5.1.3. A manera de conclusión: integración de las componentes del conocimiento profesional del profesor B

El análisis de las formas de conocer que tiene el profesor B de la derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje, nos permite caracterizar algunos rasgos de la práctica profesional que el profesor B genera en el aula (Llinares, 1996). En términos generales, nos encontramos con un profesor con una consistencia y coherencia en el manejo de los objetos matemáticos clave para la relación y comprensión de los macro objetos f (x), f '(a) y f '(x), tanto cuando se enfrenta a la resolución de problemas matemáticos como cuando propone, diseña y justifica tareas matemáticas (en la unidad didáctica y en la evaluación). Igualmente, su discurso, con relación a la derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje, ha sido coherente a lo largo de las entrevistas que justifican su práctica. Sin embargo, detectamos algunas incoherencias, en la definición del macro objeto f '(a) que el profesor B propone en la unidad didáctica, que pueden hacer emerger inconsistencias en los estudiantes en la comprensión de los macro objetos f '(a) y f '(x), que hemos intentado describir e interpretar teniendo en cuenta la triangulación de la información que nos proporciona el análisis de las dos componentes del conocimiento profesional del profesor que hemos considerado en este estudio.

Para el análisis de la componente didáctica del contenido focalizamos la atención en tres aspectos: la programación, la unidad didáctica y la evaluación. La triangulación de la información que nos proporciona el análisis de las tres fuentes anteriores, nos permite inferir los siguientes elementos sobre la forma de conocer que tiene el profesor B de la derivada como objeto de enseñanza y aprendizaje:

1. Inicialmente, con el análisis de la programación inferimos, que el profesor B opta por un itinerario didáctico tradicional para la enseñanza de la derivada caracterizado por la introducción del concepto límite previo a la enseñanza de la derivada. Sin embargo, al analizar la unidad didáctica, detectamos algunos matices en el itinerario que implementa este profesor fundamentados por la conciencia de las dificultades que tiene para los estudiantes la comprensión del objeto límite. En efecto, propone un itinerario, que sigue más fielmente el

desarrollo histórico, basado *grosso modo* en el método que utilizaba Newton para calcular velocidades instantáneas y la pendiente de la recta tangente en un punto a partir de las pendientes de las rectas secantes, cuando éstas se aproximan a la recta tangente, y a partir de allí introduce la definición del macro objeto f '(a) y, posteriormente, la definición del macro objeto f '(x).

2. La resolución de problemas es el eje que estructura la introducción y desarrollo de los objetos matemáticos inmersos en la unidad didáctica. La metodología que plantea en la unidad didáctica, podríamos enmarcarla en las nuevas visiones constructivistas de la enseñanza y el aprendizaje. El profesor parte de los conocimientos previos que tiene sus estudiantes, a partir de la resolución de problemas significativos y la discusión entre iguales busca la modificación de estos conocimientos hasta llegar a la formalización de los mismos.
3. Las tareas propuestas en las evaluaciones y en la unidad didáctica, reflejan la comprensión y relación que tiene el profesor B de los macro objetos f (x), f '(a) y f '(x). Son tareas de una gran riqueza conceptual, enunciadas en diferentes contextos, en las que se usan una variedad de representaciones de estos macro objetos que requieren de traducciones y relaciones entre representaciones de los macro objetos f (x), f '(a) y f '(x) que pueden ayudar a emerger una perspectiva objeto de los conceptos función, derivada en un punto y función derivada, caracterizada por la activación de procesos cognitivos complejos (encapsulación, desencapsulación, coordinación y síntesis).

Si tenemos en cuenta la organización que hace de los contenidos en la unidad didáctica sin detenernos en el análisis de las definiciones que presenta de los macro objetos f '(a) y f '(x), encontramos que el profesor B apuesta primero por introducir el macro objeto f '(a) y luego el macro objeto f '(x). Pero, al optar por la notación de incrementos para definir el macro objeto f '(a) genera una confusión entre los macro objetos f '(a) y f '(x), puesto que el uso de la notación incremental implica de manera indirecta y sin darse cuenta, estar avanzando la función derivada. Consideramos que desde este tratamiento la mayoría de los alumnos no pueden comprender la derivada en un punto definida de esta manera (no se introduce el macro objeto f '(a)); o simplemente, no entiende el cociente incremental como la función derivada, sino que termina confundiendo los dos macro objetos y reduciendo las técnicas de cálculo del macro objeto f '(a) a la sustitución de variables de $x = a$ en la expresión de la función derivada encontrada a partir de la aplicación de cualquiera de las técnicas de derivación I, II o III.

Esta primera mirada a la definición y tratamiento del macro objeto f '(a), nos lleva inicialmente a afirmar que en la unidad didáctica del profesor B no se tratan técnicas concretas de cálculo del macro objeto f '(a), sino que éstas se reducen a un proceso de sustitución de variables *a posteriori* del cálculo de la expresión simbólica del macro objeto f '(x); pero posteriormente el análisis de las tareas, nos permite observar y concluir que algunas de las tareas para ser solucionadas requieren de la aplicación de técnicas de derivación del macro objeto f '(a) (p.e., cálculo gráfico en un punto de la pendiente de la recta) diferentes a la mera sustitución de la x por a en la expresión simbólica del macro objeto f '(x), lo cual nos permite inferir que de alguna manera, el tratamiento de las técnicas de cálculo del macro objeto f '(a) forman parte de la actividad matemática que genera el profesor B en el aula.

Curiosamente, el análisis de las formas de conocer la derivada como objeto matemático que tiene el profesor B, muestra que este profesor tiene un nivel de comprensión del esquema de la derivada trans algebraico-trans gráfico caracterizada por una perspectiva objeto de los macro objeto f (x), f '(a) y f '(x). El profesor B, a través de la resolución de los problemas presentados en el cuestionario y en la entrevista con viñetas, manifiesta una coordinación y relación de los macro objetos f '(a) y f '(x), como elemento y clase; lo cual implica, la coordinación algebraica y gráfica de los objetos pendiente de la recta tangente, tasa instantánea de variación, y razón de cambio ($\underset{\Delta t \to 0}{Lim} \frac{\Delta e}{\Delta t}$; $\underset{\Delta t \to 0}{Lim} \frac{\Delta mag}{\Delta t}$; $\underset{\Delta mag' \to 0}{Lím} \frac{\Delta mag}{\Delta mag'}$) que engloba el macro objeto f '(a), y el proceso de síntesis de los anteriores objetos en los objetos función pendiente de la recta tangente, función tasa instantánea de variación y función razón de cambio que engloba el macro objeto f '(x). Sin embargo, observamos que a la hora de trasponerlos en la unidad didáctica, esta comprensión de los macro objetos f '(a) y f '(x) no se ve reflejada en las definiciones que usa de estos macro objetos. Inicialmente, podemos concluir que la comprensión que tiene de los macro objetos no es suficiente para reflexionar ni darse cuenta de los errores conceptuales e inconsistencias matemáticas que tienen las definiciones de los macro objetos f '(a) y f '(x) presentes en el libro de texto, que son las que propone en la unidad didáctica, o bien, si se da cuenta creemos que no le da la suficiente importancia que en nuestra opinión merece.

Contradictoriamente con lo anteriormente expuesto, el análisis de las tareas que diseña el profesor B, concluimos que el nivel de comprensión trans algebraico-trans gráfico del esquema de la derivada que tiene el profesor B, si se ve reflejado en el diseño de las tareas que conforman la unidad didáctica y la evaluación del concepto de derivada. Puesto que la metodología de enseñanza que implementa, basada en la resolución de problemas –enunciados en diferentes contextos y variados en la fenomenología asociada a los macro objetos f (x), f '(a) y f '(x), podría funcionar de puente y ayudar a los estudiantes a hacer las conexiones entre estos macro objetos, e incluso a alcanzar la comprensión y relación de los mismos.

Todo lo anterior nos lleva a suponer que la presencia de incoherencias entre, por un lado, la comprensión de los macro objetos f '(a) y f '(x) que tiene el profesor B y, por otro lado, la presencia de inconsistencias en la enseñanza de los mismos, se puede explicar, en el caso del profesor B, en términos de que el currículo de secundaria y la forma cómo ha sido formado en esta área del conocimiento, en donde no se le da importancia al proceso de síntesis del macro objeto f '(a) en el macro objeto f '(x), actúan como restricciones institucionales, e incluso, llegan a tener más peso a la hora de diseñar e implementar la enseñanza de estos macro objetos que la comprensión que tiene como resultado de su formación permanente y de su práctica.

Investigaciones realizadas en el estado español (Font, 2000; Inglada y Font, 2002) muestran: (1) la gran complejidad semiótica que representa el paso del macro objeto f '(a) al macro objeto f '(x) y (2), que los libros de texto españoles no tienen en cuenta este *fenómeno*. En el caso del profesor B, el cambio visto al definir el macro objeto f '(x) al intentar diferenciar los macro objetos como elemento y clase, refleja una leve intuición o conciencia de la complejidad semiótica que involucra el paso del macro objeto f '(a) al macro objeto f '(x). En efecto, en la entrevista sobre la enseñanza de este concepto, el profesor B, al indagar sobre las ventajas y desventajas que tiene el uso de algunas definiciones explicita, aunque no lo tenga en cuenta a la hora de trasponerlos en la unidad didáctica, la complejidad semiótica que hay en estas definiciones.

> "Pero aquí, fíjate tú si de pronto nosotros interpretamos la número 1. Este h, está representando este delta y aquí tenemos en el numerador de esta fracción la variación de la función. Es que hay una similitud... aquí nos hablan en el 3 de $\Delta y/\Delta x$, el Δy se refiere a la variación de la función y el Δx la variación de la variable x, que es similar a esta la número 2... **Pero yo utilizo o me doy más con la número 2 porque en la tercera los estudiantes no entienden este cociente $\Delta y/\Delta x$ o es menos complicado para mí de explicarlo**... Pero me gusta la 2 porque se explicita en un lenguaje matemático la variación de la función cuando varía la variable independiente."

Inicialmente, basándonos en el estudio realizado por Inglada y Font (2002; 2003) en los que concluyen que la razón implícita para introducir la derivada en un punto con la notación de incrementos es que ayuda a "justificar" más adelante la regla de la cadena porque la notación de incremento coordinada con la notación diferencial permite con comodidad introducir y justificar la regla de la cadena, indagamos en la unidad didáctica para ver cuál era la justificación que el profesor B daba al uso exclusivo de la notación incremental para definir los macro objetos f '(a) y f '(x). Contradictoriamente con lo que concluyen estos autores en su estudio, nos encontramos que en la unidad didáctica del profesor B no hay un espacio reservado al estudio de la regla de la cadena, lo cual no nos permite inferir que el profesor B haya optado por la definición de los incrementos como un tratamiento previo para la introducción y justificación de la regla de la cadena. Más bien consideramos que, el uso de la notación incremental obedece, como ya mencionamos anteriormente, a los siguientes factores:

1. La tradición histórica de utilizar los incrementos por influencia de la física, más en nuestro contexto, donde la formación del profesorado es bidisciplinar en matemática y física; y, el profesor B es simultáneamente profesor de las dos asignaturas.
2. La importancia que se le otorga al libro de texto como referente principal para la transposición acrítica de los conceptos a enseñar.

Dubinsky y otros (1995), reflexionan sobre las implicaciones que tienen las diferentes notaciones que se usan para definir los macro objetos f '(a) y f '(x), y consideran relevante tener conciencia de las connotaciones que cada una de estas notaciones tiene y la influencia que tienen en la comprensión de estos macro objetos. En este sentido, afirman que si bien es cierto que formalmente las diferentes notaciones significan lo mismo, cada una de estas notaciones permiten enfatizar diferentes aspectos de los macro objetos f (x), f ’(a) y f ’(x). Concretamente, la notación de incrementos, que es la usada por el profesor A, enfatiza la interpretación de la derivada como razón de cambio de una variable (*y* en el caso de las definiciones que propone el profesor A) con respecto a otra variable (*x* en este mismo caso). Esta notación incremental, tiene más sentido con la común notación, *y = f (x)*. Así, la notación: $\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ es usada para indicar la operación derivada sobre funciones. Esta notación enfatiza que estás haciendo la derivada de la “función representada por la expresión que sigue” $\frac{d}{dx}$ con respecto a *x*. Y por tanto, proponen una solución para la notación de la derivada en un punto definida por el cociente incremental de la función, así: $\frac{d}{dx} f(x) \big|_{x=a} = f'(a)$.

Finalmente, la conclusión a la que llegan Inglada y Font (2002), y que también proponen Dubinsky *et al.* (1995), es el no eliminar el uso de esta notación, que en cierta medida sí que facilita la introducción a la regla de la cadena, sino que proponen no introducirla de entrada y más aún que no sea la única forma de definición para el cálculo de la derivada en un punto, sino que se haga un tratamiento de diferentes técnicas gráficas, numéricas y algebraicas para construir el macro objeto f ’(a) y se coordinen varias definiciones usando diferentes notaciones, como por ejemplo, la definición de la derivada en un punto como el límite de las tasas medias de variación: $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

Lo que quedaría por estudiar es si, cuando el profesor B implementa y desarrolla la unidad didáctica, hace las distinciones entre estos macro objetos y no reproduce los errores del libro de texto, puesto que, un aspecto interesante de la unidad didáctica, y que nos reafirma la comprensión que tiene el profesor B de estos objetos, es el itinerario didáctico que propone basado en el tratamiento progresivo de estos macro objetos a partir de la resolución de problemas complejos que tienen una variedad de representaciones, los cuales pueden ayudar a la emergencia en los alumnos de procesos cognitivos complejos.

5. 2. CASO DEL PROFESOR E

5.2.0. A manera de descripción del caso del profesor E

El profesor E es licenciado en ciencias de la educación con especialidad en matemática y física, egresado de la Universidad del Atlántico en el año 1976. Tiene una experiencia laboral de 25 años como profesor de matemática y de física alternando entre colegios de secundaria y el primer ciclo universitario del sector privado. Ha sido durante más de 25 años profesor de matemática de varios colegios privados de estatus social alto y medio-alto, y profesor de cálculo diferencial, estadística, álgebra lineal y ecuaciones diferenciales en las facultades de Ingeniería y Educación de una universidad privada de de la ciudad de Barranquilla (Colombia). En la actualidad, ocupa un puesto de funcionario en la secretaria de educación de la ciudad de Barranquilla (jornada de la tarde), es profesor de matemática en los grados 9, 10 y 11 de un colegio privado de clase social media-alta (jornada de la mañana) y profesor de estadística y física en una universidad privada de la misma ciudad (jornada de la noche). Igualmente, es formador de profesores en cursos de formación continuada de actualización pedagógica ofrecidos por el MEN (sábados y en época de vacaciones).

Es un profesor preocupado por su formación permanente, manifiesta haber participado en muchos cursos de actualización ofrecidos por las entidades gubernamentales y haber acabado un Master en educación en gestión escolar en el año 1996 en la misma universidad en la que trabaja. El profesor E se considera una persona muy activa y constante en su autoformación, manifiesta interés por la lectura de libros de Historia de la matemática, Educación matemática, Investigación e innovación educativa y de todas las publicaciones de las reformas y actualizaciones curriculares emanadas por el MEN, que le han ayudado en su tarea como formador de profesores; y manifiesta haber desarrollado investigaciones en el campo de la educación. Es un profesor que a lo largo de la recogida de la información fue bastante sistemático pero a la vez se prevenía y evadía dar información cuando entrábamos a preguntar aspectos de su conocimiento disciplinar.

5.2.1. Conocimiento disciplinar: la derivada como objeto matemático

Después de analizar las respuestas del profesor E a los problemas planteados, inferimos que tiene un nivel de comprensión del esquema de la derivada intra algebraico-intra gráfico, tal y como se ilustra en el figura 10. Este esquema se caracteriza por tener una perspectiva proceso de los macros objetos f ’(a) y f ’(x), que no son coordinados en la resolución de problemas rutinarios y no rutinarios enunciados en diferentes contextos. Esta perspectiva proceso de los macro objetos f ’(a) y f ’(x), está determinada a su vez, por la no coordinación interna de los objetos O_1, O_2 y O_3 que engloba el macro objeto f ’(a); y por no llegar al proceso de síntesis de estos tres objetos O_1, O_2 y O_3 en los objetos $O'_{1'}$, O'_2 y O'_3 que engloba el macro objeto f ’(x). En general, podemos inferir que los procesos cognitivos que activa el profesor E en la resolución de estos problemas son la coordinación de acciones externas y procesos, y la interiorización de estas acciones en procesos, tal y como se indica en la figura 10.

A continuación nos detendremos a describir los aspectos del concepto de derivada que tuvimos en cuenta para caracterizar el desarrollo del esquema de este profesor.

5.2.1.1. Relación entre el objeto pendiente de la recta tangente y el objeto razón de cambio en la construcción del macro objeto derivada en un punto

Las respuestas a las situaciones 3-C, 4-C y V-v del profesor E muestran que, por un lado, existe una coherencia interna en los procesos de resolución que aplica cuando aborda estos problemas enunciados en un registro gráfico y, por otro lado, encontramos algunas inconsistencias en el manejo de los conceptos implícitos en la resolución de los mismos (ver figura 42). Con relación a la coherencia interna del proceso de resolución del problema, encontramos que el profesor E aborda los tres problemas usando sólo la información que le proporciona la gráfica y, en la mayoría de los casos, da respuesta a los interrogantes sin tener que recurrir a información externa ni a manipulación de procesos algebraicos. Sin embargo, de las respuestas dadas hemos concluido que el profesor E tiene dificultades en la comprensión gráfica de los conceptos involucrados en los problemas, tales como: función, tasa media de variación, razón de cambio, derivada en un punto y función derivada.

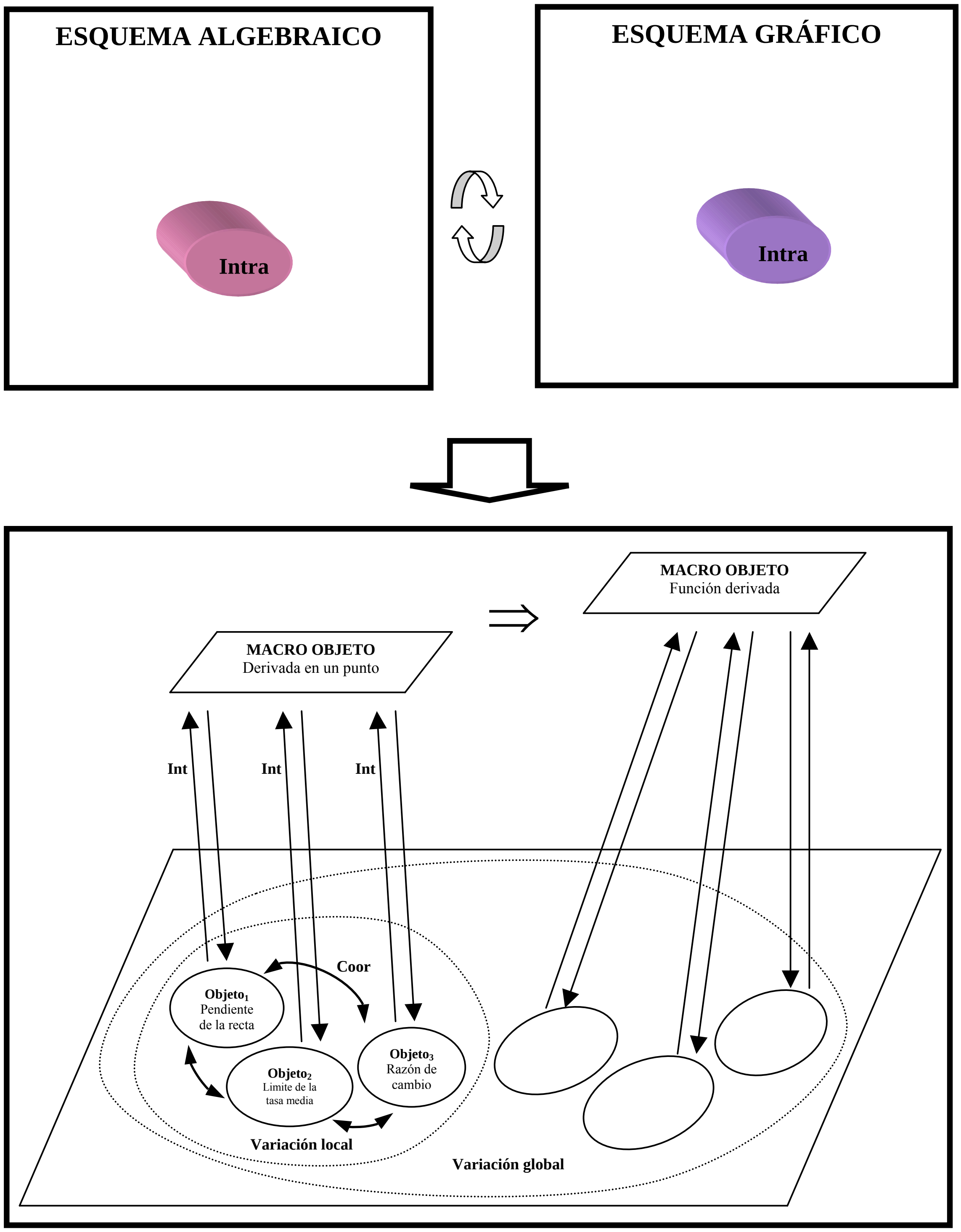


Figura 10. Nivel intra algebraico - intra gráfico del esquema de la derivada

Concretamente si nos centramos en el análisis del problema 3-C, detectamos que el profesor E tiende a hacer una lectura de la gráfica punto a punto, mostrando una concepción discreta de los puntos que la conforman. Esto nos lleva a concluir, que este profesor tiene dificultades para interpretar la gráfica que representa la situación dada. La anterior dificultad descrita puede convertirse en un obstáculo para que el profesor acceda a la comprensión de los conceptos del cálculo, puesto que, (1) le impide describir la función representada de forma global, atendiendo a las características generales de la gráfica, y (2) le lleva a cometer errores como hacer una lectura icónica de la gráfica, interpretando la gráfica de la función como un dibujo modificando el significado de las variables (Azcárate *et al*., 1996).

Concretamente, las respuestas a los apartados *a)* y *b)* del problema 3-C reflejan, inicialmente, una interpretación correcta de la gráfica de la función acumulativa (cantidad de agua en función del tiempo), en la que describe la función representada de forma global, atendiendo a las características generales de la gráfica; y aplica correctamente el objeto tasa de variación media para calcular el incremento de la función en el intervalo indicado, a partir de la información que le proporciona la gráfica.

> "a) Sí en el día se consumen 20 litros o 20 cm^3, transcurrido 24 horas
> b) Entre las 20 y las 24 horas, bueno según lo que puedo ver aquí... los puntos (24, 20) y (20, 15)... Entonces, **haciendo un cociente diferencial** allí, se obtiene que:
> $\Rightarrow \frac{20-15}{24-20}=\frac{5}{4}$, por tanto, **transcurren 4 horas y se consumieron 5 litros**."

Sin embargo, contradictoriamente a la respuesta anterior, en las respuestas a los ítems *c)*, *d)* y *e)* el profesor E hace una interpretación incorrecta de la gráfica (ver figura 12), caracterizada por la lectura punto a punto de los valores del dominio como respuesta a cuestiones referidas a intervalos. Este error en la interpretación de la gráfica de la función implica dificultades en la comprensión gráfica de los conceptos inmersos en la situación que son fundamentales para la comprensión gráfica de los macro objetos f '(a) y f '(x), los cuales son: función, tasa media de variación y pendiente de la recta tangente.

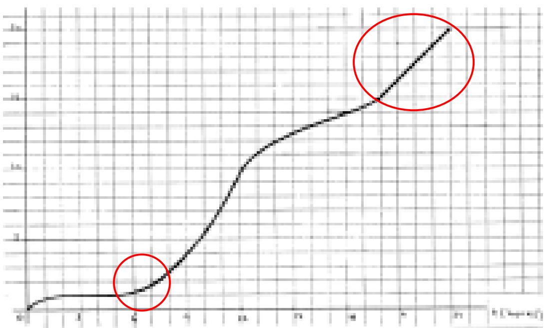


Figura 12. Gráfica del problema 3-C

Problema 3-C

Ítem \ Respuesta	**Interpretación del enunciado y lectura correcta de la gráfica**
a)	Consumo total de agua es de 20 m^3
	E
b)	**Gráficamente**
	Incremento de la función
	E
c)	**Responde que en 14 >9**
	Justifica
	Porque a las 14 se ha consumido un total de 12 y en 9 se ha consumido 3 m^3
	E
d)	**Atendiendo a aspectos globales**
	Entre 6 y 12
	Porque hay un incremento bastante grande
	E
e)	**Gráficamente**
	A partir del concepto de función (halla el valor de f (7) en la gráfica)
	Aproximadamente 1,8 litros o m^3 (Las unidades tienen que ser de volumen)
	E

Problema 4-C

Ítem \ Respuesta	**Hace referencia a la trayectoria**	**Hace referencia a la velocidad**
a-b)	Punto de encuentro	Son diferentes
		No justifica
		$v_A > v_B$
	E	E
c)	**Hace referencia a la trayectoria**	
	No hay momentos donde las velocidades son iguales	
	Porque las distancias recorridas son diferentes	
	E	
d)	**Hace referencia a la aceleración**	
	$v_A > v_B$	
	En todo el movimiento porque B tiene aceleración constante y A tiene aceleración variable	
	E	

Problema V-v

Ítem \ Respuesta	**Pendiente máxima**	**Pendiente mínima**	**Pendiente nula**
a)	Punto donde la *m* de la recta tangente tenga mayor inclinación positiva	Punto donde la *m* de la recta tangente tenga mayor inclinación negativa	Puntos donde la recta tangente a la gráfica sea paralela al eje de las X
	Los relaciona con el crecimiento de la función	Los relaciona con el decrecimiento de la función	Los relaciona con los puntos máx. y mín.
	E	E	E
b)	***Responde correctamente***		
	Velocidad máxima	**Velocidad mínima**	**Velocidad nula**
	Punto donde la *m* de la recta tangente tenga mayor inclinación positiva	Punto donde la *m* de la recta tangente tenga mayor inclinación negativa	Puntos donde la recta tangente a la gráfica sea paralela al eje de las X
	Los relaciona con el crecimiento	Los relaciona con el decrecimiento	No relaciona puntos máx. y mín.
	E	E	E
c)	**Crece más deprisa**	**Crece menos deprisa**	**Tasa instantánea de variación nula**
	Punto donde la *m* de la recta tangente tenga mayor inclinación positiva	Punto donde la *m* de la recta tangente tenga mayor inclinación negativa	Puntos donde la recta tangente a la gráfica sea paralela al eje de las X
	Los relaciona con el crecimiento de la función	Los relaciona con el decrecimiento de la función	No los relaciona con los puntos máx. y mín.
	E	E	E

Figura 11. Línea de coherencia de las respuestas del profesor E a los problemas 3-C, 4-C y V-v

Las respuestas a los ítems *c), d) y e)* del problema 3-C, nos permiten describir la comprensión que tiene el profesor E de los macro objetos f ’(a) y f ’(x), llegando a inferir las siguientes dificultades en: (1) la interpretación de gráficas que involucran razones de cambio entre magnitudes que dependen del tiempo; (2) la coordinación de los objetos pendiente de la recta tangente, límite de la tasa media de variación y razón de cambio; (3) el proceso de síntesis del macro objeto derivada en un punto en el macro objeto función derivada; y (4), la coordinación de los macro objetos f ’(a) y f ’(x) en el análisis tanto de la variación global de la función como en el análisis de la variación local de la misma.

Centrándonos en las repuestas a los puntos *c)* y *d)* del problema 3-C se aprecian las dificultades que tiene el profesor E para coordinar los objetos pendiente de la recta tangente y razón de cambio, y a su vez, para relacionarlo con el macro objeto f ’(a); puesto que hace una lectura punto a punto del consumo de agua, asignando el valor mayor del consumo al punto de mayor valor en la ordenada, evidenciando ideas erróneas sobre el objeto pendiente de la recta tangente y su relación con la derivada en un punto que conviven con ideas correctas.

> “c) 9 h $\rightarrow$ 4
> 14 h $\rightarrow$12 $\Rightarrow$ 14 h > 9 h
> d) Habría que determinar los puntos y observar entre qué hora y qué hora se consume más.”

Por su parte, en la argumentación y justificación que da el profesor E a la respuesta del ítem *c)*, se explicita verbalmente la no coordinación de los objetos O_1, O_2 y O_3, la cual consideramos está fuertemente influenciada por la lectura discreta que hace de la gráfica de la función en donde se detecta la dificultad que tiene para interpretar la situación en términos del macro objeto f ’(a). Esta dificultad implica a su vez otras dificultades: (1) en la comprensión de los objetos tasa media de variación, tasa instantánea de variación (razón de cambio) y pendiente de la recta tangente, y (2) en la coordinación de los objetos límite de la tasa media de variación y pendiente de la recta tangente en la construcción del macro objeto f ’(a).

> “c) **Observamos también cómo es mayor la cantidad de agua caliente que se está consumiendo a las 14 horas, porque a las 14 h ya se han consumido un total de 12 litros aproximadamente, mientras que a las 9 h se están consumiendo apenas 4 litros de agua caliente, mientras que a las 14 se han consumido 12 litros**. Sí el

estudiante puede establecer un punto... y compararlos... también aquí es muy fácil en el aspecto de que él halle... la pendiente de... de la tangente a la curva en ese... ese punto y por allí puede determinar fácilmente estas cuestiones."

En cuanto a la justificación que da al ítem *d)*, nuevamente el profesor E deja ver que no coordina los objetos pendiente de la recta tangente y razón de cambio para encontrar el punto dónde el consumo es máximo (interpretación del macro objeto f '(a)), o en su defecto el intervalo donde el consumo es máximo (interpretación del macro objeto f '(x)). En esta ocasión, nuevamente aplica incorrectamente el objeto tasa media de variación para analizar los intervalos donde el consumo es mayor. En primer lugar, toma intervalos muy grandes que no le permiten aproximarse al objeto tasa instantánea de variación; y en segundo lugar, hace una lectura punto a punto del consumo y luego calcula la variación de la función en los extremos del intervalo, más no calcula la tasa media de variación. De lo anterior podemos concluir que el profesor E tiene dificultades para relacionar, tanto gráfica como algebraicamente, los objetos tasa media de variación y tasa instantánea de variación que son claves para interpretar gráficamente los macro objetos f '(a) y f '(x).

"d) Cuándo cree que se estaba consumiendo más agua caliente, bueno eso... eso depende, porque... depende del intervalo donde lo vaya a tomar... depende del intervalo donde lo vaya a tomar, **porque aquí de 6 a 12 yo noto que hay un incremento bastante grande en el consumo**... **Porque de un litro que se ha consumido a las 6 de la mañana, a las 12... 11 litros, o sea que se han consumido 10 litros, en esa parte de aquí, después fíjate tú aquí...** desde **las 12 en donde se han consumido aproximadamente 10 litros hasta las 15... Hasta las 20 se han consumido apenas 5 litros... o sea la variación depende donde el tipo de horario que quiera uno analizar...** yo creo que allí... cuándo cree que se está consumiendo más agua... **yo pienso que eso tiene una dependencia del intervalo que uno quiera medir**."

Las dificultades anteriormente descritas, también quedan reflejadas en la respuesta al ítem *e)* del problema 3-C, al cual responde que el valor del consumo en el instante t=7 h es de 1,8 litros o m^3. En esta respuesta, el valor de la tasa instantánea de variación queda reducido al valor de la ordenada en t = 7, como resultado de la lectura punto a punto de la gráfica (7, 1.8). Esto también se evidencia al especificar las unidades en las que se expresa este valor (unidades sólo de volumen), que también es un buen indicador de las dificultades en la aplicación de los objetos tasa media de variación y tasa instantánea de variación.

> “e) Bueno **a las 7:00 parece que se está consumiendo casi 1,8 litros o m³**... Bueno y las unidades... tiene que ser unidad de volumen.”

La respuesta al problema 4-C, arroja información que nos permite confirmar las conclusiones a las que hemos llegado con el análisis anterior. En primer lugar, aparece la interpretación icónica de la gráfica, como se puede apreciar en la respuesta al ítem *a)* de este problema, donde se interpreta incorrectamente la gráfica espacio-tiempo como la trayectoria de los coches y no como el espacio recorrido por los coches A y B en cada momento. Igualmente, encontramos contradicciones en la argumentación del profesor, por un lado aparentemente relaciona el objeto velocidad instantánea (razón de cambio) con el macro objeto derivada (sin especificar sí hace referencia al macro objeto f ’(a) o al macro objeto f ’(x)), llegando incluso a distinguir las velocidades de los coches en el punto P como diferentes; y por otro lado, evidencia dificultades en la interpretación gráfica de la velocidad a partir del gráfico de espacio-tiempo, puesto que habla de movimiento acelerado del coche B, cuando la gráfica indica que lleva un movimiento uniformemente rectilíneo, en donde la velocidad es constante y por tanto la aceleración es nula. Consideramos que estos errores están influenciados por la lectura icónica que hace del gráfico de espacio-tiempo y por las dificultades que tiene en la comprensión gráfica de los conceptos de la cinemática (espacio, tiempo, velocidad, aceleración, movimiento, etc.), que obstaculizan la comprensión de los objetos O_1, O_2 y O_3.

> “a) Se encuentran los carros. (...) aquí... veo por ejemplo que hay dos coches que se mueven verdad... hay una... aquí vemos **la aplicación de la derivada en el concepto de velocidad, porque es el cambio de la distancia en la unidad de tiempo**... Aquí vemos una recta, **el coche B parece que se moviera como en línea recta, pero con un movimiento acelerado**, **el coche A parece que tiene otro tipo de movimiento, un movimiento como curvilíneo**, cierto... Sin embargo, **ellos convergen en el punto P, esto nos da un significado que en el punto P se encuentran lo cual no quiere decir que llevaban una mima velocidad, eso no quiere decir eso, sino que uno iba más veloz que el otro pero que lograron encontrarse allí**.”

En segundo lugar, aparecen ideas contradictorias en la coordinación de los objetos razón de cambio (velocidad instantánea) y pendiente de la recta tangente. Es decir, que hay respuestas donde se coordinan correctamente estos objetos y hay otras respuestas donde aparecen inconsistencias en el manejo de los mismos. Por ejemplo, si sólo tuviéramos en cuenta la respuesta al ítem *b)*, en la que afirma que la velocidad del coche A es mayor que la velocidad del coche B, podríamos concluir que coordina los objetos pendiente de la recta tangente y velocidad instantánea, y a su vez, los relacionan con el macro objeto f '(a).

> "b) A **mí me da la impresión aquí en P que el coche A es más veloz que el coche B.**"

Sin embargo, al considerar la justificación que da en la entrevista a esta respuesta, encontramos contradicciones e inconsistencias en los conceptos inmersos que se vuelven a repetir en la respuesta al ítem *c)*, tales como: (1) lectura icónica de la gráfica espacio-tiempo (la gráfica le proporciona información sobre la trayectoria); (2) interpretación incorrecta de la gráfica de espacio-tiempo ("no hay velocidades iguales porque las trayectorias son diferentes"); y (3), coordinar los objetos "velocidad", cociente incremental (tasa media de variación) y "tangente", en lugar de coordinar los objetos velocidad instantánea (razón de cambio), límite de las tasas media de variación y pendiente de la recta tangente. Este último, pone en evidencia un problema que retomaremos más adelante, como es la dificultad que tiene el profesor para interpretar el paso de la recta secante a la recta tangente a la gráfica de una función, llegando incluso a considerar que la función derivada es la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la curva en un punto.

> "(...) y... no creo... es decir, con la gráfica como no las estás presentando, **no creo que... que en algún momento, tengan la mima velocidad nunca, porque para poder tropezarse allí... es decir en la trayectoria el coche A parece recorrer más trayectoria que el coche B, porque mientras B recorre una recta, A está recorriendo una curva**. Entonces creo que el coche A... **si analizamos esto desde el punto de vista de definir una secante y una tangente para poder definir un cociente diferencial y poder definir la tangente, vemos que el coche A debe tener más velocidad que el coche B, es más en la parte de acá, en toda la trayectoria yo pienso que el coche A tiene más velocidad que el coche B**."

Finalmente, la respuesta al ítem *d)*, nos vuelve a reflejar las dificultades que tiene el profesor E en la comprensión de los conceptos de la cinemática clásica, y por tanto, en la formalización matemática dentro del cálculo diferencial. Ahora, contradictoriamente a la interpretación incorrecta que hace de la gráfica espacio-tiempo como la trayectoria de los coches en el ítem *a)*, interpreta la gráfica en términos de la aceleración, es decir que interpreta incorrectamente la gráfica de espacio-tiempo como si se tratase de la gráfica de velocidad-tiempo. Estos errores en la comprensión de los conceptos de la cinemática clásica ya fueron detectados en el análisis de la paradoja de Zenón (ver anexo 7), donde el profesor E mostró tener una concepción potencial del infinito, que le llevó a reproducir los argumentos eleáticos en contra de la divisibilidad infinita del espacio y del tiempo, y a favor de la imposibilidad del movimiento.

> “d) El **coche A tiene siempre mayor velocidad que el coche B, porque el B tiene aceleración constante mientras que el A tiene aceleración variable**”

Incoherentemente con lo que ocurre en el análisis de los dos problemas anteriores, la respuesta al ítem *a)* del problema V-v, refleja una coordinación entre los objetos pendiente de la recta tangente y el macro objeto f ’(a). El profesor E, utiliza el criterio de la primera derivada para encontrar los puntos de pendiente máxima, mínima y nula. Relaciona y señala en el registro escrito los puntos máximos o mínimos con el valor nulo de la derivada en ese punto. Además, verbaliza la relación entre el crecimiento y el decrecimiento de la función con el signo de la derivada primera, y lo argumenta con la tangente del ángulo. Creemos conveniente comentar, que sólo el ítem *b)* de este problema está contextualizado en la física y que los otros dos están contextualizados en la matemática. A continuación presentamos un fragmento de la entrevista y los apuntes por escrito del proceso de resolución.

> **“La pendiente de la recta tangente... Aquí es paralela a esta (señala el eje de las x) y aquí la pendiente de la tangente es cero... Por eso aquí hay un máximo (dice señalando y dibujando sobre el punto c la recta tangente y luego hace lo mismo en los puntos b y a)...** Aquí también es cero porque es paralela y aquí hay otro cero, porque también es paralela. Para ver... Lo que pasa es que ahora tenemos que observar bien la gráfica para hallar las pendientes máxima y mínima.... Fíjate tu, aquí puede haber un punto... aquí hay uno bajando... Es decir...cuando tenemos pendientes así... (Señala con el brazo rectas con inclinación positiva)... Y cuando las tenemos así son negativas... (Señala con el brazo rectas con inclinación negativa)... Bueno... lo que tengo que ver de todas cuál es la mayor... la que tenga mayor inclinación y la negativa la que tenga menor inclinación... (Comienza a dibujar tangentes en el gráfico I y a marcar los ángulos de inclinación)... **Entonces puede ser esta porque la inclinación es la tangente al ángulo... puede ser esta aquí... aquí colocaré un (+)... Y menos o negativa... Es cuando el ángulo sea... sea más agudo... más obtuso... Este aquí así... Pero es que no es muy clara la gráfica oye... aquí... hay otro aquí... aquí...Y dónde es menor... depende del gráfico... A ver... este está así... bueno la mayor inclinación negativa será esta (y señala la tangente más próxima al punto a.)...** Bueno lo que pasa es que esta gráfica está como que un poco confusa oíste... Aquí hay otra... pero la menor es la que ya te dije... ésta... No... No se tú que opinas...”

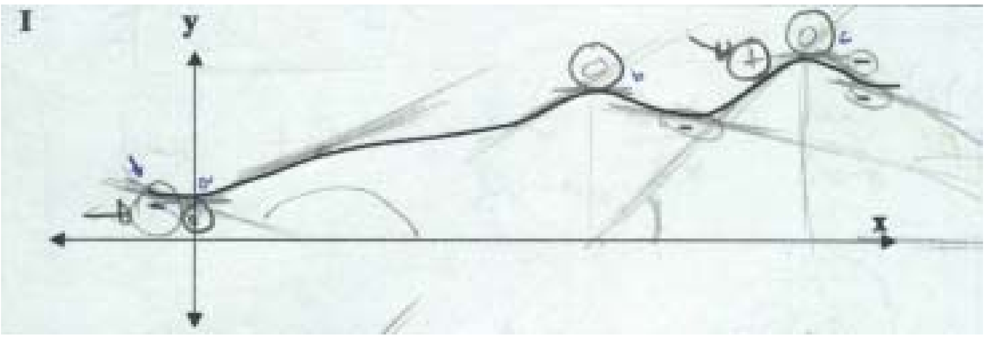


Figura 13. Registro gráfico del proceso de resolución del profesor E al ítem *a)* del problema V-v

En lo que respecta al ítem *b)* del problema V-v, la repuesta es coherente con la anterior, y en este caso coordina los objetos pendiente de la recta tangente y razón de cambio (velocidad instantánea) y los relaciona con el macro objeto f ’(a). De manera similar al ítem anterior, la argumentación se basa en el manejo del criterio de la primera derivada para encontrar los puntos de velocidad máxima, mínima y nula. El profesor E afirma correctamente que si la velocidad es una derivada por tanto la velocidad es cero en los puntos donde la pendiente de la recta tangente sea nula, es decir, cuando la recta tangente es paralela al eje de las abscisas, pero no lo relaciona con los puntos máximos y mínimos de la gráfica ni con el punto de inflexión, quizás por ello deja sin señalar un tramo de la gráfica donde hay un mínimo relativo y un punto de inflexión.

> “Bueno aquí hay una tangente, ¿no?.. A ver, **siendo que la velocidad también es una... es una tasa de cambio, entonces aquí también hay una tangente, entonces, lo que pasa es que aquí la tangente es cero**... Entonces, aquí la velocidad es mínima, aquí en este punto es mínima la velocidad, cuando viene aquí en esta parte aquí... Aquí es una pendiente positiva... Aquí es máxima y aquí se presenta una mínima... No sé si la miras de otra manera... **bueno sí el ángulo aquí es mayor, sí el θ es mayor... y la inclinación es mayor... Sí, entonces aquí pongo el símbolo que me dices para velocidad máxima... el (+)... Pero aquí también hay otra hacia abajo... Lo que pasa es que la irregularidad de la curva a veces... aquí parece, aquí viene aquí...**_bueno yo creo que aquí es donde está el mínimo... aquí la velocidad es mínima, es negativa la inclinación es mayor de la pendiente... bueno coloco el (-)... Pero el ángulo aquí es menor... Pero aquí esta otra también negativa y el ángulo con la horizontal es mayor... (...) entre más grande es el ángulo mayor es... **porque la pendiente es la tangente, entonces entre más grande es el ángulo es mayor la tangente...** (Lo señalo con la letra T)”

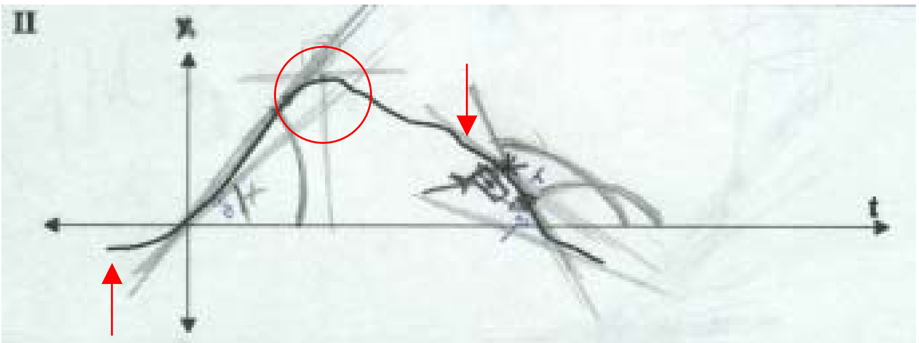


Figura 14. Registro gráfico del proceso de resolución del profesor E al ítem *b)* del problema V-v

La respuesta que da el profesor E al ítem *c)* del problema V-v, evidencia el reconocimiento de los objetos O_1, O_2 y O_3 inmersos en las tres situaciones planteadas. El profesor E, al igual que en los dos ítems anteriores relaciona los objetos pendiente de la recta tangente y razón de cambio para encontrar el valor de la tasa instantánea de variación. Coordina correctamente el criterio de la primera derivada con el crecimiento y decrecimiento de la función, mientras que olvida en el registro gráfico señalar un tramo de la curva donde la tasa de variación es nula y el punto de inflexión.

> "Por ejemplo **aquí la variación es cero, uhm... Bueno trazo aquí ésta y aquí esta otra... Yo creo que aquí está creciendo más deprisa... y un decrecimiento**... aquí... pero aquí hay uno más pequeño... Aquí... Aquí... Aquí hay un menos, pero aquí hay otro menos... Bueno escojo este de aquí... Y **la razón la misma que las anteriores**..."

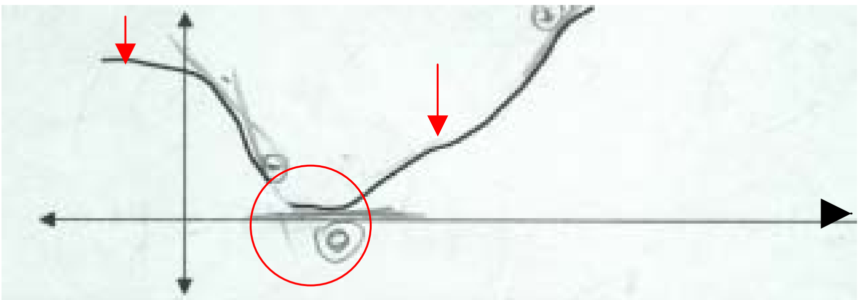


Figura 15. Registro gráfico del proceso de resolución del profesor E al ítem *b)* del problema V-v

Finalmente, si nos detenemos en la reflexión que el profesor E hace de los problemas 3-C y 4-C, encontramos que relaciona estos problemas con la interpretación de la derivada, pero sin llegar a hacer una distinción entre los macro objetos f '(a) y f '(x). En sus respuestas se evidencian dificultades en la coordinación de los objetos O_1, O_2 y O_3, dependiendo del contexto de la situación, que influyen en la resolución de problemas que involucran estos objetos a partir de la información que le proporciona la gráfica de la función (más aún cuando hay que hacer una interpretación de la situación, es decir cuando se requiere de un proceso de modelización previa). Acrecentándose esta problemática en situaciones que involucran el objeto razón de cambio (velocidad instantánea), es decir, en situaciones enunciadas en un contexto físico.

> "**Yo creo que la mayor dificultad que yo veo en este examen está en la interpretación de gráficas, porque considero que interpretar gráfica no es sencilla... interpretar gráfica**... tienen uno que ir sobre el texto original, para ver bien que quiere mostrarnos la gráfica. **Es posible también nosotros adolezcamos de esto**... **pero hay que estudiar duro esto de análisis e interpretación de gráficos**... **ver el concepto de derivada allí no es fácil para nuestros estudiantes... serían ejercicios nuevos para ellos... son muy buenos**..."

Otro aspecto a resaltar, es la valoración positiva que hace de las situaciones que le presentamos en el cuestionario, clasificándolas como problemas no rutinarios que no forman parte de la actividad matemática que realiza en el aula, y resaltando tanto el hecho de que las situaciones estén enunciadas en un registro gráfico como la riqueza conceptual que encierran. Igualmente, reconoce las dificultades que puedan tener, tanto los estudiantes como los mismos profesores, a la hora de interpretar gráficamente los conceptos del cálculo diferencial.

5.2.1.2. Relación entre los macro objetos derivada en un punto y función derivada

i. Comprensión gráfica de la función derivada

El profesor E aborda la resolución de los problemas 1-C, 2-C y IV-v, enunciados en un registro gráfico-verbal y contextualizados en la matemática, usando procedimientos gráficos y algebraicos a diferencia del proceso de resolución gráfico con el que abordó los problemas 3-C, 4-C y V-v enunciados en registro gráfico y contextualizados en su mayoría en la física. Consideramos que estas diferencias en los procesos de resolución pueden estar influenciadas por, (1) la posibilidad de hacer traducciones entre representaciones de la función representada gráficamente que le permitan posteriormente calcular e interpretar gráficamente los macro objetos f '(a) y f '(x), más concretamente, en el problema IV-v en el que es posible hacer la traducción G f (x)→ES f (x) para obtener después la gráfica de f '(x); y (2), por la influencia del contexto en la coordinación y aplicación de los macro objetos f ’(a) y f ’(x) en la resolución de problemas no rutinarios.

Problema 1-C	
Respuesta / Ítem	**Gráficamente**
a)	Argumentado que la tangente pasa por el punto
	E
b)	**Gráficamente**
	Calcula la *m* de la recta tangente
	Por el conciente incremental: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = m$
	E

c)	**Algebraicamente**
	Calcula por *función pendiente*
	E

Problema 2-C
No responde
Falta información en la gráfica
E

Viñeta IV
Algebraicamente
Traducción de G f (x) →ES f (x)) [La gráfica de la función corresponde a $y = x^3$]
Relación de ES f (x) ⇨ ES f ’ (x)) [Sí $y = x^3 \Rightarrow y' = 3x^2$]
Traducción de ES f ’ (x)→ES f ’ (x) [Sí $y' = 3x^2$ entonces la gráfica es una parábola]
E

Figura 16. Línea de coherencia del proceso de resolución de los problemas 1-C, 2-C y IV-v

El profesor E en la respuesta del apartado *a)* del problema 1-C, aplica el concepto de recta tangente como la recta más próxima a la curva en un punto. A partir de la información de la recta tangente que le proporciona la gráfica del enunciado responde correctamente al interrogante planteado, donde interviene el concepto de función, trabajando con una notación funcional sin referencia a la expresión simbólica de la función (en este caso se apoya en la función lineal). Lo cual indica, en primer lugar, una coordinación de representaciones gráficas de punto en los ejes cartesianos con el objeto gráfica de la función, o lo que es lo mismo interpretación de (x, y) cuando *y* es dada por la gráfica de f (x); y, en segundo lugar, relaciona la información que le proporciona gráficamente la función lineal y la derivada en un punto (G f (x)⇨ES f ’(a)↻).
Parcialmente, podríamos inferir que tiene una perspectiva objeto del concepto de función.

> “a) f (5) = 3 está es la solución... el f (x) está tácito como quien dice, porque aquí **el punto (5,3) que es un punto común donde la tangente se tropieza o toca a la curva** y = f (x), vemos que tiene una abscisa 5 y una ordenada 3”

En la respuesta que da al ítem *b)* del problema 1-C, se aprecia la relación entre los objetos derivada en un punto y pendiente de la recta tangente, puesto que entiende que para cada punto *a* en el dominio de la función *f*, el valor de f ’(a) es la pendiente de la recta tangente a la gráfica en el punto (a, f (a)). Y para calcular el valor de la pendiente de la recta tangente usa el cociente incremental de la función, es decir, que podríamos hablar de un proceso de desencapsulación del objeto tasa media de variación. Por tanto, podríamos concluir parcialmente que el profesor E coordina y desencapsula los objetos pendiente de la recta tangente a la gráfica función y la tasa media de variación para encontrar algebraicamente el valor de la derivada en un punto a partir de la información que le proporciona la gráfica.

“b). $m_L = 3 - 1 / 5 - 0 = 2/5 \Rightarrow$

$y - 3 = 2/5\,(x - 5)$	$y - 1 = 2/5\,(x - 0)$
$5y - 15 = 2x - 10$	$5y - 5 = 2x - 0$
$5y = 2x + 5$	$5y = 2x + 5$
$\boxed{y = 2/5.\, x + 1}$	$\boxed{y = 2/5.\, x + 1}$.”

Un aspecto a resaltar de la respuesta anterior, es la comprobación que hace el profesor E de la ecuación de la recta tangente en los dos puntos de la recta tangente que proporciona el enunciado gráfico del problema, que es innecesaria dentro del proceso de resolución, pero que puede llevar implícito, el asociar la “derivada” con la ecuación de la recta tangente a la curva en un punto.

En lo que respecta a la respuesta del ítem *c)* del problema 1-C, encontramos que el profesor E interpreta la recta tangente como la recta más próxima a la gráfica de la curva en el entorno del punto; a partir de allí y aplicando una técnica de aproximación basada en el concepto de derivada en un punto, calcula el valor de f (5,008) usando la información que le proporciona la respuesta de los ítems *a)* y *b)*. Resaltamos entonces la presencia de técnicas de aproximación numérica que relaciona los macro objetos f (x) y f ’(a), reafirmándose la comprensión de la gráfica de la función.

> “c) Y cuando se incrementa en 0. 08, ya si tuviésemos que hacer la resta de la función (5 + 0, 08) - 5, porque sería la función incrementada menos la función original dividido por el incremento. Entonces allí se va explicando claramente

esto... Y esto será aproximadamente cercano a 3. Entonces sí... sí es un punto muy fácil de trabajar, porque:

f '(5)≈ $\frac{f(5+\Delta x)-f(5)}{\Delta x}$; ya sabemos que Δx = 0,08, f (5)=3 y f '(5) = 2/5

⇒f '(5)≈ $\frac{f(5+0.08)-f(5)}{0.08} \Rightarrow \frac{2}{5}$ (0, 08) ≈ f (5, 08)-3 ⇒ f (5, 08) ≈ 3, 05"

En general en lo que respecta al problema 1-C, el profesor, reflexionando sobre la actividad matemática que genera en el aula, lo considera como un problema no rutinario, porque incluye el manejo de diferentes representaciones del concepto función y de diferentes técnicas (como por ejemplo de aproximación numérica) que el estudiante no está acostumbrado a aplicar en la resolución de problemas que realizan en la clase de matemática.

"Eh... en cuanto al primer punto... yo observo que es un punto sencillo que cualquier estudiante puede resolver, obviamente mis alumnas me irían a preguntar... estoy seguro que me preguntarían y... Profesor... *y = f (x)* y cuál es la fórmula de f (x), porque ellas no entienden y no están acostumbradas a este tipo de ejercicios como este con aproximaciones... Porque **genéricamente, ellas están acostumbradas a que uno tiene que definirles la función, es decir, hay que darles el f (x) igual a algo, o sea la fórmula matemática. Por eso te decía que lo más difícil es cuando vamos a trabajar con gráficos**. El estudiante **tiene que meterse mucho en el concepto para poder encontrar, y... las variables que se están buscando**. Sin embargo te digo que, en eso estoy tratando de trabajar fuerte... **Porque con la reforma de las nuevas pruebas del estado que vienen ahora, juega un papel importante el concepto de función, juega el papel importante el concepto de a través de una gráfica definir las variables de una función, es decir interpretación de gráficos para poder resolver los ejercicios... Este es un elemento positivo en esta evaluación**."

La respuesta del profesor E al problema 2-C nos permite profundizar en los aspectos mencionados anteriormente y cuestionar otros que aún no habían surgido. El profesor E, no responde a la situación 2-C porque considera que la gráfica no es suficientemente clara. Consideramos que detrás de esta respuesta el profesor trata de esconder algunas de los siguientes aspectos: (1) dificultades en la interpretación gráfica de los macro objetos f '(a) y f '(x); (2) dificultades en la coordinación de los macro objetos f '(a) y f '(x), y (3) perspectivas procesos de los conceptos f (x), f '(a) y f '(x).

"2. **Más claridad en la gráfica para poder resolverlo**."

Si tenemos en cuenta la justificación que da en la entrevista a la respuesta dada en el cuestionario, encontramos elementos implícitos en el discurso del profesor E que nos permiten comprobar las tres afirmaciones anteriores. Con relación a las dos primeras afirmaciones, encontramos que el profesor E tiene grandes dificultades con la interpretación gráfica y la coordinación de los macro objetos f '(a) y f '(x); en efecto, no aplica los criterios de la primera y de la segunda derivada, ni la continuidad de la función para describir la variación local y global de las funciones representadas gráficamente.

