longitud finita arbitrària.*

Demostració. Siguin $\{p_i\}_{i\geq 0}$, i $\{q_j\}_{j\geq 0}$ tals que,

$$\begin{cases} p_i q_j = 0 & \text{si } i < j, \\ p_i q_j \neq 0 & \text{si } i = j. \end{cases}$$

Donat que el cos K es central a R, podem avaluar els polinomis als elements de K de tal manera que si $\alpha \in K$, aleshores $p_i(\alpha)q_i(\alpha) = p_iq_i(\alpha)$. A més, si $\alpha \in K$ és una arrel de $h \in R[x]$ no nul, aleshores $h = (x - \alpha)h'$, on $h' \in R[x]$ és un polinomi no nul de grau menor. Per tant, és clar que el nombre d'arrels de $h \in R[x]$ a K ha de ser finit.

Siguin $h_i = p_iq_i$ per a tot $i \geq 0$. Com que $h_i \neq 0$, tenim un nombre finit d'arrels de h_i a K. Aleshores, donat un $m \geq 0$, com que K és infinit numerable, existeix $\alpha_m \in K$ tal que $h_i(\alpha_m) \neq 0$ per a tot $i = 1, \dots, m$. Així, $\{p_i(\alpha_m)\}_{i=1,\dots,m}$ i $\{q_j(\alpha_m)\}_{j=1,\dots,m}$ ens donaran una cadena d'anul·ladors de longitud m. □

Observacions 5.19. Veiem que el fet que K sigui un cos, s'utilitza per a saber que els seus elements són centrals i que $\alpha, (x - \alpha)$ són regulars a $R[x]$. Per tant, el mateix serà vàlid si tenim S un subanell central de cardinalitat infinita sense divisors de zero.

Corol·lari 5.20. *Sigui K un cos. Sigui R una K-àlgebra i $n \geq 1$. Si $R[x_1, \dots, x_{n+1}]$ no satisfà acc$\perp$, llavors $R[x_1, \dots, x_n]$ conté cadenes d'anul·ladors de longitud finita arbitrària.*

Demostració. Per l'observació anterior, podem prendre

$$S = K[x_1, \dots, x_n] \subseteq R[x_1, \dots, x_n],$$

que és un subanell central de cardinalitat infinita. □

És ben sabut, que si R no conté sumes directes infinites d'ideals per la dreta no nuls, aleshores existeix una cota per al nombre d'aquests sumands i això ens permet definir la dimensió de Goldie. Ens podem preguntar si al igual que per la dimensió de Goldie, si R satisfà acc$\perp$ per la dreta, existeix una cota per a la longitud de les cadenes d'anul·ladors. Aquesta cota existeix sota hipòtesis addicionals, per exemple, en el cas d'anells de Goldie per la dreta semiprimers, aquests són ordres en anells artinians semisimples i és fàcil trobar una cota per a la longitud d'aquestes cadenes. També tenim una cota per a la longitud de les cadenes d'anul·ladors per la dreta en el cas d'anells semiprimers amb acc$\perp$ per la dreta i satisfent una identitat polinòmica (Small [53]), o en el cas d'anells primers amb una cota per als índexs de nilpotència (Hannah [32]).

Observem doncs que aquesta cota està fortament lligada amb altres condicions de finitud. Però en general, aquesta cota no té perquè existir. A [35], Kerr presenta dos exemples d'anells satisfent acc$\perp$ pels dos costats i sense aquesta cota, un d'ells commutatiu i amb un subanell amb les mateixes propietats i nilpotent, i un altre no commutatiu primer i finitament generat sobre un cos K.

De fet, el corol·lari 5.20, ens diu que tant els exemples de Roitman [49], com els de Cedó i Herbera [8], contenen cadenes d'anul·ladors de longitud finita arbitrària.

Tots els exemples, però, tenen dimensió de Goldie infinita. Aleshores, ens preguntem,

Pregunta 2. Si R és un anell de Goldie per la dreta, existeix una cota per a la longitud de cadenes d'anul·ladors per la dreta?

O bé. Si R és un anell de Goldie per la dreta amb cadenes d'anul·ladors per la dreta de longitud finita arbitrària, aleshores $R[x]$ no és de Goldie?

En el cas d'anells de Goldie, podem trobar cotes en la longitud de cadenes d'anul·ladors sota certes condicions. Recordem que si R és un anell, l'ideal singular per la dreta de R es defineix com $Z_r(R) = \{r \in R \text{ tals que } \mathrm{r.ann}(r) \leq_e R\}$. A [25] J.W. Fisher prova que si R és un anell de dimensió de Goldie per la dreta n, aleshores les cadenes d'anul·ladors per la dreta de $R/Z_r(R)$ són de longitud menor o igual que $n+1$. A més, prova que si R satisfà acc$\perp$ per la dreta, aleshores $Z_r(R)$ és nilpotent amb índex de nilpotència acotat.

