UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA

Departament de Didàctica de les Matemàtiques i de les Ciències Experimentals

TESIS DOCTORAL

LA DERIVADA COMO OBJETO MATEMÁTICO Y COMO OBJETO DE ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE EN PROFESORES DE MATEMÁTICA DE COLOMBIA

"La derivada un concepto a caballo entre la Matemática y la Física"

Edelmira Rosa Badillo Jiménez

Bellaterra, Mayo 2003

UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA

Departament de Didàctica de les Matemàtiques i de les Ciències Experimentals

LA DERIVADA COMO OBJETO MATEMÁTICO Y COMO OBJETO DE ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE EN PROFESORES DE MATEMÁTICA DE COLOMBIA

"La derivada un concepto a caballo entre la Matemática y la Física"

Este estudio se ha realizado en el marco del Programa de Doctorado de Didáctica de las Ciencias y de las Matemáticas del Departamento de Didáctica de las Matemáticas y de las Ciencias Experimentales de la Universidad Autónoma de Barcelona, por Edelmira Rosa Badillo Jiménez, bajo la dirección de la **Dra. Carmen Azcárate Giménez**.

Bellaterra, Mayo de 2003

Carmen Azcárate Jiménez　　　　　Edelmira Rosa Badillo Jiménez

"A vegades, quan creiem que tot
s'acaba i que la immensitat és
inevitable, apareix una llum que ens
indica senders inimaginables davant
el pensament humà... que
transformen les nostres vides i ens fan
assumir un projecte radicalment
diferent allò terrenalment planificat,
però joiosament coherent allò
espiritualment anhelat."

Ede i Xavi

A Xavi pel seu suport, la seva comprensió,
el seu sacrifici i el seu amor
en aquesta etapa transcendental de les nostres vides.

AGRADECIMIENTOS

Siempre he considerado que son muy pocos los espacios que nos ofrece la vida para decir gracias a las personas que, de una forma u otra, han contribuido a la consecución de logros personales. De igual forma creo que no sólo la persona que recibe las gracias goza, porque ve reconocido en el otro sus sacrificios y muestras de solidaridad, sino que quien da las gracias siente un gran regocijo por hacer públicos y transparentes sentimientos que han engrandecido y multiplicado sus esfuerzos por alcanzar una meta, algunas veces tortuosa, tanto por el compromiso social y personal como por la retribución de hacer felices a quienes han demostrado estimarle. Por esto, no quiero dejar pasar por alto esta oportunidad única de manifestar mi gratitud a tantas y tantas personas que en todo este tiempo de grandes retos, de cambios substanciales, de sacrificios, de alegrías y tristezas equiparables, han hecho posible que hoy se cumpla un objetivo importante en mi vida profesional y personal.

Inicio con la persona que no sólo ha aportado y dirigido mi crecimiento académico y profesional, sino que en todo este tiempo se convirtió en un gran referente para la toma de decisiones que involucraban lo académico y lo personal. Gracias, Carmen Azcárate Giménez, porque sin duda alguna tus orientaciones y tu respaldo humano han sido fundamentales para asumir este proyecto y sacarlo adelante cuando más oscuro veía el horizonte. Tu ayuda es realmente de un valor inconmensurable porque ha sido determinante en todas y cada una de las etapas que he asumido a lo largo de estos seis años de formación en la vida y para la vida.

Podría seguir enunciando nombres pero la lista sería interminable; sin embargo, genéricamente me gustaría agradecer a todos mis compañeros y amigos del Programa de Doctorado en Didáctica de la Matemática y de las Ciencias Experimentales, que en el transcurso de estos años de estudios se han convertido en esa familia que te apoya, te respalda, te critica y te hace crecer. Al igual que a los profesores del Departamento, que desde el seno de cada una de las asignaturas y en las múltiples conversaciones de despacho o de pasillo han contribuido a la aclaración de dudas y al fortalecimiento de ideas en diversas áreas del conocimiento.

A los compañeros del Seminario de Pensamiento Matemático Avanzado, por su acogida, por involucrarme en sus problemas de investigación que ayudaron a la búsqueda inicial del mío, por sus críticas y orientaciones que sin duda alguna me permitieron estructurar y ordenar muchas de las ideas que están hoy aquí plasmadas.

A los profesores que participaron en este estudio, por soportarme las múltiples exigencias que pudieron hacer posible la realización de esta investigación.

A cada uno de los miembros de la Familia Salesiana, que no sólo han sido los responsables de mi adaptación en este país tan precioso y culturalmente rico como lo es Cataluña, sino que han ayudado a consolidar sueños inalcanzables, como es lograr que mi familia siguiera de cerca y me ayudara en la fase final de este proceso de crecimiento personal. Aprovecho para agradecer a mi madre y a mis hermanos por su apoyo, sacrificio y tolerancia en esta última fase tensa que he tenido que compaginar con múltiples presiones, pero que hoy vemos con satisfacción ante el deber cumplido.

A mis amigos catalanes, que durante este tiempo de toma de decisiones radicales, han estado a la altura para apoyarme en los proyectos emprendidos para establecerme en este país. Y esto incluye a mis profesores y compañeros del Magisterio, que en este intercambio, me han ayudado y apoyado a crecer culturalmente en un mundo fascinante como lo es la Educación Primaria.

A Xavi y su familia por acogerme como un miembro más, por ayudarme a llevar las cargas del día a día y a ver con optimismo los retos del futuro.

Finalmente, a los miembros del Tribunal, por todas las críticas y aportaciones que he recibido en esta etapa de formación, y por el sacrificio de leer este “mamotreto” que contiene las reflexiones de, ante todo, una profesora preocupada por el aprendizaje y enseñanza de la matemática en un país que adolece de contribuciones que nos ayuden a crecer en todos los ámbitos.

A TODOS, ¡GRACIAS!

INDICE

Páginas

INTRODUCCIÓN

El objetivo de esta investigación ha sido identificar y describir la relación e integración entre el conocimiento del contenido matemático y el conocimiento didáctico del contenido con relación al concepto de derivada de profesores de matemática en ejercicio. En efecto, nos interesa describir la naturaleza y estructura de las formas de conocer el concepto de derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje, en el nivel de bachillerato del sistema educativo colombiano, así como las formas como los profesores interpretan y justifican las situaciones concretas de enseñanza en las que deben actuar, como un punto de partida para entender la práctica profesional del profesor y la generación del conocimiento profesional que nos permita incidir en la formación permanente e inicial del profesorado.

En nuestro propósito hemos adaptado las categorías teóricas y analíticas que proporciona el marco de la Teoría APOE para el estudio de las componentes del conocimiento profesional del profesor de matemática, llegando a la construcción de la descomposición genética del concepto de derivada y a la definición de los niveles de comprensión del esquema de la derivada en las dos dimensiones definidas: gráfica y analítica, las cuales se revisan a partir de los aportes de los resultados obtenidos. Igualmente, partiendo de la necesidad de estructurar y describir la naturaleza situada del conocimiento profesional del profesor y las formas de usarlo en la estructuración de la agenda de enseñanza, nos hemos centrado en la caracterización de las tareas que propone el profesor para introducir y evaluar dicho concepto.

En este trabajo de investigación, subyace la hipótesis de que el estudio sobre el conocimiento profesional del profesor en su naturaleza situada (conocimiento práctico, conocimiento didáctico del contenido, etc.) constituye un amplio y fundamentado cuerpo de conocimiento que permite incidir en la formación permanente e inicial del profesorado (Llinares, 1996, 1998, 2000; Badillo y Azcárate, 2002; Marcelo, 2002).

Consideramos, que el ciclo de investigación que propone la teoría APOE, nos permite perfilar un itinerario didáctico para la formación permanente del profesorado que genere dos niveles de investigación: (1) centrada en los procesos de formación del profesorado: es decir que los cursos de formación de profesores se conviertan para los formadores de profesores en espacio de investigación y reflexión que ayuden a mejorar los programas de formación permanente e inicial del profesorado de matemática; y (2), centrada en la reflexión en la práctica y sobre la práctica de los profesores de secundaria y bachillerato. Es decir, se busca que los profesores que participen en los cursos de formación permanente entiendan su práctica como una oportunidad para desarrollar e implementar investigación en el aula, o lo que es lo mismo, que asuman su práctica como un profesional reflexivo que contribuye al desarrollo de competencias para un mejor desempeño en la coyuntura y para una mejor participación en la reinvención de la escuela y de los sistemas educativos (Schön, 1983, 1992; Marcelo, 2002).

Consideramos que el ciclo de investigación de la Teoría APOE permite el diseño de programas de formación permanente del profesorado que contemplen los aspectos anteriormente descritos. Esto implica introducir al profesor de matemática en una reflexión didáctica y epistemológica de los conceptos matemáticos a enseñar que parta de la elaboración e implementación de unidades didácticas de los conceptos matemáticos, estructuradas a partir de la construcción y reflexión de la descomposición genética de dicho concepto matemático. Por tanto, esta propuesta implica considerar al constructo descomposición genética como un elemento central de los programas de formación. En efecto, consideramos que la elaboración de la descomposición genética de un concepto matemático introduce al profesor en una reflexión epistemológica y didáctica del concepto que le permite: (1) cuestionar y mejorar la comprensión que tiene del concepto matemático en cuestión; (2) usar y organizar dicho conocimiento en la estructuración de la enseñanza del mismo (diseño de tareas, etc.); y (3), orientar el aprendizaje de los alumnos hacia los procesos de construcción y reconstrucción de los conceptos matemáticos que espera que sus estudiantes desarrollen (Badillo y Azcárate, 2002).

Lo anterior implica que en la elaboración de la descomposición genética de un concepto matemático se conjuguen dos niveles de reflexión. Un nivel de reflexión, de primer orden, donde el saber de referencia es la matemática, y el objetivo es la reconstrucción del objeto matemático en cuestión atendiendo a la complejidad de los aspectos sintácticos y semánticos que lo constituyen. Y un nivel de reflexión, de segundo orden, donde el saber de referencia es la Didáctica de la Matemática; pero a su vez, apoyándose en la epistemología e historia de la matemática como ejes centrales en la estructuración y definición del concepto matemático como objeto de enseñanza y aprendizaje. Por tanto, además del dominio del concepto en cuestión, se requiere de un posicionamiento sobre las teorías de enseñanza y aprendizaje que le permita al profesor diseñar el itinerario didáctico que ayude a los estudiantes en la construcción y reconstrucción del concepto matemático.

Un programa de formación permanente del profesorado que tenga en cuenta los organizadores del currículo (Rico, 1997; Gómez, 2001) y la descomposición genética de un concepto matemático, como referentes teóricos y analíticos para la elaboración de unidades didácticas de conceptos específicos, ayudaría a estructurar el conocimiento práctico del profesor atendiendo a su naturaleza situada (Llinares, 1996; 1998; 2000). Concretamente, le proporcionaría la base disciplinar adecuada que permita un tratamiento objetivo del conocimiento matemático y del conocimiento didáctico sobre cada uno de los contenidos del currículo.

La presente memoria se encuentra estructurada en seis capítulos. En cada uno de los capítulos se hace una introducción en la que presentamos el contenido y resaltamos los aspectos más significativos que se desarrollarán. Por esta razón nos centraremos en dar una visión global no detallada de cada uno de ellos, presentando sólo aspectos más generales del contenido. Las distintas partes que componen este trabajo son:

- Capítulo 1. Sobre el problema de la investigación: brinda una panorámica general de los orígenes de este estudio y de los antecedentes que nos permitieron centrar el problema y formular los objetivos concretos de esta investigación.
- Capítulo 2. Acerca del marco teórico: se recogen los referentes teóricos que proporcionan el marco conceptual de la investigación. Se encuentra subdividido en dos secciones que contemplan los temas relevantes de este estudio, tales como: Conocimiento Profesional del profesor y la descripción global de la Teoría APOE.
- Capítulo 3. Metodología de la investigación: se plantea el diseño de la investigación, los instrumentos diseñados para la recogida de la información y una

descripción detallada de las diferentes fases del análisis que implementamos en el estudio del conocimiento profesional de los profesores.

- Capítulo 4. Resultados del análisis *macro*: restricciones institucionales. Se definen los tres tipos de restricciones institucionales que consideramos en este estudio: el conocimiento disciplinar en sí, el diseño curricular de base y la formación docente. Estas restricciones fueron motivo de un estudio particular con el propósito de caracterizar el concepto de derivada como objeto de enseñanza y aprendizaje en las instituciones que, de una forma u otra, condicionan la práctica del profesor de matemática en el contexto del sistema educativo colombiano.
- Capítulo 5. Resultados del análisis *micro:* conocimiento profesional del profesor. Recoge el análisis de las componentes del conocimiento profesional del profesor que hemos considerado en este estudio, como son: el conocimiento del contenido (disciplinar) y el conocimiento didáctico del contenido.
- Capítulo 6. Conclusiones e implicaciones didácticas: se plantean las conclusiones del estudio, partiendo de la integración de los análisis *macro* y *micro*, y se sugieren algunos lineamientos para la formación permanente del profesorado, basados en el ciclo de investigación que propone la Teoría APOE y los organizadores del currículo.
- Anexos: contienen el protocolo de las entrevistas, las transcripciones de las mismas, el análisis detallado de la versión de la paradoja de Zenón, las tablas resúmenes que nos sirvieron para la construcción de las redes sistémicas y de las líneas de coherencias, las evaluaciones realizadas por los profesores, la trascripción de las unidades didácticas diseñadas por los profesores y, finalmente, el análisis de los tres casos de los profesores A, C y D, que por motivo de extensión optamos por no presentar dentro de esta memoria.

CAPÍTULO 1. SOBRE EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.0. A manera de introducción

Este capítulo se encuentra estructurado en tres secciones. En la primera sección hemos querido exponer los rasgos más importantes de un estudio previo que nos permitió ir construyendo el problema de investigación que estamos abordando. La sección dos está dedicada a la formulación de los objetivos de la investigación y, finalmente en la tercera sección, hacemos un breve recuento de los antecedentes que justifican, tanto el marco teórico elegido como la metodología de análisis aplicada para explicar los hechos detectados y fundamentar los resultados obtenidos.

1.1. Un primer acercamiento a la problemática de investigación: *la tesina de maestría*

Este estudio se inicia sobre la base de los resultados encontrados en una investigación previa (Badillo, 1999) que realizamos en el marco de la maestría en Didáctica de la Matemática y de las Ciencias Experimentales de la Universitat Autònoma de Barcelona. Un primer acercamiento al problema de investigación nos permitió confirmar algunas intuiciones iniciales, dada mi experiencia como docente de matemática y física en los niveles de bachillerato y universitario en Barranquilla (Colombia), que hacen referencia a las dificultades que tienen los profesores de matemática en ejercicio para organizar y justificar la enseñanza del concepto de derivada en el nivel de bachillerato, teniendo en cuenta las características concretas de nuestro contexto.

Hasta la fecha en que recogimos la primera información (1998), en la Costa Norte Colombiana las Facultades de Educación eran las encargadas de formar a los futuros profesores de las diferentes áreas del conocimiento. Existían dentro de ésta las especialidades de Matemática y Física, Biología y Química, Ciencias Sociales y

Lenguas Modernas, entre otras. Es decir que el profesional que labora como profesor de matemática ha recibido una formación tanto en matemática y en física, como en disciplinas psicopedagógicas, que lo habilita para desarrollar en el aula conceptos matemáticos y conceptos físicos. Éste es un aspecto relevante dentro del problema que nos concierne; en efecto, nos encontramos frente a un profesor al que diariamente (muchas veces en la misma institución, con los mismos estudiantes) “le toca” enseñar conceptos matemáticos y físicos.

Sabemos que la naturaleza de dichos conocimientos, matemático y físico, es muy diferente. De igual forma, creemos que existe una fuerte *relación epistemológica e histórica* entre ellos, que hace que ante conceptos específicos, una disciplina no pueda separarse completamente de la otra, y se necesiten mutuamente para un mejor desarrollo didáctico en el aula de clase. Esto no quiere decir que en la práctica actual ocurra tal interacción. Bajo estos supuestos, nos dispusimos investigar las relaciones entre matemática y física presentes en el conocimiento profesional del profesor y el uso de estas relaciones para facilitar la enseñanza de conceptos matemáticos y físicos. Conscientes de que era una parcela muy amplia y difícil de manejar y basándonos en García y Llinares (1998), definimos los dominios particulares de indagación, que centramos en:

- El concepto matemático de derivada como contenido curricular.
- El concepto matemático de derivada en relación con otros contenidos curriculares de la matemática y la física escolar.
- El contenido físico de velocidad como contenido curricular.
- El contenido físico de velocidad en relación con otros contenidos curriculares de la matemática y de la física escolar.

Para entonces, nos interesaba la relación entre las formas de conocer los conceptos de derivada y velocidad por parte de profesores colombianos, y describir las ventajas que tenían estos docentes en la organización y estructuración de la agenda de enseñanza de los mismos. Teniendo en cuenta que los profesores habían recibido dentro de su formación asignaturas de cálculo diferencial y física mecánica, definimos la primera relación entre estos dos conceptos como *relación en la formación docente.* Además, como el diseño curricular de base incluye dentro de sus programas oficiales la introducción y desarrollo del concepto de velocidad en física de 10º y la introducción y desarrollo del concepto de derivada en la matemática de 11º[1], definimos la segunda relación entre estos dos conceptos como *relación curricular*. Finalmente, conscientes de la relación que tienen los conceptos de derivada y velocidad desde la Historia de las Ciencias, definimos la tercera relación como *relación epistemológica* (ver figura 1).

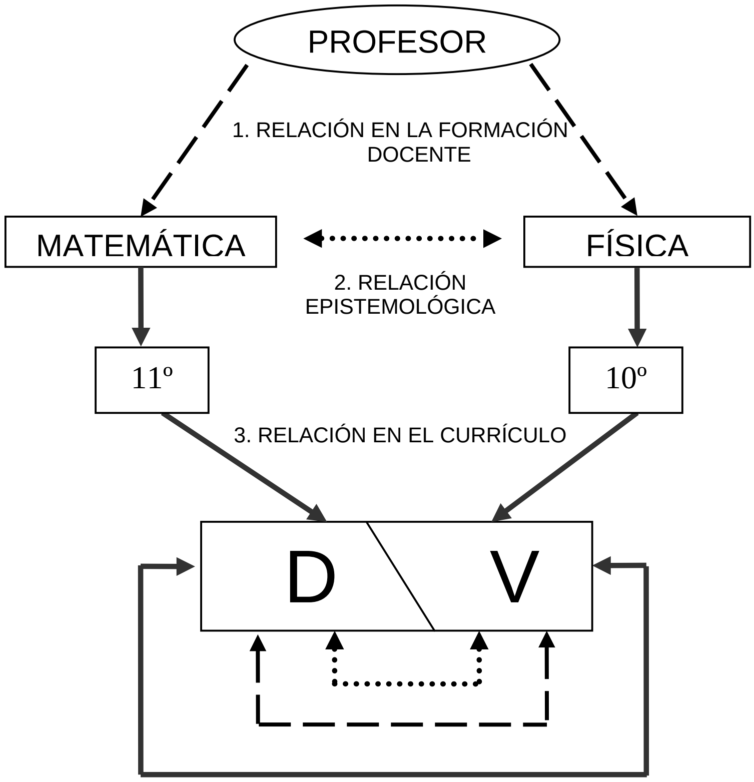


Figura 1. Esquema que esboza la formulación del problema (Badillo, 1999).

Por tanto, el objetivo de esta investigación piloto se centraba en describir la estructura y naturaleza de las relaciones presentes en las diferentes componentes del conocimiento profesional de los profesores con respecto a los conceptos de derivada y de velocidad, y como éstas influían en la definición de la agenda de enseñanza de los mismos. Las preguntas de investigación que nos planteamos fueron las siguientes:

> "**P1.** ¿De qué forma el análisis epistemológico e histórico nos ayuda a explicitar las relaciones de los conceptos (D/V)?

[1] Cuando nos referimos a los Programas curriculares de Matemática y de Física de 10º y 11º, en realidad hablamos de los dos últimos años de escolaridad en Colombia, que se corresponden con el primero y segundo de Bachillerato del actual Sistema Educativo Español.

P2. ¿Qué tipos de relaciones entre los conceptos (D/V) favorecen y están presentes en el diseño curricular oficial?

P3. ¿Hasta qué punto la formación docente bidisciplinar predetermina el tipo de relaciones entre conceptos (D/V) que el profesor desarrolla en el aula de matemática y de física?

P4. ¿Cuáles son las concepciones y creencias de los profesores acerca de las relaciones entre matemática y física, a través del acercamiento a los conceptos (D/V)?

P5. ¿Cómo transpone el docente los conceptos (D/V) y cómo plantea las relaciones entre estos dos conceptos cuando se encuentra en el aula de matemática o cuando se encuentra en el aula de física?"

Para dar respuesta a estos interrogantes, diseñamos el estudio de tres casos, en el que indagamos, directamente, aspectos de la componente disciplinar y aspectos de la componente didáctica del contenido, atendiendo a la naturaleza situada del conocimiento profesional del profesor. Es decir, diseñamos instrumentos para buscar información, por un lado, sobre lo que los profesores conocen de los conceptos derivada y velocidad; y por otro lado, sobre la forma cómo aplican sus conocimientos de la materia al definir la enseñanza de estos conceptos. Los instrumentos que utilizamos para la recogida de la información fueron los siguientes:

1. Entrevistas semiestructuradas para indagar sobre:
   - Conocimiento disciplinar: les propusimos cuatro problemas en viñetas para indagar sobre las relaciones entre estos conceptos presentes al resolver los problemas planteados.
   - Enseñanza de la derivada y sobre la enseñanza de la velocidad.
   - Evaluación que realizaban del concepto de derivada y sobre la evaluación del concepto de velocidad.
   - Formación docente y el diseño curricular de base
2. Documentos elaborados por el profesor:
   - Programa de la asignatura de física de 10º y de matemática de 11º.
   - Libros de texto que seguían o consultaban en cada una de las asignaturas
   - Exámenes que realizaban para evaluar el concepto de velocidad en física de 10º y el concepto de derivada en matemática de 11º.

Los resultados obtenidos en este primer acercamiento no fueron del todo positivos. Se presentaron dificultades para acceder a la información en general, y en particular sobre la componente disciplinar, debido a que los profesores se mostraron muy reacios a abordar el proceso de resolución de los problemas por escrito, pues se sentían evaluados y tenían miedo a quedar en evidencia. Sólo uno de los profesores se comprometió durante todo el proceso, y además, fue el único profesor que decidió continuar colaborando en la tesis doctoral (profesor B). Consideramos que las razones que originaron esta situación fueron:

1. La cantidad de información que le pedíamos a los profesores en muy poco tiempo, y los pocos datos significativos para caracterizar la práctica profesional del profesor.
2. La metodología de recolección de la información desacertada, puesto que diseñamos instrumentos directos, que no ayudaron a crear un ambiente propicio de confianza e intercambio.
3. Nuestra ambición por introducirnos en dos áreas del conocimiento sumamente complejas (quizás por la misma influencia de mi formación), que si bien es cierto que están relacionadas histórica y epistemológicamente, tienen objetos de estudio diferentes. Así, el cuerpo teórico y metodológico que acumulan cada una de las didácticas específicas nos condujo a confusiones entre la forma como justificar e interpretar los resultados obtenidos.

Sin embargo, a partir de las conclusiones obtenidas y de las limitaciones detectadas en este estudio previo, nos quedaron unas preguntas de investigación y unas líneas de acción definidas para abordar un trabajo de características similares, pero más centrado en la Didáctica de la Matemática.

1. Centrarnos en el concepto matemático de derivada, pero indagando tanto en la sintaxis como en la semántica del concepto, lo cual implica considerar implícitamente los objetos velocidad instantánea, pendiente de la recta tangente y tasa instantánea de variación.
2. Diseñar instrumentos indirectos, que nos permitieran acceder al dominio disciplinar que tienen los profesores de la derivada, teniendo en cuenta el papel del contexto, el uso de diferentes representaciones del concepto y una variedad de fenómenos a la hora de diseñar los problemas que les presentábamos para resolver por escrito, pero al mismo tiempo que justificaran los procesos de resolución.

3. Conseguir información que nos permitiera acceder al conocimiento práctico del profesor, es decir que tuviera en cuenta la naturaleza situada de su conocimiento profesional: planificación y justificación de unidad didáctica, diseño y justificación de tareas, etc.
4. Ampliar la muestra de profesores, para tener un panorama más amplio del problema que nos interesa estudiar, que nos permitiera incidir en la formación permanente del profesorado.
5. Estudiar más profundamente los contenidos, las técnicas y las definiciones que se presentan al introducir los macro objetos f ’(a) y f ’(x); ya que detectamos que los profesores no habían mostrado, en general, dominio de las relaciones y diferencias entre estos macro objetos.
6. No dejar de lado la constatación de que la forma como introducen el concepto de velocidad instantánea en 10º de alguna manera condiciona la enseñanza del concepto de derivada en 11º y, por tanto, la influencia de la física y las notaciones que se usan en esta área de conocimiento para definir los conceptos en la asignatura de matemática.
7. Seguir considerando las restricciones institucionales que definimos en el estudio: formación docente, diseño curricular y el dominio del conocimiento matemático, como un referente institucional para entender e interpretar las transposiciones que hacen los profesores de este concepto en el nivel de bachillerato del sistema educativo colombiano.
8. Ausencia de cursos de formación continuada del profesorado, que partieran de la reflexión de situaciones concretas de enseñanza que ayudaran a mejorar la práctica del profesorado.
9. El uso literal del libro de texto en la clase de matemática y de física sin tener criterios definidos para la selección de los mismos.

1.2. Objetivos de la investigación

Teniendo en cuenta que nos interesa describir las formas de conocer que tienen profesores de matemática en ejercicio de la derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza aprendizaje, así como el uso que hacen de éstas a la hora de planificar y organizar la agenda de enseñanza de este concepto en el nivel de bachillerato del sistema educativo colombiano, nos planteamos en esta investigación dos tipos de objetivos que esbozaremos a continuación.

1.2.1. Objetivos didácticos

i. Con relación al conocimiento profesional del profesor

General:

- Identificar y describir la relación e integración entre el conocimiento del contenido matemático y el conocimiento didáctico del contenido con relación al concepto de derivada. Es decir, describir la naturaleza y estructura de las formas de conocer el concepto de derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje, en el nivel de bachillerato del sistema educativo colombiano, así como la forma en que los profesores interpretan y justifican las situaciones de enseñanza concretas en las que deben actuar, como un punto de partida para entender la práctica profesional del profesor y la generación del conocimiento profesional que nos permita incidir en la formación permanente e inicial del profesorado.

Específicos:

- Caracterizar el concepto de derivada como objeto matemático de enseñanza y aprendizaje en la Licenciatura en matemática y física en la que fueron formados los profesores.
- Caracterizar el concepto de derivada como objeto matemático de enseñanza y aprendizaje en el currículo de bachillerato del sistema educativo colombiano.
- Describir y caracterizar las formas como los profesores reconstruyen el concepto de derivada como objeto de enseñanza y aprendizaje atendiendo a las restricciones institucionales del contexto en las que actúan.
- Identificar y describir las ideas inconsistentes que evidencian los profesores en las respuestas a los problemas planteados, a partir de la definición de los niveles de comprensión del esquema de la derivada que tienen los profesores, en las dos dimensiones definidas (algebraica y gráfica).

- Aplicar un instrumento que muestre la coherencia en los procesos de resolución de los profesores a los problemas planteados para el estudio de la componente del contenido matemático y establecer unas líneas de coherencia (Garbin, 2000).
- Determinar el nivel de coherencia entre los elementos del discurso del profesor, lo que dice que hace en los instrumentos proporcionados, con las inferencias que hacemos de la práctica a partir del análisis de la agenda de enseñanza que diseña: organización y estructuración de los contenidos, tratamiento de los mismos, tareas que conforman la actividad matemática y las tareas que evalúa para mirar la comprensión de sus estudiantes (Moreno, 2000).

ii. Con relación a la aplicación de la Teoría APOE

Generales:

- Describir la epistemología de los profesores en la comprensión algebraica y gráfica de los macro objetos f (x), f ’(a) y f ’(x) usando la triada del esquema de desarrollo de la teoría APOE, que dé luz sobre la epistemología y la didáctica asociada al concepto de derivada.
- Aumentar nuestra comprensión de cómo tiene lugar el aprendizaje de los macro objetos f ’(a) y f ’(x).

Específicos:

- Analizar el nivel de comprensión gráfico y algebraico de los profesores de los macro objetos f (x), f ’(a) y f ’(x) usados en la resolución de problemas, no rutinarios y enunciados de diferentes contextos, en los que se tratan diferentes fenómenos asociados a estos macro objetos.
- Determinar, lo más específicamente posible, cómo los profesores integran su comprensión de los conceptos del cálculo, en qué puntos los profesores exhiben las máximas dificultades y cómo las superan.
- Incorporar la triada de la teoría APOE para estudiar la comprensión que tienen los profesores de problemas no rutinarios sobre el cálculo gráfico y algebraico de los macro objetos f ’(a) y f ’(x), partiendo de situaciones presentadas en otras investigaciones antecedentes sobre el desarrollo del esquema y la demostrada incomprensión que los estudiantes universitarios tienen de algunos conceptos específicos del cálculo.

- Describir si los profesores coordinan los objetos pendiente de la recta tangente, tasa instantánea de variación y límite de las razones de cambio y los relacionan con el macro objeto f ’(a), cuando se enfrentan a situaciones no rutinarias enunciadas en diferentes contextos que tratan fenómenos matemáticos y no matemáticos.
- Describir si los profesores realizan el proceso de síntesis de los objetos anteriores que engloba el macro objeto f ’(a) en los objetos función pendiente de la recta tangente, función tasa instantánea de variación y función límite de la razones de cambio que engloba el macro objeto f ’(x). Es decir, si se da el proceso de síntesis del macro objeto f ’(a) en el macro objeto f ’(x); o lo que es lo mismo, si diferencian y relacionan los macro objetos f ’(a) y f ’(x) al resolver problemas enunciados en diferentes contextos.
- Adaptar las categorías teóricas y analíticas que ofrece la teoría APOE para el estudio de las tareas que caracterizan la actividad matemática que el profesor realiza en el aula.

1.2.2. Objetivos metodológicos

- Aportar nuevos elementos metodológicos a la investigación cualitativa para el tratamiento de la información en el análisis de estudios de casos, centrados en la integración de la componente del contenido y de la componente didáctica del contenido del conocimiento profesional de profesores de matemática en ejercicio.
- Proponer un modelo de investigación adaptado del ciclo metodológico que plantea la Teoría APOE, que permita el estudio de las componentes del conocimiento profesional del profesor, centrado en un concepto matemático concreto que considere la naturaleza situada de éste, como base para el diseño de programas de formación permanente e inicial del profesorado.
- Diseñar un instrumento para el análisis de las tareas matemáticas que proponen los profesores para la enseñanza y evaluación de los conceptos matemáticos, que son fundamentales para caracterizar la actividad matemática que fomentan en el aula.

1.3. Antecedentes de investigación sobre la enseñanza y el aprendizaje del concepto de derivada: *PMA*

En esta memoria, por motivos de extensión y por opción personal, hemos decido presentar los antecedentes de la investigación sustentando cada uno de los capítulos que conforman la misma. Sin embargo, a continuación, nos centraremos en describir, *grosso modo*, los grandes referentes e investigaciones centradas tanto en la enseñanza como en el aprendizaje de los conceptos del precálculo y del cálculo diferencial, que nos han permitido ubicar nuestro estudio dentro del denominado pensamiento matemático avanzado (*PMA*).

1.3.1. Con relación al concepto de función

Los trabajos de investigación que más han iluminado, en general el estudio del conocimiento profesional del profesor centrado en un concepto matemático específico han sido los aportes del grupo de investigación de la Universidad de Sevilla, más concretamente citaremos los estudios sobre la enseñanza del concepto función realizado por García (1997), y las sucesivas publicaciones en diferentes revistas que han hecho al respecto García y Llinares (1999; 1998; 1994); Llinares y García, (1996); y Llinares (2000; 1999; 1996). Igualmente, los trabajos de Norman (1993; 1992), también centrados en la enseñanza del concepto función, en los que se focaliza el estudio de la comprensión que tienen profesores de matemática sobre el concepto de derivada. Finalmente, los trabajos de Even (1993), centrados en la integración de las componentes de contenido matemático de funciones y de conocimiento de las formas de representar la noción de función (conocimiento didáctico del contenido función).

Con relación a investigaciones centradas en el aprendizaje del concepto función, otros referentes han sido: los trabajos desarrollados por Janvier (1987); el Grup Zero (1984; 1982); y, Azcárate y Deulofeu (1996), los cuales ya han sido referenciados en los capítulos posteriores.

