SINGULAR INTEGRALS AND RECTIFIABILITY

DANIEL GIRELA SARRIÓN

Los problemas estudiados en esta tesis pertenecen al área del Análisis Geométrico. Concretamente, hemos analizado relaciones entre integrales singulares con respecto a medidas de Borel generales en el espacio euclídeo, y propiedades métricas o geométricas de tales medidas.

En una serie de tres artículos, Mateu, Orobitg, Pérez y Verdera probaron que para ciertos operadores de Calderón-Zygmund T, la clásica desigualdad de Cotlar

$$T_* f \lesssim M(Tf) + Mf$$

podía mejorarse, de modo que la integral singular maximal $T_* f$ estuviese sólo controlada por la integral singular Tf. Nosotros demostramos que, en general, esto no es posible si consideramos la transformada de Cauchy a lo largo de un grafo Lipschitz Γ, y aportamos un resultado positivo cuando Γ es una curva de Jordan suficientemente regular.

Tolsa probó que la acotación en $L^2(\mu)$ de la transformada de Cauchy con respecto a una medida de Radon μ en $\mathbb{C}$ es una condición suficiente para la acotación en $L^2(\mu)$ de todas las integrales singulares 1-dimensionales de convolución impares y suficientemente regulares con respecto de μ. Usando una nueva Descomposición de la Corona introducida por Azzam y Tolsa, hemos probado el siguiente resultado:

Teorema. *Sea μ una medida de Radon finita en $\mathbb{R}^d$ con crecimiento polinomial de grado n y tal que, para todas las bolas $B \subset \mathbb{R}^d$ con radio $r(B)$,*

$$\int_B \int_0^{r(B)} \beta^n_{\mu,2}(x,r)^2 \theta^n_\mu(x,r) \frac{dr}{r} d\mu(x) \lesssim \mu(B).$$

Entonces, todas las integrales singulares T_μ con núcleos en $\mathcal{K}^n(\mathbb{R}^d)$ son acotadas en $L^2(\mu)$.

Este resultado tiene aplicaciones interesantes en relación con la capacidad Lipschitz armónica en el caso $n = d - 1$.

Nazarov, Tolsa y Volberg resolvieron afirmativamente la conjetura de David y Semmes en el caso de codimensión 1, esto es, probaron que dada una medida n-AD-regular en $\mathbb{R}^{n+1}$, la acotación en $L^2(\mu)$ de la transformada de Riesz n-dimensional implica la n-rectificabilidad uniforme de μ. Usando técnicas desarrolladas en su trabajo y en otros que están estrechamente relacionados con él, obtenemos el siguiente resultado cuantitativo.

Teorema. *Sean μ una medida de Radon en $\mathbb{R}^{n+1}$ y $B \subset \mathbb{R}^{n+1}$ una bola tales que:*

(a) *Para alguna constante $C_0 > 0$, $C_0^{-1} r(B)^n \leq \mu(B) \leq C_0\, r(B)^n$.*
(b) *$P_\mu(B) \leq C_0$, y $\mu(B(x,r)) \leq C_0\, r^n$ para todos $x \in B$ y $0 < r \leq r(B)$.*
(c) *Existe un n-plano L que pasa por el centro de B tal que para algún $0 < \delta \ll 1$, $\beta^L_{\mu,1}(B) \leq \delta$.*
(d) *$\mathcal{R}_{\mu\lfloor_B}$ es acotada en $L^2(\mu\lfloor_B)$ con $\|\mathcal{R}_{\mu\lfloor_B}\|_{L^2(\mu\lfloor_B)\to L^2(\mu\lfloor_B)} \leq C_1$.*
(e) *Para alguna constante $0 < \epsilon \ll 1$,*

$$\int_B |\mathcal{R}\mu(x) - m_{\mu,B}(\mathcal{R}\mu)|^2 \, d\mu(x) \leq \epsilon\, \mu(B).$$

Entonces existe una constante $\tau > 0$ tal que si δ, ϵ son suficientemente pequeños (dependiendo de C_0 y C_1), existe un conjunto uniformemente n-rectificable $\Gamma \subset \mathbb{R}^{n+1}$ tal que

$$\mu(B \cap \Gamma) \geq \tau\, \mu(B).$$

Además, la constante τ y las constantes de rectificabilidad uniforme de Γ dependen del resto de constantes de más arriba.