5.5 L'exemple de Kerr

Ja hem dit abans que J.W. Kerr va construir a la seva tesi [34] una $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-àlgebra commutativa de Goldie R tal que $R[x]$ no és de Goldie. Com que aquest exemple és complicat, no és fins uns anys més tard que publica a [36] un altre exemple simplificant la demostració de la seva tesi.

Però una anàlisi d'aquest article ens va fer descobrir que la demostració del lema clau era incorrecta.

Això encara va motivar més la construcció dels exemples exposats a la secció 5.3. Un cop construïts aquests exemples vàrem escriure a la Professora J.W. Kerr per comentar-li l'error detectat i enviar-li el nostre treball. Molt amablement la Professora Kerr ens va enviar l'exemple de la seva tesi i vàrem comprovar que aquest era totalment correcte.

Finalment hem aconseguit trobar una demostració correcta del seu lema clau i per tant l'exemple publicat a [36] també funciona.

En aquesta secció farem una anàlisi de [36] i donarem una "nova" demostració per a [36, Lemma 5].

Comencem introduint l'exemple de J.W. Kerr publicat a [36].

Siguin $\mathbb{A} = \{\mathfrak{a}_{ij}, \text{ per a } i \geq 0 \text{ i } j = 0,1,2,3\}$, $U = \{u_0, u_1, u_2, u_3\}$, $U_{-1} = \{u_0^{-1}, u_1^{-1}, u_2^{-1}, u_3^{-1}\}$, $X = \{x_i, \text{ per a } i \geq 0\}$ i $\{c\}$ conjunts d'indeterminades commutatives sobre $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Denotem per $\mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ elements a $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\,[\mathbb{A}, U, U_{-1}, X, c]$. Definim,

$$\begin{aligned}
&\deg(\mathfrak{a}_{i,j}) = \deg(x_i) = (1,0),\\
&\deg(u_j) = (0,1),\\
&\deg(c) = (0,0),\\
&\deg_{\mathbb{A}}(\mathfrak{y}) = \text{ El grau total de } \mathfrak{y} \text{ en els } \mathfrak{a}_{ij},\\
&\deg_U(\mathfrak{z}) = \text{ El grau total de } \mathfrak{z} \text{ en els } u_j.
\end{aligned}$$

Considerem l'homomorfisme bigraduat de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-àlgebres següent:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{f} : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\,[\mathbb{A}] &\longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\,[X, c, U, U_{-1}]\\
\mathfrak{a}_{ij} &\longmapsto c^j x_i u_0 u_j^{-1}.
\end{aligned}$$

Com que $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\,[X, c, U, U_{-1}]$ és un domini, el nucli de $\mathfrak{f}$ és un ideal primer homogeni que anomenarem $\mathbb{P}$. És fàcil veure que $\mathbb{P}$ està generat per elements de la forma,

$$(\mathfrak{a}_{ij}\mathfrak{a}_{km} + \mathfrak{a}_{im}\mathfrak{a}_{kj}).$$

A més, també podem veure que,

$$\mathbb{P} \cap \{\mathfrak{y} \text{ tals que } \deg_{\mathbb{A}}(\mathfrak{y}) < 2\} = 0.$$

Siguin y, a_{ij}, A les imatges de $\mathfrak{y}, \mathfrak{a}_{ij}, \mathbb{A}$ a $D = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\,[\mathbb{A}])/\mathbb{P}$. Podem estendre $\mathfrak{f}$ a $D[U]$ de la manera següent:

$$\begin{array}{rcl} f : D[U] & \longrightarrow & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\,[X, c, U, U_{-1}]. \\ a_{ij} & \longmapsto & c^j x_i u_0 u_j^{-1} \\ u_j & \longmapsto & u_j \end{array}$$

Sigui $P = \mathrm{Ker} f$. Denotem per P_i el conjunt dels elements de P amb grau total en les u_j's igual a i. D'aquesta manera $P_0 = (\mathrm{Ker} f) \cap D = \mathrm{Ker}\ \mathfrak{f} = 0$.

Definim també una graduació amb pes W, a $D[U]$, de la manera següent:

$$W(\beta \prod_j u_j^{n_j}) = \sum_j jn_j,$$

on β és un monomi en les a_{ij}'s, i a $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\,[X, c, U, U_{-1}]$ per,

$$W(\delta c^J \prod_j u_j^{n_j}) = J + \sum_j jn_j,$$

on δ és un monomi en les x_i's. Observem que f també respecta aquesta graduació, i per tant $P = \mathrm{Ker} f$ és també homogeni respecte del grau W. Usant aquesta graduació, podem veure que $P_0 = P_1 = \{0\}$.

Definim els elements següents de P:

$$\begin{aligned} \alpha_{2ik} &= a_{i0}a_{k2}u_0u_2 + a_{i1}a_{k1}u_1^2, \\ \alpha_{3ik} &= a_{i0}a_{k3}u_0u_3 + a_{i1}a_{k2}u_1u_2, \\ \alpha_{4ik} &= a_{i1}a_{k3}u_1u_3 + a_{i2}a_{k2}u_2^2. \end{aligned}$$

Observem doncs que P_2 no és trivial. De fet, es pot veure que $\{\alpha_{2ik}, \alpha_{3ik}, \alpha_{4ik}\}$ generen els elements de P_2 amb $\deg_A = 2$.