1.3.2. Con relación a los conceptos de límite, continuidad e infinito

Los aportes de las investigaciones sobre la enseñanza del concepto de límite realizadas por Espinoza (1998) y Espinoza y Azcárate (2000), nos brindaron una panorámica general de la complejidad asociada a la enseñanza de este concepto en el nivel de COU del sistema educativo español. En lo que respecta a las investigaciones centradas en el aprendizaje de los conceptos de límite y continuidad, tanto a nivel universitario como a nivel de bachillerato, nos remitimos a los aportes de Delgado (1998); Sierra y otros, (1999; 1997); Cottrill (1999); Cottrill y otros (1996); Contreras y otros (2001) y Blázquez (2000). Además de los numerosos trabajos realizados por Cornu (1991) y Sierpinska (1985), en los que se combinan estudios epistemológicos con el análisis de las respuestas de estudiantes cuando se enfrentan a tareas y al proceso de aprendizaje de este concepto. Estos autores han reportado que la enorme dificultad de la enseñanza y aprendizaje del concepto de límite no sólo radica en su riqueza y complejidad sino en el hecho de que los aspectos cognitivos implicados no se pueden generar puramente a partir de la definición matemática; es decir que los estudiantes pueden recordar la definición del concepto, pero construir el significado fundamental es algo muy diferente y complejo.

Con respecto al concepto de infinito, las investigaciones que nos han permitido abordar el estudio de la versión de la paradoja que presentamos a los profesores en este estudio, las cuales nos permitieron constatar que algunos de los profesores mantienen ideas aristotélicas con una visión potencial del infinito (Badillo, 1999; Badillo *et al.*, 2001; 2002a y b), han sido: (1) la realizada sobre el aprendizaje del concepto de infinito en el nivel de secundaria del sistema español Garbin (2000), Garbin y Azcárate (2000; 2002); y (2), el estudio de las ideas sobre el infinito que manejan los niños de primaria realizada por Nuñez (1997).

1.3.3. Con relación a los conceptos del precálculo

Azcárate (1990), basándose en los trabajos del Grup Zero (1984; 1982), postula que la comprensión de la derivada implica una comprensión previa de unos conceptos, que denomina del *precálculo*, entre estos conceptos señala: velocidad media e instantánea, tasa media de variación y pendiente de una recta. Esta consideración la hemos tenido en cuenta en nuestro estudio a la hora de diseñar y construir la descomposición genética del concepto de derivada, por tanto, ya han sido reseñados en el capítulo 4. En este sentido, la literatura nos ha permitido ubicar también los siguientes estudios que han reportado lo siguiente:

- **Schoenfeld, Smith y Arcavi (1990)**, referenciados en Asiala y otros (1997), han realizado una investigación que es considerada como el mayor estudio de la comprensión del concepto de pendiente. Estos autores hacen, a largo plazo y muy fino, un estudio de las construcciones de los estudiantes del concepto de pendiente. Encontraron que aparecen más personas trabajando, en cualquier nivel de matemática, con un concepto simple de la pendiente que puede originar dificultades serias en la resolución de problemas del cálculo.
- **Leinhardt y otros (1990),** hicieron una revisión de investigaciones y reportaron que los estudiantes tuvieron dificultad en calcular el valor de las pendientes de problemas enunciados gráficamente, y llamaron la atención en la necesidad de trabajar sobre las traducciones entre diferentes representaciones del concepto (desde gráficos a expresión algebraica o a tabla), para ayudar a los estudiantes a tratar con las dificultades con las que se pueden encontrar en los problemas gráficos.

1.3.4. Con relación al concepto de derivada

Como señalaremos en capítulos posteriores, las investigaciones más importantes focalizadas en el aprendizaje y enseñanza del concepto de derivada que nos permitieron centrar nuestro estudio dentro del PMA, han sido, en orden de importancia: Azcárate (1990); Azcárate y otros (1996); Font (2000); Tall (1992; 1991; 1990; 1985a y b; 1981) Asiala y otros (1996); Asiala y otros (1997); Baker y otros (2000); y, Clark y otros (1997).

A partir de las lecturas de los autores ya mencionados, hemos encontrado reseñados otros trabajos de investigación, cuyas lecturas posteriores, nos han permitido entender, visualizar y contrastar los aportes que han hecho los autores anteriormente referenciados, de los cuales remarcaremos los siguientes aspectos más importantes:

- **Selden y Mason (1994), Orton (1983),** entre varios autores, han documentado que incluso los estudiantes que pueden resolver exitosamente problemas rutinarios de cálculo tienen dificultades para resolver problemas no rutinarios. Algunos creen que estas dificultades son debidas a la débil visión conceptual que tienen del concepto función; además, de que el aprendizaje ordinario y la reorganización del conocimiento algunas veces incorporan construcciones matemáticas incorrectas que se arrastran durante un largo periodo de tiempo.
- Generalmente, se ha considerado que la habilidad de visualizar en matemáticas puede ser beneficiosa, pero **Aspinwall, Shaw y Presmeg (1997)** reportaron sobre un estudiante cuya habilidad para pensar sobre un problema estaba obstaculizada por una imagen incorrecta de la gráfica de un modelo prototipo. El estudiante había construido una imagen de una función polinómica de segundo grado teniendo asíntotas verticales. Sin embargo, paralelamente afirmaba que el dominio de la misma son todos los números reales. Esta imagen errónea le causaba problemas al tener que dibujar el gráfico de la función derivada como si fuera una función cúbica, puesto que, este dibujo de la función cuadrática entra en conflicto con el conocimiento analítico que tiene el estudiante de la derivada de una función cuadrática que debería ser una línea recta. Además, se demostró que él, durante el proceso de la investigación, no puede controlar su imagen mental que continua interfiriendo en su pensamiento sobre la función derivada.
- **Amit y Vinner (1990); Asiala y otros (1997)**, reportaron que algunos estudiantes igualan la derivada con la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en un punto dado. Esto también fue encontrado en algunos profesores considerados en nuestra investigación.
- **Ferrini-Mundy y Graham (1994)**, discutieron en detalle sobre el deseo que muestran algunos estudiantes por encontrar la ecuación para una función representada gráficamente antes de hallar el gráfico de su derivada. Este aspecto fue también detectado en el proceso de resolución de algunos de los profesores que participaron en este estudio a las situaciones planteadas.
- **Asiala y otros (1997)**, en su estudio sobre la comprensión gráfica del concepto de derivada, reportaron que la mayoría de los estudiantes despliegan una comprensión razonable de la relación entre la pendiente de la tangente y la derivada en un punto. En efecto, en nuestra investigación también se constata esta conclusión.

- **Thompson (1994),** reportó sobre un experimento de enseñanza donde involucró imágenes de razones cambio y comprensión del teorema fundamental del cálculo. Los participantes de este estudio eran estudiantes universitarios en la facultad de matemáticas y graduados de la misma facultad. Este autor observó que los estudiantes tenían concepciones débiles de las razones de cambio, relativo al significado de la derivada, que llevaron a dificultades en la comprensión de la integración. Su definición de *imágenes,* basadas sobre la internalización de Piaget de los objetos y las acciones hacia objetos, fue la base de su análisis de la comprensión de los estudiantes de la derivada y la integración, encontrando que los estudiantes tenían dificultad en la conceptualización de la derivada como una función que ella misma denota una razón de cambio.
- La comprensión de las propiedades funcionales hacia el aprendizaje del cálculo también ha sido estudiado. En su artículo describiendo la visión de crecimiento orientado de la función como objeto, **Slavit (1997)** comentó que sus estudiantes no encuentran algunas propiedades funcionales, como por ejemplo, cúspide, hasta que alcanzan los cursos de cálculo que ellos diseñan. Para estos estudiantes la interiorización de las propiedades de la función es limitada por las clases de funciones que ellos han estudiado. Slavit en este artículo, llama la atención hacia una investigación futura sobre el rol de las funciones en los cursos de cálculo. También manifiesta que con mucha frecuencia los estudios que proponen funciones polinómicas y exponenciales, que son suaves y continuas y llevan a generalizaciones superiores sobre la continuidad.
- **Orton (1983)**, observó que los estudiantes tienen representaciones adecuadas sobre la diferenciación en tareas rutinarias, pero en cambio, tuvieron intuiciones pequeñas o deficiente comprensión del concepto derivada. También reportó que las dificultades que tienen los estudiantes con la interpretación gráfica de la derivada puede ocurrir en el caso de la línea recta, y no sólo con curvas más complicadas; e igualmente, muchos estudiantes (alrededor del 20 % de su estudio) confundieron la derivada en un punto con la ordenada, es decir, con el valor de *y* (segunda coordenada) del punto de tangencia.
- **Eisenberg (1992)**, citado en Asiala y otros (1997), y **Vinner (1989)**. El primero reportó que los estudiantes *evitan la visualización* y concluyó, al igual que Vinner (1989), que los alumnos exhiben una dependencia y necesidad por el uso de

expresiones algebraicas (fórmulas) cuando tratan con el concepto de función (función derivada). Para ello, propuso 10 preguntas en un cuestionario, incluyendo las preguntas 1 del cuestionario indirecto, pero él no realizó en su estudio entrevistas a los estudiantes sobre el proceso de resolución, y sólo se basó en el registro escrito. Los resultados que nosotros encontramos en esta investigación, coinciden con los reportados por los estudios anteriores.

- **Tufte (1989),** citado en Asiala y otros (1997), reportó los resultados de las representaciones de los estudiantes sobre un cuestionario de conceptos del cálculo, donde incluyó algunas preguntas idénticas a la 1 del cuestionario indirecto de esta investigación en dos de estudios. Una de las investigaciones con 200 estudiantes de primer año de la escuela universitaria y otra con 24 estudiantes de primer semestre de cálculo quienes habían completado un curso de cálculo tradicional para diseñar un programa sobre conceptos básicos de cálculo (por ejemplo: aproximación al límite, derivada, integrales definidas vía suma de Riemann), reportaron que los estudios sugieren que la experiencia de programar, la cual incluye el escribir en un lenguaje de ordenador códigos sobre conceptos básicos del cálculo, puede tener un efecto profundo sobre la comprensión conceptual de los estudiantes de dichos conceptos; esto comparándolo con estudiantes que han seguido un curso con clases tradicionales.
- **Asiala y otros (1996)**, también reportaron que los resultados encontrados por Tufte (1989) son paralelos con los resultados positivos que ellos encontraron al comparar estudiantes que habían recibido una enseñanza tradicional con estudiantes del C4L. Señalan que el análisis que realizaron es un intento para promover la comprensión de la naturaleza de este efecto positivo, en términos de las construcciones mentales cuando se escriben programas. Resaltan que Tuften no realizó entrevistas clínicas y sólo se basó en la resolución por escrito de las situaciones del cuestionario.

CAPÍTULO 2. ACERCA DEL MARCO TEÓRICO

2.0. A manera de introducción

Este capítulo se encuentra estructurado en dos secciones. En la primera sección intentaremos ubicar muy brevemente nuestro objeto de estudio en un marco de referencia que nos permita justificar la metodología implementada y los resultados obtenidos a partir de ella. Igualmente, nos detendremos en comentar los aspectos más significativos de los organizadores del currículo y de los constructos, inconsistencias e incoherencias utilizados en este estudio, para el análisis de las componentes del conocimiento profesional del profesor. Por otra parte, en la segunda sección dedicada a la presentación de la Teoría APOE, brindamos una panorámica general de este marco, resaltando los constructos teóricos y metodológicos que han sido fundamentales en la adaptación que hemos hecho de esta teoría al estudio del conocimiento profesional del profesor. Igualmente, describiremos las ventajas y desventajas con las que nos hemos encontrado en nuestro propósito.

2.1. Conocimiento profesional del profesor

Son muchos los estudios que se han dedicado a describir la evolución y desarrollo que ha tenido la línea de investigación sobre el profesor, postulando que ha evolucionado desde perspectivas más cognitivas (estudio del pensamiento del profesor), cuyas bases se cimientan en la psicología cognitiva, hasta perspectivas más socioculturales (estudio del conocimiento y práctica profesional del profesor), cuyas bases se cimientan en principios antropológicos y epistemológicos del conocimiento (Llinares, 2000; Marcelo, 2002; Perafán, 2002)

En esta sección no nos ocuparemos de hacer una revisión sobre la evolución de este paradigma de investigación; nos remitimos a la lectura que hemos hecho de los siguientes trabajos que muestran un panorama extenso, riguroso y exhaustivo del mismo, que han sido un gran referente para el nuestro: García (1997); Moreno (2000, 2002); Moreno y Azcárate (2003); Carrillo (1996); Florez (1995); Azcárate, P. (1995); Espinoza (1998); Llinares (2000, 1999, 1998, 1996); Pajares (1992); Marcelo (1987; 1989; 2002); Villar (1986, 1988; 2002) y Shulman (1986; 1989).

La necesidad de conceptualizar el constructo “conocimiento profesional del profesor” ha generado una nueva orientación en las investigaciones dentro del paradigma del pensamiento del profesor. Shulman (1989) presenta un mapa sinóptico de la investigación sobre la enseñanza y expone los principales programas de investigación que la estructuran, especificando el objeto de estudio, las metodologías, los alcances y las limitaciones de cada una de estos programas. Señala seis programas de investigación desarrollados como reacción de los investigadores contra determinados aspectos del programa inicial: la falta de credibilidad en los informes sobre los resultados, la extrapolación de los resultados y el uso de métodos cuestionables. Este autor considera que ha habido una evolución en las investigaciones en este campo de conocimiento, que van desde enfoques basados en la psicología conductista, centrados en el estudio de las características del profesor, hasta enfoques basados en la psicología cognitiva y el procesamiento de la información, donde la atención se centra en la cognición del profesor, considerándolo ahora como un profesional racional que emite juicios y toma decisiones en un medio incierto y complejo, y cuyo comportamiento está orientado por sus pensamientos, juicios y valores.

Sin duda alguna, el análisis del conocimiento profesional del profesorado de matemática de enseñanza secundaria es un tema que va cobrando un interés creciente entre los investigadores en Educación Matemática. Teniendo en cuenta la riqueza de este constructo, son muchas las aproximaciones teóricas que se han adoptado para su análisis. Los aportes de Shulman se centran en la dilucidación de la comprensión cognitiva de la enseñanza por parte de los profesores y las relaciones entre esta comprensión y la enseñanza que los profesores proporcionan a los alumnos (Shulman, 1989). Este autor propone que las competencias de los docentes en la materia que enseñan son un criterio para establecer la calidad del profesor. Además, con relación al contenido de este conocimiento, ha señalado distintas subcategorías, entre las que se podrían considerar el conocimiento de la materia específica *per se*, el conocimiento de contenido pedagógico específico de la misma y un conocimiento curricular que abarca, no sólo el específico de la materia, sino también el de otras materias (Shulman, 1986).

Se dice que Shulman (1986) inicialmente considera el conocimiento de la materia y el conocimiento del contenido pedagógico[1] como dos componentes separadas del conocimiento del profesor. Sin embargo, las investigaciones en Educación Matemática han desvelado la integración de estas dos componentes cuando se considera la naturaleza situada del conocimiento profesional del profesor (Llinares, 1996; 1998; 2000). Dada la complejidad que presenta el estudio del conocimiento profesional del profesorado de matemática, se sugiere investigarlo centrándolo en temas de contenido matemático específico, lo cual permite comprender mejor el amplio dominio del pensamiento matemático de los profesores y su influencia sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (García, 1997; García y Llinares, 1998; Cooney y Wilson, 1993; Norman, 1992, 1993; y Even, 1993).

Particularmente, nos interesa la relación entre el conocimiento de la materia y el conocimiento didáctico del contenido, no planteando una separación entre las diferentes componentes del conocimiento profesional, sino más bien entendiéndolo como una amalgama compleja de conocimientos que se entremezclan y difícilmente se pueden separar del todo (Badillo, 1999; Badillo y Azcárate, 2002). Sin embargo, los aspectos del conocimiento que se están considerando en una investigación, estarán determinados por el contexto en que se sitúe el proceso de indagación (Llinares, 1996). Así, por ejemplo, los trabajos de Norman (1992) se centran en el análisis de la comprensión del profesor de un concepto matemático específico (función); de allí que los instrumentos diseñados se centren en cuestiones relacionadas con el contenido matemático, mientras que los trabajos de Even (1993) consideran aspectos interrelacionados de estas dos componentes del conocimiento del profesor de matemática en relación con el concepto de función.

[1] En esta memoria consideramos que el conocimiento didáctico del contenido es equiparable con el conocimiento de contenido pedagógico introducido por Shulman (1986). Consideramos que por problemas de traducción del inglés al castellano se introdujo como pedagógico y no como didáctico. Sin embargo, creemos conveniente resaltar que el conocimiento didáctico del contenido que nosotros utilizamos tiene, como saber referencial, la Didáctica de la Matemática como disciplina científica. Igualmente resaltamos que otros autores también comparten y utilizan esta traducción (Marcelo, 1997; 2002)

Consideramos que uno de los logros de las investigaciones sobre el pensamiento de los profesores ha sido, precisamente, el profundizar sobre su conocimiento profesional y sobre la relevancia que éstos tienen en los procesos de enseñanza. La descripción de las diferentes categorías del conocimiento profesional del profesor de matemática aporta datos relevantes para el diseño de programas de formación (Llinares, 1996). Al respecto, Salvador Llinares adopta una perspectiva profesional, basada en marcos teóricos de la psicología cognitiva y perspectivas socioculturales, desde la que se propone analizar los procesos de formación de profesores de matemática. Esta perspectiva profesional se define como la incorporación de la información que brinda el análisis del conocimiento profesional del profesor de matemática a la forma de concebir los procesos de formación (Llinares, 1998)

Entre los elementos que se tienen en cuenta en la descripción de las componentes del conocimiento profesional, se da relevancia a la determinación de los saberes de referencia de cada componente; éstos son el conocimiento teórico que conforma la base para los programas de formación. Después de una revisión rigurosa sobre las investigaciones en este campo, Llinares (1998) encuentra en general una convergencia en la identificación de algunas componentes del conocimiento profesional, entre ellas señala:

- “Conocimiento de matemática (conceptos, procesos...) y sobre la matemática (concepciones sobre la naturaleza de la matemática escolar).
- Conocimiento del curriculum matemático.
- Conocimiento sobre las cogniciones de los aprendices: características del aprendizaje de nociones matemáticas específicas, dificultades, errores y obstáculos...
- Conocimiento pedagógico específico de la matemática: de representaciones instruccionales, análisis de tareas...
- Conocimiento sobre la enseñanza: planificación, rutinas, interacción, organización de la enseñanza, evaluación.” (Llinares, 1998: 57)

Este autor plantea que al analizar las componentes del conocimiento profesional del profesorado de matemática quedan explícitas algunas características concernientes a la naturaleza y el uso del mismo en la actividad profesional. Partiendo de estas premisas, se han identificado investigaciones que consideran la integración cognitiva y la generación del conocimiento profesional a través de la experiencia práctica con relación a conceptos concretos (Bromme y Tillema, 1995). En esta misma línea, encontramos la noción de *reflexión sistemática*, que plantea la generación de conocimiento en la práctica profesional. En términos de Schön (1983) sería reflexión en la acción y reflexión sobre la acción.

Bromme (1994) plantea que la forma en que se genera el conocimiento práctico obedece a transformaciones heurísticas de los conocimientos teóricos y a la integración de los mismos por parte de los profesores. De ahí que se sugiera la caracterización de la generación del conocimiento profesional del profesor como un proceso inductivo. Es decir que la generación del conocimiento práctico se plantea como una construcción personal del profesor, que deviene del uso de su conocimiento profesional en el momento de gestionar situaciones concretas de enseñanza y de la reflexión posterior de las mismas. Por tanto, la caracterización del conocimiento profesional no está sólo en lo que el profesor conoce (componentes del conocimiento profesional) sino en lo que hace (uso del conocimiento, actividad profesional).

Cooney (1994) plantea los siguientes interrogantes en relación con el tipo de conocimientos que los profesores necesitan para su práctica y, por tanto, cuestiona las bases teóricas sobre la enseñanza y aprendizaje que orientan los cursos de formación inicial y permanente del profesorado:

> “¿Qué tipos de conocimientos necesitan los profesores para ser eficientes? ¿Qué tipos de experiencias deben vivir los profesores para construir ese conocimiento?” (Cooney, 1994: 608)

Basándose en las diferentes investigaciones que se han adelantando en el marco del pensamiento del profesor (las que se centran en el estudio del conocimiento del contenido pedagógico), este autor señala que la mayoría de los estudios tienen una característica común, y es la de dar cuenta de los conocimientos locales de los profesores, dejando de lado el paso de lo local a lo general. En este artículo, Cooney afirma que estas investigaciones llevan implícita una visión sobre el aprendizaje como proceso de retención de información, considerando un esquema de transmisión por parte del profesor y de recepción por parte del alumno de los contenidos transpuestos merced al conocimiento de contenido pedagógico que poseen los profesores (Gómez, 2001). Por tanto, Cooney (1994) plantea la necesidad de promover la formación del profesorado como un campo de indagación sistemática que se base en la cognición, el contexto y el paradigma constructivista. Esto implica ver al profesor como un agente cognitivo y asumir la importancia que tienen los procesos de construcción del conocimiento por parte de los mismos.

Simon (1995), a propósito de enriquecer el debate acerca de cómo sería la enseñanza si se construyera sobre una visión constructivista del desarrollo del conocimiento, retoma los dos elementos anteriores planteados por Cooney, y propone un modelo de enseñanza. Este modelo contempla que la enseñanza, desde el punto de vista del profesor, se encuentra guiada por la *trayectoria hipotética de aprendizaje* de los estudiantes. El profesor hace una predicción de los diferentes caminos por los que puede proceder el aprendizaje de los estudiantes, lo cual le permite elegir con criterios un tratamiento instruccional particular. Gómez (2001), retomando el modelo propuesto por estos autores, reformula la noción de trayectoria hipotética de aprendizaje extendiéndola a la idea genérica de análisis didáctico. Este autor identifica los análisis que debe hacer el profesor cuando diseña, pone en práctica y evalúa actividades que partan de una perspectiva constructivista del aprendizaje y los conocimientos que el profesor usa cuando realiza estos análisis (figura 1).

Un aspecto que consideramos importante dentro de la propuesta de Gómez, es la importancia que le otorga al conocimiento didáctico dentro del desarrollo de los profesores en el seno de la formación inicial. Este conocimiento se define como el conocimiento de la Didáctica de la Matemática que el profesor usa cuando diseña, lleva a la práctica y evalúa actividades de enseñanza. Gómez considera que el conocimiento didáctico del profesor existe un conocimiento disciplinar de referencia, que es la didáctica de la matemática, y su uso requiere de una estructura analítica que se denomina análisis didáctico. Las nociones de la Didáctica de la Matemática a las que se refiere el conocimiento didáctico pueden estructurarse mediante los organizadores del currículo propuesto por Rico (1997). A manera de conclusión, según Gómez (2001), para mejorar los programas de formación inicial del profesorado de matemática, se hace necesaria la caracterización del desarrollo didáctico de futuros profesores de matemática. Esto implica que la formación inicial contemple, además del contenido disciplinar, una formación en las nociones de la didáctica de la matemática (organizadores del currículo) a partir de experiencias prácticas (diseño, implementación y evaluación de unidades didácticas), donde se usen los significados parciales construidos por los futuros profesores, pasando por las diferentes categorías del análisis didáctico (análisis cognitivo, de contenido, de instrucción y de actuación).

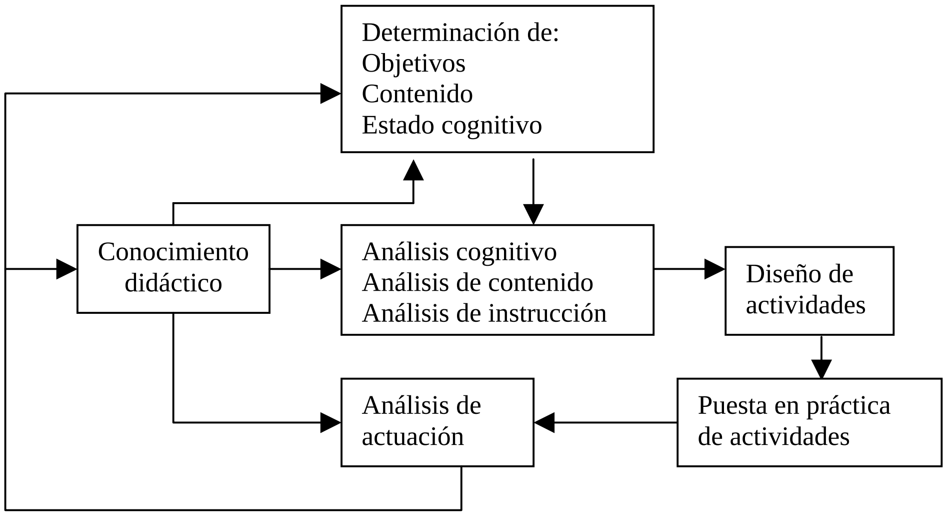


Figura 1. Propuesta de Gómez (2001) del análisis didáctico que activa el profesor cuando diseña actividades matemáticas.

De todo lo anterior, asumimos que para llegar a entender mejor la naturaleza de los cambios que se dan en el conocimiento del profesor durante los procesos de formación, bien sea inicial o permanente, se hace necesario conocer la naturaleza del conocimiento profesional, las características de su uso y cómo se genera dicho conocimiento (Llinares, 1998). Creemos importante indagar y cuestionar las diferentes componentes del conocimiento profesional que tienen los profesores en relación con un concepto matemático cuando se enfrentan a situaciones de enseñanza concretas, como punto de partida para elaborar propuestas de formación que integren el contenido matemático con la reflexión didáctica del contenido matemático específico.

Igualmente, consideramos que un programa de formación que contemple el diseño de actividades concretas de enseñanza (diseño de unidades didácticas), propicia en el profesor procesos de reflexión y de autoanálisis sobre sus procesos de aprendizaje y sobre su práctica profesional, que contribuyen a la construcción y reconstrucción de su conocimiento práctico. De allí la necesidad de indagar directamente sobre el conocimiento de contenido matemático específico y triangular éste con datos que aporten información sobre el conocimiento didáctico del contenido del profesor, es decir, sobre la forma en que el profesor usa este conocimiento para comunicarlo a los estudiantes (Badillo y Azcárate, 2002).

2.1.1. Los organizadores del currículo

Los organizadores del currículo propuestos por Rico (1997) ofrecen a los profesores un buen marco conceptual para la enseñanza de la matemática, permiten generar espacios de reflexión que muestran la complejidad de los procesos de transmisión y construcción del conocimiento matemático y proporcionan criterios para abordar y manejar esta complejidad.

La necesidad organizativa del currículo de matemática de secundaria no puede ser reducida sólo a la disciplina matemática. Es decir que, si bien es cierto que el conocimiento matemático es importante a la hora de la concretar el currículo de secundaria, éste solo no es suficiente, por lo que se hace preciso buscar otros organizadores. Rico (1997) propone cinco organizadores del currículo:

1. Los errores y dificultades detectados en el aprendizaje de un concepto matemático.
2. La diversidad de representaciones utilizadas para cada concepto matemático, junto con la modelización matemática.
3. La fenomenología de los conocimientos implicados.
4. La diversidad de los materiales de tipo manipulativo y los recursos que pueden emplearse en la enseñanza de un concepto matemático.
5. La evolución histórica de cada campo, e incluso de cada concepto.

Un programa de formación centrado en el diseño, implementación y evaluación de unidades didácticas basadas en los organizadores del currículo, implica la integración y coordinación de las diferentes componentes del conocimiento profesional del profesor. Por tanto, debe proporcionar a los profesores diversidad de documentos y suficiente información sobre cada una de las componentes de los organizadores del currículo. Esto le permitiría configurar una base conceptual para la toma de decisiones sobre las diferentes formas de abordar la enseñanza de un concepto matemático, en un contexto institucional específico. Cada organizador proporciona una base sólida y unos criterios para estructurar todas y cada una de las unidades didácticas, y para delimitar el conocimiento didáctico de sus contenidos (Rico, 1997; Gómez, 2000).

Sin embargo, encontramos a faltar en la propuesta de los organizadores de Rico una discusión más detallada sobre el conocimiento matemático. De hecho, él no problematiza la componente del conocimiento matemático dentro del conocimiento profesional que debe poseer el profesor, pues parte del supuesto de que el profesor de matemática del sistema español posee los conocimientos matemáticos necesarios para la enseñanza, aunque reconoce que éstos no son suficientes para abordar la complejidad del aula; además admite que son precisamente las otras componentes del conocimiento del profesor, como el conocimiento didáctico del contenido, las que requieren de un mayor trabajo de formación. Nosotros no estamos del todo de acuerdo con el posicionamiento de Rico, y consideramos que los programas de formación permanente del profesorado centrados en un concepto matemático específico, más concretamente, en nuestro contexto colombiano, deberían incluir una reflexión epistemológica e histórica de los conceptos matemáticos en cuestión, que ayude al profesor en la toma de decisiones sobre la organización y estructuración de la enseñanza de los mismos, atendiendo al contexto institucional en el que se desempeña.

2.1.2. Las inconsistencias y las incoherencias en el estudio del conocimiento profesional del profesor

Los resultados de una investigación previa (Badillo, 1999), nos permitieron detectar en las respuestas de los profesores a algunas situaciones planteadas, la presencia de ideas inconsistentes con relación al concepto de derivada. Es por ello que en este estudio consideramos como importante, la detección de las inconsistencias en los esquemas de los profesores, que pueden llegar a reproducirse en la transposición que hacen de este objeto y aparecer nuevamente en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática jugando un papel determinante en el aprendizaje por parte de los alumnos.

Las investigaciones que se han centrado en el estudio de las inconsistencias en el área del cálculo, señalan tres lugares en donde podemos encontrar inconsistencias: en la mente, en las matemáticas y en el mensaje (Tall, 1990). Con relación a la primera, afirma que éstas pueden aparecer, tanto en la mente de los estudiantes como en la de los profesores de matemática; y señala que su origen se remonta a la construcción cognitiva del conocimiento y en la percepción de la matemática. De ahí, que creamos importante detectarlas en los profesores, hacerlos conscientes de su presencia y buscar alternativas de solución para modificarlas.

En lo que respecta a las segundas, inconsistencias en la matemática, afirma que ciertos conceptos complejos pueden ser interpretados de forma errónea o inconsistente, debido a la complejidad de su significado, y señala entre ellos, el concepto de límite y el concepto de infinito. Basándonos en esta hipótesis, decidimos presentar a los profesores una versión de la Paradoja de Zenón que nos permitiera detectar inconsistencias en el manejo y tratamiento de los objetos señalados, con tres propósitos: (1) detectar la presencia, o no, de razonamientos aristotélicos con una visión potencial del infinito; (2) analizar la justificación que dan de los conceptos del precálculo y del cálculo cuando se enuncian en un contexto físico; y (3), rastrear el conocimiento que tienen de situaciones problemas que han sido fundamentales en la organización y construcción de los conceptos del cálculo diferencial en particular, y de la matemática, en general.

Con respecto a la tercera, inconsistencias en el mensaje, Tall afirma que el mensaje, en este caso el concepto matemático, puede ser transmitido inadecuadamente para el desarrollo cognitivo y expresado erróneamente de manera que evoca ideas inapropiadas. En este aspecto, distingue tres subcategorías: el lenguaje, el currículo y la instrucción. Basándonos en esta distinción, decidimos analizar la transposición didáctica que hacen los profesores de los macro objetos f ’(a) y f ’(x) en las unidades didácticas propuestas, y en su defecto, en los libros de textos que usan (Espinoza, 1998; Espinoza y Azcárate, 2000), para detectar las posibles inconsistencias presentes en los mismos y que pueden ser reproducidas por los profesores en la enseñanza de estos macro objetos. Igualmente, nos centramos en describir las condiciones que ofrece el currículo de bachillerato del sistema educativo colombiano y las que les ofreció la formación inicial de la Licenciatura en matemática y física en la que fueron formados los profesores, como un camino para entender la organización y estructura que proponen actualmente los profesores al diseñar las programaciones de esta asignatura.