> "Bueno en el segundo punto yo observo que hay dos funciones que sí tienen algo en común... **parece ser que una de ellas es la función derivada de la otra, pero no se ve claramente**. Yo creo que no... que no se ve claramente... pero no es culpa de esta evaluación... sino que es culpa, creo yo de que... yo pienso que no hay como que un papel milimetrado para que me pueda mostrar la variación de una... Bueno a ver, una está por debajo de la otra, pero no tengo exactamente el punto. A ver esto estará en el centro en el centro, no sé... Esto está a cuánto aquí arribita... no sé... Es **decir no puedo determinar bien porque no hay un... una... eh... una... que te digo... la recta metrizada no... no... no tengo un parámetro claro**... Entonces yo creo que aquí sí... **si van a tener problemas mis alumnas en la resolución de este ejercicio, por la poca claridad que tiene la gráfica, pero obviamente no es un ejercicio difícil, siempre y cuando se conozca bien la distribución y la escala de medición en la que está**. Quisiera este ejercicio analizarlo más detalladamente... ¡pero después!"

En lo que respecta a la tercera afirmación, consideramos que las dificultades anteriormente detectadas pueden estar influenciadas por la perspectiva proceso que tiene el profesor E de los conceptos f (x), f '(a) y f '(x), caracterizada por la necesidad de encontrar o tener la expresión simbólica de las funciones representadas gráficamente para poder, a partir de ellas, hacer traducciones y relaciones entre representaciones de f (x) y f '(x) que le permitan llegar a la respuesta correcta. Dada la dificultad que supone en el problema 2-C hacer la traducción G f (x)$\rightarrow$ES f (x), el profesor E se encuentra sin elementos algebraicos y gráficos para poder inferir que una función sea la función derivada de la otra. Es decir, que al no poder asociar las funciones representadas gráficamente con la gráfica de modelos prototipo, y a partir de allí encontrar la derivada del modelo matemático que representa, se queda sin argumentos que le ayuden a hacerle corresponder a la función la representación gráfica de su función derivada.

Con la respuesta al problema IV-v, comprobamos algunas de las suposiciones hechas en el análisis de las respuestas del profesor E a los problemas 1-C y 2-C. Inicialmente, detectamos, muy sutilmente, la presencia de inconsistencias en el manejo que hace de los conceptos involucrados en la situación, tales como, la consideración de que la gráfica de la función derivada de una función tiene que ser una línea recta que es tangente a la curva en un punto. Lo anterior se evidencia cuando el profesor, inicialmente, escoge la gráfica III como la posible gráfica de la función derivada de la función representada gráficamente en el enunciado, y sólo la descarta porque al superponerlas, tal y como se indica en la figura 17, observa que la recta es secante a la gráfica en dos puntos (y no es tangente en ningún punto). Esto le lleva a concluir que como ésta no es tangente en un único punto, no puede ser la gráfica de la función derivada.

> "La II parece la idéntica ¿verdad? Pero podría ser esta la III, porque si yo coloco aquí ésta y trazo aquí *(y dibuja sobre la función de la gráfica 1, a la gráfica III, tal y como se esboza en la figura 17)*, entonces teniendo ésta aquí... no, no ésta sería secante. Espérate un momento. Esta viene así *(uhm... hace un ruido y sigue la gráfica 1... continua en silencio durante de 45 segundos)*..."

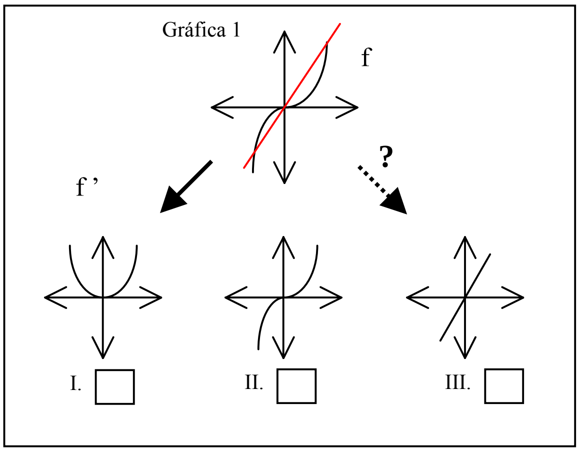


Figura 17. Respuesta del profesor E al problema IV-v

Durante la entrevista, al ver que tardaba y dudaba en resolver el problema y sospechábamos que podría tratar de encubrir nuevamente sus dificultades conceptuales argumentando, al igual que en la respuesta al problema 2-C, que la gráfica no era clara, decidimos ayudarle un poco planteándole los siguientes interrogantes para obtener más información relevante,

> "***E: ¿Qué información te proporciona cada uno de estos gráficos de las funciones representadas?***

R/: Bueno comienzo porque por allí no sé... la de la gráfica 1, es la función cúbica, la de la III es una lineal, la de la II es cúbica también, es la idéntica a la de la gráfica 1 y la I es la cuadrática. En**tonces como la gráfica 1 es cúbica, su derivada será $3x^2$ y entonces... O sea que sería una parábola**... Ah, **ahora si entendí la pregunta, claro... Ya entendí la pregunta... Sí, sí... Escojo la I... porque es una parábola... Lo que pasa es que no te había entendido la pregunta... sí, sí.**
E: ¿Y por qué no las otras dos?
R/: primero porque esta la II volvería a ser una cúbica y III es una lineal.
E: ¿Por qué primero dabas como gráfica de la función derivada la III?
R/: Porque, claro al ser recta, pensé que era la tangente, bueno tu sabes la derivada es la tangente. Y la tangente es una, porque lo que sí que hay son varias secantes.
E: ¿Tienes alguna otra argumentación que dar o crees que con esta es suficiente?
R/: No, no tengo más."

Comenzaremos resaltando de las respuestas anteriores a los interrogantes planteados, que el profesor E primero reconoce que no tiene argumentos gráficos (interpretación de los criterios de la primera y segunda derivada, y la continuidad de funciones) que le permitan dar una solución al problema. Seguidamente, y contrariamente a la respuesta dada al problema 2-C, el profesor E responde correctamente con argumentos algebraicos, basados en el reconocimiento y manejo de las funciones prototipos representadas gráficamente, que le permiten hacer con facilidad la traducción G f (x)→ES f (x). Posteriormente, mediante la aplicación de las técnicas indirectas de derivación, encuentra la expresión simbólica de la función derivada (ES f (x)⇨ ES f '(x)); y finalmente la asocia con la gráfica correcta de la función derivada (ES f '(x)→G f '(x)). Sin embargo, creemos conveniente comentar que después de obtener la respuesta, tampoco utiliza ningún argumento gráfico para justificar la respuesta encontrada, exhibiendo nuevamente una perspectiva proceso de los conceptos de función y función derivada. Otro aspecto discutible en la respuesta del profesor E a este problema es que la gráfica 1 de la función f (x) no tiene porque ser cúbica, y lo que sólo podría asegurarse, a partir de la gráfica dada, es que f (x) es impar.

Igualmente, de las repuestas a los interrogantes anteriores, podemos confirmar la presencia de inconsistencias en el esquema de la derivada que exhibe el profesor E, como es la consideración de que la gráfica de la función derivada de una función tiene que ser una línea recta que es tangente a la curva. Consideramos que este error conceptual puede estar influenciado por la tendencia cognitiva de que las figuras pueden dificultar la comprensión de los conceptos o generar confusión entre conceptos (Amit y

Vinner, 1991). Como generalmente al introducir y explicar la definición de la derivada se hace a partir de un dibujo típico, similar al del problema 1-C, y en esta figura muchas veces sólo se dibuja una tangente, entonces esta tangente termina por reemplazar a la función derivada. Siendo así, esto pone en evidencia las dificultades que tiene el profesor E en la comprensión de los conceptos del pre-cálculo (del objeto tangente) y del cálculo (de los macro objetos f '(a) y f '(x)), independientemente del contexto del problema; de los cuales ya informamos en el análisis de la respuesta a una versión de la paradoja de Zenón de Aquiles y la tortuga (ver anexo 7). Los resultados de este análisis nos permitieron elicitar y describir el origen de estos errores, los cuales se basan, entre otras cosas, en la concepción potencial del infinito que tiene el profesor E.

Las respuestas anteriores, también nos permiten intuir el esquema que tiene el profesor E del concepto de derivada en sus dos dimensiones. En primer lugar, su tendencia a resolver los problemas enunciados en un registro gráfico, independientemente del contexto de los mismos, mediante la manipulación de procesos algebraicos. En segundo lugar, cuando se enfrenta a situaciones que involucran gráficas de funciones complejas (no de modelos prototípicos conocidos) se detectan dificultades y errores en la interpretación gráfica de f '(x). Incluso, cuando la situación involucra funciones prototípicas como la del problema IV-v en la que es posible llegar a la solución correcta, si se ahonda en la respuesta, se siguen detectando los mismos errores y dificultades.

Por tanto, de las afirmaciones del profesor E citadas en el fragmento de la entrevista, encontramos elementos incoherentes que nos ayudan a establecer que el profesor E tiene un nivel intra gráfico del esquema de la derivada. Por un lado, si tenemos en cuenta lo que verbalmente explícita a lo largo del análisis de las situaciones planteadas, concluiríamos que el profesor E parece interpretar gráficamente f '(x) como la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto (es decir, como el macro objeto f '(a)). Sin embargo, en la resolución de problemas enunciados en diferentes contextos la gráfica de f '(x) se tiende a confundir con la gráfica de la recta tangente a la gráfica de la función en un punto. Este problema se puede disimular, cuando el profesor E se encuentra ante una situación que involucra funciones prototípicas que le permitan hacer las siguientes traducciones y relaciones entre representaciones de f (x) y f '(x): G f (x)→ES f (x)⇨ ES f ' (x)→G f '(x), llegando incluso a la solución correcta a partir de la manipulación de procesos algebraicos pero sin justificación alguna de las técnicas aplicadas; o bien cuando se enfrenta a situaciones donde le piden calcular f ’(a) a partir de un enunciado gráfico similar al que habitualmente se usa para definir la derivada en un punto (como el problema 1-C).

En general, las respuestas a los problemas 1-C, 2-C y IV-v, reflejan que el profesor E tiene dificultad para pensar y tratar con los macro objetos f ’(a) y f ’(x) utilizando sólo la información que le proporciona la gráfica de la función, y según sea el caso, la información gráfica de la función derivada. Dependiendo de la función representada gráficamente, se interpreta gráficamente f ’(x) como la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto (f ’(a)), y la gráfica de f ’(x) se tiende a confundir con la gráfica de esta recta tangente a la gráfica de la función en un punto. Por tanto, no tiene construida la relación gráfica entre los macro objetos f ’(a) y f ’(x). Esto se refleja en la no coordinación de los objetos O_1, O_2 y O_3, que engloba el macro objeto f ’(a); y en la ausencia del proceso de síntesis de los anteriores tres objetos en los objetos O'_1, O'_2 y O'_3, que engloba el macro objeto f ’(x).

ii. Comprensión algebraica de la función derivada

Al igual que el profesor B, al abordar la solución de los problemas 5-C; I-v, II-v y III-v mantiene una coherencia en el proceso de resolución (ver figura 18); sin embargo, sigue mostrando algunas inconsistencias en el manejo de los conceptos que se encuentran inmersos. En la valoración que hace de los problemas estudiados, considera que el problema 5-C es un problema rutinario dentro de la actividad matemática que realiza con sus alumnos en el aula, afirmando que en el proceso de resolución difícilmente sus estudiantes tendrán dificultades para resolverlo correctamente.

> “El quinto punto no es más de lo que hemos venido hablando**, es más... es lo más tradicional, es lo que generalmente evaluamos. Es fácil**...”

En la respuesta del profesor E al problema I-v, al definir la derivada en un punto y la función derivada plantea confusamente las relaciones entre estos dos macro objetos. Al definir formalmente “la derivada” lo hace con el aparato sintáctico de la función derivada como el límite del cociente incremental. Sin embargo al referirse al significado geométrico, físico y a otros significados de “la derivada” lo hace, indistintamente, tanto en términos de la derivada en un punto como en términos de la función derivada: (1) como el valor de la pendiente de la recta tangente a la gráfica en punto; (2) como razón de cambio entre magnitudes, por ejemplo el valor de la velocidad instantánea en un punto, el valor de la aceleración instantánea o el flujo de un fluido; y (3), como el valor de la relación costo marginal y utilidad. Esta confusión en la utilización del término "derivada", cuando se refiere a la función derivada o bien a la derivada en un punto, esconde las dificultades en la comprensión de estos macro objetos de los que ya hemos informado en el análisis de los problemas anteriores. Más concretamente, si tenemos en cuenta las conclusiones parciales del análisis de las respuestas del profesor E, podemos inferir que este profesor no tiene claro las diferencias conceptuales formales de los macro objetos f '(a) y f '(x), e incluso que para este profesor la función derivada queda reducida, en el mejor de los casos, a la pendiente de la recta tangente en un punto dado, es decir al macro objeto f '(a).

> "Bueno **una derivada no es más que una razón de cambio promedio, sin tanta complicación**. Lo **conceptualizo a partir de una función incrementada a la cual le resto la función original, entonces allí hallo un Δy, o sea el diferencial de la variable dependiente. Luego divido entre el diferencial de la variable independiente y ya obtengo un cociente incremental de la función, y de ese cociente incremental hallo el límite del cociente incremental cuando Δx tiende a cero, a eso es lo que llamo yo la derivada de función y'**. Y en cuento al significado del concepto de **derivada no es más que una razón de cambio**. Eso simplemente, aplicado en otras áreas del saber, como en **la Economía para hallar el costo marginal, utilidad... Y en el campo de la matemática geométrica para calcular pendientes, volumen, área... Además para calcular cambios de movimientos en la física como es la velocidad, la aceleración. Sí una razón de cambio promedio en pocas palabras**."

La respuesta al problema II-v confirma nuestra anterior suposición, y revela algunas dificultades y errores que tiene el profesor E en el esquema algebraico del concepto de derivada, ya descritas en el apartado anterior. En esta ocasión el profesor E explícitamente verbaliza que "f '(x) = 2x representa la recta tangente a la curva f (x)= x^2". Es decir, que para este profesor, la función derivada se convierte en la ecuación de la recta tangente, lo cual es coherente con las conclusiones a las que llegamos después del análisis de la interpretación gráfica que hace de la función derivada, donde considera que la gráfica de la función derivada de una función cualquiera ha de ser una línea recta. Lo anterior, nos revela las dificultades que tiene el profesor en la comprensión de los macro objetos f '(a) y f '(x), tanto gráfica como algebraicamente.

> "Eso significa que... cuando $\Delta x \to 0$ de la función f (x) es igual al límite cuando $\Delta x \to 0$ del cociente diferencial... o de la razón de cambio promedio, $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{h}$. Esta es la interpretación tipo analítica, podríamos hablar también desde el punto de vista... desde el punto de vista geométrico, eh... La pendiente de la tangente a la curva va a ser el límite del cociente diferencial cuando $\Delta x \to 0$, que no es más que la derivada, o sea que 2x es... **Este 2x me representa la tangente en un punto x, sí cada vez que tu le das un valor a x, vas obteniendo cada una de las secantes a la función, porque tangente es una sola**. Es decir, que **hallarías una de las secantes aproximándose a la tangente**. **Cada una de las secantes porque la tangente es única, las secantes si hay bastantes**. Pues cada vez que yo tome aquí un punto referencial y le dé un valor a *x* asumo el punto para la pendiente de cada una de las secantes... **la pendiente de cada una de las secantes se van acercando y el límite de ellas es la pendiente de la tangente y eso es lo que está significando esto**. O **sea que al final el 2x me da la ecuación de la recta tangente, es lineal,** ¿lo ves o no?"

Igualmente en la respuesta anterior, encontramos contradicciones e inconsistencias, cuando el profesor E usa frases como: (1) "2x *(función derivada)* representa la tangente en un punto *x*"; (2) "el límite de las pendientes de las rectas secantes es la pendiente de la tangente"; y (3), "2x *(función derivada)* me da la ecuación de la recta tangente, es lineal.". Dos de las afirmaciones son incorrectas y la segunda es correcta, pero la forma en que la usa el profesor E pone en evidencia inconsistencias en el manejo de los macro objetos f '(a) y f '(x). Concretamente, la primera y la tercera, evidencian errores en la comprensión de los macro objetos f '(a) y f '(x), puesto que f '(x) se confunde con f '(a), y f '(a) se convierte incorrectamente en la ecuación de la tangente. Mientras que la segunda afirmación, que aparentemente es correcta, la utiliza el profesor E para justificar incorrectamente, que si 2x es la ecuación de la recta tangente (que es única), entonces para cada valor de x se obtendrá la ecuación de la recta secante (que son varias).

Finalmente, en la respuesta al problema III-v, si bien es cierto que implícitamente, relaciona los macro objetos f '(a) y f '(x), no quedan claramente explicitadas las relaciones entre los macro objetos derivada en un punto y función derivada como elemento y clase. El análisis de esta respuesta aporta como elemento nuevo la ausencia de aplicación de técnicas de aproximación numérica y la aplicación no justificada de la técnica indirecta de derivación, puesto que el profesor E lo soluciona hallando la función derivada a partir de la expresión simbólica de la función (ES f (x)⇨ES f ’(x)), mediante la aplicación de la regla de derivación de la función exponencial, y posteriormente, calcula la derivada en un punto reemplazando el valor de x =2 en la función derivada encontrada. Este proceso de resolución algebraico no justificado nos permite concluir que el profesor E tiene una perspectiva proceso de las reglas de derivación.

Problema 5-C
Algebraicamente
Diferencia explícita de la función derivada y la derivada en un punto
E

↓

Problema I-v						
Atendiendo a aspectos globales		**Atendiendo a aspectos locales**				
Define la función derivada		Define la derivada en un punto				
Hace énfasis en la sintaxis	Hace énfasis en la semántica	Hace énfasis en la semántica				
$f'(x) = \underset{\Delta x\to 0}{Lim}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \underset{\Delta x\to 0}{Lim}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$	Razón de cambio	Significado geométrico	Significado físico			Otros significado
		m de la recta tangente a la gráfica en un punto fijo	Velocidad instantánea	Aceleración	Flujo de un fluido	Costo marginal
E	E	E	E	E	E	E

↓

Problema II-v
Atendiendo a aspectos locales
Define la derivada en un punto
Algebraicamente
Es la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en un punto fijo
Justifica
E

↓

Problema III-v
Algebraicamente
Aplicando la técnica indirecta de las reglas de derivación. (derivada de la función exponencial $y = a^x$)
Explicita el resultado: (m = y’= 4^x. Ln 4 ≈ 22)
No justifica el resultado
E

Figura 18. Línea de coherencia del proceso de resolución del profesor E a los problemas 5-C, I-v, II-v y II-v

> “Bueno yo pienso que aquí podríamos irnos por una función exponencial, trasladarla a una función exponencial, luego podríamos irnos por una función logarítmica también, entonces no es más que decir que log y = x. Log 4, entonces **después derivar, o aplicar la regla de derivación, afirmando que f ’(x) = 4^x ln 4 = 16. ln 4, en el caso de x = 2, es como 22**.”

De la argumentación del profesor E en las respuestas a los tres problemas analizados en este apartado, podemos inferir que el profesor tiene un nivel intra del esquema algebraico del concepto de la derivada, en el cual no existe una clara coordinación entre los macro objetos f '(a) y f '(x), lo cual implica dificultades en la coordinación de los objetos O_1, O_2 y O_3. Dado que los objetos O_1, O_2 y O_3 no están coordinados, el profesor E no ha llegado a construir el macro objeto f '(x) como síntesis de estos tres objetos, lo cual le lleva a cometer errores, como por ejemplo, confundir tanto la expresión simbólica de f '(x) con la expresión simbólica de la recta tangente a la curva en un punto, como la gráfica de f '(x) con la gráfica de la recta tangente a la curva en un punto; y a utilizar correctamente las técnicas de derivación indirecta, pero sin justificación alguna del uso de las mismas o bien de los resultados encontrados a partir de su aplicación (perspectiva proceso de las técnicas de derivación).

5.2.2. Conocimiento didáctico del contenido: la derivada como objeto de enseñanza y aprendizaje

Este apartado se encuentra estructurado en dos grandes ítems. En el primero, denominado estructura y organización del contenido matemático de derivada para su enseñanza en el nivel de secundaria, intentamos describir los elementos más significativos del contenido matemático de derivada que el profesor E resalta en el proceso de transposición didáctica. Para ello, miraremos en dos sitios: primero, en la programación y, segundo, en la unidad didáctica. Al igual que en el caso del profesor B, nos centraremos, en el análisis de las relaciones que establece entre los macro objetos f '(a) y f '(x), intentado focalizar las posibles ventajas o dificultades que tienen los alumnos en la comprensión de los mismos como resultado, tanto del tratamiento instruccional que da el profesor en la unidad didáctica a estos macro objetos, como del trabajo individual cuando se enfrentan a la resolución de tareas o a las definiciones que les proporciona el profesor.

En el segundo apartado, que hemos denominado estructura y contenido de las tareas y actividades que propone el profesor, intentamos describir y tipificar las tareas que diseña, implementa y evalúa para que los alumnos construyan los macro objetos f '(a) y f ’(x). Para ello, miraremos en dos lugares: primero, en la evaluación y, segundo, en la unidad didáctica que hace el profesor de la derivada.

5.2.2.1. Estructura y organización del objeto matemático derivada para su enseñanza en el nivel secundaria

i. Con relación a la programación

El profesor E nos proporcionó la programación de la asignatura matemática de 11º, elaborada por él mismo con la colaboración de los profesores del área de matemática. En una de las entrevistas realizadas, el profesor destacó los siguientes elementos como importantes en el proceso de programación:

- Primero, **la importancia del trabajo en equipo**, donde cada profesor comenta y justifica las dificultades y logros alcanzados con sus estudiantes, y propone alternativas para diseñar la nueva programación de la asignatura para el próximo curso; él considera que esto brinda una panorámica más amplia de las dificultades que tienen los estudiantes al abordar un nuevo curso académico como resultado de la instrucción anterior, y por tanto, permite diseñar programaciones que tengan en cuenta la problemática institucional concreta.

- Segundo, **el diseño de programaciones partiendo de la revisión de los prerrequisitos** que necesitan sus estudiantes para iniciar el estudio de un concepto matemático concreto.

> “**Bueno nosotros tenemos un grupo de profesores que estamos bastante integrados... Trabajamos como área pero respetamos nuestras asignaturas**... Los profesores del área determinamos las unidades modulares de aprendizaje**... El profesor anterior me dice llegué hasta aquí... o sea hay un diagnóstico inicial**... **por eso es que tú ves que nosotros introducimos unidad cero de repaso**, **precisamente porque la unidad cero me permite trabajar con firmeza en los prerrequisitos que necesitan los estudiantes para abordar el estudio de un curso determinado**... yo no puedo entrar a hablar de factorización a los alumnos sin haberle hablado primero de productos y cocientes notables... Entonces hay una reunión previa para determinar las unidades modulares que se desarrollarán en un año determinado... **o sea que el programa lo comenzamos a estructurara a partir de un diagnóstico de los profesores de la problemática de los estudiantes**...”

Estructura de la programación

La programación está estructurada en cinco partes, que denomina: diagnóstico; objetivos, contenidos e intensidad horaria por unidad; indicadores generales de logros; metodología y evaluación. Con relación a la primera parte, se encuentra dividida en dos partes que denomina contexto de grupo y saberes previos. En el contexto de grupo, se hace una descripción de las dificultades que tuvieron las alumnas el curso anterior con la trigonometría, que considera una temática básica para el estudio de los contenidos que se han de desarrollar en la matemática de 11º. Por ello, en las primeras sesiones de clase, previa a la elaboración de la programación, dialoga con sus alumnas para que tomen conciencia de las dificultades que han tenido con esta temática, y las anima a que busquen alternativas de solución; pero finalmente, no queda claro qué soluciones plantean las estudiantes y cuáles asume el profesor.

En lo que respecta a los saberes previos, el profesor E considera que los conceptos que necesitan las alumnas para poder acceder a los conocimientos que se desarrollarán en el curso de 11º son: ecuaciones de primer y segundo grado, factorización, potenciación, radicación, logaritmación, desigualdades, y funciones y relaciones. Contradictoriamente con lo anteriormente descrito por el profesor E, encontramos que en la unidad de repaso no se incluye el tratamiento de la trigonometría como conocimiento prerrequisito para el desarrollo del programa de matemática de 11º.

Objetivos, contenidos e intensidad horaria de la programación

Al igual que en el apartado anterior, lo subdivide en dos partes, objetivos generales y objetivos y contenidos específicos por unidades. Con relación al primero de ellos, plantea como objetivo general de la asignatura,

> "Afianzar y profundizar los conocimientos matemáticos adquiridos en cursos anteriores, así **como la adquisición de conocimientos nuevos, diversificando los contenidos, ajustándolos a contextos variados y a los intereses y expectativas de los estudiantes como principales protagonistas del proceso, con orientaciones claras, flexibles y estructuradas**."

Del anterior objetivo, queremos resaltar la importancia que le otorga, dentro del proceso de enseñanza de los conceptos matemáticos, a los siguientes aspectos: (1) la variedad de contextos, lo cual implicaría el estudio y análisis fenomenológico de los conceptos matemáticos; y (2), el papel preponderante que le asigna a las estudiantes durante el proceso, lo cual implica tener en cuenta los intereses y las expectativas de las estudiantes a la hora de seleccionar, organizar y desarrollar la enseñanza de los conceptos matemáticos.

Con respecto a la organización que hace de los contenidos en la programación, el profesor E propone el desarrollo de cinco unidades, tal y como se indica en el siguiente cuadro 1. Previo al desarrollo de la unidad de derivada se proponen tres unidades: unidad 0 de repaso, unidad 1de funciones y relaciones en los números reales y la unidad 2 de sucesiones y límite de funciones. Como ya mencionamos anteriormente, en la unidad de repaso se tratan contenidos desarrollados en cursos anteriores que el profesor E considera como prerrequisito para el desarrollo de los contenidos de las unidades siguientes.

> "Sí ese es un orden ya estudiado como te dije por el grupo de profesores... porque tu no puedes entrar en las funciones si no conoces estos prerrequisitos... pero cada unidad tiene sus prerrequisitos... **para tratar el límite de funciones hay que trabajar primero funciones, para definir derivada hay que primero trabajar el límite**, etc... Es decir que tal y como lo planteo yo creo que se debe desarrollar el programa..."

Posteriormente, se propone la unidad de funciones y relaciones; si atendemos a los contenidos que propone en la unidad, podemos inferir que el profesor E plantea una organización para la enseñanza del macro objeto f (x), en la que se mezclan el tratamientos de aspectos abstractos del concepto lejanos para los estudiantes, tales como: relaciones, representación de relaciones, producto cartesiano, etc., con aspectos más significativos para el estudiante, como lo es la definición en términos de dependencia entre variables. Igualmente, se destaca la importancia de las representaciones en la resolución de problema y concretamente se hace énfasis en la resolución de problemas utilizando técnicas algebraicas y gráficas.

Con respecto a la tercera unidad dedicada al tratamiento del concepto de límite, destacamos la importancia que le otorga a la interpretación de la unicidad del límite y a la aplicación de las propiedades de los límites en la resolución de problemas. El profesor E propone una dedicación de 13 horas para el desarrollo y evaluación de cada una de las unidades anteriores, y teniendo en cuenta que la matemática de 11º tiene una intensidad horaria de 4 horas semanales, se dedicarán aproximadamente 3 semanas al estudio de cada una de éstas, que a nuestra manera de ver, en el caso del concepto límite, es un poco justo dada la complejidad de este contenido matemático.

De la organización de los contenidos que plantea el profesor E en la programación, destacaremos los siguientes aspectos: (1) sigue un itinerario tradicional, en la que previo a la introducción del concepto de derivada se desarrollan dos unidades, una dedicada al estudio de los números reales y otra dedicada al estudio de las funciones y del concepto de límite; (2) Se hace una referencia genérica al concepto de derivada, es decir, que no se establece explícitamente ni diferencias ni relaciones en el tratamiento de los macro objetos f ’(a) y f ’(x).

Organización de la unidad de derivada

La unidad denominada cálculo diferencial y derivada se encuentra estructurada de la siguiente manera:

> “- Introducción-concepto
> - Incremento de una función (absoluto y relativo)
> - Derivada de una función - regla de los cinco pasos
> - Interpretación geométrica de la derivada
> - Álgebra de derivadas – Teoremas sobre la derivada
> - Regla de la cadena – derivada implícita
> - Derivación implícita
> - Derivada de funciones trigonométricas
> - Aplicación de la derivada.”

Al preguntarle sobre qué elementos tiene en cuenta para la organización y secuenciación de los contenidos, el profesor E respondió que se apoya en la experiencia personal, en los lineamientos curriculares oficiales, y en los libros de texto de matemática. Con relación al uso del libro de texto, afirma que es flexible en cuanto que los estudiantes pueden buscar información de varios libros de textos, y atendiendo a esa variedad se proponen y resuelven problemas sacados de diferentes libros; sin embargo, enfatizó que él organiza, secuencia, saca las definiciones y problemas siguiendo linealmente un libro de texto, que en este caso, al igual que el profesor C, es el libro *Matemática Constructiva de la Editorial Libro y Libros S & A*.

2.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS (POR UNIDAD)	2.2. CONTENIDOS: 1 Trimestre (POR UNIDAD)	2.4. INTENSIDAD HORARIA
- Repasar cada uno de los conceptos, con responsabilidad e interés para así lograr una mejor comprensión de los temas en general y sus aplicaciones.	**UNIDAD O: " REPASO GENERAL"** - Productos y cocientes notables. - Factorización, teorema del factor, división sintética, aplicaciones. - Potenciación, radicación, logaritmación, valor absoluto, aplicaciones. - Ecuaciones de primer y segundo grado. Soluciones. - Desigualdades y solución de inecuaciones	**1 Trimestre** 13 h.
- Definir y diferenciar los conceptos de relación y función con exactitud y precisión en las soluciones de ejercicios gráfica y analíticamente.	**UNIDAD 1: FUNCIONES Y RELACIONES EN LOS REALES.** - Producto cartesiano, relaciones, dominio y rango. - Representación gráfica de las relaciones. - Función, dominio y rango de una función, clases de funciones. - Análisis gráfico de una función. - Cálculo del dominio y rango de una función.	**1 Trimestre** 13 h
- Explicar la sucesión como un conjunto infinito, donde cada número natural le corresponde un término de la sucesión. - Interpretar adecuadamente la propiedad de la unicidad del límite.	**UNIDAD 2: SUCESIONES, LIMITE DE FUNCIONES.** - Concepto de sucesión, formas, representación, clases. - Límite de una sucesión -entorno- - Sucesiones convergentes y divergentes. - Límite de funciones – evaluación – Unicidad. - Límite por la derecha y por la izquierda. - Teoremas y propiedades de los límites. - Límite de funciones reales	**2 Trimestre** 13 h.
- Determinar las propiedades de límite.	- Límites al infinito – evaluación – - Formas indeterminadas, funciones continuas. - Límites especiales.	
- Definir el concepto de derivada y determinar los métodos de derivación. - Aplicar los conceptos de derivación en la solución de problemas.	**UNIDAD 3: CÁLCULO DIFERENCIAL – DERIVADA** - Introducción – concepto. - Incremento de una función (absoluto y relativo. - Derivada de una función – regla de los cinco pasos. - Interpretación geométrica de la derivada. - Algebra de derivadas – teoremas sobre la derivada. - Regla de la cadena – derivada implícita. - Derivación implícita. - Derivada de las funciones trigonométricas. - Aplicaciones de la derivada.	**2 Trimestre** 20 h.
- Determinar que la derivada y la integración son procesos inversos. - Aplicar la integral en la solución de problemas.	**UNIDAD 4: CÁLCULO INTEGRAL** - Introducción a la integral definida. - Constantes de integración. - Fórmulas de integración. - Regla de la cadena. - Integrales trigonométricas, exponenciales, fórmulas e Integral definida - Definición de sumatoria, propiedades, aplicaciones. - Teorema fundamental del cálculo.	**3Trimestre** 34 h.

Cuadro 1. Tomado del plan de área que nos proporcionó el profesor E

"(...) La **elección y secuenciación de los contenidos la hacemos, primero a partir de la experiencia docente y el conocimiento que se tiene de los programas curriculares oficiales, de las estructuras de las unidades modulares de aprendizaje de cada asignatura**...Yo no diría texto guía... **los textos juegan un papel importante porque de allí es donde se extraen los ejercicios y donde se sacan las definiciones**... **El libro me permite guiarme sobre cada uno de los**

> **temas... para que vayan entrelazados y no tener uno que estar saltando y coger una cosa de aquí y otra de allá... o sea que me sirve para secuenciar los temas... el libro siempre ayuda**... Aunque yo me he acostumbrado más a guiarme por los títulos de un libro de texto... y que el título lo puede conseguir uno en cualquier texto... **entonces seguimos el libro de matemática constructiva, pero yo he procurado quitar ese ambiente de text**o... entonces ellos me ven llegar con un libro y de repente otro día les saco el examen de otro libro... claro que yo de antemano les doy fotocopia... y entonces al día siguiente veo dos libros en el salón de clase... Entonces tienen varios libros... **Pero yo sí que sigo para sacar las definiciones, el orden de las clases y la mayoría de los ejercicios del libro que te mencioné hace un ratito**..."

Al igual que el profesor C, encontramos que organiza la unidad de derivada centrándose en, casi linealmente, lo que propone el libro de texto matemática constructiva. Por ello, decidimos aclarar qué quería decir introducción y definición para analizar si previamente da un tratamiento a la fenomenología histórica del concepto, o si por el contrario, al igual que el profesor C, lo que hace es una narración anecdótica de la historia que muestre sus lecturas de la Historia de la matemática y no se profundiza y problematiza realmente en los problemas históricos o fenómenos que dieron origen al concepto, en este caso, en el cálculo de la velocidad instantánea y el cálculo de la pendiente de la recta tangente a una curva.

> "Sí los utilizo, porque por ejemplo yo tengo unos textos en donde se narra muchos apartes acerca de la historia de cómo por ejemplo los señores Galileo y Barrow dependían mucho de la intuición y la especulación, y de los ejemplos prácticos para calcular razones de cambios, ya que carecían de un método general y de una definición clara de este concepto. Sin embargo, con el descubrimiento de Newton y Leibnitz, el método del cálculo se convirtió en una apreciable herramienta. **Entonces en ese aspecto se lo digo a mis estudiantes les cuento una historia antes de comenzar, es lo que te señalo como introducción, les cuento cómo estos hombres contribuyeron a ver más claramente los conceptos matemáticos que parecen difíciles o que parecen muy abstractos. Por tanto, llevo las historias de Newton y Leibnitz a la clase y los narramos... O a veces los pongo a investigar** y aprendemos entre todos. Lo importante, es meterlo en la cultura de eso. Como ya te dije nosotros trabajos por proceso y les damos unas preguntas para que ellos investiguen, y entonces entre estas meto una de lo que llamo biografía de la matemática."

En efecto, de la anterior aclaración que hace el profesor E, encontramos que, al igual que el profesor C, al inicio, menciona superficialmente y de forma anecdótica los dos problemas que dieron origen a la construcción del concepto, pero no introduce la definición de la derivada a partir de ellos, sino que por el contrario lo hace centrándose en la introducción progresiva de la notación incremental y, posteriormente, trata la interpretación geométrica, pero más como una aplicación del concepto. Sin embargo, no queda muy claro, en la estructuración que hace en la programación del capítulo de la derivada, la diferencia entre los macro objetos f ’(a) y f ’(x), puesto que al referirse a la derivada lo hace genéricamente, y no especifica si hay un tratamiento previo del macro objeto f ’(a) y, posteriormente, un tratamiento del macro objeto f ’(x), o *viceversa*. Por tanto, el análisis estático de la programación nos permite inferir que el profesor E no es riguroso al tratar estos macro objetos y la simple lectura de la programación nos muestra que no se le otorga importancia a las relaciones y diferencias que hay entre los macro objetos f ’(a) y f ’(x).

Indicadores generales de logros

El profesor E plantea tres tipo de logros a conseguir por sus estudiantes, que involucran conocimientos conceptuales, procedimentales y actitudinales. Con relación a los primeros que denomina cognitivos, centrándonos en la unidad de derivada, plantea como único logro, al terminar la unidad de derivada, que los estudiantes *interpretan el significado de la derivada a partir de un gráfico*. Encontramos entonces, una incoherencia entre el anterior planteamiento y los resultados del análisis de la unidad didáctica y de la evaluación, los cuales nos muestran que el profesor E no incluye ninguna tarea enunciada en un contexto gráfico que requiera para su solución de la aplicación de técnicas gráficas, y por tanto, de la interpretación gráfica de los macro objetos f (x), f ’(a) y f ’(x); sino que todas las tareas que propone están enunciadas en un contexto algebraico y privilegian la aplicación de técnicas directas e indirectas de derivación algebraicas (definición en términos de límite y reglas de derivación). Sin embargo, sólo dos tipos de las tareas que propone en la unidad didáctica y en la evaluación, tipo P (3) y P (5), demandan después del cálculo de la expresión simbólica del macro objeto f ’(x) construir, si es posible, la gráfica del macro objeto f (x). Esto implica la elaboración de tabla y trazado de la gráfica de la función a partir de la expresión simbólica de la función derivada hallada, que no necesariamente implica interpretación de la gráfica de la función en términos de los macro objetos f ’(a) y f ’(x). Además, las funciones que plantean son de tal grado de complejidad, que si no se ha tratado previamente el trazado de gráficas y el análisis monótono de la función utilizando diferentes representaciones, traducciones y relaciones entre estos macro objetos, difícilmente los estudiantes pueden llegar a una construcción e interpretación del gráfico de la función dada (ver tabla 11 de la sección 5.2.2.2.).

Igualmente, con relación a los segundos, denominados *sicomotores* (*habilidades y destrezas*), que propone que sus alumnos han de conseguir después del desarrollo de la unidad didáctica de la derivada, deja entrever la importancia que le otorga a los aspectos formales del concepto (sintaxis) y a los aspectos procedimentales, es decir que el profesor E, al igual que el profesor C, se preocupa por desarrollar competencias en su alumnos centradas en la resolución de problemas enunciados, en su mayoría, en procesos algebraicos y en la aplicación del aparato formal de la derivada, y no queda reflejada en la programación, la importancia de la comprensión de los objetos f ’(a) y f ’(x) para el análisis y modelización de fenómenos en otras ciencias, contrariamente con lo planteado en el objetivo general.

> “- Realiza ejercicios en cada uno de los temas, mostrando soltura conocimiento y gran agilidad mental para el cálculo
> - Resuelve derivada e integrales con exactitud y precisión, mostrando habilidad y destrezas en el dominio del tema.”

Finalmente, plantea un tercer grupo de logros que denomina socio-afectivos o actitudinales, en los que enfatiza el tratamiento de valores desde la clase de matemática, tales como: responsabilidad, solidaridad, tolerancia, etc.; aspectos que consideramos interesante e importante desarrollar desde todas las áreas del conocimiento.

Uso de los sistemas de representación

En la programación no hay una clara referencia al uso de los sistemas de representaciones; sin embargo, por un lado, a lo largo de la programación, el profesor E hace referencias a la resolución de problemas analítica y gráficamente, y por otro, al plantear los indicadores de comprensión de sus estudiantes lo que resalta es la habilidad, destreza y precisión en la aplicación de las técnicas algebraicas de derivación en la resolución de problemas.

Metodología

Este apartado lo divide en dos partes que denomina *procesos* y *estrategias metodológicas*. Con relación al primero de ellos, en la programación plantea:

> “Las dimensiones del desarrollo indican que pensamiento, habilidad, constancia y orden deben estar unidos para lograr un desarrollo integral. Es por esto que este proyecto usa la flexibilidad y el enfoque constructivista que le permite al estudiante construir su propio conocimiento, a partir de la conceptualización que adquiere mediante el uso responsable, que le facilita comprender, traducir, interpretar, identificar, sintetizar, generalizar, utilizar y valorar cada uno de los temas aprendidos, acrecentando sus conocimientos, desarrollando sus habilidades y mostrando el ánimo necesario. Guiado por un docente que a partir de la evaluación inicial, la orientación didáctica, la formación intelectual, psicomotriz y volitiva ayuda a crecer y autoevaluarse para corregir sus defectos y corroborar sus aciertos.”

De la anterior reflexión, podemos inferir algunos elementos que consideramos interesantes: (1) El profesor E enmarca su práctica dentro de las nuevas corrientes constructivistas, definiendo su rol como orientador del proceso y el del alumno como agente activo y responsable de la construcción de su conocimiento; (2) los conceptos matemáticos han de ayudar a desarrollar en los estudiantes una serie de procesos cognitivos complejos, tales como: traducción, interpretación, síntesis, generalización, entre otros; y (3), remarca la importancia de los tres tipos de conocimientos que se han de desarrollar para la formación integral, señalando, conceptos, procedimientos y actitudes.

Con relación al segundo subapartado de estrategias metodológicas, hace referencia a las estrategias que implementa para lograr que los estudiantes lleguen a la construcción del conocimiento, señalando: presentación de los temas de estudio, cuestionarios y talleres alusivos al tema, guía de estudio, solución de problemas modelos, plenaria sobre temas que no han alcanzado a ser comprendidos y aplicación de los conocimientos adquiridos a los problemas de la vida diaria. Lo anterior es coherente con lo que plantea en los objetivos generales, pero es incoherente con los resultados del análisis de la evaluación y de la unidad didáctica, donde las tareas y las actividades que propone son sacadas del libro de texto y están conformadas por ejercicios tipo centrados en la aplicación y evaluación de procesos algebraicos que difícilmente pueden ayudar a la construcción y comprensión de las relaciones entre los macro objetos $f(x)$, $f'(a)$ y $f'(x)$, tal y como veremos más detalladamente en las secciones posteriores.

Evaluación

En la programación, se observa una gran preocupación por parte del profesor por darles protagonismo a los estudiantes durante los procesos de construcción del conocimiento y de evaluación, esta última entendida como un proceso dinámico, continuo y formativo. En el apartado de evaluación, se plantea como punto central el desarrollo de habilidades y destrezas matemáticas, como son: interpretación, argumentación, generalización, y síntesis. Para ello implementa diferentes estrategias de evaluación como medios para diagnosticar los avances que muestran los estudiantes, entre ellas: la autoevaluación, coevaluación y heteroevaluación; y diferentes técnicas, entre ellas, taller, debates alrededor de la formulación de preguntas, sustentación de trabajo, resolución de problemas y pasadas a la pizarra. Plantea igualmente unos criterios de evaluación donde se destacan aspectos de los tres tipos de conocimiento que considera importantes en la formación integral de sus alumnos, conceptuales, procedimentales y actitudinales, fomentando el trabajo en grupo y el trabajo individual. Sin embargo, en las actividades que plantea en la unidad didáctica no quedan claramente especificadas las diferentes técnicas que dice utilizar para fomentar y gestionar los diferentes tipos de evaluación.

Aspectos del conocimiento profesional

Finalmente, de la programación no tenemos elementos para inferir ni de los recursos que utiliza, ni del uso de las nuevas tecnologías, pero podemos inferir del análisis hasta ahora realizado de la programación y de la entrevista algunos aspectos del conocimiento disciplinar del profesor. Por un lado, en lo que respecta a la derivada como objeto matemático, encontramos que en la programación no quedan transparentemente especificadas las relaciones entre los macro objetos f ’(a) y f ’(x) como elemento y clase, puesto que se hace una referencia genérica al objeto matemático sin especificar si se habla del macro objeto f ’(a) o del macro objeto f ’(x). Igualmente, hemos detectado: (1) que algunas de las características del esquema de la derivada descritas en el análisis del nivel de comprensión del esquema de la derivada que tiene el profesor E, al igual que el profesor C, quedan reflejadas en la enseñanza de estos macro objetos, tal y como el énfasis en los procesos algebraicos del cálculo de los macro objetos f ’(a) y f ’(x) en detrimento de la variedad de traducciones y relaciones entre representaciones de estos macro objetos; y (2), algunas inconsistencias que fueron detectadas en el análisis del nivel de comprensión del esquema de la derivada que tiene el profesor E, como la confusión de que el estudio de los macro objetos f ’(a) y f ’(x) se centra en la relación que tienen con el estudio de la recta tangente (ecuación y gráfica), pueden ser reproducidas en la enseñanza de este concepto en el nivel de secundaria y suponemos que están influenciadas por las restricciones institucionales a las que se encuentra sometido este profesor.

Otro aspecto que no queda especificado en la programación es el itinerario didáctico que sigue para la enseñanza de los macro objetos f ’(a) y f ’(x), pues como ya mencionamos anteriormente, al utilizar la palabra genérica de derivada, no queda claro si primero se introduce el macro objeto f ’(a) y posteriormente el macro objeto f ’(x), o viceversa. En la siguiente tabla 8 intentamos sintetizar los aspectos más relevantes del análisis de la programación realizada por el profesor E, teniendo en cuenta las categorías del análisis que definimos para el estudio de las tareas curriculares.

CATEGORÍAS DEL ANÁLISIS			
Estructura y contenido del objeto matemático derivada		**Estructura y contenido del objeto de enseñanza y aprendizaje de derivada**	
Sintaxis / Semántica	**Sistemas de representación**	**Organización de la enseñanza**	**Diseño de actividades y tareas**
• Se introduce directamente la parte formal del concepto y no se parte de los problemas históricos que dieron origen a la construcción del concepto • La fenomenología del concepto: problema de la recta tangente y el de la velocidad, aparecen superficialmente tratadas como aplicación del concepto. • Definición formal en términos de límite (no establece distinción entre los macro objetos f ’(a) y f ’(x)) • Intuimos la emergencia de inconsistencias en la enseñanza de los macro objetos f ’(a) y f ’(x), reduciéndolos al estudio del recta tangente. • Las razones de cambio permiten la modelización de problemas de la matemática y en algunos casos de la física	• No se hace referencia explícita al uso de los sistemas de representaciones, traducciones y relaciones entre representaciones; sin embargo se destaca la importancia de la resolución de problemas analítica y gráficamente. • Se fomenta la resolución de problemas en su mayoría enunciados en un contexto algebraico	• Los objetivos son generales y se corresponden con los propuestos por los lineamientos curriculares oficiales • Se ciñe linealmente a un libro de texto único • Se parte de las dificultades y errores de los estudiantes (trayectoria hipotética de aprendizaje) • La organización y jerarquización de los contenidos se hace atendiendo a la estructura formal de la disciplina. • No se hace referencia al uso de la Historia de la matemática en la estructuración conceptual • La evaluación apunta a los contenidos conceptuales, procedimentales y actitudinales • Se consideran diferentes tipos de evaluación: autoevaluación, coevaluación y heteroevaluación	• Se asigna un papel importante al desarrollo de competencias para la resolución de problemas centrados en los procesos algebraicos (aplicación memorística de reglas y algoritmos) • Se diseñan teniendo en cuenta los errores y obstáculos de aprendizaje de los estudiantes • Se busca desarrollar procesos de argumentación, interpretación, justificación y síntesis, a través de la resolución de problemas • No se hace explícito las traducciones entre sistemas de representación • Se privilegia el trabajo en equipo y la discusión orientada por el profesor

Tabla 8.

ii. Con relación a la unidad didáctica

En el anexo 10, presentamos la unidad didáctica del concepto de derivada, diseñada por el profesor E, atendiendo a los parámetros que les proporcionamos inicialmente a los profesores y que discutimos en una entrevista previa a la elaboración de la misma. Podemos decir que en términos generales el profesor E siguió las pautas consensuadas. La unidad didáctica diseñada por este profesor, se encuentra estructurada en 11 actividades con 32 horas de dedicación presencial para el desarrollo de las mismas. Teniendo en cuenta que la intensidad horaria semanal asignada para la matemática de 11º es de 4 horas podemos concluir que el profesor E dedica, aproximadamente, 8 semanas al estudio de la derivada.

Al preguntarle sobre las impresiones y dificultades que tuvo durante el proceso del diseño y elaboración de la unidad didáctica del concepto de derivada, el profesor E lo valoró como muy importante, pero reconoció las limitaciones que tiene de tiempo para dedicarse a hacer esta reflexión rigurosa previa a la enseñanza de un concepto, y reconoció que todo este proceso de diseño de unidad didáctica lo suple el libro de texto, que es la fuente de donde extrae la organización de los contenidos, las definiciones y las tareas que desarrolla en clase.

> "Bueno estuvo bien, **el instrumento que me diste fue una buena guía, pero claro, estar haciendo esto para cada una de las unidades es imposible, no creo que tu lo hicieras cuando trabajabas aquí o ¿si?, porque es que yo no tengo tiempo**. A ver, uno lo hace implícitamente cada vez que va a dar la clase pero tener que escribirlo con tal minuciosidad como tu me lo pides es imposible... ah**ora creo que el truco está en escoger un buen libro de texto que te facilite todo este proceso... porque claro un buen libro de texto que trabaje bien el contenido matemático, que sea claro, que tenga buenos y variados ejercicios sustituye, a mi manera de ver, todo esto que me pediste hacer...** Con esto no quiero decir que no sea bueno lo que me pides, pero en la realidad es imposible y creo que nadie lo hace."

De la anterior afirmación inferimos que el profesor E hace un uso lineal del libro de texto; por ello, decidimos indagar qué relación había entre la estructuración y organización de los contenidos propuestos por este profesor en la programación y en la unidad didáctica con la estructuración (índice) que propone el libro de texto que este profesor sigue, y encontramos que, salvo pequeñas omisiones no justificadas, los contenidos programáticos son los mismos.

Como el profesor E verbalizó sacar del libro de texto las definiciones, las demostraciones y los ejercicios que desarrolla en clase, los que propone para que sean desarrollados por los estudiantes y los que propone en las evaluaciones; nuestro análisis se centrará en la descripción e interpretación del tratamiento que se da a las definiciones de los macro objetos f ’(a) y f ’(x) en el libro de texto que sigue este profesor, que es de la *Editorial Libros & libros*.

a. Conceptos estructurantes que justifican las técnicas de f ’(a) y f ’(x)

Por un lado, analizando las actividades que propone el profesor E en la unidad didáctica y lo que dice en la entrevista sobre la forma como introduce el objeto matemático derivada en este nivel de escolaridad, inferimos que su práctica profesional se encuentra enmarcada en un modelo tradicional de la enseñanza, donde el profesor es el encargado de introducir los conceptos, proponer y solucionar ejercicios que permitan una mayor comprensión de los objetos definidos, y después proponer ejercicios de aplicación del tema desarrollado para que sean resueltos por los alumnos.

“**Sí parto del concepto intuitivo o de la idea intuitiva de límite, yo defino el incremento de una función, y el cociente diferencial y luego aplico el límite cuando el Δx tiende a cero y después hacemos ejercicios, sí bastantes, para que quede claro**. **Después que introduzco el concepto de derivada trato que los estudiantes lo interprete geométricamente, y esta interpretación geométrica basado en el concepto de lo que es una recta secante que poco a poco va tendiendo a un punto hasta que coincide o se confunde con una tangente**, y allí el estudiante tiene la tendencia de lo que es llegar a un punto sin tocar ese punto. **Inclusive me gusta mucho utilizar la paradoja de Zenón de Aquiles y la tortuga, porque es una muestra bien chévere de lo que es el concepto de límite y de derivada y para explicar las funciones asintóticas es genial**. **La uso mucho... porque meter al estudiante a comprender estos conceptos no es fácil, entonces utilizo este ejemplo solucionándolo gráficamente para poder obtener buenos resultados en la aplicación de este concepto**. Después de la interpretación geométrica, doy unas técnicas de derivación utilizando los teoremas de derivación: derivada del producto, del cociente, de una función polinómica, de una exponencial, etc., esto lo voy dando con ejercicios de aplicación de tal manera que ellos puedan utilizar esto a manera de obtener más rápido la derivada de una función cualquiera. Es decir, utilizar las técnicas como palancas para que hagan menos esfuerzos para realizar sus ejercicios.”

De la anterior afirmación, queremos resaltar algunos elementos de los conceptos estructurantes que considera este profesor que enriquecen nuestro análisis: (1) la importancia que le otorga a los conocimientos procedimentales como son el proceso de la factorización y el proceso de cálculo de límite, como prerrequisitos para la comprensión de los macro objetos f ’(a) y f ’(x); (2) la referencia al uso de la paradoja de Zenón para explicar el concepto intuitivo de límite y para justificar las funciones asintóticas; y (3), la importancia que le otorga a la resolución de ejercicios de aplicación como estrategia para comprender los conceptos desarrollados.

Con relación a la primera afirmación, la importancia a los conocimientos procedimentales, consideramos que este planteamiento es coherente con los resultados del análisis de las tareas de la unidad didáctica y las evaluaciones, las cuales se encuentran enunciadas, en su mayoría, en un contexto algebraico y requieren para su resolución de la aplicación de técnicas algebraicas de derivación; por tanto, el énfasis recae sobre el dominio de las técnicas que lleva implícita para llegar a un resultado satisfactorio (factorización, etc.); pero no es coherente con el discurso del profesor E, quien verbaliza la importancia de las situaciones significativas relacionadas con la cotidianidad de los estudiantes para llegar a la comprensión de los conceptos matemáticos.

> “**Bueno, claro, indudablemente que hay un concepto primario como lo es el de la factorización, un estudiante debe factorizar y saber qué es la factorización. No desde el punto de vista de tener algo ahí como mecánico, sino algo significativo proponer tareas a partir de la cotidianidad del estudiante, qué es factorar, desde el punto de vista significativo**, el teorema del factor, el teorema del residuo, la división sintética, **integran muchos estos procesos y hacen que los alumnos desarrollen más los concepto abstractos**.”

En lo que respecta a la segunda afirmación, el profesor E introduce la paradoja de Zenón para explicar intuitivamente los concepto de límite y de curvas asintóticas. En primer lugar, consideramos que la versión que nosotros presentamos de la paradoja, sí que es una situación potente para aproximarse intuitivamente al concepto de límite mediante la interpretación gráfica bidimensional espacio–tiempo a partir del análisis de la serie convergente y del límite de la serie convergente (Azcárate y Deulofeu, 1996; Badillo, 1999; Badillo y Azcárate, 2000b; Badillo *et al.*, 2001; 2002a; 2002b). Pero incoherentemente con lo manifestado por este profesor, el análisis de las respuestas que da a la versión de la paradoja de *Aquiles y la tortuga* que utilizamos en este estudio (ver anexo 7 y sección 5.3.1.2.), revelan inconsistencias en los conceptos matemáticos que maneja este profesor; más concretamente, exhibe una visión potencial del infinito que le lleva a reproducir los argumentos eleáticos en contra de la divisibilidad infinita del espacio, del tiempo y del movimiento, los cuales se convierten en obstáculos para la comprensión de los conceptos del cálculo diferencial (Azcárate y Deulofeu, 1996).

En segundo lugar, lo interesante de la anterior afirmación del profesor E, es que encontramos una coherencia entre lo que dijo cuando justificaba el proceso de resolución de la paradoja y lo que afirma al justificar los prerrequisitos que considera importantes para la comprensión de los macro objetos f ’(a) y f ’(x). Sin embargo, estamos en desacuerdo con el planteamiento que hace el profesor E de que la paradoja permite justificar las curvas asintóticas. Para explicar y justificar nuestro desacuerdo, también nos remitimos a los resultados del análisis de la respuesta que el profesor da a la versión de la paradoja de *Aquiles y la tortuga*. El profesor en el proceso de resolución compara la versión de la paradoja con la problemática didáctica de la comprensión de las curvas asintótica mediante el uso de la siguiente metáfora: “la gráfica se acerca a una recta vertical pero nunca llega a tocarla”, y la compara con la solución incorrecta que da de la paradoja, que Aquiles nunca alcanza a la tortuga por muy veloz que sea porque siempre habrá una distancia, por muy pequeña que sea, entre ellos. Consideramos que este planteamiento es incorrecto por dos razones: (1) que en esta metáfora de aproximación, el tiempo no ayuda, porque la asíntota implica considerar una sucesión convergente $x_1, x_2, x_3,..., x_n \rightarrow x$, con $f(x) \rightarrow \infty$; y (2), que la situación de Aquiles y la tortuga no es metafórica, puesto que Aquiles sí que se acerca a la tortuga e incluso la supera. Por tanto, en su argumentación el profesor considera incorrectamente que la tortuga está parada en un punto de abscisa *x* y que Aquiles se comporta como la sucesión convergente $x_1, x_2, x_3,..., x_n \rightarrow x$, llegando a la conclusión errónea de que nunca llega a alcanzar a la tortuga.