Prenem ara I l'ideal homogeni generat per

(i) Tots els elements de P amb $\deg_A > 2$,

(ii) $\alpha_{2jk}, \alpha_{3jk}$ per a tot $j \neq k$,

(iii) $\alpha_{2ii} - \alpha_{3jj}$ per a tot i, j,

(iv) u_1u_3, u_2^2, u_0^2 i $u_iu_ju_s$ per a tot i, j, s.

Aleshores, si prenem $R = D[U]$ i $\mathbf{R} = R/I$, J.W. Kerr prova el següent:

Teorema 5.21 (Kerr). $\mathbf{R}$ *és un anell de Goldie tal que* $\mathbf{R}[t]$ *no és de Goldie.*

Escriurem els elements de $\mathbf{R}$ en negreta per a diferenciar-los dels elements de R. Observem que podem escriure $\mathbf{R}$ com $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 + \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2$ on $\mathbf{R}_i$ és la component homogènia de grau i en $\deg_U$. Si $\mathbf{x} \in \mathbf{R}$, denotem per $\mathbf{x}_i$ la part homogènia de $\mathbf{x}$ de grau i en $\deg_U$. A més, denotem per $\boldsymbol{\alpha}$ l'element $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}_{2ii} = \boldsymbol{\alpha}_{3ii}$ per a tot i. En l'estudi d'aquest anell Kerr defineix els conjunts següents:

Definició 5.22 (Kerr). Definim,

$$\mathscr{S}_1 = \{\mathbf{y}_1 \in \mathbf{R}_1 \text{ tals que } \mathbf{y}_1 = \textstyle\sum_{i=0}^{3} \mathbf{c}_i\mathbf{u}_i \text{ o } \mathbf{y}_1 = \mathbf{c}_0\mathbf{u}_0 + \mathbf{c}_1\mathbf{u}_1$$
$$\text{o } \mathbf{y}_1 = \mathbf{c}_0\mathbf{u}_0 + \mathbf{c}_2\mathbf{u}_2 \text{ on } \mathbf{c}_i \in \mathbf{R}_0 \text{ i } \mathbf{c}_i \neq 0\}.$$

Definim la relació d'equivalència següent a $\mathscr{S}_1$,

1. $\sum_{i=0}^{3} \mathbf{c}_i\mathbf{u}_i$ és equivalent a $\sum_{i=0}^{3} \mathbf{d}_i\mathbf{u}_i$ si $c_0d_1 - c_1d_0 \in P$ i per a tot $i, j = 0, 1, 2$. $c_id_{j+1}u_iu_{j+1} - d_jc_{i+1}u_ju_{i+1} \in P$;

2. $\mathbf{c}_0\mathbf{u}_0 + \mathbf{c}_1\mathbf{u}_1$ és equivalent a $\mathbf{d}_0\mathbf{u}_0 + \mathbf{d}_1\mathbf{u}_1$ si $c_0d_1 - d_0c_1 \in P$;

3. $\mathbf{c}_0\mathbf{u}_0 + \mathbf{c}_2\mathbf{u}_2$ és equivalent a $\mathbf{d}_0\mathbf{u}_0 + \mathbf{d}_2\mathbf{u}_2$ si $c_0d_2 - d_0c_2 \in P$.

Denotem per $\mathscr{C}(\mathbf{y}_1)$ la classe d'equivalència de $\mathbf{y}_1$.

El lema clau per demostrar que R satisfà acc$\perp$ és el següent:

Lema 5.23. *(Kerr[36, Lemma 5]) Donat* $\mathbf{y}_1 \in \mathscr{S}_1$*, el nombre d'ideals a*

$$\{Ann(\mathbf{x}) \text{ tals que } \mathbf{x_0} = 0 \text{ i } \mathbf{x_1} \in \mathscr{C}(\mathbf{y}_1)\},$$

és menor o igual a 2.

A la demostració d'aquest s'utilitzen certes propietats per als elements que no són correctes. En aquesta, es fixen $x, y, z \in R$, amb $x_0 = y_0 = z_0 = 0$, i $x_1 = b_0u_0 + b_1u_1$, $y_1 = c_0u_0 + c_1u_1$, $z_1 = \sum_{i=0}^{3} d_iu_i$, i $\mathbf{y}_1\mathbf{z}_1 = \boldsymbol{\alpha}$. En aquest context, hem detectat els errors següents:

> " *Next we show that if* $deg_A b_1$=$deg_A c_1$, *then the weight 2 part of* **xz** *is the same as the weigth 2 part of* **yz**. *Moreover in this case* $b_1 = c_1$ *and* $b_0 = c_0$. *So Ann*(**x**) =*Ann*(**y**)"