Por su parte, Vinner (1990) distingue dos tipos de inconsistencias: las que se derivan del sistema formal y las que suceden desde un punto de vista psico-matemático. Propone la anterior clasificación a partir de la definición del *fenómeno de la compartimentación*,

> "es el fenómeno que ocurre cuando situaciones en dos piezas de conocimiento que son conocidas de manera individual y que podrían ser conectadas en el proceso de pensamiento de la persona, quedan sin relacionarse. (...) La compartimentación ocurre cuando un cierto estímulo no evoca una cierta respuesta asociada..." (Vinner, 1990; 92 y 94)

Al respecto, expone un ejemplo: si un estudiante puede decir que un cuadrado no es un rectángulo porque la forma del cuadrado no es como la del rectángulo, aparentemente el alumno no recuerda la definición de rectángulo y cuadrado, y en este caso, recordar la definición es una respuesta asociada. Parcialmente, estamos de acuerdo con la visión que propone Vinner, centrada en los procesos mentales, porque consideramos que detrás de las respuestas asociadas a un problema concreto está la práctica matemática que se genera en el aula, y no sólo la estructura y dinamismo de la mente del individuo. Por ello, creemos conveniente que para entender el fenómeno de compartimentación y la presencia de inconsistencias, se requiere de un estudio profundo de la actividad matemática; es decir, un análisis riguroso de los conceptos matemáticos que se introducen, de la presentación de los contenidos matemáticos, de las técnicas que se proponen y de los problemas que se realizan para la construcción y reconstrucción de los objetos matemáticos. Concretamente, en la comprensión del concepto de derivada, la riqueza de esta actividad matemática que se genera en el aula influye en el desarrollo de competencias para la resolución de problemas, la cual debe contemplar variedad de contextos, traducciones y relaciones entre representaciones de los macro objetos f (x) y f '(x); y riqueza en el tratamiento de los fenómenos que organizan estos macro objetos, tanto en la propia matemática como en las otras ciencias.

No pretendemos extendernos en la descripción de las investigaciones que se han realizado sobre las inconsistencias de conceptos matemáticos; nos remitimos al estudio de Garbin (2000), quien presenta una revisión exhaustiva sobre esta línea de investigación. Lo que sí queremos resaltar de los aportes dados por esta investigadora, es la distinción entre los constructos "incoherencias e inconsistencias". En cierta manera, esta autora define las incoherencias a partir de las inconsistencias; así:

> "Si bien es cierto que son términos que pueden considerarse sinónimos, nosotros los usamos y seguiremos usando con matices diferentes aunque estén estrechamente relacionados. (...) **Cuando se habla de una idea o pensamiento inconsistente, es con relación al concepto matemático involucrado, o a contradicciones dentro de una teoría matemática dada**. Generalmente aparecen durante la resolución de un problema o en una respuesta al mismo. (...) Ya hemos hablado que una forma particular de inconsistencias directas son las que se presentan en la situación en que los estudiantes tienen que resolver un mismo problema representado de diferente forma, poniendo de manifiesto que los alumnos no mantienen respuestas consistentes ante varias representaciones. Es decir, alguna respuesta puede ser consistente con el concepto para un tipo de representación e inconsistente con el concepto para una representación distinta. (...) Ante esta situación en el que el estudiante tiene que resolver un mismo problema pero expresado de distintas maneras, se generan respuestas contradictorias entre sí (la de un problema con respecto al otro). **Nosotros llamamos a estas respuestas contradictorias entre sí, respuestas incoherentes, o coherentes en caso contrario. Las *líneas de coherencia* son las que permiten identificar este tipo de respuestas. En consecuencia, podemos tener un alumno cuyas ideas o respuestas sean inconsistentes con el concepto involucrado (idea o respuesta errónea) y, sin embargo, mostrarse coherente en su pensamiento (ideas o respuestas equivalentes en problemas diferentes)**" (Garbin, 2000, 255-258)

Lo anterior, nos permite inferir que en Garbin (2000), cuando se analizan las inconsistencias, se centran en el estudio de los errores conceptuales que presentan las ideas de los estudiantes teniendo como referencia el conocimiento matemático formal. En cambio cuando se analizan las incoherencias, están centrando la atención en la coherencia que exhiben los estudiantes con relación a los procesos de resolución con los que abordan cada una de las situaciones enunciadas en diferentes contextos y mediante la utilización de diferentes lenguajes y registros semióticos (Duval, 1999, 1996). De ahí que proponga el diseño de un instrumento de análisis como lo es la construcción de líneas de coherencia, que permiten identificar el tipo de respuesta coherente o incoherente.

Por otro lado, encontramos que en Moreno (2000), se hace referencia también a estos dos términos, más concretamente, esta autora habla de determinar el nivel de coherencia de las creencias y las concepciones de los profesores y de su influencia en las decisiones que determinan la práctica docente de cada profesor; y de valorar la consistencia y grado de permeabilidad de las creencias y concepciones de cada profesor en cuanto a la posibilidad de evolución de las mismas, es decir, posibilidad de que un profesor pueda pasar de una idea a otra a favor de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. Por tanto, no podemos equiparar el uso o connotación que da esta autora a estos términos en el estudio de las concepciones y creencias de los profesores sobre la enseñanza de las ecuaciones diferenciales en el nivel universitario, con las acepciones que propone Garbin (2000) para el estudio de los esquemas conceptuales de estudiantes de bachillerato sobre el infinito actual. Moreno usa el constructo coherencia basándose en la definición coloquial que aparece en el diccionario de la lengua española, y se centra en el análisis de la coherencias que exhiben los profesores en tres momentos: en el discurso de los profesores sobre la enseñanza de las ecuaciones diferenciales, lo que dice que hace en el aula y lo que se puede inferir de los documentos proporcionados por los profesores (programa de la asignatura, materiales de trabajo de los estudiantes, libros de texto que usan y las evaluaciones que proponen).

En esta investigación, utilizaremos las dos acepciones propuestas por estas investigadoras; así:

1. El término de inconsistencias hará referencia a la detección de errores, o bien en el tratamiento que dan los profesores al objeto derivada en la unidad didáctica, programaciones y evaluaciones que proponen de este concepto; o bien en el análisis de los niveles de comprensión del esquema de la derivada que tienen los profesores que participaron en este estudio, teniendo como referencia a la matemática como disciplina científica (Garbin, 2000; Garbin y Azcárate, 2002).
2. En cambio el término coherencia, lo utilizaremos en dos sentidos:
   - 2.1. Siguiendo a Garbin (2000), intentaremos definir la coherencia o incoherencia en el proceso de resolución con el que los profesores abordan situaciones que involucran diferentes fenómenos asociados a los macro objetos f (x), f ’(a) y f ’(x), enunciadas en diferentes contextos. Para ello, al analizar las diferentes categorías que definimos para describir el nivel de comprensión del esquema de la derivada en las dos dimensiones algebraica y gráfica, agrupamos los problemas que aportaban información común de una categoría determinada y construimos las líneas de coherencia del proceso de resolución.
   - 2.2. Siguiendo a Moreno (2000), intentaremos analizar el nivel de coherencia entre el discurso del profesor y algunos rasgos de su práctica; es decir, la coherencia entre el discurso sobre la enseñanza del concepto de derivada, con lo que dice que hace en el programa, en la unidad didáctica y lo que evalúa del concepto de derivada, con los aspectos de la práctica que pudimos inferir de los documentos proporcionados por él, al analizar el concepto de derivada, como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje.

2.2. Desarrollo conceptual en el PMA

2.2.1. Perspectiva Neo-piagetiana: la teoría APOE

Dubinsky y otros (1991, 1996, 1997, 2000...), han desarrollado y refinado, usando métodos cualitativos, un marco teórico como resultado de su aplicación en las investigaciones que el grupo RUMEC, liderado por Dubinsky, han venido realizando en la última década, sobre desarrollo curricular en educación matemática en el nivel preuniversitario y universitario. La perspectiva teórica que han denominado APOE, es el resultado de la interpretación de la teoría piagetiana constructivista y sus ideas relativas a la *abstracción reflexiva*, aplicadas al estudio cualitativo del desarrollo del pensamiento matemático avanzado.

En la revisión y adaptación de la teoría piagetiana para su aplicación en el nivel preuniversitario y universitario, se han encontrado con algunas dificultades, que fueron descritas en Dubinsky (1996). Una de ellas estriba en que en la teoría de Piaget el entendimiento conceptual requiere de la manipulación de objetos físicos, típico de las primeras etapas de construcción de conceptos, sin embargo, el mismo Piaget advierte que a medida que las etapas avanzan a un nivel superior, se requiere de la construcción y manipulación de nuevos objetos mentales y no físicos, para la construcción y desarrollo de conceptos matemáticos. Precisamente, la tarea entonces se centraba en encontrar los sustitutos apropiados para los objetos físicos, que entre otras cosas es uno de los problemas más importante en educación matemática. Dubinsky y colaboradores, proponen como sustituto el trabajo de programación con ordenadores.

La otra dificultad encontrada al buscar un acercamiento piagetiano para estudiar el pensamiento matemático avanzado radica en que al aumentar el nivel de complejidad de los conceptos matemáticos hay menos del desarrollo espontáneo en los individuos. Por tanto, el papel del profesor se multiplica y toma un rol principal a la hora de diseñar actividades y plantear situaciones problemas que propicien este tipo de desarrollo. Para tratar de superar estas dificultades, Dubinsky (1996), subraya sobre las siguientes ideas de Piaget que implementan en su propuesta teórica de investigación y desarrollo curricular en matemática a nivel superior.

- “Concentrarse en los mecanismos mediante los cuales se lleva a cabo el desarrollo intelectual. Estos incluyen la abstracción reflexiva, y la dicotomía desequilibración/reequilibración.
- Ayudar a los estudiantes a construir acciones, a interiorizarlas en procesos y a encapsularlos, en objetos.
- Ayudar a los estudiantes a tomar conciencia de las estructuras que han construido, a conectarlas con los conceptos matemáticos y a hacer construcciones adicionales para tratar con situaciones nuevas.
- Cambiar el papel del maestro de diseminador de información a guía y asistente
- Prestar atención a las voces de los estudiantes, a sus errores y a sus éxitos y tratar de entender su pensamiento.
- Crear situaciones que alienten a los estudiantes a hacer construcciones mentales para tratar con las situaciones de los problemas matemáticos.
- Permitir que los estudiantes construyan bases sobre la experiencia para los conceptos antes de enfrentar el formalismo que estructura los conceptos.
- Establecer un ambiente en el cual los estudiantes tengan oportunidad de interacciones sociales ricas, tanto con otros estudiantes como con el maestro” (Dubinsky, 1996)

Este enfoque teórico tiene tres componentes: el análisis teórico inicial; el diseño del tratamiento instruccional; y, la implementación y recolección de datos de investigación (Asiala *et al.*, 1997). Estos autores proponen un ciclo de investigación que pasa a través de las tres componentes, esbozadas en la figura 2, repitiéndolas tanto como sea necesario. Durante este proceso cíclico, tanto la teoría como el tratamiento instruccional se refinan y se mejoran a partir de los resultados empíricos (Dubinsky, 2000). En primer lugar, parten de un análisis teórico inicial que persigue explicitar lo que significa comprender un concepto matemático y cómo esa comprensión puede ser construida por un individuo; posteriormente, este análisis conduce al diseño de un dispositivo instruccional que busca que los individuos logren alcanzar las construcciones mentales que fueron identificados en el análisis teórico inicial; finalmente, como resultado de la implementación del dispositivo instruccional, se obtienen datos de investigación que son analizados en el contexto de la perspectiva teórica APOE.

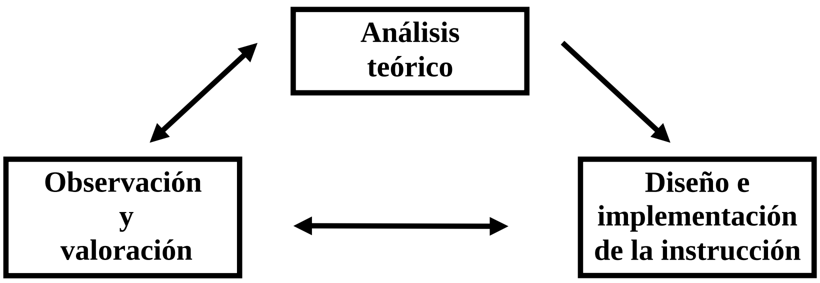


Figura 2. Componentes del marco teórico de la Teoría APOE

Los resultados obtenidos a partir de la aplicación de este ciclo de investigación han sido fuente fundamental de la consolidación de la teoría. Los objetivos que se han propuesto este grupo de investigadores en la aplicación de la teoría APOE en los numerosos estudios realizados han sido diferentes y variados. En muchos casos, se ha utilizado la teoría APOE para describir e interpretar el desarrollo de un concepto en la mente de los estudiantes en el nivel preuniversitario. En otros casos, el análisis de los datos ha conducido a la revisión de la descomposición genética (descripción teórica del desarrollo cognitivo). De igual forma, del resultado de muchos análisis específicos han logrado definir operativamente los constructos acción, proceso y objeto. Últimamente, los estudios de Clark *et al.* (1997) sobre la comprensión de los estudiantes de las reglas de derivación; los estudios Baker *et al.* (2000) sobre la comprensión de estudiantes de un problema complejo del cálculo (gráfico); y los estudios actuales de McDonald *et al.* (2001) sobre el desarrollo del esquema sucesión, han desvelado que la teoría involucrando las perspectivas acción, proceso y objeto era insuficiente y no adecuada para analizar sus datos sobre la comprensión de los estudiantes cuando los conceptos eran considerados como esquemas, pero que la triada de Piaget y García (1982): *intra*, *inter* y *trans*, era útil en la interpretación de los niveles de comprensión. Con estos aportes recientes sobre el estudio más minucioso de los esquemas se ha enriquecido y potencializado más la teoría (Dubinsky, 1996; 2000; Asiala *et al*., 1997; Clark *et al*., 1997; Baker *et al*., 2000).

2.2.1.1. Análisis teórico

El análisis teórico permite a los investigadores describir ciertas construcciones mentales, que estos autores consideran necesarias que un individuo elabore para desarrollar su comprensión de los conceptos matemáticos. La descripción de estas construcciones les permitirá modelar la epistemología y cognición del concepto matemático en el cual se están centrando. El punto de partida en esta primera etapa del ciclo, es la comprensión que los investigadores tienen de dicho concepto matemático y de sus experiencias como aprendices y enseñantes del concepto. Los interrogantes que iluminan esta primera fase de la investigación son,

> "¿Qué significa comprender un concepto matemático?, y, ¿cómo esa comprensión puede ser construida por un individuo?" (Asiala *et al*., 1996)

Estos autores sostienen que el marco teórico que proponen está fuertemente influenciado por una teoría del aprendizaje, la cual está basada en las ideas de Piaget concernientes a la abstracción reflexiva y la reconstrucción de éstas en el contexto de la matemática a nivel preuniversitario y primer año de universidad. Sin embargo, aclaran que no todas las componentes del marco que proponen se encuentran estrechamente ligadas a las ideas de Piaget (Asiala *et al.*, 1996).

En el seno de la teoría APOE, se parte de una gran afirmación sobre lo que significa aprender y conocer algún concepto matemático, que es la premisa que sustenta las investigaciones que ellos desarrollan,

> "El conocimiento matemático de un individuo es su tendencia a responder, ante la percepción de situaciones problemáticas de matemática, mediante la reflexión sobre los problemas y sus soluciones en un contexto social y por medio de la construcción y reconstrucción de acciones matemáticas, procesos y objetos; y su organización en esquemas, para usarlos al tratar con esas situaciones" (Asiala *et* al., 1996).

Como se puede observar la afirmación anterior contiene una postura teórica sobre el aprendizaje y el conocimiento matemático. Se reconoce que lo que un individuo conoce y es capaz de hacer, no está necesariamente disponible, para él, en un momento dado o ante una situación dada. El fenómeno anterior nos resulta familiar, tanto en nuestra labor como enseñantes o en nuestra propia experiencia como estudiantes, puesto que de alguna u otra forma, hemos vivido cómo a la hora de resolver un examen nos hemos enfrentado a una situación que no podíamos solucionar y posteriormente éramos capaces de resolverla correctamente. Otra situación análoga a la anterior, es nuestra impotencia al intentar resolver solos una situación problema, pero después bajo alguna orientación de un compañero o del profesor somos capaces de hacerlo. De este modo, lo que se resalta es que en la problemática del conocimiento hay dos cuestiones importantes a tener en cuenta: el aprendizaje de un concepto, y acceder a él cuando se necesite.

Por otro lado, la idea de situación problemática expuesta en la definición, hace referencia a la dicotomía desequilibración-reequilibración propuesta por Piaget, puesto que el estudiante debe ver el problema en la situación planteada y ser perturbado por éste en el momento en que el aprendizaje se está llevando a cabo. En relación al contexto social, al que también se hace referencia, en este marco lo contemplan en términos de aprendizaje cooperativo, pues consideran sumamente importante el trabajo en pequeños grupos (Dubinsky, 1996).

Esta postura frente a la problemática del conocimiento nos aporta elementos en dos direcciones: por un lado, como profesores nos invita a reflexionar sobre la forma en qué evaluamos a nuestros estudiantes para acercarnos a una mejor aproximación de lo que ellos realmente han aprendido de un concepto matemático; y por otro, como investigadores nos lleva a plantearnos la necesidad de diseñar y validar diferentes instrumentos que nos permitan acercarnos lo más posible a la problemática que queremos estudiar, y plantearnos la necesidad de que las conclusiones a las que lleguemos sean el resultado de la triangulación de la información proporcionada por diferentes fuentes.

De igual forma, dado que en matemática existe una fuerte tendencia a usar técnicas y algoritmos en la resolución de problemas, se puede caer con facilidad en aprenderlas y usarlas para solucionar ciertos tipos de problemas. Con la teoría APOE lo que se proponen es la búsqueda de la reflexión por parte de los individuos a la hora de aprender y comprender los conceptos matemáticos más que la memorización acrítica de técnicas y algoritmos independientemente del grado de sofisticación que éstos tengan.

Por tanto, bajo este marco teórico, comprender un concepto matemático implica darse cuenta del funcionamiento de los procesos que permiten intuir un resultado sin verse en la necesidad de realizar la totalidad de los cálculos; ser capaces de introducir diferentes variaciones de un mismo algoritmo para observar convergencias y divergencias, para establecer relaciones, para organizar experiencias dentro del ámbito matemático como en otros contextos. En general, se plantea la necesidad de *reflexionar* para poder llegar a aprender y comprender conceptos matemáticos. Reflexionar en el sentido de poner atención consciente a las operaciones que el individuo está realizando al resolver una situación problemática en matemática (Asiala, *et al.*, 1996).

Esta perspectiva teórica pone un énfasis en las construcciones mentales que un individuo elabora cuando se enfrenta a la actividad matemática, reconociendo que éstas son el resultado de reconstrucciones de elementos previamente construidos, de recordar y repetir métodos ya aplicados en otras situaciones problemas. Por tanto, para alcanzar la comprensión y el desarrollo de un concepto matemático se requiere hacer reconstrucciones diferentes de una situación problema previamente tratada, la cual puede contener elementos más sofisticados que la diferencien de la primera (Asiala *et al.*, 1996).

Lo anterior, desvela que el desarrollo intelectual de un individuo no versa precisamente sobre la adquisición de porciones específicas de conocimiento sino, más bien, requiere del surgimiento de mecanismos poderosos a través de los cuales el sujeto aumenta su habilidad para comprender situaciones matemáticas complejas. Estos mecanismos incluyen la abstracción reflexiva, las dicotomía asimilación-acomodación y desequilibración-reequilibración, y la tricotomía *intra*, *inter* y *trans*; lo cual muestra la aplicación y adaptación que hacen de la teoría piagetiana en la teoría APOE (Dubinsky, 1996).

Los resultados del análisis teórico arrojan inicialmente lo que han denominado *descomposición genética* del concepto matemático, la cual la definen en los siguientes términos,

> "La descomposición genética de un concepto matemático es un conjunto estructurado de constructos mentales, los cuales pueden describir cómo el concepto puede ser desarrollado en la mente de un individuo" (Asiala *et al.*, 1996)

El anterior constructo teórico, definido por este grupo de investigación en el marco de la teoría APOE, nos parece muy sugerente porque se convierte en una herramienta poderosa tanto para investigadores, como para formadores de profesores y profesores de secundaria. La descomposición genética de un concepto matemático nos lleva a reflexionar sobre los siguientes supuestos: qué elementos matemáticos (sintaxis) y no matemáticos (semántica) del concepto queremos que nuestros alumnos aprendan; y, cómo lograr la comprensión del concepto por parte de nuestros estudiantes.

La problemática que nos interesa focalizar en esta investigación es tratar de describir las formas de conocer el concepto de derivada que tienen los profesores como objeto matemático de enseñanza y aprendizaje. Encontramos que en este marco se resaltan dos componentes del conocimiento profesional del profesor que nosotros consideramos importantes en nuestro estudio: (1) la importancia que tiene el conocimiento matemático en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Es decir, se propone un análisis riguroso del concepto matemático, desde la misma matemática y desde la historia de la matemática, que ilumine posteriormente la enseñanza del concepto. Desvelando así, la seriedad con que debemos asumir la transposición de didáctica de los conceptos matemáticos para ser llevados al aula en cualquiera de los niveles de enseñanza; y (2), la importancia del conocimiento didáctico del contenido matemático, puesto que con la misma rigurosidad nos lleva a reflexionar sobre las formas de conocer que queremos que los estudiantes construyan del concepto de derivada. En esta segunda implicación, encontramos que se cuestiona sobre las construcciones que deseamos que construyan nuestros estudiantes del concepto; lo cual nos lleva a otra implicación y es cómo diseñamos las actividades, las tareas y la agenda de enseñanza de tal forma que permitan activar y desarrollar ciertos procesos cognitivos (interiorización, coordinación, etc.) en la búsqueda de las construcciones mentales deseadas (acciones, procesos, objetos y esquemas), que nos permitan comprobar la comprensión por parte de los estudiantes del concepto matemático en cuestión.

Centrándonos en el concepto matemático de derivada que es el que nos interesa en esta investigación, en Asiala y otros (1997), encontramos una descomposición genética inicial del concepto de derivada como resultado de un análisis teórico del mismo, que es la base para el diseño del tratamiento instruccional de un curso de cálculo en el nivel preuniversitario. Después de implementar el diseño instruccional en un curso de cálculo tomaron datos de investigación y, a partir de los resultados encontrados, proponen una reestruccturación de la descomposición genética inicial, la cual se convirtió en punto de partida para la descomposición genética que hicimos de este concepto en esta investigación.

Para la realización de la descomposición genética del concepto de derivada, partimos de la comprensión de este concepto que tenemos las investigadoras y de los aportes de investigaciones que se han realizado en este campo (Azcárate, 1990; Asiala *et al*., 1997; Baker *et al*., 2000; Font, 2000). En el capítulo 4, nos detendremos en la descripción de la *descomposición genética* que realizamos de este concepto para utilizarla como categoría teórica en el análisis del concepto de derivada: como objeto institucional y como objeto personal (objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje).

i. Procesos cognitivos

En Dubinsky (1991) considerando elementos de la teoría piagetiana, se proponen cinco tipos de abstracción reflexiva relevantes dentro del pensamiento matemático avanzado. Las cuatro primeras ya habían sido consideradas por Piaget y la última fue tratada finalmente por Piaget pero sin llegar a considerarla como abstracción reflexiva. Estos mecanismos son: interiorización, coordinación, encapsulación, generalización y reversión.

En artículos posteriores se ha puesto más énfasis a unos mecanismos que a otros dentro de la construcción de conceptos matemáticos. A continuación, definiremos en el marco de la teoría APOE, los mecanismos mentales que consideramos importantes en la construcción y desarrollo conceptual dentro del pensamiento matemático avanzado, y que posteriormente utilizaremos como categorías teóricas en el análisis de unidades didácticas, libros de textos y formas de conocer el concepto de derivada por parte de los profesores de nuestro estudio.

- **Interiorización**

Inicialmente Piaget (1990), define el proceso de *interiorización* como la traducción de una sucesión de acciones materiales dentro de un sistema de operaciones interiorizadas. Como ejemplo de un proceso de interiorización se cita la propiedad conmutativa de la adición, donde los chicos a partir de la manipulación de los elementos de un conjunto (acciones materiales) pueden llegar a deducir la conmutatividad de la suma de los elementos del conjunto (operación interiorizada).

Dubinsky y colaboradores, basados en las ideas de Piaget, definen el proceso de interiorización de una acción como la construcción mental de un proceso, mediante una serie de acciones sobre objetos cognitivos, que pueden ser realizados o imaginados para ser ejecutados en la mente del individuo sin necesariamente llevar a cabo todos los pasos específicos (Ramírez, 2000).

> “Se dice que una acción ha sido *interiorizada* en un proceso, cuando los individuos reflexionan sobre la acción y construyen una operación interna que realiza la misma transformación” (Asiala *et al.*, 1997)

Por tanto, el proceso de interiorización de acciones en proceso debería convertirse en el puente que permite ir de una primera construcción mental (acción) hacia otra de un nivel más sofisticado (proceso). Ordinariamente, muchas de las actividades que diseñamos para que los estudiantes aprendan conceptos matemáticos no contemplan el paso de una construcción mental a otra. Es decir, que no están diseñadas teniendo en cuenta el desarrollo cognitivo de los estudiantes, muy por el contrario se muestran desconexas entre sí y lo que propician es la memorización de técnicas y algoritmos que permiten solucionar un tipo concreto de ejercicios, pero que no llegan a interiorizarse en procesos. Por ejemplo, usualmente en los libros de texto de nuestro contexto se plantean ejercicios de este tipo:

> “1. Encontrar dy/dx en cada uno de los siguientes problemas:
> a.) $y = f(x) = 5x^2 + x + 1$ (...)
> 2. Encontrar ds/dt, si $s(t) = 8t^2 + 7t$ ” (Londoño y Bedoya, 1988)

En los ejercicios anteriores, podemos destacar dos objetos importantes: (1) se supone interiorizar la acción de derivar en el proceso de aplicación de las técnicas de derivación; y (2), que esta acción interiorizada pueda ser puente hacia otro proceso más complejo como podría ser el paso al objeto velocidad instantánea, es decir, ayudaría a la coordinación de los procesos de calculo de la derivada un punto y la velocidad instantánea. Sin embargo, en la mayoría de libros de texto, sólo se promueven la acción de derivar, por tanto se alcanzaría sólo el objetivo (1); y éstos son muy deficientes en la propuesta de tareas que permitan alcanzar el objetivo (2). Por tanto, promueven únicamente la acción de derivar la función dada mediante la aplicación de las reglas de derivación y no se introduce ningún tipo de puente que permita interiorizar esta acción en el proceso de obtener coordinadamente la derivada en un punto y la velocidad instantánea.

- **Coordinación**

Piaget ya distinguía, con la frase “coordinación general de acciones”, que en la construcción de una nueva acción o de un proceso intervenían dos o más acciones que se relacionaban entre sí. Muchos de los ejemplos empíricos muestran la composición o coordinación de dos o más procesos para construir uno nuevo (Dubinsky, 1991). Por tanto, el proceso de *coordinación* de acciones o de procesos conduce a la construcción de un nuevo proceso unificador y más sólido.

En el caso concreto de la derivada de una función, consideramos sumamente importante la coordinación de procesos en la búsqueda de la construcción del esquema de la función derivada. Por ejemplo, para llegar a la comprensión del concepto de derivada se requiere que los estudiantes comprendan algunos conceptos previos, como por ejemplo, la pendiente de una recta. Cuando decimos que se requiere la comprensión del concepto de pendiente de la recta nos referimos a la importancia que tiene la coordinación de diferentes representaciones de dicho concepto. Cada una de estas representaciones incluyen diferentes procesos que no necesariamente el individuo los tiene coordinados, aunque pueda realizarlos independientemente. Por tanto, se requiere diseñar actividades que propicien la coordinación de estas acciones y procesos en la búsqueda por la construcción del concepto matemático. A continuación citamos una parte de la descomposición genética que realizamos del concepto de derivada donde nos centramos en el concepto de pendiente de una recta:

> "5. Coordinación de representaciones del concepto de pendiente de una recta
> 5.1. La pendiente determina el grado de inclinación de la recta
> 5.2. La pendiente es la tangente trigonométrica del ángulo que forma la recta con el eje x
> 5.3. La pendiente como el número (coeficiente) en la fórmula $y = ax + b$
> 5.4. La pendiente como la razón entre los incrementos de las variables
> 5.5. Traducción de registros (gráfico, tabla, fórmulas, verbal) en el cálculo de la pendiente de una recta." (Badillo, 2001)

- **Encapsulación y des-encapsulación**

Dentro de la teoría APOE, la *encapsulación* es la transformación mental de un proceso, el cual se ha interiorizado en una acción, en un objeto cognitivo. Este objeto puede considerarse como una entidad total y puede actuarse mentalmente sobre él por medio de acciones y procesos. Bajo estas circunstancia se afirma que un proceso se ha encapsulado en un objeto (Ramírez, 2000).

Por tanto, la encapsulación es el proceso de conversión de un proceso dinámico en un objeto estático. Por ejemplo, si consideramos el proceso de aproximar las tasas medias de variación de una función $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, cuando h tiende a cero, con el objeto derivada como el $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. En este caso se asocia el proceso dinámico de hallar las tasas medias de variación (que está formado por una clase de objetos) con el objeto límite (estático), se dice que se ha encapsulado el proceso de calcular las tasas medias de variación en el objeto función derivada como un límite (Font, 2000)

Cuando se realiza el proceso mental de ir hacia atrás, es decir, del objeto al proceso del cual fue encapsulado, se dice que hemos *des-encapsulado* un objeto en su proceso inicial. Por ejemplo, si tenemos el objeto f (x) lo podemos des-encapsular en un proceso que permite al individuo pensar en la función como una asignación a al variable independiente de uno o más valores, que realiza una o más operaciones sobre el conjunto de entrada, y del cual se obtienen los valores de la variable dependiente. Es decir, que a partir de la interpretación de un objeto (estático) como lo es f (x), pasamos a centrarnos en otros objetos como la variable independiente x y en una secuencia de acciones, bien sea físicas o mentales, que se realizan con estos objetos (proceso dinámico) (Font, 2000).

- **Generalización**

Cuando un sujeto aprende a aplicar un esquema ya existente a una gran colección de fenómenos, se dice que el esquema ha sido *generalizado*. Esto puede ocurrir porque el sujeto se da cuenta de la mayor aplicabilidad del esquema. De igual forma, esto también puede ocurrir cuando un proceso es encapsulado en un objeto (Dubinsky, 1991),

> "(...) por ejemplo, la razón entre dos cantidades, o la adición, o que un esquema ya existente como el de la igualdad o adición, puede después ser aplicado a éste, para obtener, respectivamente, proporción o multiplicación. Entonces, el esquema permanece el mismo excepto que ahora tiene mayor aplicabilidad." (Dubinsky, 1991).

Piaget hizo referencia a este proceso como una reproductividad o asimilación generalizada, y lo denominó como generalización *extensional* (Piaget y García, 1982).

Consideramos que en nuestro caso concreto, la capacidad de aplicar el esquema del concepto de derivada a todos los fenómenos donde halla variación es una generalización de las razones de cambio en diferentes contextos o disciplinas. Por ejemplo, en económicas las situaciones problemas de costo marginal, en física los problemas de velocidad y aceleración, entre otros.

- **Tematización**

Cuando un sujeto reflexiona sobre su comprensión del esquema de un concepto, visto como "un todo", y es capaz de realizar nuevas acciones sobre el esquema, entonces se dice que el esquema ha sido *tematizado* en un objeto (Ramírez, 2000). Es decir que se llega a una nueva estructura mental, que son los esquemas, en esta instancia pueden ser tratados como objetos e incluirse en organizaciones de esquemas de "más alto nivel" (Asiala, *et al.*, 1996).

Por ejemplo, las funciones pueden ser concebidas dentro grupos, se pueden introducir operaciones sobre estos grupos, y se pueden examinar propiedades de las operaciones. Finalmente, es posible organizar todo lo anterior construyendo un esquema de espacio de funciones, el que puede ser aplicado a conceptos como: espacios duales, espacios de proyección o mapeo lineales y al álgebra de funciones.

ii. Construcciones mentales

La siglas APOE con la cual nos hemos referido a la teoría que hemos desglosado en este capítulo, significan las acciones (*actions*), los procesos (*processes*), los objetos (*objects*) y los esquemas (*schemes)*, que son las construcciones mentales, que en el marco de esta teoría, un sujeto realiza para obtener significados de las situaciones problemas en matemática. Como ya analizamos en la sección anterior, los mecanismos que permiten hacer estas construcciones se llaman abstracciones reflexivas. Con la propuesta teórica APOE, se trata de describir, el camino hacia la construcción de un concepto matemático, en la mente de un sujeto (Ver figura 3).