Este resultado ha sido una herramienta esencial para la resolución de una cuestión sobre medida armónica que aparecerá en un trabajo de Azzam, Mourgoglou y Tolsa.

SINGULAR INTEGRALS AND RECTIFIABILITY

DANIEL GIRELA SARRIÓN

The problems addressed in this dissertation belong to the area of Geometric Analysis. Precisely, we have analyzed relationships between singular integral operators with respect to general Borel measures in the Euclidean space, and metric or geometric properties of those measures.

In a series of three papers, Mateu, Orobitg, Pérez and Verdera showed that for certain Calderón-Zygmund operators T like the Hilbert transform, the classical Cotlar's inequality

$$T_* f \lesssim M(Tf) + Mf$$

could be improved in such a way that the maximal singular integral $T_* f$ would be controlled only by the singular integral Tf. We prove that, in general, this is not possible when one considers the Cauchy transform along a Lipschitz graph Γ, and we give a positive result when Γ is a sufficiently smooth Jordan curve.

Tolsa proved that the $L^2(\mu)$-boundedness of the Cauchy transform with respect to a Radon measure μ in $\mathbb{C}$ is a sufficient condition for the $L^2(\mu)$-boundedness of all odd and sufficiently smooth 1-dimensional convolution-type singular integral operators with respect to μ. Using a new Corona Decomposition introduced by Azzam and Tolsa, we have proved the following result:

Theorem. *Let μ be a finite Radon measure in $\mathbb{R}^d$ with polynomial growth of degree n and such that, for all balls $B \subset \mathbb{R}^d$ with radius $r(B)$,*

$$\int_B \int_0^{r(B)} \beta^n_{\mu,2}(x,r)^2 \theta^n_\mu(x,r) \frac{dr}{r} d\mu(x) \lesssim \mu(B).$$

Then, all singular integral operators T_μ with kernels in $\mathcal{K}^n(\mathbb{R}^d)$ are bounded in $L^2(\mu)$.

This result has interesting applications with regards to Lipschitz harmonic capacity in the case $n = d-1$.

Nazarov, Tolsa and Volberg solved David-Semmes conjecture affirmatively in the codimension 1 case, that is, they proved that given an n-AD-regular measure in $\mathbb{R}^{n+1}$, the $L^2(\mu)$-boundedness of the n-dimensional Riesz transform implies the uniform n-rectifiability of μ. Using techniques developed in that work and in some others that are closely related, we obtain the following quantitative result.

Theorem. *Let μ be a Radon measure on $\mathbb{R}^{n+1}$ and $B \subset \mathbb{R}^{n+1}$ a ball so that the following conditions hold:*

(a) *For some constant $C_0 > 0$, $C_0^{-1} r(B)^n \leq \mu(B) \leq C_0\, r(B)^n$.*
(b) *$P_\mu(B) \leq C_0$, and $\mu(B(x,r)) \leq C_0\, r^n$ for all $x \in B$ and $0 < r \leq r(B)$.*
(c) *There is some n-plane L passing through the centre of B such that for some $0 < \delta \ll 1$, $\beta^L_{\mu,1}(B) \leq \delta$.*
(d) *$\mathcal{R}_{\mu\lfloor_B}$ is bounded in $L^2(\mu\lfloor_B)$ with $\|\mathcal{R}_{\mu\lfloor_B}\|_{L^2(\mu\lfloor_B)\to L^2(\mu\lfloor_B)} \leq C_1$.*
(e) *For some constant $0 < \epsilon \ll 1$,*

$$\int_B |\mathcal{R}\mu(x) - m_{\mu,B}(\mathcal{R}\mu)|^2 \, d\mu(x) \leq \epsilon\, \mu(B).$$

Then there exists some constant $\tau > 0$ such that if δ, ϵ are small enough (depending on C_0 and C_1), then there is a uniformly n-rectifiable set $\Gamma \subset \mathbb{R}^{n+1}$ such that

$$\mu(B \cap \Gamma) \geq \tau\, \mu(B).$$

Furthermore, the constant τ and the uniform rectifiability constants of Γ depend on all the constants above.

This result has turned out to be an essential tool for the solution of an old question on harmonic measure that will appear in a work by Azzam, Mourgoglou and Tolsa.