Por otro lado, analizando en el tratamiento que da al macro objeto f (x) en la programación y en la unidad didáctica, a diferencia de los otros profesores que participaron en este estudio, plantea una organización para la enseñanza de este macro objeto en la que se mezclan aspectos abstractos del concepto, tales como relaciones, representación de relaciones, producto cartesiano, etc., basados en la Teoría de Conjuntos e influenciados por la Matemática Moderna, con aspectos más significativos del concepto, tales como dependencia entre variables, interpretación de gráfica, dominio y rango de la función, etc., basados en la fenomenología histórica del concepto e influenciados por la enseñanza tradicional de la matemática. Del anterior itinerario para el tratamiento del macro objeto f (x), consideramos, que es innecesario y poco significativo para el estudiante, en este nivel de escolaridad, introducir el aparato formal de la Teoría de Conjuntos, porque no ayuda a la comprensión del mismo.

> "Ahora también el concepto de límite también juega un papel importante, saber por ejemplo, que es un intervalo, en una función cómo está definida en su rango y en su dominio dentro de una gráfica, **es interesantísimo también que el estudiante sepa graficar una función y la teoría de conjuntos que no podría faltar, porque claro imagínate tú que vas a hablar de función sin la teoría de conjuntos. Hay unos conceptos que yo diría que están arriba de este**. Es decir que jerárquicamente hablando, yo diría que los prerrequisitos son primordiales."

De igual manera, las tareas que propone el profesor E en la unidad didáctica nos muestran un tratamiento superficial del macro objeto f (x). En términos generales, este profesor opta por la resolución de ejercicios, en su mayoría enunciados en un contexto algebraico, donde no se privilegia el uso de una variedad de representaciones y traducciones entre representaciones del macro objeto f (x). Del tratamiento que da a las funciones en la unidad didáctica analizada, inferimos que este profesor sólo aplica la visión de funciones propuesta por Fermat, centrada en las traducciones: ES f (x)$\rightarrow$ G f (x), que conlleva a comprender que una curva con dos variables es una expresión algebraica de las propiedades de la curva (Boyer, 1986; Azcarate y Deulofeu, 1996; Font, 2000).

Por tanto, podemos concluir que en la unidad didáctica no se le asigna un papel preponderante al estudio de las funciones y sus representaciones como un prerrequisito para llegar a la comprensión del macro objeto f '(x). En efecto, encontramos que no se hace referencia, dentro del análisis de las funciones, a la coordinación de los diferentes aspectos de la continuidad de una función en un punto y en un intervalo (discontinuidad evitable, discontinuidad no evitable), que consideramos que es una de las características esenciales para la definición formal del macro objeto f '(x). Más concretamente, no encontramos tareas, en toda la unidad didáctica ni en la evaluación, en las que se estudien funciones definidas a trozos, que requieran la comprensión de la continuidad de funciones, bien sea en un intervalo o en todo el dominio de la misma.

a. Técnicas que utiliza para calcular los macro objetos f '(x) y f '(a)

Analizando qué técnicas para calcular f '(x) tiene que saber el alumno como resultado del estudio de la unidad didáctica que propone el profesor E, encontramos que sólo aparecen dos técnicas de derivación:

I. Técnica directa por definición en términos de límite
II. Técnica indirecta por las reglas de derivación

Posteriormente, rastreamos qué técnicas ha definido para calcular f '(a) para luego poder justificar las técnicas de cálculo de f '(x), y encontramos que, en general, no existen técnicas para calcular f '(a), porque en las definiciones que presenta en la unidad didáctica están mezclados los macro objetos f '(a) y f '(x). Lo anterior nos permite inferir que, en general, no se diseñan y justifican actividades y tareas que permitan la construcción de las técnicas de cálculo del macro objeto f '(a).

Todo lo anterior, nos permite concluir, al igual que el profesor B, que: (1) en la unidad didáctica propuesta por el profesor E no se dedica un espacio al tratamiento y construcción de las técnicas para calcular el macro objeto f ’(a); (2) primero se da un tratamiento de las técnicas de cálculo del macro objeto f ’(x); y (3), las técnicas de cálculo del macro objeto f ’(a) aparecen reducidas a la simple sustitución de variables ($x = a$) posterior al cálculo del macro objeto f ’(x) mediante la aplicación de las técnicas I o II y no se diseñan tareas que permitan relacionar y diferenciar, ni gráfica ni algebraicamente, los macro objetos f ’(a) y f ’(x).

c. Definición del macro objeto f ’(x)

Para definir el macro objeto f ’(x) el profesor E sigue linealmente al libro de texto, de la *Editorial Libros & libros S. A*, donde lo definen utilizando la notación incremental. Observando el tratamiento progresivo que sigue el libro de texto para llegar a la definición del macro objeto f ’(x), suponemos que implícitamente reconocen la complejidad semiótica y las dificultades que tiene el uso de la notación incremental, y es por ello que poco a poco van definiendo los conceptos incremento de una variable, incremento de una función, incremento relativo de una función, y finalmente, el objeto f ’(x) como el límite del cociente incremental.

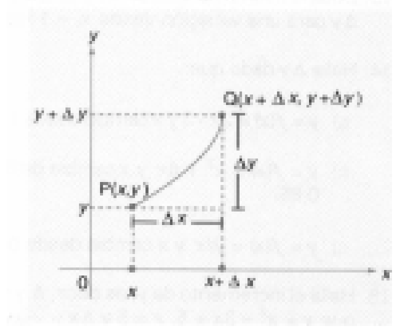
Inicialmente, definen el incremento de una variable, utilizando la notación incremental, así:

> El incremento Δx de una variable x es el cambio en x cuando esta crece o decrece desde un valor $x = x_1$ hasta otro valor $x = x_2$. Aquí $\Delta x = x_2 - x_1$ y podemos escribir $x_2 = x_1 + \Delta x$

Posteriormente, definen el incremento de una función a partir de la resolución de un ejercicio en el que utilizan dos procedimientos numéricos, basados en la notación funcional y en la notación incremental, con el propósito de comprobar que los dos resultados obtenidos son iguales, pero sin llegar a relacionar las dos notaciones utilizadas. Es decir, primero utilizan la notación funcional $(f(x_2) - f(x_1))$, pero sin relacionarlo con la notación incremental $(\Delta y = f(x_2) - f(x_1))$; y seguidamente, lo resuelven usando la notación incremental $(\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x))$, pero sin relacionarla con la notación funcional ($\Delta y = f(x_2) - f(x_1) = f(x + \Delta x) - f(x)$). Sin embargo, finalmente, se olvidan de la notación funcional y terminan definiendo el incremento de una función, basándose en la notación incremental y con apoyo en la gráfica, de la siguiente manera:

Si $y = f(x)$, entonces:

$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ es el incremento de y para un incremento Δx de x



Seguidamente, definen el incremento relativo de la función o, lo que es lo mismo, la tasa media de variación, como el cociente incremental o razón de los incrementos y no se utiliza ni se hace referencia a la notación funcional utilizada inicialmente al definir el incremento de la función. Igualmente, se plantea la solución de dos ejercicios poniendo énfasis en el proceso algebraico de sustituir en la función dada el valor de $x = x + \Delta x$.

Si y = f (x), el incremento relativo de la función respecto de la variable independiente x, es la transformación que experimenta la función por cada unidad de cambio en x.

El incremento relativo de dos variables es la razón de los incrementos.

$$\frac{\Delta\,(\text{variable dependiente})}{\Delta\,(\text{variable independiente})} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Es interesante constatar la importancia que le otorga el profesor E a la sintaxis del objeto matemático y la poca importancia que le asigna a la semántica o significado asociado al mismo. En efecto, el itinerario que propone este profesor para definir el macro objeto f ’(x) como una aplicación del concepto de límite de una función, previamente estudiado el concepto de límite, obedece a un planteamiento puramente teórico y matemático, acorde con la lógica formal que respeta el desarrollo deductivo del cálculo diferencial. Sin embargo, este desarrollo deductivo no se corresponde con la génesis histórica del concepto de derivada, en donde el cálculo por aproximación numérica y gráfica de los objetos pendiente de la recta tangente y velocidad instantánea precedió al concepto riguroso de límite (Azcárate *et al.*, 1996). Esto explica el hecho de que en la unidad didáctica el objeto velocidad media aparece como una aplicación del objeto tasa media de variación y no como el fenómeno que permitió la construcción del mismo, y el objeto pendiente de la recta secante no aparece en la introducción del objeto tasa media de variación.

Por tanto, la velocidad media o la velocidad promedio es:

$$\overline{V} = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

Después de introducir el incremento relativo de una función aparece la definición del macro objeto f '(x) como el límite del cociente incremental. Igualmente, que al introducir el incremento relativo, parten de un ejercicio de cálculo del incremento relativo y analizan lo que ocurre cuando el incremento de la variable independiente tiende a cero; pero hay que señalar que no se utiliza ninguna técnica de aproximación gráfica o numérica que ayude a visualizar los objetos matemáticos y los signos matemáticos asociados a la notación que se encuentran inmersos en la definición. Esta definición del macro objeto f '(x), tiene el mismo inconveniente de la complejidad semiótica del uso de la notación incremental y puede ocasionar dificultades en la comprensión del macro objeto f '(x), tal y como lo hemos descrito en el análisis de los profesores A y B.

Si *y = f(x)* es una función con variable independiente ***x***, la derivada de ***y*** con respecto a ***x*** está definida por:

$$f'(x) = \underset{\Delta x \to 0}{Lim} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \underset{\Delta x \to 0}{Lim} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

En esta definición *x* permanece fijo, en tanto que *Δx* tiende a cero. Si el límite no existe para un valor particular *x*, la función no tiene derivada en ese valor.

Se acostumbra a denotar la derivada de la función *y = f (x)*, por: $\underset{\Delta x \to 0}{Lim} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ o $\frac{dy}{dx}$ o *f'(x)* o *y'* o $D_x(y)$ o $D_x f(x)$ o $\frac{df(x)}{dx}$. En nuestro texto usaremos: *y'* o *f'(x)*.

De la anterior definición podemos inferir las siguientes conclusiones: (1) al definir el macro objeto f '(x) no se hace énfasis en el significado del concepto sino en la sintaxis del mismo, es decir que no se define la derivada como otra función que asigna a cada punto del dominio el valor de la pendiente de la recta tangente en dicho punto; (2) consideramos que abusan en el uso de notaciones sin justificación alguna, puesto que, inicialmente aparece sólo la notación incremental y de manera mágica y sin ninguna justificación, se introducen informalmente la notación diferencial de Leibnitz (*dy/dx*) y la notación actual de Cauchy (*f'(x)*), sin apoyarse en alguna gráfica que ayude a visualizar los signos asociados a las notaciones; dejando la responsabilidad al estudiante por comprender el paso y la relación entre ellas.

Después de la definición de la función derivada, el profesor E introduce la regla de los cinco pasos y la define como un método para hallar la derivada de una función cualquiera. Esta opción reafirma nuestros supuestos anteriores, el profesor E no se preocupa por la comprensión gráfica del objeto f '(x), sino que apuesta por la mecanización de procesos algebraicos que conllevan al cálculo de la expresión simbólica de la función derivada. Esto es coherente con la cantidad de tareas (80 de 87) que propone en la unidad didáctica, enunciadas en un contexto algebraico, de las cuales en la mayoría (62 de 87) piden el cálculo de la expresión simbólica de f '(x) a partir de la expresión simbólica de f (x) y no encontramos ninguna tarea dedicada a la comprensión gráfica de los macro objetos f (x), f '(a) y f '(x).

La regla de los cinco pasos se puede escribir así:

Paso 1: Escribir la función ($y = f(x)$)
Paso 2: Incrementar la función [$f(x + \Delta x)$]
Paso 3: Restarle a la función incrementada la función dada [$f(x + \Delta x) - f(x)$]
Paso 4: Dividir por Δx, $\left[\dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right]$
Paso 5: Tomar el límite cuando Δx tiende a cero y resolver evitando llegar a una expresión con denominador cero.

Curiosamente, después aparecen una serie de ejercicios propuestos (actividad 10 y 12, tareas del tipo P (1), página 158-159 del libro de texto) donde se pide el cálculo de la velocidad instantánea sin haber tratado previamente el objeto f '(a), lo cual nos permite inferir tres cosas: (1) hay una confusión en la comprensión de los macro objetos f ’(a) y f ’(x), puesto que introducido sólo el macro objeto f ’(x) que es una función se pide el cálculo del macro objeto f ’(a) que es un número; (2) no hay ninguna conciencia de la complejidad que implica el paso del macro objeto f ’(a) al objeto f ’(x) o viceversa, puesto que las técnicas para el cálculo del macro objeto f ’(a) aparecen espontáneamente y sin justificación como una simple sustitución de variable $x = a$; y (3), no se privilegia la coordinación de los objetos velocidad instantánea y tasa instantánea de variación que organiza el macro objeto f ’(a), como tampoco el proceso de síntesis de estos objetos en el macro objeto f ’(x).

d. Definición del macro objeto f ’(a)

Ya hemos dicho que no encontramos en la unidad didáctica diseñada por el profesor E un espacio exclusivo para la definición del macro objeto f ’(a); ésta aparece, implícitamente, en el apartado que denomina *interpretación geométrica de la derivada*, sin aclarar si se está refiriendo a la interpretación geométrica del macro objeto f ’(x) o si pretende introducir la definición del macro objeto f ’(a). En efecto, se introduce por primera vez en la unidad el objeto pendiente de la recta secante y pendiente de la recta tangente. La primera aparece definida como el cociente incremental y la segunda como el límite del cociente incremental cuando $\Delta x \rightarrow 0$, tal y como se ilustra a continuación.

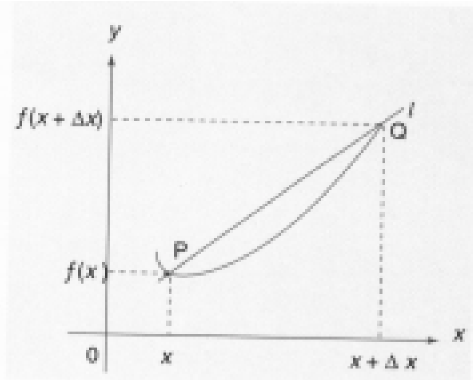
Creemos que la definición que proponen para el macro objeto f ’(a) es incorrecta por las razones:

1. No se hace énfasis en las coordenadas del punto P como un punto fijo, pues tal y como lo plantea P (x, f (x)) puede crear la confusión de estar refiriéndose genéricamente a cualquier punto del dominio, y no específicamente a un punto fijo concreto P de coordenadas (a, f (a)) que, a nuestro parecer, ayudaría más a diferenciar los macro objetos f ’(a) y f ’(x), e incluso, tal y como proponen Dubinsky y otros (1995) e Inglada y Font (2002), como ya ha introducido la notación incremental para definir el macro objeto f ’(x), sería un buen momento para introducir una notación especial para la derivada en un punto que favorezca la distinción y la relación de los macro objetos f ’(a) y f ’(x). Es decir, que se sugiere el uso de una notación en la que se especifique que el macro objeto f ’(a) es un número que representa una imagen del macro objeto f ’(x) en el punto de abscisa $x = a$.

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=a} = \frac{d}{dx} f(x) \Big|_{x=a} = f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$ (Dubinsky *et al.,* 1995, pp. 197).

2. La notación que usa en la definición, conduce al error de definir el macro objeto derivada en un punto como el macro objeto función derivada; es decir, como el límite del cociente incremental de la función en todos los puntos del dominio.
3. No diferencia y genera confusión en el manejo de los macro objetos f ’(a) y f ’(x), puesto que, da un tratamiento funcional al macro objeto f ’(a) que es un número; más exactamente, no alude al valor de la pendiente de la recta tangente en el punto P (a, f (a)).
4. Las técnicas de f ’(a) se reducen de este tratamiento a una simple sustitución de variables $x = a$ en la expresión obtenida de f ’(x) por la aplicación de cualquier técnica algebraica de cálculo de f ’(x), lo cual implica que no se traten técnicas gráficas y numéricas que ayuden a una mejor comprensión de las relaciones y diferencias entre estos dos macro objetos.
5. Consideramos que el macro objeto f ’(a) “se introduce”, para justificar la resolución de un tipo de problemas, que nosotras hemos definido como P (3), en los que se pide buscar la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a una curva en un punto fijo. Sin embargo, la forma en que lo definen y lo tratan puede ayudar a emerger inconsistencias en la comprensión de los macro objetos f ’(a) y f ’(x), como por ejemplo, el terminar considerando que el macro objeto f ’(x), sin diferenciarlo del macro objeto f ’(a), es la ecuación y la gráfica de la recta tangente. Estas inconsistencias en la comprensión de los macro objetos f ’(a) y f ’(x) las encontramos en el análisis de los niveles de comprensión del esquema de la derivada de los profesores A y E, y también han sido reportadas por otros estudios (Amit y Vinner, 1990). Lo cual implica, la posible reproducción de errores e inconsistencias que tiene este profesor en la relación y comprensión de los macro objetos f ’(a) y f ’(x) en la planificación e implementación de la enseñanza del mismo.

Toda recta que toca a una curva en dos puntos se llama secante, la recta l es una de ellas. Supongamos que P tiene coordenadas (x, y). Sean las coordenadas de Q (x+Δx, f (x+Δx)), donde Δx puede ser una cantidad positiva o negativa.

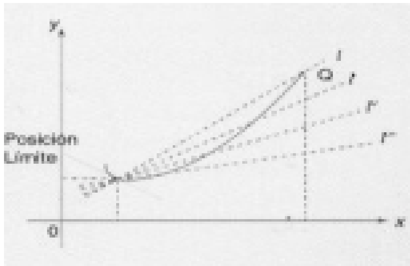


La pendiente de l se obtener de su fórmula, cuando tenemos dos puntos.

$$m = \text{pendiente de } l = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{(x-\Delta x)-x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

Cuando Δx tiende a cero, el punto Q tiende al punto P, y la recta l secante gira en torno a P en el sentido del desplazamiento de las manecillas del reloj.
Podemos pensar que la recta l tiende a una recta límite cuando $\Delta x \to 0$ y esta debe ser la recta tangente a la curva en el punto P.

Además, si la función tiene derivada, sabemos que:



$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

Es decir, las diferentes rectas l tienden a una pendiente límite, que es la derivada de la función f en el punto P. Si se traza por P una recta con pendiente $f'(x)$, se obtiene la ecuación de la recta tangente.

Recordemos que la fórmula punto pendiente para la ecuación de la recta es:

$$y - y_1 = m \cdot (x - x_1)$$

Si se toma $y_1 = f(x_1)$ y $m = f'(x)$, se obtiene la ecuación de la recta tangente en el punto P. Entonces:

La tangente a la curva de ecuación $y = f(x)$ en P (x, f (x)) es la recta trazada por P (x, f (x)) con pendiente $f'(x)$

Como ya mencionamos en el análisis del caso del profesor B, Inglada y Font (2002) concluyen que una justificación válida para introducir la derivada en un punto con la notación de incrementos en la secundaria podría ser que ayuda a justificar más adelante la regla de la cadena. Partiendo de esta hipótesis rastreamos en la unidad didáctica el tratamiento que el profesor E hace de la regla de la cadena y nos encontramos que, en el caso de este profesor, en la unidad didáctica se dedica un espacio para el estudio de la regla de la cadena. Sin embargo, al definir la regla de la cadena no usa la notación diferencial, y por tanto, no queda justificada la introducción de la notación incremental y de la notación diferencial para definir los macro objetos f ’(a) y f ’(x).

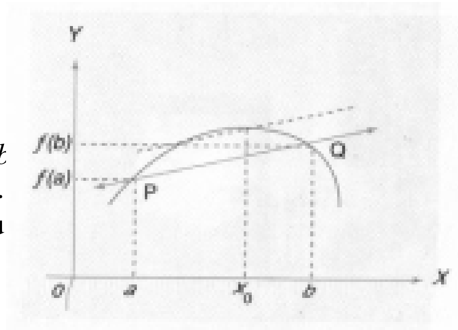
Sean *f*, *g* y *u* funciones, y $f(x) = g[u(x)]$; además *g* y *u* son derivable, entonces *f* es derivable y su valor es: $$f'(x) = g'[u(x)] \cdot u'(x)$$

La anterior definición de la regla de la cadena nos muestra que la introducción de la notación incremental no se hace como medio para justificar y facilitar el uso de la notación diferencial al definir la derivada de la composición de funciones. En efecto, paralelamente a la anterior definición, aparece a un lado del libro, con letras pequeñas, y sin darle mayor relevancia, otra definición de la regla de la cadena en la que se utiliza la notación diferencial, pero no se hace ninguna referencia a ella en la resolución de los ejercicios que siguen a continuación, ni se resuelven ejercicios que permitan la coordinación y justificación de las dos notaciones.

Seguidamente, introduce las reglas de derivación de las funciones trigonométricas, centrándose en el manejo de procedimientos algebraicos, y a continuación introduce el teorema del valor medio, para acabar con lo que denomina aplicación de la derivada, que básicamente se centra en la resolución de problemas de optimización de variables (máximos y mínimos), construcción de gráficas de la función y análisis monótono de la misma, siempre a partir de la expresión simbólica del macro objeto f (x).

El Teorema del valor medio aparece en el libro de texto después del tratamiento de la interpretación geométrica de la derivada y de la definición del macro objeto f ’(a), y previamente introducido el Teorema de Rolle. Sin embargo, sin justificación alguna, nos encontramos que el profesor E en la unidad didáctica suprime la introducción del Teorema de Rolle, y pasa a definir el Teorema del valor medio de la siguiente manera, Supongamos que *f* es continua para el intervalo [a, b] y que *f'(x)* existe para *x* entre *a* y *b*. De manera que existe un x_0 entre *a* y *b* ($a < x_0 < b$), tal que:

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



La figura muestra una función *f* cualquiera entre *a* y *b*. El punto P tiene coordenadas (*a, f (a)*) y Q (*b, f (b)*). Si trazamos la recta $\overline{PQ}$ y determinamos su pendiente, obtenemos:

$$m(\overline{PQ}) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

El teorema dice que existe un valor x_0 entre *a* y *b*, en el cual la pendiente tiene exactamente ese valor $\left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right]$, esto es: la tangente en x_0 es paralela a la recta $\overline{PQ}$.

De la anterior definición queremos destacar los siguientes elementos, que consideramos interesantes: (1) el uso de la notación funcional al definir la pendiente de la recta secante y relacionarla con el macro objeto f '(a); (2) permite la coordinación gráfica, numérica y algebraica de los objetos pendiente de la recta, tasa media de variación y el macro objeto f '(a); y (3), permite un análisis gráfico y algebraico de las pendientes de las rectas tangentes a la gráfica de la curva en diferentes puntos de un intervalo del dominio con respecto a la recta secante a la gráfica de la curva en los extremos de dicho intervalo. Sin embargo, el tratamiento previo que el profesor E ha dado a los anteriores objetos mencionados, pueden provocar: (1) dificultades y confusión en la comprensión de los objetos inmersos; (2) conflictos en la coordinación de las notaciones utilizadas; en efecto, primero se había introducido la notación incremental sin relacionarla con la notación funcional y de manera rápida se pasa a la notación funcional sin justificación alguna (aunque el teorema del valor medio necesariamente requiera de la notación funcional); y (3), dificultades en la aplicación de las técnicas algebraicas que requiere el tratamiento del objeto tasa media de variación (factorización, Ruffini, etc.), si no han sido tratadas en profundidad con anterioridad (Azcárate, 1990; Font, 2000).

Igualmente, como se ha podido observar, encontramos que la gráfica que acompaña la definición del Teorema del valor medio, es incorrecta y podría generar confusiones e inconsistencias añadidas a las ya mencionadas, porque la gráfica de las dos rectas son secantes (quizás por alguna falla en la impresión del libro de texto), y lo que trata de mostrar este teorema es la existencia de un punto del intervalo definido de la función en el que el valor de la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en dicho punto, es igual al valor de la pendiente de la recta secante a la gráfica de la función en los extremos del intervalo.

Teniendo en cuenta lo anterior, consideramos que la incorporación de este contenido temático en el nivel de secundaria tendría sentido, si se hubieran dado las siguientes condiciones: (1) haber tratado previamente diferentes notaciones de los objetos tasa media de variación, pendiente de la recta secante, pendiente de la recta tangente, tasa instantánea de variación que organizan el macro objeto f ’(a), y las técnicas asociadas a la manipulación y cálculo de los mismos, que no son tan simples e inmediatas (Azcárate, 1990; Font, 2000); y (2), haber introducido previamente el Teorema de Rolle, que a nuestra manera de ver, es útil para el estudio gráfico y algebraico de los puntos máximos y mínimos; y entonces, el teorema del valor medio aparecería justificado como una generalización del Teorema de Rolle[1], y por tanto, ayudaría al estudio gráfico, numérico y algebraico de los objetos inmersos en él.

Si confrontamos lo anteriormente expuesto con las tareas que propone en la unidad didáctica para afianzar y ampliar la comprensión de este contenido temático, encontramos que las tareas que propone (tipo P (31), ver anexo 12) recogen aspectos fenomenológicos del concepto de derivada donde sólo se tratan fenómenos que organiza la propia matemática y, se encuentran enunciadas en un contexto algebraico. Es decir que a partir de la expresión simbólica y el intervalo del dominio de la función se pide aplicar el teorema del valor medio, $\left[f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right]$, para calcular el valor del punto *c* contenido en dicho intervalo. Encontramos que esta tipología de problemas es interesante por las razones anteriormente enumeradas; sin embargo, el énfasis en el procedimiento algebraico y la ausencia de un tratamiento previo en la unidad didáctica de la notación funcional de los objetos tasa media, tasa instantánea de variación, pendiente de la recta tangente y f ’(a), podría generar confusiones y dificultades en el manejo de estos objetos y reducir la potencia de la tarea a la simple incorporación de

[1] El mismo libro de texto define el *Teorema de Rolle*, sin ningún apoyo gráfico, así: Supongamos que *f* es continua en $a \leq x \leq b$ y que f ’(x) existe para todo *x* entre *a* y *b*. Si $f(a) = f(b)$, entonces debe existir (por lo menos) un punto, por ejemplo, x_o, entre *a* y *b*, tal que $f'(x_o) = 0$.

una técnica algebraica más, que sirva para solucionar una tipología determinada de problemas, en este caso los que hemos clasificado como P (31).

Este énfasis que hace el profesor E, en la unidad didáctica y en la evaluación, en los procesos algebraicos, es coherente con los resultados encontrados con el análisis del esquema de la derivada que tiene el profesor E, el cual mostró tener dificultades para el tratamiento y justificación de los macro objetos f '(a) y f '(x) en las dos dimensiones del esquema definido (nivel intra algebraico intra gráfico de la derivada). En la tabla 9 resumimos los aspectos analizados en la unidad didáctica, teniendo como referente los resultados obtenidos del análisis de el tratamiento de los macro objetos f '(a) y f '(x), siguiendo el libro de texto de la *Editorial Libros & y Libros*, que también sigue el profesor C.

<table>
<tr><td rowspan="8">Forma
(SINTAXIS)</td><td rowspan="2">¿Cómo introduce el concepto?</td><td colspan="12">Del problema de la recta secante ( )</td></tr>
<tr><td colspan="12">Del incremento finito (X)</td></tr>
<tr><td rowspan="3">¿Qué símbolos utiliza?</td><td colspan="12">Δx, h (X)</td></tr>
<tr><td colspan="12">x – a ( )</td></tr>
<tr><td colspan="12">ε, δ ( )</td></tr>
<tr><td>¿En qué términos la define?</td><td colspan="12">Si y = f(x) es una función con variable independiente x, la derivada de y con respecto a x está definida por:
$f'(x)=\mathop{Lim}_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\mathop{Lim}_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$</td></tr>
<tr><td>¿Qué otros aspectos formales manejan?</td><td colspan="12">Reglas de derivación
Teorema del valor medio</td></tr>
<tr><td>¿Qué técnicas se tratan?</td><td colspan="12">Técnica directa: definición de la derivada
Técnica indirecta de derivación: reglas de derivación (funciones trigonométricas, funciones exponenciales y logarítmicas, funciones potenciales, etc.
Las técnicas de f'(a) se reducen a la sustitución de x=a en la ES f '(x)</td></tr>
<tr><td rowspan="7">Contenido
(SEMÁNTICA)</td><td>¿Cómo introduce el concepto?</td><td colspan="12">Aparecen sucintamente como aplicación del concepto de derivada como límite del cociente incremental y no hay claridad conceptual en la introducción.</td></tr>
<tr><td>¿Cómo maneja el paso de la velocidad media a la instantánea?</td><td colspan="12">No se maneja.</td></tr>
<tr><td>Razones de cambio Instantáneas</td><td colspan="4">1. Velocidad de cambio: e / t (X)</td><td colspan="4">2. Velocidad de cambio: mag / t ( )</td><td colspan="4">3. Velocidad de cambio: mag / mag ' (X)</td></tr>
<tr><td>¿Marca importancia?</td><td colspan="12">A las mag /mag', centrada fenomenología matemática.</td></tr>
<tr><td>¿Cómo maneja el paso de la secante a la tangente?</td><td colspan="12">No hay claridad conceptual en este paso y se hace desde procedimientos algebraicos.</td></tr>
<tr><td>Significado geométrico</td><td colspan="4">1. Recta tangente (X)</td><td colspan="4">2. Tangente trigonométrica ( )</td><td colspan="4">3. Análisis de funciones (X)</td></tr>
<tr><td>¿Marca importancia?</td><td colspan="12">A la recta tangente y al análisis monótono de funciones</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Representaciones semióticas</td><td>Fenomenología</td><td colspan="4">Matemática (X)</td><td colspan="4">Física (X)</td><td colspan="4">Otras ( )</td></tr>
<tr><td>¿Marca importancia?</td><td colspan="12">Marca mayor importancia a la matemática, y sólo aparecen 5 tareas de 160 dedicadas a la fenomenología física</td></tr>
<tr><td>Contexto</td><td colspan="3">1. Algebraico (X)</td><td colspan="3">2. Numérico ( )</td><td colspan="3">3. Verbal (X)</td><td colspan="3">4. Gráfico (X)</td></tr>
<tr><td>¿Marca importancia?</td><td colspan="12">Más mayor importancia al algebraico, y en la fase de aplicación, aparecen 9 de 158 tareass que enfatizan el verbal y 9 de 158 tareass que enfatizan en el gráfico.</td></tr>
</table>

Tabla 9. Aspectos de la derivada como objeto matemático analizados en la unidad didáctica elaborada por el profesor E

5.2.2.2. Estructura y contenido de las tareas y actividades que plantea el profesor E

i. Con relación a la evaluación

El profesor E nos proporcionó dos evaluaciones (ver anexo 9), a las cuales denomina prueba, que contienen en total 7 tareas que hemos clasificado en la tabla de análisis 10 de la siguiente manera: la tarea 1 del tipo P (0), las tareas 2 y 3 del tipo P (1), las tareas 4 y 5 del tipo P (3), la tarea 6 del tipo P (4), y la tarea 7 del tipo P (5). En general las tareas las hemos definido como ejercicios rutinarios que no muestran ningún tipo de complejidad en los procesos cognitivos que demandan y en las técnicas que hay que aplicar en su resolución.

En todas las tareas propuestas por el profesor E hay un tratamiento de la **fenomenología** pura del concepto de derivada, es decir que se centran en el estudio del desarrollo actual y en el uso actual de la matemática. Además, sólo en dos tareas la 4 y la 5 del tipo P (3) hay un tratamiento de la fenomenología histórica del concepto al involucrar el problema de la recta tangente a una curva, y no encontramos ninguna tarea que trate el problema de la velocidad instantánea ni ninguna que estudie los fenómenos que estructuran el concepto de derivada en otras ciencias. Por tanto, encontramos que en las tareas propuestas por el profesor D hay un tratamiento fenomenológico pobre del concepto de derivada centrado en el estudio de fenómenos propios de la matemática, pero encontramos a faltar (al igual que en las evaluaciones de los profesores D y C) tareas de optimización de funciones y razones de cambio en general que ayudan al tratamiento de fenómenos de otras ciencias y de la propia matemática. Sin embargo, el profesor D en la entrevista que le realizamos afirma tratar en clase diferentes aspectos fenomenológicos del concepto de derivada, tanto en la propia matemática como en otras ciencias (física, economía, etc.), que intentaremos confrontar con el análisis de la unidad didáctica.

> “En lo relativo al concepto de derivada… Bueno utilizo… Cuando voy a hablar del incremento de una función… **cuando voy a hablar del cociente diferencial**… **cuando voy a definir la pendiente de la recta tangente**… que va a ser el limite hacia donde va a seguir la secante en… al transportar el punto Q hacia donde está P, el punto donde la tangente corta a la curva… específicamente en eso… También **cuando voy a referirme a algunos conceptos básicos como son los conceptos de velocidad y aceleración, en lo que refiere a la aplicación de la derivada… O también cuando voy a referirme al concepto de utilidad o costo marginal… O cuando voy a referirme al concepto de pendiente de una recta**…”

Otro aspecto significativo en el análisis de las tareas propuestas por este profesor es el hecho de que todas las tareas se encuentran enunciadas en un único **contexto** algebraico, lo cual condiciona el uso, en el proceso de resolución de las mismas, de los sistemas de representación, de las traducciones y relaciones de las representaciones de los conceptos de función y de función derivada, y finalmente, de los procesos cognitivos que emergen como resultado de la actividad matemática que se genera de esta tipología de tareas. El profesor E al evaluar solo tareas enunciadas en el contexto algebraico, no puede obtener una idea global de la comprensión que tienen sus estudiantes del concepto de derivada, puesto que el concepto es desprovisto de toda la riqueza y pluralidad de significados, y la comprensión del concepto matemático se reduce al manejo algebraico de ecuaciones y de aparatos sintácticos, relegando a un segundo plano el uso de sistemas de representaciones, traducciones y relaciones entre representaciones de los conceptos matemáticos en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Sin embargo, en la entrevista afirma su interés por presentar tareas que muestren el uso del concepto de derivada en situaciones de la cotidianidad del alumno.

> **"Sí tiendo a que el estudiante… eh… lo analice desde el punto de vista de la cotidianidad, que vea al concepto de derivada en la velocidad de un carro… que lo veo en una recta que está en el tablero, en estas cuestiones**… Es decir que él el concepto… **se de cuenta que el concepto de derivada es un concepto que está inmerso en la realidad**… que es un concepto que esta dado en la utilidad que puede generar el vender algo, en producir algo, en lo que refiere al costo marginal en el campo de la economía… de la administración, y en las aplicaciones físicas."

El enunciado de las tareas propuestas por este profesor muestra una pobreza en el uso de los **sistemas de representaciones** puesto que todas parten de la expresión simbólica que representa la función, sin embargo encontramos que en el proceso de resolución se requieren de algunas traducciones y relaciones entre representaciones de los conceptos de función y de función derivada. En primer lugar, encontramos que cinco de las tareas requieren traducciones entre representaciones del concepto de función, siendo la más utilizada la de ES f (x)→ES f (x) en las tareas 1, 4, 5 y 6 seguido de la traducción ES f (x)→ G f (x) usadas en las tareas 4 y 7. En segundo lugar, sólo una tarea, la 3 del tipo P (3) requiere de la traducción entre representaciones del concepto de función derivada (ES f '(x)→ES f '(x)), puesto que exige el encapsular el proceso de calcular por aproximación numérica la tasa media de variación ($\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$) para valores pequeños entre 2 y 2,5 en el objeto tasa instantánea de variación (f '(x)= $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$). Es decir, que requiere coordinar dos técnicas de derivación (*función pendiente* definida por Tall (1985) y la definición en términos de límite) como una misma forma de comprender el concepto de derivada $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \approx \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.

En tercer lugar tenemos que todas las tareas, excepto la tarea 1 del tipo P (0), requieren de relaciones entre representaciones de los conceptos de función y de función derivada, la relación más usada es la que va de la expresión simbólica de la función a la expresión simbólica de la función derivada (ES f (x)⇨ES f ' (x)). Y por último, ninguna de las tareas requieren relaciones entre representaciones del concepto de función derivada y de función. En la tabla 11 se puede observar que las tareas propuestas por este profesor, al igual que los profesores C y D, no presentan variedad en el uso de las representaciones, traducciones y relaciones entre representaciones de los conceptos de función y función derivada, lo cual no implica que no estén tratadas en las tareas que forman parte de la actividad matemática que se desarrolla en el aula de clase.

En el enunciado de las tareas y en la justificación que hace el profesor E de las mismas se hace explícito el uso de tres **técnicas** de derivación: la técnica directa por la definición de límite (en la tarea 2), la técnica indirecta de la aplicación de las reglas de derivación (en las tareas 6 y 7) y la técnica directa por aproximación numérica (en la tarea 3). Privilegiando más el uso, quizás por economía, de la técnica indirecta de las reglas de derivación, sin embargo, no podemos inferir que se exija el uso exclusivo de ésta técnica y que se restrinja el uso de otras técnicas que no son mencionadas explícitamente (en las tareas 4 y 5). Es importante señalar que el profesor E al igual que el profesor B plantean explícitamente la necesidad de usar en la resolución de las tareas la técnica de derivación de aproximación numérica (en la tarea 3 del tipo P (1)), pero dependiendo de sí los alumnos están acostumbrados o no en su actividad matemática a tratar con este tipo de problemas, que complementados con otras que involucren traducciones y relaciones entre estos conceptos, puedan ayudar a emerger una perspectiva esquema del concepto de derivada.

Las tareas propuestas por el profesor E necesitan la coordinación de varios esquemas de los **conceptos** que se encuentran involucrados, tales como: función, incremento de la función, composición de funciones, pendiente de una recta, tasa media de variación, tasa instantánea de variación, reglas de derivación, función derivada, regla de la cadena, etc. Pero el tratamiento de las representaciones, de las traducciones y de las relaciones entre representaciones de los conceptos que intervienen e interactúan en la resolución de las tareas determinará la riqueza de estos esquemas, e igualmente, determinará o condicionará los procesos cognitivos que se activarán y que ayudarán a que la construcción de los esquemas de los conceptos matemáticos sea más consistente y coherente. De allí que se haga necesario un estudio más profundo del tratamiento de estos conceptos en las tareas que se proponen en la unidad didáctica del concepto de derivada.

En relación con el análisis de los **procesos cognitivos** que se activan en el desarrollo de las tareas propuestas por el profesor E, creemos conveniente que para describirlos nos centremos en el análisis particular de cada una de las tareas propuestas, para posteriormente acercarnos a una conclusión generalizada de la perspectiva del concepto que requieren los estudiantes para resolver las tareas propuestas.

La tarea 1 del tipo P (0) teniendo en cuenta la traducción entre representación del concepto función que se usa, suponemos que teóricamente requiere el siguiente proceso cognitivo:

- Desencapsulación del objeto función en la acción de calcular el incremento de una función a partir de la ES.

Sin embargo, teniendo en cuenta la justificación que hace el profesor de la elección de la tarea 1, llegamos a la conclusión de que en la práctica el tratamiento de este tipo de tareas si no se complementa con otras tareas en donde se manejen una variedad de traducciones entre representaciones del concepto de función puede finalmente propiciar la interiorización de acciones en procesos, más concretamente, si seguimos la tabla de procesos cognitivos entre traducción del concepto función (ver tabla 7 del capítulo 3), esta traducción de ES f (x)→ES f (x) tiende a activar: interiorización de acciones sobre el objeto función (representado por su ES) en procesos que ayuden a las trasformaciones de la ES: factorización, racionalización, etc.

TABLA 10. ANÁLISIS DE LA EVALUACIÓN PROFESOR E

Tipo de problema	Profesor	Problema: Enunciado	Problema: Fenomenología	Problema: Contexto	Representaciones: Representaciones	Representaciones: Traducciones	Relación entre f(x) y f'(x)	Técnica	Conocimientos involucrados	Procesos cognitivos	Recursos (Tecnología)
P (0)	E	1. Encontremos el incremento relativo, $\Delta y/\Delta x$ de la función: $y = f(x) = x^2 + 1/x^2 - 4$	Matemática	Algebraico	ES f (x)	ES f (x) → ES f (x) ↻ (II.1.1.2)	No	Uno de los pasos de la regla de los cinco pasos	Función (fórmula) Tasa media de variación de una función	• Desencapsulación del objeto tasa media de variación de una función en el proceso para calcularla a partir de la ES	No
P (1)	E	2. Aplicando la regla de los cinco pasos, encuentra la derivada de: $y = 2x^2 + x - 1$	Matemática	Algebraico	ES f (x) ES f ' (x)	No	ES f (x) ⇒ ES f ' (x) (II. 1.1.1)	Regla de los cinco pasos (usando límite)	Función (fórmula) Tasa instantánea de variación de una función	• Desencapsulación del objeto tasa instantánea de variación de una función en el proceso para calcularla algebraicamente a partir de la ES de la función	No
	E	3. Después de conceptuar sobre el incremento de una función, trata de recordar cómo introduces el concepto de derivada con un cálculo numérico, dada la siguiente función: $y = f(x) = x^2 + x$, en términos de x y Δx, cuando pasa de 2 a 2.25	Matemática	Algebraico	ES f (x) ES f ' (x)	ES f ' (x) → ES f ' (x) $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$	ES f (x) ⇒ ES f ' (x) ↻ (II. 1.1.2)	Aproximación (numérica)	Función (fórmula) Tasa media de variación Tasa instantánea de variación de una función	• Desencapsulación del objeto tasa instantánea de variación en los procesos de calcularla algebraica y numéricamente a partir de la ES de la función	No
P (2)	E	4. Encuentra la ecuación de la recta tangente y la normal a la curva que representa la función determinada por la ecuación $y = x^2$ en el punto P (2,4), y grafica para una interpretación geométrica del concepto de derivada.	Matemática	Algebraico	ES f (x) G f (x) ES f ' (x)	ES f (x) → ES f (x) ES f (x) → G f (x)	ES f (x) ⇒ ES f ' (x) ES f (x) ⇒ ES f ' (x) ↻ ⇒ G f (x) (I. 1.1.2. + I. 2. 2 + II. 1.1.2)	Reglas de derivación Usando límite	Función afín (rectas normales y tangentes), pendiente, derivada de una función en un punto y función derivada (cálculo directo e indirecto)	• Desencapsulación del objeto función derivada en el proceso de calcular la pendiente de la recta tangente a una curva a partir de la ES de f (x) • Coordinación de los esquemas de recta normal, recta tangente y el de función derivada	No
	E	5. Encontrar el área del triángulo que forma el eje x, la normal y la tangente a la curva $y = f(x) = 4x^2 - x$ en el punto (1,3).	Matemática	Algebraico	ES f (x) ES f ' (x)	ES f (x) → ES f (x)	ES f (x) ⇒ ES f ' (x) ES f (x) ⇒ ES f ' (x) ↻ (II. 1.1.2. + II. 1.1.2)	Reglas de derivación Usando límite	Distancia entre dos puntos, área de un triángulo, función afín (rectas normales y tangentes), pendiente, derivada de una función en un punto y función derivada (cálculo directo e indirecto)	• Desencapsulación del objeto función derivada en el proceso de calcular la pendiente de la recta tangente a una curva a partir de la ES de f (x) • Coordinación de los esquemas de recta normal, recta tangente, función derivada y área de un triángulo	No
P (4)	E	6. Aplicando las fórmulas de derivación encontrar las siguientes derivadas: $y = (x^3 - 7x + 2)^4$ $y = [(2x^2 + 1)^3] / [(3x - 1)^4]$ $y = (4 - x)(\sqrt{4 - x})$ $y = \sec(4x - 1)^2$	Matemática	Algebraico	ES f (x) ES f ' (x)	ES f (x) → ES f (x)	ES f (x) ⇒ ES f ' (x) ES f (x) → ES f (x) ⇒ ES f ' (x) (II. 1.1.3)	Reglas de derivación	Reglas de derivación (cálculo indirecto de la función derivada), regla de la cadena (composición de funciones)	• Desencapsulación del objeto composición de funciones en las funciones sencillas. • Desencapsulación de la función derivada en las acciones de aplicar la colección de reglas de derivación e incluso la regla de la cadena a partir de la ES de la función	No
P (5)	E	7. En cada uno de los ejercicios encontrar los extremos de la función dada, si los hay, y hacer donde sea posible el gráfico: $y = (x^3 - 7x + 2)^4$ $y = [(2x^2 + 1)^3] / [(3x - 1)^4]$ $y = (4 - x)(\sqrt{4 - x})$ $y = \sec(4x - 1)^2$	Matemática	Algebraico	ES f (x) G f (x) ES f ' (x)	ES f (x) → G f (x)	ES f (x) ⇒ ES f ' (x) ES f (x) ⇒ ES f ' (x) ↻ ⇒ G f (x) (II. 4.6)	Reglas de derivación Cálculo de puntos críticos y análisis de la concavidad	Función, interpretación gráfica de función (análisis de la monotonía de una función), función derivada, interpretación gráfica de la función derivada (criterios de 1ª y 2ª derivada), reglas de derivación	• Desencapsulación del objeto función derivada en el proceso de calcular los puntos críticos y la concavidad de la función. • Coordinación del proceso de calcular la función derivada a partir de ES y el proceso de construir la tabla de monotonía de la función (criterios de 1ª y 2ª derivada) para obtener la gráfica de una función	No

Tabla 11. Análisis de las traducciones y relaciones entre representaciones de f (x) y f '(x) en las tareas propuestas en la ***evaluación*** diseñada por **EL PROFESOR E**.
(Se tiene en cuenta sólo la representación inicial y la representación final utilizada)

de → a	Expresión simbólica f '(x)	Gráfica f '(x)	Tabla f '(x)	Descripción verbal de la situación (en términos de f '(x))	Expresión simbólica f (x)	Gráfica f (x)	Tabla f (x)	Descripción verbal de la situación (en términos de f (x))
Expresión simbólica f (x)	2, 3, 4, 5, 6, 7				1			
Gráfica f (x)								
Tabla f (x)								
Descripción verbal de la situación (en términos de f (x))								
Expresión simbólica f '(x)								
Gráfica f '(x)								
Tabla f '(x)								
Descripción verbal de la situación (en términos de f '(x))								

"Bueno yo diría que en general habría que tener en cuenta a la hora de evaluar el concepto de derivada… el concepto de función, una función original y una función incrementada… Como también que el estudiante entienda bien el concepto de incremento de una variable dependiente, como el de una variable independiente... Porque fíjate tú **con el primer ejercicio, entonces va desde que se da la función original hasta que se busca la función incrementada y después la necesidad de establecer un cociente diferencial y después la razón de cambio que le lleve a encontrar un límite posterior**."

En la tarea 2 del tipo P (1) si tenemos en cuenta la descomposición didáctica que hemos construido como eje del dispositivo de enseñanza, podemos decir que en general es una tarea que requiere de un proceso cognitivo complejo de desencapsulación del objeto tasa instantánea de variación en los procesos que permiten realizar cada una de las acciones que conforman la regla de los cinco pasos. Sin embargo, la emergencia de este proceso cognitivo complejo dependerá de la actividad matemática que el profesor desarrolla durante el proceso de enseñanza y aprendizaje. Por tanto, si la actividad matemática se centra en el manejo algebraico y algorítmico del concepto de límite, puede conllevar a que los estudiantes construyan una perspectiva acción o a lo máximo una perspectiva proceso del concepto de derivada. Ocasionando entonces que la desencapsulación no se de en los alumnos y lo que finalmente obtenemos son acciones que realizan memorísticamente, pudiendo incluso aparecer el fenómeno de algebrización del límite.

> "Ya en el segundo ejercicio, **lo que busco es que con la regla de los cinco pasos el estudiante a través de ella se concienticen un poco en cuál es el proceso total que se da para llegar a la derivada**. Es decir que este recoge el proceso total de los dos ejercicios: el primero y el tercero. Entonces sí, aquí determina la derivada... Y no se dice que es la derivada, se va llevando hasta que ya ellos se van ambientando con esto... **Pero allí está el concepto de límite... lo importante es que sepan operar con él**."

La tarea 3 del tipo P (1) es una tarea interesante que requiere la aplicación de una técnica de aproximación numérica. Encontramos que este tipo de tarea ayuda a que emerjan procesos cognitivos complejos como la encapsulación de procesos en objetos, siempre y cuando el alumno se encuentre familiarizado con este tipo de técnica. De la justificación que el profesor E hace de esta tarea en la entrevista podemos inferir que se persigue la emergencia del proceso cognitivo que hemos definido en la tabla de análisis 10, la desencapsulación del objeto tasa instantánea de variación en los procesos de calcularla algebraica y numéricamente a partir de la expresión simbólica de la función.

"Bueno con la tercera situación problema lo que busco es que después de haber **conceptualizado sobre el incremento de una función él trate de recordar como introduce el concepto a un cálculo numérico**. O sea que en este ejercicio **se le dan las funciones para que él trate de introducir el concepto de derivada a través del cálculo numérico**. Además lo que **se persigue es que a la vez de estar utilizando los procesos algebraicos se vaya introduciendo los procesos numéricos que explican el concepto**. Porque se ayuda y se **evalúa también en la parte esta de teoría de límite, que tampoco es un concepto nada fácil... Por eso te hablo del concepto de límite como idea intuitiva de aproximaciones numéricas**."

Las tareas 4 y 5 del tipo P (3) son tareas rutinarias en las que se trata uno de los problemas históricos que dieron origen a la construcción del concepto de derivada. En el proceso de resolución de estas tareas hemos definido que demandan los siguientes procesos cognitivos:

- Desencapsulación del objeto función derivada en el proceso de calcular la pendiente de la recta tangente a una curva a partir de la ES de f (x)
- Coordinación de los esquemas de recta normal, recta tangente y el de función derivada

Sin embargo, son tareas que se centran en la relación del concepto de función y del concepto de función de derivada focalizada en el manejo algebraico del aparato formal de la derivada para el cálculo de la pendiente de la recta tangente a la función y que no necesariamente involucran procesos cognitivos complejos, sino por el contrario demandan la interiorización de acciones sobre el objeto función en el proceso de calcular la función derivada directa (a través álgebra de límite) o indirectamente (a través de la aplicación memorística de las reglas de derivación), tal y como lo hemos definido en la tabla de procesos cognitivos 9-3.

"En la cuarta pregunta de la primera parte, **lo que trato de sintetizar lo que ha hecho arriba... o sea que todo el examen lo que busca evaluar es el proceso**, porque ahora **lo que tienen es que aplicar lo anterior para resolver esta situación del cálculo de la ecuación de la recta tangente y la normal**."

Por un lado en la tarea 4 encontramos un aspecto interesante como lo es la inclusión de la interpretación geométrica del concepto de derivada a partir de la traducción a la representación gráfica de la función (ES f (x)→G f (x)). Mientras que en la tarea 5 encontramos a faltar el tratamiento simultáneo de la resolución analítica y la gráfica, que le permita a los alumnos constatar el signo del área según la pendiente de la recta, que a nuestra manera de ver contribuiría a la emergencia de procesos cognitivos más complejos.

> "También **cuando ya vamos a referirnos al manejo de las aplicaciones, por ejemplo, en el ejercicio de encontrar el área de un triángulo... ya el estudiante verifica algunos de los conceptos dados... Es decir qué aplicaciones tiene en la cotidianidad el concepto**."

La tarea 6 del tipo P (4) requiere de aplicación de la técnica indirecta de las reglas de derivación. Es una tarea que hemos clasificado como rutinaria que enfrenta al estudiante al cálculo de la función derivada a partir de la expresión simbólica que representa la función, planteándoles una variedad de funciones que requieren de la aplicación de varias técnicas de derivación indirecta, tales como: derivada de un producto, derivada de un cociente, regla de la cadena, etc. Teniendo en cuenta, que la tarea requiere la relación entre representaciones de los conceptos de función y de función derivada: ES f (x)⇨ ES f '(x), y la justificación que el profesor E hace de la misma donde el aspecto central a evaluar es el procedimiento algebraico de aplicar el aparato formal de la derivada con facilidad los procesos cognitivos que definimos en la tabla 10 de evaluación de las tareas, como son:

- Desencapsulación del objeto composición de funciones en las funciones sencillas.
- Desencapsulación de la función derivada en las acciones de aplicar la colección de reglas de derivación e incluso la regla de la cadena a partir de la ES de la función.

Quedan finalmente en la práctica reducido a la interiorización de acciones sobre el objeto función en el proceso de calcular la función derivada indirectamente (a través de la aplicación memorística de las reglas de derivación), en lugar de la aplicación de la técnica directa por la definición de límite por economizar tiempo y trabajo.

> "Luego en la segunda parte, tenemos otra evaluación, ahora en esta parte, con el primer ejercicio, o sea la tarea 6, **ya el estudiante conoce una serie de propiedades o teoremas verificables sobre aspectos de la derivada de una potencia, de un producto, etc., entonces aquí ya maneja todo lo evaluado anteriormente, es decir comprende el concepto de derivada, y ahora con estos**

> **ejercicios va a probar estas reglas o teoremas y le va a permitirse meterse más en el concepto de derivada de una manera más rápida y fácil**... Y a ellos les gusta porque a la larga **ve que lo anterior era un trabajo muy largo, pero ahora aquí una derivada la va obtener rápidamente sin tantos pasos**."

Finalmente, la tarea 7 del tipo P (5) es una tarea que también hemos definido como rutinaria en la que se pide encontrar los extremos de las funciones y la construcción de la gráfica de cada una de ellas. Es un ejercicio rutinario de trazado y análisis de gráfica centrada en la solución algebraica de la función derivada para posteriormente aplicar los criterios de la primera y de la segunda derivada. Es una tarea que al igual que la anterior la evaluación se centra en la aplicación del aparato formal de las reglas de derivación a la función representada por su expresión simbólica (ES f (x)⇨ES f '(x)).

> "También **tú observas que los puntos de inflexión, puntos de máximo y mínimo... es decir, desgraciadamente en este tema creo que si me quedo un poco corto, porque la verdad es que el tiempo es muy corto**... Pero de todas maneras trato de que ellos se vayan a la universidad con lo poco que se le da, con objetividad y claridad... es decir lo poco que se le da pero es lo esencial, es decir, que trato es que se **lleven los conocimiento mínimos de ese concepto... porque yo solo tengo 3 horas semanales de 45 minutos**."

En lo que respecta a esta tarea queremos llamar la atención sobre el tipo de funciones que el profesor E pretende que los estudiantes grafiquen sin la ayuda de ninguna herramienta informática o tecnológica. Consideramos que son funciones bastantes complejas que centradas en el manejo algebraico será imposible que los alumnos alcancen a construir y hacer un análisis monótono completo de las gráficas de las funciones. A lo mejor esto se debe a la falta de preparación y profundización que el profesor hace del tema del análisis y trazado de gráficas teniendo como punto central la aplicación del concepto de derivada, que deja entrever en la justificación que hace de esta tarea como resultado de las restricciones institucionales a la que se encuentra sometido. Por tanto, podemos inferir que el profesor E se preocupa más por la evaluación de los procesos algebraicos y deja de lado la aplicación del concepto de derivada mediante el uso de diferentes contextos y registros de representación semióticas, como lo es la interpretación del concepto en un contexto gráfico.

En lo que respecta a los recursos, el profesor E en su discurso no deja entrever el uso de las nuevas tecnologías como una herramienta que ayuda a mejorar la comprensión de los conceptos matemáticos, ni como estrategia de resolución de las mismas. Sin embargo, como ya señalamos anteriormente, la tarea 7 del tipo P (5) para poder construir la gráfica de las funciones requeriría uso de las nuevas tecnologías, como: software o calculadora gráfica.