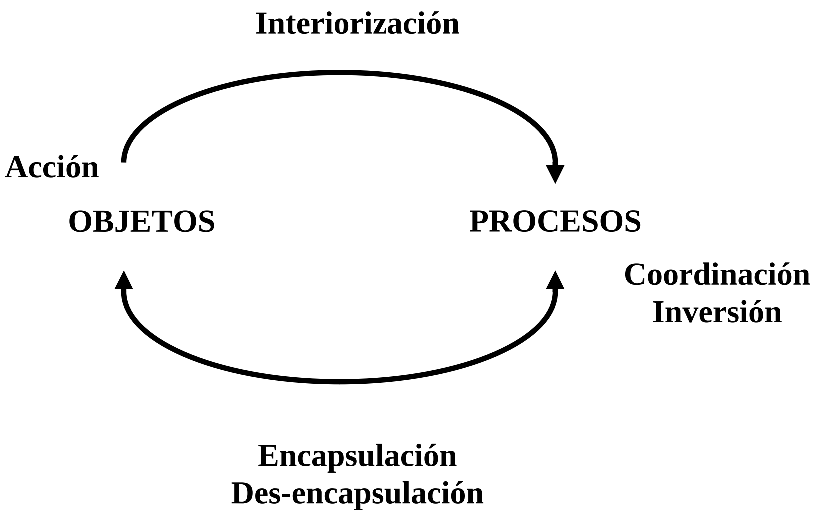


Figura 3. Construcciones mentales para el conocimiento matemático en el marco de la teoría APOE (Asiala *et al.*, 1996)

La hipótesis que subyace en esta teoría es,

> "que todo concepto matemático puede ser descrito por esta teoría y si el diseño de la instrucción se basa en la misma, entonces los estudiantes aprenderán mejor que con otras pedagogías. El desarrollo es una progresión de acciones, procesos, objetos y esquemas" (Dubinsky, 2000)

Un aspecto que resaltan los autores, es que el desarrollo de estas construcciones mentales no es lineal, sino dialéctico. Es decir, que no ocurren en una secuencia lógica simple, muy por el contrario, estas construcciones pueden aparecer simultáneamente y requerirse la una a las otras. A continuación, por motivos de exposición, haremos una descripción de cada una de ellas de manera lineal.

- **Acciones**

Una acción la definen en los siguientes términos,

> "es una transformación de objetos que el sujeto percibe como algo externo" (Asiala *et al*., 1996; Dubinsky, 1996)

Lo anterior implica que un individuo cuyo entendimiento o comprensión de un concepto matemático está limitado por una concepción acción, puede realizar transformaciones reaccionando sólo a indicaciones externas que le proporcionan detalles precisos sobre que pasos dar. Por ejemplo, un estudiante tiene una concepción acción de la función, cuando no es capaz de interpretar una situación como una función, si no se le proporciona una ecuación o expresión algebraica para ir evaluándola en diferentes puntos del dominio. Esto demuestra, que este estudiante sólo puede manipular la fórmula dada y evaluarla en puntos específicos del dominio, pero difícilmente podrá trabajar y comprender las funciones a trozos, la inversa de funciones, la composición de funciones, la función derivada y solucionar ecuaciones diferenciales.

Estas dificultades que presentan los sujetos que exhiben una perspectiva acción de los conceptos matemáticos, desde el marco de la teoría APOE, están relacionadas con la inhabilidad de los estudiantes para interiorizar estas acciones en procesos, o encapsular los procesos en objetos (Dubinsky, 1996). De allí la importancia del rol del profesor en el diseño de actividades e implementación de estrategias que permitan activar estos procesos cognitivos en los individuos.

En esta misma dirección, basándonos en los trabajos de Llinares y García (1994; 1996) y Asiala *et al.*, (1997), resumimos la perspectiva acción del concepto función y proponemos la perspectiva acción del concepto de derivada, que han sido un punto de referencia para este trabajo.

Función	**Función derivada**
• **Concepción acción:** 1. Necesitan fuertemente encontrar o construir una ecuación o expresión algebraica o fórmula para poder evaluar el valor de la función en un punto del dominio	• **Concepción acción:** 1. Necesitan obtener la expresión algebraica de la función para obtener la función derivada, y posteriormente, el valor de la derivada en un punto 2. No existe una coordinación entre la derivada en un punto y la función derivada

Compartimos la postura de los autores que han desarrollado esta teoría cuando afirman, que si bien es cierto que la concepción acción de un concepto matemático, es en general, muy limitada, las acciones marcan el principio del entendimiento de un concepto. Por ello sugieren, que los diseños instruccionales deben comenzar con actividades diseñadas para propiciar la construcciones de acciones en los estudiantes (Dubinsky, 1996).

- **Procesos**

Los procesos los definen de la siguiente manera,

> "Cuando una acción se repite y el individuo reflexiona sobre ella, ésta puede interiorizarse en un proceso" (Asiala *et al*., 1996; Dubinsky, 1996)

Es decir, que el individuo realiza una construcción interna que ejecuta la misma acción, pero ahora, no necesariamente dirigida por un estímulo externo. Por tanto, un sujeto que exhiba una concepción proceso de un concepto matemático, puede reflexionar sobre ella, describirla, o incluso invertir los pasos de la transformación sin tener la necesidad de volver a realizar los pasos (Dubinsky, 1996).

Retomando los trabajos de Asiala y otros (1997) y los de Llinares y García (1994; 1996), a continuación presentamos la concepción proceso del conceptos de función y proponemos la perspectiva proceso del concepto de derivada, que han sido un punto de referencia para este trabajo.

Función	Derivada
• **Concepción proceso:** 1. Las funciones son entendidas como reglas de asignación que conectan a cada valor de la variable independiente *x* del dominio un valor de la variable dependiente *y* 2. Comprenden la notación f (a) donde a es un número real	• **Concepción proceso:** 1. La derivada en un punto se entiende como el valor de la pendiente de la recta tangente en ese punto, y para obtenerlo se necesita calcular el valor de la pendiente de la recta tangente a partir de la información gráfica o diferenciar la ecuación de la recta tangente. 2. Aún no se tiene construido la relación entre la derivada de una función en un punto y la función derivada, como subclase y clase respectivamente.

A diferencia de la acción, el sujeto percibe el proceso como una transformación interna, y que controla, en vez de percibirla como algo que hace como respuesta a una o varias señales externas. Por ejemplo, para el caso de funciones como la función sen (x), se requiere de una concepción proceso del concepto función porque no se cuenta con instrucciones directas o explícitas para obtener una salida para una entrada dada, por ello, para poder calcular la función en todo el dominio, se debe imaginar el proceso de asociar a cada número real con su seno.

En general, un sujeto que tenga una concepción proceso del concepto función, puede ligar o coordinar dos o más procesos para construir una composición de funciones. De igual forma, puede invertir el proceso para obtener funciones inversas.

- **Objetos**

En el marco de APOE, los objetos los definen así,

> "Cuando un sujeto reflexiona sobre las operaciones aplicadas a un proceso en particular, toma conciencia del proceso como un todo, realiza aquellas transformaciones (ya sean acciones o procesos) que pueden actuar sobre él, y puede construir de hecho esas transformaciones. Entonces está pensando en este proceso como un objeto. En este caso, decimos que el proceso se ha encapsulado en un objeto" (Asiala *et al*., 1996; Dubinsky, 1996)

Desde está perspectiva, siguiendo con los autores que hemos citado, Asiala y otros (1997) y Llinares y García (1994; 1996), plantemos las siguientes definiciones de la concepción objeto del concepto función enunciada por ellos,

Función	Función derivada
• **Concepción objeto:** 1. Trabajan con una notación funcional sin referencia de una expresión de la función 2. Hacen traducciones entre diferentes representaciones de una función 3. Pueden dibujar un gráfico de la función con la información específica de los valores y propiedades de la función y su derivada	• **Concepción objeto:** 1. El objeto función derivada según la situación se puede entender como una clase de objetos que son la derivada de la función en cada punto del dominio, o bien como un objeto en el que se pueden realizar nuevas acciones, p. e.: la segunda 2. Diferencian la derivada en un punto de la función derivada 3. Hacen traducciones entre diferentes representaciones de funciones 4. Coordinan las representaciones de la función y la función derivada, y hacen traducciones entre diferentes representaciones de la función derivada 5. Coordinan varias interpretaciones del concepto de derivada en diferentes contextos

Se advierte que a lo largo de la realización de una acción o un proceso sobre un objeto, suele ser necesario des-encapsular y regresar el objeto al proceso del cual se obtuvo con el propósito de usar sus propiedades en la manipulación. Para el caso concreto del concepto función, sugieren que en la manipulación de funciones para encontrar operaciones con funciones, tales como: suma, producto, o cuando se forman conjuntos de funciones, se observa fácilmente cómo aparecen la encapsulación de procesos en objetos y la des-encapsulación de objetos a procesos. En términos generales, se considera como un proceso extremadamente difícil la encapsulación de procesos en objetos.

- **Esquemas**

Finalmente, basándose en los constructos anteriores, definen un esquema en los siguientes términos,

> "Una vez construidos, objetos y procesos pueden ser interconectados de varias formas: por ejemplo, dos o más procesos pueden ser coordinados ligándolos (a través de la composición u otras formas); procesos y objetos se relacionan en virtud de que el primero actúa sobre el segundo. Una colección de procesos y objetos puede ser organizada en una manera estructurada para formar esquemas" (Asiala *et al.*, 1996)

De igual forma como los procesos y objetos se organizan en estructuras más sofisticadas llamadas esquemas, los esquemas también se pueden coordinar y organizar en estructuras de un nivel más alto: cuando esto ocurre se da la transformación que ya definimos como tematización.

Dubinsky y colaboradores (1997a), reconocen que en muchas de sus investigaciones no se ha progresado en la comprensión de un esquema de la misma manera como se ha avanzado en otros aspectos de la teoría. Sin embargo, siempre han estado conscientes de la importancia de esta noción, como parte integral de la teoría, para tener una visión global de lo que ocurre en la mente de un individuo. De hecho, precisamente a partir de las reflexiones sobre sus investigaciones, en el seno del grupo RUMEC, han revisado elementos de ella, relevando la importancia del constructo esquema y su relación con la triada de Piaget y García. Los recientes trabajos muestran la evolución de la teoría APOE en el tratamiento de los niveles de comprensión de un concepto matemático.

iii. Niveles de comprensión de un esquema

Piaget y García (1982) desarrollan una teoría detallada sobre los esquemas y su desarrollo. Ya anteriormente, Piaget (1970/1971, 1970/1972), citados en Baker y otros (2000), había discutido la idea de esquema. Según Piaget, el conocimiento originaba en un niño, incluso antes, el uso del lenguaje, más o menos en su segundo año de vida. Durante este pre-lenguaje, las estructuras lógico-matemática ya existen en el niño y cerca del inicio del segundo año, el niño exhibe una inteligencia sensorio-motora. Piaget describe la inteligencia sensorio-motora como la inteligencia práctica que tiene su propia lógica y que puede llamarse la lógica de la acción. La acción que se deriva de esta inteligencia, puede ser repetida y generalizada. Cualquiera es repetible y generalizable en una acción es lo que Piaget se refiere como un esquema.

Cualquier esquema en particular no tiene en sí mismo una componente lógica, pero los esquemas son coordinados unos con otros, y este hecho resulta en la coordinación general de acciones. Estas coordinaciones forman una lógica de las acciones que son el inicio de las estructuras lógico-matemática. Piaget dice que un esquema puede incluir sub-esquemas o sub-sistemas. Los sub-esquemas son incluidos en el esquema total, en la misma forma que la estructura lógico-matemática de clasificación las sub-clases son incluidas en la clase total. En una etapa posterior, estas relaciones de inclusión de clases nos conducen a conceptos (Piaget y García, 1982).

Construyendo sobre las ideas constructivistas de Piaget, Asiala y otros (1996) introdujeron la teoría APOE, donde describen,

> "un esquema de un individuo para un tópico matemático, como la totalidad de su conocimiento conectado consciente o inconscientemente a este tópico".

Más allá, este grupo afirma, que el esquema puede ser incluido entre un nivel superior de las estructuras matemáticas. Uno puede no necesariamente acceder a cada una de estas construcciones en todas las situaciones, porque el aprendizaje matemático no es lineal. Esta teoría del desarrollo del esquema puede explicar por qué los estudiantes tienen dificultades con las diferentes partes de un concepto y pueden incluso tener algún problema con la misma situación en diferentes contextos. Estas comprensiones parciales son conseguidas y luego añadidas poco a poco con una reorganización continuada de las ideas (Baker *et al*., 2000). Bajo este razonamiento introducen la definición de esquema maduro,

> ***"Esquema maduro:*** es una coherente colección de acciones, procesos, objetos y otros esquemas construidos previamente que están coordinados y sintetizados por el individuo para formar estructuras utilizadas en situaciones problemas" (Baker *et al.,* 2000).

El individuo puede reflexionar sobre un esquema y transformarlo en un objeto al cual puede realizarles nuevas acciones. Durante este proceso de transformación, el esquema en sí mismo puede llegar a ser un objeto. Este nuevo objeto puede ser transformado por un nivel de acciones superior conduciendo a nuevos procesos, objetos y esquemas para construir nuevos conceptos. Por tanto, la acción, proceso y objeto desarrollados continúan siendo reconstruidos en esquemas existentes.

> ***"Coherencia en un esquema:*** afirman que una persona demuestra coherencia en su esquema de un concepto particular, cuando discierne qué está contenido dentro del esquema y qué no está contenido" (Baker *et al.*, 2000).

La teoría de los niveles de la triada en el desarrollo de un esquema, es una componente integral de la teoría APOE, ha sido utilizado por muchos investigadores del grupo RUMEC en diversos estudios sobre la comprensión de los estudiantes en varias áreas de la matemática. Por ejemplo, el estudio sobre la comprensión de los estudiantes de las reglas de derivación**,** realizado por Clark y otros (1997), encontraron que la teoría involucrando acciones, procesos y objetos no era adecuada para analizar sus datos sobre la comprensión de los estudiantes, pero que la triada de Piaget y García era útil en la interpretación de niveles de comprensión.

Los autores consideran que el desarrollo de un esquema es un proceso dinámico y cambiante. Citando a Piaget y García (1982), proponen que el crecimiento conceptual está determinado por un mecanismo seguro y este envuelve tres niveles o etapas, que denominaron *triada*. Afirman, que la naturaleza de esta triada es funcional, no estructural, y lo que les interesa describir son los aspectos psico-dinámicos generales.

Piaget y García (1982), plantean la hipótesis que estos niveles pueden ser encontrados cuando uno analiza el desarrollo de un esquema. Estos autores al plantear la triada, lo hacen considerando que los mecanismos de desarrollo psicogenético son comunes a los desarrollo de la historia de las ciencias. Se trata entonces, de una triada dialéctica que se reencuentra en todos los dominios y en todos los niveles tanto de la historia de la matemática como de la psicogénesis del pensamiento matemático (Piaget y García, 1982). Los niveles definidos en la triada, los cuales ocurren en un orden fijo son: *intra*, *inter* y *trans*, a continuación nos centraremos en cada uno de ellos.

- **Nivel intra**

En la fase preliminar de la triada encontramos el nivel *intra*, en él eventos particulares u objetos son analizados en término de sus propiedades. Las explicaciones en este nivel son locales y particulares. Un objeto en el nivel intra no puede ser reconocido por el estudiante como debería ser y su forma es similar a la de una generalización simple (Baker *et al.*, 2000).

En este nivel el estudiante se concentra en una acción repetitiva o una operación, pero no tiene la capacidad para relacionar la acción con el sistema de condiciones a través de la cual él puede extender sus aplicaciones e incluirlas en un sistema de transformaciones interdependientes. Por ejemplo, para el nivel intra del concepto de derivada, Baker y otros (2000), lo definieron en los siguientes términos:

> **"Nivel intra del esquema de la derivada:** Los estudiantes interpretan la derivada como la pendiente de la línea tangente en un punto específico, demostrando esta interpretación con los intervalos de crecimiento y decrecimiento, o alternativamente, resolviendo un problema de tasa de cambio. Sin embargo los estudiantes no pueden hacer conexiones entre estos dos problemas".

- **Nivel inter**

En el nivel *inter*, los estudiantes usan, comparan y reflexionan sobre ideas que ellos tienen aisladas y esto les lleva a construir relaciones y transformaciones (Baker *et al.*, 2000). En este nivel los estudiantes pueden establecer relaciones y pueden deducir de una operación inicial, una vez la tienen comprendida, otras operaciones que están implicadas o que pueden coordinarse con operaciones similares. Este proceso lleva a los estudiantes a un grupo de sistemas utilizando un método que incluye nuevas transformaciones. Para el mismo caso de la derivada, Baker y otros (2000), proponen,

> **“Nivel inter del esquema de la derivada:** El estudiante *coordina* la noción de derivada como la pendiente de la recta tangente con la idea de derivada como la razón de cambio en un punto dado. El o ella puede utilizar estas ideas para describir la variación local de una función”

- **Nivel trans**

En el nivel *trans,* el estudiante reflexiona sobre estas coordinaciones y relaciones desarrollando nuevas estructuras. A través de las *síntesis* de las transformaciones en el nivel inter, el estudiante construye y tiene conciencia de que el esquema está completo, y puede percibir nuevas propiedades globales que eran inaccesibles en otros niveles anteriores (Baker *et al.,* 2000). Siguiendo con el mismo ejemplo de la derivada, definen para el nivel trans del esquema de la derivada,

> **“Nivel trans del esquema de la derivada:** los estudiantes agrupan todas las derivadas como pendientes o razones de cambio de una función en un punto dado y reconocen que todas que todas las situaciones en la cual la variación esta involucrada está relacionada con el concepto de derivada. Los estudiantes pueden discriminar entre aquellas relaciones que están incluidas y aquellas que no están, demostrando *coherencia* del esquema”.

En cada etapa de la triada el estudiante reorganiza el conocimiento adquirido durante la etapa anterior. La progresión es gradual y no necesariamente lineal. En el proceso de aprendizaje uno desarrolla diferentes esquemas, y el crecimiento y cambio de cada esquema puede ser descrito utilizando la triada. Mientras se desarrolla el conocimiento, las personas construyen muchos esquemas coexistentes, todos ellos están constantemente cambiando y varían en los niveles de evolución. Por tanto, en algunas situaciones problemáticas una persona puede necesitar coordinar varios esquemas. Cada esquema está constituido por acciones, procesos, objetos y otros esquemas y sus relaciones. En particular un esquema puede influir fuertemente en el desarrollo de uno u otros esquemas. En cada caso, se puede identificar algunos componentes del esquema y su multidimensionalidad.

Por tanto, en la comprensión del desarrollo del esquema en general, uno puede identificar no sólo el crecimiento de una de las componentes del esquema, sino también la coordinación. Entonces, en el esquema general esta coordinación lleva a nuevas estructuras que fueron construidas sobre las propiedades de las componentes de los esquemas.

2.2.1.2. Tratamiento instruccional (implementación didáctica)

El tratamiento instruccional es la segunda componente de la teoría APOE. Para el diseño del tratamiento instruccional de un concepto matemático específico toman como base el análisis teórico inicial (descomposición genética que han elaborado de dicho concepto). Además, adoptan una perspectiva teórica sobre el aprendizaje que influencia el diseño instruccional en dos direcciones:

> "La primera, el análisis teórico postula ciertas construcciones mentales específicas que la instrucción debería ayudar a desarrollar.
> La segunda, el conocimiento matemático que un individuo construye se refleja mediante el uso de ciertas construcciones mentales" (Asiala *et al.*, 1996)

En cuanto al enfoque instruccional, basado en una variación del método estándar de espiral que han denominado *spray holístico*, trata de llevar al estudiante a un ambiente intencionalmente desequilibrado que contenga los elementos más variados posibles sobre el tema que se va a estudiar. Es decir, que optan por una forma más holística en la presentación del conocimiento en detrimento de una forma más secuencialmente organizada.

Dubinsky (1996), afirma que el método pedagógico que sustenta sus investigaciones, con el fin de alcanzar sus objetivos, está conformado por tres grandes principios: investigación sobre la enseñanza, el ciclo de enseñanza ACE y el aprendizaje cooperativo. Nos dedicaremos a hablar sucintamente del primero y el último bloque y en la siguiente sección nos detendremos más detenidamente en el ciclo de enseñanza ACE.

En relación con el primero de ellos, la investigación sobre la enseñanza, enfatizan que las investigaciones son primordialmente estudios cualitativos, donde la base de la información surge de cuestionarios que deben resolver por escrito y de entrevistas en profundidad con los estudiantes sobre sus respuestas al cuestionario y sobre cómo están pensando cuando se enfrentan a la resolución de situaciones problemas en relación con el concepto matemático en cuestión.

Atendiendo al aprendizaje cooperativo, considera que en la implementación del tratamiento instruccional, del que hablaremos a continuación, los estudiantes realizan su trabajo durante todo el curso académico (lo cual incluye tareas y algunas evaluaciones) en grupos cooperativos permanentes. La hipótesis que subyace de esta opción metodológica es que, este tipo de trabajo, les proporciona un ambiente de interacción social que propicia la maduración de sus entendimientos (Dubinsky, 1996).

Para la implementación del tratamiento instruccional propuesta para desarrollar las construcciones mentales de los estudiantes con base en el análisis epistemológico que hacen del concepto inicialmente, han adoptado una perspectiva pedagógica llamada ciclo de enseñanza ACE (actividades con ordenador, discusiones en clases y ejercicios de afianzamiento). Este grupo señala que la principal estrategia del método de enseñanza ACE es incluir el uso del lenguaje de programación que ayude a la construcción de los conceptos matemáticos y el trabajo en grupos cooperativos que propicie la discusión (Asiala *et al.*, 1997).

i. La metodología de enseñanza *ACE*

Dado que el diseño instruccional durante todo el curso persigue que los estudiantes logren reflexionar sobre su trabajo y sobre los conceptos matemáticos, han adoptado un enfoque pedagógico denominado ciclo de enseñanza ACE, que no es más que una consecuencia del marco teórico APOE. Las secciones de trabajo se dividen por semanas y se alterna el trabajo en el laboratorio de ordenadores con el trabajo en el aula de clases. Se privilegia el trabajo en pequeños grupos cooperativos y se promueve el trabajo fuera de clases. El ciclo ACE lo conforman tres componentes: actividades con ordenador, discusiones en clase y ejercicios complementarios.

- **Actividades con ordenador**

Consideran que son la parte más importante de este sistema. Las actividades con ordenador están diseñadas para inducir a los estudiantes a efectuar las construcciones mentales específicas de acciones, procesos y objetos, que son parte fundamental de la teoría. Se dice que si bien es cierto que en alguna medida las actividades con ordenador involucran algún elemento del aprendizaje por descubrimiento, su principal objetivo es proporcionar a los estudiantes una experiencia base en lugar de llevar a respuestas correctas (Dubinsky, 2000; Asiala *et al.*, 1996). Es decir, en términos generales lo que se busca que los estudiantes a través del lenguaje de programación: (1) ganen experiencia previa con los conceptos matemáticos; y (2), desarrollen tareas específicas que tiene como objetivo inducir a los estudiantes a hacer las construcciones mentales específicas que propone el análisis teórico. Al respecto, Dubinsky (2000), señala:

> "Para ayudar a los estudiantes a desarrollar la concepción proceso de una función, les pedimos crear un programa en la computadora (utilizando el programa ISETL), que implementara dicha función. Por ejemplo, para la función F, que discutíamos antes y que está dada por
>
> $$F(x) = \begin{cases} \dfrac{x+3}{x^2+1}, \text{si x } \pi \ 0 \\ 2\text{x} + 3, \text{si } 0 \leq \text{x } \pi \ 0 \\ 4\sqrt{\text{x}} + 1, si1 \leq x \end{cases}$$
>
> Los estudiantes generan un programa como:
>
> ```
> F:= fun (x);
>   If x< 0 then return (x+3)/x**2+1);
>   Elseif x< 1them return 2*x+3;
>   else return 4*sqrt(x)+1;
>   end;
> end;
> ```
>
> Después de que los estudiantes han creado este programa, pueden discutir su aplicación a varios valores en su dominio y pueden reflexionar sobre cómo funciona la computadora para evaluar, por ejemplo, F(-1), F(0), F(1/2), F(1), F(3). Según nuestras investigaciones, la actividad de crear dicho programa y la discusión siguen dando como resultado que muchos estudiantes construyan la concepción proceso de tal función. En efecto semejante se puede obtener con los conjuntos laterales." (Dubinsky, 2000; 63)

- **Discusión en clase**

Después que los estudiantes crean los programas en ordenador sobre determinados conceptos matemáticos, los cuales son la vía para que los estudiantes logren desarrollar las construcciones mentales necesarias para la comprensión de dicho concepto, los estudiantes se reúnen en pequeños grupos para discutir su aplicación en otros dominios y contextos. A partir de aquí, el grupo se reúne en el salón de clase para seguir trabajando en equipo sobre tareas de lápiz y papel, diseñadas por el tutor, basándose en las actividades realizadas en el ordenador.

El propósito de estas jornadas de trabajo es lograr que los estudiantes reflexionen y discutan sobre el trabajo realizado con el ordenador, y sobre las diferentes situaciones problemas solucionadas en clase. El rol del profesor en es el de orientador de la discusión, y en algún momento asume la responsabilidad de puntualizar y resumir los puntos claves tocados por los estudiantes en la discusión sobre el concepto en cuestión, con el fin de llegar al consenso de grandes conclusiones conceptuales sobre el contenido matemático.

- **Ejercicios**

Son catalogados como ejercicios complementarios a las tareas de ordenador y las actividades de grupo realizadas en el aula de clase. El objetivo de estos ejercicios es que los estudiantes refuercen y afiancen las ideas que han construido sobre el concepto matemático estudiado, y usen la matemática que han aprendido como puente con otros conceptos matemáticos a desarrollar posteriormente.

Los ejercicios son generalmente ejercicios considerados relativamente tradicionales y se espera que sean actividades de refuerzo que los estudiantes realizan en casa y se conviertan en actividades adicionales al trabajo en el laboratorio con ordenadores y a la discusión en clase.

2.2.1.3. Observación y discusión

Durante la implementación de la instrucción aprovechan para recopilar datos de investigación. Plantean dos vías de relación entre los datos y la descomposición genética del concepto, definiendo así, un ciclo de investigación que se repite tantas veces como sea necesario, hasta lograr profundizar en la comprensión de cómo los estudiantes construyen su comprensión del concepto matemático investigado. La descomposición genética dirige el análisis de los datos mediante la siguiente pregunta de investigación:

1. "¿las construcciones mentales propuestas han sido elaboradas por los estudiantes? "(Asiala *et al,* 1997).

El resultado de este análisis puede conducir a la revisión de la descomposición genética inicial, y de igual forma, generar cambios en el tratamiento instruccional. Como ya se dijo anteriormente, la descomposición genética inicial del concepto está basada por una banda en la comprensión que tienen los investigadores del concepto matemático, y por otra de sus experiencias como aprendices y profesores. Dado que el ciclo es repetitivo, la descomposición genética en últimas, refleja más o menos el análisis de los datos.

Durante todo el ciclo que proponen en el marco de la teoría APOE, sugieren la recolección de diferentes clases de datos y diferentes instrumentos de recolección, entre ellos, cuestionarios y entrevistas semi-estructuradas. Algunos de estos datos son analizados para observar qué construcciones mentales han alcanzado los estudiantes. Si sus construcciones están incluidas en la descomposición genética realizada, se puede llegar a predecir qué matemática tienen que llegar a aprender los estudiantes. Otro tipo de datos analizados apuntan a mirar si sus predicciones iniciales están apoyadas o son demostradas, en este último caso, ambos análisis tanto el teórico como el tratamiento instruccional, son evaluados.

Así los resultados de los trabajos desde la base de este marco teórico son de naturaleza dual, un primer resultado de la investigación es el profundizar la comprensión de la epistemología de el concepto, y otro resultado conduce a la creación de estrategias didácticas que estén más acorde con el camino por el que están convencidos que los estudiantes siguen para comprender un concepto matemático específico.

2.2.1.4. Aportes y limitaciones de la teoría APOE a nuestra investigación

La teoría APOE, propuesta por el grupo de investigación RUMEC, proporciona elementos teóricos y metodológicos interesantes y válidos para abordar nuestro problema de investigación. Nos interesa lo concerniente al estudio de la naturaleza y desarrollo del conocimiento matemático de los profesores (Asiala *et al.,* 1997), y no sólo centrarnos en el estudio de los errores conceptuales, conflicto entre *concept image* y *concept definition* (Tall y Vinner, 1981), y los obstáculos epistemológicos (Brousseau, 1990; 1991) que muestran los profesores frente a este concepto, que en todo caso son estudios complementarios (Asiala *et al.,* 1997; 1996).

Como ya hemos descrito en las secciones anteriores, la teoría APOE propone un ciclo de investigación que comienza con un análisis epistemológico detallado del concepto en cuestión. Posteriormente, con base en la descomposición genética que es fruto de ese análisis teórico, se diseña e implementa un tratamiento instruccional, teniendo como eje orientador un ciclo de enseñanza concreto (ACE). Por último, como resultado de la implementación del dispositivo instruccional, se diseñan instrumentos y se recogen datos de investigación, desde una perspectiva cualitativa, que luego son analizados a la luz de las categorías teóricas que brinda la misma teoría. Este ciclo es repetitivo y cada una de las componentes de la teoría se fortalecen y retroalimentan a partir de la reflexión, de los aportes que arroja cada una de las componentes, que se genera en el seno del grupo investigador.

En nuestro caso particular hemos optado, dadas las circunstancias, por una variante del ciclo de investigación propuesto por Dubinsky y colaboradores (RUMEC). Nuestra investigación parte de un análisis epistemológico y didáctico del concepto de derivada (sin llegar a equipararlo inicialmente al constructo de descomposición genética definido en esta teoría), a partir de éste se diseñan los instrumentos que nos permiten recoger información sobre las formas de conocer el concepto de derivada de los profesores de nuestro estudio. Un análisis preliminar de los datos obtenidos nos lleva a elegir a la teoría APOE como marco teórico de análisis, pues consideramos que nos brinda elementos teóricos y analíticos, útiles y rigurosos, que nos permiten describir e interpretar los razonamientos exhibidos por los profesores con relación al concepto de derivada, como objeto matemático de enseñanza y aprendizaje.

Una vez elegida la teoría APOE como marco teórico que respalda nuestro estudio, revisamos el análisis inicial del concepto de derivada y elaboramos la descomposición genética del concepto de derivada, partiendo de la que ya habían realizado Asiala y otros (1997), de los resultados de investigaciones en didáctica de la matemática sobre este concepto (Azcárate, 1990; Amit y Vinner, 1990; Baker *et al.*, 2000; Font, 2000; entre otras), y de nuestra comprensión del concepto de derivada.

Posteriormente, en la aplicación de la teoría APOE a nuestra investigación, adoptamos y reformulamos como categorías teóricas y analíticas para el análisis del concepto de derivada como objeto institucional y como objeto personal, los siguientes elementos:

1. Los procesos cognitivos presentes en la construcción de conceptos matemáticos, centrándonos en los siguientes: interiorización, coordinación, encapsulación, des-encapsulación y generalización.
2. Las construcciones mentales presentes en el desarrollo conceptual de un individuo: perspectiva acción, perspectiva proceso y perspectiva objeto del concepto de derivada.
3. Los niveles de comprensión del concepto de derivada que exhibe un sujeto en términos de la triada: intra, inter y trans.

Las dos primeras categorías nos permiten perfilar el análisis del concepto derivada como objeto institucional. Es decir, nos permiten describir cómo vive el concepto de derivada en la institución en la que nos centramos: los programas curriculares oficiales de matemática de 11º, la programación y la unidad didáctica diseñada por los profesores (reducida, en algún caso, al manejo del libro de texto).

La segunda y la tercera categoría nos permiten describir e interpretar el objeto personal de derivada que exhiben los profesores que participaron en esta investigación. Es entonces, las formas de conocer del profesor del concepto de derivada (objeto matemático) y la aplicación de esas formas de conocer en la definición de la agenda de enseñanza (objeto de enseñanza y aprendizaje).

Los resultados de un análisis previo de las respuestas dadas por los profesores a los instrumentos (cuestionario y entrevista con viñetas), aplicando las categorías teórica: perspectivas acción, proceso y objeto, y los niveles de comprensión del esquema (intra, inter y trans), nos permiten vislumbrar y postular que para que un individuo comprenda el concepto de derivada, es decir, para que tenga un esquema coherente y consistente (Garbín, 2000; Garbin y Azcárate, 2000; 2001) del concepto de derivada, debe coordinar dos esquemas previos: esquema algebraico y esquema gráfico. Nosotros hemos encontrado en las respuestas de los profesores diferentes niveles de comprensión con relación a cada uno de los esquemas que hemos definido, lo cual permite entender por qué frente a una situación problema que involucra el concepto de derivada en un contexto determinado los profesores responden de una manera determinada; y por qué frente a otra situación problema expresada en un contexto diferente los profesores exhiben representaciones diferentes y en algún caso aparentemente contradictorias (incoherentes). Este análisis se profundizará y se desglosará minuciosamente en el capítulo 4.