Això no és cert, doncs si prenem $i \neq j$, i els següents elements:

$$\begin{aligned} x &= (a_{i0} + a_{j0})(a_{i3} + a_{j3})u_0 + (a_{i1} + a_{j1})u_1, \text{ amb } b_1 = a_{i1} + a_{j1}, \\ y &= a_{i0}(a_{i3} + a_{j3})u_0 + a_{i1}u_1, \text{ amb } c_1 = a_{i1}, \text{ i} \\ z &= (a_{i0} + a_{j0})(a_{i3} + a_{j3})^2u_0 + (a_{i1} + a_{j1})(a_{i3} + a_{j3})u_1 \\ &\quad +(a_{i2} + a_{j2})u_2 + u_3. \end{aligned}$$

Aleshores,

$$\begin{aligned} yz &= a_{i0}(a_{i0} + a_{j0})(a_{i3} + a_{j3})^3u_0^2+ \\ &\quad +[a_{i0}(a_{i1} + a_{j1})(a_{i3} + a_{j3})^2 + a_{i1}(a_{i0} + a_{j0})(a_{i3} + a_{j3})^2]u_0u_1+ \\ &\quad +a_{i0}(a_{i2} + a_{j2})(a_{i3} + a_{j3})u_0u_2 + a_{i1}(a_{i1} + a_{j1})(a_{i3} + a_{j3})u_1^2+ \\ &\quad +a_{i0}(a_{i3} + a_{j3})u_0u_3 + a_{i1}(a_{i2} + a_{j2})u_1u_2 + a_{i1}u_1u_3. \end{aligned}$$

Com que $a_{i0}a_{j1} = a_{i1}a_{j0}$, el coeficient de u_0u_1 a yz és 0. Així doncs,

$$\begin{aligned} yz &= a_{i0}(a_{i0} + a_{j0})(a_{i3} + a_{j3})^3u_0^2 + (a_{i3} + a_{j3})(\alpha_{2ii} + \alpha_{2ij})+ \\ &\quad \alpha_{3ii} + \alpha_{3ij} + a_{i1}u_1u_3, \end{aligned}$$

i per tat $\mathbf{yz} = \boldsymbol{\alpha}$.

D'altra banda,

$$\begin{aligned} xz &= (a_{i0} + a_{j0})^2(a_{i3} + a_{j3})^3u_0^2 + (a_{i3} + a_{j3})(\alpha_{2ii} + \alpha_{2jj})+ \\ &\quad +\alpha_{3ii} + \alpha_{3jj} + (a_{i1} + a_{j1})u_1u_3, \end{aligned}$$

i per tant $\mathbf{xz} = 0$. Però tenim que $\deg_A b_1 = \deg_A c_1 = 1$ mentre que les parts de pes 2 de **xz** i **yz** no coincideixen. A més, $\mathbf{z} \in \mathrm{Ann}(\mathbf{x})$ mentre que $\mathbf{z} \notin \mathrm{Ann}(\mathbf{y})$.

Més endavant, trobem el següent,

> *" By considering the "smallest" (i,j) in $\mathscr{J}$, and the "smallest" (k,m) in $\mathscr{K}$ we see that, in order for $W_2(b_1y_1z_1) = W_2(c_1x_1z_1)$, $deg_A b_1$ and $deg_A c_1$ would have to be greater than 2 unless $(i,j) = (k,l)$."*

Aquí, W_2 denota la part de pes 2, i els conjunts $\mathscr{J}, \mathscr{K}$ representen conjunts d'índexs que apareixen als productes $b_1y_1z_1$ i $c_1x_1z_1$.

Això tampoc és cert. Prenem per exemple $i \neq j$, $k \geq 0$ i els elements següents:

$$\begin{aligned}
x &= a_{i0}u_0 + a_{i1}u_1, \text{ amb } b_1 = a_{i1}, \\
y &= a_{j0}u_0 + a_{j1}u_1 \text{ amb } c_1 = a_{j1} \text{ i} \\
z &= a_{k0}u_0 + a_{k1}u_1 + a_{k2}u_2 + a_{k3}u_3.
\end{aligned}$$

Aleshores, com que $a_{i1}a_{j0} = a_{i0}a_{j1}$, tindrem que

$$b_1(a_{j0}a_{k2}u_0u_2 + a_{j1}a_{k1}u_1^2) = c_1(a_{i0}a_{k2}u_0u_2 + a_{i1}a_{k1}u_1^2),$$

mentre que $(j,k) \neq (i,k)$ (en aquest cas els conjunts $\mathscr{J}, \mathscr{K}$ serien $\mathscr{J} = \{(i,k)\}$ i $\mathscr{K} = \{(j,k)\}$).