En general, hemos encontrado que la mayoría de las tareas propuestas por el profesor E se centran en evaluar el manejo algebraico de dos técnicas de derivación: la técnica directa por la definición del límite y la técnica indirecta de las reglas de derivación. Apareciendo aisladamente la tarea 3 la necesidad de utilizar técnicas directa de aproximación numérica. No hay una preocupación directa en la evaluación por parte del profesor por evaluar la comprensión del concepto ligada al uso de diferentes sistemas de representación, a la importancia en la traducción y en la relación entre sistemas de representaciones de los conceptos de función y función derivada, como tampoco, al análisis de los diferentes fenómenos que estructuran al concepto de derivada. Igualmente, teniendo en cuenta la justificación que el profesor E hace de cada una de las tareas nos lleva a inferir, que para su resolución es suficiente que los estudiantes exhiban una perspectiva proceso de los conceptos matemáticos que les permitiría abordar con éxito su resolución e incluso aprobar con buenas calificaciones la asignatura.

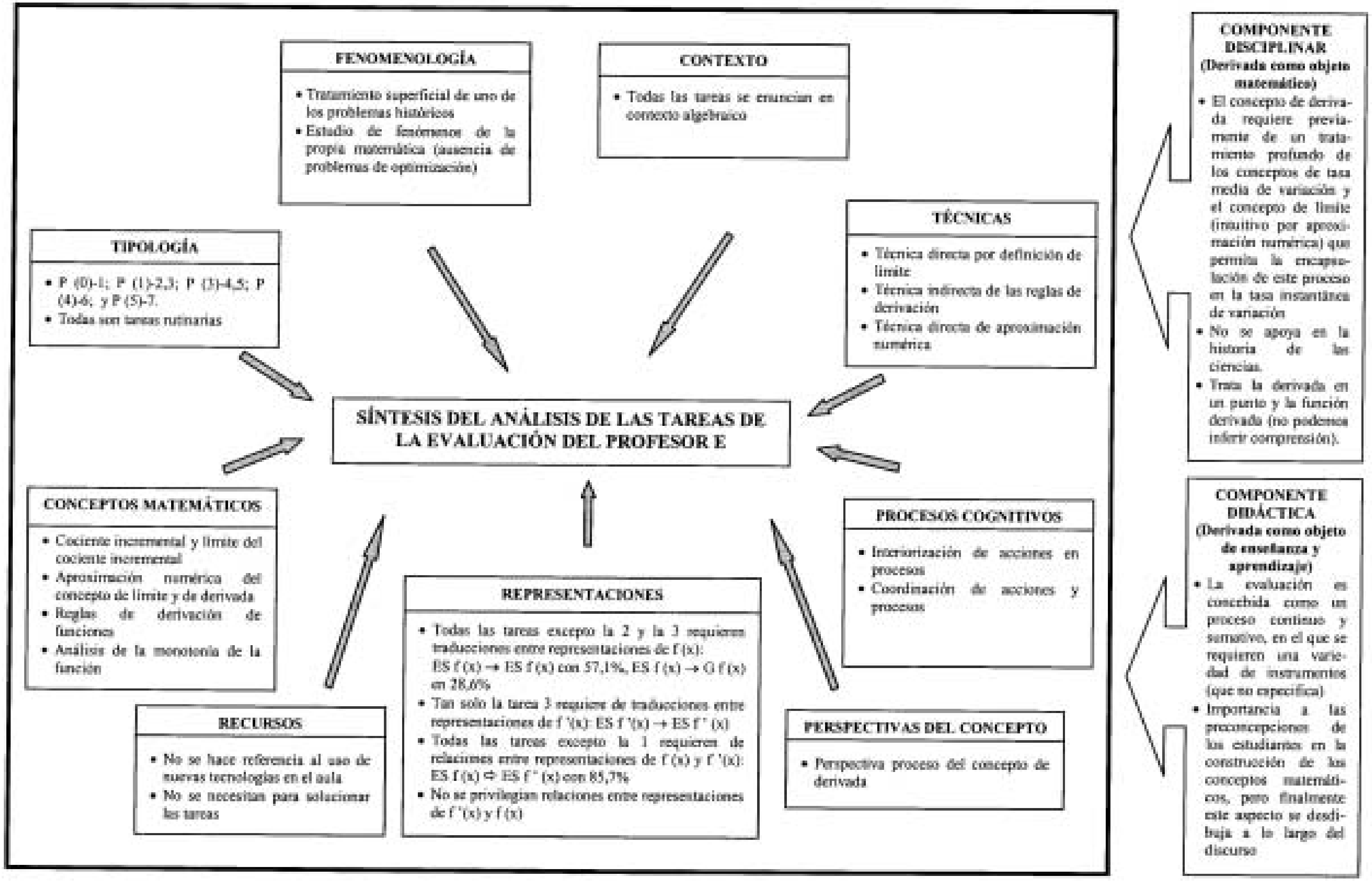
Otro foco de interés al analizar las tareas y la justificación que hace el profesor E de las mismas, es el inferir algunos elementos del conocimiento que exhibe el profesor en relación con el concepto de derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje. En lo que respecta a la derivada como objeto matemático podemos inferir del discurso del profesor que el concepto de derivada requiere previamente de un tratamiento profundo de los conceptos de tasa media de variación y el concepto de límite (intuitivo por aproximación numérica) que permita la encapsulación de este proceso en la tasa instantánea de variación. Sin embargo, paradójicamente el tratamiento del concepto en las tareas se centra más en los procesos algebraicos presentes en la aplicación de técnicas de derivación directa por definición de límite y por la técnica indirecta de las reglas de derivación. No hay una preocupación por el estudio de los fenómenos que estructuran al concepto de derivada, aunque si hay una mención periférica de ellos, por tanto, no tenemos elementos suficientes para inferir del dominio conceptual o no de los mismos, como tampoco de las relaciones entre derivada en un punto y de la función derivan puesto que a lo largo del discurso no hace mención de ello ni de la generalización de la derivada de la función como razón de cambio entre magnitudes.

> "Bueno yo lo que trato de decir, es que **si ya el estudiante ha interpretado gráfica y analíticamente el concepto de derivada, que ya sabe lo que es una secante a una curva, la normal, la tangente, la pendiente de la recta tangente... Es decir cuando ya domina estos conceptos**. Entonces **cuando ya tiene también definido la regla de los cinco pasos**, que en algunos casos dicen que son cinco pasos y en otro que son tres pasos para el cálculo de la derivada a partir de la incrementación, entonces que él conozca ya detalladamente los teoremas, para ya hacerlo más rápido, más ágilmente**... Es decir, que cuando un estudiante ya se da cuenta que no trabaja tanto para calcular la derivada de una potencia, etc., que ya sabe que lo puede hacer directamente, se corre menos riesgos de equivocarse. Claro que procuro que ellos apliquen esos teoremas, pero que los demuestren, que sepan de dónde salen y que no lo aprendan de forma mecánica, sino que interpreten, argumenten y propongan**."

En cuanto a la componente didáctica, para este profesor, la evaluación es concebida como un proceso continuo y sumativo, en el que se requieren una variedad de instrumentos (que no especifica) y en el que se tiene en cuenta todos los progresos y dificultades que el estudiante tiene durante el desarrollo de la unidad y al final de la misma. Además, creemos conveniente resaltar la importancia que le otorga a las preconcepciones de los estudiantes en la construcción de los conceptos matemáticos, pero finalmente este aspecto se desdibuja a lo largo del discurso.

> "Bueno **hay muchas maneras de conocer si el estudiante ha aprendido el concepto**, **porque es que yo acostumbro a hacer las pruebas diagnósticas, que veo dónde están fallando y entonces ya profundizo con argumentos de ejercicios más fuertes**. Si se logra detectar por ese ánimo, por ese querer hacer las cosas que se les nota a ellos... **Y que no es solo una evaluación de un examen sino a través de la observación directa de los progresos que uno ve en el aula de clase por medio de las diferentes actividades que se programan**."

A continuación, en el esquema siguiente, intentaremos resumir los elementos descritos a lo largo del análisis de la unidad didáctica.


SÍNTESIS DEL ANÁLISIS DE LAS TAREAS DE LA EVALUACIÓN DEL PROFESOR E
FENOMENOLOGÍA
• Tratamiento superficial de uno de los problemas históricos
• Estudio de fenómenos de la propia matemática (ausencia de problemas de optimización)
CONTEXTO
• Todas las tareas se enuncian en contexto algebraico
TIPOLOGÍA
• P (0)-1; P (1)-2,3; P (3)-4,5; P (4)-6; y P (5)-7.
• Todas son tareas rutinarias
TÉCNICAS
• Técnica directa por definición de límite
• Técnica indirecta de las reglas de derivación
• Técnica directa de aproximación numérica
CONCEPTOS MATEMÁTICOS
• Cociente incremental y límite del cociente incremental
• Aproximación numérica del concepto de límite y de derivada
• Reglas de derivación de funciones
• Análisis de la monotonía de la función
PROCESOS COGNITIVOS
• Interiorización de acciones en procesos
• Coordinación de acciones y procesos
RECURSOS
• No se hace referencia al uso de nuevas tecnologías en el aula
• No se necesitan para solucionar las tareas
REPRESENTACIONES
• Todas las tareas excepto la 2 y la 3 requieren traducciones entre representaciones de f (x): ES f (x) → ES f (x) con 57,1%, ES f (x) → G f (x) en 28,6%
• Tan solo la tarea 3 requiere de traducciones entre representaciones de f '(x): ES f '(x) → ES f '' (x)
• Todas las tareas excepto la 1 requieren de relaciones entre representaciones de f (x) y f '(x): ES f (x) ⇔ ES f ' (x) con 85,7%
• No se privilegian relaciones entre representaciones de f '(x) y f (x)
PERSPECTIVAS DEL CONCEPTO
• Perspectiva proceso del concepto de derivada
COMPONENTE DISCIPLINAR (Derivada como objeto matemático)
• El concepto de derivada requiere previamente de un tratamiento profundo de los conceptos de tasa media de variación y el concepto de límite (intuitivo por aproximación numérica) que permita la encapsulación de este proceso en la tasa instantánea de variación
• No se apoya en la historia de las ciencias.
• Trata la derivada en un punto y la función derivada (no podemos inferir comprensión).
COMPONENTE DIDÁCTICA (Derivada como objeto de enseñanza y aprendizaje)
• La evaluación es concebida como un proceso continuo y sumativo, en el que se requieren una variedad de instrumentos (que no especifica)
• Importancia a las preconcepciones de los estudiantes en la construcción de los conceptos matemáticos, pero finalmente este aspecto se desdibuja a lo largo del discurso

ii. Con relación a la unidad didáctica

La unidad didáctica propuesta por el profesor E contiene 87 tareas en total. Teniendo en cuenta la tipología de tareas definidas como resultado del análisis de las tareas propuestas en las evaluaciones, podemos concluir que de las 87 propuestas en la unidad didáctica, 82 de ellas pueden ser ubicadas en la tipología definida, y 5 no están incluidas en esta clasificación, y, por tanto, requieren de un análisis particular. Tal y como se ilustra en la siguiente tabla, de las 82 que se corresponden con la tipología definida, podemos concluir que el tipo de tareas que más usa el profesor E en el desarrollo de la unidad es la tipo P (4) con un total de 30, seguidamente, tenemos las tipo P (0) con 18, P (1) con 14, la P (6) con 4, P (3), P (5), P (9) y P (13) con 3 y, finalmente, la P (11) y P (12) con 2 tareas.

Tipo de tarea / Frecuencia	P(0)	P(1)	P(2)	P(3)	P(4)	P(5)	P(6)	P(7)	P(8)	P(9)	P(10)	P(11)	P(12)	P(13)	Otras
	18	14		3	30	3	4			3		2	2	3	5
TOTAL	87														

Las tareas que hemos definido como “otras”, las analizamos utilizando el mismo instrumento que diseñamos para el análisis de las tareas propuestas por los profesores en las evaluaciones. El análisis particular de las cinco tareas, nos arroja un tipo de tareas más a la tipología ya definida inicialmente (P (0) a P (13)), en el análisis de las evaluaciones, la cual ya fue ampliada en 17 tipos más (P (14) a P (30)) después del análisis de las tareas presentes en la unidad didáctica de los profesores B, A, C y D (ver secciones 5.1.2.2., anexos 11, 12 y 13, respectivamente). A continuación nos centraremos en describir el análisis de las cinco tareas que aparecen en la unidad didáctica del profesor E y que no fueron evaluadas por él. El objetivo del análisis de estas tareas que hemos definido como “otras”, es intentar interpretar y caracterizar la actividad matemática que el profesor genera en el aula para que sus alumnos construyan los macro objetos f ’(a) y f ’(x), y a su vez, compararla con las tareas que considera relevante para evaluar la comprensión de estos macro objetos.

Al analizar las tareas que el profesor E propone en la unidad nos encontramos con un tipo de tareas que no es evaluada. Este tipo de tarea que hemos clasificado como P (31) está conformada por cinco tareas de la misma características, las cuales se encuentran referenciadas en la tabla de análisis 12 como: 1. a), b), c), d) y e). Las cinco tareas del tipo P (31) recogen aspectos fenomenológicos del concepto de derivada donde se tratan sólo fenómenos que organiza la propia matemática y se encuentran enunciadas en un contexto algebraico, es decir que a partir de la expresión simbólica y el intervalo del dominio de la función implican aplicar el teorema del valor medio, $\left[f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \right]$, para calcular el valor del punto *c* contenido en dicho intervalo. Encontramos que es un problema interesante por los siguientes razones: (1) se usa la notación funcional al definir la pendiente de la recta secante y relacionarla con el macro objeto f ’(a); (2) permite la coordinación gráfica, numérica y algebraica de los objetos pendiente de la recta, tasa media de variación y f ’(a); y (3), permite un análisis gráfico y algebraico de las pendientes de las rectas tangentes a la gráfica de la curva en diferentes puntos de un intervalo del dominio con respecto a la recta secante a la gráfica de la curva en los extremos de dicho intervalo. Sin embargo, el énfasis en el procedimiento algebraico y la ausencia de un tratamiento previo en la unidad didáctica de la notación funcional de los objetos tasa media, tasa instantánea de variación, pendiente de la recta tangente y f ’(a), podría generar confusiones y dificultades en el manejo de estos objetos y reducir la potencia de la tarea a la simple incorporación de una técnica algebraica más que sirva para solucionar una tipología determinada de problemas, en este caso los que hemos clasificado como P (31).

Desde nuestro punto de vista, tal y como están planteadas las cinco tareas anteriores del tipo P (31), potencian la activación de procesos cognitivos, tales como la interiorización de acciones en procesos y la coordinación de acciones y procesos que ayudan a emerger una perspectiva proceso de los objetos matemáticos involucrados en este Teorema. Igualmente, el proceso de resolución: (1) requiere hacer una traducción entre representaciones del macro objeto f (x): ES f (x)→ES f (x)↻; (2) requiere una relación entre representaciones de los macro objetos f (x) y f ’(x) y f ’(a): ES f (x)→ES f (x)↻ ⇨ES f ’(x)↻; (3) no requiere de traducciones entre representaciones del macro objeto f ’(x), como tampoco de relaciones entre representaciones de los macro objetos f ’(x) y f (x); y (4), no es necesario el uso de ninguna herramienta tecnológica (calculadora gráfica, o software, etc.)

Si tenemos en cuenta la totalidad de las tareas propuestas en la unidad didáctica (87 tareas), es decir, si consideramos, además del análisis hasta ahora realizado de las 5 tareas del tipo P (31), que el profesor no tuvo en cuenta a la hora de evaluar el concepto de derivada, el análisis de las tareas que sí fueron evaluadas y que se distribuyen en los tipos P (0), P (1), P (3), P (4), P (5), P (6), P (9), P (11), P (12) y P (13), podemos concluir que las tareas propuestas por el profesor E evidencian poca variedad en el uso de **sistemas de representaciones** de los macro objetos f (x) y f ’(x). Por tanto, no demandan hacer muchas traducciones y relaciones entre representaciones de los macro objetos f (x) y f ’(x) en el proceso de resolución que hagan emerger procesos cognitivos complejos. Lo anterior se puede visualizar mejor en la tabla 13, en donde la mayoría de las tareas (62 de 87) se centran en la relación ES f (x)⇨ES f ’(x), 7 en la relación DV f (x)⇨ES f ’(x) y 18 tareas de ES f (x)→ES f (x).

Al igual que en la evaluación elaborada por este profesor, sólo encontramos en la unidad didáctica una tarea que requiera para su resolución hacer traducciones entre representaciones del macro objeto f ’(x), más concretamente, de ES f ’(x)→ES f ’(x); y no encontramos ninguna tarea en la que se privilegie las relaciones entre representaciones de f ’(x) a f (x), que si bien nos llevan al cálculo integral, consideramos que ayudan a la comprensión del estos macro objetos.

Por otra parte, en estas tareas se tratan y recogen aspectos **fenomenológicos** del concepto de derivada en los que en mayor proporción se hace referencia a fenómenos que organiza la propia matemática (84 tareas de 87) y en menor proporción se tratan fenómenos que organizan otras ciencias, más concretamente, solo encontramos 3 tareas del tipo P (9) que involucran fenómenos de la física.

En general, de las 87 tareas propuestas en la unidad didáctica, 62 tareas se encuentran enunciadas en un contexto algebraico, y sólo encontramos 7 tareas enunciadas en un contexto verbal. Las 18 tareas restantes se encuentran enunciadas también en un contexto algebraico, pero se centran en el estudio del incremento de la función y el incremento relativo (objeto tasa media de variación), con lo cual no involucran directamente el cálculo de los macro objetos f ’(a) y f ’(x). Por tanto, podemos concluir que, en las tareas que propone el profesor E en la unidad didáctica, no hay tratamiento variado de los **contextos**, que determinan, en cierta forma, la riqueza de los sistemas de representaciones usados y de las traducciones y relaciones entre representaciones de los macro objetos f (x) y f ’(x) que requieren realizar durante el proceso de resolución de las mismas. Lo anterior es coherente con la importancia que este profesor otorga, a la hora de evaluar a los procesos algebraicos, ya que como vimos en la sección anterior, todas las tareas de las evaluaciones se encuentran enunciadas en un contexto algebraico y el énfasis en la aplicación de procedimientos algebraicos para el cálculo de los macro objetos f (x) y f ’(x) es, para este profesor, el gran indicador de la comprensión que posee un estudiante de estos macro objetos (ver apartado anterior).

Al igual que las tareas de la evaluación, en los enunciados de las tareas que estamos analizando de la unidad didáctica y en la justificación que hace el profesor E de las mismas, se hace explícito el uso de dos **técnicas** de derivación para el cálculo del macro objeto f ’(x): la técnica directa por la definición de límite y la técnica indirecta de la aplicación de las reglas de derivación, privilegiando más el uso, quizás por economía, de la técnica indirecta de las reglas de derivación. Sin embargo, no podemos inferir que se exija el uso exclusivo de éstas y que se restrinja el uso de otras técnicas que no son mencionadas explícitamente. Pero lo que sí podemos concluir, si además tenemos en cuenta las traducciones y relaciones sobre representaciones que se usan, es que se privilegia más en la unidad didáctica el uso de las reglas de derivación (50 de 87), y en segundo lugar, la técnica directa por la definición de límite (32 de 87). Al igual que en la evaluación, en la unidad didáctica no encontramos ninguna tarea en la que se haga necesario para su resolución de la aplicación de técnicas de derivación gráfica, como tampoco de la aplicación de técnicas numéricas.

En lo que respecta a las **estructuras conceptuales**, al igual que las tareas analizadas en la evaluación, las estructuras conceptuales de las tareas de la unidad didáctica requieren la coordinación de varios esquemas de conceptos, tales como: función, tasa media de variación, tasa instantánea de variación, velocidad instantánea, pendiente de la recta tangente, derivada en un punto, función derivada, conceptos de la geometría, etc. Sin embargo, por las características de las tareas y el proceso de resolución que demandan, podemos concluir que no favorecen la activación de procesos cognitivos complejos, sino que el énfasis en la aplicación de técnicas algebraicas sin justificación alguna, fomenta la interiorización de acciones en procesos y la coordinación de acciones y procesos, lo cual puede ayudar a emerger en los estudiantes una perspectiva proceso de los conceptos involucrados y, en particular, de los macro objetos f '(a) y f '(x).

Si tenemos en cuenta la complejidad de los elementos hasta aquí analizados de las tareas propuestas en la unidad didáctica, podemos concluir que para que, un individuo pueda abordar con éxito el proceso de resolución de las mismas, requiere tener una perspectiva proceso de los macro objetos f (x) y f '(x). Lo cual implica activar **procesos cognitivos** como: interiorización de acciones en procesos y coordinación de acciones y procesos. Para cada una de las tareas analizadas en la unidad (P (31)) los podemos encontrar descritos detalladamente en la tabla 12, y los restante (82 tareas que se corresponden con la tipología definida en el análisis global de las tareas) en la tabla18.

En lo que respecta al tipo de **estrategias metodológicas** que implementa en el aula para que el alumno construya el conocimiento matemático, el profesor E plantea actividades que incluyen: exposición del profesor, resolución de ejercicios de aplicación, talleres individuales, trabajo en grupo pequeño, trabajo en grupo grande en donde se ponen en común las ideas, y donde el profesor aclara las dudas que puedan tener los estudiantes, ejercicios de lápiz y papel y la evaluación continua del tema desarrollado. Sin embargo, el análisis de la unidad didáctica nos ha permitido detectar que el tipo de actividades, el tipo de tareas, el tratamiento y la evaluación que hace de los contenidos se enmarcan en un modelo tradicional de la enseñanza y aprendizaje, aunque observamos algunos matices significativos, más centrados en la evaluación; la cual asume como un proceso formativo y continuo. Al igual que resaltamos los diferentes tipos de evaluación que dice implementar -autoevaluación, coevaluación y heteroevaluación, que de alguna manera asignan un papel importante al alumnado dentro del proceso de enseñanza y aprendizaje.

En general, podemos concluir, que la actividad matemática que el profesor E implementa en el aula está caracterizada por los siguientes elementos, que se encuentran resumidos en la tabla 14:

Tabla 12. ANÁLISIS DE TAREAS DE LA UNIDAD DIDÁCTICA DEL PROFESOR E

Tipo de problema	Profesor	Problema			Representaciones			Técnica	Conocimientos involucrados	Procesos cognitivos	Recursos (Tecnología)
		Enunciado	Fenomenología	Contexto	Representaciones	Traducciones	Relación entre f(x) y f'(x)				
P (31)	E	1. Verifica todos los valores que satisfacen el teorema del valor medio para las funciones e intervalos dados. a) $g(t) = t^3 - 4t$; $[-1,2]$ b) $f(t) = t^3 + 3t^2 + 3t$; $[1,2]$ c) $h(z) = \frac{z-1}{z+1}$; $[0,3]$ d) $r(s) = \frac{2s+3}{3s-2}$; $[1,4]$ e) $p(r) = \sqrt{r^2+81}$; $[12,40]$	Matemática	Algebraico	ES f(x) ES f'(x)	ES f(x) → ES f(x)-f'()	ES f(x)⇒ES f'(x) ES f(x) → ES f(x)-f'()⇒ ES f'(x)f'() (II.4.2.)	Reglas de derivación	Función, tasa media de variación, derivada en un punto, función derivada, teorema del valor medio e intervalo	• Desencapsulación del objeto tasa media de variación de una función en el proceso para calcularla a partir de la ES. • Coordinación del proceso de calcular la tasa media de variación y el proceso de calcular la derivada en un punto para aplicar el teorema del valor medio. • Desencapsulación del objeto teorema del valor medio en el proceso de calcular la tasa media de variación y coordinarla con el proceso de calcular la función derivada.	No

Tabla 13. Análisis de las traducciones y relaciones entre representaciones de f (x) y f '(x) en las tareas propuestas en la ***unidad didáctica*** diseñada por **EL PROFESOR E.**
(Se tiene en cuenta sólo la representación inicial y la representación final utilizada)

de → a	**Expresión simbólica f '(x)**	**Gráfica f '(x)**	**Tabla f '(x)**	**Descripción verbal de la situación (en términos de f '(x))**	**Expresión simbólica f (x)**	**Gráfica f (x)**	**Tabla f (x)**	**Descripción verbal de la situación (en términos de f (x))**
Expresión simbólica f (x)	62				18			
Gráfica f (x)								
Tabla f (x)								
Descripción verbal de la situación (en términos de f (x))	7							
Expresión simbólica f '(x)								
Gráfica f '(x)								
Tabla f '(x)								
Descripción verbal de la situación (en términos de f '(x))								

TOTAL DE TAREAS PROPUESTAS EN LA UNIDAD DIDÁCTICA	87

1. En términos generales no hay un tratamiento histórico de los fenómenos que dieron origen a la construcción del concepto: cálculo de la pendiente de la recta tangente y de la velocidad instantánea; es decir que se plantean tareas donde estos fenómenos que organizan el concepto aparecen reducidos a la aplicación de técnicas de cálculo de los macro objetos f ’(a) y f ’(x) en la propia matemática o en la física; y no aparecen tareas en donde los macro objetos f ’(a) y f ’(x) realmente ayuden a la modelización de fenómenos de otras ciencias.
2. La exposición del profesor y la resolución de ejercicios tipo es la base para la introducción y desarrollo de los conceptos. Estos ejercicios se caracterizan por estar enunciados en su mayoría en un contexto algebraico (80 de 87 tareas) y aisladamente encontramos 7 tareas enunciadas en un contexto verbal, que se tienen en cuenta en la evaluación.
3. En las tareas se privilegian traducciones entre representaciones del macro objeto f (x) y aparece una tarea que requiere traducciones entre representaciones del macro objeto f ’(x); al igual, se privilegian relaciones entre representaciones de f (x) a f ’(x), enfatizando en la relación de ES f (x)⇨ES f ’(x), y no se proponen tareas que requieran para su resolución hacer relaciones entre representaciones de los macro objetos f ’(x) a f (x).
4. Se fomenta el tratamiento de técnicas de derivación directas (definición en término de límite) e indirectas (reglas de derivación) para el cálculo del macro objeto f ’(x); y no aparecen en la unidad didáctica el tratamiento de técnicas directas de derivación gráfica para el cálculo de los macro objeto f ’(a) y f ’(x). Además, no hay un tratamiento de técnicas directas ni indirectas de cálculo del macro objeto f ’(a), y éstas quedan reducidas a la sustitución de la variable $x = a$ en la expresión simbólica de f ’(x) encontrada por la aplicación de las técnicas de derivación I o II.
5. Las tareas requieren la coordinación de varios objetos matemáticos para su resolución, tales como: pendiente de la recta, velocidad media, tasa media de variación, pendiente de la recta tangente, velocidad instantánea y tasa instantánea de variación. El tipo de tareas centradas en la comprensión de la dimensión algebraica de los macro objetos f ’(a) y f ’(x) permiten el surgimiento y la activación de los siguientes procesos cognitivos: interiorización de acciones y coordinación de acciones y proceso que pueden hacer emerger una perspectiva proceso de los macro objetos f (x), f ’(a) y f ’(x).

6. La organización, jerarquización y cantidad de las tareas centradas en los procesos algebraicos pueden privilegiar la emergencia de algunos procesos cognitivos (interiorización de acciones en procesos y la coordinación de acciones y procesos) y no ayudar a emerger otros procesos cognitivos complejos (encapsulación de procesos en objetos o viceversa, generalización, síntesis de objetos en esquemas) que requieren de tareas que involucren una variedad de traducciones y relaciones entre representaciones, una riqueza en el estudio de los fenómenos que organizan y una variedad de contextos de los macro objetos f (x), f '(a) y f '(x). Lo anterior, puede dificultar la construcción, por parte de los estudiantes, de los macro objetos f '(a) como el resultado de la coordinación de los tres objetos O_1, O_2 y O_3; y la construcción del macro objeto f '(x) como resultado del proceso de síntesis del macro objeto f '(a).
7. La tipología de tareas propuestas en la evaluación en su totalidad forman parte de la actividad matemática que el profesor E propone en la unidad didáctica. En efecto, en la unidad didáctica se incluyen otros tipos de tareas que no fueron evaluadas.
8. Entre las tareas que no fueron evaluadas, la tipo P (31) incluye el tratamiento del teorema del valor medio. Si bien es cierto que en la unidad didáctica se desarrolla este contenido, consideramos que el tratamiento algebraico que da al teorema y la ausencia de una demostración intuitiva gráfica y numérica del mismo, que ayude a la comprensión de las relaciones entre los objetos pendiente de la recta tangente, pendiente de la recta secante y el macro objeto f '(a), no justifican la incorporación de este contenido matemático en este nivel de escolaridad, sino que por el contrario, el hecho de no haber tratado previamente ni la notación que usa ni las técnicas que han de aplicar para calcular el valor de la tasa media de variación, puede dificultar la comprensión de los objetos inmersos.
9. Al igual que en la evaluación, ninguna de las tareas propuestas en la unidad didáctica requiere del manejo y aplicación de algún software específico u otras herramientas tecnológicas.

<table>
<tr><td rowspan="11">Forma / Contenido
SINTAXIS/SEMÁNTICA</td><td>¿Cuál es la secuencia de los contenidos?</td><td colspan="4">▪ Introducción - concepto
▪ Incremento de una función (absoluto y relativo)
▪ Derivada de una función - Regla de los cinco pasos
▪ Interpretación geométrica de la derivada
▪ Álgebra de derivadas – teoremas sobre la derivada
▪ Regla de la cadena - derivación implícita
▪ Derivación implícita
▪ Derivada del algunas funciones trigonométricas
▪ Aplicación de la derivada
▪ Teorema del valor medio
▪ Aplicaciones de la derivada</td></tr>
<tr><td rowspan="2">¿A partir de qué introduce el concepto?</td><td>Definición</td><td>Ejercicio tipo</td><td>Situación real</td><td>Historia de la ciencia</td></tr>
<tr><td>(X)</td><td>(X)</td><td>( )</td><td>( )</td></tr>
<tr><td>¿Qué tipo de actividades presenta?</td><td colspan="4">▪ Introducción - motivación
▪ Exposición del profesor para introducir la definición de los conceptos.
▪ Resolución de ejercicios de aplicación: individual y en grupo
▪ Resolución de ejercicios de afianzamiento
▪ Puesta en común de los procesos de resolución e intervención del profesor para aclarar dudas.</td></tr>
<tr><td>¿Qué tipo de ejercicios y/o problemas?</td><td colspan="4">Problemas rutinarios enunciados en su mayoría en un contexto algebraico</td></tr>
<tr><td>¿Qué procesos cognitivos emergen de la actividad matemática?</td><td colspan="4">Interiorización de acciones en procesos y coordinación acciones y procesos</td></tr>
<tr><td rowspan="2">¿Qué perspectivas del concepto se propician en las actividades?</td><td>Acción</td><td>Proceso</td><td>Objeto</td><td>Esquema</td></tr>
<tr><td>( )</td><td>(X)</td><td>( )</td><td>( )</td></tr>
<tr><td>¿Cuál es el uso que hace de la historia de la ciencia?</td><td colspan="4">La usa, de forma anecdótica, para motivar la introducción del concepto, y no se manejan los problemas históricos y los aspectos fenomenológicos que dieron origen a la construcción del concepto, sino que aparecen como ejercicios de aplicación.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Traducciones y relaciones entre representaciones</td><td>¿Qué papel se le otorga a las traducciones y relaciones entre representaciones en el planteamiento de tareas?</td><td colspan="4">No hay variedad en el uso de los sistemas de representaciones y, por tanto, en las traducciones y relaciones entre representaciones de f (x) y f '(x), que ayuden a una mejor comprensión de los macro objetos f (x), f'(a) y f'(x)</td></tr>
<tr><td>¿Qué traducciones entre representaciones semióticas se utilizan?</td><td colspan="4">▪ ES f (x) →ES f (x)
▪ ES f (x)→G f (x)
▪ DV f (x)→ ES f (x)
▪ Una sola tarea la podría requerir de ES f'(x)→ES f'(x)</td></tr>
<tr><td>¿Qué relaciones entre representaciones semióticas se utilizan?</td><td colspan="4">▪ Mayor énfasis a la relación de ES f (x)⇨ES f '(x) con 78 tareas
▪ Seguidos de: DV f (x)⇨ES f '(x) con 9 tareas
▪ No hay tareas que requieran hacer relaciones de f '(x) a f (x)</td></tr>
</table>

Tabla 14. Aspectos de la derivada como objeto de enseñanza y aprendizaje analizados en la unidad didáctica elaborada por el profesor E

5.2.3. A manera de conclusión: integración entre las componentes del CPP.

El análisis de las formas de conocer que tiene el profesor E de la derivada, como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje, nos permite caracterizar algunos rasgos de la práctica profesional que genera en el aula (Llinares, 1996). En términos generales, nos encontramos con un profesor con inconsistencias e incoherencias en el manejo de los objetos matemáticos clave para la relación y comprensión de los macro objetos f (x), f ’(a) y f ’(x), tanto cuando se enfrenta a la resolución de tareas matemáticas como cuando propone, diseña y justifica tareas matemáticas (en la unidad didáctica y en la evaluación). Igualmente, su discurso, con relación a la derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje, ha sido ambiguo y evasivo en algunos momentos de las entrevistas que justifican su práctica. Esta ambigüedad y evasiva en el discurso, nos ha llevado a detectar algunas inconsistencias, en la definición de los macro objetos f ’(a) y f ’(x) que el profesor E propone en la unidad didáctica, que pueden hacer emerger potencialmente inconsistencias en los estudiantes en la comprensión de los macro objetos f ’(a) y f ’(x), que hemos intentado describir e interpretar teniendo en cuenta la triangulación de la información que nos proporciona el análisis de las dos componentes del conocimiento profesional del profesor que hemos considerado en este estudio.

Al igual que con el profesor B, para el análisis de la componente didáctica del contenido focalizamos la atención en tres aspectos: la programación, la unidad didáctica y la evaluación. La triangulación de la información que nos proporciona el análisis de las tres fuentes anteriores, nos permite inferir los siguientes elementos sobre la forma de conocer que tiene el profesor E de la derivada como objeto de enseñanza y aprendizaje:

1. Inicialmente, con el análisis de la programación, inferimos que el profesor E opta por un itinerario didáctico tradicional para la enseñanza de la derivada caracterizado por la introducción del concepto límite previo a la enseñanza de la derivada. Pero a diferencia de los profesores A y B, al analizar la unidad didáctica que nos proporcionó este profesor, detectamos que el itinerario que propone no se inicia con el estudio de la velocidad instantánea y la pendiente de la recta tangente en un punto, sino que muy por el contrario introduce directamente la definición formal del macro objeto f ’(x) en términos de límite y, posteriormente, muy superficialmente aparece la definición del macro objeto f ’(a).
2. La exposición del profesor y la resolución de ejercicios tipo es la base para la introducción y desarrollo de los conceptos. Estos ejercicios se caracterizan por estar enunciados en su mayoría en un contexto algebraico y aisladamente aparecen tareas

enunciadas en un contexto verbal; además, no hay tareas enunciadas en contexto gráfico. Por otra parte, el tratamiento de los contenidos, el tipo de actividades y las tareas propuestas en la unidad didáctica y en la evaluación fomentan el aprendizaje memorístico de conceptos y procedimientos acordes con un modelo de enseñanza y aprendizaje tradicional.

3. Las tareas propuestas en las evaluaciones y en la unidad didáctica, no reflejan una buena comprensión y relación de los macro objetos f (x), f '(a) y f '(x) por parte del profesor E; en efecto, son tareas que en su mayoría se encuentran enunciadas en un contexto algebraico y se centran en el tratamiento y evaluación de los procesos algebraicos y de las técnicas de derivación; no se manejan en ellas una variedad de representaciones, traducciones y relaciones entre representaciones que para su resolución requieran de la comprensión de los macro objetos f '(a) y f '(x) en las dos dimensiones del esquema definido, sino que para su resolución basta con la aplicación no justificada de las técnicas de derivación directa (definición en términos del límite del cociente incremental) e indirecta (reglas de derivación). De allí que consideremos que son tareas que permiten emerger una perspectiva proceso de los macro objetos f '(a) y f '(x) centrada en la manipulación de procesos algebraicos, las cuales hacen activar procesos cognitivos como la interiorización de acciones en procesos y la coordinación de acciones y procesos.

Si partimos de la organización que hace de los contenidos en la unidad didáctica sin detenernos en el análisis de las definiciones que presenta de los macro objetos f '(a) y f '(x), encontramos que el profesor E apuesta primero por introducir el macro objeto f '(x) y luego el macro objeto f '(a). La definición del macro objeto f '(x) la hace en términos del límite del cociente incremental; y, simultáneamente sin justificación y coordinación alguna, introduce la notación incremental y la notación diferencial. Este abuso en la utilización no justificada de las diferentes notaciones suponemos que se debe al énfasis que hace en los aspectos formales al definir el macro objeto f '(x), dejando en un segundo plano a la semántica asociada al mismo. Inferimos entonces, que para este profesor, al igual que para el profesor C, lo importante para alcanzar el dominio de un concepto matemático es la rigurosidad en la formalización de los términos y el manejo de los signos asociados, y no el significado y comprensión de los mismos, contrario a la que reportan las investigaciones en didáctica de las matemáticas

(Azcárate, 1990; Orton y Tall 1986; Tall, 1985; Azcárate *et al.,* 1996; Dubinsky *et al*., 1995; Font, 2000; Inglada y Font, 2002, entre otros).

Posterior a la introducción del macro objeto f ’(x) define el macro objeto f ’(a) sin otorgarle la importancia que a nuestra manera de ver merece. Consideramos que tanto la notación que usa en la definición del macro objeto f ’(a) como el tratamiento que da al uso de este macro objeto para justificar la solución de una tipología de problemas (calculo de la ecuación de la recta tangente y de la recta normal), conlleva a dos errores: (1) el definir el macro objeto derivada en un punto como el macro objeto función derivada, es decir, como el límite del cociente incremental de la función en todos los puntos del dominio, que implica el error de dar un tratamiento funcional al macro objeto f ’(a) que es un número; y (2), despojar al macro objeto f ’(a) de su significado – pendiente de la recta tangente, promoviendo un significado erróneo como es el considerarlo o reducirlo a la ecuación de la recta tangente. Por tanto, el tratamiento de los macro objetos f ’(a) y f ’(x) puede generar en los estudiantes confusiones en la comprensión de los mismos y fomenta que las técnicas de cálculo del macro objeto f ’(a) queden reducidas a una simple sustitución de variables $x = a$ en la expresión obtenida de f ’(x) por la aplicación de cualquier técnica algebraica de cálculo de f ’(x).

Si tenemos en cuenta la gran complejidad semiótica que representa el paso del macro objeto f ’(a) al macro objeto f ’(x) y lo poco que se ha tenido en cuenta en los libros de texto (Inglada y Font, 2002), podemos inferir del análisis de las definiciones que usa el profesor E de estos macro objetos, las cuales las toma del libro de texto, que no intuye la complejidad semiótica que involucra el paso del macro objeto f ’(a) al macro objeto f ’(x), o viceversa; o bien si la intuye no le da la suficiente importancia al organizar la enseñanza de los mismos. En efecto, en la entrevista sobre la enseñanza de este concepto, el profesor E, al indagar sobre las ventajas y desventajas que tiene el uso de algunas definiciones que escogimos de varios libros de texto que se utilizan en Colombia, no explicita la complejidad semiótica que hay en estas definiciones y la problemática del uso excesivo y no justificado de las notaciones de incrementos y la de los diferenciales; muy por el contrario, realza que es preciso y necesario; además considera que permiten un acercamiento intuitivo a los macro objetos f ’(a) y f ’(x).

“**Yo creo que el concepto de derivada aquí es claro, es preciso, porque nos muestra una función incrementada, una función original y nos muestra la tendencia del incremento de la variable dependiente y que esto de manera intuitiva el estudiante lo trae, porque cuando le enseñamos la parte de límite que es la básica que es la más fregada de ellas, ya esto lo hemos metido en los estudiantes, entonces ya tiene un concepto previo de la derivada que es importantísimo**. Creo que las tres definiciones enmarcan un concepto claro de lo que es la derivada, lo dicen en diferentes palabras pero es lo mismo, me parece que hay es un cambio de nomenclatura nada más en algunos aspectos.

E: ¿Pero cuál utilizas tú en el aula?

R/: Yo utilizo el concepto este, **me gusta utilizar el que tiene el Δx, la tercera, pero claro algunas veces he utilizado el h también, porque claro yo trabajo por procesos y si el estudiante investiga una definición en un libro de texto que la definen con h, yo tengo que adaptarme al estudiante y si otro con Δx, entonces yo me adapto al estudiante y trataré de abarcarlo todo, es decir me es independiente el Δx que el h, lo que trato es de centrarme en lo que el alumno quiere**.”

El análisis de las formas de conocer la derivada como objeto matemático que tiene el profesor E, muestra que este profesor tiene un nivel de comprensión del esquema de la derivada intra algebraico-intra gráfico caracterizada por una perspectiva proceso de los macro objeto f (x), f ’(a) y f ’(x). El profesor E, a través de la resolución de los problemas presentados en el cuestionario y en la entrevista con viñetas, evidencia dificultades en la coordinación y relación gráfica de los macro objetos f ’(a) y f ’(x), como elemento y clase; lo cual implica, dificultades en la coordinación gráfica de los objetos pendiente de la recta tangente, tasa instantánea de variación, y razón de cambio ($\underset{\Delta t \to 0}{Lim} \frac{\Delta e}{\Delta t}$; $\underset{\Delta t \to 0}{Lim} \frac{\Delta mag}{\Delta t}$; $\underset{\Delta mag' \to 0}{Lím} \frac{\Delta mag}{\Delta mag'}$) que engloba el macro objeto f ’(a), y la ausencia del proceso de síntesis de los anteriores objetos en los objetos función pendiente de la recta tangente, función tasa instantánea de variación y función razón de cambio que engloba el macro objeto f ’(x).

Nos encontramos entonces, con un caso en el que el nivel de comprensión que tiene el profesor del esquema de la derivada queda reflejado en la planificación de la enseñanza de este objeto matemático en el nivel de secundaria. Lo cual implica, la posible reproducción de errores e inconsistencias que tiene el profesor E en la relación y comprensión de los macro objetos f ’(a) y f ’(x) en la planificación e implementación de la enseñanza del mismo. Concretamente, nos referiremos a varios aspectos detectados al analizar el esquema de la derivada de este profesor que consideramos se evidencian en el análisis de la programación, de la unidad didáctica y de la evaluación del concepto de derivada proporcionado por él:

1. El análisis de su respuesta a la paradoja de Zenón desvela inconsistencias en los conceptos matemáticos que maneja; más concretamente, exhibe una visión potencial del infinito que le lleva a reproducir los argumentos eleáticos en contra de la divisibilidad infinita del espacio, del tiempo y del movimiento. Lo anterior, es contradictorio con el hecho de que el profesor E conoce el valor histórico de la situación y las implicaciones que ha tenido en la evolución del cálculo infinitesimal y en la teoría de conjuntos; sin embargo, en su razonamiento, aunque relaciona explícitamente la situación con los conceptos de límite e infinito (curvas asintóticas), refleja grandes dificultades en la comprensión de estos conceptos que se convierten en obstáculos para la comprensión de los conceptos del cálculo diferencial (Azcárate *et al*., 1996). Dicho en otras palabras, el análisis de esta situación muestra las dificultades que tiene el profesor E para interpretar el fenómeno físico del cálculo de la velocidad instantánea (y los contenidos inmersos como son espacio y tiempo) con el modelo matemático de la derivada.
2. En las respuestas a los problemas que le planteamos, en el cuestionario y en la entrevista con viñetas, no existe una clara coordinación entre los macro objetos f ’(a) y f ’(x), lo cual implica dificultades en la coordinación de los objetos O_1, O_2 y O_3. Dado que los objetos O_1, O_2 y O_3 no están coordinados, no ha llegado a construir el macro objeto f ’(x) como síntesis de estos tres objetos, lo cual puede justificar la presencia de errores como, por ejemplo, confundir tanto la expresión simbólica de f ’(x) con la expresión simbólica de la recta tangente a la curva en un punto, o bien, confundir la gráfica de f ’(x) con la gráfica de la recta tangente a la curva en un punto. Este error de considerar que el estudio de la derivada de una función se limita al estudio de la recta tangente en sí misma, también lo encontramos potencialmente en la unidad didáctica cuando, al tratar la interpretación geométrica de la derivada, define el macro objeto f ’(a), con las inconsistencias ya descritas anteriormente, con el único objetivo, de proporcionar una técnica para la resolución de problemas que involucran el cálculo de la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de la curva en un punto del dominio de la función. Esta técnica consiste en: (1) encontrar el valor de la pendiente de la recta tangente mediante la sustitución de $x = a$ en la definición del macro objeto f ’(x); y (2), calcular las ecuaciones de la recta tangente y normal aplicando la ecuación punto pendiente $y - y_o = m (x - x_o)$.

3. La no coordinación y relación que tiene el profesor E de los macro objetos f '(a) y f '(x) se ve reflejada en las definiciones que propone de estos macro objetos al trasponerlos en la unidad didáctica, las cuales son sacadas directamente del libro de texto que sigue linealmente. En efecto, las definiciones que propone para estos macro objetos en la unidad didáctica ponen en evidencia confusiones entre los macro objeto f '(a) y f '(x), como ya hemos explicado anteriormente, originadas por la notación incremental que usa para definirlas.
4. De acuerdo con lo anteriormente expuesto, del análisis de las tareas que diseña el profesor E, concluimos que el nivel de comprensión intra algebraico-intra gráfico del esquema de la derivada que tiene, se ve también reflejado en el diseño de las tareas que conforman la unidad didáctica y la evaluación del concepto de derivada. En efecto, las tareas se encuentran enunciadas en un contexto algebraico que favorece en su mayoría sólo la aplicación acrítica de las técnicas de derivación directa (reglas de derivación). Igualmente, en las evaluaciones no se contempla como relevante la dimensión gráfica del esquema de la derivada para analizar la comprensión que tienen los estudiantes de este concepto, puesto que no encontramos ninguna tarea que requiera para su resolución de la interpretación gráfica de los macro objetos f (x), f '(a) y f '(x).

Teniendo en cuenta todo lo anteriormente descrito, podemos concluir que las dificultades que tiene el profesor E en la comprensión de los macro objetos f '(a) y f '(x) le limitan a: (1) reflexionar y darse cuenta de los errores conceptuales e inconsistencias matemáticas que tienen las definiciones de los macro objetos f '(a) y f '(x) presentes en el libro de texto, que son las que propone en su unidad didáctica; (2) reflexionar sobre la incorporación y el tratamiento de contenidos sin justificación alguna, como por ejemplo el teorema del valor medio; y (3), reflexionar sobre la complejidad semiótica y conceptual que implica el paso del macro objeto f '(a) al macro objeto f '(x), o *viceversa*, y proponer tareas potentes que ayuden a los estudiantes a dar este salto cualitativo; o bien, si se da cuenta creemos que no le da la suficiente importancia, que en nuestra opinión merece, puesto que no tiene los conocimientos suficientes que le permitan tomar decisiones y gestionar el cambio.

Igualmente, nos lleva a suponer que la coherencia entre, por un lado, la comprensión de los macro objetos f '(a) y f '(x) que tiene el profesor E y, por otro lado, la presencia de inconsistencias en la enseñanza de los mismos, se puede explicar, en el caso del profesor E, en términos de que las dificultades que tiene en el dominio y comprensión del conocimiento disciplinar, las exigencias propias del currículo de secundaria y la forma cómo ha sido formado en esta áreas del conocimiento matemática y física), en donde no se le da importancia al proceso de síntesis del macro objeto f '(a) en el macro objeto f '(x), actúan como restricciones institucionales que influyen y se reflejan a la hora de diseñar e implementar la enseñanza de estos macro objetos.

Finalmente, el tratamiento que da a la regla de la cadena muestra que la introducción de la notación incremental al definir los macro objetos f '(x) y f '(a) no se hace como medio para justificar y facilitar el uso de la notación diferencial al definir la derivada de la composición de funciones. Por tanto, podemos inferir, al igual que el profesor B, que el uso de la notación incremental puede obedecer más a los siguientes factores: (1) la tradición histórica de utilizar los incrementos por influencia de la física; y (2), la importancia que se le otorga al libro de texto como único referente para la transposición acrítica de los conceptos a enseñar. En este caso, justificadas por las dificultades que tiene este profesor en la comprensión y relación de los macro objetos f (x), f '(a) y f '(x) (nivel intra algebraico-intra gráfico del esquema de la derivada).

Lo que quedaría por estudiar, con relación a la gestión de la enseñanza de estos macro objetos, es si cuando el profesor E implementa y desarrolla la unidad didáctica hace las distinciones entre estos macro objetos y no reproduce los errores del libro de texto, debido a que su discurso sobre la práctica que genera en el aula, a lo largo de las entrevistas, es coherente con los resultados de los instrumentos analizados en este estudio.

5.3. ANÁLISIS GLOBAL DE LOS CASOS

5.3.0. A manera de introducción

En este apartado presentaremos la integración del análisis de los casos descritos en las dos secciones anteriores y en los anexos 11, 12 y 13 para brindar una panorámica general de las formas de conocer el objeto matemático derivada que tienen los profesores que participaron en este estudio y para incorporar los elementos más significativos del concepto de derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en la revisión de la descomposición genética inicial que hicimos del mismo. Esta sección consta de tres apartados, el primer apartado se centra en el análisis global del conocimiento disciplinar; en el segundo apartado se presenta un análisis global del conocimiento didáctico del contenido derivada; y, finalmente, teniendo como punto de partida los aportes de los dos análisis anteriores hacemos una revisión de la descomposición genética. En los resultados de este análisis global ya se esbozan y se sugieren algunas de las conclusiones finales de este estudio.

5.3.1. ANÁLISIS GLOBAL DEL CONOCIMIENTO DISCIPLINAR DE LOS PROFESORES: la derivada como objeto matemático

Para el análisis global del conocimiento profesional de los profesores tendremos en cuenta los resultados que arroja el análisis particular de cada una de las categorías que definimos para la componente disciplinar, como son: los conceptos estructurantes, la relación entre los objetos pendiente de la recta tangente y razón de cambio en la construcción del macro objeto f ’(a), y la relación (tanto gráfica como algebraica) entre los macro objetos f ’(a) y f ’(x). Inicialmente, haremos una descripción general del nivel de comprensión del esquema de la derivada que tienen los profesores de este estudio; posteriormente, nos centraremos en la descripción particular de cada una de las categorías anteriormente definidas; y finalmente, revisaremos a la luz de los resultados obtenidos, la descomposición genética inicial del concepto de derivada que construimos (4.1.2.1.).

Con este análisis perseguimos dos objetivos: en primer lugar, tener una visión global de la comprensión que tienen los profesores, intentando destacar similitudes y diferencias tanto en sus niveles de compresión como en los procesos de razonamiento que emplean; y en segundo lugar, recoger elementos conceptuales que aparecen en sus respuestas a las problemas planteados que nos ayuden a hacer una revisión de la descomposición genética inicial que realizamos del concepto de derivada, es decir, que dé luz sobre la epistemología y la didáctica asociada al concepto de derivada.

El análisis particular de los cinco casos nos permite ver una pluralidad en los niveles de comprensión que tienen los profesores que participaron en este estudio sobre el concepto de derivada, tal y como se ilustra en la tabla 15. Así, encontramos dos profesores que tienen un nivel intra algebraico-intra gráfico (*intra-intra*), caracterizado por tener una perspectiva proceso de los macro objetos f (x), f ’(a) y f ’(x), que no son coordinados en la resolución de problemas rutinarios y no rutinarios enunciados en diferentes contextos. Esta perspectiva proceso de los macro objetos f ’(a) y f ’(x), está determinada a su vez, por la no coordinación interna de los objetos O_1, O_2 y O_3 que engloba el macro objeto f ’(a); y por no llegar al proceso de síntesis de estos tres objetos O_1, O_2 y O_3 en los objetos O'_1, O'_2 y O'_3 que engloba el macro objeto f ’(x). Igualmente, en los procesos de resolución de problemas que involucran los objetos anteriores, los procesos cognitivos que activan estos profesores son la coordinación de acciones externas y de procesos, y la interiorización de estas acciones en procesos. Creemos conveniente decir, que, si bien es cierto que a los profesores A y E los hemos ubicado en este mismo nivel de comprensión, en el análisis particular de cada uno de los casos se describen sutiles diferencias en los procesos de resolución de los problemas (para una mayor profundización ver anexo 11 y sección 5.2.1); pero encontramos en sus esquemas dificultades y errores comunes, tales como reducir el macro objeto f ’(x) al macro objeto f ’(a), e incluso confundir la expresión simbólica de f ’(x) con la expresión simbólica de la recta tangente a la curva en un punto, o bien, la gráfica de f ’(x) con la gráfica de la recta tangente a la curva en un punto.

A continuación citaremos textualmente algunos fragmentos de las entrevistas donde el profesor A justifica las respuestas dadas a los problemas planteados, que fueron significativos para definir el nivel de comprensión del esquema de la derivada anteriormente descrito, "**Problema 4-C**: a) Algunos alumnos dirán que los coches A y B se interceptarán en el punto P, pero otros analizarán más y observarán que la trayectoria del coche B es diferente de la del coche A, **porque la trayectoria del coche A es curva y la del coche B es recta**.

Problema 1-C: Calculo la pendiente de la recta L, luego la ecuación. **Obtenida la ecuación calcula f (5) en la ecuación que debe darle 3** (...) Bueno yo creo que el alumno lo realizaría así, **porque con el proceso comprobaría que f (5) le debe dar 3, tal y como se ve en el gráfico**.

Problema 2-C: Los alumnos argumentarían que **ninguna función será la derivada de la otra, porque ninguna de ellas es tangente a la otra en un punto (x, y)**. (...) Por la gráfica, no sé si me suspenderán *(risas y silencio de 10 segundos)*, (...) mirándolo por la parte de los estudiantes no, que... eh... creo que contestarían que ninguna es la derivada de la otra, **porque no hay tangentes**...

Problema IV-v: Tendría que hacer un manejo gráfico verdad, tendría que hacer un manejo gráfico y de pronto aquí estoy cayendo un poco en por qué a lo mejor contesté el punto 2 del examen que me diste que elaboró el profesor de España, de pronto erróneamente, porque **aquí uno no ve que esto sea *(toma el instrumento examen y señala el gráfico del punto 2-C)*... eh... tangente en algún punto de acá, pero mirando la derivada de esta que es esta *(señala ahora las gráfica 1 y la I de la viñeta)* sí es posible que una curva sea la derivada de la otra**, entonces posiblemente tenga un error en el, en el procedimiento que hice en el punto 2 del examen... ¡Pero claro! **Yo me imagino que los estudiantes van a contestar así, que como es una curva con otra curva no hay tangente. Pero sí es posible**... Sí, si se maneja el modelo ¿no? **Quiero aclarar que aquí de pronto estoy muy sesgado a ver el modelo matemático para poder trabajar con esto y de pronto mirar otra forma... gráfica sería**. Pero me parece que...

Problema II-v: Si f (x) es la función x^2, la derivada 2x representa la recta tangente a la curva f (x) = x^2 en un punto (x, y)**, o sea la ecuación 2x viene a representar el modelo matemático de la recta tangente a la función f (x) = x^2 en un punto (x, y).**"

Nivel del esquema *algebraico* / Nivel del esquema *gráfico*	**INTRA**	**INTER**	**TRANS**
INTRA	**A, E**	**C**	**?**
INTER			**D**
TRANS		**?**	**B**

Tabla 15. Análisis general de los niveles de comprensión del concepto de derivada que exhiben los profesores.