Una vez descritos e interpretados los niveles de comprensión del concepto de derivada que tienen los profesores que participaron en este estudio, dispondremos de elementos empíricos y teóricos que nos permitan incidir en la formación inicial y permanente del profesorado en Colombia. Por tanto, con base en ellos, propondremos algunos lineamientos de formación permanente del profesorado con relación al concepto de derivada como objeto matemático de enseñanza y aprendizaje que recoja los resultados del estudio sobre el conocimiento profesional de los profesores de nuestra investigación y los aportes recientes de las investigaciones en didáctica de la matemática relacionadas con la formación permanente e inicial del profesorado. Con esto cerramos la variante del ciclo de investigación que adaptamos de la propuesta liderada por el grupo RUMEC. A partir de aquí se podría reiniciar el ciclo de investigación y mejorar cada una de las componentes y etapas del mismo, hasta ir consolidando un programa de investigación dentro del conocimiento profesional que contribuya a la formación permanente e inicial del profesorado de matemática en Colombia.

La propuesta liderada por el RUMEC nos resulta llamativa porque plantea un ciclo de investigación para el desarrollo curricular y para la investigación dentro del pensamiento matemático avanzado que nos permite perfilar un itinerario de investigación dentro del pensamiento y conocimiento del profesor apuntando a la formación permanente e inicial del profesorado.

La propuesta que plantea la Teoría APOE contiene tres elementos a resaltar: un análisis fino del contenido matemático, la hipótesis constructivista de la construcción del conocimiento y la consideración de la interacción social del individuo como medio de construcción del conocimiento. Estos elementos nos permiten relacionar los aspectos resaltados en la sección anterior como relevantes dentro del estudio del conocimiento y la actividad profesional del profesor, y las implicaciones que tienen en la formación del profesorado de matemática.

El ciclo de investigación, que propone APOE, nos permite generar dos niveles de investigación: (1) centrada en los procesos de formación del profesorado; es decir que los cursos de formación de profesores se conviertan para los formadores de profesores en espacio de investigación y reflexión que ayude a mejorar los programas de formación permanente e inicial del profesorado de matemática; y (2), centrada en la reflexión en la práctica y sobre la práctica de los profesores de secundaria y bachillerato; es decir, se busca que los profesores que participen en los cursos de formación permanente entiendan su práctica como un profesional reflexivo (Schön, 1983, 1992).

Esta tarea de reflexión, por parte del profesor de matemática de secundaria y bachillerato, estaría orientada desde los propios cursos de formación permanente. Es decir que apostamos por cursos de formación permanente del profesorado que se estructuren a partir del ciclo de investigación que propone APOE, los cuales tienen como eje central la elaboración e implementación por parte de los profesores de unidades didácticas de los conceptos matemáticos estructuradas a partir de la construcción y reflexión de la descomposición genética de dicho concepto matemático. Por tanto, esta propuesta implica considerar al constructo descomposición genética como elemento central de los programas de formación. En efecto, consideramos que la elaboración de la descomposición genética de un concepto matemático introduce al profesor en una reflexión epistemológica del concepto que le permite: (1) cuestionar y mejorar la comprensión que tiene del concepto matemático en cuestión; (2) usar y organizar dicho conocimiento en la estructuración de la enseñanza del mismo (diseño de tareas, etc.); y (3), orientar el aprendizaje de los alumnos hacia los procesos de construcción y reconstrucción de los conceptos matemáticos que espera que desarrollen sus estudiantes (Badillo y Azcárate, 2002).

Lo anterior implica que en la elaboración de la descomposición genética de un concepto matemático se conjuguen dos niveles de reflexión. Un nivel de reflexión, de primer orden, donde el saber de referencia es la matemática, y el objetivo es la reconstrucción del objeto matemático en cuestión atendiendo a la complejidad de los aspectos sintácticos y semánticos que lo constituyen. Y un nivel de reflexión, de segundo orden, donde el saber de referencia es la didáctica de la matemática (consideramos que los organizadores del currículo (Rico, 1997) ofrecen un marco de referencia), apoyándose en la epistemología e historia de la matemática como ejes centrales en la estructuración y definición del concepto matemático como objeto de enseñanza y aprendizaje. Por tanto, además del dominio del concepto en cuestión se requiere de un posicionamiento sobre las teorías de enseñanza y aprendizaje que le permita al profesor diseñar el itinerario didáctico que ayude a los estudiantes en la construcción y reconstrucción del concepto matemático.

Un programa de formación permanente del profesorado que tenga en cuenta los organizadores del currículo y la descomposición genética de un concepto matemático como referentes teóricos y analíticos para la elaboración de unidades didácticas de conceptos específicos, ayudaría a estructurar el conocimiento práctico del profesor atendiendo a su naturaleza situada (Llinares, 1996; 1998; 2000). Concretamente, le proporcionaría la base disciplinar adecuada que permita un tratamiento objetivo del conocimiento matemático y del conocimiento didáctico sobre cada uno de los contenidos del currículo.

Consideramos que el ciclo de investigación expuesto está bien estructurado, es coherente, riguroso y bastante complejo, de allí que su implementación y operacionalización presente algunas dificultades, que ampliamos de las descritas por Ramírez (2000) y, además, proponemos algunas preguntas abiertas a la aplicación de la misma:

1. El proceso de asimilación de la teoría por parte del investigador durante el proceso de la investigación, que hace que la percepción tanto del problema como de la propuesta de solución evolucionen (cambien).

2. Las dificultades para aclarar y determinar tanto las construcciones mentales (acciones, procesos, objetos y esquemas) que se requieren en el estudio del problema, como el sistema de ejercicios y problemas que posiblemente propiciarán su construcción. Dada la descomposición genética, ¿cómo se elabora el sistema de ejercicios para su desarrollo? En la teoría no se propone ningún mecanismo de construcción para la elaboración de dicho sistema y queda a cargo de la institución, experiencia y dominio del tema del investigador.
3. En la instrumentación didáctica se requiere de un grupo de profesores con ideas claras sobre el problema que se investiga y que conozca la teoría que se pretende utilizar. ¿Hasta qué punto se requiere de ese equipo de investigación?
4. ¿Es posible aplicar el concepto de descomposición genética para conceptos o procesos no matemáticos?" (Ramírez, 2000)
5. En el diseño de unidades didácticas de conceptos tan complejos como el de función derivada, ¿es posible realizar una descomposición genética única del concepto que incluya toda su complejidad conceptual: sintaxis y semántica? O, muy por el contrario, ¿se debe asumir la elaboración de una unidad didáctica como una sumatoria de descomposiciones genéticas que atiendan a la complejidad específica de los conceptos que la conforman?
6. La pobreza en la descomposición genética de un concepto matemático puede llevar a la emergencia de fenómenos didácticos como el de la *algebrización* en la enseñanza de los conceptos matemáticos (Badillo y Azcárate, 2002)
7. La poca importancia que se le otorga a la problemática de la complejidad semiótica de los objetos matemáticos dentro de la teoría. En efecto, encontramos que precisamente la ampliación y enriquecimiento del marco de la teoría APOE, con la incorporación de los niveles de comprensión (intra, inter y trans), comienza a tenerla en cuenta. Sin embargo, aún se ha de construir el aparato teórico y analítico que ayude a clarificar y fundamentar la influencia de las traducciones y relaciones entre representaciones de los macro objetos matemáticos en la construcción y emergencia de los procesos cognitivos, como resultado de la actividad matemática que se diseña y genera en el aula.
8. Una dificultad añadida que hemos tenido en nuestra investigación, por las características concretas de la implementación que hemos hecho de la teoría APOE, es la ausencia de algunos elementos del concepto de derivada (riqueza en las traducciones y relaciones entre representaciones de f (x) y f '(x)) en las tareas que

diseñamos y propusimos a los profesores en el cuestionario y en la entrevista con viñetas, que nos permitiera describir más detalladamente los niveles de comprensión del concepto de los profesores. Consideramos que lo anterior se debe a que el diseño de los instrumentos no se ciñó a la teoría APOE.

CAPÍTULO 3. METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

3.0. A manera de introducción

En este capítulo nos proponemos, en primer lugar, resumir las bases teóricas que fundamentan y justifican la metodología que vamos a implementar y seguir en nuestra investigación; en segundo lugar, describiremos los elementos básicos del diseño metodológico implementado. Posteriormente, expondremos de forma detallada los instrumentos de recogida de la información que utilizamos en este estudio; y, finalmente, esbozaremos las diferentes fases del análisis que implementamos en el estudio del conocimiento profesional de los profesores, que son el resultado de la triangulación de la información que proporcionan cada una de las fases definidas con el propósito de explicitar la complejidad cognitiva y la naturaleza contextualizada del conocimiento y la práctica profesional del profesor de matemática (Llinares, 1996; 1999).

3.1. Metodología de la investigación

Pretendemos abordar una investigación centrada en el estudio del conocimiento profesional del profesor de Colombia (Departamento del Atlántico), que posee una característica especial, como lo es su formación tridisciplinar en matemática, física y psicopedagogía, la cual le habilita para desempeñarse simultáneamente como docente de matemática y física en el nivel de secundaria y bachillerato del sistema educativo colombiano.

En nuestro estudio se adopta una metodología cualitativa de naturaleza descriptiva y exploratoria, pues lo que deseamos estudiar son las formas de conocer el concepto de derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje. Es decir que al centrarnos en algunos rasgos de la práctica profesional del profesor, más concretamente en la fase preactiva de organización y planificación de la agenda de enseñanza del concepto de derivada (Jackson, 1975), nos interesa la obtención de una gran variedad de datos significativos y potentes que nos permitan caracterizar las relaciones profesor-materia, profesor-currículo y profesor-institución, para incidir, con elementos empíricos y teóricos válidos, en la formación permanente e inicial del profesorado en Colombia.

3.2. Diseño de la investigación

El tipo de investigación que se diseñó para tal fin es un estudio de cinco casos, que se ajusta a los objetivos y a la información que pretendemos recoger. La elección de este diseño de investigación se hizo por el deseo de abordar con profundidad los diferentes aspectos del conocimiento y la práctica del profesor de matemática, con cierta intensidad en un intervalo de tiempo relativamente corto. El verdadero potencial de este diseño radica en su capacidad para generar hipótesis y descubrimientos, en centrar su interés en individuos o situaciones concretas y en su flexibilidad y aplicabilidad a situaciones naturales (Latorre *et al.*, 1996).

Compartimos los supuestos de Merriam (1988), que señala cuatro propiedades esenciales del estudio de casos que hemos realizado: *particularista*, en cuanto nos centraremos inicialmente en el estudio de cada individuo; *descriptivo*, porque pretendemos realizar una rica y densa descripción del fenómeno por estudiar; *heurístico*, en la medida en que los resultados iluminen en la compresión de los casos, llevándolos en lo posible a descubrir nuevos significados, a ampliar su experiencia o a confirmar lo que ya se sabe; e *inductivo*, puesto que a partir de los resultados se puede llegar a generalizaciones o al descubrimiento de nuevas relaciones y conceptos.

3.3. Instrumentos de recogida de la información

En nuestro propósito de integrar en el análisis del conocimiento del profesor las dimensiones institucionales y cognitivas, hemos dado un papel importante a la delimitación del contexto dentro de este estudio. Éste entendido en dos sentidos, es decir, tener en consideración el contexto social e institucional en el que se mueve el profesor y, por otro, centrarnos en un concepto concreto atendiendo a la institución en el que se enseña. Esto implica considerar la naturaleza situada del conocimiento del profesor, y en nuestro caso, focalizar la atención en la interacción del conocimiento del contenido y el conocimiento didáctico del contenido[1] (Llinares, 1996; 1999).

Teniendo en cuenta lo anterior, definimos dos niveles de análisis: análisis macro y análisis micro, que describiremos y justificaremos en el apartado 3.4. El análisis macro de las restricciones institucionales nos permite describir e interpretar como vive el objeto "derivada" en tres de las instituciones que influyen y condicionan, directa o indirectamente, la práctica del profesor: el conocimiento matemático, aspectos de la formación inicial y el diseño curricular. Las fuentes que nos permitieron obtener información de estas restricciones fueron:

1. Conocimiento matemático (historia y epistemología del cálculo diferencial): libros de historia y filosofía de las ciencias e investigaciones en Didáctica de la Matemática centradas en la enseñanza y aprendizaje del concepto de derivada.
2. Formación del profesorado: programas curriculares de cálculo diferencial y física mecánica correspondientes al primer ciclo de la Licenciatura en matemática y física en la que fueron formados los profesores.
3. Diseño curricular: los lineamientos curriculares oficiales y los libros de texto de matemática de 11º y física de 10º más utilizados en la actualidad por los profesores.

En lo que respecta al análisis micro, que versa sobre la descripción e interpretación de las formas de conocer que tienen los profesores sobre el concepto de derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje, los instrumentos que diseñamos e implementamos para la recolección de la información fueron:

- Un cuestionario indirecto que incluye cinco problemas para que el profesor los resuelva por escrito.
- Cinco entrevistas semiestructuradas sobre: (1) los procesos de resolución de los problemas propuestos en el cuestionario indirecto y sobre la reflexión didáctica de las tareas que conformaban la evaluación; (2) el conocimiento disciplinar

[1] Cuando hagamos referencia al conocimiento didáctico del contenido nos estamos refiriendo al constructo conocimiento de contenido pedagógico introducido por Shulman (1986, 1989).

utilizando viñetas en las que se le proponían solucionar otro grupo de seis problemas; (3) los antecedentes biográficos del profesor sobre la enseñanza del concepto de derivada; (4) los documentos elaborados por los profesores; y (5), las tareas que proponen a sus estudiantes para evaluar la comprensión del concepto de derivada.

En la tabla 1, se sintetizan los instrumentos utilizados para la recolección de la información que nos permitieron hacer los análisis definidos. A continuación nos detendremos a describir cada uno de estos.

RESTRICCIONES INSTITUCIONALES		
Conocimiento matemático (historia y epistemología del concepto de derivada)	**Diseño curricular**	**Formación docente**
1. **Reflexión acerca del concepto a partir de notas históricas**: • Estudio de trabajos de análisis de corte histórico sobre el concepto de *derivada*. • Estudio de investigaciones sobre la enseñanza y aprendizaje de la derivada	1. **Ideas sobre la enseñanza (procesos de adaptación) del concepto de *derivada* en la educación secundaria:** • Planes de estudio y programas curriculares oficiales de la matemática de 11º y de física de 10º. • Libros de texto de matemática de 11º y física de 10º, bajo el criterio instrumental (los que están utilizando en la actualidad los profesores)	1. **Ideas sobre la formación de los futuros profesores en el área del cálculo diferencial.** • Planes de estudio de la Licenciatura en Matemática y Física, centrándonos en los programas de las asignaturas de *cálculo diferencial* y *física mecánica.*

Nos permiten estudiar la complejidad del...

CONOCIMIENTO PROFESIONAL DEL PROFESOR	
Componente del contenido matemático ⟺	**Componente didáctica del contenido**
1. La ***derivada* como objeto matemático:** • Entrevista semiestructurada sobre el conocimiento del profesor sobre el concepto de *derivada*, utilizando viñetas. • Cuestionario indirecto (evaluación del concepto de *derivada* realizada): se indaga indirectamente a través de este instrumento aspectos del conocimiento de los profesores en relación con el concepto de *derivada*. • Entrevista semiestructurada para profundizar en las respuestas y en los procesos de resolución de los problemas propuestos a los profesores en el cuestionario indirecto (evaluación de concepto de *derivada*).	1. **El concepto matemático de *derivada* como objeto de enseñanza y aprendizaje:** • La programación de la asignatura de matemática de 11º. • Planificación de una unidad didáctica del concepto de *derivada*. • Evaluación del concepto *derivada* realizada por los profesores. • Entrevista semiestructurada para profundizar sobre los documentos escritos elaborados por los profesores: programación, planeación de la unidad didáctica y evaluación del concepto de *derivada*. • Entrevista semiestructurada sobre ¿cómo enseñar el concepto de *derivada* en el bachillerato?

Tabla 1. Instrumentos de recogida de datos que utilizamos para los dos niveles de análisis

3.3.1. Cuestionario indirecto

Kagan (1990) plantea las dificultades que tienen los investigadores para acceder a las cogniciones de los profesores, porque en muchos casos se tienen inconscientemente, y difícilmente pueden ser expresadas por los profesores. Igualmente, estudios recientes (Norman, 1992; Carrillo, 1996; García, 1997; Badillo, 1999; Moreno, 2000), han reportado las dificultades para acceder directamente al conocimiento disciplinar que tienen los profesores con relación a un concepto matemático específico, puesto que los profesores se previenen al sentirse cuestionados, temiendo dejar en evidencias sus dificultades e inconsistencias en la comprensión que tienen del concepto en cuestión.

Tratando de eliminar las dificultades anteriormente descritas, hemos diseñado un instrumento que hemos denominado *cuestionario indirecto* (ver figura 1), que nos permita acceder indirectamente a las formas de conocer el concepto de derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje. Para el diseño del cuestionario, tuvimos también en cuenta los siguientes criterios:

1. La evaluación del instrumento que utilizamos en una investigación previa (Badillo, 1999).
2. Necesidad de acceder en forma indirecta a la comprensión gráfica y algebraica de los macro objetos f (x), f ’(a) y f ’(x).
3. Necesidad de obtener registros escritos sobre los procesos de resolución de los problemas planteados y registro oral sobre la justificación que dan al proceso de resolución empleado.
4. Necesidad de generar procesos de reflexión sobre la forma como se organiza y evalúa el concepto de derivada y de los elementos del concepto de derivada inmersos en el cuestionario (importancia de las traducciones y relaciones entre representaciones de los macro objetos f (x) y f ’(x); y tratamiento de la fenomenología asociada a estos macro objetos), a partir de la crítica del modelo de evaluación proporcionado (cuestionario indirecto)

Dado que en Badillo (1999), diseñamos sólo una entrevista con viñetas en la que le presentábamos directamente cinco problemas a los profesores para que los resolvieran, nos encontramos con los siguientes inconvenientes: (1) algunos de los profesores respondieron con evasivas, e incluso no quisieron responder algunas cuestiones, por temor a dejar en evidencias dificultades en la comprensión de los conceptos inmersos, o simplemente, por rechazar la idea de sentirse evaluados; entonces se creó un ambiente tenso; (2) los problemas no estaban diseñados para obtener información sobre los niveles de comprensión del concepto de derivada atendiendo a las traducciones y relaciones entre representaciones de los macro objetos f (x), f ’(a) y f ’(x); (3) no teníamos registro escrito de los procesos de resolución y se dificultaba la justificación de los procesos de resolución utilizados; y (4), no logramos generar procesos metacognitvos en los profesores del tratamiento y evaluación de los aspectos del concepto de derivada inmersos en los problemas planteados.

Asumiendo las consideraciones anteriormente descritas, diseñamos un nuevo cuestionario en el que se presentaba a los profesores cinco problemas[2] de matemática relacionados con el objeto matemático derivada y sus aplicaciones (ver figura 1). Lo importante de este cuestionario es que nos permitía acceder a información integrada y por separado de las dos componentes del conocimiento del profesor que nos interesan en este estudio (Norman, 1992; Even, 1993; Llinares, 1996). En primer lugar, se pedía al profesor resolver problemas que nos ayudaran a conocer lo que saben del concepto matemático, y en segundo lugar, al presentarlo como formato de evaluación realizada por un profesor ideal, nos permitía poner al profesor a reflexionar sobre los elementos del concepto de derivada inmersos en la evaluación, tales como: papel de las traducciones y relaciones entre representaciones, fenomenología asociada al concepto, etc. Dado que nos interesaba crear un ambiente favorable para que los profesores se pusieran en la situación de resolver los problemas sin sentirse directamente evaluados ni cuestionados, planteamos la resolución de la evaluación dando la siguiente sugerencia:

[2] Queremos aclarar que en esta memoria nos referimos a los términos *problemas*, *ejercicios* y *tar*eas. Cuando hacemos referencia a problemas entendemos que son situaciones que parten de un enunciado, que puede ser en un contexto matemático o no matemático; pero hay un enunciado que obliga al resolutor a la lectura del mismo y se puede resolver utilizando diferentes técnicas. Es decir, no sólo hace referencia a una ejecución de procedimiento algebraico. En ningún momento nos estamos refiriendo a problemas de estrategias, tal y como lo definen los grupos de investigación centrados en la resolución de problemas. Por otra parte, cuando utilizamos el término ejercicio, en general, entendemos que son tareas de rutina, de ejecución directa de procedimientos algebraicos. Finalmente, por el término tarea, estamos haciendo referencia exclusiva a las situaciones que forman parte de la actividad matemática (que según las características pueden ser ejercicios o problemas) que proponen los profesores en las unidades didácticas y en las evaluaciones que nos proporcionan.

> “Esta es la evaluación realizada por un profesor de matemática de secundaria para examinar el grado de comprensión del concepto de d*erivada* por parte de sus estudiantes, después de haber terminado la unidad didáctica relacionada con este concepto.
> Tu colaboración consiste en tratar de explicitar por escrito, lo más detalladamente posible, **lo que consideras que debe responder uno de tus estudiantes después de haber estudiado el concepto de** *derivada*, para afirmar que éste comprende y maneja el concepto de *derivada*.
> ¡Agradecemos tu colaboración, pues será de gran ayuda para nuestro trabajo!”

En términos generales, dio resultado, pues todos los profesores resolvieron por escrito los problemas propuestos. Esto no quiere decir que no fueran conscientes de que los estábamos evaluando, pero suponemos que la aclaración anterior les proporcionó cierta tranquilidad. Sin embargo, nos quedaba la duda de si los datos obtenidos realmente reflejaban el nivel de comprensión del concepto de derivada que tenían los profesores. Para aclarar nuestras dudas, y buscando fiabilidad en los datos y en las respuestas de los profesores, les propusimos a los profesores una entrevista, posterior a la presentación y resolución de las situaciones del cuestionario, para aclarar algunas dudas e indagar en los procesos de resolución. En ese ambiente de intercambio, aprovechamos para presentar otros seis problemas en viñetas para indagar aspectos comunes de los macro objetos f (x), f ’(a) y f ’(x), esta vez sí directamente, que nos permitieran validar y contrastar los resultados obtenidos con el cuestionario. Estos los describiremos más adelante, y en la tabla 2, que presentamos a continuación, sintetizamos y justificamos la elección de cada uno de los problemas propuestos en el cuestionario, especificando los siguientes aspectos: problema, referencia a los estudios que lo han utilizado previamente, objetivos que perseguimos con cada uno de los problemas, y las preguntas de investigación que pretendemos inferir del análisis de las respuestas de los profesores.

3.3.2. Documento personales elaborados por el profesor

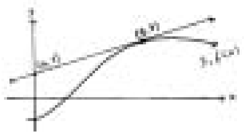
Teniendo en cuenta las características y la naturaleza de este estudio, es de vital importancia disponer de diferentes y variados instrumentos y fuentes de información que permitan triangular y validar los resultados obtenidos. Además del cuestionario indirecto anteriormente descrito, hemos considerado que los documentos elaborados por los profesores en la fase de planificación y organización de la agenda de enseñanza se constituyen en una herramienta poderosa para tratar de caracterizar el significado personal y el significado institucional del objeto matemático derivada. Es así, como le

EVALUACIÓN DEL CONCEPTO DERIVADA

NOMBRE: ____

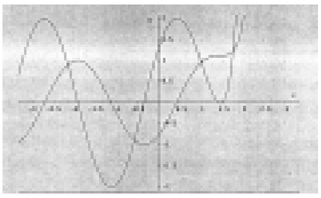
CURSO: ____________________ FECHA: ______________________________

1. La recta L es tangente a la gráfica de y = f (x) en el punto (5,3)

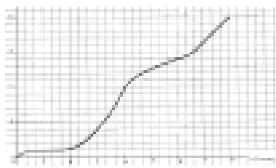


a. Encuentra f (5). Explica y justifica cada paso en la solución.
b. Encuentra f ’(5). Explica y justifica cada paso en la solución.
c. ¿Cuál es el valor de la función f (x) en x = 5, 08? Se lo más exacto posible y explica ¿cómo lo haces?

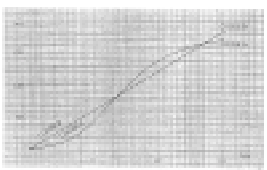
2. Compara las gráficas de las dos funciones de la siguiente figura y razona detalladamente si una de ellas es la función derivada de la otra. Argumenta la respuesta.



3. El Hotel Alps tiene 156 habitaciones. Su consumo de agua caliente es bastante elevado. La función Q: t $\rightarrow$ Q (t), cuya gráfica aparece junto a ese enunciado, nos da el total de agua caliente consumida desde medianoche (0 horas), hasta las t horas.
a. ¿Cuál fue el consumo total de agua a lo largo del día?
b. ¿Cómo es el consumo de agua caliente entre las 20 y las 24 horas?
c. ¿Qué es mayor, la cantidad de agua caliente que se estaba consumiendo a las 9 horas o la que se estaba consumiendo a las 14 horas?
d. ¿Cuándo crees que se estaba consumiendo más agua caliente? Justifica la respuesta.
e. ¿Cuánta agua se está consumiendo a las 7:00, en qué unidades se medirá esto?



4. El siguiente gráfico representa el movimiento de dos coches durante 15 segundos. Haz una descripción comparada de su movimiento. Para ello:
a. ¿Qué crees que ocurre en el punto P de la gráfica?
b. ¿Cómo son las velocidades de los dos coches en el punto P? Justifica tu respuesta.
c. ¿Crees que en algún momento los coches A y B tienen la misma velocidad? ¿Por qué?
d. ¿Cuándo crees que el coche A tiene mayor velocidad? Justifica tu respuesta.



5. Halla la pendiente y la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función: $f(x) = 3x^2 - 2x$ en el punto de abscisa 2.

Figura 1. Cuestionario indirecto: evaluación del concepto derivada propuesta por un profesor X

Problema	Referencia	Objetivos	Preguntas
1	Amit y Vinner (1990); Asiala y otros (1996); Clark y otros (1997, 2000); Tufte (1989); Eisenberg (1992);	• Estudiar la comprensión gráfica del macro objeto f '(a).	1. ¿Comprenden que el valor de la derivada de una función en un punto es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en ese punto? 2. ¿Trabajan con la derivada de la función basándose sólo en la información gráfica y sin recurrir al manejo algebraico de la expresión simbólica que la defina? 3. ¿Usan técnicas directas de aproximación numérica y gráfica?
2	Azcárate y otros (1996)	• Estudiar la relación entre los macro objetos f (x) y f '(x) a partir de sus representaciones gráficas	4. ¿Interpretan gráficamente los intervalos de monotonía de la función para analizar el comportamiento de la función derivada? 5. ¿Usan en la misma proporción la interpretación geométrica del signo de la primera y segunda derivada para el análisis de la función y su función derivada? 6. ¿Visualizan el carácter dinámico de las pendientes cuando las rectas tangentes a la gráfica de la función recorren a la curva e interpretan su signo y su comportamiento monótono?
3	Azcárate (1990); Azcárate y otros (1996)	• Estudiar el significado de la derivada como la variación instantánea de una función representada gráficamente. • Coordinar gráficamente los objetos pendiente de la recta tangente y el objeto razón de cambio de una función	7. ¿Qué interpretación hacen del gráfico de la función? ¿Cómo interpretan local y globalmente a la función representada gráficamente? 8. ¿Reconocen al concepto de derivada como la razón de cambio entre una magnitud (cantidad de agua consumida) en función del tiempo? ¿Tienen dificultad con la interpretación gráfica de funciones acumulativas?
4	Azcárate (1990); Azcárate y otros (1996)	• Estudiar la interpretación física de la derivada como la velocidad instantánea a partir de su representación gráfica	9. ¿Leen e interpretan correctamente la información proporcionada por el gráfico e-t? 10. ¿Relaciona la pendiente de la recta tangente al gráfico en un punto fijo con la velocidad instantánea en ese punto?
5	Azcárate (1990)	• Estudiar las técnicas utilizadas para hallar la función derivada enunciada en un contexto algebraico	11. ¿Identifican la pendiente de la recta tangente con el valor de la derivada de la función dada? ¿Qué técnicas utilizan para hallar la función derivada? 12. ¿Qué relación establecen entre la derivada de la función en un punto (tasa instantánea de variación) y la función derivada (razón de cambio de la función)?

Tabla 2. Análisis estructural de las tareas que conforman el cuestionario indirecto

pedimos a los profesores que nos proporcionaran los siguientes documentos: programa de la asignatura de matemática de 11º, unidad didáctica del concepto de derivada y evaluaciones sobre este concepto. Le sugerimos que en lo posible fueran los diseñados para la asignatura de matemática de 11º correspondiente al año lectivo en el que realizamos la recolección de la información.

3.3.2.1. Programación de matemática de 11º

Los profesores nos entregaron una copia del programa de matemática de 11º, correspondiente al año lectivo 1999, que habían realizado y entregado al colegio. En este caso no les proporcionamos ningún modelo para que la realizaran, sino que queríamos tener una idea global de la forma como organizan la enseñanza de la matemática atendiendo al contexto institucional concreto en el que desarrollan su práctica profesional.

3.3.2.2. Unidad didáctica del concepto derivada

Los resultados de una investigación previa nos mostraron que las programaciones que hacen los profesores responden a una simple tarea administrativa, en la que poco a poco se van anulando los elementos reflexivos y la toma de decisiones que tienen un gran valor de cara a la enseñanza de los conceptos matemáticos. Por ello, decidimos proponer a los profesores un modelo de planificación de una unidad didáctica, en la que el profesor, al elegir las actividades, las definiciones, ejemplos y tareas, integre su conocimiento científico (conocimiento del contenido) y didáctico (conocimiento didáctico del contenido), su experiencia práctica y sus concepciones ideológicas, que cada vez están más ausentes en las programaciones. En efecto, muchas de las programaciones son la copia de la del año anterior y muchos profesores han asumido su inutilidad y le otorgan un carácter de trámite en su actividad profesional que no aporta nada a las reflexiones sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje de los conceptos matemáticos que enseñan (Badillo, 1999; Pro, 1999).

Para la planificación de la unidad didáctica del concepto de derivada les proporcionamos un modelo, adaptado de una propuesta de Pro Bueno (1999). Éste consistía en una tabla de ocho columnas, en la que nos interesaba obtener información y que los profesores reflexionaran sobre los siguientes aspectos: actividad, tipo de actividad, descripción de la actividad, tiempo asignado, conocimientos implicados, nivel y causa de la dificultad, intención de la actividad, intención educativa de la actividad e importancia de la actividad (ver anexo 10). Igualmente, le pedimos que nos anexaran las definiciones, tareas, etc., que proponían, o en su defecto, que nos remitieran al libro de texto de donde las tomaban.

3.3.2.3. Evaluación sobre la comprensión del concepto derivada

Con el objetivo de no contaminar la información del profesor, antes de pasar el cuestionario indirecto (evaluación elaborada por un profesor X), les pedimos a los profesores que nos proporcionaran la evaluación o las evaluaciones del concepto de derivada que habían aplicado a sus estudiantes, para analizar las tareas matemáticas que proponen al evaluar la comprensión del concepto de derivada. Las evaluaciones que nos proporcionaron los profesores se pueden observar en el anexo 9.

3.3.3. Entrevistas semiestructuradas

Teniendo en cuenta el carácter cualitativo y descriptivo de nuestro estudio, donde las concepciones de los profesores son de primordial importancia y de lo que se trata es de hacerlas lo más explícitas posibles, consideramos que la entrevista es la técnica que nos permitirá obtener información significativa. Concretamente, utilizamos la técnica de la entrevista de tipo semiestructurada, como instrumento de recogida de información. Se elaboraron cinco guiones de entrevistas correspondientes a cada una de las categorías de análisis mencionadas anteriormente.

Las entrevistas de cada una de las categorías de análisis, tuvieron una duración de entre 45 minutos y una hora, dependiendo de cada profesor. El guión elaborado se consideró como una guía orientadora para la investigadora, más que como un documento rígido a seguir. En el anexo 1 se pueden ver los protocolos de cada una de las entrevistas y en los anexos del 2 al 6, las transcripciones literales de las mismas. En total se realizaron 25 entrevistas, equivalentes a cinco por cada profesor que participó en el estudio.

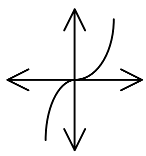
3.3.3.1. Sobre el concepto derivada utilizando viñetas

Como ya mencionamos al describir el cuestionario indirecto, con el propósito de validar la información obtenida sobre los aspectos conceptuales de la derivada que los profesores manejan, diseñamos una entrevista con viñetas en la que le planteábamos nuevamente, pero ahora en forma directa, seis problemas nuevos muy relacionados con los propuestos en el cuestionario indirecto. Las situaciones que presentamos en viñetas fueron las siguientes, y el análisis de cada una de ellas se encuentra registrado en la tabla 3.

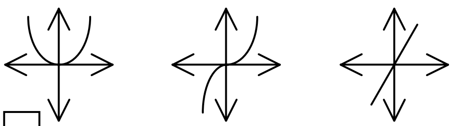
I	**II**	**III**
¿Qué es una derivada? Defínelo o explícalo como desees	¿Qué significa que la derivada de la función $y = x^2$ sea la función $y = 2x$? Explica y justifica la solución.	Usando sólo una calculadora, puedes conseguir un método para calcular el valor aproximado de la derivada de $f(x) = 4^x$, en $x = 2$. Explica y justifica la solución.