Al mateix paràgraf, trobem el següent,

> *" Note that the above two paragraphs imply that if there exist $\mathbf{z}, \mathbf{z}'$ for two equivalent $\mathbf{x}, \mathbf{x}'$ such that $\mathbf{xz} = \mathbf{x}'\mathbf{z}' = \boldsymbol{\alpha}$, then the lowest degree coefficient of the u_i's in x are the same as those in x'."*

Això tampoc és cert, donat que si prenem $i \neq j$, i els elements,

$$\begin{aligned}
x &= (a_{i0} + a_{j0})a_{i3}u_0 + (a_{i1} + a_{j1})u_1, \\
x' &= a_{i0}a_{i3}u_0 + a_{i1}u_1 \text{ i} \\
z &= a_{i0}a_{i3}^2u_0 + a_{i1}a_{i3}u_1 + a_{i2}u_2 + u_3,
\end{aligned}$$

llavors,

$$x'z = a_{i0}^2a_{i3}^3u_0^2 + a_{i3}\alpha_{2ii} + \alpha_{3ii} + a_{i1}u_1u_3,$$

i per tant $\mathbf{x}'\mathbf{z} = \boldsymbol{\alpha}$. A més,

$$xz = (a_{i0} + a_{j0})a_{i0}a_{i3}^3u_0^2 + a_{i3}(\alpha_{2ii} + \alpha_{2ij}) + \alpha_{3ii} + \alpha_{3ij} + (a_{i1} + a_{j1})u_1u_3,$$

i per tant $\mathbf{xz} = \boldsymbol{\alpha}$.

Però d'altra banda, com que $(a_{i0} + a_{j0})a_{i3}a_{i1} + (a_{i1} + a_{j1})a_{i0}a_{i3} = 0$, x i x' són equivalents, i clarament els coeficients de grau mínim de x i x' són diferents.

Aquests errors no sembla que es puguin solventar dins el context de la demostració de [36]. Per tant, a continuació donem una demostració d'aquest lema.

Demostració. [36, Lemma 5] Donat $\mathbf{z} \in \mathscr{S}_1$, denotem per

$$\mathscr{A}_{\mathbf{z}} = \{\mathbf{x} \text{ tals que } x = x_0 + x_1 + x_2, \text{ on } x_i \in R_i, \ \mathbf{x}_0 = 0 \text{ i } \mathbf{x}_1 \in \mathscr{C}(\mathbf{z})\}.$$

Usant aquesta notació veurem que com a molt existeixen 2 anul·ladors d'elements diferents a $\mathscr{A}_{\mathbf{y}_1}$.

Donat $\mathbf{y}_1 \in \mathscr{S}_1$, si no existeix cap $\mathbf{x}_1 \in \mathscr{C}(\mathbf{y}_1)$ i $\mathbf{z}$ tal que $\mathbf{x}_1\mathbf{z} = \boldsymbol{\alpha}$, és fàcil veure usant [36, Lemma 3] que

$$\mathrm{Ann}(\mathbf{x}) = \mathrm{Ann}(\mathbf{y_1})$$

per a tot $\mathbf{x} \in \mathscr{A}_{\mathbf{y}_1}$.

Per tant, podem suposar que existeix un $z \in R$, tal que $\mathbf{y}_1\mathbf{z} = \boldsymbol{\alpha}$. Així, com que $\boldsymbol{\alpha}$ és homogeni de grau 2 respecte del grau $\deg_U$, podem suposar que $\mathbf{z} \in \mathbf{R}_1$ i que els coeficients dels u_i's a z i y_1 són homogenis respecte de $\deg_A$.

Usant de nou [36, Lemma 3], se satisfà un dels casos següents:

<u>Cas 1</u> $y_1 = c_0u_0 + c_1u_1$, on $c_i \in R_0$ són no nuls, $z = d_0u_0 + d_1u_1 + d_2u_2 + d_3u_3$, on $d_i \in R_0$ i tenim que

$$\begin{gathered} c_0d_1 - d_0c_1 \in P, \\ c_0d_2u_0u_2 - d_1c_1u_1^2 \in P \quad \text{i} \\ c_0d_3u_0u_3 - c_1d_2u_1u_2 \in P. \end{gathered} \tag{5.2}$$

α

α

$\boldsymbol{\alpha}$

<u>Cas 2</u> $\boldsymbol{y_1 = d_0u_0 + d_1u_1 + d_2u_2 + d_3u_3}$, on $\boldsymbol{d_i \in R_0}$ són no nuls, $\boldsymbol{z = c_0u_0 + c_1u_1}$ i se satisfà (5.2).

Observem que al Cas 1, si $\deg_A(c_0) = 0$ o $\deg_A(c_1) = 0$, aleshores $\mathscr{C}(\mathbf{y}_1) = \mathbf{y}_1\mathbf{R}_0 \setminus \{0\}$ i si $\deg_A(d_0) = 0$ o $\deg_A(d_3) = 0$ llavors $\mathscr{C}(\mathbf{z}) = \mathbf{z}\mathbf{R}_0 \setminus \{0\}$. En el Cas 2, la situació és similar.