Encontramos un solo profesor en el nivel de comprensión inter algebraico-intra gráfico (*inter-intra*). El nivel inter-intra que tiene el profesor C, está caracterizado por una perspectiva proceso de los macro objetos f '(a) y f '(x) que, dependiendo del contexto de la situación, son coordinados en la resolución de problemas rutinarios y no rutinarios. Esta perspectiva proceso de los macro objetos f '(a) y f '(x), está determinada a su vez dependiendo del contexto de la situación, por la coordinación interna de los objetos O_1, O_2 y O_3 que engloba el macro objeto f '(a); y, dependiendo del contexto del problema, se da el proceso de síntesis de estos tres objetos O_1, O_2 y O_3 en los objetos O'_1, O'_2 y O'_3 que engloba el macro objeto f '(x). Igualmente, los procesos cognitivos que activa el profesor C en la resolución de problemas relacionados con el concepto de derivada son la coordinación de acciones y procesos, la interiorización de estas acciones en procesos; y sólo podríamos hablar de los procesos cognitivos de encapsulación de procesos en objetos y desencapsulación de objetos en procesos con relación a la diferenciación de funciones (esquema algebraico), puesto que encontramos que el profesor C hace un uso justificado de las técnicas de derivación.

A continuación citaremos textualmente algunos fragmentos de las entrevistas donde el profesor C justifica las respuestas dadas a los problemas planteados, que fueron significativos para definir el nivel de comprensión del esquema de la derivada anteriormente descrito,

> "**Problema 4-C:** c) **En los puntos donde se intersecan las gráficas, son las velocidades instantáneas iguales, ese instante los dos coches se encontrarán**.
> d) **En el momento en el cual la gráfica de A está por encima de la de B y la pendiente en esos intervalos será mayor.** Se debe analizar la gráfica y también manejar el concepto de derivada o de la pendiente...
>
> **Problema 1-C***:* Por definición **la pendiente de la recta tangente a la función es igual a la derivada de ese valor** (de la abscisa), es decir: f '(5) = pendiente = m= $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3-1}{5-0} = \frac{2}{5}$.
>
> **Problema 2-C**: Yo escogería la I, bueno de todas maneras, **si esta es la función *(señala la gráfica 1 de la figura),* esta es la función f (x), vamos a suponer que es una función elevada a la *n,* la derivada me daría elevada a la *n - 1,* esta para mí podría ser una función cúbica, y entonces la derivada tendría que representar a una cuadrática, que es la I, y por eso escojo la I**
> ***E: ¿Tienes alguna otra argumentación que dar o crees que con esta es suficiente?***
> Bueno, no, yo en este caso la entiendo así.

Problema II-v: Bueno en esta pregunta, estamos diciendo **que la función esta f (x) que es x^2, cuya derivada es 2x por las reglas de derivación sé que es así**, entonces... estamos planteando aquí que... al final esta f (x) es una curva ¿verdad? Y ésta *(señalando a la función y = 2x)* viene siendo **la ecuación que va en un momento determinado, nos da el valor de la pendiente de la recta tangente... en un punto x o x_0, que va a tocar a la gráfica de la función f (x), en un punto... si en un punto, donde existe una variación de la función.**

Problema III-v: Sí, si... habría que utilizar el logaritmo... Bueno **aquí uno debe utilizar el concepto de logaritmo para, sí para obviamente tratar de que la variable x, que está como un exponencial baje, y después entonces a través de las tablas, o sea manejo de tablas o calculadora puede conseguirse unos valores posibles de ellos**... Es decir, creo que estoy enredando el asunto, más bien podría hacerlo más sencillo **utilizando las reglas de derivación y la evaluaría en 2. Es decir, 4^2. Ln 4**."

En el nivel de comprensión trans algebraico-inter gráfico tenemos al profesor D (*trans-inter*). Este nivel está caracterizado por tener una perspectiva objeto de los macro objetos f '(a) y f '(x), que son coordinados en la resolución de problemas rutinarios y no rutinarios, pero dependiendo del contexto en que son enunciados. Esta perspectiva objeto de los macro objetos f '(a) y f '(x), está determinada a su vez, por la coordinación interna de los objetos O_1, O_2 y O_3 que engloba el macro objeto f '(a); y por el proceso de síntesis de estos tres objetos O_1, O_2 y O_3 en los objetos O'_1, O'_2 y O'_3 que engloba el macro objeto f '(x). Igualmente, encontramos que el profesor D en los procesos de resolución de los problemas planteados activa, dependiendo del contexto de la situación, una serie de procesos cognitivos complejos como son interiorización de acciones en procesos, encapsulación de procesos en objetos y desencapsulación de objetos en procesos, síntesis de procesos en esquemas y coordinación de acciones y procesos. Un aspecto clave, para haber ubicado el esquema del profesor D en el nivel inter gráfico está en las dificultades que hemos detectado en la comprensión gráfica de las funciones acumulativas y algunas contradicciones entre los razonamientos algebraicos y gráficos aplicados al objeto tasa media de variación (simultáneamente usaba argumentos del cálculo diferencial y del cálculo integral).

Ilustraremos con algunas citas, las inferencias hechas en el párrafo anterior,

"**Problema 3-C**: a) $\sum_{t=1}^{24} Q(t) = Q(t_1) + Q(t_2) + ... + Q(t_n)$

b) Q (20) = 15 y Q (24) = 20

$$Q(20)\cdot[24-20]+\frac{[Q(24)-Q(20)]\cdot(24-20)}{2}$$

$$15\cdot[4]+\frac{[20-25]\cdot(4)}{2}=60 - 10 = 50$$

c) Q (9) = 4 y Q (14) = 12, **pero la inclinación de la recta tangente a la curva en 9 es mayor que la inclinación en 14, por tanto el consumo en 9 es mayor que en 14**.
d) **En el tramo 8 $\rightarrow$ 12, se está consumiendo agua, porque el área bajo al curva es mayor que los otros tramos, y porque la pendiente de la recta tangente a la curva es mayor que en los otros tramos**. Por tanto, nos quiere indicar que allí hay mayor consumo de agua.

Problema 4-C: a) Los dos coches se **encuentran a igual distancia en ese instante**.
b) **El coche A tiene mayor velocidad que el coche B por tener mayor su pendiente que representa la velocidad y que no es más que la derivada en ese punto**.
c) **Sí,** donde las pendientes son iguales, es decir cuando la recta tangente a la curva que representa el movimiento del coche A sea paralela a la recta que representa el movimiento del coche B**.**

Problema 1-C: c) **f'(5)≈** $\frac{f(5+\Delta x)-f(5)}{\Delta x}$ **como Δx = 0,08$\Rightarrow$ f'(5)≈** $\frac{f(5+0.08)-f(5)}{0.08}$

$\Rightarrow \frac{2}{5}$ **(0, 08) ≈ f (5, 08)-3 $\Rightarrow$ f (5, 08) ≈ 3, 05. Sí el pues,** este 5, 08, pues como no tenemos una función definida, es decir como no tenemos la ecuación o la ley de esta función, pero sí nos ayuda un poco a observar que ese incremento relativo, se hace muy próximo a ese 5,08 y esto nos ayudaría a calcular la imagen de ese 5,08 a través de ese concepto de incremento relativo y nos daría un valor muy aproximado en el gráfico.

Problema 2-C: Si hay función derivada, porque al observar las gráficas**, los puntos críticos (máximos o mínimos) de una función f, corresponden a los ceros para la otra la función f '.** Además**, la función f es creciente de -∞ hasta –2, por tanto la función f ' toma en este intervalo valores positivos; de -2 a –0.5 f es decreciente y f ' toma valores negativos, etc. Además, de -2,5 a -1 f es cóncava hacia abajo y f ' es decreciente,** etc.

Problema II-v: "Pues aquí cuando estamos derivando la función y = x^2 **y su derivada es 2x, ésta es el comportamiento de la pendiente de la recta tangente con respecto a toda la curva en cualquier punto, es decir, que estamos hablando de otra función... de la función derivada... o sea que todas las tangentes en cada uno de los puntos de la función inicial, se comportarían con esta regla funcional (2x). Es decir que éste es el comportamiento general**."

Finalmente, el profesor B tiene un nivel de comprensión del esquema de la derivada trans algebraico-trans gráfico (*trans-trans*), caracterizado por tener una perspectiva objeto de los macro objetos f '(a) y f '(x), que son coordinados en la resolución de problemas rutinarios y no rutinarios enunciados en diferentes contextos. Esta perspectiva objeto de los macro objetos f '(a) y f '(x), está determinada a su vez por la coordinación interna de los objetos O_1, O_2 y O_3 que engloba el macro objeto f '(a); y por el proceso de síntesis de estos tres objetos O_1, O_2 y O_3 en los objetos O'_1, O'_2 y O'_3 que engloba el macro objeto f '(x). Igualmente, encontramos que el profesor B en los procesos de resolución de los problemas planteados activa una serie de procesos cognitivos complejos como son: interiorización de acciones en procesos, encapsulación de procesos en objetos y desencapsulación de objetos en procesos, síntesis de procesos en esquemas y coordinación de acciones y procesos.

Los datos empíricos que hemos encontrado a partir del estudio de los cinco casos nos confirman el carácter provisional de las categorías teóricas que propusimos al definir los niveles de la doble triada algebraica-gráfica del esquema de la derivada. Ahora, con los datos empíricos analizados, podemos concluir que: (1) al haber considerado un número reducido de profesores, sólo hemos encontrado algunos de los niveles definidos; y (2), la riqueza de los resultados nos lleva a validar algunas de las categorías teóricas de los niveles de la doble triada, tales como, intra-intra (profesores A y E), inter-intra (profesor C), trans-inter (profesor D), y trans-trans (profesor B); y a cuestionar la viabilidad de otras categorías, tal y como lo hicimos en el apartado teórico (ver 4.1.2.2.); entre éstas tenemos el nivel intra algebraico-trans gráfico (intra-trans) y los niveles trans algebraico-intra gráfico (trans-intra) e inter algebraico-trans gráfico (inter-trans).

Para cuestionar la viabilidad de encontrar empíricamente algunas de las categorías teóricas definidas, nos basamos en los postulados de García y Piaget (1982), quienes afirman que "la misma naturaleza de la triada conlleva a un orden estructural en los niveles, y por consiguiente, a un orden necesario y progresivo (intra, inter, trans). La elaboración del nivel trans, en tanto sistema de las transformaciones reunidas en una totalidad con propiedades nuevas, supone la formación de algunas de estas transformaciones en el inter, y que estas últimas implican el conocimiento de los caracteres analizados en el intra" (Pág. 171). Además, dado que las descripciones del esquema se hacen en términos de la triada (intra, inter, trans), estarán vinculadas a cuestiones de escalas y hay que tener en cuenta que, a su vez, cada una de estas grandes etapas o niveles encierra subetapas o subniveles, que siguen un mismo orden y sólo se puede pasar a otro nivel cuando se ha alcanzado el previo.

Por tanto, después de analizar las respuestas de los profesores a las problemas planteados, seguimos considerando que el nivel intra algebraico-trans gráfico es muy difícil de encontrar por la complejidad de los objetos que se involucran en la interpretación gráfica de la derivada, los cuales requieren un grado de formalización matemática de los objetos O'_1, O'_2 y O'_3, que no está construido en un nivel intra. Mientras que el nivel trans algebraico-intra gráfico es cognitivamente más factible de encontrar, porque está influenciado por la enseñanza tradicional de los conceptos matemáticos, en donde prima la algebrización de los conceptos matemáticos en detrimento de la interpretación gráfica de los mismos. En lo que respecta a los niveles inter algebraico-inter gráfico (*inter-inter*) e inter algebraico-trans gráfico (*inter-trans*) pueden ser encontrados, pero en nuestra investigación no surgieron.

A manera de conclusión, podemos decir que, dado que el número de profesores era reducido, la riqueza en el análisis de las respuestas dadas por los profesores a los problemas propuestos, tanto del cuestionario como de la entrevista con viñetas, nos muestra una pluralidad en los esquemas encontrados que proporciona información relevante para el diseño de programas de formación permanente e inicial del profesorado. Por tanto, no tenemos evidencia empírica de algunos de los niveles de comprensión de la doble triada del esquema de la derivada, tales como los niveles: trans algebraico-intra gráfico (*trans-intra*), intra algebraico-inter gráfico (*intra-inter*), intra algebraico-trans gráfico (*intra-trans*), inter algebraico-inter gráfico (*inter-inter*), e inter algebraico-trans gráfico (*inter-trans*). Mientras que, independientemente de la evidencia empírica, el nivel de comprensión intra algebraico-trans gráfico es imposible que se dé en la realidad. Es decir, no es cognitivamente viable, puesto que la interpretación gráfica de los macro objetos $f'(a)$ y $f'(x)$ requiere de una complejidad en el manejo del aparato formal de estos objetos que no se tiene construida en el nivel intra algebraico.

5.3.1.1. Conceptos estructurantes: análisis de la paradoja de Zenón de Aquiles y la tortuga.

En este apartado, describimos brevemente los resultados del análisis de las respuestas a una versión de la paradoja de Zenón[1]. Ésta fue presentada a los profesores en la entrevista con viñetas con el propósito de ahondar indirectamente en el manejo de los conceptos fundamentales del cálculo infinitesimal (número real, infinito, serie, límite) y de la cinemática clásica: espacio, tiempo, velocidad, movimiento, encuentro (Badillo *et al*., 2001; 2002a, 2002b).

En este apartado, describimos brevemente los resultados del análisis de las respuestas a una versión de la paradoja de Zenón[2]. Ésta fue presentada a los profesores en la entrevista con viñetas con el propósito de ahondar indirectamente en el manejo de los conceptos fundamentales del cálculo infinitesimal (número real, infinito, serie, límite) y de la cinemática clásica: espacio, tiempo, velocidad, movimiento, encuentro (Badillo *et al*., 2001; 2002a, 2002b).

Dado que nos interesa describir e interpretar los niveles de comprensión que tienen los profesores con relación al concepto matemático de derivada, hemos considerado que la paradoja de Zenón, de Aquiles y la tortuga, constituye una situación potente para explorar la aplicación de este concepto al campo de la física y su rol histórico como solución integradora a los dilemas de divisibilidad y correspondencia del espacio y del tiempo (Delgado, 1998). La situación que planteamos a estos profesores, adaptada de la original, fue la siguiente (Badillo, 1999):

> "Aquiles y la tortuga corren una carrera. Aquiles tiene una velocidad doble que la velocidad de la tortuga. Si al iniciar la carrera se da a la tortuga una ventaja de 1 Km, ¿logrará Aquiles alcanzarla?"

Un aspecto relevante del análisis de esta situación es que retoma un episodio central de la historia de la ciencia que ha sido controvertido y ha generado múltiples respuestas a lo largo del tiempo (Boyer, 1986). Hemos recurrido a la historia de la ciencia con el fin

[1] Para una mayor profundización en el análisis de las respuestas dadas por los profesores que participaron en el estudio a la paradoja de Aquiles y la tortuga les remitimos al anexo 7.

[2] Para una mayor profundización en el análisis de las respuestas dadas por los profesores que participaron en el estudio a la paradoja de Aquiles y la tortuga les remitimos al anexo 7.

de que nos ayude a indagar en algunos aspectos concretos del conocimiento profesional de los profesores en ejercicio; nuestro objetivo es ser capaces de incidir con fundamento teórico en la formación inicial y permanente del profesorado de matemática (Llinares, 1998; Badillo, 1999; Badillo *et al*., 2001; 2002a, 2002b, Badillo y Azcárate, 2002).

Los resultados del análisis de las respuestas que los profesores que participaron en este estudio dieron a la anterior versión de la paradoja de Zenón de Aquiles y la tortuga, muestran una variedad de perfiles de los profesores frente a las cuestiones epistemológicas y didácticas. La paradoja de Aquiles y la tortuga, nos permitió ver con alguna fundamentación teórica cómo los profesores manejan las ideas clásicas del movimiento, y detectar que aún se mantienen en los razonamientos espontáneos rasgos del pensamiento aristotélico, con una concepción potencial del infinito (Garbin, 2000; Garbin y Azcarate, 2001; 2000); lo cual permite explicar algunas dificultades y obstáculos que aparecen en la comprensión, tanto gráfica como algebraica, de los conceptos de cálculo.

Las respuestas dadas por los profesores muestran que, frente a esta versión de la paradoja de Aquiles y la tortuga, existen tres elementos independientes que pueden aparecer en su resolución:

1. El conocimiento de la solución real del problema en el contexto físico de la carrera (la idea intuitiva de que el corredor más veloz siempre alcanza al más lento con el tiempo suficiente),
2. La reproducción de los argumentos eleáticos acerca de la divisibilidad infinita del tiempo y del espacio, y
3. El conocimiento de la solución formalizada a través de la aplicación de las ecuaciones diferenciales de movimiento de la cinemática clásica y, en algún caso, mediante un modelo de series infinitas.

Las distintas combinaciones de estos tres elementos nos han permitido definir una *tipología* para clasificar a los profesores. La presencia o ausencia de los diferentes elementos da cuenta de si los profesores llegan a una solución completa del problema y si detectan el carácter paradójico de la situación cuando es abordada desde dos manifestaciones distintas del pensamiento del sentido común.

Para el análisis de las respuestas de los profesores frente al problema de Aquiles y la tortuga hemos definido dos categorías, una *conceptual* y una *metaconceptual*. Con relación a la categoría conceptual, sintetizada en la tabla 16, las respuestas nos permiten ahondar indirectamente en su manejo de los conceptos fundamentales del cálculo infinitesimal (número real, infinito, serie, límite) y de la cinemática clásica (espacio, tiempo, movimiento, encuentro). Y la categoría metaconceptual apunta a estudiar el nivel de conciencia de los profesores sobre sus procedimientos de solución al abordar la situación, sea como una paradoja o como un ejercicio tipo de cinemática. El abordaje elegido puede condicionar el uso que ellos hacen de las diferentes formas de representación (*registros semióticos*) en el proceso de resolución (Font, 2000).

PROFESOR	A	B	C	D	E
1. Manifiesta conocer la solución real (Aquiles alcanza a la tortuga)	X	X	X	X	X
2. Manifiesta conocer los argumentos eleáticos (Problemas de divisibilidad de espacio y tiempo)		X		X	X
3. Conoce la solución basada en el cálculo diferencial (Aplicación de la cinemática clásica)	X	X	X	X	
4. Percibe la contradicción entre los registros (Ve el carácter paradójico)		X		X	X
5. Consistencia entre los registros (Plantea argumentos para apantallar la contradicción)		X		X	

Tabla 16. Categorías analíticas que dan cuenta de los diferentes elementos constituyentes del abordaje que hace el profesor del problema (*Análisis conceptual*).

A nivel global, las respuestas encontradas al plantear la paradoja a profesores en ejercicio reflejan que todos ellos tendieron a contrastar la situación con la realidad; es decir, que se observa la fuerza que tiene el razonamiento intuitivo a la hora de abordar la solución de problemas contextualizados.

Si bien es cierto que cuatro de los profesores abordan la solución de la situación como un ejercicio tipo de la cinemática clásica, encontramos profundas diferencias en las justificaciones que dan al resultado (el hecho del encuentro), pues sólo dos fundamentan la solución con el aparato formal del modelo de series infinitas (profesores B y D); uno de ellos deja entrever la necesidad de un aparato formal para modelizar el fenómeno estudiado (profesor A), y otro plantea un uso naturalizado de los conceptos, basado en la utilización acrítica de las ecuaciones de la cinemática clásica, que no refleja la comprensión de los conceptos del precálculo y del cálculo infinitesimal inmersos (profesor C); mientras que uno de los profesores reproduce en sus razonamientos los argumentos eleáticos en contra de la divisibilidad del tiempo y del espacio (profesor E), evidenciando algunas inconsistencias, tales como una concepción potencial del infinito y la no formalización de conceptos del cálculo infinitesimal, como el objeto razón de cambio (velocidad instantánea) y el objeto límite de las tasas medias de variación.

Con relación a la categoría metaconceptual, sintetizada en la tabla 17, resaltamos que sólo dos de los profesores verbalizaron su conocimiento sobre el valor histórico de la situación planteada; sin embargo, sus argumentaciones fueron contradictorias. El profesor D muestra una comprensión de los conceptos matemáticos acorde con la evolución histórica de los mismos, mientras que el profesor E exhibe un mal manejo de los conceptos involucrados, evidenciando un esquema potencial del infinito que le impide comprender conceptos como límite y derivada. En los razonamientos de dos de los profesores, que se basan en el manejo algebraico de las ecuaciones de la cinemática clásica (A y C), no hay preocupación por buscar una fundamentación sintáctica para los conceptos inmersos que permita apantallar las contradicciones que se presentan o justificar los razonamientos realizados a la luz de modelos teóricos actuales.

PROFESOR	A	B	C	D	E
1. Verbaliza el carácter paradójico de la situación.		**X**		**X**	**X**
2. Verbaliza su conocimiento del valor histórico de la situación.				**X**	**X**
3. Verbaliza la necesidad de nuevas categorías conceptuales.	x	**X**		**X**	

Tabla 17. Categorías analíticas que dan cuenta del nivel de conciencia de los profesores sobre sus procedimientos de solución al abordar la situación (*Análisis metaconceptual*).

En las respuestas de los cinco profesores a la situación encontramos los diferentes elementos que aparecen reseñados en la tabla 16. Los profesores presentan tres combinaciones de las categorías, lo cual nos permite definir tres *tipos* o *perfiles* de respuestas dadas a la versión de la paradoja que utilizamos en este estudio (Badillo *et al.*, 2001; 2002a, 2002b). Estos tres tipos se exponen brevemente a continuación:

a. **Profesores eficaces no metacognitivos**. Muestran una visión naturalizada de los conceptos matemáticos y físicos (espacio, velocidad, tiempo), reducida al manejo acrítico de las ecuaciones cinemáticas del movimiento. Este primer grupo está conformado por los profesores A y C (ver figura 19). Sus respuestas difícilmente nos permiten explorar sus ideas sobre los *conceptos estructurantes* involucrados, pues ellos no ven necesaria la reflexión sobre dichos conceptos, reduciendo así la resolución del problema al manejo algebraico de ecuaciones sin contenido alguno. Es decir, exhiben una perspectiva proceso de los objetos espacio, velocidad y tiempo, caracterizado por la aplicación sin justificación de las ecuaciones de la cinemática clásica. Sólo el profesor A hace referencia tímidamente al concepto de límite, pero sin argumentos conceptuales claros que le permitan asociarlo con el fenómeno modelizado. Estos profesores son conscientes de que en la realidad el más veloz alcanza al menos veloz en un tiempo determinado; sin embargo, al no contrastar esto con la argumentación eleática, no atribuyen carácter paradójico a la situación.

Los profesores A y C, no reconocen el valor histórico de la paradoja de Zenón, lo cual nos da pistas sobre la ausencia de la historia de la ciencia en su formación inicial y permanente y nos brinda argumentos para generar nuevos programas de formación que tengan en cuenta las situaciones históricas que dieron origen a la construcción de los conceptos matemáticos.

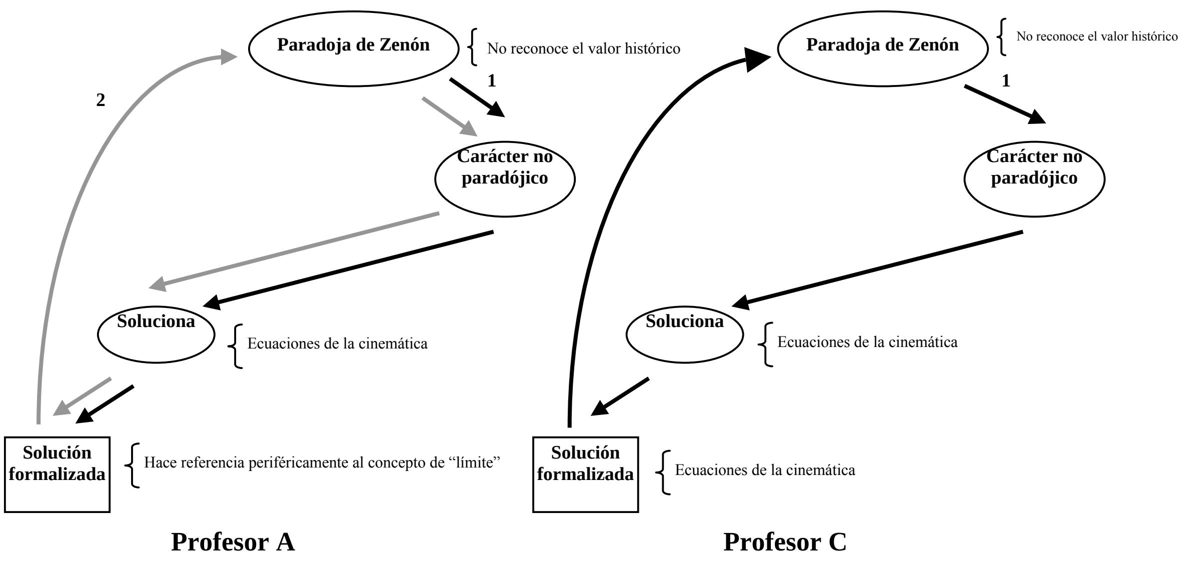


Figura 19. Esquema donde se ilustra el proceso de resolución de los profesores A y C, a la situación.

b. Profesores eficaces metacognitivos. Solucionan inicialmente la situación como un ejercicio tipo de la cinemática clásica, utilizando versiones naturalizadas de los conceptos e, v y t. Es decir, exhiben una perspectiva proceso de los objetos espacio, velocidad y tiempo, caracterizado por la aplicación sin justificación de las ecuaciones de la cinemática clásica. Consideramos que quizás el enunciado de la versión de la paradoja que utilizamos en esta investigación indujo este tipo de respuesta en los profesores, que no vieron la necesidad de obtener una serie en el proceso de modelización del fenómeno.

Durante el proceso de resolución, estos profesores se detuvieron en justificar sus razonamientos, lo que los llevó a detectar errores y contradicciones al contrastar las diferentes etapas de resolución (caso del profesor B), y posteriormente, a buscar un modelo teórico formalizado que le permitiera apantallar dicha contradicción, o a identificar la situación con un problema tipo de la cinemática clásica; mostrando una riqueza en el esquema exhibido (caso del profesor D), al justificar el punto de encuentro mediante la coordinación de diferentes representaciones de los conceptos matemáticos involucrados: referencia al infinito actual, definición de la serie convergente y en términos de límite de la serie. Encontramos coherencia entre los diferentes registros semióticos utilizados, manifestando una comprensión de los conceptos del cálculo utilizados que modelizan el problema planteado en un ámbito físico.

En este grupo formado por los profesores B y D había dos tendencias en cuanto al reconocimiento de la situación como un problema clave dentro de la historia de la matemática (ver figura 20). Por un lado, el profesor B no verbaliza su conocimiento del valor histórico de la situación, mientras que el profesor D manifiesta haberla estudiado en la asignatura de filosofía en el bachillerato. Lo anterior, también abunda sobre la importancia y la necesidad de usar la historia de la ciencia en la formación permanente e inicial del profesorado.

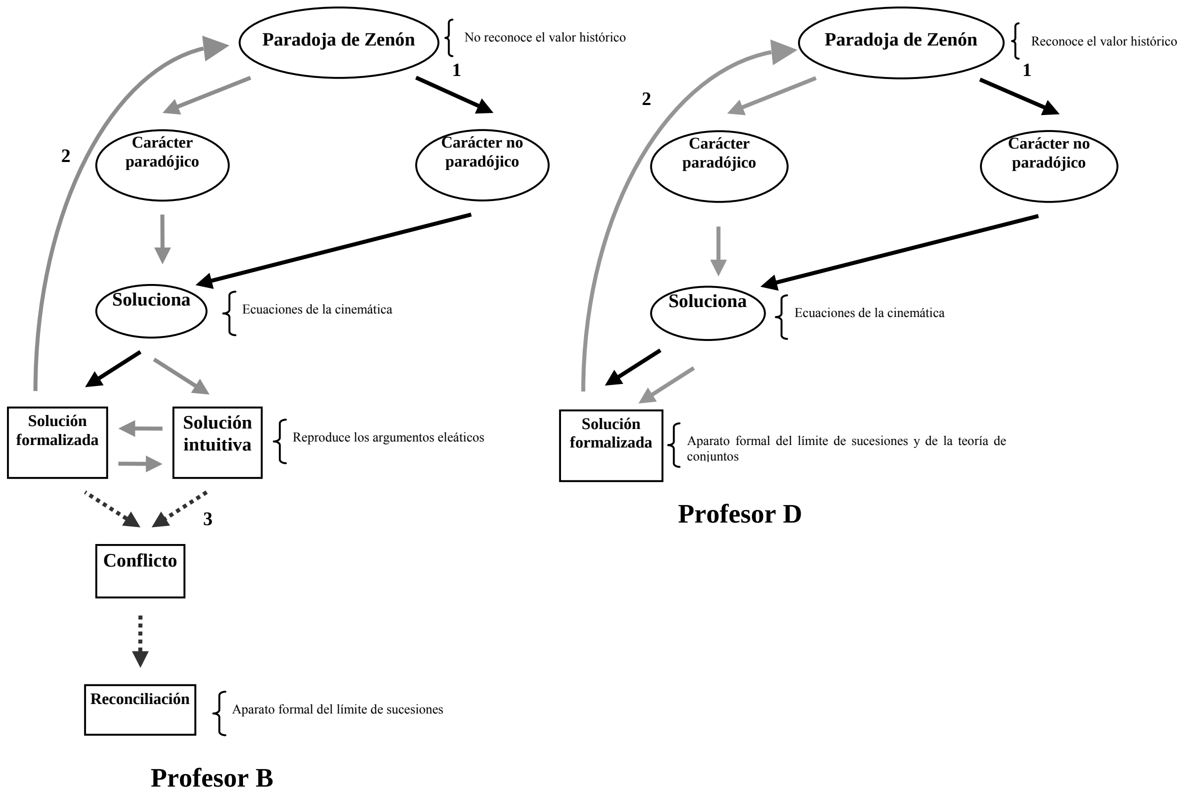


Figura 20. Esquema donde se ilustra el proceso de resolución de los profesores B y D, a la situación.

c. **Profesores inconsistentes conceptualmente y coherentes didácticamente**. En este grupo ubicamos al profesor E. El análisis de su respuesta a la paradoja desvela inconsistencias en los conceptos matemáticos que maneja; más concretamente, exhibe una visión potencial del infinito que le lleva a reproducir los argumentos eleáticos en contra de la divisibilidad infinita del espacio, del tiempo y del movimiento. Contradictoriamente, el profesor E conoce el valor histórico de la situación y las implicaciones que ha tenido en la evolución del Cálculo Infinitesimal y en la Teoría de Conjuntos; sin embargo, en su razonamiento, aunque relaciona explícitamente la situación con los conceptos de límite e infinito, refleja grandes dificultades en la comprensión de estos conceptos que se convierten en obstáculos para la comprensión de los conceptos del cálculo diferencial (Azcárate *et al*., 1996).

Igualmente, es curioso como el profesor E relaciona de manera implícita el problema planteado con su problemática didáctica. Más concretamente, verbaliza que esta versión de la paradoja, podría ser útil para explicar las curvas asintóticas. Este tipo de razonamiento didáctico no lo habíamos detectado en la respuesta de ninguno de los otros profesores, al igual que el uso de las metáforas para explicar el fenómeno estudiado. Si bien es cierto que resulta interesante el razonamiento del profesor, encontramos que en el uso del lenguaje metafórico que hace para trasladar la situación al estudio de las curvas asintóticas se evidencian inconsistencias en el manejo de los conceptos inmersos en ambos fenómenos, puesto que la asíntota implica considerar una sucesión $x_1, x_2, x_3,..., x_n \rightarrow x$, con $f(x) \rightarrow \infty$. Por tanto, si el profesor E usa la metáfora de que "la gráfica se acerca a una recta vertical pero nunca llega a tocarla", esta situación se parecería a la versión de la paradoja de Aquiles y la tortuga, pero con dos errores: (1) que en esta metáfora de aproximación, el tiempo no ayuda; y (2), que la situación de Aquiles y la tortuga no es metafórica, puesto que Aquiles sí que se acerca a la tortuga e incluso la supera. Por tanto, el profesor en su argumentación considera incorrectamente, que la tortuga está parada en un punto de abscisa x y Aquiles se comporta como la sucesión convergente $x_1, x_2, x_3,..., x_n \rightarrow x$, llegando a la conclusión errónea de que nunca llega a alcanzar a la tortuga.

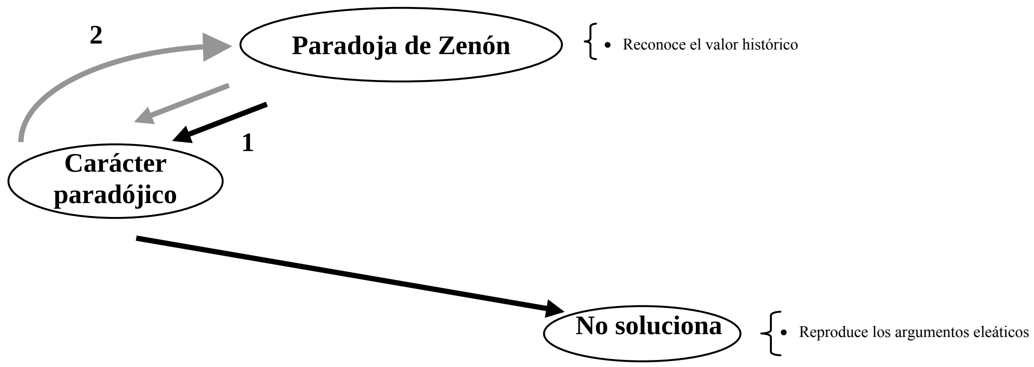


Figura 21. Esquema donde se ilustra el proceso de resolución del profesor E, a la situación.

El profesor E, sesgado por dar explicación a su problemática didáctica o bien influenciado por su concepción potencial del infinito, no contrasta la situación con la realidad (aunque verbaliza que el más veloz siempre alcanza al menos veloz después de un tiempo), ni reflexiona sobre los conceptos de espacio, tiempo, velocidad y movimiento implícitos en la situación. Lo anterior, nos lleva a concluir que su esquema sobre el infinito potencial es tan fuerte, que modeliza la situación para dar más argumentos sobre la imposibilidad de la partición infinita del espacio y del tiempo. La elicitación de estos razonamientos muestra la potencia de esta situación en la detección de obstáculos y errores en las formas de conocer los conceptos matemáticos que tienen los profesores, lo cual puede ser una componente clave en el diseño de programas de formación.

A manera de conclusión, podemos afirmar que la definición de las categorías conceptuales y metaconceptuales nos permitió identificar diferentes rasgos en las respuestas de los profesores, tales como: (1) la presencia de razonamientos aristotélicos; (2) el uso de esquemas algebraicos en la resolución de problemas sin reflexión teórica de los conceptos inmersos en ellos (perspectiva proceso de las ecuaciones de la cinemática clásica); (3) el desconocimiento de episodios históricos que han sido claves en el desarrollo de los conceptos matemáticos; (4) la ausencia de procesos de resolución gráficos; y (5), la importancia de los procesos metacognitivos en la resolución de problemas. A nuestro juicio, estos elementos deberían ser tenidos en cuenta en la revisión de la descomposición genética del concepto de derivada, y a la hora de diseñar programas de formación inicial y permanente (Badillo *et al.*, 2001, 2002a, 2002b; Badillo y Azcárate, 2002).

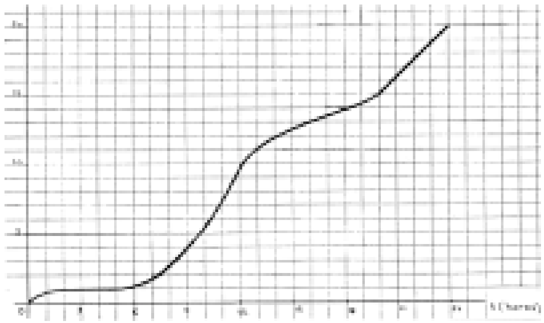
Otro aspecto significativo ha sido el rescatar episodios controvertidos de la historia de la matemática como herramienta para elicitar indirectamente las ideas que tienen los profesores acerca de los conceptos del Cálculo Infinitesimal. El estudio de casos y la detección de obstáculos cognitivos en conceptos como infinito, límite, y derivada (en su significado físico de la velocidad y movimiento), pueden utilizarse en el diseño de casos ideales como herramienta en la formación del profesorado.

5.3.1.2. Relación entre el objeto pendiente de la recta tangente y el objeto razón de cambio en la construcción del macro objeto derivada en un punto

A continuación describiremos detalladamente los aportes del análisis particular de cada uno de los problemas que tuvimos en cuenta para describir el nivel de comprensión que tienen los profesores de la relación entre los objetos pendiente de la recta tangente y el objeto razón de cambio. Inicialmente se presentará la red sistémica correspondiente a las respuestas de los profesores a cada cuestión, y después se presentará el análisis descriptivo de cada red. Para la construcción de cada una de las redes de los problemas se elaboraron previamente unas tablas resumen de las respuestas que los profesores dieron a cada situación en donde se recogen fragmentos del registro escrito del proceso de resolución y de la entrevista sobre la justificación del proceso de resolución de cada problema. Estas tablas resúmenes se pueden consultar en el anexo 8.

Para el análisis de esta primera categoría tendremos en cuenta el análisis particular de los problemas 3-C, 4-C y V-v que conforman la primera línea de coherencia, que se analizarán en el orden anteriormente indicado.

Red sistémica del problema 3-C



- a) Gráficamente
  - Interpretación del enunciado y lectura correcta de la gráfica
    - Consumo total de agua es de 20 m^3 — (A, B, C, E)
  - No interpretación del enunciado y lectura incorrecta de la gráfica
    - $\sum_{t=1}^{24} Q(t)$ = Q (t_1) + Q (t_2) +... + Q (t_n) — (D)
- b)
  - Algebraicamente
    - Por el cálculo del incremento de la función
      - ΔQ = 20 – 15 = 5 m^3, en las últimas 4 h — (B, E)
    - Calcula el área debajo de la curva en [20, 24]: $Q(20).[Q(24)-Q(20)]+\frac{[Q(24)-Q(20)](24-20)}{2}=50$ — (D)
  - Gráficamente
    - El consumo es constante
      - Justifica
        - La gráfica es una línea recta — (C)
        - Se tiene una función lineal y la *m* será una constante — (D)
      - No justifica
        - En las últimas 4 h se han consumido 5 m^3 — (B)
    - El consumo es creciente (entre 15 y 20) — (A)

- c)
  - Responde correctamente que en 9 >14
    - Compara las pendientes de las rectas tangentes a la curva
      - La recta tangente en ese instante tiene mayor *m* que en 14 — (B)
      - En 9 la inclinación de la recta tangente a la curva es mayor — (D)
    - Compara las pendientes de las gráficas
      - La figura en 9 presenta mayor inclinación, ó sea la *m* es mayor — (C)
  - Responde incorrectamente que en 14 >9
    - Justifica
      - A las 14 se han consumido un total de 12 m^3 y en 9 se han consumido 4 m^3 — (E)
    - No justifica
      - El consumo en las 14> 9 — (A)
- d)
  - Atendiendo a aspectos globales (visión continua de la gráfica)
    - Entre 6 y 12
      - Hay un incremento bastante grande — (E)
      - En este intervalo la pendiente es mayor — (A)
    - Entre 8 y 12
      - En este intervalo la *m* de la recta tangente es mayor que en los demás puntos — (B)
      - En este tramo el área bajo la curva y la *m* de la recta tangente es mayor que en los otros tramos — (D)
  - Atendiendo a aspectos locales (visión discreta de la gráfica)
    - En 12 seg.
      - En este punto existe una pendiente mayor que en los demás puntos de la gráfica — (C)
- e)
  - Algebraicamente
    - A partir del concepto de derivada (calculo del valor de la *m* de la recta tangente a la curva en x =7)
      - Responde explícitamente
        - Es de 0, 75 m^3 / h, porque se entiende la derivada como razón de cambio — (B)
      - No responde explícitamente
        - Hay que hacer un cálculo aproximado porque corresponde a la tasa instantánea de variación (la unidad es de capacidad / tiempo) — (D)
  - Gráficamente
    - A partir del concepto de función (valor de f (7) en la gráfica)
      - Aproximadamente 2 unidades (Las unidades no se especifican en el gráfico) — (A)
      - Entre 1 < consumo <2, (Las unidades son m^3, cm^3, o litros) — (C)
      - Aproximadamente 1,8 litros o m^3 (Las unidades tienen que ser de volumen) — (E)

Análisis descriptivo del problema 3-C

Inicialmente, agrupamos las respuestas de los profesores, para cada uno de los cinco apartados que conforman este problema, en dos grandes grupos: respuestas basadas en procedimientos algebraicos y/o en procedimientos gráficos. Dado que en las respuestas a los ítems *a)*, *c)* y *d)* sólo se usan procedimientos gráficos, hemos variado la clasificación optando por la siguiente. Para el ítem *a)*, hemos establecido dos grandes grupos excluyentes:

1. Los profesores que interpretan el enunciado y hacen una lectura correcta de la gráfica de la función representada.
2. Los profesores que no interpretan el enunciado y hacen una lectura incorrecta de la gráfica de la función representada.

Para los ítems *b)* y *e)*, las respuestas las clasificamos en dos grandes grupos no excluyentes:

3. Los profesores que responden utilizando procedimientos algebraicos a partir de la información que le proporciona el enunciado gráfico, o bien buscando información externa.
4. Los profesores que responden utilizando procedimientos gráficos sólo a partir de la información que le proporciona el enunciado gráfico.

Para el ítem *d)*, dos grandes grupos excluyentes:

5. Los profesores que interpretan el enunciado y la gráfica de la función representada atendiendo a aspectos globales.
6. Los profesores que interpretan el enunciado y la gráfica de la función representada atendiendo a aspectos locales.

Y finalmente, en las respuestas al ítem *c)*, que en su mayoría utilizan procedimientos gráficos atendiendo a aspectos locales de la gráfica, optamos por clasificarlas teniendo en cuenta la respuesta concreta que dan, identificando así dos grupos de respuestas excluyentes:

7. Los profesores que responden correctamente que el consumo en 9 >14
8. Los profesores que responden incorrectamente que el consumo en 14 > 9

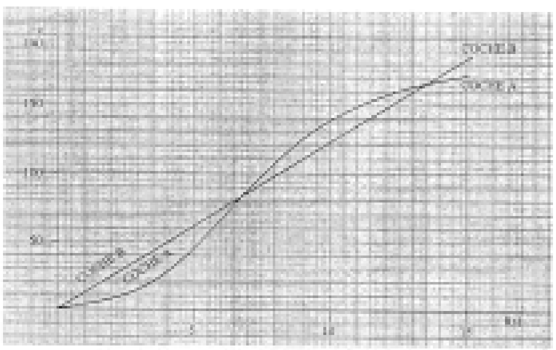
En términos generales podemos concluir que la mayoría de los profesores dan respuesta a la situación a partir de la información que le proporciona la gráfica, y sólo los profesores B y D recurren a razonamientos algebraicos para dar respuesta a los apartados *b)* y *e)*, pero siempre justificando complementariamente con argumentos gráficos; mientras que en el apartado *b)* a partir de la información que les proporciona la gráfica, el profesor C sólo utiliza razonamientos gráficos y el profesor E sólo utiliza razonamientos algebraicos.

En cuanto al manejo de los conceptos inmersos en la situación, podemos identificar dos grandes focos conceptuales: la interpretación gráfica de funciones acumulativas (interpretación gráfica del macro objeto f (x)) y la variación instantánea de la función "cantidad de agua consumida" (interpretación gráfica de los macro objetos f '(a) y f '(x)). Según la naturaleza y los procesos cognitivos que demanda este problema, consideramos que la dificultad de este tipo de tarea radica en la doble actividad que demanda, por un lado, dotar de significado a la gráfica en función de la situación descrita en el enunciado verbal, y por otro, obtener información de la situación haciendo una lectura e interpretación correcta de la gráfica (García y Llinares, 1994). Por tanto este problema, que ubicamos en el tipo 4.8. (traducción entre dos o más modos de representación de f (x) seguida de relación entre el último modo de representación de f (x) y f '(x) más trabajo en el modo de representación de f '(x): DV f (x)→G f (x)⇨ DV f '(x)↻), requiere que los profesores hagan una traducción entre la descripción de la situación y la gráfica que representa la situación, y luego lo relacionen con la tasa instantánea de variación, haciendo referencia tanto al macro objeto f '(a) como al macro objeto f '(x).

El análisis de las respuestas de los profesores al problema 3-C, teniendo en cuenta las características propias de la misma tarea, nos permitió hacer un diagnóstico de las dificultades e inconsistencias en la comprensión de los conceptos inmersos en la situación, que tendremos en cuenta en la revisión de la descomposición genética inicial del concepto derivada:

1. Sólo el profesor D tuvo dificultades en hacer la traducción DV f (x)→G f (x), es decir, dificultades para comprender correctamente el enunciado, y por tanto, interpretar correctamente la gráfica de la función acumulativa representada.
2. El profesor D muestra dificultades en la interpretación algebraica del objeto tasa media de variación, llegando a calcular el valor del área debajo de la curva para dar explicación al consumo de agua caliente en el intervalo sugerido; mientras que el profesor E hace una interpretación gráfica incorrecta del objeto tasa media de variación, confundiéndolo con el crecimiento de la función.
3. Los profesores A y E, no coordinan gráficamente los objetos pendiente de la recta tangente y razón de cambio para explicar la variación local de la función en términos del macro objeto f ’(a), a partir de la información que le proporciona la gráfica de la función.
4. Los profesores A, B, D y E hacen un análisis de la variación de la función atendiendo a aspectos globales (es decir por intervalos) cuando se pide interpretar el macro objeto f ’(a), mientras que sólo el profesor C hace un análisis de la variación de la función atendiendo a aspectos locales.
5. Los profesores A, C y E muestran inconsistencias en el cálculo aproximado del objeto tasa instantánea de variación en un punto dado, al reducirlo al valor de la ordenada en el punto, como consecuencia de la lectura punto a punto de la gráfica. Lo cual implica que, por un lado, no coordinan los objetos pendiente de la recta tangente, límite de las tasas medias de variación y razón de cambio; y por otro, tienen dificultades en la comprensión de los objetos tasa media de variación y tasa instantánea de variación.

Red sistémica del problema 4-C



- **a)** y **b)**
  - Hace referencia a la trayectoria
    - En P los coches A y B se interceptan
      - La trayectoria de B es recta y la de A es curva
        - (A)
    - En P los coches A y B se encuentran
      - No justifica la respuesta
        - (C)
      - Justifica la respuesta
        - El coche B se mueve en línea recta y el A tiene un movimiento como curvilíneo
          - (E)
  - Hace referencia al espacio recorrido y al tiempo
    - Se encuentran a igual distancia en ese instante
      - (D)
    - Han recorrido la misma distancia en el mismo tiempo
      - (B)
  - Hace referencia a la velocidad
    - Son iguales
      - V = e/t, puesto que a espacios iguales y tiempos iguales, las velocidades son iguales
        - (C)
    - Son diferentes
      - No especifica el resultado
        - La velocidad es una pendiente
          - (A)
      - Especifica el resultado
        - Justifica
          - $V_A > V_B$ (la pendiente de la recta tangente representa la velocidad)
            - (B, D)
        - No justifica
          - $V_A > V_B$
            - (E)
- **c)**
  - Hacen referencia a la trayectoria
    - Sí hay momentos donde las velocidades son iguales
      - Cuando la tangente a la curva sea paralela a la trayectoria recta
        - (A)
      - En los puntos donde las gráficas se intersecan
        - (C)
    - No hay momentos donde las velocidades son iguales
      - Las distancias recorridas son diferentes
        - (E)
  - Hacen referencia a la velocidad
    - Sí hay momentos donde las velocidades son iguales
      - En los lugares donde la recta tangente a la gráfica del movimiento de A sea paralela a la gráfica del coche B. (Aproximadamente en t = 3,5 y t = 10 seg.)
        - (B, D)
    - No hay momentos donde las velocidades son iguales
      - Ninguno

d)	Hacen referencia a la trayectoria	Sí, el coche A tiene mayor velocidad ($V_A > V_B$)	En el trayecto curvo (hace referencia a los tramos y), porque hay mayor pendiente		(A)
			En el momento en que la gráfica de A está por encima de la de B, en:		(C)
		Nunca el coche A tiene mayor velocidad	Ninguno		
	Hacen referencia a la velocidad	Sí, el coche A tiene mayor velocidad	Interpretación local de la derivada	$V_A > V_B$ en el punto P	(B, D)
			Interpretación global de la derivada	$V_A > V_B$ en el intervalo (3.5, 10)	(D)
		Nunca el coche A tiene mayor velocidad	Ninguno		
	Hacen referencia a la aceleración	Sí, el coche A tiene mayor velocidad	En todo el movimiento porque B tiene aceleración constante mientras que A tiene aceleración variable		(E)
		Nunca el coche A tiene mayor velocidad	Ninguno		

Análisis descriptivo del problema 4-C

En este problema los profesores se agruparon según sus respuestas en los cuatro grupos siguientes:

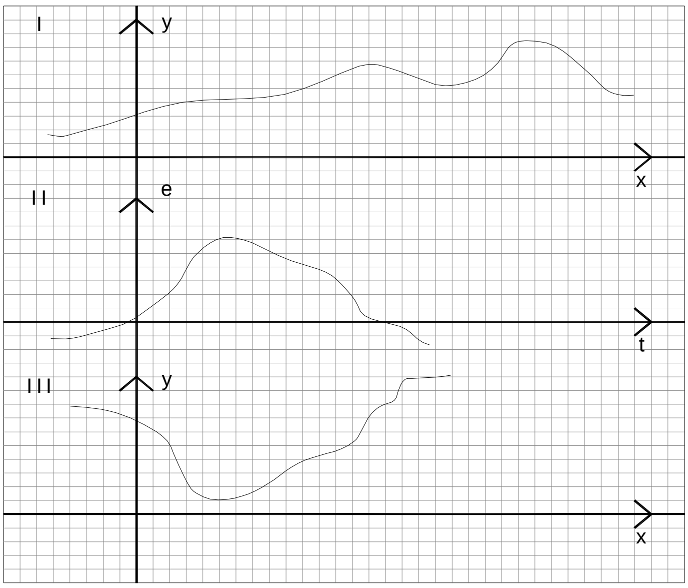
1. Los profesores que hacen referencia a la trayectoria.
2. Los profesores que hacen referencia al espacio recorrido y al tiempo.
3. Los profesores que hacen referencia a la velocidad.
4. Los profesores que hacen referencia a la aceleración.

La dificultad de esta tarea se centra en la familiarización que tengan los profesores con la interpretación de gráficos espacio-tiempo. Es decir, que el proceso de resolución de este problema requiere de la interpretación y comparación de las velocidades instantáneas de un movimiento variado con la velocidad de un movimiento uniforme y, por consiguiente, implica saber interpretar la representación de las velocidades en una gráfica espacio-tiempo.

Las respuestas de los profesores a este problema aportan las siguientes dificultades e inconsistencias en el manejo de los conceptos inmersos, que tendremos en cuenta en la revisión de la descomposición genética inicial del concepto de derivada:

1. Los profesores A, C y E interpretan incorrectamente la gráfica de espacio-tiempo como la trayectoria de los coches y no como el espacio recorrido por los coches *A* y *B* en cada momento, por tanto, hacen una interpretación icónica de la gráfica espacio-tiempo. Lo cual implica, dificultades en la comprensión gráfica de los conceptos de la cinemática (espacio, tiempo, velocidad, aceleración, movimiento variado, movimiento uniforme, etc.).
2. Los profesores A, C y E no coordinan los objetos razón de cambio (velocidad instantánea) y pendiente de la recta tangente en la interpretación gráfica de la velocidad, ni los relacionan con el macro objeto f '(a).
3. Los profesores B y D resuelven y argumentan correctamente la situación, mostrando coordinación entre los objetos velocidad instantánea y pendiente de la recta tangente.

Red sistémica del problema V-v



- **a.** Determinación de puntos donde la *m* de la recta tangente es máx., mín., y nula.
  - Pendiente máx.
    - Punto donde la *m* de la recta tangente tenga mayor inclinación positiva
      - Los relaciona con el crecimiento de la función — (B, D, E)
      - No los relaciona con el crecimiento de la función — (A, C)
  - Pendiente mín.
    - Punto donde la *m* de la recta tangente tenga mayor inclinación negativa
      - Los relaciona con el decrecimiento de la función — (B, D, E)
      - No los relaciona con el decrecimiento de la función — (A, C)
  - Pendiente nula
    - Puntos donde la recta tangente a la gráfica sea paralela al eje de las X
      - Los relaciona con los puntos máx. y mín. — (A, C, E)
      - No los relaciona con los puntos máx. y mín — (B, D)
- **b.** Determinación de puntos de velocidad máx., mín., y nula.
  - Responde correctamente
    - Velocidad máx.
      - Punto donde la *m* de la recta tangente tenga mayor inclinación positiva
        - Los relaciona con el crecimiento de la función — (D, E)
        - No los relaciona con el crecimiento de la función — (A, B, C)
    - Velocidad mín.
      - Punto donde la *m* de la recta tangente tenga mayor inclinación negativa
        - Los relaciona con el decrecimiento de la función — (D, E)
        - No los relaciona con el decrecimiento de la función — (A, B, C)
    - Velocidad nula
      - Puntos donde la recta tangente a la gráfica sea paralela al eje de las X
        - Los relaciona con los puntos máx. y mín. — (D)
        - No los relaciona con los puntos máx. y mín. — (A, B, C, E)
  - Contradice su respuesta inicial
    - Velocidad máx.
      - Asocia la velocidad máxima con el punto máximo absoluto de la gráfica — (A)
    - Velocidad mín.
      - Asocia la velocidad mínima con el punto extremo (derecho) de la G (mínimo absoluto) — (A)
    - Velocidad nula
      - Puntos donde la recta tangente a la gráfica sea paralela al eje de las X — (A)

c. Determinación de puntos donde la función crece más deprisa, menos deprisa y donde la variación es nula	Crece más deprisa	Punto donde la *m* de la recta tangente tenga mayor inclinación positiva	Los relaciona con el crecimiento de la función	(A, B, D, E)
			No los relaciona con el crecimiento de la función	(C)
	Crece menos deprisa	Punto donde la *m* de la recta tangente tenga mayor inclinación negativa	Los relaciona con el decrecimiento de la función	(B, D, E)
			No los relaciona con el decrecimien-to de la función	(A, C)
	Tasa instantánea de variación nula	Puntos donde la recta tangente a la gráfica sea paralela al eje de las X	Los relaciona con los puntos máx. y mín.	(A)
			No los relaciona con los puntos máx. y mín	(B, C, D, E)

Análisis descriptivo del problema V-v

Dado que este problema involucra tres situaciones diferentes pero relacionadas entre sí, decidimos clasificar las respuestas de los profesores atendiendo al contexto de la situación. Por tanto, las partes *a)* y *c)* que están contextualizadas en la matemática las clasificamos en tres grupos no excluyentes que a su vez incluyen dos subcategorías excluyentes. Para el caso de la situación *a)* quedó de la siguiente manera:

1. Pendiente máxima.
    1.1. Los relaciona con el crecimiento de la función.
    1.2. No los relaciona con el crecimiento de la función.
2. Pendiente mínima.
    2.1. Los relaciona con el decrecimiento de la función.
    2.2. No los relaciona con el decrecimiento de la función.
3. Pendiente nula.
    3.1. Los relaciona con los puntos máximos y mínimos.
    3.2. No los relaciona con los puntos máximos y mínimos.

Para el caso del ítem *c)*, las respuestas las clasificamos de la siguiente manera:

4. Crece más deprisa.

4. 1. Los relaciona con el crecimiento de la función.

4. 2. No los relaciona con el crecimiento de la función.

5. Crece menos deprisa.

5. 1. Los relaciona con el decrecimiento de la función.

5. 2. No los relaciona con el decrecimiento de la función.

6. Tasa instantánea de variación nula.

6. 1. Los relaciona con los puntos máximos y mínimos.

6. 2. No los relaciona con los puntos máximos y mínimos.