IV

Si tienes el gráfico de la siguiente función:



a. Escoge la función derivada que le corresponde entre los gráficos de las funciones representadas a continuación:



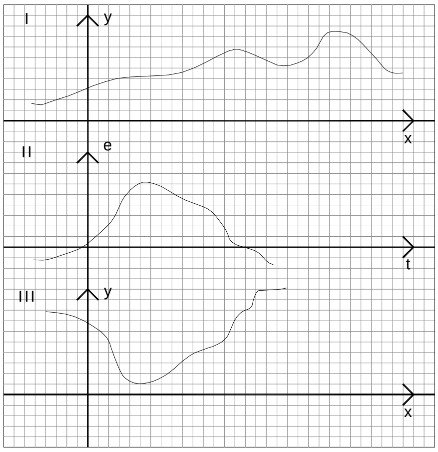
I. ☐ II. ☐ III. ☐

b. Justifica la respuesta escogida y por qué la no-elección de las otras dos opciones.

V

Observa las siguientes gráficas:
Gráfica I: Indica el punto de la gráfica donde la pendiente de la recta tangente es máxima (positiva) y el punto donde es mínima (negativa). Indica también los puntos donde es cero.
Gráfica II: Indica el punto de la gráfica donde la velocidad del móvil es máxima (positiva) y el punto donde la velocidad del móvil es mínima (negativa). Indica también dónde vale cero.
Gráfica III: Indica el punto de la gráfica donde la función crece más deprisa y el punto donde decrece más rápidamente. Indica los puntos donde la tasa instantánea de variación es cero.
Nota: Utiliza los siguientes indicadores para señalar los puntos de las gráficas:

- Para valores mayores (de crecimiento más rápido) $\boxed{+}$
- Para valores menores (de decrecimiento más rápido) $\boxed{-}$
- Para valores nulos $\boxed{0}$



VI

Aquiles y la tortuga corren una carrera. Aquiles tiene una velocidad doble que la velocidad de la tortuga. Si al iniciar la carrera se da a la tortuga una ventaja de 1 Km., ¿logrará Aquiles alcanzarla?

Metodológicamente, para crear un ambiente de intercambio y reflexión y para que los profesores se sintieran cómodos, aprovechamos la entrevista para la aclaración de dudas y justificación sobre los procesos de resolución que habían utilizado en las respuestas a los problemas del cuestionario, para presentarles entre comentario y comentario de cada pregunta del mismo, una viñeta con un problema similar que nos permitiera validar y completar la información sobre el concepto de derivada obtenida con el primer instrumento. Además, aprovechamos para inferir el grado de coherencia que tienen los profesores en los procesos de resolución con los que abordan los diferentes problemas.

Problema	Referencia	Objetivos	Preguntas
I	Amit y Vinner (1990)	• Analizar la comprensión del macro objeto f '(x)	1. ¿En qué términos definen el concepto de derivada? 2. ¿Establecen diferencias entre los macro objetos f '(a) y f '(x)?
II	Amit y Vinner (1990)	• Analizar la comprensión algebraica del macro objeto f '(x) a partir de su expresión simbólica	3. ¿Qué comprensión tienen de la función derivada a partir de su representación algebraica?
III	Amit y Vinner (1990)	• Describir las técnicas de derivación directa e indirecta que usualmente manejan los profesores	4. ¿Manejan técnicas de aproximación numérica y gráficas del concepto derivada?
IV	Azcárate y otros (1996)	• Analizar la relación y comprensión gráfica de los macro objetos f (x) y f '(x) a partir de sus representaciones gráficas • Interpretar gráficamente los macro objetos f '(x) y f (x) haciendo un análisis monótono de las funciones enunciadas en un contexto gráfico	5. ¿Interpretan gráficamente los intervalos de monotonía de la función para analizar el comportamiento de la función derivada? 6. ¿Usan en la misma proporción la interpretación geométrica del signo de la primera y segunda derivada para el análisis de de los macro objetos f (x) y f '(x)? 7. ¿Visualizan el carácter dinámico de las pendientes cuando las rectas tangentes a la gráfica de la función recorren a la curva e interpretan su signo y su comportamiento monótono?
V	Azcárate (1990)	• Estudiar la interpretación de la derivada como la variación instantánea de una función representada gráficamente. • Coordinar gráficamente los objetos pendiente de la recta tangente y el objeto razón de cambio de una función • Estudiar la interpretación física de la derivada como la velocidad instantánea a partir de su representación gráfica	8. ¿Qué interpretación hacen del gráfico de la función? ¿Cómo interpretan local y globalmente a la función representada gráficamente? 9. ¿Generalizan el concepto de derivada como la razón de cambio entre magnitudes de la función? 10. ¿Leen e interpretan correctamente la información proporcionada por el gráfico e-t? 11. ¿Reconocen a la velocidad instantánea como el ejemplo más simple de la derivada de una función en un punto?
VI	Adaptada de las propuestas en: Cajori (1915); Boyer (1959, 1986); Klein (1992)	• Ahondar indirectamente en el manejo de los conceptos fundamentales del cálculo infinitesimal (número real, infinito, serie, límite) y de la cinemática clásica (espacio, tiempo, velocidad, movimiento, encuentro)	12. ¿Con qué argumentos matemáticos responden a la situación problema de *Aquiles y la tortuga*? 13. ¿Reconocen y comprenden los conceptos del cálculo infinitesimal que se encuentran involucrados en la situación problema planteada en un contexto físico? 14. ¿Reconocen el valor histórico de la situación problema?

Tabla 3. Análisis estructural de las tareas propuestas en la entrevista con viñetas

3.3.3.2. Sobre los instrumentos elaborados por el profesor

La entrevista sobre los documentos elaborados por los profesores intentaba explorar sobre los siguientes aspectos:

- Planificación global de la asignatura de matemática de 11º, para complementar y enriquecer la información estática que proporciona el programa de la asignatura de matemática de 11º.
- Organización y estructura de las actividades que conforman la unidad didáctica del concepto de derivada para complementar y enriquecer con la información estática que proporciona el protocolo de unidad didáctica que le proporcionamos. Creemos importante resaltar que nos interesaba la justificación que daban a las tareas matemáticas que diseñaban y proponían como una herramienta para caracterizar la actividad matemática que se genera en el aula.

3.3.3.3. Sobre el concepto de derivada como objeto de enseñanza y aprendizaje (fase de introducción e institucionalización del concepto)

Esta entrevista nos proporciona información relativa a los antecedentes biográficos del profesor y sus planteamientos sobre cómo la experiencias previas con la enseñanza del concepto de derivada en la institución de bachillerato influyen en su toma de decisiones con relación a la planificación de la enseñanza del objeto derivada, la organización de los contenidos, el papel de las definiciones, los ejemplos y el tipo de tareas que propone.

3.3.3.4. Sobre la evaluación del concepto derivada

Nos permite indagar sobre las tareas que propone a sus estudiantes para evaluar la comprensión del concepto de derivada y, para reflexionar sobre los criterios que aplica al evaluar este concepto. Igualmente, las justificaciones que daban los profesores a la presentación de cada una de estas tareas, nos ayudó en el análisis posterior de los procesos cognitivos que consideramos se activan en el proceso de resolución de las mismas.

3.4. Metodología de análisis

Consideramos que esta es la parte fundamental de este estudio, puesto que de las decisiones que tomamos con relación al tratamiento de la información que nos proporcionan los instrumentos y las fuentes de datos consideradas en este estudio depende en gran medida la riqueza de las conclusiones y la implicaciones didácticas que aportará esta investigación. Hemos definido cuatro fases para el análisis de la información, tal y como lo esbozamos en la figura 2, y a continuación describiremos cada una de ellas.

3.4.1. PRIMERA FASE: análisis *macro* de las restricciones institucionales

3.4.1.1. Conocimiento matemático: Epistemología e Historia del objeto matemático derivada

Se hace una revisión de libros de Historia y Epistemología de las ciencias, y de las investigaciones en Didáctica de la Matemática centradas en la enseñanza y aprendizaje del concepto derivada con el propósito de hacer un análisis epistemológico del concepto de derivada que nos ayude a la construcción de la descomposición genética inicial y a la definición de los niveles de comprensión del esquema de la derivada en las dos dimensiones definidas (algebraica y gráfica). Este análisis forma parte de la variante del ciclo de investigación de la teoría APOE que hemos implementado en esta investigación, y consideramos que es fundamental porque nos brinda las categorías teóricas y analíticas que nos permiten abordar, posteriormente, el análisis micro.

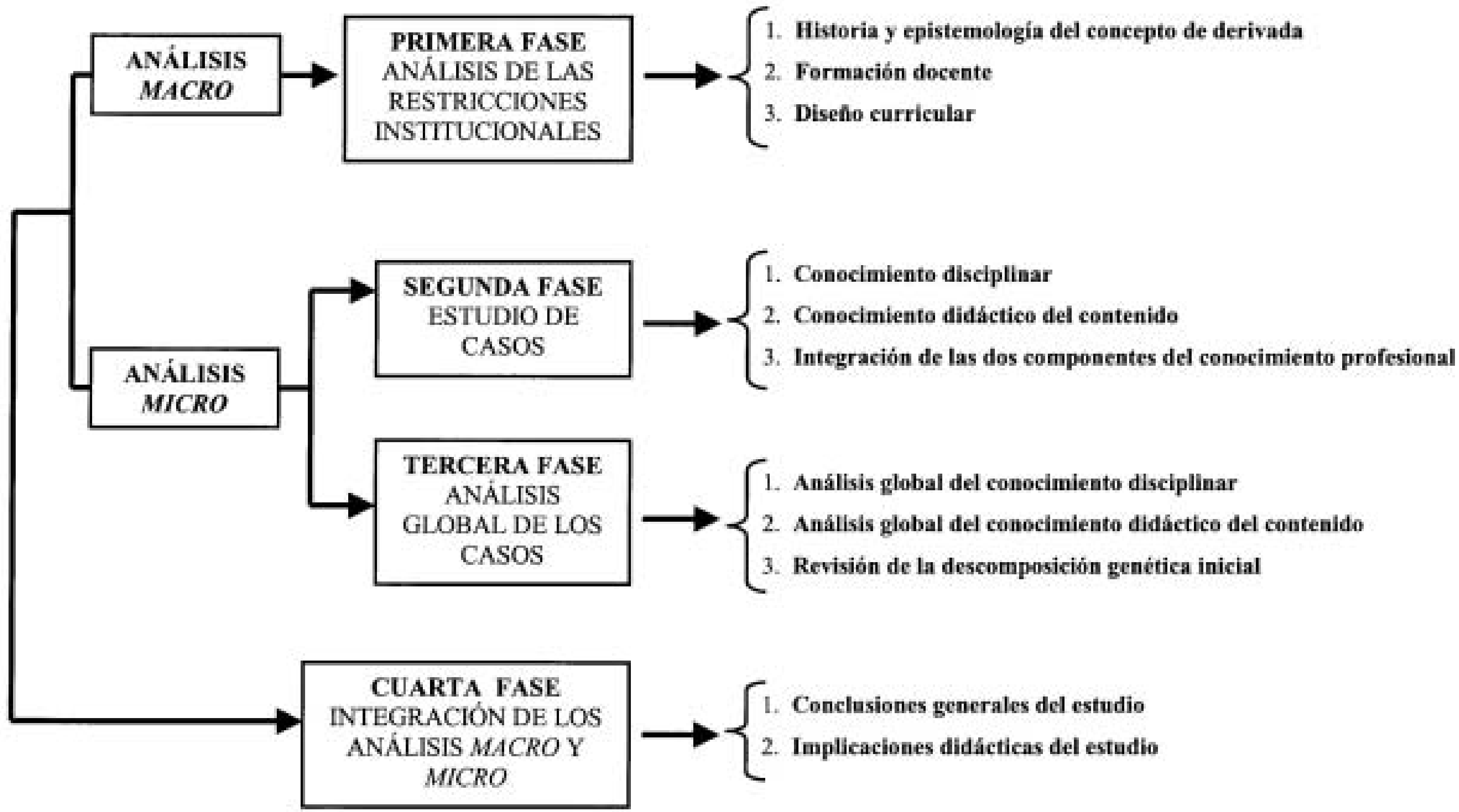


Figura 2. Fases de la metodología de análisis implementada en esta investigación

3.4.1.2. Formación docente

Se hace un análisis de los programas de las asignaturas de cálculo diferencial y física mecánica del primer ciclo de la licenciatura en la que fueron formada los profesores, con el propósito de caracterizar al objeto derivada en la institución Licenciatura en matemática y física del sistema educativo colombiano.

3.4.1.3. Diseño curricular

Con el propósito de describir la forma como vive el objeto derivada en la institución de bachillerato del sistema educativo colombiano, se hace un análisis de la organización y estructura de los contenidos programáticos que proponen los libros de texto de matemática de 11º y física de 10º, como sustitutos de los programas curriculares oficiales. Como síntesis del análisis de las restricciones institucionales presentamos la figura 3.

3.4.2. SEGUNDA FASE: análisis *micro* del conocimiento profesional del profesor

3.4.2.1. Análisis de los casos

En esta memoria se entiende el estudio de casos, como la investigación intensiva de un único objeto de indagación social, tal como: un aula, un colectivo de profesores, un individuo, etc. Si bien es cierto, que gran parte de las investigaciones etnográficas, en la que también se enmarca este estudio, se centran en el estudio de un caso, hay varias que incluyen la comparación de dos o más casos (Goetz y LeCompte, 1988; Biddle *et al.*, 1989). En esta investigación, nos planteamos los dos niveles de análisis que se contemplan en los estudios de casos, primero nos sumergiremos en un estudio riguroso y exhaustivo de cada uno de los profesores de matemática y física de Barranquilla que participaron en la investigación, y posteriormente, intentaremos aproximarnos a un análisis global de los casos que nos permita hacer una comparación de las singularidades y diferencias encontradas en el análisis particular de cada uno de ellos.

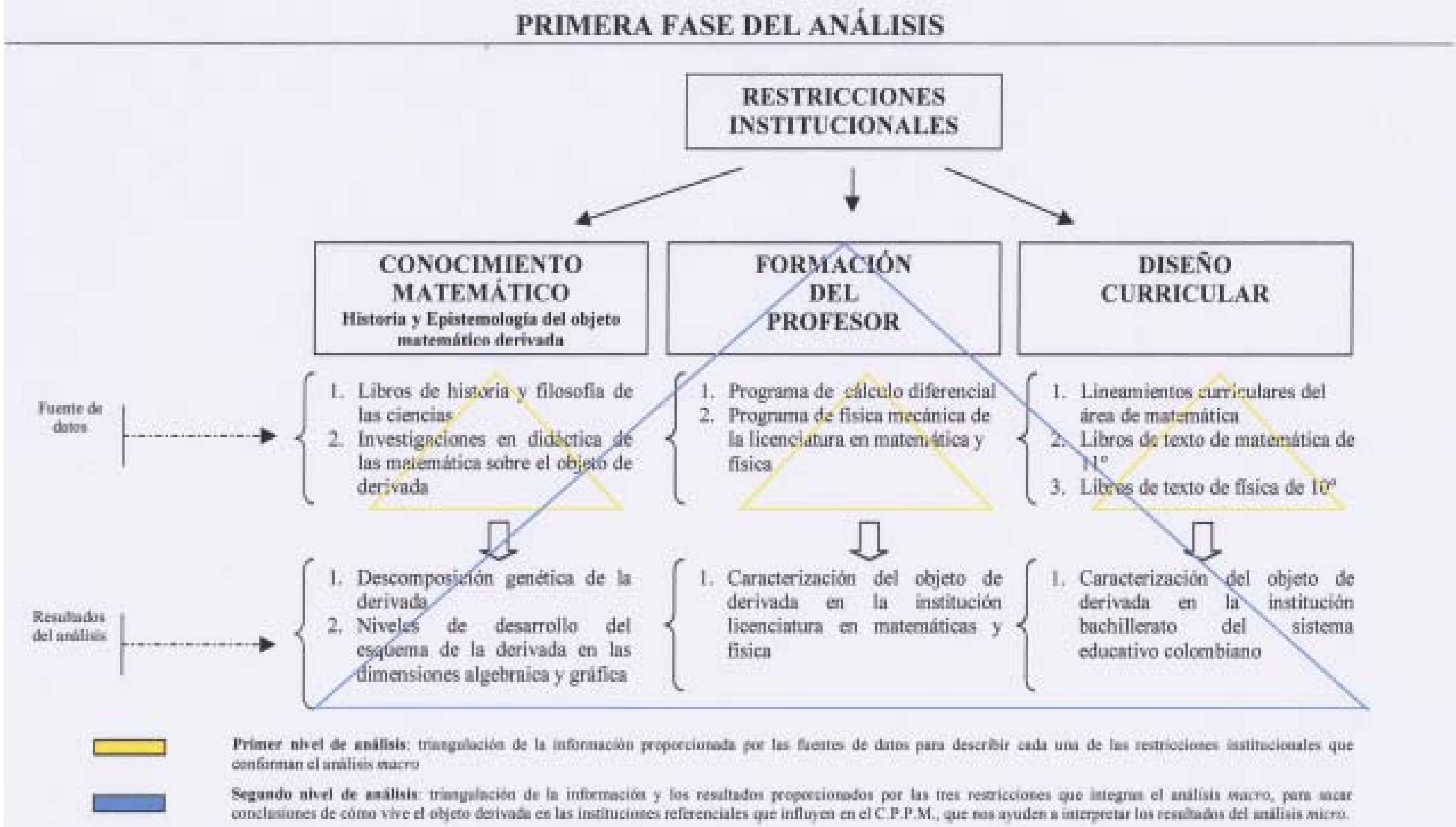


Figura 3. Esquema de la primera fase del análisis centrado en el estudio de las restricciones institucionales que forman parte del análisis *macro*

En total, abordamos el estudio de cinco casos: la elección de estos profesores, en cierta medida estuvo condicionada por la investigación previa (Badillo 1999) y por las limitaciones de la investigadora, pues me encontraba desde hacía algunos años en Barcelona y los profesores estaban laborando en Colombia. Inicialmente, nos planteamos seguir profundizando con los mismos profesores que participaron en la investigación piloto, pero dos de ellos no quisieron colaborar, y sólo el profesor B, forma parte de los participantes de la actual investigación. Los otros cuatro profesores los elegimos porque aceptaron las condiciones de ser grabados, entrevistados, proporcionar material escrito, etc. En la siguiente tabla se especifican algunas de las características de cada uno de estos profesores:

CARACTERÍSITCAS / PROFESOR	EXPERIENCIA LABORAL (Años)	TIPO DE INSTITUCIONES	OTROS ESTUDIOS
A	28	Universitaria Colegio de Bachillerato (privados)	Master en educación Cursos doctorales en Educación
B	22	Formador de profesores-universitario Colegio de bachillerato (oficial-sector rural)	Especialización en la enseñanza de las ciencias naturales Diplomado en Educación matemática
C	12	Colegio de bachillerato (oficial-sector rural)	Cursos de actualización pedagógica
D	9	Colegio de bachillerato (oficial-sector urbano)	Cursos de actualización pedagógica
E	25	Formador de profesores-universitario Colegio de Bachillerato (privado y oficial) Funcionario de la Secretaria de Educación	Master en educación en gestión escolar

En nuestro propósito de ser lo más rigurosos posible en el diseño metodológico, hemos definido para el estudio de las formas de conocer que tienen los profesores de la derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje, unas categorías para cada una de las componentes del conocimiento profesional, intentando siempre describir e interpretar con la misma intensidad y rigurosidad cada una de ellas (ver figura 4). Esto en algunos momentos, puede valorarse como exagerado, puesto que la lectura de los casos puede tornarse un poco repetitiva y aburrida, debido a las repeticiones que hay en muchos de ellos.

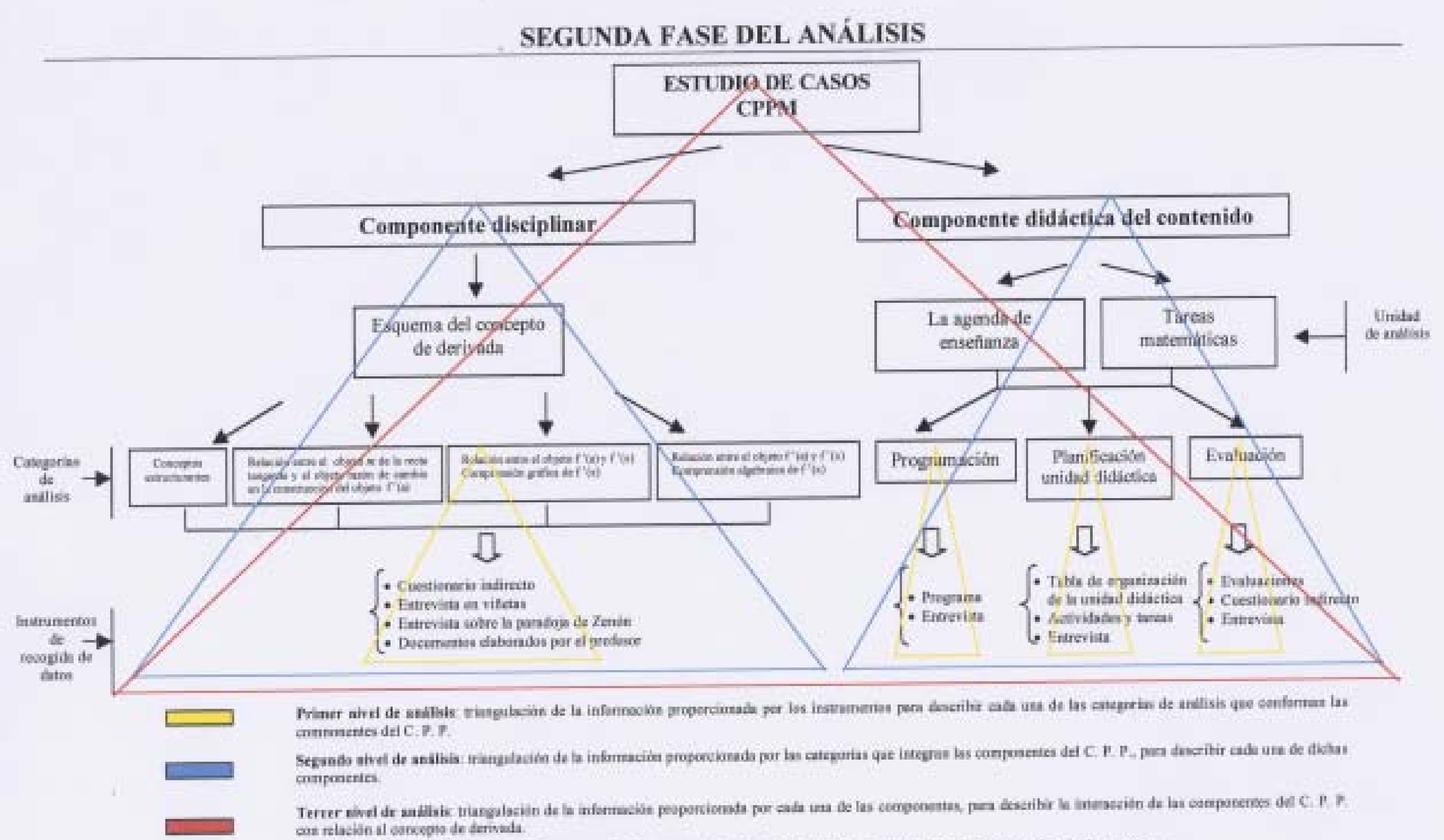


Figura 4. Esquema de la segunda fase del análisis centrado en el estudio de los casos

A continuación describiremos la forma como se hizo el análisis de cada una de las componentes del conocimiento profesional del profesor, que es el eje del estudio de los casos, y las categorías que definimos para el estudio de cada una de éstas.

i. Componente de contenido disciplinar: *el concepto de derivada como objeto matemático*

Siguiendo los estudios de Norman (1992; 1993), nos dispusimos a preguntarles directamente a los profesores sobre aspectos concretos del contenido matemático, para intentar inferir el nivel de comprensión que tienen los profesores sobre el objeto matemático derivada. Como ya mencionamos en apartados anteriores, utilizamos dos instrumentos que nos permitieron abordar lo que el profesor sabe sobre la derivada: cuestionario indirecto y entrevista con viñetas; pero de igual manera, los documentos elaborados por el profesor (programación, unidad didáctica y evaluación) se convirtieron en otra fuente de información valiosa.

Para el análisis de los niveles de comprensión de la derivada, tuvimos en cuenta las categorías teóricas y analíticas que nos proporcionan el marco de la Teoría APOE: (1) la descomposición genética del concepto de derivada; (2) las perspectivas acciones, proceso y objeto; y (3), los niveles de comprensión del esquema de la derivada en las dos dimensiones que definimos (algebraica y gráfica), en término de la triada intra, inter y trans propuesta por Piaget y García (1982) e incorporadas a la teoría APOE para el estudio de conceptos complejos como la derivada. Éste necesita un tratamiento como esquema, puesto que está conformado por la coordinación interna de varios objetos matemáticos (para una mayor descripción ir a la sección 4.1.2.)

La metodología implementada para el análisis de esta componente del conocimiento profesional, se encuentra sintetizada en la figura 5, y a continuación la describiremos:

1. Transcripción literal de la entrevista con viñetas (ver anexo 5)
2. Transcripción literal de la entrevista sobre la justificación del proceso de resolución de los problemas del cuestionario, incorporando la respuesta de cada una de las preguntas del mismo (ver anexo 4).

3. **Primera síntesis de la información**: elaboración de unas tablas resumen donde se destacaban los aspectos más significativos en las respuestas de los profesores del concepto de derivada como objeto matemático (ver anexo 8)
4. **Construcción de las redes sistémicas[3] de cada problema**: metodológicamente primero construimos las redes sistémicas de cada uno de los problemas del cuestionario y de las viñetas (10 en total, porque la viñeta VI, que es la de la versión de la paradoja tuvo un tratamiento de análisis diferente; para una mayor descripción ver anexo 7). Esto lo hicimos con dos objetivos: (1) familiarizarnos y organizar la información; y (2), definir las categorías teóricas y analíticas que nos permitieran estructurar el análisis de ésta componente en cada uno de los casos. Sin embargo, estas redes en la memoria aparecen posteriormente en el análisis global de los casos.
5. **Definición de categorías**: a partir de los datos obtenidos y organizados en las redes sistémicas, definimos las categorías del concepto de derivada que queremos indagar a profundidad, porque consideramos relevantes para la comprensión de este concepto: los conceptos estructurantes, la relación entre los objetos pendiente de la recta tangente y razón de cambio en la construcción del macro objeto f ’(a), y la relación (tanto gráfica como algebraica) entre los macro objetos f ’(a) y f ’(x).
6. **Triangulación de la información:** definidas las categorías, distribuimos los problemas teniendo en cuenta las categorías definidas, y se construyen las líneas de coherencia del proceso de resolución (Garbin, 2000). En total construimos tres líneas de coherencias, clasificando los problemas de la siguiente manera:
   - **Línea de coherencia 1**: relación entre los objetos pendiente de la recta tangente y razón de cambio en la construcción del macro objeto f ’(a). Se tuvieron en cuenta las respuestas a los problemas: 3 y 4 del cuestionario, y la V de las viñetas.
   - **Línea de coherencia 2**: la relación gráfica entre los macro objetos f ’(a) y f ’(x). Se tuvieron en cuenta las respuestas a los problemas: 1 y 2 del cuestionario, y la IV de las viñetas.

[3] Las redes sistémicas son un instrumento de organización e interpretación de datos cualitativos propuestos por Bliss y Ogborn (1979, 1983). Es un instrumento que permite tratar cuestiones abiertas o entrevistas, cuyo origen de análisis se deriva de la lingüística sistémica. La cual está interesada en la descripción y representación del *significado* (Bliss y Ogborn, 1979). Posteriormente, se ha ido extendiendo a los análisis no lingüísticos cuyo problema central era la extracción, codificación y representación de información tanto lingüística como no lingüística; es decir, pensamientos, ideas, hechos, etc. En nuestro departamento de Didáctica de la matemática y de las ciencias experimentales, numerosos son los trabajos que han utilizado este instrumento. Concretamente en el área de matemática citamos los estudios recientes de: Azcárate (1990), Garbin (2000) y Calvo (2001).

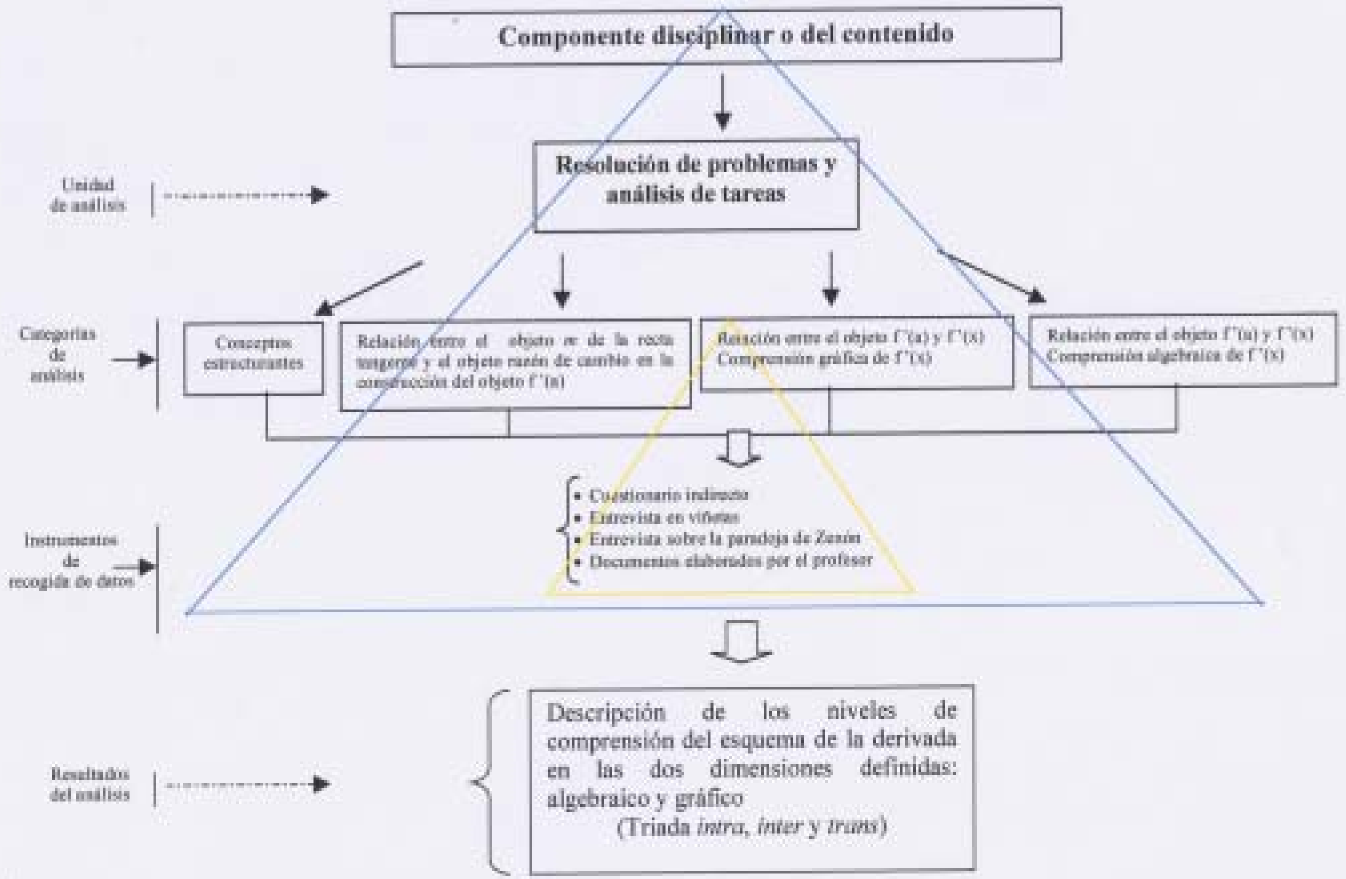


Figura 5. Metodología de análisis de la componente del contenido del conocimiento profesional del profesor que forma parte del análisis micro

- **Línea de coherencia 3**: la relación algebraica entre los macro objetos f ’(a) y f ’(x). Se tuvieron en cuenta las respuestas a los problemas: 5 del cuestionario, y la I, II y III de las viñetas.