Si $\mathscr{C}(\mathbf{y}_1) = \mathbf{y}_1\mathbf{R}_0 \setminus \{0\}$ i $\mathbf{x} \in \mathscr{A}_{\mathbf{y}_1}$, llavors és fàcil de veure que

$$\operatorname{Ann}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathscr{A}_{\mathbf{z}}\mathbf{R} + \mathbf{R}_2 & \text{si } \mathbf{x} \in \mathscr{C}(\mathbf{y}_1)\mathbf{A} + \mathbf{R}_2, \\ \operatorname{Ann}(\mathbf{y}_1) & \text{en altre cas.} \end{cases} \tag{5.3}$$

Si $\mathscr{C}(\mathbf{z}) = \mathbf{z}\mathbf{R}_0 \setminus \{0\}$ i $\mathbf{x} \in \mathscr{A}_{\mathbf{y}_1}$, llavors és fàcil veure que

$$\operatorname{Ann}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathscr{A}_{\mathbf{z}}\mathbf{R} + \mathbf{R}_2 & \text{si } \mathbf{x}\mathbf{z} = 0, \\ \operatorname{Ann}(\mathbf{y}_1) & \text{si } \mathbf{x}\mathbf{z} = \boldsymbol{\alpha}. \end{cases} \tag{5.4}$$

Suposem que se satisfà el Cas 1. Podem suposar que $\deg_A(c_0), \deg_A(c_1) \geq 1$. Per tal de provar el que intentem veure, és suficient veure que o bé $\deg_A(d_0) = 0$ o bé $\deg_A(d_3) = 0$. Així, com que $\mathbf{y}_1\mathbf{z} = \boldsymbol{\alpha}$, tindrem que o bé $\deg_A(c_0d_2) = \deg_A(c_1d_1) = 2$ o $\deg_A(c_0d_3) = \deg_A(c_1d_2) = 2$. Per tant $\deg_A(c_0), \deg_A(c_1) \leq 2$. Si $\deg_A(c_0c_1) < 2$ aleshores $\deg_A(c_0) = 0$ o $\deg_A(c_1) = 0$ i per tant es satisfà (5.3). Si no, considerem el dos casos següents, $\deg_A(c_1d_1) > 2$ i $\deg_A(c_1d_1) = 2$.

Cas A: $\deg_A(c_1d_1) > 2$.

En aquest cas, tenim que $\deg_A(c_0d_3) = \deg_A(c_1d_2) = 2$. Si $\deg_A(c_1) = 2$ aleshores $\deg_A(d_2) = 0$. Com que $\mathbf{y}_1\mathbf{z} = \boldsymbol{\alpha}$, $\deg_A(c_0) = \deg_A(c_0d_2) = \deg_A(c_1d_1) > 2$, una contradicció. Per tant $\deg_A(c_1) = 1$. Així, tenim que $\deg_A(d_2) = 1$ i $\deg_A(c_0) = 2$. Com que $\deg_A(c_0d_3) = 2$, tindrem que $\deg_A(d_3) = 0$ i es satisfà (5.4).

Cas B: $\deg_A(c_1d_1) = 2$.

En aquest cas, $\deg_A(c_0d_2) = 2$. Suposem que $\deg_A(c_1) = 1$. Llavors $\deg_A(d_1) = 1$. Així, com que $c_0d_3u_0u_3 + c_1d_2u_1u_2 \in P$, tindrem que $\deg_A(d_2) \geq 1$. Com que $\deg_A(c_0d_2) = 2$, llavors $\deg_A(c_0) = \deg_A(d_2) = 1$. Per tant, com que $\deg_A(c_0d_3) = \deg_A(c_1d_2) = 2$ i $c_0d_1 = c_1d_0$, veiem que $\deg_A(d_0) = \deg_A(d_3) = 1$.

Donat que $\mathbf{y}_1\mathbf{z} = \boldsymbol{\alpha}$, és fàcil veure que

$$c_0 = \sum_{i \in I_0} a_{i0}, \quad c_1 = \sum_{j \in I_1} a_{j1}, \text{ i } d_s = \sum_{k \in J_s} a_{ks} \text{ per a } s{=}0,1,2,3\ ,$$

on I_0, I_1 i J_s per a $s = 0, 1, 2, 3$ són conjunts finits.

Com que $c_0 d_2 u_0 u_2 + c_1 d_1 u_1^2 \in P$ tenim un dels casos següents:

(i) Si $(i, j) \in I_0 \times J_2$ aleshores, o bé $(i, j) \in I_1 \times J_1$ o bé $(j, i) \in I_1 \times J_1$.

(ii) Si $(i, j) \in I_1 \times J_1$ aleshores o bé $(i, j) \in I_0 \times J_2$ o bé $(j, i) \in I_0 \times J_2$.

En particular, $I_0 \cap J_2 = I_1 \cap J_1$.

Donat que $c_0 d_3 u_0 u_3 + c_1 d_1 u_1 u_2 \in P$ tenim:

(iii) Si $(i, j) \in I_0 \times J_3$ aleshores $(i, j) \in I_1 \times J_2$ o $(j, i) \in I_1 \times J_2$.

(iv) Si $(i, j) \in I_1 \times J_2$ aleshores $(i, j) \in I_0 \times J_3$ o $(j, i) \in I_0 \times J_3$.

En particular $I_0 \cap J_3 = I_1 \cap J_2$.

Suposem que $I_0 \neq I_1$.