Y las respuestas a la situación *b)*, que está contextualizada en la física, teniendo en cuenta que un profesor cambió su respuesta a lo largo del proceso de resolución, introdujimos dos categorías no excluyentes, de la cual, la primera de ellas, tiene las mismas subcategorías que la de los ítems *a)* y *c)*.

7. Profesores que responden correctamente.

7. 1. Velocidad máxima.

7. 2. Velocidad mínima.

7. 3. Velocidad nula.

8. Profesores que contradicen su respuesta inicial.

El análisis de las respuestas de los profesores a los tres apartados que conforman la situación V-v, nos permitió detectar algunas dificultades e inconsistencias en los objetos inmersos en el problema, dependiendo del contexto de la situación, a tener en cuenta para la revisión de la descomposición genética del concepto de derivada.

1. El profesor A en el ítem *b)*, contextualizado en la física, confunde los puntos máximos y mínimos de la gráfica de la función (derivada nula) con los valores máximos y mínimos de la velocidad (derivada máxima y mínima).
2. Ninguno de los profesores señala los puntos de inflexión de las gráficas en donde la derivada es nula, como puntos de velocidad nula, pendiente nula, y de tasa de variación nula.
3. En algunos casos, los profesores dejan de señalar o bien puntos máximos o mínimos, o tramos horizontales de la gráfica como puntos o intervalos donde la velocidad es nula, o la pendiente es nula o la tasa de variación es nula.

4. Sólo el profesor E, al señalar los puntos donde la pendiente de la recta tangente es máxima o mínima, compara explícitamente la medida del ángulo de inclinación de la recta tangente.

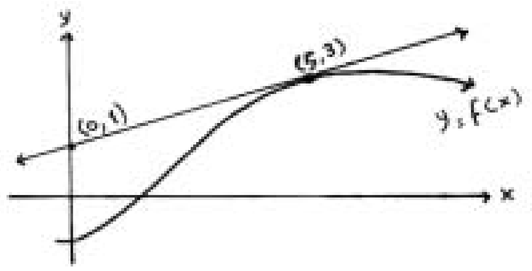
5.3.1.3. Relación entre los macro objetos derivada en un punto y función derivada

Teniendo en cuenta las dos dimensiones del esquema de la derivada que hemos definido, para el análisis de esta categoría, organizamos los problemas en dos grupos con la intención de obtener mayor información tanto de la comprensión gráfica como de la algebraica que tienen los profesores de los macro objetos f ’(a) y f ’(x).

i. Comprensión gráfica de la función derivada

Los problemas que analizamos para profundizar en la comprensión gráfica que tienen los profesores de los macro objetos f ’(a) y f ’(x) son: 1-C, 2-C y IV-v, que conforman la segunda línea de coherencia.

Red sistémica del problema 1-C



a) Encuentra f (5)

- Algebraicamente (Ecuación pto. pendiente) | Calcula m $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ | Halla la ecuación de la recta tangente | Calcula la función en 5 | (A)
- Gráficamente
  - Aplicando el concepto de gráfica de la función | Justifica la respuesta | (B, C)
  - Aplicando del concepto de recta tangente a la curva en (5,3) | (D, E)

- b) Encuentra f '(5)
  - Algebraicamente (Reglas de derivación)
    - Usa información de a) (Ecuación de la recta tangente)
      - Calcula la función derivada: $\frac{dy}{dx} = f'(x)$
        - Calcula la derivada en un punto f '(5)
          - (A)
  - Gráficamente
    - Calcula la *m* de la recta tangente con los dos puntos de la gráfica de la recta
      - Cociente incremental: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = m$
        - Comprueba, además, hallando la ecuación de la recta con cada punto
          - (E)
        - No comprueba
          - (B, C)
      - Tasa media de variación: $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = m$
        - (D)
- c) Calcula f (5,08)
  - Algebraicamente (Por aproximación)
    - Usa información de **a)** (Ecuación de la recta)
      - Calcula la función en 5, 08
        - (A)
    - Usa información de **a)** y **b)** (concepto de derivada en un punto)
      - Calcula por: $f'(5) \approx \frac{f(5+\Delta x) - f(5)}{\Delta x}$
        - (D, E)
  - Gráficamente
    - Topológicamente (vecindad del punto (5,3))
      - Explicita el resultado (≈ 3,02)
        - (B)
      - No explicita el resultado (≈ f (5))
        - (C)

Análisis descriptivo del problema 1-C

La red del problema 1-C incluye las respuestas de los tres apartados que lo conforman. Las categorías no excluyentes que definimos para organizar las respuestas de los profesores son:

1. Los profesores que responden utilizando procedimientos algebraicos a partir de la información que le proporciona el enunciado gráfico, o bien buscando información externa.
2. Los profesores que responden utilizando procedimientos gráficos sólo a partir de la información que le proporciona el enunciado gráfico.

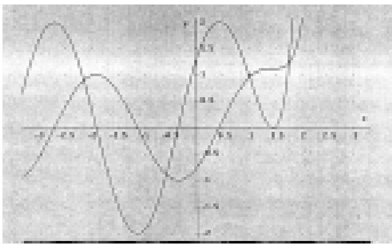
Los profesores respondieron a la situación usando sólo la información que le proporcionaba la gráfica del enunciado; sólo el profesor A exhibe, durante todo el proceso de resolución del problema, una perspectiva proceso de los macro objetos f (x), f ’(a) y de f ’(x), donde para calcular el valor de f ’(a) a partir de la información que le proporciona la gráfica requiere inicialmente encontrar la expresión simbólica que representa la función, o en su defecto la expresión simbólica de la recta tangente; posteriormente, aplica las técnicas indirecta de las reglas de derivación para calcular f ’(x) a partir de la expresión simbólica de f (x); y finalmente, calcula el valor de f ’(a) sustituyendo el valor de x = a en la expresión simbólica de f ’(x). Es decir, que requiere de elementos externos y de la manipulación de procesos algebraicos que incluyen traducciones y relaciones entre los macro objetos f (x) y f ’(x): G f (x)→ES f (x)⇨ ES f ’(x).

En términos generales, los profesores respondieron correctamente a la situación y no detectamos ninguna inconsistencia en el manejo de los conceptos que intervienen en el proceso de resolución. A continuación destacaremos algunas de las argumentaciones que dieron para los conceptos en los que se apoya su respuesta:

1. Para encontrar el valor de f (5) a partir de la información que proporciona la gráfica del enunciado, dos profesores aplican el concepto de gráfica de la función (B y C); dos profesores aplican el concepto de recta tangente a la curva (D y E); y un profesor requiere encontrar la expresión simbólica de la función para luego sustituir el valor de x = 5 (profesor A).
2. Para encontrar el valor de f ’(5), cuatro de los profesores calculan el valor de la pendiente de la recta tangente a partir de la información gráfica, sin embargo encontramos que tres aplican el cociente incremental (B, C y E) y uno aplica la tasa media de variación (profesor D). Por su parte, el profesor A, sigue exhibiendo una perspectiva proceso de los macro objetos f (x), f ’(a) y f ’(x), donde para calcular el valor de f ’(5), deriva la expresión simbólica de la recta tangente encontrada en el ítem *a)* y sustituye el valor de x = 5 en la expresión simbólica de la función derivada encontrada.
3. Dos de los profesores aplican técnicas de aproximación numérica en las que relacionan los macro objetos f (x) y f ’(a) para calcular el valor aproximado de la función en el punto de abscisa x = 5, 008 (D y E); mientras que dos de los

profesores lo resuelven gráficamente utilizando argumentos topológicos (vecindad del punto (5,3)) a partir de la información de la gráfica; y sólo el profesor A, coherente con la perspectiva proceso de los macro objetos f (x), f ’(a) y f ’(x) que viene exhibiendo en la resolución de los ítems *a)* y *b)*, para encontrar el valor de la función en el punto de abscisa x = 5, 008, sustituye el valor de *x* en la ecuación de la recta tangente encontrada en el ítem *a)*.

Red sistémica del problema 2-C



- Una es derivada de la otra
  - Algebraicamente
    - Ninguno
  - Gráficamente
    - Aplicando los criterios de la 1ª y 2ª derivada — (B, D)
    - Aplicando sólo el criterio de la 1ª derivada — (C)
- No hay relación de derivabilidad
  - Algebraicamente
    - No puede hacer G f (x) → ES f (x), por tanto, no puede hacer ES f (x) ⇨ ES f ’ (x), ni ES f ’ (x) → G f ’ (x) — (A)
  - Gráficamente
    - Coordina la función derivada f ’(x) con la recta tangente (y como las gráficas de las funciones son curvas y no son rectificaciones entre sí, por tanto, no pueden ser una función derivada de la otra) — (A)
- No responde
  - Porque falta información en la gráfica — (E)

Análisis descriptivo del problema 2-C

En el problema 2-C las respuestas de los profesores se agrupan en tres grupos excluyentes. Las dos primeras categorías a su vez las clasificamos atendiendo a las dos dimensiones del esquema de la derivada que nos interesa describir (algebraico y gráfico):

1. Los profesores que afirman correctamente que la gráfica de una de las funciones representadas es la derivada de otra.
   1.1. Utilizando procedimientos algebraicos a partir de la información que le proporciona el enunciado gráfico, o bien buscando información externa.
   1.2. Utilizando procedimientos gráficos sólo a partir de la información que le proporciona el enunciado gráfico.
2. Los profesores que afirman incorrectamente que no hay relación de derivabilidad entre las funciones representadas gráficamente.
   2.1. Utilizando procedimientos algebraicos a partir de la información que le proporciona el enunciado gráfico, o bien buscando información externa.
   2.2. Utilizando procedimientos gráficos sólo a partir de la información que le proporciona el enunciado gráfico.
3. Los profesores que no responden a la pregunta.

Con este problema los profesores se enfrentan a las gráficas de dos funciones representadas en un mismo eje de coordenadas cartesianas, y de lo que se trata es de relacionar los macro objetos f (x) y f '(x) en la interpretación y comparación de las gráficas proporcionadas. De las respuestas de los profesores podemos concluir que tres de ellos resolvieron correctamente a la situación planteada (B, C y D) y dos de los profesores tuvieron dificultades para resolverla (A y E); igualmente, queremos destacar algunos elementos conceptuales que nos resultan interesantes y que tendremos en cuenta en la revisión de la descomposición genética inicial del concepto de derivada:

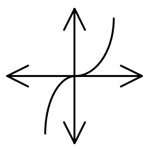
1. Tres de los profesores resolvieron gráficamente la situación planteada, sin embargo, sólo dos de ellos aplican coordinadamente los criterios de la primera y segunda derivada en el análisis monótono de las funciones representadas (B y D), mientras que el profesor C sólo aplica el criterio de la primera derivada durante el proceso de resolución del problema.
2. La perspectiva proceso que tiene el profesor A de los macro objetos f (x) y f '(x) es insuficiente para solucionar algebraicamente este problema, debido a la dificultad que hay para hacer las siguientes traducciones y relaciones entre

representaciones de los macro objetos f (x) y f ’(x): G f (x)→ES f (x)⇨ ES f ’(x)→G f ’(x). Esta dificultad, nos permite detectar inconsistencias en la interpretación gráfica que hace el profesor A del macro objeto f ’(x), tendiendo a confundirla con la gráfica de la recta tangente a la gráfica de la función en un punto.

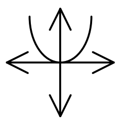
3. El profesor E no responde a la situación porque considera que falta información en la gráfica proporcionada; esto nos muestra las dificultades que tiene este profesor en la interpretación gráfica de los macro objetos f (x) y f ’(x), lo que implica, dificultades en la aplicación de los criterios de la primera y segunda derivada y de la continuidad de la función en el análisis de la variación local (f ’(a)) y de la variación global de la función (f ’(x)), a partir de la representación gráfica de la función.

Red sistémica del problema IV-v

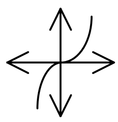
IV. Si tienes el gráfico de la siguiente función:



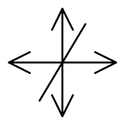
a. Escoge la función derivada que le corresponde entre los gráficos de las funciones representadas a continuación:



I. ☐



II. ☐



III. ☐

b. Justifica la respuesta escogida y por qué la no-elección de las otras dos opciones.

Responden que **I** es la G f ’(x)

- Gráficamente
  - Argumentando con criterios de la 1ª derivada | (B, D)
  - Argumentando con criterios de la 1ª y 2ª derivada | Ninguno
- Algebraicamente
  - Asocia la G f (x) con la ES f (x). (G f (x) →ES f (x)) [La gráfica de la función corresponde a y = x^3] | Relaciona la ES f (x) con la ES f ’(x) (ES f (x) ⇨ ES f ’ (x)) [Sí y = x^3⇒ y’= $3x^2$] | Traduce la ES f ’(x) con la G f ’(x). (ES f ’ (x)→ES f ’ (x)) [Sí y’= $3x^2$ entonces la gráfica es una parábola] | (A, B, C, D, E)

Análisis descriptivo del problema IV-v

Teniendo en cuenta las dos dimensiones del esquema de la derivada que intentamos describir, las respuestas de los profesores al problema IV-v las agrupamos en las siguientes categorías no excluyentes:

1. Los profesores que responden utilizando procedimientos algebraicos a partir de la información que le proporciona el enunciado gráfico, o bien buscando información externa.
2. Los profesores que responden utilizando procedimientos gráficos sólo a partir de la información que le proporciona el enunciado gráfico.

Al igual que el problema 2-C, con este los profesores se enfrentan a las gráficas de dos funciones y de lo que se trata es de relacionar los macro objetos f (x) y f ’(x) en la interpretación y comparación de las gráficas proporcionadas. La diferencia que hay con el problema anterior, es que este problema sí se puede resolver aplicando tanto procedimientos gráficos como algebraicos, lo cual nos permite detectar la tendencia gráfica o algebraica que tienen los profesores al abordar esta tipología de problemas. De las respuestas a los profesores podemos concluir:

1. En general, todos los profesores tienden a responder correctamente la situación planteada aplicando un proceso de resolución algebraico en el que se realizan las siguientes traducciones y relaciones entre los macro objetos f (x) y f ’(x): G f (x)→ES f (x)⇨ES f ’(x)→G f ’(x).
2. Al indagar en la justificación de la respuesta encontrada mediante el proceso algebraico, se evidencian nuevamente inconsistencias en la interpretación gráfica del macro objeto f ’(x); más concretamente, los profesores A y E, interpretan gráficamente f ’(x) como la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto (f ’(a)), y la gráfica de f ’(x) se tiende a confundir con la gráfica de la recta tangente a la gráfica de la función en un punto.
3. Sólo los profesores B y D, complementariamente al proceso algebraico aplican el criterio de la primera derivada en el análisis monótono de las funciones representadas para justificar la respuesta encontrada.

a. Comprensión algebraica de la función derivada

Los problemas que analizamos para profundizar en la comprensión gráfica que tienen los profesores de los macro objetos f ’(a) y f ’(x) son: 5-C, I-v, II-v y II-v, que conforman la línea tres de coherencia.

Red sistémica del problema 5-C

5. Halla la pendiente y la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función:
f (x) = 3x² - 2x, en el punto de abscisa 2.

- Algebraicamente
  - Proceso de calcular f ’(2) (ES f (x) ⇨ ES f ’(2)) Usando técnicas de derivación directa
    - Diferencia la función derivada de la derivada de la función en un punto fijo
      - (E)
    - No diferencia la función derivada de la derivada de la función en un punto fijo
      - (A, B, C, D)
- Gráficamente
  - Ninguno

Análisis descriptivo del problema 5-C

Teniendo en cuenta las dimensiones del esquema definido, organizamos las respuestas de los profesores a este problema en dos grupos no excluyentes:

1. Los profesores que responden utilizando procedimientos algebraicos a partir de la información que le proporciona el enunciado, o bien buscando información externa.
2. Los profesores que responden utilizando procedimientos gráficos sólo a partir de la información que le proporciona el enunciado.

Todos los profesores llegaron a la respuesta correcta aplicando procesos algebraicos y ninguno de ellos utilizó procesos de resolución gráficos. Un aspecto a destacar de esta situación es la poca dificultad que tuvieron los profesores para resolverla y la valoración que hicieron de ella como un problema tipo de los que siempre aparecen en su práctica.

El análisis particular de la red no nos proporciona elementos potentes, pero sí que deja ver la tendencia de los profesores de abordar los problemas, independientemente del contexto, mediante la aplicación de procesos algebraicos. A continuación destacamos las conclusiones a las que llegamos después del análisis de la red:

1. Todos los profesores coincidieron en aplicar las técnicas indirectas de las reglas de derivación, que incluyen las siguientes traducciones y relaciones entre los macro objetos f (x), f ’(x) y f ’(a): ES f (x)⇨ES f ’(x)→ES f ’(a).
2. En el proceso de justificación del resultado encontrado, sólo el profesor E, explicita verbalmente las diferencias entre los macro objetos f ’(a) y f ’(x) como elemento y clase.

Red sistémica del problema I-v.

I. ¿Qué es una derivada? Defínelo o explícalo como desees.

- Define la función derivada
  - Hace énfasis en la sintaxis (aparato formal)
    - $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ — (A, B, C, D, E)
  - Hace énfasis en la semántica (significado)
    - Razón de cambio entre magnitudes — (A, B, C, D, E)
- Define la derivada en un punto
  - Hace énfasis en la semántica (significado)
    - Significado geométrico
      - m de la recta tangente — (A, B, C, D, E)
    - Significado físico
      - Velocidad instantánea — (A, B, C, D, E)
      - Aceleración — (A, C, D, E)
      - Flujo de un fluido — (A, E)
    - Otro significado
      - Costo marginal — (A, C, D, E)

Análisis descriptivo del problema I-v

En esta viñeta los profesores se enfrentan a la definición de los macro objetos f ’(a) y f ’(x). En la pregunta hacemos referencia a la derivada sin especificar claramente si nos estamos refiriendo al macro objeto f ’(a) o al macro objeto f ’(x), precisamente, de lo que se trata es de rastrear las diferencias y las relaciones que puedan llegar a establecer los profesores entre estos dos macro objetos. Por tanto, las respuestas de los profesores las organizamos en dos grandes grupos no excluyentes, y a su vez, las clasificamos atendiendo a los aspectos formales y de aplicación de cada uno de estos macro objetos, así:

1. Los profesores que sólo definen la función derivada.
   1.1. Hacen énfasis en la sintaxis del concepto (aparato formal).
   1.2. Hacen énfasis en la semántica del concepto (significado).
2. Los profesores que sólo definen la derivada en un punto.
   2.1. Hacen énfasis en la sintaxis del concepto (aparato formal).
   2.2. Hacen énfasis en la semántica del concepto (significado).

De las respuestas de los profesores podemos destacar las siguientes conclusiones que pueden ayudar en la revisión de la descomposición genética inicial:

1. Cuando los profesores definen el macro objeto f '(a) sólo hacen énfasis en los aspectos semánticos: significado geométrico, significado físico, y otros significados; pero no hacen referencia a la sintaxis del macro objeto.
2. Cuando definen el macro objeto f '(x) hacen énfasis tanto a la sintaxis como a la semántica, pero esta última reducida a la razón de cambio entre magnitudes, suponemos que hacen referencia a la función límite de las razones de cambio entre magnitudes.
3. Encontramos que la ausencia de elementos sintácticos en la definición del macro objeto f '(a) puede ser un punto de referencia que nos permite detectar dificultades en la comprensión de la relación entre los macro objetos f '(a) y f '(x) como elemento y clase.

Red sistémica del problema II-v

II. ¿Qué significa que la derivada de la función $y = x^2$ sea la función $y = 2x$? Explica y justifica la solución.

- Define la función derivada
  - Gráficamente
    - Representa la recta tangente en (x, y) — (A)
    - Función que asocia a cada punto del dominio la *m* de la recta tangente a la gráfica de la función en ese punto — (B, D)
  - Algebraicamente
    - Modelo matemático de la función derivada — (B, D)
    - Modelo matemático de la recta tangente a *f* — (A)
- Define la derivada en un punto
  - Gráficamente
    - El valor de la *m* de la recta tangente a la gráfica de la función en un punto fijo — (B)
  - Algebraicamente
    - Expresión que permite calcular el valor de la *m* de la recta tangente a la gráfica de la función en un punto fijo, calculando f ’(a) — (A, B, C)
    - Es la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en un punto fijo — Justifica: paso de la secante a la tangente (que es única) — (E)

Análisis descriptivo del problema II-v

Las respuestas a este problema las organizamos en dos grupos no excluyentes, que a su vez contienen dos subgrupos de categorías no excluyentes. Las respuestas quedan organizadas así:

1. Los profesores que justifican definiendo la función derivada.
   1.1. Usando argumentos algebraicos.
   1.2. Usando argumentos gráficos.
2. Los profesores que justifican definiendo la derivada en un punto.
   2.1. Usando argumentos algebraicos.
   2.2. Usando argumentos gráficos.

De las respuestas a los profesores a este problema podemos llegar a las siguientes conclusiones:

1. Sólo los profesores B y D justifican correctamente y = 2x en términos de la función derivada, usando argumentos gráficos y algebraicos.
2. El profesor B, además, explicita verbalmente las diferencias y relaciones entre los macro objetos f ’(a) y f ’(x) como elemento y clase respectivamente, justificándolo correctamente con argumentos gráficos y algebraicos.
3. Los profesores A y E, evidencian dificultades para diferenciar y relacionar los macro objetos f ’(a) y f ’(x). Por un lado, el profesor A reduce, tanto gráfica como algebraicamente, al macro objeto f ’(x) en el macro objeto f ’(a), llegando a asociar incorrectamente la función y = 2x con la expresión simbólica de la recta tangente y con la gráfica de la recta tangente. Por otro lado, el profesor E, sólo hace referencia, incorrectamente, a la función y = 2x como la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en un punto.
4. El profesor C, no relaciona explícitamente los macro objetos f ’(a) y f ’(x), y sólo relaciona a la función y = 2x con la expresión que le permite calcular el valor de la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en un punto fijo calculando f ’(a).

Red sistémica del problema III-v

III. Usando sólo una calculadora, puedes conseguir un método para calcular el valor aproximado de la derivada de f (x) = 4 ^{x}, en x = 2. Explica y justifica la solución.

- Aproximación numérica (Por función gradiente)
  - Ninguno
- Algebraicamente
  - Aplicando la técnica indirecta de las reglas de derivación. (derivada de la función exponencial y = a^x)
    - No explicita el resultado: y’= 4^x. Ln 4
      - (A, C)
    - Explicita el resultado: (*m* = y’= 4^x. Ln 4 ≈ 22)
      - Lo justifica en términos del valor de la *m* de la recta tangente a la gráfica de la función y = 4^x en el punto de abscisa x = 2
        - (D)
      - No justifica el resultado
        - (B, E)

Análisis descriptivo del problema III-v

Inicialmente, pretendíamos organizar las respuestas de los profesores atendiendo a las técnicas de derivación que aplicaban al resolver el problema, por ello, definimos dos grupos de respuestas no excluyentes.

1. Profesores que resuelven aplicando técnicas de aproximación numérica y gráfica.
2. Profesores que resuelven algebraicamente aplicando técnicas de derivación directas o indirectas.

Sin embargo, los profesores sólo respondieron a la situación aplicando procedimientos algebraicos, centrados en la aplicación de la técnica indirecta de las reglas de derivación. Las conclusiones que podemos sacar del análisis de la red son las siguientes:

1. Todos los profesores aplican correctamente la regla de derivación de las funciones exponenciales ($y = a^x$).
2. Sólo el profesor D justifica el uso de la técnica indirecta y el resultado encontrado en términos del macro objeto f ’(a), es decir, como el valor de la pendiente de la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función $y = 4^x$ en el punto de abscisa $x = 2$.
3. Ninguno de los profesores utiliza técnicas de aproximación numérica y gráfica.

5.3.2. ANÁLISIS GLOBAL DEL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO DEL CONTENIDO DE LOS PROFESORES: la derivada como objeto de enseñanza y aprendizaje

Para este análisis tendremos en cuenta los resultados que arroja el análisis particular de los aspectos que consideramos al describir la componente didáctica del contenido, como son: la programación, la unidad didáctica y el análisis de los libros de texto. Inicialmente, haremos una descripción general del itinerario didáctico y el tratamiento matemático que proponen los profesores para abordar la enseñanza y aprendizaje de los macro objetos f ’(a) y f ’(x). Teniendo en cuenta las categorías definidas, posteriormente, nos centraremos en la descripción de las tareas que usualmente están presentes en la evaluación de estos macro objetos y las que conforman la práctica matemática de estos profesores, con el propósito de hacer una tipología de tareas que nos permita aproximarnos a una caracterización de la actividad matemática que se fomenta en el nivel de secundaria del sistema colombiano.

Con este análisis perseguimos dos objetivos: en primer lugar, tener una visión global de la actividad matemática que estos profesores generan en el aula, intentando destacar similitudes y diferencias tanto en el tratamiento de los macro objetos como en las tareas que proponen y evalúan para buscar la comprensión de los mismos; y en segundo lugar, recoger elementos conceptuales y didácticos que nos ayuden a hacer una revisión de la descomposición genética inicial que realizamos del concepto de derivada, es decir, que dé luz sobre la epistemología y la didáctica asociada al concepto de derivada.

5.3.2.1. Descripción del análisis global de la estructura y organización del objeto matemático derivada para su enseñanza en el nivel de bachillerato

a. Conceptos estructurantes que justifican las técnicas de f ’(a) y f ’(x)

El análisis de las programaciones y la unidad didáctica propuestas por los profesores nos muestran que en términos generales se opta por un itinerario tradicional para la enseñanza del concepto de derivada, en el cual, primero se desarrolla una unidad didáctica dedicada la estudio del concepto de límite, en su mayoría centrada en los procesos algebraicos del mismo. Los profesores A, B, D y E, dicen que previamente a la introducción de la derivada hacen un tratamiento intuitivo del concepto de límite mediante aproximaciones gráficas y numéricas que ayuden posteriormente a la comprensión de los macro objetos f ’(a) y f ’(x). Resulta curioso que el profesor E dice utilizar la paradoja de Zenón como una situación que le ayuda en el tratamiento intuitivo del concepto límite, pero contradictoriamente encontramos que el análisis de la respuesta dada por este profesor a la versión de la paradoja que le presentamos, nos muestra que tiene inconsistencias en el manejo de los conceptos del precálculo y del cálculo inmersos en la situación (concepción potencial del infinito, etc.), significativos para la comprensión de los macro objetos f ’(a) y f ’(x).

La prioridad varía, pero en general todos los profesores coinciden en que los prerrequisitos que han de manejar los estudiantes para poder desarrollar la unidad de derivada son: funciones, pendiente, conceptos de la trigonometría y límite. Con relación al primero de ellos, funciones, sólo el profesor B plantea en la unidad didáctica actividades para ir tratando progresivamente los diferentes aspectos de la funciones (tipos de funciones, análisis monótono, etc.) hasta llegar a la introducción del macro objeto f ’(x), a través del manejo de las diferentes representaciones y relaciones entre representaciones de este macro objeto (se tratan conjuntamente las visiones de funciones dadas por Fermat (ES f (x)→G f (x)) y Descartes (G f (x)→ES f (x)). El resto de profesores hace referencia al concepto como importante, e incluso alguno de ellos habla de la importancia del manejo algebraico y gráfico de este concepto pero no plantean actividades concretas previas a la introducción de los macro objetos f ’(a) y f ’(x), y en términos generales se basan sólo en la visión de funciones dada por Fermat (ES f (x)→G f (x)).

Un aspecto a resaltar del tratamiento de las funciones es que ninguno de los profesores hace referencia a la coordinación de los diferentes aspectos de la continuidad de una función en un punto y en un intervalo (discontinuidad evitable, discontinuidad no evitable), que consideramos que es una de las características esenciales para la definición formal de los macro objetos f ’(a) y f ’(x). Más concretamente, no encontramos tareas, en toda la unidad didáctica ni en la evaluación, en las que se estudien funciones definidas a trozos, que requieran la comprensión de la continuidad de funciones, bien sea en un intervalo o en todo el dominio de la misma.

Con respecto al segundo concepto estructurante, el de pendiente, los profesores no se detienen a describir el tratamiento previo que hacen de este objeto. Tan sólo el profesor B hace un trabajo previo que ayuda posteriormente a la comprensión del macro objeto f ’(a), ya que usa diferentes representaciones del concepto, pero sin hacer referencia a la pendiente como la tangente trigonométrica del ángulo que forma la recta tangente con el eje de las abscisas. Por su parte, el profesor A hace sólo referencia a la importancia que le otorga a este concepto, previa la enseñanza de los macro objetos f ’(a) y f ’(x).

En general, en los libros de texto se define la pendiente utilizando la notación incremental ($m = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$); y en algunos casos aparece, conjuntamente con la notación incremental, pero sin coordinación alguna, la notación funcional

($m=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ o en su defecto, $m=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$), que a nuestra manera de ver ayudaría a la comprensión posterior del macro objeto f '(a).

Finalmente, respecto al tercer concepto estructurante, el de límite de funciones, como ya explicamos en la introducción, los profesores realizan una unidad previa a la introducción del concepto de derivada, pero centrándose sobre todo en los procedimientos y técnicas algebraicas asociadas al cálculo del límite de funciones, más que en la interpretación y comprensión de este concepto matemático. Y posteriormente, en la misma unidad de la derivada, cuatro de los profesores (A, B, D y E) dicen dedicarle un espacio a la introducción intuitiva del concepto para llegar a la definición de los macro objetos f '(a) y f '(x).

b. Técnicas que utilizan para calcular los macro objetos f '(x) y f '(a)

Analizando qué técnicas tiene que saber el alumno para calcular f '(x), como resultado del estudio de la unidad didáctica que proponen los profesores, encontramos que aparecen dos técnicas de derivación:

I. Técnica directa por definición en términos de límite
II. Técnica indirecta por las reglas de derivación

Sólo en el caso del profesor B encontramos tareas, tanto en la evaluación como en la unidad didáctica, que requieran de técnicas directas de aproximación gráfica y numérica; y en el caso del profesor A, encontramos un tipo de tareas que requiere de alguna técnica de derivación gráfica.

Después, rastreamos qué técnicas han definido para calcular f '(a) para luego poder justificar las técnicas de cálculo de f '(x), y encontramos que, en general, no existen técnicas para calcular f '(a), porque en las definiciones que presentan los profesores en la unidad didáctica, están mezclados los macro objetos f '(a) y f '(x). Es decir que no se diseñan actividades y tareas que permitan la construcción de las técnicas de cálculo del macro objeto f '(a), sino que aparecen reducidas al resultado de sustituir el valor de $x=a$ en las técnicas (I y II) que se utilizan para calcular el macro objeto f '(x); y ello independientemente de que se haya introducido primero el macro objeto f ’(a) y después el macro objeto f ’(x), o *viceversa.* Y sólo de forma periférica, en las tareas que propone el profesor B se fomenta el uso de técnicas gráficas para el cálculo del marco objeto f ’(a).

c. Definición de los macro objetos f ’(a) y f ’(x), o *viceversa*

Hemos identificado dos itinerarios didácticos para la enseñanza y aprendizaje de los macro objetos f ’(a) y f ’(x): los profesores que, aparentemente, definen primero el macro objeto f ’(a) y después el macro objeto f ’(x); y los que definen primero el macro objeto f ’(x) y, luego, definen el macro objeto f ’(a). A continuación nos detenemos a puntualizar algunas singularidades y diferencias de los aspectos tratados en de cada uno de los dos itinerarios.

- **Definen primero el macro objeto f ’(a) y después el macro objeto f ’(x)**

Los dos profesores, A y B, aparentemente optan por introducir primero el macro objeto f ’(a) y, más adelante, el macro objeto f ’(x). Los dos profesores apuestan por el estudio de los dos problemas históricos que dieron origen a la construcción del concepto de derivada: el cálculo de la pendiente de la recta tangente en un punto (que denomina interpretación geométrica de la derivada) y el cálculo de la velocidad instantánea (que denomina interpretación física de la derivada); encontrando diferencias en el tratamiento que estos profesores le dan a los mismos.

El profesor B plantea un itinerario didáctico para la enseñanza y aprendizaje de los macro objetos f ’(a) y f ’(x) que sigue, *grosso modo*, el desarrollo histórico de los mismos, basado en el método que utilizaba Newton para calcular velocidades instantáneas y para calcular la pendiente de la recta tangente en un punto a partir de las pendientes de las rectas secantes, cuando éstas se aproximan a la recta tangente. Es así cómo, apoyándose en la definición que propone el libro de texto, después de proponer y resolver un grupo de problemas, introduce conjuntamente la definición de los objetos tasa instantánea de variación y pendiente de la recta tangente como la derivada en un punto P, sólo en términos del límite del cociente incremental. Mientras que el profesor A hace un tratamiento de los dos problemas históricos mediante el tratamiento algebraico de los mismos: primero hace la interpretación geométrica de la derivada y posteriormente la física.

Hay que señalar que en la unidad didáctica de los profesores A y B se proponen introducir primero la definición del macro objeto f ’(a), después de un tratamiento fenomenológico previo de los objetos pendiente de la recta secante, velocidad media y tasa media de variación, para posteriormente, pasar a definir los objetos pendiente de la recta tangente, velocidad instantánea y, por tanto, definir el macro objeto f ’(a) como el límite del cociente incremental; encontramos que el uso de esta notación implica utilizar el aparato sintáctico del macro objeto f ’(x) sin haberlo definido previamente. Es decir, que al definir el macro objeto f ’(a), consciente o inconscientemente, se avanza la definición del macro objeto f ’(x), lo cual genera confusiones entre los macro objetos f ’(a) y f ’(x), tales como:

1. No especifican las coordenadas del punto fijo P; por tanto, no se sabe si se hace referencia a un punto en concreto o a todos los puntos del dominio de la función.
2. La notación incremental que usan en la definición, conlleva al error de definir el macro objeto derivada en un punto como el macro objeto función derivada; es decir, como el límite del cociente incremental de la función en todos los puntos del dominio. Por tanto, se confunden los macro objetos f ’(a) y f ’(x), puesto que habla de la derivada en un punto, de su interpretación física como la velocidad instantánea, y la define como la función velocidad instantánea (que es la derivada de la función desplazamiento); y en su interpretación geométrica se da un tratamiento funcional al macro objeto f ’(a) que es un número el valor de la pendiente de la recta tangente en el punto P (a, f (a)).
3. El uso no justificado y coordinado de las dos notaciones para definir el macro objeto f ’(a), puede ocasionar conflictos semióticos en la comprensión de los objetos involucrados; puesto que no hay un tratamiento cualitativo del paso de la notación funcional la cual se usa inicialmente y después desaparece, a la incremental que es la que se sigue utilizando en toda la unidad.

Después, ambos definen el macro objeto f ’(x) como el límite del cociente incremental. Sin embargo, al definirlo el profesor B hace un intento por diferenciar los macro objetos f ’(a) y f ’(x) como elemento y clase. Es decir que insiste en el hecho de que la función derivada es otra función que relaciona a cada punto del dominio con el valor de la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en dicho punto. Por su parte, el profesor A, que sigue literalmente un libro de texto, define rápidamente la función derivada como el límite del cociente incremental, sin darle mucha importancia al proceso de síntesis del macro objeto f '(a) en el macro objeto f '(x); solo hace referencia a este paso como un cambio de variable de *a* por *x* en la definición del macro objeto f '(a), como un comentario más del libro de texto.

Consideramos que el intento que hace el profesor B por diferenciar los macro objetos f '(a) y f '(x), quizás pueda estar influenciado por la comprensión que tiene este profesor de las diferencias y relaciones entre estos dos macro objetos. Creemos que es muy difícil que el alumno llegue a comprender las diferencias sintácticas y semánticas entre estos dos macro objetos, puesto que las dos definiciones de los macro objetos f '(a) y f '(x) propuestas en la unidad didáctica, incluyen sólo el tratamiento de la notación incremental que presentan los inconvenientes anteriormente descritos y que dificultan la comprensión de estos macro objetos. Sin embargo, valoramos que una herramienta poderosa que tiene este profesor, para ayudar a sus estudiantes a relacionar y comprender estos macro objetos, es la riqueza de la metodología que implementa en el aula basada en la resolución de problemas que favorecen variedad de traducciones y relaciones entre estos macro objetos y que involucran una variedad de fenómenos que organizan los mismos.

Después de la introducción del macro objeto f '(x), los profesores A y B proponen el estudio de las reglas de derivación y la aplicación de estos conceptos a la resolución de problemas de optimización y construcción e interpretación de gráficas de funciones. En el caso de estos dos profesores, encontramos que no hay un espacio dedicado al estudio de la regla de la cadena; por tanto, no podemos inferir que estos profesores hayan optado por la definición de los incrementos como un tratamiento previo para la introducción y justificación de la regla de la cadena. Más bien consideramos que el uso de la notación incremental puede obedecer a los siguientes factores: (1) la tradición histórica de utilizar los incrementos por influencia de la física, más en nuestro contexto, donde la formación del profesorado es bidisciplinar en matemática y física y los profesores son simultáneamente profesores de las dos asignaturas; y (2), la importancia que se le otorga al libro de texto como referente principal para la transposición didáctica acrítica de los conceptos que se enseñan.

- **Definen primero el macro objeto f ’(x) y después el macro objeto f ’(a)**

Los profesores C, D y E optan por introducir primero el macro objeto f ’(x) y más tarde aparece de manera superficial, e incluso accidentalmente la definición del macro objeto f ’(a). Al igual que en el itinerario anterior, encontramos diferencias entre los libros de texto en la forma en la que abordan la definición de los macro objetos. Creemos conveniente recordar, que los profesor C y E siguen linealmente un mismo libro de texto, y que el profesor D sigue uno diferente, pero que el tratamiento que dan estos libros a los macro objetos es muy similar, salvo por algunos matices, a nuestra manera de ver favorables para el aprendizaje en el texto que sigue el profesor D.

En los tres casos, la definición del macro objeto f ’(x) aparece después del tratamiento previo de los objetos incremento de una función, incremento relativo de una función o tasa media de variación como el límite del cociente incremental. El libro de texto que siguen los profesor C y E hace sólo un acercamiento algebraico de los objetos tasa media de variación y velocidad media, presentando el objeto velocidad media como una aplicación del objeto tasa media de variación a la física y no justificando la fenomenología histórica del concepto. Lo anterior puede justificar que el objeto pendiente de la recta tangente no aparezca en la introducción del objeto tasa media de variación. En cambio, el libro de texto que sigue el profesor D, sí que utiliza acercamientos algebraico, numérico y gráfico para introducir estos objetos, pero al igual que en el libro de los profesores C y E, no se estudian los aspectos fenomenológico de los mismos, sino que aparecen como técnicas algebraicas (fórmulas) que permiten abordar ejercicios tipo enunciados en diferentes contextos.

Para definir el macro objeto f ’(x), parten de un ejercicio de cálculo del incremento relativo y analizan lo que ocurre cuando el incremento de la variable independiente tiende a cero; pero hay que señalar que no se utiliza ninguna técnica de aproximación gráfica o numérica que ayude a visualizar los objetos matemáticos y los signos matemáticos asociados a la notación que se encuentran inmersos en la definición. Esta definición del macro objeto f ’(x) tiene el mismo inconveniente de la complejidad semiótica que el uso de la notación incremental y puede ocasionar dificultades en la comprensión del macro objeto f ’(x), tal y como lo hemos descrito en el análisis de los profesores A y B.

En general, de la definición que dan en los libros de texto que usan los profesores C, D y E, podemos llegar a las siguientes conclusiones: (1) al definir el macro objeto f ’(x) no se hace énfasis en el significado del concepto sino en la sintaxis del mismo, es decir que no se define la derivada como otra función que asigna a cada punto del dominio el valor de la pendiente de la recta tangente en dicho punto; (2) consideramos que abusan en el uso de notaciones sin justificación alguna, puesto que, inicialmente aparece sólo la notación incremental y de manera mágica y sin ninguna justificación, se introducen informalmente la notación diferencial de Leibnitz (*dy/dx*) y la notación actual de Cauchy (*f’(x)*), sin apoyarse siquiera en alguna gráfica que ayude a visualizar los signos asociados a las notaciones; se deja al estudiante la responsabilidad de comprender el paso y la relación entre ellas.

Posteriormente, en los dos libros, se trata el objeto velocidad instantánea sin haber introducido previamente el macro objeto f ’(a). En el caso del libro que sigue el profesor D, aparece en un margen del libro, y sin darle mayor importancia ni sintáctica ni semántica, la definición del objeto velocidad instantánea para poder solucionar una tipología de tareas, el cálculo de la velocidad instantánea de un móvil a partir de la expresión simbólica de la función desplazamiento. Sin embargo, esta definición no es del todo correcta porque en algunos momentos da un tratamiento funcional a la velocidad como $V(t) = \underset{\Delta t \to 0}{Lim} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$; y en otros momentos hace referencia a la velocidad como un número, pero confundiendo incorrectamente los macro objetos f ’(a) y f ’(x), así: $V = \frac{ds}{dt} = \underset{\Delta t \to 0}{Lim} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \underset{\Delta t \to 0}{Lim} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$. Es decir, que se confunde la derivada en un punto en su interpretación física que es el valor de la velocidad instantánea, con la función derivada razón de cambio o función velocidad instantánea.

En general, de la forma como se introduce el objeto velocidad instantánea podemos inferir tres cosas: (1) hay una confusión en la comprensión de los macro objetos f ’(a) y f ’(x), puesto que introducido sólo el macro objeto f ’(x), en términos del cociente incremental, que es una función se pide el cálculo algebraico del macro objeto f '(a) que es un número; (2) no hay ninguna conciencia de la complejidad que implica el paso del macro objeto f '(a) al objeto f '(x) o *viceversa*, puesto que las técnicas para el cálculo del macro objeto f '(a) aparecen espontáneamente y sin justificación como una simple sustitución de variable $x = a$; y (3), no se privilegia la coordinación de los objetos velocidad instantánea y tasa instantánea de variación que organiza el macro objeto f '(a), como tampoco el proceso de síntesis de estos objetos en el macro objeto f '(x).

Seguidamente, aparece la interpretación geométrica de la derivada, y con ella la "definición" del macro objeto f '(a); no queda claro inicialmente si se está refiriendo a la interpretación geométrica del macro objeto f '(x) o si se pretende introducir la definición del macro objeto f '(a). Es aquí, cuando por primera vez en los libros de texto, aparece el objeto pendiente de la recta tangente definido mediante el uso de la notación incremental. Consideramos que la notación que usa en la definición de este macro objeto, conduce al mismo error cometido al definir el objeto velocidad instantánea, que es el de definir el macro objeto derivada en un punto (que es un número) como el macro objeto función derivada (que es una función).

Al igual que en el tratamiento que dan al objeto velocidad instantánea, consideramos que el macro objeto f '(a) "se introduce", para justificar la resolución de un tipo de tareas, en las que se pide hallar la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a una curva en un punto fijo. La forma como lo definen y lo tratan puede ayudar a emerger inconsistencias en la comprensión de los macro objetos f '(a) y f '(x), como por ejemplo, el terminar considerando que el macro objeto f '(x), sin diferenciarlo del macro objeto f '(a), es la ecuación y la gráfica de la recta tangente (Amit y Vinner, 1990). Igualmente, las técnicas de f '(a) se reducen de este tratamiento a una simple sustitución de variables $x = a$ en la expresión obtenida de f '(x) por la aplicación de cualquier técnica algebraica de cálculo de f '(x), lo cual implica que no se traten técnicas gráficas y numéricas que ayuden a una mejor comprensión de las relaciones y diferencias entre estos dos macro objetos.

A partir de aquí, se introducen las reglas de derivación, y en los tres casos, seguidamente se introduce la regla de la cadena, pero se da un tratamiento diferente en cada uno de los libros de texto; así: (1) el libro de texto que usan los profesores C y E, al definir la regla de la cadena, no usa la notación diferencial, y por tanto, no queda justificada la introducción de la notación incremental y de la notación diferencial para definir los macro objetos f '(a) y f '(x); y (2) el libro de texto que sigue el profesor D, al definir la regla de la cadena usa la notación diferencial para demostrarla. Por tanto, en cierta medida, queda justificada la introducción de la notación incremental y de la notación diferencial para definir los macro objetos f '(a) y f '(x), pero no tenemos evidencia empírica de que el profesor D sea consciente de ello.

Regla de derivación en cadena

Sea $y = f(U)$ **(1)** siendo U una función de x. En otras palabras, y es la función compuesta de U y f. Si se incrementa x en Δx, U queda también incrementada ΔU, para producir un incremento en y, Δy. Se tiene: $y + \Delta y = f(U + \Delta U)$ **(2)**

Efectuando la diferencia de **(2)** y **(1)**: $\Delta y = f(U + \Delta U) - f(U)$

Dividiendo por Δx: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(U+\Delta U) - f(U)}{\Delta x}$

Si multiplicamos y dividimos al segundo miembro por ΔU con lo cual no se altera, se tiene:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(U+\Delta U) - f(U)}{\Delta x} . \frac{\Delta U}{\Delta U} = \frac{f(U+\Delta U) - f(U)}{\Delta U} . \frac{\Delta U}{\Delta x}$$

Pasando al límite cuando Δx tiende a cero (0) y teniendo en cuenta que: $\underset{\Delta x \to 0}{Lim} \Delta U = 0$:

$$\underset{\Delta x \to 0}{Lim} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \underset{\Delta x \to 0}{Lim} \frac{f(U+\Delta U) - f(U)}{\Delta U} . \frac{\Delta U}{\Delta x}$$

Aplicando el teorema del límite 3.3:

$$\underset{\Delta x \to 0}{Lim} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \underset{\Delta U \to 0}{Lim} \frac{f(U+\Delta U) - f(U)}{\Delta U} . \underset{\Delta x \to 0}{Lim} \frac{\Delta U}{\Delta x}$$

Aplicando la definición de derivada:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dU} . \frac{dU}{dx}$$

Esta formula se conoce como **la regla de derivación en cadena** y sirve para encontrar la derivada de $y = f(U)$ respecto a x si U es una función de x, porque bastará encontrar dy/dU y luego derivar U respecto a x.

Por tanto, teniendo en cuenta las dificultades semióticas que implica el uso de la notación incremental, concluimos que al igual que en el itinerario anterior, los profesores pueden estar influenciados por los siguientes factores:

1. La tradición histórica de utilizar los incrementos por influencia de la física, más en nuestro contexto, donde la formación del profesorado es bidisciplinar en matemática y física; además ellos simultáneamente son profesores de las dos asignaturas.
2. La importancia que se le otorga al libro de texto como referente principal para la transposición acrítica de los conceptos que se enseñan.
3. En el caso de estos profesores (C, D y E), añadimos la influencia de las concepciones sobre la matemática en la forma como abordan la enseñanza y desarrollo de los conceptos matemáticos (Moreno, 2000), en este caso concreto, sobre la enseñanza de los macro objetos f ’(a) y f ’(x).

Finalmente, creemos conveniente señalar que el profesor E, después del tratamiento de la regla de la cadena y las reglas de derivación, opta por introducir el teorema del valor medio, sin haber desarrollado antes el teorema de Rolle. Consideramos que la incorporación de este contenido temático en el nivel de secundaria tendría sentido, si se hubieran dado las siguientes condiciones: (1) haber tratado previamente diferentes notaciones de los objetos tasa media de variación, pendiente de la recta secante, pendiente de la recta tangente, tasa instantánea de variación que organizan el macro objeto f ’(a), y las técnicas asociadas a la manipulación y cálculo de los mismos, que no son tan simples e inmediatas (Azcárate, 1990; Font, 2000); (2) haber introducido previamente el Teorema de Rolle, que a nuestra manera de ver, es útil para el estudio gráfico y algebraico de los puntos máximos y mínimos; y entonces, el teorema del valor medio aparecería justificado como una generalización del Teorema de Rolle, y por tanto, ayudaría al estudio gráfico, numérico y algebraico de los objetos inmersos en él.

Del análisis del tratamiento que dan los profesores a los macro objetos f ’(a) y f ’(x) en la unidad didáctica, concluimos que hemos detectado un problema que se presenta con una cierta regularidad y generalidad tanto en el análisis de la derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza aprendizaje en el sistema educativo colombiano, que consiste en la confusión o la no diferenciación entre los macro objetos f ’(a) y f ’(x); y por tanto, el no tratamiento de técnicas de derivación para el calculo del macro objeto f ’(a), quedando éstas reducidas a la simple sustitución de la variable $x = a$ en la expresión simbólica del macro objeto f ’(x), hallada mediante la aplicación de las técnicas de derivación I y II. Esto se constata con mayor o menor grado, en todos los libros de textos de matemática de 11º que usan los profesores que participaron en este estudio como complemento del diseño de la unidad didáctica.

5.3.2.2. Descripción del análisis global de la estructura y contenido de las tareas y actividades

i. Con relación a las evaluaciones

El análisis general de las 36 tareas propuestas por los profesores en las evaluaciones del concepto de derivada, sintetizado en la tabla 18, nos desvela una tipología de 14 modelos de tareas que los profesores *dicen* implementar y evaluar con más frecuencia en la asignatura de matemática de 11º. Encontramos que en su mayoría son tareas que involucran conceptos estructurantes del concepto de derivada, como por ejemplo, función, tasa media de variación, límite, etc., hasta evaluar diferentes aspectos, tanto sintácticos como semánticos de dicho concepto. A continuación haremos un análisis descriptivo general de las tareas propuestas por los profesores en las evaluaciones del concepto de derivada, teniendo como base el instrumento 1 (tabla 4 del capítulo 3), que es la tabla que diseñamos para el análisis de las tareas, tomando como referentes los organizadores del currículo (Rico, 1997) y la teoría APOE (Dubinsky y otros, 1996); y el instrumento 2 (tabla 5 del capítulo 3), que es la tabla sobre el análisis de las traducciones entre representaciones del concepto de derivada, basada en Font (2000).

En la tabla 19 se pueden visualizar los cinco tipos de tareas que son presentadas por la mayoría de los profesores en las evaluaciones: la P (1), que demanda en los estudiantes la utilización de la regla de los cinco pasos para calcular la función derivada a partir de la expresión simbólica de la función; la P (3), donde se les piden a los estudiantes encontrar la ecuación de la recta tangente y la ecuación de la recta normal a la gráfica de una función en un punto, dada la expresión simbólica de la misma; la P (4), que persigue el cálculo indirecto de la función derivada mediante el uso de las reglas de derivación a partir de la expresión simbólica de la función; la P (6), donde se busca el análisis monótono de la función y la construcción de la gráfica de la misma, partiendo de la expresión simbólica de la función y usando los criterios de la primera y segunda derivada; y finalmente, la P (9) que es la única de las tareas comunes que busca la aplicación del concepto en un contexto no matemático como es el campo de la Física, pero que se encuentra enunciada en un contexto algebraico.

Profesor / Tipo	A	B	C	D	E	
P (0)			1	1	1	**3**
P (1)			1	1	2	**4**
P (2)	1					1
P (3)		1	1	1	2	**5**
P (4)			3	1	1	**5**
P (5)	1			1	1	2
P (6)			4			**4**
P (7)		1				1
P (8)		1				1
P (9)	1	1	1			**3**
P (10)	1			1		2
P (11)	1	1				2
P (12)	1					1
P (13)		1				1
Total	6	6	11	6	7	36

Tabla 19. Distribución del número de tareas de cada una de las tipologías definidas propuestas en la evaluación de cada profesor

En general, encontramos que en las tareas propuestas por los profesores en las evaluaciones, no hay preocupación por evaluar explícitamente las diferentes opciones fenomenológicas para el concepto de derivada. Concretamente, estas tipologías de tareas se encuentra fuertemente influenciada por la fenomenología, que Puig (1997) define como *pura*, es decir, que en la mayoría de las tareas los mismos conceptos matemáticos se convierten en los fenómenos a organizar por nuevos conceptos o estructuras matemáticas (83,3%), quedando sólo un 16,7 % de ellas donde hay una preocupación por parte de los profesores por mostrar y evaluar la riqueza de este concepto matemático conectándolo con otros fenómenos en diferentes contextos. Sin embargo, creemos conveniente resaltar que esta conexión fenomenológica es muy pobre y en su mayoría se hace en la Física (11,1%), siendo la variación del espacio con respecto al tiempo (cálculo algebraico de la velocidad instantánea) el fenómeno más organizado por el concepto de derivada, y el resto en la Economía (5, 6 %).

Fenomenología		Porcentaje (%)
Matemática		83, 3
Otras	Física	11,1
	Economía	5,6
Total		100

Con relación a las representaciones de los conceptos más usadas en las tareas, tanto en su presentación como las que se requieren traducir o relacionar en su resolución, hemos encontrado, en primer lugar, que las representaciones más utilizadas en el enunciado de las tareas es la expresión simbólica de la función para posteriormente conseguir o bien la gráfica de la función, o la expresión simbólica de la función derivada (ES f (x)⇨ES f ’(x)), o a lo sumo la descripción verbal de la función derivada (ES f (x)⇨DV f ’(x), esta última en muy pocas ocasiones) y, sólo en un caso, la gráfica de la función derivada (ES f (x)⇨G f ’(x)). Tan sólo encontramos dos tareas, la 27 y la 28 tipificadas como P (7) y P (8) respectivamente, donde el enunciado está expresado por la gráfica de la función (propuestas sólo por el profesor B); y cuatro tareas, definidas en tres tipologías diferentes, expresadas por la descripción verbal de la misma: P (11), P (12) y P (13); propuestas por los profesores A y B.

En segundo lugar, observamos pocas tareas donde se traten traducciones entre representaciones del concepto de función, siendo las más repetitivas las traducciones que hemos definido como: I.1.1.2., que va de la expresión simbólica de la función a una transformación de la misma dentro del mismo sistema de representación (ES f (x)→ ES f (x)⟲), y la I.2.2., que va de la expresión simbólica de la función a la gráfica de la misma (ES f (x)→G f (x)).

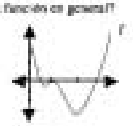
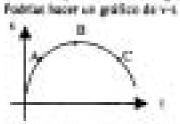
En relación con las traducciones entre representaciones del concepto de función derivada, tan sólo hemos identificado un tipo de tarea, de expresión simbólica de f ’(x) a expresión simbólica de f ’(x), pero implícitamente en la resolución de la tarea 7 del tipo P (1), propuesta por el profesor E (ES f ’(x)→ES f ’(x)), y otra de descripción verbal de f ’(x) a gráfica de f ’(x), también implícitamente en la resolución de la tarea del tipo P (8), propuesta por el profesor B (DV f ’(x)→G f ’(x)). Sin embargo, en términos generales, podemos decir que las tareas que se evalúan no exigen para su resolución de la traducción entre representaciones de f ’(x).