7. **Descripción del análisis**: triangulando la información que proporcionan los problemas organizados en cada una de las líneas de coherencia con la información que nos proporcionaban las entrevistas semiestructuradas, se describen y se infieren los niveles de comprensión del esquema de la derivada que tienen cada uno de los profesores teniendo en cuenta las categorías teóricas que nos proporciona la Teoría APOE.

ii. Componente de contenido didáctico: ***el concepto de derivada como objeto de enseñanza y aprendizaje.***

En la descripción de las formas de conocer que tienen los profesores de la derivada como objeto de enseñanza y aprendizaje, hemos puesto énfasis en el estudio de las tareas que el profesor diseña e implementa, tanto en la unidad didáctica como en las evaluaciones. Cuando un profesor de secundaria diseña la enseñanza de un concepto matemático a unos estudiantes determinados y en un colegio concreto, aplica una serie de experiencias y conocimientos que ha ido estructurando con la práctica; es decir, que su conocimiento matemático ha sido contextualizado o *situado* por medio de la práctica. Por tanto, una parte importante de la práctica profesional del profesor se centra en el diseño, elección, modificación y uso de tareas focalizadas en un contenido matemático concreto y utilizadas con un objetivo educativo (Llinares, 1996). De allí que, en este estudio le damos relevancia al análisis de las tareas y a la justificación que hacen de las mismas como una forma de elicitar elementos de las dos componentes del conocimiento profesional del profesor que nos interesa describir.

Igualmente, nos centraremos en el análisis de la transposición didáctica que hace del concepto de derivada para ser enseñado en la institución de bachillerato del sistema educativo colombiano (Chevallard, 1997; Espinoza, 1998; Espinoza y Azcárate, 2000). Para ello, implementamos la siguiente metodología de análisis:

1. Descripción de la estructura y organización que hace de los contenidos en el programa de matemática de 11º

2. Descripción de la estructura y organización que hace de los contenidos en la unidad didáctica, definiendo las siguientes categorías de análisis, que se sintetizan en la figura 6:

    i. Itinerario didáctico que adopta para la enseñanza de los conceptos del cálculo diferencial
    ii. Conceptos estructurantes que justifican las técnicas de f ’(a) y f ’(x)
    iii. Técnicas que utilizan para calcular los macro objetos f ’(x) y f ’(a)
    iv. Definición del macro objeto f ’(x) y del macro objeto f ’(a)

3. Análisis de las tareas que presentan en la evaluación y en la unidad didáctica. Dada la cantidad de información con la que contábamos para el análisis de la actividad matemática en relación con el concepto de derivada, en total 36 tareas propuestas en las evaluaciones y 416 tareas propuestas en las unidades didácticas elaboradas por los profesores, tomamos la decisión de analizar primero las tareas que los profesores proponen en la evaluación y, posteriormente, a partir de la tipología definida con el análisis de las primeras, abordar el análisis de las tareas propuestas en las unidades didácticas. Esta decisión metodológica la tomamos por las siguientes razones: (1) reducir notablemente el número de tareas por analizar (36 en total), lo cual nos facilitó el acercamiento y definición de una primera tipología de las tareas que los profesores consideraban importantes para evaluar la comprensión de los macro objetos f (x), f ’(a) y f ’(x); (2) facilitar el procesamiento y la clasificación de la gran cantidad de tareas presentes en las unidades didácticas (416 en total) a partir de las 14 categorías definidas en el análisis de las evaluaciones. Lo cual nos permitió centrarnos en el análisis de las que no podíamos incluir en la tipología inicial y aportaban elementos nuevos al tratamiento de estos macro objetos. Fue así como ampliamos a 32 los tipos de tareas que caracterizan la actividad matemática en el nivel de secundaria y bachillerato del sistema educativo colombiano, que se pueden visualizar en la tabla 21 del capítulo 5; y (3), rastrear si las tareas que se evalúan forman parte de la actividad matemática que genera en el aula, o si por el contrario, se evalúan aspectos de los macro objetos f (x), f ’(a) y f ’(x) que no han sido tratados previamente por los profesores. Lo cual nos ayudó en el análisis de la coherencia entre el discurso, lo que dice que se hace y lo que realmente hace el profesor en clase.

A continuación nos centraremos en la descripción de la metodología implementada para el análisis de las tareas y presentaremos el instrumento que diseñamos para este propósito.

- **Análisis de las tareas**

En este estudio tendremos en cuenta, para el análisis de las tareas y actividades propuestas en las evaluaciones del concepto de derivada, en la unidad didáctica elaborada por el profesor y en los libros de texto, la consideración de que el conocimiento de un concepto matemático que posee un estudiante es el resultado tanto de la interacción entre el estudiante y la tarea, como de las características de la tarea en sí misma (García y Llinares, 1994). Por tanto, se intentará diferenciar en este análisis dos elementos claves propuestos por estos autores:

1. Las características textuales de las tareas.
2. La naturaleza de la actividad cognitiva que se genera a partir de ellas.

Con relación al primero, las características textuales de las tareas, nos centraremos en un análisis descriptivo de las características de las tareas matemáticas, atendiendo al uso de los sistemas de representación matemática y la traducción entre sistemas de representación que requiere la tarea para ser solucionada. Consideramos que las investigaciones en Educación Matemática han reportado numerosa información sobre el papel que juegan las representaciones y la traducción entre representaciones de los conceptos matemáticos en los procesos de aprendizaje y enseñanza de los conceptos matemáticos (Janvier, 1987; Kaput, 1992; Tall, 1991; Duval, 1996; Garbín, 2000; Font, 2000; Llinares *et al.*, 1996; Rico *et al*., 1997).

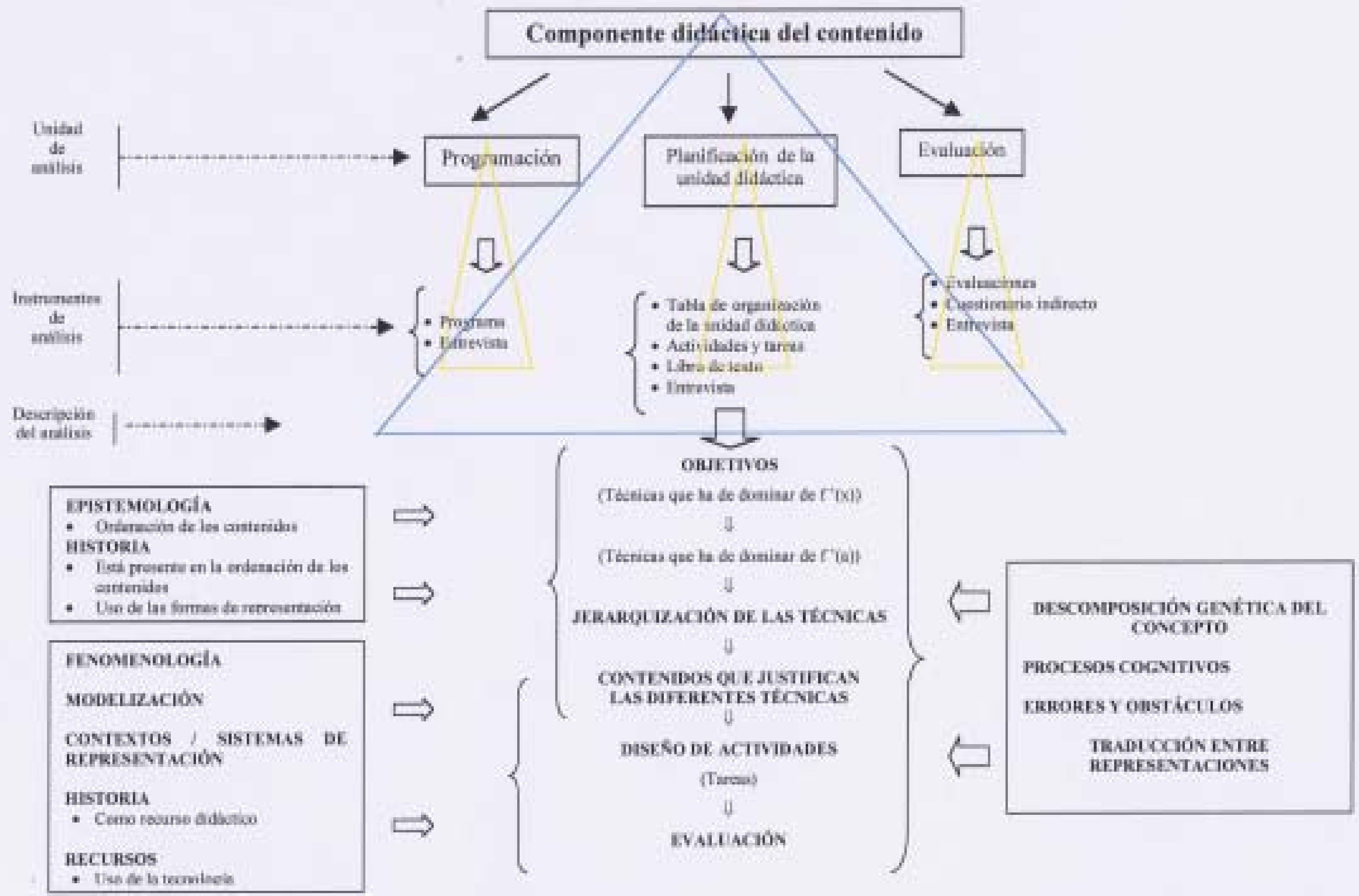


Figura 6. Metodología de análisis de la componente didáctica del conocimiento profesional del profesor que forma parte del análisis *micro*

En lo que respecta al segundo elemento a tener en cuenta en el análisis de las tareas, la naturaleza de la actividad cognitiva que se genera a partir de la interacción entre la tarea y el estudiante, partimos de la consideración de que el esquema personal que tiene un estudiante de un concepto matemático emerge como resultado de la actividad matemática que ha realizado anteriormente para resolver las tareas a las que se enfrenta durante el proceso de aprendizaje. Por tanto, la presentación de la tarea juega un papel importante, pero también son importantes los procesos cognitivos que demanda en los estudiantes cuando se enfrentan a su resolución. Para describir los procesos cognitivos que demanda la tarea en los estudiantes, nos apoyaremos en la teoría APOE propuesta por Dubinsky y sus colaboradores.

Para describir e interpretar la actividad matemática que el profesor dice que realiza en el aula, hemos tomado como unidad de análisis la tarea matemática que los profesores diseñan, proponen y dicen que implementan, tanto en la unidad didáctica del concepto de derivada como en las evaluaciones que hacen del concepto matemático. Teniendo en cuenta los niveles de concreción que los profesores hacen del currículo, el itinerario de análisis que deberíamos seguir de los instrumentos proporcionados por el profesor sería:

> **Programas curriculares oficiales** $\rightarrow$ *Programación de la asignatura* $\rightarrow$ *Unidad didáctica del concepto de derivada (y/o libros de texto)* $\rightarrow$ *Evaluación del concepto*

Sin embargo, dada la cantidad de información con la que contamos para el análisis de la actividad matemática en relación con el concepto de derivada, hemos tenido que tomar unas decisiones metodológicas que nos permitieran realizar un análisis riguroso de la misma, sin dejar de lado elementos interesantes ni caer en un reduccionismo simplista. Por tanto, en este estudio hemos optado por el siguiente itinerario de análisis:

> *Evaluación del concepto* $\rightarrow$ *Unidad didáctica del concepto de derivada (y/o libros de texto)* $\rightarrow$ *Programación de la asignatura* $\rightarrow$ **Programas curriculares oficiales**

El anterior itinerario de análisis nos permite centrarnos realmente en los aspectos del concepto de derivada que el profesor considera relevantes, y que a su vez pretende que sus alumnos hayan comprendido una vez ha terminado la enseñanza (tareas que evalúa), para posteriormente rastrear en la unidad didáctica (UD) las tareas matemáticas que ha tratado en el aula (tareas propuestas en las diferentes actividades que propone en la

UD), y, finalmente, analizar cómo éstas encajan dentro de la formación matemática global que los profesores buscan de sus alumnos al terminar un curso escolar concreto (logros propuestos en la programación de la asignatura).

Consideramos que este itinerario nos permite ver realmente la *coherencia* y la *consistencia* del esquema del concepto de derivada que el profesor dice que trabaja del concepto matemático en cuestión, y nos acerca a un análisis más rico del conocimiento del profesor del concepto de derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje, partiendo siempre de los instrumentos proporcionados por él (programación de la asignatura de matemática de 11º, unidad didáctica del concepto de derivada y/o libros de textos, y evaluación del concepto). Enriquecemos esto con la triangulación de la información que nos proporcionan las entrevistas realizadas al profesor, donde les brindamos la oportunidad de reflexionar sobre la elaboración e implementación de dichos instrumentos en el aula de clases.

El instrumento que hemos diseñado para el análisis de las tareas que el profesor propone en las evaluaciones, es una tabla que consta de ocho categorías englobantes que hemos denominado: tipo de problema, profesor, problema, representaciones, técnicas, conocimientos involucrados, procesos cognitivos y recursos tecnológicos. La elección y definición de estas categorías se hizo atendiendo al marco teórico en el que nos basamos, como son los organizadores del currículo propuestos por Rico (1997) y la Teoría APOE liderada por Dubinsky (1996). Estas categorías a su vez se encuentran subdivididas en varias subcategorías que nos permiten hacer un análisis más detallado de cada una de ellas, tal y como se pueden observar en la tabla 4.

Con la primera categoría, denominada *tipo de problema*, se busca generar una tipología de problemas que usualmente son tratados en el nivel de bachillerato del sistema de enseñanza colombiano. Esta tipología nos permite, en primer lugar, simplificar el análisis posterior de las tareas que cada profesor propone en la unidad didáctica; en segundo lugar, nos ayuda a establecer relaciones comparativas entre las diferentes actividades que proponen los profesores que participaron en este estudio; y en tercer lugar, nos ayuda a elicitar las tareas matemáticas que están ausentes de la práctica matemática en nuestro contexto, y que se pueden rescatar a través de la reflexión sobre las mismas, en cursos de formación permanente del profesorado.

Tipo de problema	Profesor	Problema			Representación			Técnica	Conocimientos involucrados	Procesos cognitivos	Recursos (Tecnología)
		Enunciado	Fenomenología	Contextos	Representaciones	Traducciones	Relaciones f(x) a f'(x)				

Tabla 4. Instrumento diseñado para el análisis de las tareas propuestas por los profesores en las evaluaciones y en las unidades didácticas, basándonos en los organizadores del currículo de Rico (1997) y la Teoría APOE de Dubinsky *et al.* (1996)

La segunda categoría, *profesor*, nos ayuda a realizar un análisis global (vertical) de todos los profesores que participaron en el estudio, lo que nos permite establecer similitudes y diferencias; convergencias y divergencias entre las diferentes prácticas matemáticas que coexisten en nuestro sistema, en relación con un mismo concepto; y también nos permite hacer un análisis particular de cada profesor (horizontal) que nos desvele la coherencia y la consistencia del esquema del concepto de derivada que exhibe cada profesor, y que nos dé luz, posteriormente, para proponer algunos lineamientos sobre la formación permanente del profesorado de Colombia en cálculo diferencial.

Para justificar las categorías que siguen, hemos de detenernos un poco en los organizadores del currículo propuestos por Rico (1997). Desde la conciencia de que el conocimiento matemático *per se* no agota la necesidad organizativa del currículo, este autor ha propuesto la necesidad de hacer un análisis que contemple otros aspectos relevantes, de los cuales nosotros hemos extraído para el análisis de las tareas los siguientes: fenomenología, contexto, representaciones y traducción entre representaciones, recursos (uso de la tecnología), los conocimientos matemáticos involucrados y las técnicas que requieren, dejando implícito en ellos otro organizador, como lo es, el uso de la historia.

Desde este marco, la categoría *problema*, la hemos dividido en tres subcategorías: enunciado, fenomenología y contexto. El enunciado nos lleva a visualizar las tareas que plantean los profesores, nos permite ver características comunes entre las situaciones problemas, y a establecer la tipología de problemas que plantean los profesores, es decir, nos ayuda a observar la frecuencia con la que ciertos tipos de problemas aparecen en la actividad propuesta por un profesor determinado y, a su vez, las similitudes y diferencias entre las tareas que plantean los profesores en general.

El análisis fenomenológico de las tareas se encuentra influenciado por la visión de Puig (1997); por tanto, enfocamos nuestro interés en describir “cuáles son los fenómenos para lo que es el medio de organización y qué relación tiene el concepto y la estructura con esos fenómenos” (p. 63). Esto nos lleva a entender al análisis fenomenológico desde dos perspectivas: la consideración de la pareja (fenómenos-matemática), donde la matemática organiza a los fenómenos; y la aceptación de que dado que las matemáticas pueden organizar otras matemáticas, éstas pueden convertirse a su vez en fenómenos, y pasar a formar parte del primer elemento de la pareja. Es decir que para la clasificación y generación de la tipología de tareas nos centraremos en dos de las fenomenologías que identifica Puig: la *fenomenología pura*, entendida en la actividad que proponen los profesores con la matemática en su estado actual y su uso actual; y la *fenomenología histórica*, entendida en el trabajo que proponen los profesores a partir de los fenómenos para cuya organización se creó el concepto matemático en cuestión y cómo se extiende a otros fenómenos en otras ciencias.

La categoría de *contexto* se encuentra directamente relacionada con la de *representaciones*; en palabras de Duval (1996), esta relación viene dada en los siguientes términos: en matemática se habilitan diferentes lenguajes matemáticos, como el algebraico, analítico, geométrico, gráfico y verbal, cada uno de estos lenguajes contextualiza el problema o la tarea en un contexto algebraico, analítico, geométrico, gráfico y verbal, respectivamente. Y, a su vez, cada lenguaje matemático utiliza ciertos registros de representación semiótica que pueden ser de tipo lingüístico y no lingüístico. Por tanto, la categoría de contexto nos permite ver la interacción que hay entre el lenguaje utilizado en el enunciado y el sistema de representación en el que se expresa, que influyen sobre la actividad cognitiva de traducción que demanda la solución del mismo.

Con relación a la categoría que hemos denominado *representaciones,* como ya mencionamos inicialmente, consideramos que el uso de las representaciones, las traducciones y las relaciones entre representaciones juegan un papel muy importante en la comprensión de los conceptos matemáticos, y más concretamente, en la comprensión del concepto de derivada. Bajo este punto de vista, Font (2000) recoge y plantea la siguiente hipótesis para el estudio de las técnicas que permiten calcular f ’(x), y de las representaciones y traducciones entre representaciones de f (x) y f ’(x) activadas en estas técnicas:

> “El cálculo de f ’(x) dada f (x) se puede interpretar como un proceso en el que se ha de considerar:
> I. Traducciones entre representaciones de f (x)
> II. El paso de una representaciones de f (x) a f ’ (x)
> III. Traducciones entre representaciones de f ’ (x)” (Font, 2000)

Basándose en los trabajos de Janvier sobre las traducciones entre las formas de representar el concepto de función, Font (2000) amplía las traducciones entre representaciones de una función al campo de la derivada y la integral, es decir que diseña un instrumento que permite recoger traducciones entre representaciones del objeto función, traducciones entre representaciones de la función derivada, el paso entre una forma de representar el objeto función a una forma de representar el objeto de función derivada, y finalmente, traducciones entre la formas de representar la función derivada a diferentes formas de representar la función primitiva. La tabla 5, recoge la propuesta elaborada por este autor, que es un instrumento complementario a la tabla de análisis de tareas que estamos describiendo, y que se utilizará para describir las representaciones materiales externas (ostensivos) activadas en las diferentes técnicas que permiten calcular f ’(x) en las tareas diseñadas por los profesores de este estudio. Igualmente, utilizaremos la tabla 5, para definir en términos de la teoría APOE, los procesos cognitivos que se activan cuando se realiza una traducción entre representaciones de un mismo concepto, o cuando se relacionan representaciones de dos conceptos matemáticos diferentes.

de → a	Expresión simbólica f ’ (x)	Gráfica f ’ (x)	Tabla f ’ (x)	Descripción verbal de la Situación (f ’ (x))	Expresión simbólica f (x)	Gráfica f (x)	Tabla f (x)	Descripción verbal de la situación (f (x))
Expresión simbólica f (x)								
Gráfica f (x)								
Tabla f (x)								
Descripción verbal de la situación (f (x))								
Expresión simbólica f ’ (x)								
Gráfica f ’ (x)								
Tabla f ’ (x)								
Descripción verbal de la situación (f ’ (x))								

	De una forma de representar la función a una de la función derivada		Traducciones entre representaciones de función
	Traducciones entre representaciones de la función derivada		De la función derivada a la primitiva de una función

Tabla 5. Tomada de Font (2000)

Este último instrumento nos ha sido útil para analizar globalmente el uso de las representaciones que hacen los profesores y nos ha permitido visualizar con gran potencia la riqueza o no que hay en la actividad matemática que cada uno de los profesores hacen en el aula. Igualmente, nos ha ayudado a generar una tipología de situaciones problemas que se trabajan en nuestro contexto concreto. Lo cual nos ha llevado a definir y refinar un conjunto de categorías que nos permitiera recoger todos los matices que se van generando al intentar clasificar las tareas atendiendo a esta variable.

Como base teórica para definir el sistema de categorías tuvimos en cuenta un estudio de García y Llinares (1994) en el que plantean algunos referentes para analizar tareas relacionadas con el concepto de función, el cual nos sirvió como punto de partida para establecer las categorías para la traducción entre representaciones de f (x), pero al que en últimas proponemos algunas modificaciones. Igualmente, siguiendo este modelo propusimos un sistema de categorías para las relaciones entre representaciones de f (x) a f ’(x); para relaciones entre f ’(x) a f (x), pero que en su totalidad no serán objeto de estudio en esta investigación; y finalmente, para traducciones entre representaciones de f ’(x). El proceso de estructuración del sistema de categorías anteriormente descritas ha sido bastante dispendioso y cíclico, porque se fue configurando y enriqueciendo en la medida que se iban analizando las tareas que proponían los profesores en la evaluación y en la unidad didáctica, tratando siempre de respetar la información que se obtenía y que daba origen a otras categorías, hasta establecerlo tal y como lo presentamos a continuación.

Creemos conveniente remarcar, que el hecho de haber propuesto estas categorías para el análisis de las tareas, que aún tienen un carácter provisional, no implica que en el desarrollo de una unidad didáctica se deban tener todas en cuenta. En efecto, consideramos que sería imposible hacerlo. Lo que en realidad tratamos de mostrar es la complejidad que tiene el diseño de las tareas, y la importancia que tiene para el profesor el tener conciencia y conocimiento de las traducciones y relaciones entre representaciones que se han de activar durante el proceso de resolución de las mismas y los procesos cognitivos que demanda cada una de estas traducciones y relaciones entre representaciones de los macro objetos f (x) y f ’(x).

- **Categorías para el análisis de tareas:**

I. Traducciones entre representaciones de f (x)

1. Trabajo dentro de un mismo modo de representación de f (x)
    1.1. Expresión simbólica de f (x) a Expresión simbólica de f (x): ES f (x) → ES f (x)
        1.1.1. Características del objeto matemático: ES f (x) → ES f (x)
        1.1.2. Cálculo de características del objeto matemático: ES f (x) → ES f (x)
        1.1.3. Transformaciones de la expresión algebraica (factorización, racionalización, etc.): ES f (x) → ES f (x)
    1.2. Gráfica de f (x) a gráfica de f (x): G f (x) → G f (x)
        1.2.1. Transformaciones de la gráfica (variación de escala, de unidades, etc.)
    1.3. Descripción verbal de f (x) a descripción verbal de f (x): DV f (x) → DV f (x)
        1.3.1. Variación en la descripción de la situación
    1.4. Tabla f (x) a tabla de f (x): T f (x) → T f (x)
        1.4.1. Transformación en la tabla (interpolación de datos, modificación de parámetros, intercambio de variables, cálculo de diferencias, etc.)
2. Traducciones entre dos modos de representación de f (x)
    2.1. Expresión simbólica de f (x) a tabla de f (x): ES f (x) → T f (x)
    2.2. Expresión simbólica de f (x) a gráfica de f (x): ES f (x) → G f (x)
    2.3. Expresión simbólica de f (x) a descripción verbal de f (x): ES f (x) → DV f (x)
    2.4. Descripción verbal de f (x) a gráfica de f (x): DV f (x) → G f (x)
    2.5. Descripción verbal de f (x) a expresión simbólica de f (x): DV f (x) → ES f (x)
    2.6. Descripción verbal de f (x) a tabla de f (x): DV f (x) → T f (x)
    2.7. Gráfica de f (x) a descripción verbal de f (x): G f (x) → DV f (x)
    2.8. Gráfica de f (x) a tabla de f (x): G f (x) → T f (x)
    2.9. Gráfica de f (x) a expresión simbólica de f (x): G f (x) → ES f (x)
    2.10. Tabla de f (x) a descripción verbal de f (x): T f (x) → DV f (x)
    2.11. Tabla de f (x) a gráfica de f (x): T f (x) → G f (x)
    2.12. Tabla de f (x) a expresión simbólica de f (x): T f (x) → ES f (x)
3. Tareas que piden explícitamente la utilización de un modo de representación de f (x) diferente para resolver la tarea planteada (se ejecutan acciones estipuladas sin el uso de estrategias de resolución)
    3.1. Presentación: modo algebraico; solución: gráfica
    3.2. Presentación: descripción verbal; solución: formulación algebraica
    3.3. Presentación: tabla; solución: gráfica
    3.4. Presentación: gráfico; solución descripción verbal
4. Tareas de varios pasos, que requieren el uso de estrategias de resolución

4.1. Traducción entre dos modos de representación de f (x) para trabajar en el primero de ellos: ______ f (x) ↻ →______ f (x)

4.2. Traducción entre dos modos de representación de f (x) para trabajar en el según do de ellos: ______ f (x) →______ f (x) ↻

4.3. Trabajo dentro de un modo de representación de f (x), traducción a otro modo de representación de f (x), más trabajo dentro del segundo de ellos: _____ f (x) ↻ →______ f (x) ↻

4.4. Traducción seguida de otra traducción: ____ f (x) →______ f (x) →______ f (x)

4.5. Traducción seguida de otra traducción, y trabajo dentro del último modo de representación de f (x): ______ f (x) →______ f (x) →______ f (x) ↻

5. Otras

II. Relaciones entre representaciones de f (x) a f ’(x)

1. Trabajo dentro de un mismo modo de representación

1.1. Expresión simbólica de f (x) a expresión simbólica de f ’(x)

1.1.1. Características del objeto matemático: ES f (x) ⇨ES f ’(x)

1.1.2. Cálculo numérico en f ’(x): ES f (x) ⇨ES f ’(x) ↻

1.1.3. Traducciones entre representaciones de f (x) seguida de relación a f ’(x): ES f (x) →_____ f (x) ⇨ES f ’(x)

1.1.4. Traducciones entre representaciones de f (x) seguida de relación a f ’(x) y trabajo numérico en f ’(x): ES f (x) →_____ f (x) ⇨ES f ’(x) ↻

1.2. Gráfica de f (x) a gráfica de f ’(x): G f (x) ⇨ G f ’(x)

1.2.1. Interpretación de las gráficas de f (x) a f ’(x)

1.2.2. Emparejar gráfica de f (x) con gráfica de f ’(x)

1.3. Descripción verbal de f (x) a descripción verbal de f ’(x): DV f (x) ⇨ DV f ’(x)

1.4. Tabla de f (x) a tabla de f ’(x): T f (x) ⇨ T f ’(x)

2. Relación entre dos modos de representación de f (x) a f ’(x)

2.1. Expresión simbólica de f (x) a tabla f ’(x): ES f (x) ⇨ T f ’(x)

2.2. Expresión simbólica de f (x) a gráfica de f ’(x): ES f (x) ⇨ G f ’(x)

2.3. Expresión simbólica de f (x) a descripción verbal de f ’(x): ES f(x) ⇨ DV f ’(x)

2.4. Descripción verbal de f (x) a gráfica de f ’(x): DV f (x) ⇨ G f ’(x)

2.5. Descripción verbal de f (x) a expresión simbólica f ’(x): DV f (x) ⇨ ES f ’(x)

2.6. Descripción verbal de f (x) a tabla de f ’(x): DV f (x) ⇨ T f ’(x)

2.7. Gráfica de f (x) a descripción verbal de f ’(x): G f (x) ⇨ DV f ’(x)

2.8. Gráfica de f (x) a tabla de f ’(x): G f (x) ⇨ T f ’(x)

2.9. Gráfica de f (x) a expresión simbólica de f ’(x): G f (x) ⇨ ES f ’(x)

2.10. Tabla de f (x) a descripción verbal de f ’(x): T f (x) ⇨ DV f ’(x)

2.11. Tabla de f (x) a gráfica de f ’(x): T f (x) ⇨ G f ’(x)

2.12. Tabla de f (x) a expresión simbólica de f ’(x): T f (x) ⇨ ES f ’(x)

3. Tareas que piden explícitamente la utilización de un modo de representación diferente para resolver la tarea planteada (se ejecutan acciones estipuladas sin el uso de estrategias de resolución)

   3.1. Presentación: modo algebraico f (x); solución: gráfica f ’(x)

   3.2. Presentación: descripción verbal f (x); solución: formulación algebraica f ’(x)

   3.3. Presentación: tabla f (x); solución: gráfica f ’(x)

   3.4. Presentación: gráfico f (x); solución descripción verbal f ’(x)

4. Tareas de varios pasos, que requieren el uso de estrategias de resolución

   4.1. Relación entre dos modos de representación de f (x) y f ’(x) para trabajar en el primero de ellos: ______ f (x) ↻ ⇨______ f ’(x)

   4.2. Relación entre dos modos de representación de f (x) y f ’(x) para trabajar en el segundo de ellos: ______ f (x) ⇨______ f ’(x) ↻

   4.3. Trabajo dentro de un modo de representación de f (x), relación a un modo de representación de f ’(x), más trabajo dentro del segundo de ellos:
   ______ f (x) ↻ ⇨______ f ’(x) ↻

   4.4. Relación entre dos modos de representación de f (x) y f ’(x) más traducción entre representaciones de f ’(x): ______ f (x) ⇨______ f ’(x) →______ f ’(x)

   4.5. Relación entre dos modos de representación de f (x) y f ’(x) más traducción entre representaciones de f ’(x), y trabajo dentro del último modo de representación: ______ f (x) ⇨______ f ’(x) →______ f ’(x) ↻

   4.6. Relación entre dos modos de representación de f (x) y f ’(x) más trabajo en el segundo modo de representación, seguida de traducción entre representaciones de f ’(x): ______ f (x) ⇨______ f ’(x) ↻→______ f ’(x)

   4.7. Relación entre dos modos de representación de f (x) y f ’(x) más trabajo en el segundo modo de representación, seguida de relación entre el modo de representaciones de f ’(x) y otro modo de representación de f (x) seguida de otra relación entre el último modo de representación de f (x) con otro modo de representación de f ’(x):_____ f (x) ⇨_____ f ’(x) ↻⇨_____ f (x)⇨____ f ’(x)

   4.8. Traducción entre dos o más modos de representación de f (x) seguida de relación entre el último modo de representación de f (x) y f ’(x) más trabajo en el modo de representación de f ’(x):

   ______ f (x) → ______ f (x) → ______ f (x)⇨ ______ f ’(x) ↻

5. Otras

III. Traducciones entre representaciones de f ’(x)

1. Trabajo dentro de un mismo modo de representación de f ’(x)

    1.1. Expresión simbólica de f ’(x) a expresión simbólica de f ’(x): ES f ’(x) → ES f ’(x)

        1.1.1. Características del objeto matemático: ES f ’(x) → ES f ’(x)

        1.1.2. Cálculo y análisis de características: ES f ’(x) → ES f ’(x)

        1.1.3. Transformaciones de la expresión algebraica (factorización, racionalización, etc.): ES f ’(x) → ES f ’(x)

    1.2. Gráfica de f ’(x) a gráfica de f ’(x): G f ’(x) → G f ’(x)

        1.2.1. Interpretación de la gráfica

        1.2.2. Transformaciones de la gráfica (variación de escala, de unidades, etc.)

    1.3. Descripción verbal de f ’(x) a descripción verbal de f ’(x): DV f ’(x) → DV f ’(x)

        1.3.1. Variación en la descripción de la situación

    1.4. Tabla f ’(x) a tabla de f ’(x): T f ’(x) → T f ’(x)

        1.4.1. Transformación en la tabla (interpolación de datos, modificación de parámetros, intercambio de variables, cálculo de diferencias, etc.)