Suposem també que existeix $i_0 \in I_0 \setminus I_1$. Aleshores per (i), $(j, i_0) \in I_1 \times J_1$ per a tot $j \in J_2$. Per tant $J_2 \subseteq I_1$. Si $I_0 \supseteq I_1$, llavors $I_0 \cap J_2 = J_2 = I_1 \cap J_2$ i en aquest cas,

$$\mathbf{y}_1 \mathbf{z} = \mid I_0 \cap J_2 \mid \boldsymbol{\alpha} + \mid I_1 \cap J_2 \mid \boldsymbol{\alpha} = 2 \mid J_2 \mid \boldsymbol{\alpha} = 0,$$

una contradicció, aleshores $I_1 \not\subseteq I_0$. Sigui $i_1 \in I_1 \setminus I_0$. Per (iv), $(j, i_1) \in I_0 \times J_3$ per a tot $j \in J_2$. Així $J_2 \subseteq I_0$ i, com al cas anterior, obtenim una contradicció. Així, tenim que $I_0 \subseteq I_1$.

Sigui $i_1 \in I_1 \setminus I_0$. Per (iv), $(j, i_1) \in I_0 \times J_3$ per a tot $j \in J_2$. Així $J_2 \subseteq I_0$ i, com que $I_0 \subseteq I_1$, tenim que

$$\mathbf{y}_1 \mathbf{z} = \mid I_0 \cap J_2 \mid \boldsymbol{\alpha} + \mid I_1 \cap J_2 \mid \boldsymbol{\alpha} = 2 \mid J_2 \mid \boldsymbol{\alpha} = 0,$$

una contradicció, i, per tant $I_0 = I_1$.

Ara, tenim que,

$$\mathbf{y}_1 \mathbf{z} = \mid I_0 \cap J_2 \mid \boldsymbol{\alpha} + \mid I_1 \cap J_2 \mid \boldsymbol{\alpha} = 2 \mid I_0 \cap J_2 \mid \boldsymbol{\alpha} = 0,$$

una contradicció. Així doncs $\deg_A(c_1) = 2$.

Però com que $\deg_A(c_1) = 2$, $\deg_A(d_1) = 0$ i així $d_1 = 1$. Com que $c_0 d_1 = c_1 d_0$, veiem que $\deg_A(c_0) = 2$ i per tant $d_0 = 1$, d'on tenim que $\deg_A(d_0) = 0$ i se satisfà (5.4) tal com volíem demostrar.

El Cas 2 es prova per simetria.

$\square$

Bibliografia

[1] R. Antoine, *On rigid monoids with right* acc_1, Communications in Algebra **26** (1998), no. 2, 507–513.

[2] R. Antoine and F. Cedó, *Polynomial rings over Goldie rings*, Journal of Algebra **237** (2001), no. 1, 262–272.

[3] K. Asano, *Arithmetische idealtheorie in nichtkommutativen ringen*, Japenese Journal of Mathematics **16** (1939), 1–36.

[4] G.M. Bergman, *Modules over coproducts of rings*, Transactions of the American Mathematical Society **200** (1974), 1–32.

[5] G.M. Bergman and W. Dicks, *Universal derivations and universal ring constructions*, Pacific Journal of Mathematics **79** (1978), no. 2, 293–337.

[6] W. Burnside, *On an unsettled question in the theory of discontinuous groups*, Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics **33** (1902), 230–238.

[7] V. Camillo and R. Guralnick, *Polynomial rings over Goldie rings are often Goldie*, Proceedings of the American Mathematical Society **98** (1986), no. 4, 567–568.

[8] F. Cedó and D. Herbera, *The maximum condition on annihilators for polynomial rings*, Proceedings of the American Mathematical Society **126** (1998), 2541–2548.

[9] F. Cedó, *On semifir monoid rings*, Publicacions Matemàtiques **33** (1989), no. 1, 123–132.

[10] F. Cedó and A. Pitarch, *On rigid monoids and 2-fir monoid rings*, Communications in Algebra **20** (1992), no. 8, 2295–2303.

[11] ______, *Construction of left fir monoid rings*, Journal of Algebra **165** (1994), no. 3, 645–660.

[12] P.M. Cohn, *On a generalization of the euclidean algorithm*, Proceedings of the Cambridge Philosophical Society **57** (1961), 18–30.

[13] ______, *On the free product of associative rings III*, Journal of Algebra **8** (1968), 376–383.

[14] ______, *Progress in free associative algebras*, Israel Journal of Mathematics **19** (1974), 109–151.

[15] ______, *Universal Algebra*, second ed., Mathematics and its Applications, vol. 6, Reidel Publishing Company, Dordrecht-Boston, 1981.

[16] ______, *Free rings and their relations*, second ed., London Mathematical Society Monographs, vol. 19, Academic Press, London, 1985.

[17] ______, *Skew fields. Theory of general division rings*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 57, Cambridge University Press, 1995.

[18] ______, *Monoids with one-sided chain conditions*, unpublished, 1997.

[19] P.M. Cohn and W. Dicks, *Localization in semifirs II*, Journal of the London Mathematical Society (2) **13** (1976), no. 3, 411–418.