TABLA 18. ANÁLISIS GENERAL DE LAS EVALUACIONES DE LOS PROFESORES

Tipo de problema	Profesor	Problema: Enunciado	Problema: Fenomenología	Problema: Contexto	Representaciones: Representaciones	Representaciones: Traducciones	Relación entre f(x) y f'(x)	Técnica	Conocimientos involucrados	Procesos cognitivos	Recursos (Tecnología)
P (0)	C	1. Si $f(x) = \{(x, y) / y = x^2 + 1, x \in R\}$, halle el incremento de y si x cambia de 1 a 2	Matemática	Algebraico	ES f (x)	ES f (x) → ES f (x) ↻ (I. 1.1.2)	No	Uso de los pasos de la regla de los cinco pasos	Función (fórmula) Incremento absoluto de una función entre dos valores	• Desencapsulación del objeto función en la acción de calcular el incremento de una función a partir de la ES	No
	D	2. Encontrar el incremento en y de la función $y = f(x) = x^2 - 1$. Si x cambia de 2 a 2,1. Representa gráficamente el incremento	Matemática	Algebraico	ES f (x) G f (x)	ES f (x) →G f (x) (I.2.2)	No	Uso de los pasos de la regla de los cinco pasos	Función (fórmula, gráfica) Incremento absoluto de una función entre dos valores	• Coordinación de los procesos de calcular numéricamente en la ES, y geométricamente el incremento de una función a partir de la ES.	No
	E	3. Encontremos el incremento relativo, Δy/Δx de la función: $y = f(x) = x^2 + 1/x^2 - 8$	Matemática	Algebraico	ES f (x)	ES f (x) → ES f (x) ↻ (I. 1.1.2)	No	Uso de los pasos de la regla de los cinco pasos	Función (fórmula) Tasa media de variación de una función	• Desencapsulación del objeto tasa media de variación de una función en el proceso para calcularla a partir de la ES	No
P (1)	C	4. En el siguiente ejercicio emplee la regla de los cinco pasos para hallar la derivada de $f(x) = 2x^2 - x + 5$	Matemática	Algebraico	ES f (x) ES f ' (x)	No	ES f (x) ⇒ ES f ' (x) (II. 1.1.1)	Regla de los cinco pasos (usando límite)	Función (fórmula) Tasa instantánea de variación de una función	• Desencapsulación del objeto tasa instantánea de variación de una función en el proceso para calcularla algebraicamente a partir de la ES de la función	No
	D	5. Utilizando la definición: $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ Halla la derivada de $y = f(x) = 5x^2+1$	Matemática	Algebraico	ES f (x) ES f ' (x)	ES f ' (x) → ES f ' (x) f ' (x)= 10x $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$	ES f (x) ⇒ ES f ' (x) (II. 1.1.1)	Usando límite	Función (fórmula) Tasa instantánea de variación de una función	• Desencapsulación del objeto tasa instantánea de variación de una función en el proceso para calcularla algebraicamente a partir de la ES de la función	No
	E	6. Aplicando la regla de los cinco pasos, encuentra la derivada de: $y = 2x^2 + x - 1$	Matemática	Algebraico	ES f (x) ES f ' (x)	No	ES f (x) ⇒ ES f ' (x) (II. 1.1.1)	Regla de los cinco pasos (usando límite)	Función (fórmula) Tasa instantánea de variación de una función	• Desencapsulación del objeto tasa instantánea de variación de una función en el proceso para calcularla algebraicamente a partir de la ES de la función	No
	B	7. Después de conceptuar sobre el incremento de una función, trata de recordar cómo introduces el concepto de derivada con un cálculo numérico, dada la siguiente función: $y = f(x) = x^2 + x$, en términos de x y Δx, cuando pasa de 2 a 2,25	Matemática	Algebraico	ES f (x) ES f ' (x)	ES f ' (x) → ES f ' (x) $\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$, $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$	ES f (x) ⇒ ES f ' (x) ↻ (II. 1.1.2)	Aproximación (numérica)	Función (fórmula) Tasa media de variación Tasa instantánea de variación de una función	• Desencapsulación del objeto tasa instantánea de variación en los procesos de calcularla algebraica y numéricamente a partir de la ES de la función	No
P (2)	A	8. a. ¿Cuál es la pendiente de la recta $y = 2x - 1$? b. Calcula dy/dx c. ¿Qué conclusión puedes sacar de a y b?	Matemática	Algebraico	ES f (x) ES f ' (x) DV f ' (x)	Si, si dy/dx = 2 ES f ' (x) → ES f ' (x)	ES f (x) ⇒ ES f ' (x) ES f (x)⇒ES f ' (x) →DV f ' (x) (III.4. 4)	Reglas de derivación Usando límite	Función afín, pendiente, función derivada (cálculo directo o indirecto)	• Desencapsulación del objeto pendiente de una recta en el proceso de calcularla a partir de la ES de la función • Desencapsulación del objeto derivada en un punto en el proceso de calcular dy/dx a partir de la ES de f (x) • Coordinación de los esquemas de pendiente de una recta en forma de ES de la ecuación lineal y la derivada de una función	No
P (3)	B	9. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = x^3$ en (2,8). Haz el gráfico de la función y de la recta tangente en dicho punto.	Matemática	Algebraico	ES f (x) G f (x) ES f ' (x)	ES f (x) → G f (x)	ES f (x) ⇒ ES f ' (x) ES f (x) ⇒ ES f ' (x) ↻ ⇒ G f (x) (II. 1.1.2 + I. 2. 2)	Reglas de derivación Usando límite	Función y representación, gráfica, pendiente, función derivada (cálculo directo o indirecto)	• Desencapsulación del objeto función derivada en el proceso de calcular la ecuación de la recta tangente a una curva a partir de la ES de f (x) • Desencapsulación del objeto función en el proceso de dibujar la gráfica a partir de la ES	No
	C	10. Hallar la ecuación de la recta tangente y la recta normal en el punto dado, si $h = t^2 - 2t$, en $t = 1$.	Matemática	Algebraico	ES f (x) ES f ' (x)	ES f (x) → ES f (x)	ES f (x) ⇒ ES f ' (x) ES f (x) ⇒ ES f ' (x) ↻ (I. 1.1.2. + II. 1.1.2)	Reglas de derivación Usando límite	Función afín (rectas normales y tangentes), pendiente, derivada de una función en un punto y función derivada (cálculo directo o indirecto)	• Desencapsulación del objeto función derivada en el proceso de calcular la pendiente de la recta tangente a una curva a partir de la ES de f (x) • Coordinación de los esquemas de recta normal, recta tangente y el de función derivada	No
	D	11. Encontrar las ecuaciones de las rectas normal y tangente a la curva que representa la función determinada por la ecuación $y = x^2 + x$, en el punto (1,2)	Matemática	Algebraico	ES f (x) ES f ' (x)	ES f (x) → ES f (x)	ES f (x) ⇒ ES f ' (x) ES f (x) ⇒ ES f ' (x) ↻ (I. 1.1.2. + II. 1.1.2)	Reglas de derivación Usando límite	Función afín (rectas normales y tangentes), pendiente, derivada de una función en un punto y función derivada (cálculo directo o indirecto)	• Desencapsulación del objeto función derivada en el proceso de calcular la pendiente de la recta tangente a una curva a partir de la ES de f (x) • Coordinación de los esquemas de recta normal, recta tangente y el de función derivada	No

Tipo de problema	Profesor	Problema: Enunciado	Problema: Fenomenología	Problema: Contexto	Representaciones: Representaciones	Representaciones: Traducciones	Relación entre f(x) y f'(x)	Técnica	Conocimientos involucrados	Procesos cognitivos	Recursos (Tecnología)
P (3)	E	12. Encontrar la ecuación de la recta tangente y la normal a la curva que representa la función determinada por la ecuación $y = x^2$ en el punto P (2,4), y grafica para una interpretación geométrica del concepto de derivada.	Matemática	Algebraico	ES f(x) G f(x) ES f'(x)	ES f(x) → ES f(x) ES f(x) → G f(x)	ES f(x) ⇒ ES f'(x) ES f(x) ⇒ ES f'(x) ⟳ ⇒ G f(x) (I. 1.1.2. – I. 2. 2 – II. 1.1.2)	Reglas de derivación Usando límite	Función afín (rectas normales y tangentes), pendiente, derivada de una función en un punto y función derivada (cálculo directo o indirecto)	• Desencapsulación del objeto función derivada en el proceso de calcular la pendiente de la recta tangente a una curva a partir de la ES de f(x) • Coordinación de los esquemas de recta normal, recta tangente y el de función derivada	No
	E	13. Encontrar el área del triángulo que forma el eje x, la normal y la tangente a la curva $y = f(x) = 4x^2 - x$ en el punto (1,3).	Matemática	Algebraico	ES f(x) ES f'(x)	ES f(x) → ES f(x)	ES f(x) ⇒ ES f'(x) ES f(x) ⇒ ES f'(x) ⟳ (I. 1.1.2. – II. 1.1.2)	Reglas de derivación Usando límite	Distancia entre dos puntos, área de un triángulo, función afín (rectas normales y tangentes), pendiente, derivada de una función en un punto y función derivada (cálculo directo o indirecto)	• Desencapsulación del objeto función derivada en el proceso de calcular la pendiente de la recta tangente a una curva a partir de la ES de f(x) • Coordinación de los esquemas de recta normal, recta tangente, función derivada y área de un triángulo	No
P (4)	C	14. Efectúe las siguientes derivadas, aplicando los teoremas sobre derivadas: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$ $f(m) = m^3 - 5m^2 + 1$ $y = x/(x+2)^4$	Matemática	Algebraico	ES f(x) ES f'(x)	ES f(x) → ES f(x) (interpretar la función como el resultado de efectuar operaciones con funciones simples)	ES f(x) ⇒ ES f'(x) ES f(x) → ES f(x) ⇒ ES f'(x) (II. 1.1.3)	Reglas de derivación	Reglas de derivación (cálculo indirecto de la función derivada), regla de la cadena (composición de funciones)	• Desencapsulación del objeto (+, x, ÷) de composición de funciones en las funciones sencillas • Desencapsulación de la función derivada en las acciones de aplicar la colección de reglas de derivación e incluso la regla de la cadena a partir de la ES de la función	No
	C	15. Usando los teoremas sobre derivadas encontrar la derivada de las siguientes funciones: $g(x) = \sqrt[3]{(2x-1)^2}$ $h(x) = 8sec^2 3x$ $m(y) = ln[sec(2y)]$	Matemática	Algebraico	ES f(x) ES f'(x)	ES f(x) → ES f(x)	ES f(x) ⇒ ES f'(x) ES f(x) → ES f(x) ⇒ ES f'(x) (II. 1.1.3)	Reglas de derivación	Reglas de derivación (cálculo indirecto de la función derivada), regla de la cadena (composición de funciones)	• Desencapsulación del objeto composición de funciones en las funciones sencillas. • Desencapsulación de la función derivada en las acciones de aplicar la colección de reglas de derivación e incluso la regla de la cadena a partir de la ES de la función.	No
	C	16. Hallar dy/dx en el punto que se indica, $x^3 - 4xy^2 = 2xy^2$, en (2,1)	Matemática	Algebraico	ES f(x) ES f'(x)	ES f(x) → ES f(x) (Suponiendo que no hace la derivación implícita $x^3 - 4xy^2 = 2xy^2$)	ES f(x) ⇒ ES f'(x) ES f(x) ⇒ ES f'(x) ⟳ (II. 1.1.2)	Reglas de derivación	Reglas de derivación (cálculo indirecto de la función derivada), regla de la cadena (composición de funciones)	• Desencapsulación del objeto composición de funciones en las funciones sencillas • Desencapsulación de la función derivada en el proceso de calcular la derivada de la función en un punto • Desencapsulación de la función derivada en las acciones de aplicar la colección de reglas de derivación e incluso la regla de la cadena a partir de la ES de la función	No
	D	17. Utiliza la regla de derivación en los ejercicios para hallar f'(x) $f(x) = x^{m}$ $f(x) = (x - 3)(2x + 4)$ $f(x) = (4x^2 - 1)/x$ $f(x) = 2^{x^{2x}}$ $f(x) = sen(cos\ x)$ $f(x) = \sqrt{2x+9}$	Matemática	Algebraico	ES f(x) ES f'(x)	ES f(x) → ES f(x)	ES f(x) ⇒ ES f'(x) ES f(x) → ES f(x) ⇒ ES f'(x) (II. 1.1.3)	Reglas de derivación	Reglas de derivación (cálculo indirecto de la función derivada), regla de la cadena (composición de funciones)	• Desencapsulación del objeto composición de funciones en las funciones sencillas • Desencapsulación de la función derivada en las acciones de aplicar la colección de reglas de derivación e incluso la regla de la cadena a partir de la ES de la función	No
	E	18. Aplicando las fórmulas de derivación encontrar las siguientes derivadas: $y = (x^2 - 7x + 2)^n$ $y = [(2x^2 + 1)^3] / [(3x - 1)^2]$ $y = (4 - x)(\sqrt{4 - x})$ $y = sec(4x - 1)^2$	Matemática	Algebraico	ES f(x) ES f'(x)	ES f(x) → ES f(x)	ES f(x) ⇒ ES f'(x) ES f(x) → ES f(x) ⇒ ES f'(x) (II. 1.1.3)	Reglas de derivación	Reglas de derivación (cálculo indirecto de la función derivada), regla de la cadena (composición de funciones)	• Desencapsulación del objeto composición de funciones en las funciones sencillas • Desencapsulación de la función derivada en las acciones de aplicar la colección de reglas de derivación e incluso la regla de la cadena a partir de la ES de la función	No
P (5)	A	19. Sea la función $f(x) = 4x - x^2 + 3$ a. Halla f'(x) b. Calcula el punto crítico de la función o los puntos críticos c. Determine si el punto crítico o los puntos críticos son máximos o mínimos d. Elabora el bosquejo gráfico e. ¿Qué significa f'(1)?	Matemática	Algebraico	ES f(x) G f(x) ES f'(x) DV f'(x)	ES f(x) → G f(x)	ES f(x) ⇒ ES f'(x) ES f(x) ⇒ ES f'(x) ⟳ ⇒ G f(x) ⇒ DV f'(x) (II. 4.7)	Reglas de derivación Cálculo de puntos críticos (máximos y mínimos)	Función, interpretación gráfica de función (análisis de la monotonía de una función), función derivada, interpretación gráfica de la función derivada (criterios de 1ª y 2ª derivada), reglas de derivación	• Desencapsulación de la función f(x) como conjunto de pares (x, f(x)) • Desencapsulación del objeto función derivada en el proceso de calcular f'(x) • Desencapsulación del objeto función derivada en el proceso de calcular los puntos críticos y la concavidad de la función • Coordinación del proceso de calcular la función derivada a partir de ES y el proceso de construir la tabla de monotonía de la función (criterios de 1ª y 2ª derivada) para obtener la gráfica de una función	No

Tipo de problema	Profesor	Problema: Enunciado	Problema: Fenomenología	Problema: Contexto	Representaciones: Representaciones	Representaciones: Traducciones	Relación entre f(x) y f'(x)	Técnica	Conocimientos involucrados	Procesos cognitivos	Recursos (Tecnología)
P (5)	D	20. En la función $f(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$, hallar: a. Los puntos críticos (máximos y mínimos) b. Los intervalos donde la función es creciente o decreciente c. La concavidad. Dibuja la gráfica que cumple las condiciones anteriores.	Matemática	Algebraico	ES f (x) G f (x) ES f '' (x)	ES f (x) → G f (x)	ES f (x) ⇔ ES f ' (x) ES f (x) ⇔ ES f '' (x) ⇔ G f (x) (III. 4.6)	Reglas de derivación. Cálculo de puntos críticos y análisis de la concavidad	Función, interpretación gráfica de función (análisis de la monotonía de una función), función derivada, interpretación gráfica de la función derivada (criterios de 1ª y 2ª derivada), reglas de derivación	• Desencapsulación de la función f (x) como conjunto de pares (x,f(x)) • Desencapsulación del objeto función derivada en el proceso de calcular f '(x) • Desencapsulación del objeto función derivada en el proceso de calcular los puntos críticos y la concavidad de la función • Coordinación del proceso de calcular la función derivada a partir de ES y el proceso de construir la tabla de monotonía de la función (criterios de 1ª y 2ª derivada) para obtener la gráfica de una función	No
	E	21. En cada una de los ejercicios encontrar los extremos de la función dada, si los hay, y hacer donde sea posible el gráfico: $y = (x^2 - 7x + 2)^4$ $y = [(2x^2 + 1)^3]/[(3x - 1)^4]$ $y = (4 - x)(\sqrt{4 - x})$ $y = \cos(4x - 1)^2$	Matemática	Algebraico	ES f (x) G f (x) ES f '' (x)	ES f (x) → G f (x)	ES f (x) ⇔ ES f ' (x) ES f (x) ⇔ ES f '' (x) ⇔ G f (x) (III. 4.6)	Reglas de derivación. Cálculo de puntos críticos y análisis de la concavidad	Función, interpretación gráfica de función (análisis de la monotonía de una función), función derivada, interpretación gráfica de la función derivada (criterios de 1ª y 2ª derivada), reglas de derivación	• Desencapsulación del objeto función derivada en el proceso de calcular los puntos críticos y la concavidad de la función • Coordinación del proceso de calcular la función derivada a partir de ES y el proceso de construir la tabla de monotonía de la función (criterios de 1ª y 2ª derivada) para obtener la gráfica de una función	No
P (6)	C	22. Encuentre el intervalo donde la función es creciente y el intervalo donde la función es decreciente, y justifique, trace la gráfica de la función $g(t) = t^2 + 4t + 5$	Matemática	Algebraico	ES f (x) G f (x) ES f ' (x) DV f ' (x)	ES f (x) → G f (x)	ES f (x) ⇔ ES f ' (x) ES f (x) ⇔ ES f ' (x) ⇔ G f (x) ⇔ DV f ' (x) (III. 4.7)	Reglas de derivación	Función, intervalo, pendiente de una recta, estudio de la monotonía de funciones, función derivada (criterios de la 1ª derivada)	• Desencapsulación del objeto función derivada en el proceso de calcular los puntos críticos y la concavidad de la función • Coordinación del proceso de calcular la función derivada a partir de ES y el proceso de construir la tabla de monotonía de la función (criterios de 1ª y 2ª derivada) para obtener la gráfica de una función • Coordinar el análisis de la monotonía de la función en un intervalo (global) con el análisis de la función en un punto del dominio (local)	No
	C	23. Dada la función $f(t) = t^2 + 1/2t - 1$, en el intervalo $-3<t<3$, determinar el punto mínimo. ¿Existe la derivada en ese punto? Si existe, ¿cuál es su valor?	Matemática	Algebraico	ES f (x) G f (x) ES f ' (x) DV f ' (x)	No	ES f (x) ⇔ ES f ' (x) ES f (x) ⇔ ES f ' (x) ⇔ G f (x) ⇔ DV f ' (x) (III. 4.7)	Reglas de derivación	Función, intervalo, pendiente de una recta, estudio de la monotonía de funciones, función derivada (criterios de la 1ª derivada)	• Desencapsulación del objeto función derivada en el proceso de calcular los puntos críticos y la concavidad de la función • Coordinación del proceso de calcular la función derivada a partir de ES y el proceso de construir la tabla de monotonía de la función (criterios de 1ª y 2ª derivada) para obtener la gráfica de una función • Coordinar el análisis de la monotonía de la función en un intervalo (global) con el análisis de la función en un punto del dominio (local)	No
	C	24. Estudiar la siguiente función, $g(m) = \frac{1}{3} m^3 + m^2 - 3m$, analizar la derivada y utilizar el resultado para dibujar la gráfica de la función en el intervalo $-3<m<5$	Matemática	Algebraico	ES f (x) G f (x) ES f ' (x) DV f ' (x)	ES f (x) → G f (x)	ES f (x) ⇔ ES f ' (x) ES f (x) ⇔ ES f ' (x) ⇔ G f (x) ⇔ DV f ' (x) (III. 4.7)	Reglas de derivación	Función, intervalo, pendiente de una recta, estudio de la monotonía de funciones, función derivada (criterios de la 1ª derivada)	• Desencapsulación del objeto función derivada en el proceso de calcular los puntos críticos y la concavidad de la función • Coordinación del proceso de calcular la función derivada a partir de ES y el proceso de construir la tabla de monotonía de la función (criterios de 1ª y 2ª derivada) para obtener la gráfica de una función • Coordinar el análisis de la monotonía de la función en un intervalo (global) con el análisis de la función en un punto del dominio (local)	No

Tipo de problema	Profesor	Problema			Representaciones			Técnica	Conocimientos involucrados	Procesos cognitivos	Recursos (Tecnología)
		Enunciado	Fenomenología	Contexto	Representaciones	Traducciones	Relación entre f(x) y f'(x)				
F (6)	C	25. Analiza la función $f(x) = 2x^3 - 6x + 5$, con referencia a máximos y mínimos, puntos de inflexión, concavidad y dibuja la gráfica.	Matemática	Algebraico	ES f(x) G f(x) ES f'(x) DV f'(x)	ES f(x) → G f(x)	ES f(x) ⇒ ES f'(x) ES f(x) ⇒ ES f'(x) ⟲ ⇒ G f(x) ⇒ DV f'(x) (III. 4.7)	Reglas de derivación	Función, intervalo, pendiente de una recta, estudio de la monotonía de funciones, función derivada (criterios de la 1ª derivada)	• Desencapsulación del objeto función derivada en el proceso de calcular los puntos críticos y la concavidad de la función. • Coordinación del proceso de calcular la función derivada a partir de ES y el proceso de construir la tabla de monotonía de la función (criterios de 1ª y 2ª derivada) para obtener la gráfica de una función • Coordinar el análisis de la monotonía de la función en un intervalo (global) con el análisis de la función en un punto del dominio (local)	No
F (7)	B	26. Para la gráfica de la función f determina: a. Dominio y Rango de la función f b. ¿Dónde la función es creciente? c. ¿Dónde la función es decreciente? d. Puntos críticos de la función e. Puntos máximos para f f. Puntos mínimos para f g. ¿Qué puedes decir de la gráfica de la función en general? 	Matemática	Gráfico / Verbal	G f(x) DV f(x) DV f'(x)	G f(x) → DV f(x)	G f(x) ⇒ DV f'(x) (II.2.7 + III. 2.7)	Aproximación gráfica / numérica	Función, intervalo, pendiente de una recta, estudio de la monotonía de funciones, función derivada (criterios de la 1ª derivada), interpretación gráfica de la derivada	• Desencapsulación del objeto (estático) de función derivada en el proceso de considerar e dinámico en un intervalo de la función e interpretar los criterios de 1ª y 2ª derivada en el análisis monotónico de la función. • Coordinación de los esquemas de función y derivada de la función en un punto (como el valor de la pendiente de la recta tangente en dicho punto), que permita hacer un análisis de la monotonía de la función: creciente, decreciente, puntos máximos y mínimos, puntos de inflexión, concavidad, etc.	No
F (8)	B	27. En la gráfica v-t, indica en qué punto la velocidad v es positiva (v>0), donde la velocidad es negativa (v < 0) o cuando es nula (v=0). Justifica tu respuesta y haz una interpretación del gráfico. Podrías hacer un gráfico de v-t. 	Física	Gráfico / Verbal	G f(x) DV f(x) DV f'(x) G f'(x)	G f(x) → DV f(x) DV f'(x) → G f'(x)	G f(x) ⇒ G f'(x) G f(x) ⇒ DV f'(x) → G f'(x) (III. 4.4)	Aproximación gráfica / numérica	Función, velocidad instantánea, función derivada, derivada en un punto	• Desencapsulación del objeto función en su representación gráfica en los procesos que permitan realizar el análisis monotónico de la función • Coordinación de los esquemas de función derivada como la razón de cambio del espacio en función del tiempo, velocidad instantánea, gráfica de f(x) y gráfica de f'(x) (interpretar los criterios de 1ª y 2ª derivada en el análisis monotónico de la función)	No
F (9)	A	28. La altura de un objeto que se mueve verticalmente está dada por $s(t) = -16t^2 + 96t + 112$, con s en pies y t en segundos. Calcula el tiempo t cuando alcanza su máxima altura.	Física	Algebraico	ES f(x) ES f'(x)	No	ES f(x) ⇒ ES f'(x) ES f(x) ⇒ ES f'(x) ⟲ (III. 1.1.2)	Reglas de derivación Usando límite	Función, velocidad instantánea, movimiento vertical, función, función derivada (razón de cambio), derivada en un punto	• Desencapsulación del objeto función derivada en el proceso de calcular los puntos críticos y la concavidad de la función • Coordinación de los esquemas de velocidad instantánea y función derivada como razón de cambio.	No
	B	29. Al soltar un objeto y dejarlo caer libremente desde una altura de 100 m, su altura en el instante t viene dada por la función posición $y(t) = 100 - 16t^2$, con y en m y t en seg. a. Halla la velocidad en cualquier instante t. b. Halla la velocidad en t = 1 seg.	Física	Algebraico	ES f(x) ES f'(x)	No	ES f(x) ⇒ ES f'(x) ES f(x) ⇒ ES f'(x) ⟲ (III. 1.1.2)	Reglas de derivación Usando límite	Función, velocidad instantánea, movimiento vertical, función, función derivada (razón de cambio), derivada en un punto	• Coordinación de los esquemas de velocidad instantánea y función derivada como razón de cambio	No

Tipo de problema	Profesor	Problema: Enunciado	Problema: Fenomenología	Problema: Contexto	Representaciones: Representaciones	Representaciones: Traducciones	Relación entre f(x) y f'(x)	Técnica	Conocimientos involucrados	Procesos cognitivos	Recursos (Tecnología)
P (9)	C	30. Sea el movimiento de un móvil dado por la ecuación $x = 4t^2 - 3t + 5$, donde x viene dada en metros y t en segundos, halla la velocidad promedio y la velocidad instantánea del móvil. (Recuerde que $V_{prom} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ y $V_{ins} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$)	Física	Algebraico	ES f (x) ES f ' (x)	ES f (x) → ES f (x)	ES f (x) ⇔ ES f ' (x) ES f (x) → ES f (x) ⇔ ES f ' (x) (H. 1.1.3)	Usando límite	Función, movimiento uniformemente acelerado, velocidad media e instantánea, función derivada (razón de cambio)	• Coordinación de los esquemas de velocidad media y velocidad instantánea con los esquemas de tasa media de variación y tasa instantánea de variación • Coordinación de los esquemas de velocidad instantánea y función derivada como razón de cambio	No
P (10)	A	31. Si C (x) = $3x^2 - 6x + 4$ representa el costo total en dólares de x unidades de una mercancía. a. ¿Cuántas unidades de mercancía hacen el costo mínimo? b. ¿Cuál es el valor en dólares de ese costo mínimo?	Economía	Algebraico	ES f (x) ES f ' (x)	No	ES f (x) ⇔ ES f ' (x) ES f (x) ⇔ ES f ' (x) ↻ (H. 1.1.2)	Reglas de derivación	Función, costo marginal, función derivada (criterios de la 1ª derivada), derivada en un punto	• Coordinación de los esquemas de costo marginal y función derivada como razón de cambio	No
	D	32. La utilidad obtenida al producir y vender x artículos se expresa por: P (x) = $200x - 3x^2$. Determinar la utilidad marginal. ¿Cuándo es igual a cero la utilidad marginal?	Economía	Algebraico	ES f (x) ES f ' (x)	No	ES f (x) ⇔ ES f ' (x) ES f (x) ⇔ ES f ' (x) ↻ (H. 1.1.2)	Reglas de derivación	Función, utilidad marginal, función derivada (criterios de la 1ª derivada), derivada en un punto	• Coordinación de los esquemas de utilidad marginal y función derivada como razón de cambio	No
P (11)	B	33. Se van a fabricar tanques en serie para almacenar fertilizantes químicos, en forma de cilindro circular recto completamente cerrado, cuya capacidad sea 16 π metros cúbicos. a. Hallemos las dimensiones que debe tener el tanque más económico.	Química / Matemática	Verbal	DV f (x) ES f (x) ES f ' (x)	DV f (x) → ES f (x) → ES f (x)	DV f (x) ⇔ ES f ' (x) DV f (x) → ES f (x) → ES f (x) ⇔ ES f ' (x) ↻ (H. 4.8)	Reglas de derivación	Función, composición de funciones, volúmenes de sólidos geométricos, función derivada (criterio de la 1ª derivada), derivada en un punto, Reglas de derivación (cálculo indirecto de la función derivada), regla de la cadena (composición de funciones)	• Desencapsulación del objeto composición de funciones en las funciones sencillas • Desencapsulación de la función derivada en las acciones de aplicar la colección de reglas de derivación e incluso la regla de la cadena a partir de la ES de la función • Encapsulación de la función derivada como la razón de cambio entre magnitudes relacionadas	No
	A	34. Si el área de un rectángulo es de 100 m^2, ¿cuáles deben ser las longitudes del rectángulo cuyo perímetro sea mínimo? Sol: 10m y 10 m.	Matemática	Verbal	DV f (x) ES f (x) ES f ' (x)	DV f (x) → ES f (x) → ES f (x)	DV f (x) ⇔ ES f ' (x) DV f (x) → ES f (x) → ES f (x) ⇔ ES f ' (x) ↻ (H. 4.8)	Reglas de derivación	Función, composición de funciones, área de figuras geométricas, función derivada (criterio de la 1ª derivada), derivada en un punto, Reglas de derivación (cálculo indirecto de la función derivada), regla de la cadena (composición de funciones)	• Desencapsulación del objeto composición de funciones en las funciones sencillas • Encapsulación de la función derivada como la razón de cambio entre magnitudes relacionadas • Desencapsulación de la función derivada en las acciones de aplicar la colección de reglas de derivación e incluso la regla de la cadena a partir de la ES de la función.	No
P (12)	A	35. Cortamos un cilindro de una esfera maciza de madera de radio 8 cm, tal y como se muestra en la figura. La altura del cilindro es de 2h cm. a. Halle AB (radio del cilindro), en función de h. b. Demuestre que el volumen (V) del cilindro se puede escribir como V = $2\pi h(64 - h^2)$ cm^3 c. Determine, aproximando con tres cifras significativas, la altura del cilindro con el volumen máximo que se puede obtener por este procedimiento. d. ¿Cuál es el volumen del mayor cilindro posible? Dé su respuesta aproximada al cm^3	Matemática	Algebraico / Verbal	DV f (x) ES f (x) ES f ' (x)	DV f (x) → ES f (x) → ES f (x)	DV f (x) ⇔ ES f ' (x) DV f (x) → ES f (x) → ES f (x) ⇔ ES f ' (x) ↻ (H. 4.8)	Reglas de derivación	Función, composición de funciones, volúmenes de sólidos geométricos, función derivada (criterio de la 1ª derivada), derivada en un punto, Reglas de derivación (cálculo indirecto de la función derivada), regla de la cadena (composición de funciones)	• Desencapsulación del objeto composición de funciones en las funciones sencillas • Encapsulación de la función derivada como la razón de cambio entre magnitudes relacionadas • Desencapsulación de la función derivada en las acciones de aplicar la colección de reglas de derivación e incluso la regla de la cadena a partir de la ES de la función.	No
P (13)	B	36. Se infla un balón esférico de tal forma que a los t segundos el radio r (t) = 2t (cm.). Elabora una tabla de datos con las variables tiempo t en segundos y el volumen V en centímetros cúbicos, tomando incrementos de 1 segundo en la variable t. a) ¿Cuál es la variación media del volumen de la tasa de variación instantánea del volumen del balón a los 11 segundos? ¿Y a los 15 segundos? b) ¿Cuál es la tasa de variación instantánea del volumen del balón a los t segundos de empezarse hablo entre los 11 y los 15 segundos c) ¿Cuál es la tasa de variación instantánea del volumen del balón a los t segundos de empezar a inflar?	Matemática	Algebraico / Verbal	DV f (x) ES f (x) ES f ' (x)	DV f (x) → ES f (x) → ES f (x)	DV f (x) ⇔ ES f ' (x) DV f (x) → ES f (x) → ES f (x) ⇔ ES f ' (x) ↻ (H. 4.8)	Reglas de derivación	Función, composición de funciones, volúmenes de sólidos geométricos, función derivada (criterio de la 1ª derivada), derivada en un punto, Reglas de derivación (cálculo indirecto de la función derivada), regla de la cadena (composición de funciones)	• Desencapsulación del objeto composición de funciones en las funciones sencillas • Encapsulación de la función derivada como la razón de cambio entre magnitudes relacionadas • Desencapsulación de la función derivada en las acciones de aplicar la colección de reglas de derivación e incluso la regla de la cadena a partir de la ES de la función	No

En lo que respecta a relaciones entre representaciones de los conceptos de función y función derivada, la mayoría de las tareas evaluadas por los profesores se centran en la relación entre representaciones de f (x) a representaciones de f '(x), privilegiándose siempre la traducción entre una función expresada simbólicamente hasta obtener la expresión simbólica de la función derivada (58,3 %). Seguidamente encontramos que la relación que va de una expresión simbólica de f (x) a la descripción verbal de la función f '(x) tiene un 16,7 %; la relación que va de descripción verbal de f (x) a expresión simbólica de f '(x) con un 11,1%, compartidas sólo por los profesores B y A; y finalmente, sólo el profesor B exhibe más riqueza en las tareas en el uso de las traducciones y relaciones entre representaciones, planteando además tareas que requieren relaciones entre la gráfica de la función y la gráfica de la función derivada, y entre la gráfica de la función y la descripción verbal de la función derivada. Por último, ninguna de las tareas analizadas buscan la relación entre representaciones de f '(x) a f (x). En la tabla 20 podemos visualizar con mayor potencia lo descrito anteriormente.

Por tanto, a manera de conclusión, la tabla 20 deja ver con claridad que la mayoría de las tareas propuestas por los profesores (especialmente los profesores C, D y E), teniendo en cuenta sólo la representación inicial y la representación final utilizada en la presentación y en la resolución de la misma, llevan al resolutor a la forma habitual de calcular la expresión simbólica de la derivada, ya sea directamente a través del cálculo del límite ($f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$), utilizando la expresión simbólica de la función f (x), o indirectamente a través de la aplicación memorística de las reglas de derivación. En esta relación de ES f (x)⇨ES f '(x), consideramos que prima el manejo algebraico de reglas y procedimientos, que en términos de la teoría APOE, implica la interiorización de acciones en procesos. Por tanto, en la resolución de este tipo de tareas que demandan procesos cognitivos como la interiorización de acciones, no se requiere tener una perspectiva esquema del concepto de derivada que indique una compresión del mismo, sino se enriquece con otro tipo de actividades que involucren más relaciones y traducciones entre representaciones de los conceptos de función y función derivada.

Otro aspecto a resaltar, es la pobreza en las relaciones entre las representaciones de f (x) y f '(x), pues tan solo el profesor B muestra alguna variedad en el manejo de las representaciones que requieren procesos cognitivos más complejos para su resolución, tales como la coordinación de esquemas de conceptos matemáticos (tasa instantánea de variación, velocidad instantánea, derivada en un punto, etc.), o la generalización del esquema de derivada que le permita al individuo reflexionar sobre su comprensión del esquema del concepto, visto como "un todo", y ser capaz de realizar nuevas acciones sobre el esquema (la función derivada como razón de cambio de variables relacionadas). Entre estas tareas tenemos las que demandan las relaciones: G f (x)⇨ G f '(x), G f (x)⇨DV f '(x), y DV f (x)⇨ES f '(x). Por tanto, la resolución de este tipo de tareas sí que requiere de una perspectiva esquema del concepto de derivada, que integre diferentes niveles de compresión de dicho concepto.

Por otra parte, el profesor A muestra también el uso de algunas relaciones entre representaciones, pero a diferencia del profesor B, en las relaciones y traducciones intermedias que se dan durante el proceso de resolución se requiere del manejo algebraico de ecuaciones, como es el caso de las tareas 8, 19, 34 y 35 planteadas por el profesor A (ver tabla 18); lo mismo sucede con las 22, 23, 24 y 25 planteadas por el profesor D. Sin embargo, hay que resaltar como interesante, la necesidad de modelización que hay en la resolución de las tareas 34 y 35, planteadas por el profesor A, para poder solucionarla.

Las técnicas que se requieren para solucionar la mayoría de las tareas, son de dos tipos para el cálculo de la función derivada, porque se encuentran explícitas en la formulación de algunas tareas: la técnica directa del cálculo por límite, y la técnica indirecta de las reglas de derivación. Las técnicas de derivación para el cálculo del macro objeto f '(a) parece que quedan reducidas al proceso de sustitución de $x = a$ en la expresión simbólica de la función derivada hallada por cualquiera de las técnicas anteriormente descritas, puesto que, en general, no encontramos tareas que requieran de la aplicación de técnicas gráficas o numéricas para calcular el macro objeto f '(a).

Por ejemplo, con relación a la técnica I, en las tareas del tipo P (1), donde los profesores piden exactamente el uso de la regla de los cinco pasos, se requiere que los alumnos usen la definición de la derivada en término de límites, con lo cual se puede caer fácilmente en un problema de algebrización del límite a través de interiorización de acciones, y no propiciar la comprensión del concepto a través de encapsulaciones de procesos en el objeto de función derivada, cuando no hay un trabajo previo que ayude a los estudiantes a hacer estas encapsulaciones. Es decir que la preocupación o el peso conceptual puede recaer en el álgebra del límite mucho más que en la comprensión del concepto de función derivada. Encontramos que son los profesores C, D y E los que plantean tareas del tipo P (1), y que si bien es cierto que previamente se preocupan por evaluar tareas del tipo P (0), que podrían ayudar a los estudiantes a hacer encapsulaciones del proceso de calcular por aproximación numérica todas las tasas medias de variación $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ cuando $\Delta x \to 0$, en el objeto función derivada $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$, consideramos que no se tiene en cuenta la complejidad semiótica y las inconsistencias o errores conceptuales que puede provocar la comprensión por parte del estudiante de símbolos matemáticos tan abstractos como Δx, que ya han identificado otras investigaciones en didáctica de las matemáticas (Tall, 1981, 1985a, 1992; Orton, 1980, 1983; Azcárate, 1990, Sierpinska, 1985, 1987; Font, 2000, Dubinsky *et al.*, 1995 e Inglada y Font, 2002).

Con relación a la segunda técnica, que creemos que será la que utilizarán en el proceso de resolución de las tareas restantes (aunque no se haga explícito en el enunciado), es la técnica indirecta de las reglas de derivación. Suponemos que por economía de trabajo y tiempo será la técnica más utilizada por los alumnos. Sin embargo, el uso exclusivo de esta técnica tampoco garantiza la comprensión y relación de los macro objetos f ’(a) y f ’(x), porque igualmente puede caerse con facilidad en la aplicación memorística y acrítica de las reglas de derivación, sin tener ninguna reflexión ni justificación teórica del uso de las mismas; lo cual puede conducir también a la interiorización de acciones que sólo requieren una perspectiva proceso del concepto de derivada.

Sólo nos encontramos con otra técnica diferente a las dos anteriores descritas, necesaria para solucionar dos tipos de problemas, P (7) y P (8), porque son tareas donde a partir de la gráfica de la función se pide hallar la descripción verbal de la función derivada y dibujar la gráfica de la función derivada, respectivamente. Esta es la técnica de aproximación gráfica y numérica (Tall, 1985b; Azcarate *et al.*, 1996a, 1996b). Como ya mencionamos anteriormente, las tareas tipo P (7) y P (8), propuestas sólo por el profesor B, son tareas que en el proceso de resolución demandan procesos cognitivos complejos que requieren una perspectiva esquema del concepto de derivada.

Tabla 20. Análisis general de las traducciones y relaciones entre representaciones de f (x) y f ' (x) en las tareas propuestas en las ***evaluaciones*** diseñadas por los profesores. (Se tiene en cuenta sólo la representación inicial y la representación final utilizada)

de → a	Expresión simbólica f ' (x)	Gráfica f ' (x)	Tabla f ' (x)	Descripción verbal de la situación (en términos de f ' (x))	Expresión simbólica f (x)	Gráfica f (x)	Tabla f (x)	Descripción verbal de la situación (en términos de f (x))
Expresión simbólica f (x)	4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 20, 21, 28, 29, 30, 31, 32			8, 19, 22, 23, 24, 25	1, 3	2		
Gráfica f (x)		27		26				
Tabla f (x)								
Descripción verbal de la situación (en términos de f (x))	33, 34, 35, 36							
Expresión simbólica f ' (x)								
Gráfica f ' (x)								
Tabla f ' (x)								
Descripción verbal de la situación (en términos de f ' (x))								

Relación de una forma de representar la función a una de la función derivada	Traducciones entre representaciones de función	Traducciones entre representaciones de función derivada	Relación de una forma de representar la función derivada a una de la función

Profesor A	Profesor B	Profesor C	Profesor D	Profesor E

Como ya hemos venido mencionando a lo largo de la descripción, los procesos cognitivos que demandan las tareas propuestas están influenciados por el uso de las traducciones y las relaciones entre f (x) y f ’(x) presentes en ellas. Sin embargo, nos parece que es muy difícil, en general, puntualizar sobre los procesos cognitivos, y consideramos que será más fácil desmenuzarlos en el análisis particular de cada profesor, que es el que nos permite mirar horizontalmente el esquema que evalúa cada uno de ellos (ver secciones 5.1. y 5.2., y anexos 11, 12 y 13). Igualmente, a lo largo de la descripción del análisis global de las tareas hemos ido enfatizando en los procesos cognitivos que suponemos se activan como resultado de la actividad matemática que se genera.

Para terminar, un aspecto a resaltar es que ninguno de los profesores plantean tareas que requieran el uso de nuevas tecnologías: ni manejo de software, ni el uso de calculadoras gráficas, etc. Por tanto, es un factor ausente en las tareas diseñadas por los profesores que consideramos importante a tener en cuenta de cara al diseño de programas de formación permanente e inicial.

ii. Con relación a la unidad didáctica

La decisión metodológica de abordar primero el análisis de las tareas propuestas en las evaluaciones y posteriormente las propuestas en la unidad didáctica, consideramos que fue favorable por las siguientes razones: (1) redujo notablemente el número de tareas por analizar (36 en total), lo cual nos facilitó el acercamiento y definición de una primera tipología de las tareas que los profesores consideraban importantes para evaluar la comprensión de los macro objetos f (x), f ’(a) y f ’(x); (2) facilitó el procesamiento y la clasificación de la gran cantidad de tareas presentes en las unidades didácticas (416 en total) a partir de las 14 categorías definidas. Lo cual nos permitió centrarnos en el análisis de las que no podíamos incluir en la tipología inicial y aportaban elementos nuevos al tratamiento de estos macro objetos. Fue así como ampliamos a 32 los tipos de tareas que caracterizan la actividad matemática en el nivel de secundaria y bachillerato del sistema educativo colombiano, que se pueden visualizar en la tabla 21; y (3) nos permitió rastrear si las tareas que se evalúan forman parte de la actividad matemática que genera en el aula, o si por el contrario, se evalúan aspectos de los macro objetos f (x), f ’(a) y f ’(x) que no han sido tratados previamente por los profesores.

Tipo \ Profesor	A	B	C	D	E	
P (0)			10	12	18	40
P (1)			41	15	14	70
P (2)				9		9
P (3)	3		4	22	3	32
P (4)	3	10	20	26	30	89
P (5)	1		46	12	3	62
P (6)	1	6	11	2	4	24
P (7)	1	1				2
P (8)	1	2	1			4
P (9)	7	6	5	1	3	22
P (10)	4					4
P (11)	3		9	3	2	17
P (12)				3	2	5
P (13)					3	3
Otras	Algebraico 2 [illegible] Gráfico 1 [illegible]	Algebraico 3 [illegible] Gráfico 5 [illegible] Verbal 2 [illegible]	Algebraico 3 [illegible] Gráfico 8 [illegible]	Gráfico 4 [illegible]	Algebraico 5 [illegible]	Algebraico 13 [illegible] Gráfico 18 [illegible] Verbal 2 [illegible]
	3	10	11	4	5	33
Total	27	35	158	109	87	416

Tabla 21. Distribución del número de tareas propuestas en las unidades didácticas del concepto de derivada diseñada por los profesores.

Así, el análisis de las unidades didácticas nos aporta 18 nuevos tipos de tareas más a las ya definidas con el análisis de las evaluaciones, que incluyen 33 tareas que hemos denominado como "otras". Concretamente, la ampliación de la tipología de las tareas definidas como "otras" quedó distribuida por profesor de la siguiente manera: (1) de las 3 tareas que propone el profesor A en la unidad didáctica definimos 3 tipología nuevas (P (14), P (15) y P (16)); (2) de las 10 propuestas por el profesor B definimos 10 tipologías nuevas (P (17), P (18), P (19), P (20), P (21), P (22), P (23), P (24), P (25) y P (26)); (3) de las 11 propuestas por el profesor C definimos 3 tipologías nuevas (3 tareas en la P (27), 4 en la P (28), y 4 en la P (29)); (4) de las 4 propuestas por el profesor D definimos una tipología nueva (P (30)); y (5), de las 5 propuestas por el profesor E definimos una tipología nueva (P (31)).

Por tanto, teniendo en cuenta los 14 tipos definidos con el análisis de la evaluación ampliamos en 18 la tipología inicial, quedando en total 32 tipos de tareas que caracterizan la actividad matemática del concepto de derivada que se realiza en el nivel de secundaria y bachillerato en Colombia.

Como se puede observar en la tabla 21, el tipo de tarea que más aparece en la unidad didáctica de todos los profesores es la P (4) con 89 tareas. Ésta se caracteriza por estar enunciada en un contexto algebraico y por centrarse en el estudio de un fenómeno de la propia matemática. Para su resolución requiere, explícitamente, de la aplicación de la técnica indirecta de cálculo del macro objeto f '(x) de las reglas de derivación, lo cual demanda las siguiente traducciones y relaciones entre representaciones de los macro objetos f (x) y f '(x): ES f (x)$\rightarrow$ES f (x)$\Rightarrow$ES f '(x). Es una tipología de tareas que podríamos considerar como un ejercicio tipo de cálculo de la expresión simbólica de la función derivada a partir de la expresión simbólica de la función. Por tanto, a nuestra manera de ver, no necesariamente promueve la activación de procesos cognitivos complejos si no se complementa con tareas más potentes que involucren: (1) una variedad de fenómenos (de la propia matemática y de otras ciencias); y (2), riqueza de traducciones y relaciones entre representaciones de estos macro objetos. Es decir, que puede propiciar la emergencia de interiorización de acciones en procesos y conllevar a la memorización de reglas sin justificación alguna.

En segundo lugar, entre las tipologías utilizadas por todos los profesores, tenemos la P (6) con 24 tareas. Al igual que la tipo P (4), se caracteriza por estar enunciada en un contexto algebraico y por centrarse en el estudio de un fenómeno de la propia matemática. Para su resolución no se hace explícita la aplicación de una técnica concreta de derivación; indistintamente se podrían aplicar, tanto la técnica directa de derivación de cálculo del macro objeto f ’(x) por definición en términos de límite como la técnica indirecta de cálculo del macro objeto f ’(x) de las reglas de derivación. Sin embargo, por la complejidad de las funciones que involucran algunas de las tareas que la conforman y por economía suponemos que se aplica la técnica indirecta de las reglas de derivación; éstas últimas pueden propiciar la emergencia de interiorización de acciones en procesos y conllevar a la memorización de reglas sin justificación alguna. A diferencia de la tipo P (4), en éstas se requiere hacer las siguientes traducciones y relaciones entre representaciones de los macro objetos f (x) y f ’(x): ES f (x)→ G f (x)⇨ES f ’(x). Es decir, se pide la construcción de la gráfica de la función pero no queda claro si se tienen en cuenta los criterios de la primera y segunda derivada para el análisis monótono de la función, o si se hace a partir de la expresión simbólica de la función (ES f (x)→G f (x)).

Finalmente, entre las tareas comunes propuestas en las unidades didácticas de los profesores, tenemos la tipo P (9) con 22 tareas. Esta tipología sólo se diferencia de las anteriores en que el fenómeno que estudia es de la física. Sin embargo, teniendo en cuenta las traducciones y relaciones que demanda hacer durante el proceso de resolución podemos concluir que es un ejercicio tipo que busca el cálculo de la expresión simbólica del macro objeto f ’(x) a partir de la expresión simbólica de f (x). Este tipo de tareas no se centra en la comprensión e interpretación del fenómeno que organiza (velocidad instantánea) sino que favorece la aplicación memorística de las reglas de derivación utilizando objetos de la física. Es decir que en realidad no fomenta la coordinación de los objetos velocidad instantánea y tasa instantánea de variación en términos del macro objeto f ’(a). Otro aspecto a resaltar es que, en general, las técnicas de cálculo del macro objeto f ’(a) aparecen reducidas a la simple sustitución de la variable $x = a$ en la expresión simbólica de f ’(x) hallada mediante la aplicación de las técnicas directa en término de límite o por la indirecta de las reglas de derivación.

Igualmente, consideramos que otros aspectos relevantes para nuestro propósito de definir y caracterizar la actividad matemática, son: (1) la ausencia, en la unidad didáctica de los profesores C, D y E, de tareas que requieran para su resolución de la aplicación de técnicas indirectas gráfica y numérica para el cálculo de los macro objetos f ’(a) y f ’(x), y la poca presencia de las mismas en las unidades de los profesores A y B; y (2), la presencia explícita, en la unidad didáctica de los profesores C, D y E, de un gran número de tareas que requieren para su resolución de la aplicación de técnicas directas por definición de límite, para el cálculo de los macro objetos f ’(a) y f ’(x).

Con relación a la primera, por un lado, encontramos que los profesores D y E, no proponen en la unidad didáctica ninguna tarea que se centre en el tratamiento y aplicación de técnicas de aproximación gráfica y numérica para el cálculo de los macro objetos f ’(a) y f ’(x). Sólo entre las tareas que propone el profesor D, 4 de las denominadas como “otras” (ver anexo 13), se encuentran enunciadas en un contexto gráfico. Sin embargo, éstas se centran en el estudio e interpretación gráfica de los objetos velocidad media y tasa media de variación que, si bien es cierto que es importante para la posterior comprensión de los macro objetos f ’(a) y f ’(x), no los involucra directamente.

Por otro lado, encontramos que el número de tareas que proponen los profesores B, C, y D que requieren de la aplicación de técnicas directas de derivación gráfica es muy reducido (34 de 216). Éstas se encuentran repartidas entre las tipo P (7), P (8) y las denominadas “otras”. Creemos conveniente resaltar que el profesor B es el único que se preocupa por utilizar técnicas gráficas y numéricas para el cálculo de los macro objetos f ’(a) y f ’(x) que impliquen, o bien relaciones que van de representaciones del macro objeto f (x) a representaciones del macro objeto f ’(x), es decir: ____ f (x)⇨____ f ’(x); o bien, relaciones que van de representaciones del macro objeto f ’(x) a representaciones del macro objeto f (x), es decir: ____ f ’(x)⇨______ f (x). Si bien es cierto que las últimas nos llevarían al cálculo integral, consideramos que ayudan a una mejor comprensión y relación de estos macro objetos.

Con relación a la segunda, la presencia explícita del uso de técnicas de derivación directa por definición de límite, encontramos que los profesores C, D y E, plantean tareas en la que los alumnos han de calcular tanto el incremento de una función (tipo

P (0)) o calcular el la expresión simbólica de la función derivada o el valor de la derivada en un punto mediante la aplicación del límite del conciente incremental, más concretamente, sugieren aplicar la regla de los cinco pasos. Lo anterior es coherente con el itinerario didáctico que proponen estos profesores en la unidad didáctica para el tratamiento de los macro objetos f ’(x) y f ’(a), en la que el énfasis está en la definición usando la notación incremental.

En términos generales podemos llegar a las siguientes conclusiones con relación a las tareas que se proponen en las unidades didácticas proporcionadas por estos profesores:

1. La mayoría de las tareas, 272 de 416, requieren para su resolución de la aplicación de las técnicas indirectas de las reglas de derivación. Éstas se encuentran enunciadas en un contexto algebraico, en su mayoría estudian fenómenos de la matemática y aparecen en menor proporción fenómenos de la física y de la economía. Lo anterior implica que estas tareas favorecen la emergencia de una perspectiva proceso de los macro objetos involucrados caracterizada por la interiorización de acciones en proceso y la coordinación de procesos.
2. Los profesores C, D y E proponen tareas en las que se requiere la aplicación de la técnica directa por definición de límite. En total son 110 de 416 tareas, de las cuales 40 se dedican al cálculo del incremento de la función y 70 a la reglas de los cinco pasos.
3. En menor proporción, los profesores A, B y C proponen tareas que requieren de la aplicación de técnicas de derivación gráfica y numérica para el cálculo de los macro objetos f (x), f ’(a) y f ’(x); aproximadamente 34 tareas de 416.
4. Las tareas que propone el profesor B destacan por la variedad de contextos en los que se enuncian, lo cual implica una riqueza en la traducción y relaciones entre representaciones de los macro objetos f (x), f ’(a) y f ’(x) que hacen emerger procesos cognitivos complejos (encapsulación de procesos en objetos, desencapsulación de objetos en proceso, síntesis de objetos en esquema, etc.).
5. En general, las técnicas de cálculo del macro objeto f ’(a) aparecen reducidas a la simple sustitución de la variable $x = a$ en la expresión simbólica de f ’(x) hallada mediante la aplicación de las técnicas directas en términos de límite o por la indirecta de las reglas de derivación.

Por último, teniendo en cuenta que nos interesa analizar la relación que hay entre las tareas propuestas en la unidad didáctica y las que se proponen en las evaluaciones, diseñamos un instrumento (tabla 22) que nos permitiera comparar los tipos de tareas que los profesores evalúan con los tipos de tareas que forman parte de la actividad matemática que dice que general en el aula, encontrando lo siguientes resultados:

Profesor / Tipo	A		B		C		D		E	
	Eval.	**U. D.**	**Eval.**	**U. D.**	**Eval.**	**U. D.**	**Eval.**	**U. D.**	**Eval.**	**U. D.**
P (0)					1	10	1	12	1	18
P (1)					1	41	1	15	2	14
P (2)	1							9		
P (3)		3	1		1	4	1	22	2	3
P (4)		3		10	3	20	1	26	1	30
P (5)	1	1				46	1	12	1	3
P (6)		1		6	4	11		2		4
P (7)		1	1	1						
P (8)		1	1	2		1				
P (9)	1	7	1	6	1	5		1		3
P (10)	1	4					1			
P (11)	1	3	1			9		3		2
P (12)	1							3		2
P (13)			1							3
Otras		3		10		11		4		5
Total	6	27	6	35	11	158	6	109	7	87

Tabla 22. Tabla comparativa de la distribución del número de tareas de cada una de las tipologías definidas propuestas en la evaluación y en la unidad didáctica de cada profesor

1. En general, la mayoría de tareas que aparecen en las evaluaciones forman parte de la actividad matemática previamente desarrollada en el aula de clase, siendo los profesores C, D y E lo más coherentes entre lo que dicen que hacen y lo que evalúan. Tal y como lo hemos descrito, lo anterior no implica que las tareas que propongan sean conceptualmente potentes y que ayuden a construir la comprensión y relación entre los macro objetos f (x), f ’(a) y f ’(x).
2. Como se puede apreciar en la tabla 22, los profesores C, D y E son los que proponen una gran cantidad de tareas durante el desarrollo de la unidad didáctica (158, 109 y 87, respectivamente), lo cual no implica que la actividad matemática sea rica y variada; mientras que los profesores A y B proponen un número reducido de tareas (27 y 35, respectivamente), curiosamente son los profesores que plantean más situaciones en donde se tratan una variedad de traducciones y relaciones entre

representaciones de los macro objetos f (x), f '(a) y f '(x). Lo anterior es más abundante en el caso del profesor B y es coherente con la estrategia de enseñanza que implementa éste, basada en la resolución de problemas. En efecto este profesor en la unidad didáctica introduce los conceptos a partir de problemas que sirven para buscar las ideas previas de los estudiantes y después de éstos desarrolla los conceptos; e incluso en algunos apartados de la unidad didáctica, retoma problemas que propuso en las actividades de iniciación para ser desarrollados en clases aplicando técnicas más apropiadas.

3. Una de las tareas que propone el profesor D del tipo P (10) se evalúa pero no se trata previamente en el aula. El hecho de que aparezca esta tarea que estudia un fenómeno de la Economía es coherente con lo que propone este profesor en la programación pero incoherente con lo que propone en la unidad didáctica. En efecto, si bien es cierto que el bachillerato que se imparte en este colegio tiene un énfasis comercial, éste aseguró en la entrevista sobre la elaboración de la unidad didáctica que no acostumbra a centrarse en los aspectos fenomenológicos de estos macro objetos sino en los procesos algebraicos involucrados en la aplicación de las técnicas I y II.

> "**Profesor D:** yo creo que es desde las matemáticas desde donde se debe introducir el tema de derivada... **porque las otras disciplinas como la física, química y comerciales pueden ayudar en la aplicación del concepto... pero insisto yo creo que debe ser desde la matemática de 11º... porque he de confesar que de matemática financiera lo trato poco es que no me gusta**."