2. Traducciones entre dos modos de representación de f ’(x)

    2.1. Expresión simbólica de f ’(x) a tabla de f ’(x): ES f ’(x) → T f ’(x)

    2.2. Expresión simbólica de f ’(x) a gráfica de f ’(x): ES f ’(x) → G f ’(x)

    2.3. Expresión simbólica de f ’(x) a descripción verbal de f ’(x): ES f ’(x)→DV f ’(x)

    2.4. Descripción verbal de f ’(x) a gráfica de f ’(x): DV f ’(x) → G f ’(x)

    2.5. Descripción verbal de f ’(x) a expresión simbólica de f ’(x): DV f ’(x)→ES f ’(x)

    2.6. Descripción verbal de f ’(x) a tabla de f ’(x): DV f ’(x) → T f ’(x)

    2.7. Gráfica de f ’(x) a descripción verbal de f ’(x): G f ’(x) → DV f ’(x)

    2.8. Gráfica de f ’(x) a tabla de f ’(x): G f ’(x) → T f ’(x)

    2.9. Gráfica de f ’(x) a expresión simbólica de f ’(x): G f ’(x) → ES f ’(x)

    2.10. Tabla de f ’(x) a descripción verbal de f ’(x): T f ’(x) → DV f ’(x)

    2.11. Tabla de f ’(x) a gráfica de f ’(x): T f ’(x) → G f ’(x)

    2.12. Tabla de f ’(x) a expresión simbólica de f ’(x): T f ’(x) → ES f ’(x)

3. Tareas que piden explícitamente la utilización de un modo de representación de f ’(x) diferente para resolver la tarea planteada (se ejecutan acciones estipuladas sin el uso de estrategias de resolución)

    3.1. Presentación: modo algebraico; solución: gráfica

    3.2. Presentación: descripción verbal; solución: formulación algebraica

    3.3. Presentación: tabla; solución: gráfica

    3.4. Presentación: gráfico; solución descripción verbal

4. Tareas de varios pasos, que requieren el uso de estrategias de resolución

4.1. Traducción entre dos modos de representación de f ’(x) para trabajar en el primero de ellos: ______ f ’(x) ↻ →______ f ’(x)

4.2. Traducción entre dos modos de representación de f ’(x) para trabajar en el segundo de ellos: ______ f ’(x) →______ f ’(x) ↻

4.3. Trabajo dentro de un modo de representación de f ’(x), traducción a otro modo de representación de f ’(x), más trabajo dentro del segundo de ellos: _____ f ’(x) ↻ →______ f ’(x) ↻

4.4. Traducción seguida de otra traducción: _____ f ’(x) →_____ f ’(x) →____ f ’(x)

4.5. Traducción seguida de otra traducción, y trabajo dentro del último modo de representación de f ’(x): ______ f ’(x) →______ f ’(x) →______ f ’(x) ↻

5. Otras

IV. Relaciones entre representaciones de f ’(x) a f (x) [4]

1. Trabajo dentro de un mismo modo de representación
   1.1. Expresión simbólica de f ’(x) a expresión simbólica de f (x)
      1.1.1. Características del objeto matemático: ES f ’(x) ⇨ES f (x)
      1.1.2. Traducciones entre representaciones de f ’(x) seguida de relación a f (x): ES f ’(x) →_____ f (x) ⇨ES f (x)
      1.1.3. Traducciones entre representaciones de f ’(x) seguida de relación a f (x) y trabajo numérico en f (x): ES f ’(x) →_____ f (x) ⇨ES f (x) ↻
   1.2. Gráfica de f ’(x) a gráfica de f (x): G f ’(x) ⇨ G f (x)
      1.2.1. Interpretación de las gráficas de f ’(x) a f (x)
      1.2.2. Emparejar gráfica de f ’(x) con gráfica de f (x)
   1.3. Descripción verbal de f ’(x) a descripción verbal de f (x): DV f ’(x) ⇨ DV f (x)
   1.4. Tabla de f ’(x) a tabla de f (x): T f ’(x) ⇨ T f (x)
2. Relación entre dos modos de representación de f ’(x) a f (x)
   2.1. Expresión simbólica de f ’(x) a tabla f (x): ES f ’(x)⇨T f (x)
   2.2. Expresión simbólica de f ’(x) a gráfica de f (x): ES f ’(x) ⇨ G f (x)
   2.3. Expresión simbólica de f ’(x) a descripción verbal de f (x): ES f ’(x) ⇨ DV f (x)
   2.4. Descripción verbal de f ’(x) a gráfica de f (x): DV f ’(x) ⇨ G f (x)
   2.5. Descripción verbal de f ’(x) a expresión simbólica f (x): DV f ’(x) ⇨ ES f (x)
   2.6. Descripción verbal de f ’(x) a tabla de f (x): DV f ’(x) ⇨ T f (x)
   2.7. Gráfica de f ’(x) a descripción verbal de f (x): G f ’(x) ⇨ DV f (x)
   2.8. Gráfica de f ’(x) a tabla de f (x): G f ’(x) ⇨ T f (x)

[4] Las categorías de las relaciones entre representaciones de f ’(x) a f (x), no son objeto de estudio en esta investigación, salvo las traducciones: 1.2., 2.7., y 2.9., porque sí que las encontramos presentes en las tareas que proponen los profesores que participaron en este estudio.

2.9. Gráfica de f ’(x) a expresión simbólica de f (x): G f ’(x) ⇨ ES f (x)

2.10. Tabla de f ’(x) a descripción verbal de f (x): T f ’(x) ⇨ DV f (x)

2.11. Tabla de f ’(x) a gráfica de f (x): T f ’(x) ⇨ G f (x)

2.12. Tabla de f ’(x) a expresión simbólica de f (x): T f ’(x) ⇨ ES f (x)

3. Tareas que piden explícitamente la utilización de un modo de representación diferente para resolver la tarea planteada (se ejecutan acciones estipuladas sin el uso de estrategias de resolución)

3.1. Presentación: modo algebraico f ’(x); solución: gráfica f (x)

3.2. Presentación: descripción verbal f ’(x); solución: formulación algebraica f (x)

3.3. Presentación: tabla f ’(x); solución: gráfica f (x)

3.4. Presentación: gráfico f ’(x); solución descripción verbal f (x)

4. Tareas de varios pasos, que requieren el uso de estrategias de resolución

4.1. Relación entre dos modos de representación de f ’(x) y f (x) para trabajar en el primero de ellos: ______ f ’(x) ↻ ⇨______ f (x)

4.2. Relación entre dos modos de representación de f ’(x) y f (x) para trabajar en el segundo de ellos: ______ f ’(x) ⇨______ f (x) ↻

4.3. Trabajo dentro de un modo de representación de f ’(x), relación a un modo de representación de f (x), más trabajo dentro del segundo de ellos: ______ f ’(x) ↻ ⇨______ f (x) ↻

4.4. Relación entre dos modos de representación de f ’(x) y f (x) más traducción entre representaciones de f (x): ______ f ’(x) ⇨______ f (x) →______ f (x)

4.5. Relación entre dos modos de representación de f ’(x) y f (x) más traducción entre representaciones de f (x), y trabajo dentro del último modo de representación: ______ f ’(x) ⇨______ f (x) →______ f (x) ↻

5. Otras

Otro aspecto que consideramos importante son los *contenidos* que se encuentran inmersos en una tarea matemática cualquiera. Si bien es cierto que hemos dicho que no deben convertirse en el único referente para organizar el currículo, consideramos que la reflexión sobre los contenidos matemáticos que estructuran una tarea matemática se hace necesaria a la hora de diseñar e implementar las tareas matemáticas que conforman la actividad en el aula. Igualmente, lo son las *técnicas* o procedimientos que se utilizan para derivar funciones, la integración de las mismas para poder solucionar determinadas tareas y la justificación teórica que hacen del uso de ellas, porque éstas condicionan la actividad matemática de los estudiantes (Fonseca y Gascón, 2000).

En la categoría de *recursos*, nuestro interés pasa por focalizar la atención en la utilización que hacen los profesores de las nuevas tecnologías como un elemento enriquecedor en la enseñanza de los conceptos matemáticos, porque consideramos que proporciona una fuerza visualizadora de los conceptos del cálculo que ayuda a la comprensión de los mismos (Tall, 1985a, b; 1991; Dubinsky, 1996). Igualmente, porque esta categoría nos permite indagar sobre uno de los elementos que consideramos importantes e imprescindibles a la hora de diseñar programas de formación permanente e inicial del profesorado de matemática.

Finalmente, en lo que concierne a la categoría de *procesos cognitivos*, pretendemos hacer un análisis riguroso (lo cual no quiere decir cerrado ni único) de la actividad cognitiva que suponemos ha de emerger cuando un individuo se enfrenta a determinados tipos de tareas. Para la descripción de los procesos cognitivos nos basamos en la descomposición didáctica que hemos realizado del concepto de derivada, retomando los elementos teóricos que nos proporciona la teoría APOE propuesta por Dubinsky y colaboradores (1996). Ésta nos permite interpretar la actividad matemática que han de realizar los estudiantes en términos de los procesos de abstracción reflexiva que demanda la misma: interiorización, coordinación, encapsulación, desencapsulación, y generalización.

Una vez establecidas las categorías para el análisis de las tareas atendiendo a la traducción entre representaciones de f (x) y f ’(x), y las relaciones entre representaciones de f (x) a f ’(x), y viceversa, decidimos analizar los procesos cognitivos asociados a dichas traducciones y relaciones; tuvimos como referente el trabajo realizado por Janvier (1987), sobre el aprendizaje de funciones, donde define las capacidades que se desarrollan en un individuo cuando se leen e interpretan los lenguajes de representación y posteriormente cuando se traducen entre ellos.

Desde → Hacia	**Descripción verbal**	**Tabla**	**Gráfica**	**Fórmula**
Descripción verbal	—	Medida	Boceto	Modelo
Tabla	Lectura	—	Trazado	Ajuste
Gráfica	Interpretación	Lectura	—	Ajuste
Fórmula	Interpretación	Computo	Gráfica	—

Como resultado de este análisis, hemos intentado aproximarnos a la definición de los procesos cognitivos que se activan y las capacidades que se desarrollan cuando un individuo aborda la resolución de tareas matemáticas que requieren la traducción y la relación entre sistemas de representación de los macro objetos f (x) y f ’(x). Para ello, utilizamos la tabla 6, propuesta por Font (2000), en la que se consigna el resultado de este análisis en términos de los procesos cognitivos que brinda la teoría APOE, y que a su vez se convierte en un instrumento de análisis para describir los niveles de comprensión del esquema de la derivada que tienen los profesores.

Creemos conveniente resaltar, que los procesos cognitivos que hemos definido para cada una de las traducciones y relaciones entre representaciones de los macro objetos f (x) y f ’(x), tienen un carácter provisional, puesto que no encontramos elementos empíricos en las tareas propuestas por los profesores que nos permitieran analizar todas y cada una de éstas. Igualmente, queremos aclarar, que si bien es cierto que el instrumento diseñado por Font (2000), muestra la posibilidad de visualizar todas las posibles relaciones y traducciones entre representaciones que se pueden hacer entre estos macro objetos, esto no implica que se tengan que tener en cuenta todas a la hora de diseñar la agenda de enseñanza, de hecho sería imposible por cuestiones reales de tiempo y, aún más, lo que este autor propone es que se han priorizar aquellas traducciones y relaciones que favorezcan a los estudiantes la comprensión y relación entre estos macro objetos.

Para concretar más en qué consisten los procesos cognitivos que requieren la traducción entre representaciones de f (x) y f ’(x) y las relaciones entre representaciones de f (x) y f ’(x), y viceversa, los hemos detallado en las tablas 7, 8, 9 y 10 que esbozamos a continuación. Creemos conveniente resaltar, que nos hemos centrado en los conceptos de función derivada y derivada en un punto para hacer el análisis de los procesos cognitivos y no hemos realizado un análisis detallado de los procesos cognitivos que se activan al enfrentarse a la resolución de las tareas en relación con las representaciones de los conceptos estructurantes del concepto de derivada (función, tasa media de variación, límite, etc.), porque no es objetivo de nuestro estudio.

de → a	Expresión simbólica f'(x)	Gráfica f'(x)	Tabla f'(x)	Descripción verbal de la situación (en términos de f'(x))	Expresión simbólica f(x)	Gráfica f(x)	Tabla f(x)	Descripción verbal de la situación (en términos de f(x))
Expresión simbólica f(x)	Interiorización de acciones	Coordinación de procesos	Interiorización de acciones	Generalización del esquema	Interiorización de acciones	Coordinación de procesos	Interiorización de acciones	Desencapsulación de un objeto
Gráfica f(x)	Coordinación de esquemas	Generalización del esquema (síntesis de objetos)	Coordinación de esquemas	Coordinación de esquemas (síntesis de objetos)	Generalización del esquema	Interiorización de acciones	Interiorización de acciones	Desencapsulación de un objeto
Tabla f(x)	Encapsulación y desencapsulación de objetos	Encapsulación y desencapsulación de objetos	Encapsulación y desencapsulación de objetos	Generalización del esquema	Desencapsulación de un objeto	Coordinación de procesos	Interiorización de acciones	Desencapsulación de un objeto
Descripción verbal de la situación (en términos de f(x))	Generalización del esquema (síntesis de objetos)	Generalización del esquema (síntesis de objetos)	Generalización del esquema (síntesis de objetos)	Generalización del esquema (síntesis de objetos)	Generalización del esquema	Coordinación de procesos	Interiorización de acciones	Generalización del esquema
Expresión simbólica f'(x)	Interiorización de acciones	Coordinación de procesos	Interiorización de acciones	Desencapsulación de objetos				
Gráfica f'(x)	Generalización del esquema	Interiorización de acciones	Interiorización de acciones	Desencapsulación de objetos		Generalización del esquema (síntesis de objetos)		Generalización del esquema (síntesis de objetos)
Tabla f'(x)	Desencapsulación de objetos	Coordinación de procesos	Interiorización de acciones	Desencapsulación de objetos				
Descripción verbal de la situación (en términos de f'(x))	Generalización del esquema (síntesis de objetos)	Generalización del esquema (síntesis de objetos)	Interiorización de acciones	Generalización del esquema (síntesis de objetos)				

Tabla 6. Procesos cognitivos que demandan la traducción entre representaciones de f (x) y f '(x), y las relaciones entre representaciones de f (x) a f '(x) y de f '(x) a f (x) en términos de la teoría APOE.

Traducción entre representaciones de f (x)	Procesos cognitivos
• ES f (x) → ES f (x) • ES f (x) → G f (x) • ES f (x) → T f (x) • ES f (x) → DV f (x)	• **Interiorización de acciones** sobre el objeto función (representado por su ES) en procesos que ayuden a las trasformaciones de la ES: factorización, racionalización, etc. • **Coordinación de procesos** para representar gráficamente una función: identificación de parámetros, representación de puntos con las de funciones, diferentes aspectos de la continuidad de una función, traducción de diferentes modos de representación de función, etc. • **Interiorización de acciones** sobre el objeto función (representado por su ES) en procesos numéricos y algebraicos que ayuden al cálculo de valores: cálculo numérico, variable dependiente e independiente, magnitudes directamente proporcionales e inversamente proporcionales, etc. • **Desencapsulación del objeto** función en los procesos que permitan la interpretación de la ES y la interpretación de parámetros: elementos que lo constituyen, variable dependiente e independiente, etc.
• G f (x) → ES f (x) • G f (x) → G f (x) • G f (x) → T f (x) • G f (x) → DV f (x)	• **Generalización del esquema** función en un esquema más complejo, el cual incluye la familia de funciones y los diferentes tipos de representación del concepto. • **Interiorización de acciones** sobre el objeto función (representado por su G) en procesos que ayuden a las trasformaciones de la G: variación escalas, unidades, origen, de variables, etc. • **Interiorización de acciones** sobre el objeto función (representado por su G) en procesos que ayuden a la lectura de la gráfica: lectura de puntos en el plano, parejas ordenadas, etc. • **Desencapsulación del objeto** función en los procesos que permitan la interpretación de la gráfica y la interpretación de parámetros: significado de los elementos que lo constituyen, variable dependiente e independiente, crecimiento y decrecimiento, etc.
• T f (x) → ES f (x) • T f (x) → G f (x) • T f (x) → T f (x) • T f (x) → DV f (x)	• **Desencapsulación del objeto** función en los procesos que permitan realizar un ajuste numérico (tasa media de variación, crecimiento y decrecimiento en los valores, identificación de las variables dependiente e independiente, relación entre las variables dependiente e independiente, etc) • **Coordinación de procesos** para representar gráficamente una función (representaciones de puntos con las de funciones, diferentes aspectos de la continuidad de una función, traducción de diferentes modos de representación de función, etc) • **Interiorización de acciones** del objeto función (representado por su T) en procesos que ayuden a las trasformaciones de los valores de la tabla (interpolación de datos, modificación de parámetros, intercambio de variables, cálculo de diferencias, etc) • **Desencapsulación del objeto** función en los procesos que permitan la interpretación y lectura de las relaciones numéricas entre parámetros (elementos que lo constituyen, variable dependiente e independiente, crecimiento y decrecimiento, variación, etc)
• DV f (x) → ES f (x) • DV f (x) → G f (x) • DV f (x) → T f (x) • DV f (x) → DV f (x)	• **Generalización del esquema** función en un esquema más complejo, el cual incluye la familia de funciones y los diferentes tipos de representación del concepto. • **Coordinación de procesos** para esbozar gráficamente una función: representaciones de puntos con las de funciones, diferentes aspectos de la continuidad de una función, traducción de diferentes modos de representación de función, etc. • **Interiorización de acciones** sobre el objeto función (representado por su DV) en procesos que ayuden a la estimación y cálculo numérico de valores en la tabla. • **Generalización del esquema** de función para poder realizar distintas descripciones del concepto en otros contextos.

Tabla 7. Procesos cognitivos que demandan la traducción entre representaciones de f (x)

Traducción entre representaciones de f '(x)	Procesos cognitivos
• ES f '(x) → ES f '(x)	• **Interiorización de acciones** sobre el objeto función derivada (representado por su ES) en procesos que ayuden a las trasformaciones de la misma: factorización, racionalización, etc.
• ES f '(x) → G f '(x)	• **Coordinación de procesos** para representar gráficamente la función derivada a partir de su ES: representación de puntos con las de funciones, diferentes aspectos de la continuidad de una función, traducción de diferentes modos de representación de función, etc.
• ES f '(x) → T f '(x)	• **Interiorización de acciones** sobre el objeto función derivada (representado por su ES) en procesos numéricos y algebraicos que ayuden al cálculo de valores: cálculo numérico, variable dependiente e independiente, magnitudes directamente proporcionales e inversamente proporcionales, etc.
• ES f '(x) → DV f '(x)	• **Desencapsulación del objeto** función derivada en los procesos que permitan la interpretación de la fórmula y la interpretación de parámetros: elementos que lo constituyen, variable dependiente e independiente, etc.
• G f '(x) → ES f '(x)	• **Generalización del esquema** función derivada en un esquema más complejo, el cual incluye la familia de funciones, composición de funciones y los diferentes tipos de representación del concepto.
• G f '(x) → G f '(x)	• **Interiorización de acciones** sobre el objeto función derivada (representado por su G) en procesos que ayuden a las trasformaciones de la G: variación escalas, unidades, origen, de variables, etc.
• G f '(x) → T f '(x)	• **Interiorización de acciones** sobre el objeto función derivada (representado por su G) en procesos que ayuden a la lectura de la gráfica: lectura de puntos en el plano, parejas ordenadas, etc.
• G f '(x) → DV f '(x)	• **Desencapsulación del objeto** función derivada en los procesos que permitan la interpretación de la gráfica y la interpretación de parámetros: significado de los elementos que lo constituyen, variable dependiente e independiente, crecimiento y decrecimiento, criterios de la 1ª y 2ª derivada, etc.
• T f '(x) → ES f '(x)	• **Desencapsulación del objeto** función derivada en los procesos que permitan realizar un ajuste numérico: tasa media de variación, crecimiento y decrecimiento en los valores, identificación de las variables dependiente e independiente, relación entre las variables dependiente e independiente, etc.
• T f '(x) → G f '(x)	• **Coordinación de procesos** para representar gráficamente la función derivada: representación de puntos con las de funciones, diferentes aspectos de la continuidad de una función, traducción de diferentes modos de representación de función, criterios de la 1ª y 2ª derivada, etc.
• T f '(x) → T f '(x)	• **Interiorización de acciones** sobre el objeto función derivada (representado por su T) en procesos que ayuden a las trasformaciones de los valores de la tabla: interpolación de datos, modificación de parámetros, intercambio de variables, cálculo de diferencias, etc.
• T f '(x) → DV f '(x)	• **Desencapsulación del objeto** función derivada en los procesos que permitan la interpretación y lectura de las relaciones numéricas entre parámetros: elementos que lo constituyen, variable dependiente e independiente, crecimiento y decrecimiento, variación, etc.
• DV f '(x) → ES f '(x)	• **Generalización del esquema** función derivada en un esquema más complejo, el cual incluye la familia de funciones, composición de funciones y los diferentes tipos de representación de los conceptos de función, función derivada y derivada en un punto.
• DV f '(x) → G f '(x)	• **Coordinación de procesos** para esbozar gráficamente la función derivada: representaciones de puntos con las de funciones, diferentes aspectos de la continuidad de una función, traducción de diferentes modos de representación de función, criterios de la 1ª y 2ª derivada, etc.
• DV f '(x) → T f '(x)	• **Interiorización de acciones** sobre el objeto función derivada (representado por su DV) en procesos que ayuden a la estimación y cálculo numérico de valores en la tabla.
• DV f '(x) → DV f '(x)	• **Generalización del esquema** de función derivada para poder realizar distintas descripciones del concepto en otros contextos.

Tabla 8. Procesos cognitivos que demandan la traducción entre representaciones de f '(x)

Relación entre representaciones de f (x) a f '(x)	Procesos cognitivos
• ES f (x) ⇨ ES f '(x)	• **Interiorización de acciones** sobre el objeto función en el proceso de calcular la función derivada directa (a través álgebra de límite) o indirectamente (a través de la aplicación memorística de las reglas de derivación).
• ES f (x) ⇨ G f '(x)	• **Coordinación de procesos** para calcular numéricamente la función gradiente o función pendiente de una función según un incremento de h, y representarla gráficamente: representaciones de puntos con las de funciones, diferentes aspectos de la continuidad de una función, traducción de diferentes modos de representación de función, cálculo de la función gradiente: $pf_h(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, etc.
• ES f (x) ⇨ T f '(x)	• **Interiorización de acciones** sobre el objeto función en el proceso de calcular directa (a través álgebra de límite) o indirectamente (a través de la aplicación de las reglas de derivación) la derivada de la función en un punto y construir una tabla con dichos valores.
• ES f (x) ⇨ DV f '(x)	• **Generalización del esquema** función derivada en un esquema más complejo, el cual incluye la familia de funciones, composición de funciones y los diferentes tipos de representación de los conceptos de función, función derivada y derivada en un punto en varios contextos.
• G f (x) ⇨ ES f '(x)	• **Coordinación de esquemas** de pendiente de la recta tangente que permita encontrar y evaluar las condiciones que cumplen todas las tangentes y coordinarlo con el esquema de función (para asociarlo con la familia de funciones conocidas) y con el esquema de función de derivada.
• G f (x) ⇨ G f '(x)	• **Generalización del esquema** de función en un esquema más complejo como lo es el esquema de la función derivada que incluye el análisis monótono de la misma: crecimiento y decrecimiento, puntos máximos y mínimos, propiedades de la función, significado de asíntotas, etc.
• G f (x) ⇨ T f '(x)	• **Coordinación de los esquemas** de función y derivada de la función en un punto (como el valor de la pendiente de la recta tangente en dicho punto), que permita hacer un análisis de la monotonía de la función: creciente, decreciente, puntos máximos y mínimos, puntos de inflexión, concavidad, etc (manipulación de la gráfica mediante la ayuda de programas informáticos que se apoyen en el poder de la visualización del proceso).
• G f (x) ⇨ DV f '(x)	• **Coordinación de los esquemas** de función y derivada de la función en un punto (como el valor de la pendiente de la recta tangente en dicho punto), que permita hacer un análisis de la monotonía de la función: creciente, decreciente, puntos máximos y mínimos, puntos de inflexión, concavidad, etc.
• T f (x) ⇨ ES f '(x)	• **Encapsulación del proceso** en el que intervienen diferentes elementos de una función en el objeto función derivada que los agrupa.
• T f (x) ⇨ G f '(x)	• **Encapsulación del proceso** en el que intervienen diferentes elementos de una función en el objeto función derivada que los agrupa, y **desencapsulaicón del objeto** función derivada en el proceso en el que intervienen objetos de una misma clase, la derivada de la función en cada punto del dominio.
• T f (x) ⇨ T f '(x)	• **Encapsulación del proceso** en el que intervienen diferentes elementos de una función en el objeto función derivada que los agrupa, y **desencapsulaicón del objeto** función derivada en el proceso en el que intervienen objetos de una misma clase, la derivada de la función en cada punto del dominio.
• T f (x) ⇨ DV f '(x)	• **Generalización del esquema** de función para poder realizar el análisis monótono de la misma en términos de los criterios de la 1ª y 2ª derivada.
• DV f (x) ⇨ ES f '(x)	• **Generalización del esquema** función derivada en un esquema más complejo, el cual incluye la familia de funciones, composición de funciones y los diferentes tipos de representación de los conceptos de función, función derivada y derivada en un punto en varios contextos.
• DV f (x) ⇨ G f '(x)	• **Generalización del esquema** función derivada en un esquema más complejo, el cual incluye la familia de funciones, composición de funciones y los diferentes tipos de representación de los conceptos de función, función derivada y derivada en un punto en varios contextos.
• DV f (x) ⇨T f '(x)	• **Generalización del esquema** función derivada en un esquema más complejo, el cual incluye la familia de funciones, composición de funciones y los diferentes tipos de representación de los conceptos de función, función derivada y derivada en un punto en varios contextos.
• DV f (x) ⇨ DV f '(x)	• **Generalización del esquema** función derivada en un esquema más complejo, el cual incluye la familia de funciones, composición de funciones y los diferentes tipos de representación de los conceptos de función, función derivada y derivada en un punto en varios contextos.

Tabla 9. Procesos cognitivos que demandan la relación entre representaciones de f (x) a f '(x)

Relación entre representaciones de f '(x) a f (x)	**Procesos cognitivos**
• G f '(x) ⇨ G f (x) • G f '(x) ⇨ DV f (x)	• **Generalización del esquema (síntesis de objetos)** de función en un esquema más complejo como lo es el esquema de la función derivada que incluye el análisis monótono de la misma: crecimiento y decrecimiento, puntos máximos y mínimos, propiedades de la función, significado de asíntotas etc. • **Generalización del esquema (síntesis de objetos)** de función en un esquema más complejo como lo es el esquema de la función derivada que incluye el análisis monótono de la misma: crecimiento y decrecimiento, puntos máximos y mínimos, propiedades de la función, significado de asíntotas etc.

Tabla 10. Procesos cognitivos que demandan la relación entre representaciones de f '(x) a f (x) que se contemplaran en este estudio

iii. Integración de las componentes

Partiendo de los resultados obtenidos en el análisis de las dos componentes del conocimiento profesional del profesor, se hace una descripción de las formas de conocer que tienen los profesores del concepto de derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en el nivel de secundaria del sistema educativo colombiano. Los resultados de este análisis nos proporcionan información valiosa para revisar la descomposición genética del concepto de derivada. Es decir, para reestructurar el análisis epistemológico y didáctico asociado al objeto matemático derivada, que es pieza fundamental para el diseño e implementación de cursos de formación permanente del profesorado tomando como referencia el ciclo de investigación de la Teoría APOE.

3.4.3. TERCERA FASE: análisis global de los casos

3.4.3.1. Análisis global del conocimiento disciplinar: en esta sección cobra mucha importancia el uso de las redes sistémicas como instrumento de recogida de la información que facilita la interpretación de la misma, resaltando, singularidades y diferencias entre las formas de conocer que tienen los profesores la derivada como objeto matemático (niveles de comprensión del esquema de la derivada).

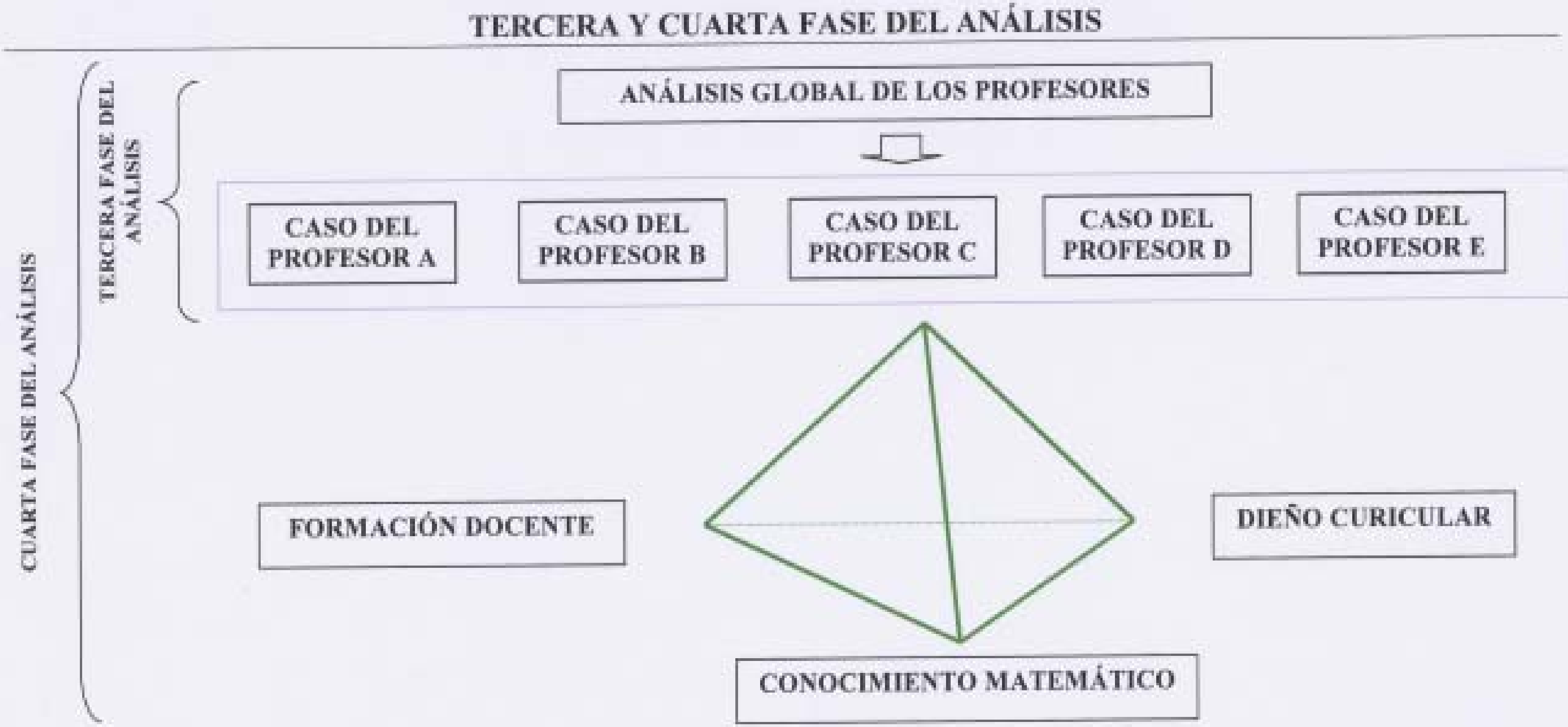
3.4.3.2. Análisis global del conocimiento didáctico del contenido: teniendo en cuenta la misma estructura de análisis expuesta para el análisis de esta componente en cada uno de los casos, en este apartado se describen singularidades y diferencias entre las forma de conocer que tienen los profesores la derivada como objeto de enseñanza y aprendizaje (análisis de tareas).

3.4.3.3. Revisión de la descomposición genética inicial: en este apartado, se incorporan los elementos más significativos de las conclusiones de los análisis globales de las dos componentes en la revisión de la descomposición genética inicial que realizamos del concepto de derivada.

3.4.4. CUARTA FASE: integración de los análisis *macro* y *micro.*

3.4.4.1. Conclusiones generales del estudio: en este apartado se intuye un diagnóstico y formulación de un fenómeno didáctico en la enseñanza del objeto matemático derivada en el nivel de bachillerato del sistema educativo colombiano. Las conclusiones se organizarán teniendo en cuenta los objetivos propuestos en el capítulo tres: metodológicos y didácticos.

3.4.4.2. Implicaciones didácticas del estudio: en este apartado se propondrán sugerencias de algunos lineamientos para la formación permanente del profesorado, atendiendo a la realidad contextual del conocimiento y la práctica del profesor de matemática de Barranquilla (Colombia). Para esto, se ha de triangular la información que arrojan los dos niveles de análisis realizados (ver figura 7).



Cuarto nivel de análisis: triangulación de la información proporcionada por cada uno de los casos para describir globalmente los elementos más relevantes del C. P. P. de los profesores que participaron en este estudio

Quinto nivel de análisis: triangulación de la información proporcionada por el análisis general de los casos con la información del análisis de la F.D., el D.C. y el C.M., para interpretar la formación actual del profesorado y proponer lineamientos sobre la F. P. P. M.

Figura 7. Esquema de la tercera y cuarta fase del análisis que conducen a la integración de los dos niveles de análisis *macro* y *micro*