[20] W. Dicks and P. Menal, *The group rings that are semifirs*, Journal of The London Mathematical Society(2) **19** (1979), no. 2, 288–290.

[21] R. Doss, *Sur l'immersion d'un semi-groupe dans un groupe*, Bulletin des Sciences Mathématiques **72** (1948), 139–150.

[22] M.L. Dubreil-Jacotin, *Sur l'immersion d'un semmigroupe dans un groupe*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Paris **225** (1947), 787–788.

[23] C. Faith, *Polynomial rings over Goldie-Kerr commutative rings*, Proceedings of the American Mathematical Society **120** (1994), no. 4, 989–993.

[24] ______, *Polynomial rings over Goldie-Kerr commutative rings II*, Proceedings of the American Mathematical Society **124** (1996), no. 2, 341–344.

[25] J.W. Fisher, *Nil subrings with bounded indices of nilpotency*, Journal of Algebra **19** (1971), 509–516.

[26] V.N. Gerasimov, *Inverting homomorphisms of rings*, Algebra i Logika **18** (1979), no. 6, 648–663.

[27] ______, *Localizations in associative rings*, Sibirsk. Mat. Zh. **23** (1982), no. 6, 36–54.

[28] A.W. Goldie, *The structure of prime rings under ascending chain conditions*, Proceedings of the London Mathematical Society (3) **8** (1958), 589–608.

[29] ______, *The structure of prime rings with maximum condition*, Proceedings of the Natural Academy of Sciences USA **44** (1958), 584–586.

[30] ______, *Semi-prime rings with maximum condition*, Proceedings of the London Mathematical Society (3) **10** (1960), 201–220.

[31] P.A. Grillet, *Semigroups. An introduction to the structure theory*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, Marcel Dekker, New York, 1995.

[32] J. Hannah, *Quotient rings of semiprime rings with bounded index*, Glasgow Mathematical Journal **23** (1982), no. 1, 53–64.

[33] J.W. Kerr, *An example of a Goldie ring whose matrix ring is not Goldie*, Journal of Algebra **61** (1979), no. 2, 590–592.

[34] ———, *Some examples of Goldie rings*, Ph.D. thesis, University of California in San Diego, 1979.

[35] ———, *Very long chains of annihilator ideals*, Israel Journal of Mathematics **46** (1983), no. 3, 197–204.

[36] ———, *The polynomial ring over a Goldie ring need not be a Goldie ring*, Journal of Algebra **134** (1990), no. 2, 344–352.

[37] O. Kharlampovich, *The word problem for the Burnside varieties*, Journal of Algebra **173** (1995), no. 3, 613–621.

[38] I.B. Kozhukhov, *Semigroup rings of free left ideals*, Algebra i Logika **21** (1982), no. 1, 37–59.

[39] L. Lesieur and R. Croisot, *Structure des anneaux premiers noethériens à gauche*, Comptes Rendus de l'Académie de Sciences Paris **248** (1959), 2545–2547.

[40] ———, *Sur les anneaux premiers noethériens à gauche*, Ann. Sci. École Norm. Sup. Paris (3) **76** (1959), 161–183.

[41] J. Lewin, *Free modules over free algebras and free group algebras: The Schreier technique*, Transactions of the American Mathematical Society **145** (1969), 455–465.

[42] P. Malcolmson, *A prime matrix ideal yields a skew field*, Journal of the London Mathematical Society (2) **18** (1978), no. 2, 221–233.

[43] A.I. Mal'tsev, *On the immersion of an algebraic ring into a field*, Mathematische Annalen **113** (1937), 686–691.

[44] ———, *On the inclusion of associative systems in groups*, Mat. Sb. **6** (1939), 331–336.

[45] P. Menal, *The monoid rings that are Bezout domains*, Archiv der Mathematik (1981), no. 1, 43–47.

[46] O. Ore, *Linear equations in non-commutative fields.*, Annals of Math **32** (1931), 463–477.

[47] A. Pitarch, *Monoid rings that are firs*, Publicacions Matemàtiques **34** (1990), no. 1, 217–221.

[48] ______, *Anells de monoide semifir*, Ph.D. thesis, Universitat Auònoma de Barcelona, 1993.

[49] M. Roitman, *On polynomial extensions of Mori domains over countable fi-elds*, Journal of Pure and Applied Algebra **64** (1990), no. 3, 315–328.

[50] J.C. Shepherdson, *Inverses and zero divisors in matrix rings*, Proceedings of the London Mathematical Society (3) **1** (1951), 71–85.

[51] R.C. Shock, *Polynomial rings over finite dimensional rings*, Pacific Journal of Mathematics **42** (1972), 251–257.

[52] L.A. Skornyakov, *On Cohn rings*, Algebra i Logika **4** (1965), no. 3, 5–30.

[53] L.W. Small, *Orders in artinian rings*, Journal of Algebra **4** (1966), 13–41.

[54] R.M. Wong, *Free ideal monoid rings*, Journal of Algebra **53** (1978), no. 1, 21–35.