4. De los tipos de tareas que propone el profesor A en la evaluación, observamos que dos no aparecen entre las propuestas en la unidad didáctica. Sin embargo, la tipo P (2), encerrada en un óvalo, forma parte de las tareas que desarrolla para introducir la interpretación geométrica del macro objeto f '(a); y la otra que es del tipo P (12) es muy parecida a las tipo P (11) tratadas en la unidad didáctica (ver anexo 11). Por tanto, consideramos que los estudiantes no tendrán grandes dificultades para resolverlas.

5. El profesor B, es el que propone más tipos de tareas en la evaluación, que aparentemente, no fueron tratadas en la unidad didáctica. Por un lado, la tarea del tipo P (3), encerrada en un óvalo, forma parte de las tareas que desarrolla para introducir la interpretación geométrica del macro objeto f '(a). Y con relación a la aparición de las tipo P (11) y P (13), consideramos que la riqueza de las tareas que conforman la actividad matemática que desarrolla en el aula, las cuales pueden

ayudar a emerger una perspectiva objeto de los macro objetos f (x), f ’(x) y f ’(a), les permitirá a los estudiantes abordar sin muchas dificultades las diferentes tipología de problemas propuestos en la evaluación.

5.3.3. Revisión de la descomposición genética inicial del concepto de derivada

En el marco de la teoría APOE, el uso de la descomposición genética inicial del concepto de derivada que construimos, nos permitió describir las construcciones mentales, con relación al concepto de derivada, que tienen los profesores que participaron en este estudio. Nuestra descomposición genética inicial (DGID), presentada en el capítulo 4, describe construcciones paralelas de los macro objetos f (x), f ’(a) y f ’(x) atendiendo a las dos dimensiones del esquema que hemos definido: algebraica y gráfica.

La información que nos proporcionan tanto el análisis particular de los casos como el análisis general de los problemas que conforman las tres líneas de coherencia que definimos para describir los niveles de comprensión del esquema de la derivada, nos muestra que muchas de las construcciones mentales que describimos en el estudio del conocimiento disciplinar de los profesores (ver secciones 5.1., 5.2., 5.3., y los anexos 11, 12 y 13) están por demás contenidas en la DGID. Sin embargo, los resultados obtenidos, al describir, por un lado, los niveles de comprensión del esquema de la derivada, y por otro lado, el análisis del tratamiento de los macro objetos en los libros de texto, reflejan ciertos aspectos de los macro objetos f (x), f ’(a) y f ’(x) que necesitan ser enfatizados, o bien relacionados en el itinerario epistemológico y didáctico del concepto de derivada que proponemos. A continuación, incorporaremos en la revisión de la descomposición genética inicial los diferentes elementos detectados en el análisis de los niveles de comprensión del esquema de la derivada.

La DGID está conformada por cuatro apartados: conocimientos prerrequisitos, contextos gráficos y algebraico hacia la construcción del macro objeto f ’(x), interpretación gráfica de los macro objetos f ’(a) y f ’(x), y aplicación del macro objeto f ’(x).

a. Con relación a los conocimientos prerrequisitos

Las investigaciones en Didáctica de la Matemática sobre la enseñanza y aprendizaje de la derivada (Azcárate, 1990; Tall, 1991; Azcárate *et al*., 1996; Font, 2000), han señalado que para acceder con éxito a la enseñanza de este concepto se deben tener en cuenta los siguientes aspectos:

> "1. Partir de las ideas previas que los alumnos tienen de la velocidad
> 2. Utilizar las representaciones gráficas de las funciones para visualizar las ideas, en especial la tasa media de variación como pendiente de una recta
> 3. Tener presentes las dificultades cognoscitivas que entraña el proceso de paso al límite" (Azcárate *et al*., 1996; pp. 23)

Azcárate (1990) señala, a partir de los resultados de investigaciones sobre el aprendizaje de la derivada, que los alumnos cuando trabajan con los conceptos básicos, que esta autora denomina del precálculo (velocidad media, pendiente de una recta y tasa de variación), muestran dificultades y errores conceptuales y de aplicación de las técnicas de cálculo. Por tanto, sugiere que la mayor y mejor inversión para un buen aprendizaje del cálculo es un buen tratamiento previo sobre estos contenidos, que dote a los estudiantes de unos conocimientos que tienen importancia y utilidad por sí mismos.

Retomando los elementos anteriores que aportan las investigaciones en Didáctica de la Matemática sobre el aprendizaje y enseñanza de la derivada, y a partir de nuestra propia experiencia con este concepto como aprendices y educadores, en la DGID que diseñamos proponemos unos conocimientos prerrequisitos que los individuos deberían conocer y comprender para acceder con éxito a la comprensión de la derivada. Ello implica ir construyendo estructuras cognitivas complejas, teniendo como base estos conceptos, a partir de procesos de abstracciones reflexivas continuos y progresivos.

Los conocimientos prerrequisitos que proponemos inicialmente (ver apartado 4.1.2.1.), incluyen: representación gráfica en sistemas de coordenadas cartesianas, coordinación de representaciones de puntos con funciones, coordinación de diferentes aspectos de continuidad de funciones, traducciones entre diferentes modos de representación de funciones, coordinación de representaciones de la pendiente de una recta, y la coordinación entre los objetos pendiente y función en el análisis de la monotonía de las funciones. Sin embargo, extrayendo los resultados del análisis de las respuestas al cuestionario indirecto, la entrevista sobre viñetas y la entrevista sobre el proceso de resolución del cuestionario, encontramos que no todos los profesores comprenden los conocimientos prerrequisitos que contemplamos en nuestra DGID, e incluso, aparecieron otros aspectos relacionados con estos conceptos y con otros conceptos que no habíamos tenido en cuenta en la DGID, y que incorporaremos en la revisión de la misma. Por ejemplo, el análisis de las respuestas a la versión de la paradoja de Zenón refleja que algunos de los profesores tienen dificultades e inconsistencias en: (1) la comprensión del infinito potencial; (2) el paso de la secante a la tangente; (3) la interpretación de funciones asintóticas; (4) la aplicación de técnicas de aproximación gráficas y numéricas que incluyan traducciones entre dibujo y gráfica, y *viceversa*; y (5), la fundamentación teórica de los conceptos de espacio, velocidad, tiempo y movimiento en términos del cálculo diferencial (perspectiva proceso de las ecuaciones de la cinemática clásica). Igualmente, el análisis de los diferentes problemas revela que algunos de los profesores muestran dificultades e inconsistencias en: (1) la lectura e interpretación gráfica de funciones acumulativas y de gráficas de espacio-tiempo; y (2), la coordinación de diferentes significados del objeto pendiente: velocidad media, tasa media de variación y cociente incremental.

A continuación, revisamos nuestra DGID incorporando los aspectos de los conocimientos prerrequisitos descritos anteriormente:

I. Conocimientos prerrequisitos

1. Representación gráfica en sistema de coordenadas cartesianas de los objetos matemáticos
    1.1. Reconocimiento de los ejes; del significado del origen; de las unidades; y de las escalas
    1.2. Representación gráfica de los puntos
    1.3. Representación gráfica de una recta
2. Coordinación de representaciones de puntos con las de funciones
    2.1. Interpretación de (x, y), cuando y es dada por la ES f (x)
    2.2. Interpretación de (x, y), cuando y es dada por la G f (x)
    2.3. Definición de las condiciones necesarias para que una relación sea función

2.4. Interpretación gráfica de estas condiciones

2.5. Superar la necesidad de tener una ES f (x) para interpretar y tratar con el macro objeto f (x)

3. Coordinación de los diferentes aspectos de la continuidad de una función

3.1. En un punto

3.1.1. Discontinuidad evitable

3.1.2. Discontinuidad no evitable

a. En un intervalo

3.2.1. Discontinuidad evitable[3]

3.2.2. Discontinuidad no evitable

4. Coordinación y traducción de diferentes modos de representación de funciones en general; y en particular, *de funciones acumulativas y del espacio en función del tiempo*

4.1. Lectura de gráficas de funciones

4.1.1. Lectura local: punto a punto

4.1.2. Lectura global: por intervalos o en todo el dominio

4.2. Interpretación de gráficas de funciones

4.2.1. Traducción de una descripción verbal a una gráfica, y viceversa.

4.2.2. Pasar de un dibujo a una gráfica, y viceversa

4.2.3. Otras traducciones entre representaciones (tabla, descripción verbal, gráfica y expresión simbólica)

5. Coordinación de representaciones del concepto de pendiente de una recta

5.1. La pendiente determina el grado de inclinación de la recta

5.2. La pendiente es la tangente trigonométrica del ángulo que forma la recta con el eje x

5.3. La pendiente como el número (coeficiente) en la fórmula y = ax + b

5.4. La pendiente como la razón entre los incrementos de las variables

[3] Con letra cursiva señalamos los aspectos nuevos que incorporamos en la revisión de la DGID como resultado de los aportes del análisis particular de los casos y del análisis global de las componentes del conocimiento profesional que tienen los profesores que participaron en este estudio del concepto de derivada. Además, hemos tenido en cuenta los aportes de investigaciones en Didáctica de la Matemática sobre la enseñanza y aprendizaje de los conceptos del cálculo y del precálculo, entre ellos, los trabajos de: Azcárate, 1990; Azcárate *et al.*, 1996; Norman, 1992; Even, 1993; García y Llinares, 1994; García, 1997; Font, 2000 y las investigaciones del Grupo RUMEC.

$$\left(m = \overline{V} = TMV = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right)$$

5.4.1. Velocidad media

5.4.2. Tasa media de variación

5.4.3. Cociente incremental

5.5. Traducción de registros (gráfico, tabla, fórmulas, verbal) en el cálculo de la pendiente de una recta

6. Coordinación de los conceptos pendiente y función en el análisis de la monotonía de funciones *(local y global)*

6.1. Crecimiento y decrecimiento: puntos de singularidad, máximos y mínimos (relativos /absolutos)

6.2. Concavidad y convexidad: puntos de inflexión

6.3. Continuidad y discontinuidad

6.3.1. Tratamiento del infinito: lo infinitamente grande y lo infinitamente pequeño

6.3.2. Funciones asintóticas

7. Tratamiento intuitivo del límite

7.1. Acercamiento numérico al concepto de límite

7.2. Acercamiento geométrico (gráfico) al concepto de límite

7.3. El paso de la secante a la tangente (cuerdas y tangentes).

b. Con relación a los otros tres apartados: contextos gráficos y algebraico hacia la construcción del macro objeto f ’(x), interpretación gráfica de los macro objetos f ’(a) y f ’(x), y aplicación del macro objeto f ’(x).

Las construcciones mentales discutidas y descritas en las secciones 5.1. a 5.3., y en los anexos 11, 12 y 13, en términos generales, son explicadas por la DGID. Por ejemplo, primero, el profesor B que tiene un nivel de comprensión del esquema de la derivada trans algebraico-trans gráfico, mostró tener construidas las relaciones, tanto gráficas como algebraicas, entre los macro objetos f (x), f ’(a) y f ’(x), definidas en los cuatro apartados de la DGID, y coordinarlos, correctamente en la resolución de problemas no rutinarios enunciados en diferentes contextos.

Segundo, el profesor D, que tiene un nivel de comprensión del esquema de la derivada trans algebraico-inter gráfico, mostró tener construidas las relaciones algebraicas entre los macro objetos f (x), f '(a) y f '(x), pero tener algunas dificultades en la coordinación de estos macro objetos cuando interpreta gráficamente el objeto tasa media de variación, llegándolo a confundir con el crecimiento de la función. En términos generales, las respuestas del profesor D a los problemas planteados, reflejan que puede pensar y tratar con los macro objetos f '(a) y f '(x) utilizando sólo la información que le proporciona la gráfica de la función y, según sea el caso, la información gráfica de la función derivada. Sin embargo, las dificultades anteriormente descritas nos llevan a ubicarlo en un nivel inter gráfico del esquema de la derivada caracterizado por: (1) la coordinación del objeto de pendiente de la recta tangente a la gráfica en un punto con el objeto límite de las razones de cambio en un punto; (2) por el manejo con propiedad de los criterios de la primera derivada para describir la variación local y global de la función expresada gráficamente, y de manera incipiente y especialmente en los puntos de inflexión, utiliza gráficamente el criterio de la segunda derivada de acuerdo con el criterio de la primera derivada; y (3), por mostrar elementos que le permiten distinguir gráficamente los macro objetos f '(a) de f '(x), pero dependiendo del contexto de la situación aún tiene dificultad para diferenciarlos (especialmente en la interpretación de la variación local y global de funciones acumulativas).

Tercero, el profesor C, que tiene un nivel de comprensión del esquema de la derivada inter algebraico-intra gráfico, en el que, dependiendo del contexto de la situación, encontramos algunas dificultades e inconsistencias en la comprensión gráfica de los macro objetos f (x), f '(a) y f '(x), tales como: (1) dificultades para interpretar la gráfica de una función cualquiera dependiendo del contexto del problema, más concretamente inconsistencias en la interpretación de gráficas de espacio-tiempo; (2) dependencia del contexto del problema para coordinar los objetos O_1, O_2 y O_3 y relacionarlos con el objeto f '(a); y (3), tendencia algebraica para coordinar los macro objetos f '(a) y f '(x) en la solución de problemas enunciados en un registro gráfico, a pesar de manejar gráficamente el criterio de la primera derivada en la interpretación de la variación local y global de la función representada.

Igualmente, encontramos que cuando el profesor C soluciona problemas aplicando procedimientos algebraicos se evidencia la presencia de procesos cognitivos complejos, tales como la desencapsulación de objetos en procesos cuando manipula los objetos O_1, O_2 y O_3.; y, cuando el problema lo requiere, aplica correctamente las técnicas de derivación indirecta (reglas de derivación), justificando el uso de las mismas y mostrando una perspectiva objeto de la diferenciación de funciones.

Y, finalmente, los profesores A y E, que tienen un nivel de comprensión del esquema de la derivada intra algebraico-intra gráfico, muestran una perspectiva proceso de los macro objetos f (x), f '(a) y f '(x), caracterizada por la necesidad de obtener la expresión simbólica de la función para poder realizar transformaciones y relaciones entre dichos macro objetos. Es decir, que verbalizan la necesidad de obtener la ES f (x) para diferenciarla, y, a partir de ella, asociar o bien la expresión simbólica de la función derivada o bien la gráfica de la función derivada (**ES f (x)**⇨ES f '(x); ó **ES f (x)**⇨ ES f '(x)→G f '(x); ó G f (x)→**ES f (x)**⇨ES f '(x); ó G f (x)→**ES f (x)**⇨ES f '(x)→ G f '(x)).

En términos generales, los profesores A y E tienen dificultad para pensar y tratar con los macro objetos f '(a) y f '(x) utilizando sólo la información que les proporciona la gráfica de la función, y según sea el caso, la información gráfica de la función derivada. Dependiendo de la función representada gráficamente, interpretan gráficamente f '(x) como la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto (f '(a)), y tienden a confundir la gráfica de f '(x) con la gráfica de la recta tangente a la gráfica de la función en un punto. Por tanto, no tienen construidas la relación entre los macro objetos f '(a) y f '(x). Esto se refleja en la no coordinación de los objetos O_1, O_2 y O_3, que engloba el macro objeto f '(a); y en la ausencia del proceso de síntesis de los anteriores tres objetos en los objetos O'_1, O'_2 y O'_3, que engloba el macro objeto f '(x).

Igualmente, al solucionar problemas enunciados en un registro algebraico, son profesores que no relacionan los macro objetos f '(a) y f '(x) como elemento y clase, puesto que para calcular el valor de la derivada en un punto, aplican un proceso de resolución algebraico no justificado que consiste en: primero, hallar la función derivada a partir de la expresión simbólica de la función mediante la aplicación de las técnicas indirectas de las reglas de derivación (ES f (x)⇨ES f '(x)), y posteriormente, calcular la derivada en un punto reemplazando el valor de *x* en la función derivada encontrada. El anterior proceso de resolución algebraico no justificado muestra que estos profesores tienen una perspectiva proceso de las reglas de derivación.

Otro aspecto importante, que aporta elementos significativos de la derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje, son los resultados obtenidos del análisis del tratamiento que dan a los macro objetos f '(a) y f '(x) en los libros de texto usados por todos los profesores. Este análisis nos permitió detectar un problema que se presenta con una cierta regularidad y generalidad en el sistema educativo colombiano, que consiste en la confusión o la no diferenciación de los macro objetos f '(a) y f '(x), y como consecuencia, el no tratamiento de técnicas de derivación para el calculo del macro objeto f '(a), quedando éstas reducidas a la simple sustitución de la variable $x = a$ en la expresión simbólica del macro objeto f '(x), hallada mediante la aplicación de las técnicas de derivación I y II. Este problema se constata con mayor o menor grado, en todos los libros de textos de matemática de 11º que usan los profesores que participaron en este estudio como complemento del diseño de la unidad didáctica.

A continuación, incorporaremos, en la revisión de los tres apartados de la DGID, las anteriores conclusiones a las que llegamos después del análisis de los niveles de comprensión de los esquemas de la derivada que tienen los profesores y del tratamiento que dan a los macro objetos f '(a) y f '(x) en los libros de texto (y/o Unidad didáctica):

II. Contextos gráfico y algebraico hacia la construcción del macro objeto f '(x)

1a. **Gráfico-analítico**: la acción de conectar dos puntos sobre una curva para formar una cuerda que es una porción de la secante, a través de los dos puntos; junto con la acción de calcular la pendiente de la recta secante a través de los dos puntos

1b**. Algebraico-numérico**: la acción de calcular la tasa media de variación entre el punto y otro punto "próximo" $\left(m = \overline{V} = TMV = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} \right)$

2a**. Gráfico-analítico**: interiorización de las acciones del punto *1a* en un proceso único a medida que los dos puntos del gráfico se aproximan más y más

2b**. Algebraico-numérico**: interiorización de las acciones para calcular la tasa media de variación $\left(m = \overline{V} = TMV = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} \right)$, cuando b→a; en un proceso único, a medida que la diferencia entre los intervalos se hacen más y más pequeños. Esto es a medida que la longitud del intervalo se acerca más y más a cero

3a. **Gráfico-analítico**: encapsulación del proceso del punto *2a* para producir la recta tangente como la posición límite de las secantes, y para producir la pendiente de la tangente en un punto sobre la gráfica de una función

3b. **Algebraico-numérico**: encapsulación del proceso del punto *2b,* de calcular las tasa medias de variación $\left(m = \overline{V} = TMV = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} \right)$cuando b→a, para producir la tasa de variación instantánea de una variable respecto de la otra como el $\left(\lim\limits_{b \to a} \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} \right)$

3c. Coordinación gráfica y algebraica de las notaciones incremental y funcional de la tasa instantánea de variación:

$$\left(\lim_{b \to a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} \right)$$

4. Coordinar las diferentes interpretaciones, *tanto algebraicas como gráficas*, de la tasa instantánea de variación

   4.1. El valor de la pendiente de la recta tangente como el límite del cociente incremental $\left(m_{\tan} = \lim\limits_{b \to a} \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} \right)$

   4.2. La pendiente como la tangente del ángulo de inclinación de la recta tangente con el eje de las abscisas (α m = tan α)

   4.3. La velocidad instantánea, el ejemplo más sencillo de la tasa instantánea de variación, como el límite de la velocidad media:

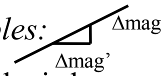
$$\left(V_{inst} = \lim_{b \to a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t} \right)$$

   4.4.*La velocidad como el cociente entre incrementos de las variables:* Δe Δt

   4.5. Las razones de cambio de funciones que dependen del tiempo, como el límite del cociente de las tasas medias ($\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta mag}{\Delta t}$)

   4.6. *La razón de cambio como el cociente entre incrementos de las variables:* Δmag Δt

4.7. Las razones de cambio de funciones que dependen de una magnitud cualquiera como límite del cociente de las tasas medias ($\underset{\Delta mag' \to 0}{Lím} \dfrac{\Delta mag}{\Delta mag'}$)

4.8. *La razón de cambio como el cociente entre incrementos de las variables:* 

5. Encapsulación de los procesos de los puntos *2a* y *2b* en general para producir la definición de la derivada de una función en un punto como el límite del cociente incremental en ese punto:

$$\left(m_{\tan} = V_{inst} = \underset{b \to a}{Lim} \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \underset{\Delta x \to 0}{Lim} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} = f'(a) \right)$$

6. Coordinación de los procesos de los puntos *2a* y *2b* en varias situaciones relacionadas con la derivada de una función en un punto presentadas en diferentes contextos
7. Interiorización de la acción de producir la derivada en un punto en el proceso de construir la función derivada f ’(x), la cual toma como entrada el punto x y produce en la salida el valor de f ’(x), que es el valor de la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función, para cualquier x del dominio de la función $\left(\underset{\Delta x \to 0}{Lim} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x) = \dfrac{dy}{dx} \right)$
8. Encapsulación del proceso del punto *7* para producir la función derivada f ’(x) como un nuevo objeto complejo *(que implica el proceso de síntesis de los objetos O_1, O_2 y O_3 que engloba el macro objeto f ’(a), en los objetos O'_1, O'_2 y O'_3 que engloba el macro objeto f ’(x)*

$$\left(m_{\tan} = V_{inst} = \frac{dy}{dx} \Big|_{x=a} = \frac{d}{dx} f(x) \Big|_{x=a} = f'(a) = \underset{\Delta x \to 0}{Lim} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} \right)$$

9. *Generalización del macro objeto f ’(x) en el cálculo indirecto de la función derivada a través de las reglas de derivación*
   9.1. *Interiorización de las acciones de encontrar la derivada de una función a partir de la aplicación de las reglas de derivación, y en algún caso, la acción de aplicar la regla de la cadena*
   9.2. *Coordinación de las acciones presentes en la aplicación de la regla de la cadena sin ser relacionadas*
   9.3. *Encapsulación del proceso de aplicar la regla de la cadena en un objeto que requiere la coordinación de la composición de funciones con la diferenciación de funciones (reglas de derivación* $\left[\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \bullet \dfrac{du}{dx} \right]$ *)*

9.4. Coordinación de varias notaciones de la regla de la cadena (utilizando la notación de Leibniz y la de Cauchy)

III. Interpretación gráfica de la derivada

1. Interpretación gráfica del macro objeto f '(a)
   - 1.1. Superar la necesidad de diferenciar una formula o ES f (x)
   - 1.2. Coordinar varias interpretaciones del macro objeto f '(a)
     - 1.2.1. Como el límite del cociente diferencial en un punto dado
     - 1.2.2. Como el valor de la pendiente de la recta tangente en un punto dado
     - 1.2.3. Como el valor de la velocidad instantánea en un instante dado
     - 1.2.4. Como la razón de cambio entre magnitudes que dependen del tiempo en un instante dado
     - 1.2.5. Como la razón de cambio entre dos magnitudes cualesquiera en un punto dado
2. Interpretación gráfica del macro objeto f '(x)
   - 2.1. Coordinar varias interpretaciones del macro objeto f '(x)
     - 2.1.1. La función derivada como la función límite del cociente incremental (tasa media de variación) de una función en todos los puntos del dominio
     - 2.1.2. La función derivada como una nueva función que hace corresponder a cada abscisa x del dominio de la función, el valor de la pendiente de la recta tangente en el punto (x, f (x))
     - 2.1.3. La función derivada como la función límite de las razones de cambio entre magnitudes
   - *2.2. Traducción entre un mismo sistema de representaciones de los macro objetos f (x) y f '(x); y relación entre diferentes representaciones (tabla, gráfica, descripción verbal, expresión simbólica) de los macro objetos f (x) y f '(x) en el cálculo de la función derivada presentada en diferentes contextos*

IV. Aplicación del macro objeto f '(x)

1. Coordinación de varios procesos para obtener la gráfica de f (x) *y de f '(x)*

1.1. Interpretación gráfica de f (x) para un determinado x del dominio de f (x)

1.2. Interpretación de f ’(x), para un determinado *x*, como el valor de la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la curva

1.3. Proceso de interpretar gráficamente el comportamiento de *x* a través de un intervalo

1.3.1. Monotonía de la función y signo de la primera *derivada (crecimiento y decrecimiento)*

1.3.2. Pendiente infinita (tangente vertical) y derivada infinita

1.3.3. Concavidad de la función y signo de la segunda derivada

1.4. Dibujo de la gráfica completa o representativa de f (x) y de f ’(x) a partir de la ES f (x)

1.5. Coordinación de las propiedades de continuidad y criterios de la primera y segunda derivada para la construcción de las gráficas de f (x) y f ’(x)

2. Generalización de la función derivada como razón de cambio relacionadas

2.1. Aplicación en la interpretación y resolución de problemas de optimización (Geometría)

2.2. Aplicación en la interpretación y resolución de problemas de mecánica clásica (Física)

2.3. Aplicación en la interpretación y resolución de problemas de crecimiento y decrecimiento de magnitudes (Biología, economía, etc.).

Finalmente, queremos recordar, por un lado, el carácter subjetivo y provisional de la anterior descomposición genética del concepto de derivada; y por otro lado, que el hecho de habernos centrado en el paso cualitativo del macro objeto f ’(a) al macro objeto f ’(x), nos aportó más información para revisar el apartado II de la descomposición genética inicial. Por tanto, los demás apartados de la descomposición se han de investigar más profunda y detenidamente para intentar construir las descomposiciones genéticas parciales que requiere el estudio de un concepto matemático tan complejo como es el objeto matemático derivada.

CAPÍTULO 6. CONCLUSIONES E IMPLICACIONES DIDÁCTICAS

6.0. A manera de introducción

Este capítulo se encuentra estructurado en tres secciones. En las dos primeras secciones se describen las conclusiones de la investigación, que hemos organizado teniendo en cuenta los objetivos propuestos en el capítulo uno. En la primera sección, las conclusiones metodológicas las presentaremos expuestas en dos subapartados, uno centrado en los aportes de este estudio a los instrumentos de recogida de la información y otro centrado en la metodología de análisis que diseñamos, los cuales ofrecen elementos nuevos a la metodología de investigación cualitativa. En las conclusiones didácticas se esbozan los aportes más significativos en el área de Didáctica de la Matemática. Finalmente, en la tercera sección de implicaciones didácticas, proponemos algunos elementos que nos parecen fundamentales en la formación permanente del profesorado y se dejan abiertas algunas tareas futuras de investigación.

6.1. Conclusiones metodológicas

Para la reconstrucción de las conclusiones de este estudio, partiremos de los objetivos metodológicos que planteamos en el capítulo 1, los cuales fueron:

- Aportar nuevos elementos metodológicos a la investigación cualitativa para el tratamiento de la información en el análisis de estudios de casos, centrados en la integración de la componente del contenido y de la componente didáctica del contenido del conocimiento profesional de profesores de matemática en ejercicio.
- Proponer un modelo de investigación adaptado del ciclo metodológico que plantea la Teoría APOE que permita el estudio de las componentes del conocimiento profesional del profesor, centrado en un concepto matemático concreto que considere la naturaleza situada de éste, como base para el diseño de programas de formación permanente e inicial del profesorado.

- Diseñar un instrumento para el análisis de las tareas matemáticas que proponen los profesores para la enseñanza y evaluación de los conceptos matemáticos, que son fundamentales para caracterizar la actividad matemática que fomentan en el aula.

Inicialmente haremos una reflexión de los instrumentos que diseñamos e implementamos en esta investigación, porque consideramos que aportan elementos significativos a la metodología de investigación cualitativa. Seguidamente, resaltaremos los aspectos más importantes de la metodología de análisis que adaptamos a las características de este estudio y presentaremos, como aporte más relevante, el instrumento que diseñamos para el análisis de tareas matemáticas, teniendo como base las categorías teóricas y analíticas que nos ofrecen la adaptación que hicimos de la Teoría APOE y de los Organizadores del currículo para el estudio del conocimiento profesional del profesor.

6.1.1. Con respecto a los instrumentos de recogida de información

Consideramos que la elección y el diseño de los instrumentos de recogida de la información que utilizamos en esta investigación han sido acertados porque permitieron acercarnos a las formas de conocer el concepto de derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje que tienen los profesores que participaron en este estudio. A continuación presentamos algunas de las conclusiones que sacamos de la implementación de los mismos para el análisis del conocimiento profesional del profesor:

- La elección de los **instrumentos de recogida de datos** nos permitieron obtener información, tanto por separado como integradamente, de las componentes del conocimiento profesional del profesor consideradas en este estudio.

- El uso de una **variedad de instrumentos** nos permitió la triangulación de información, que nos ayudó a establecer la validez de los datos obtenidos.

- El **modelo de unidad didáctica** que le proporcionamos a los profesores nos permitió obtener información rigurosa sobre la transposición didáctica que hacen del concepto de derivada en este nivel de escolaridad. En efecto, las tareas propuestas en las evaluaciones y en la unidad didáctica nos permitieron aproximarnos a una caracterización de los rasgos más significativos de la actividad matemática que los profesores generan en el aula, aclarando que nos centramos en la fase preactiva. Sin embargo, aunque no hacemos una observación directa de lo que ocurre en el aula, la potencia de este instrumento nos permitió inferir algunos aspectos relevantes de la práctica profesional del profesor.

- Las **entrevistas sobre la justificación de la elaboración de la unidad didáctica**, de la programación y de la evaluación, nos permitieron: (1) describir el carácter situado del conocimiento profesional del profesor, puesto que los documentos por sí solos darían un carácter estático de la agenda de enseñanza y no nos permitirían hacer inferencias sobre la práctica; y (2), inferir sobre la coherencia entre el discurso del profesor, lo que dice que hace, y los rasgos de la práctica caracterizados a partir de los aspectos considerados.

- El **diseño del cuestionario indirecto** y **la entrevista sobre la justificación del proceso de resolución de los problemas planteados** facilitaron un acercamiento a lo que los profesores saben sobre el concepto de derivada como objeto matemático. Un aspecto importante a resaltar es que este instrumento nos permitió, por un lado, indagar indirectamente las formas de conocer del profesor creando un ambiente de intercambio y reflexión entre profesores e investigadora; y por otro lado, generó procesos metacognitivos en los profesores sobre los elementos del objeto de derivada presentes en la evaluación (cuestionario indirecto) y los aspectos de este concepto que ellos evalúan. En efecto, los profesores lo valoraron como positivo porque les permitió cuestionar su conocimiento y generar nuevo conocimiento, a partir de la reflexión sobre su práctica acerca del concepto de derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje.

- La **entrevista con viñetas** permitió dar validez a los datos obtenidos por medio del cuestionario indirecto, por las siguientes razones: (1) la estrategia que utilizamos para formular estos problemas, alternando entre la justificación que daban al proceso de resolución de los problemas del cuestionario, creó un ambiente relajado de intercambio entre los profesores y la investigadora; y (2), propusimos problemas con características similares a las del cuestionario indirecto que nos permitieran validar y analizar la coherencia entre los procesos de resolución que utilizaban al abordar los problemas presentados en viñetas y los procesos que aplicaban en la resolución de los problemas del cuestionario.

6.1.2. Con respecto a la metodología de análisis

Consideramos que las decisiones que se toman para abordar el proceso de análisis de los datos son fundamentales para llevar a buen término la investigación. El diseño metodológico que utilizamos en esta investigación, el estudio de casos, nos llevó a manejar gran cantidad de información cualitativa que nos permitió abordar el estudio del conocimiento y la práctica del profesor. Por esta razón tuvimos que diseñar diferentes niveles de análisis que nos permitieran manejar la complejidad cognitiva e institucional del estudio del conocimiento profesional del profesor. A continuación presentamos algunas de las conclusiones del proceso de análisis diseñado e implementado para este fin:

- La definición de los **tres niveles de análisis**: *macro*, *micro* y su integración, nos permitió abordar un estudio riguroso de las componentes del conocimiento profesional del profesor atendiendo a su naturaleza situada; es decir, se tuvo en cuenta tanto los elementos cognitivos del conocimiento profesional como los elementos institucionales del mismo.

- El diseño de las **cuatro fases de análisis** nos permitió manejar una gran cantidad de información sobre las componentes del conocimiento del profesor, a partir de la triangulación de los mismos, que dio validez a los resultados obtenidos.

- Con relación al **análisis *macro***, la construcción de la *descomposición genética* y la definición de los *niveles de comprensión del esquema de la derivada* en las dimensiones algebraicas y gráficas, constituyen un aporte teórico y metodológico de gran riqueza para el estudio del concepto de derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje. Lo original de este aporte, es la adaptación que hacemos de la Teoría APOE al estudio del conocimiento profesional del profesor, abriendo una nueva perspectiva teórica y metodológica para esta línea de investigación.

- Con relación al **análisis *micro*,** los resultados del análisis del nivel de comprensión del esquema de la derivada que tienen los profesores, nos permiten concluir que:

a) Los resultados que hemos encontrado a partir del estudio de los cinco casos nos confirman el carácter provisional de las categorías teóricas que propusimos al definir los niveles de la doble triada algebraica-gráfica del esquema de la derivada. Ahora, con los datos empíricos analizados, podemos concluir que:

1. En el conjunto de profesores elegidos, sólo hemos encontrado algunos de los niveles definidos.

2. La riqueza de los resultados nos lleva a validar algunas de las categorías teóricas de los niveles de la doble triada, tales como, *intra*-*intra* (profesores A y E), *inter*-*intra* (profesor C), *trans*-*inter* (profesor D), y *trans*-*trans* (profesor B).

3. Ha quedado cuestionada la viabilidad de otras categorías; entre éstas tenemos el nivel *intra* algebraico-*trans* gráfico (*intra*-*trans*) y los niveles *trans* algebraico-*intra* gráfico (*trans*-*intra*) e *inter* algebraico-*trans* gráfico (*inter*-*trans*).

En efecto, llegados a la conclusión de que el nivel de comprensión *intra* algebraico-*trans* gráfico es imposible que se dé en la realidad. Es decir, no es cognitivamente viable, puesto que la interpretación gráfica de los macro objetos f ’(a) y f ’(x) requiere de una complejidad en el manejo del aparato formal de estos objetos que no se tiene construida en el nivel *intra* algebraico. Mientras que consideramos que el nivel *trans* algebraico-*intra* gráfico es cognitivamente más factible de encontrar, porque está influenciado por la enseñanza tradicional de los conceptos matemáticos, en donde prima la algebrización de los conceptos matemáticos en detrimento de la interpretación gráfica de los mismos. En lo que respecta a los niveles *inter* algebraico-*inter* gráfico (*inter-inter*) e *inter* algebraico-*trans* gráfico (*inter-trans*), podrían ser encontrados, pero en nuestra investigación no surgieron.

b) Las categorías teóricas y analíticas adaptadas de la Teoría APOE nos permitieron hacer un análisis de las tareas matemáticas que proponen los profesores, centrándonos en los procesos cognitivos que se activan al hacer las traducciones y relaciones entre representaciones de los macro objetos f (x), f ’(a) y f ’(x). La definición de los procesos que se activan al hacer las traducciones y relaciones entre estos macro objetos siguiendo el instrumento que propone Font (2000), es otro aporte significativo de este trabajo con relación a la adaptación de la Teoría APOE al estudio de la práctica del profesor (ver tablas 6 a 10 del capítulo 3). Sin embargo, consideramos que la dificultad que tiene tanto: (1) la definición de los procesos cognitivos como las perspectivas acción, proceso y objeto; y (2), el hecho de que el análisis no se haya hecho en grupo de investigación, tal y como sugiere el grupo RUMEC, nos lleva a postular el carácter provisional y subjetivo de los resultados encontrados; aún cuando hayamos recurrido a la valoración de expertos para dar validez a los análisis realizados.

- El diseño de las **tablas de resumen** y de las **líneas de coherencia** nos ayudaron a la definición y análisis de las categorías que precisamos para la comprensión de los macro objetos f ’(a) y f ’(x). Consideramos que estos instrumentos constituyen un aporte relevante de esta investigación para el análisis del conocimiento disciplinar de los profesores de matemática centrados en los procesos de resolución de problemas relacionados con un concepto matemático concreto.

a) Las *tablas resúmenes* son un instrumento que nos permitió, por un lado, resumir la cantidad de información que teníamos de las respuestas al cuestionario, a las entrevistas sobre la justificación del proceso de resolución de los mismos y a las entrevistas sobre los problemas presentados en viñetas; y por otro lado, presentar la información de una manera resumida y muy comprensiva, perfilando categorías analíticas que ayudaron a la construcción posterior de las redes sistémicas.

b) Las *líneas de coherencia* son un instrumento con un gran potencial visual que nos ayudó a detectar la coherencia entre los procesos de resolución gráfico o algebraico que utilizaban los profesores al resolver problemas que involucran los macro objetos f (x), f ’(a) y f ’(x), enunciados en diferentes contextos.

- Otro aporte metodológico es el uso de las **redes sistémicas** para el estudio del conocimiento profesional del profesor. Estas redes nos permitieron la organización de la información y la definición de las categorías que utilizamos para el análisis de la comprensión que los profesores tienen de los macro objetos f (x), f ’(a) y f ’(x).

- El instrumento que diseñamos para el **análisis de las tareas matemáticas** que proponen los profesores en las evaluaciones y en las unidades didácticas (ver tabla 4 capítulo 3), nos permitió hacer un análisis riguroso de la actividad matemática relacionada con el concepto de derivada que se promueve en la institución nivel de bachillerato del sistema educativo colombiano. Consideramos que este es un aporte relevante dentro de este estudio, porque permite hacer una descripción detallada de una parte importante de la práctica profesional del profesor. Igualmente, consideramos que es un instrumento que permite centrarse en la tarea matemática abordándolo desde diferentes aproximaciones teóricas. En efecto, encontramos estudios que se están realizando en la actualidad que han utilizado este instrumento para el análisis de las tareas propuestas en los libros de texto de matemática de bachillerato del sistema educativo español, adaptando las categorías al marco de las Funciones Semióticas (Inglada y Font, 2002a).

- Otro aspecto positivo, que aporta al tratamiento de la cantidad de información que involucran los estudios sobre el profesor, fue la **decisión metodológica** de analizar primero las tareas que los profesores proponen en las evaluaciones y, posteriormente, las que proponen en la unidad didáctica, puesto que nos facilitó la definición de la primera tipología de tareas, 13 tipos en total, con la que abordamos después el análisis de las 416 tareas que proponen en la unidad didáctica, permitiendo centrarnos sólo en las tareas que aportaban elementos nuevos y que definían nuevas tipologías, hasta llegar a 32 tipos de tareas en total.

6.2. Conclusiones didácticas

El proceso de la investigación que hemos seguido de entrevistar a unos profesores, con unos cuestionarios más o menos detallados, para intentar estudiar sus esquemas con relación al concepto de derivada, nos ha permitido llegar a la conclusión de que hay una descoordinación entre los macro objetos f ’(a) y f ’(x). En algunos casos los integran, en otros, dependiendo del contexto de la situación problema, se da o no esta integración y en otros no están integrados e incluso se presentan inconsistencias en la comprensión de los mismos. La triangulación del análisis de los niveles de comprensión con la información que da el análisis de la unidad didáctica y de las evaluaciones nos permite observar que este problema se reproduce en la enseñanza secundaria y se transmite a los alumnos.

Hemos descubierto un fenómeno didáctico, un problema que se presenta con regularidad y generalidad en el análisis de la derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza aprendizaje en el sistema educativo colombiano. Este fenómeno se produce en la enseñanza del concepto de derivada en Colombia, y se puede definir como la confusión o la no diferenciación entre los macro objetos f ’(a) y f ’(x). Esto se constata con mayor o menor grado, en todos los libros de textos de matemática de 11º que usan los profesores que participaron en este estudio como complemento del diseño de la unidad didáctica.

Por tanto, a continuación describiremos las evidencias de este fenómeno y, posteriormente, en la próxima sección de implicaciones didácticas, proponemos algunas alternativas de solución al mismo.

Evidencias del fenómeno

Para analizar las causas del fenómeno encontrado, nos basamos en la triangulación de los resultados que nos proporcionan los tres tipos de análisis que hemos realizado: el análisis *macro* de las restricciones institucionales, el análisis *micro* del conocimiento profesional del profesor y la integración de los dos análisis.

1. El análisis macro nos muestra la siguiente **radiografía del objeto de la derivada** como objeto de enseñanza y aprendizaje, en las tres instituciones en las que se encuentra inmerso el profesor y que consideramos en este estudio:

   a. El **plan de estudio de la formación del profesorado de matemática y física** se encuentra estructurado en dos ciclos. El primer ciclo de formación contempla primero el desarrollo de la asignatura de física mecánica (I) en el primer semestre de la carrera y, posteriormente, el desarrollo de la asignatura de cálculo diferencial (I) en el segundo semestre. Por tanto, dado que en el primer semestre se introduce el concepto de velocidad instantánea con la notación que históricamente se trabaja en la física, que es la de los incrementos, en la asignatura de segundo semestre, que es la del cálculo diferencial, muchas veces desarrollado por el mismo profesor, se repite este formalismo simbólico.

   b. El **diseño curricular de la Enseñanza Secundaria Colombiana** contempla la enseñanza en el grado 10º de la física mecánica y, posteriormente, en el grado 11º la enseñanza del cálculo diferencial, lo cual implica el estudio de la velocidad instantánea y de las razones de cambio previo a la introducción de los conceptos del cálculo diferencial. Concluimos que este caso es más grave que el anterior, porque si los estudiantes no tienen el nivel de la asignatura de matemática, el profesor, simplemente, puede posponer la notación de los incrementos, o incluso utilizar un itinerario diferente (derivada antes de límite, etc.). Pero si el profesor de física de grado 10º ya introduce el concepto de velocidad usando la notación incremental, aunque lo posponga en la matemática de 11º, sigue creando problemas e incoherencias en los estudiantes para comprender el mismo concepto en contextos diferentes. Es decir, nos encontramos con formas diferentes de definir un mismo concepto, y esta partición genera el fenómeno de compartimentación (Vinner, 1991), que actúa como obstáculo en la comprensión fenomenológica de los conceptos matemáticos. En este caso, no bastaría sólo con solucionar el problema de la matemática, porque si desde la asignatura de física introducen el objeto velocidad instantánea con la notación incremental, posteriormente, el mismo profesor termina reduciendo la definición de los macro objetos $f'(a)$ y $f'(x)$ al uso exclusivo de la notación incremental. Es decir, los conceptos matemáticos se reducen a la manipulación de reglas, fórmulas y técnicas propias de la matemática, en detrimento de comprensión de los mismos.

c. En nuestro contexto, **los libros de texto** son un sustituto de los programas curriculares; por tanto, los profesores delegan en las editoriales la responsabilidad de adaptar a la enseñanza de la secundaria y el bachillerato las reformas curriculares que propone el MEN. Es decir que se les otorga un gran peso a las editoriales dentro del proceso de transposición de los conceptos matemáticos.

d. La **notación que se usa en los libros de texto** para definir los macro objetos f ’(a) y f ’(x). Para hacer referencia a este problema como causa del fenómeno encontrado, nos basamos en los resultados que nos proporcionan los estudios que hay en didáctica de la matemática sobre las dificultades que tienen los alumnos en:

1. La comprensión y manejo de los símbolos *dx, dy, dy/dx, δx, δy, Δx*, *Δy*... (Orton, 1980; Tall, 1985; Font, 2000; Azcárate, 1990; Azcárate *et al*., 1996, Dubynsky *et al*, 1995, entre otros).

2. En el aprendizaje de los conceptos del cálculo

3. Los estudios sobre el uso de representaciones en las definiciones sobre los objetos f ’(a) y f ’(x) en los libros de texto del Estado Español (Inglada y Font, 2002; 2003).

Hemos detectado que, en la mayoría de los libros de texto del sistema colombiano optan por introducir el cociente incremental *Δy/Δx* para definir los macro objetos f ’(a) y f ’(x), generalmente acompañada de una representación gráfica; esto nos permite inferir que intuyen, consciente o inconscientemente, que hay una complejidad semiótica importante.

En los libros de texto analizados, encontramos dos itinerarios para el tratamiento del concepto de derivada:

1. Quienes introducen primero el macro objeto f ’(a) y, posteriormente, el macro objeto f ’(a). En este caso, la complejidad semiótica involucrada al definir el macro objeto f ’(a) usando la notación incremental, implica de alguna manera avanzar la función derivada (profesores A y B). Es decir, optar por esta notación implica, *de facto* o de manera indirecta sin darse cuenta, estar avanzando la función derivada de forma que el alumno no puede entender la derivada en un punto definida de esta manera; difícilmente puede llegar a comprender el cociente incremental como la función derivada.

2. Quienes optan por definir primero el macro objeto f ’(x) y, posteriormente, el macro objeto f ’(a). En este caso, no se elimina la complejidad semiótica, ni las dificultades para que los estudiantes puedan construir las relaciones y diferencias entre estos macro objetos, puesto que la derivada en un punto, en su mayoría, no llega a definirse, y en el mejor de los casos aparece reducida a un simple cambio de variable $x = a$ en la expresión $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$; y en el peor de los casos, que es lo más usual, se utiliza indistintamente la expresión anterior, tanto para referirse al macro objeto f ’(a) como al macro objeto f ’(x). Es decir que, al definir o bien la pendiente de la recta tangente en un punto o bien la velocidad instantánea, se hace incorrectamente porque se les da un tratamiento funcional y no como el valor de un número. Por tanto, este itinerario tampoco ayuda a los estudiantes a construir las relaciones y comprensión de estos macro objetos (profesores C, D y E).

e. El **conocimiento matemático** puede convertirse en una restricción institucional para el profesor, cuando se tienen dificultades en la comprensión de los conceptos matemáticos y cuando se desconocen elementos epistemológicos e históricos de estos conceptos que ayuden a la comprensión e interpretación de los mismos. En efecto, en primer lugar, el análisis del programa de formación de los profesorados refleja la ausencia de asignaturas, entre otras:

- Historia de la matemática
- Epistemología de la matemática
- Historia de las ciencias

- Epistemología de las ciencias
- Didáctica de la matemática: cálculo, geometría, aritmética, etc.
- Didáctica de la física
- Nuevas tecnologías

En segundo lugar, la entrevista a los profesores sobre su formación inicial y permanente nos señala, nuevamente, en muchos de los profesores la ausencia en sus procesos de formación de los elementos anteriormente señalados, y en algún caso, la necesidad de autoformación para ir superando estas dificultades.

2. El **análisis *micro*** del conocimiento profesional del profesor nos aporta información valiosa sobre las maneras de conocer que tienen los profesores de la derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje. Podemos concluir entonces que:

   a. **Análisis del conocimiento del contenido:** el estudio de los niveles de comprensión del esquema de la derivada que tienen los profesores nos muestra que hay una pluralidad en los niveles de comprensión que tienen los profesores que participaron en este estudio sobre el concepto de derivada. Así, encontramos dos profesores (A y E) que tienen un nivel intra algebraico-intra gráfico (*intra-intra*), caracterizado por tener una perspectiva proceso de los macro objetos f (x), f ’(a) y f ’(x), que no son coordinados en la resolución de problemas rutinarios y no rutinarios enunciados en diferentes contextos. Un solo profesor (C) está en el nivel de comprensión inter algebraico-intra gráfico (*inter-intra*), caracterizado por tener una perspectiva proceso de los macro objetos f ’(a) y f ’(x) que, dependiendo del contexto de la situación, son coordinados en la resolución de problemas rutinarios y no rutinarios. En el nivel de comprensión trans algebraico-inter gráfico tenemos al profesor D (*trans-inter*), caracterizado por tener una perspectiva objeto de los macro objetos f ’(a) y f ’(x), que son coordinados en la resolución de problemas rutinarios y no rutinarios, pero dependiendo del contexto en que son enunciados. Finalmente, el profesor B tiene un nivel de comprensión del esquema de la derivada trans algebraico-trans gráfico (*trans-trans*), caracterizado por tener una perspectiva objeto de los macro objetos f ’(a) y f ’(x), que son coordinados en la resolución de problemas rutinarios y no rutinarios enunciados en diferentes contextos.

Por tanto, encontramos que la mayoría de los profesores tienen dificultad en la comprensión gráfica de los macro objetos f (x), f ’(a) y f ’(x), e incluso algunos reproducen inconsistencias con relación a estos macro objetos que han sido reseñadas por investigaciones centradas en el aprendizaje de los mismos, tales como:

1. La confusión de los macro objetos f ’(a) y f ’(x).

2. La reducción de la expresión simbólica del macro objeto f ’(x) a la ecuación de la recta tangente y la gráfica del macro objeto f ’(x) a la gráfica de la recta tangente.

3. La no justificación del uso de las técnicas de derivación directas e indirectas (definición en término del límite y las reglas de derivación).

b. **Análisis del conocimiento didáctico del contenido:** nos muestra que la estructura y organización del concepto de derivada obedece a dos itinerarios de enseñanza. A continuación describiremos brevemente algunos aspectos más significativos del análisis realizado:

- La estructura y organización del concepto de derivada obedece a dos itinerarios de enseñanza. Tres de los profesores (C, D y E) introducen primero el macro objeto f ’(x) y posteriormente el macro objeto f ’(a); y dos de los profesores (A y B) introducen primero el macro objeto f ’(a) y después el macro objeto f ’(x). Sin embargo, independientemente del tratamiento anterior, encontramos que en las definiciones, en las técnicas y en los conceptos que justifican la introducción de estos macro objetos, hay en general una confusión de éstos, reduciendo el paso de uno al otro a la simple sustitución de variables $x = a$ en la expresión simbólica encontrada. Esto se debe a que estos macro objetos se definen utilizando sólo la notación incremental, lo cual no favorece el proceso de síntesis de los mismos.

- Analizando qué técnicas tiene que saber el alumno para calcular f ’(x) como resultado del estudio de la unidad didáctica que proponen los profesores, encontramos que aparecen dos técnicas de derivación: la técnica directa por definición en términos de límite y la indirecta por las reglas de derivación. Sólo en el caso del profesor B encontramos tareas, tanto en la evaluación como en la unidad didáctica, que requieran de técnicas directas de aproximación gráfica y numérica; y en el caso del profesor A, encontramos un tipo de tareas que requiere de alguna técnica de derivación gráfica.

- Después rastreamos qué técnicas han definido para calcular f ’(a) para luego poder justificar las técnicas de cálculo de f ’(x), y encontramos que, en general, no existen técnicas para calcular f ’(a), porque en las definiciones que presentan los profesores en la unidad didáctica están mezclados los macro objetos f ’(a) y f ’(x). Es decir que no se diseñan actividades y tareas que permitan la construcción de las técnicas de cálculo del macro objeto f ’(a), sino que aparecen reducidas al resultado de sustituir el valor de $x = a$ en las técnicas (I y II) que se utilizan para calcular el macro objeto f ’(x); y ello independientemente de que se haya introducido primero el macro objeto f ’(a) y después el macro objeto f ’(x), o *viceversa.* Y sólo de forma periférica, en las tareas que propone el profesor B se fomenta el uso de técnicas gráficas para el cálculo del marco objeto f ’(a).

- En la mayoría de los casos encontramos que el uso de la notación incremental no obedece a la necesidad de justificar más adelante la regla de la cadena como: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$. Es decir que la notación de incrementos coordinada con la notación diferencial $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$ permita con comodidad introducir y justificar la regla de la cadena (Inglada y Font, 2002; 2003), porque la mayoría de los profesores no desarrollan esta temática, y quienes la desarrollan lo hacen utilizando la notación de diferencial de Cauchy. Sólo en un caso (profesor D) se justifica el uso de la notación incremental para demostrar la regla de la cadena, pero no tenemos evidencia empírica de la conciencia por parte del profesor de las dificultades semióticas que implica el uso de la misma. Por tanto, consideramos que el uso de la notación incremental en el nivel de secundaria del contexto colombiano, puede estar influenciado por los siguientes factores:

1. La tradición histórica de utilizar los incrementos por influencia de la física, más en nuestro contexto, donde la formación del profesorado es bidisciplinar en matemática y física; además ellos simultáneamente son profesores de las dos asignaturas.

2. La importancia que se le otorga al libro de texto como referente principal para la transposición acrítica de los conceptos que se enseñan.

3. En el caso de estos profesores (C, D y E), añadimos la influencia de las concepciones sobre la matemática en la forma como abordan la enseñanza y el desarrollo de los conceptos matemáticos (Moreno, 2000), en este caso concreto, sobre la enseñanza de los macro objetos f ’(a) y f ’(x).

c. **Integración de las dos componentes del conocimiento:** las dificultades que tienen los profesores en la comprensión de los macro objetos f ’(a) y f ’(x) se convierten en un obstáculo para poder hacer una buena transposición de estos macro objetos y, posteriormente, para la enseñanza de los mismos, y les lleva, en muchos casos, a reproducir las confusiones y los errores de cara a sus alumnos.

6.3. Implicaciones didácticas de esta investigación

Con base en los resultados de los análisis macro, micro y la integración de los dos, nos interesa proponer algunos lineamientos para la formación permanente del profesorado que apunten a la solución del fenómeno detectado, que es la falta de diferenciación de los macro objetos f ’(a) y f ’(x) y la falta del tratamiento adecuado de las relaciones y diferencias entre estos. Consideramos que podría solucionarse en dos direcciones:

1. Soluciones radicales

Implican el proponer reestructuraciones en los programas de formación del profesorado y en la organización curricular de la matemática y física del nivel de secundaria y bachillerato del sistema educativo colombiano. Sin embargo, consideramos que los resultados de esta investigación no son suficientes para tal propósito, porque esto requiere de un estudio más profundo sobre: (1) la formación inicial y permanente del profesorado de matemática en Colombia; (2) los programas curriculares oficiales de matemática y de física de secundaria y bachillerato; y (3), los libros de texto más utilizados para la enseñanza de estas dos asignaturas.

2. Soluciones alternativas

Implican dar sugerencias sobre la formación permanente del profesorado, y dejar la solución en manos tanto de los profesores, como de los formadores de profesores. A continuación, desarrollamos algunos elementos de una propuesta de formación que contemple la problemática hasta ahora descrita. Sin embargo, creemos conveniente aclarar que son sólo lineamientos porque no hemos implementado ningún curso de formación que integre los elementos que seguidamente esbozaremos.

Dada la complejidad semiótica que tiene la definición de los macro objetos f ’(a) y f ’(x), la notación que se utiliza para definirlos puede reducirla o aumentarla notoriamente. Los resultados de este estudio desvelan que de alguna manera algunos de los profesores son conscientes de la problemática semiótica que envuelve estos macro objetos, e incluso la llegan a verbalizar; y otros en cambio no son tan conscientes de ella. Por tanto, podemos concluir que el fenómeno mínimamente lo tienen detectado, aunque no hagan nada o eviten tratarlo y se ciñan a reproducir las inconsistencias que presentan los libros de texto que usan o consultan a la hora de definir los macro objetos f ’(a) y f ’(x), quizás limitados por las dificultades que tienen en el dominio de estos conceptos.

Después de detectar el problema, consideramos que es indispensable el diseño de cursos de formación permanente que consideren esta problemática disciplinar. Es decir que partan de una reflexión seria y rigurosa del contenido matemático en cuestión, que posibilite una reflexión *metadisciplinar* de ese contenido matemático que les permita a los profesores observar directamente esta problemática, tomar conciencia de la misma y generar cambios en su conocimiento y en su práctica profesional. Es decir, que ya diagnosticado *a posteriori* (después de analizar las componentes del conocimiento profesional del profesor) el fenómeno en la enseñanza de la derivada en el nivel de bachillerato del sistema colombiano, estamos considerando que los cursos de formación basados en el diseño de unidades didácticas teniendo como base la teoría APOE, y, más concretamente, la construcción de la descomposición genética del concepto matemático, le proporcionan elementos al profesor para mejorar su práctica, haciendo un análisis *a priori* del problema y detectando posibles dificultades en sus materiales de enseñanza.

Como los resultados del los niveles de comprensión demuestran que la mayoría de los profesores que participaron en este estudio tienen dificultades en el dominio del conocimiento disciplinar, lo que conviene es que la puerta de ingreso a la formación sea a través de éste; es decir, refrescar primero el saber disciplinar para poder hacer una reflexión después sobre el mismo. Consideramos que lo anterior es indispensable, en nuestro contexto, porque si los profesores no tienen un conocimiento disciplinar asentado, el conocimiento *metadisciplinar* es vacío al quedar mal aplicado al disciplinar.

Igualmente, cuando se analiza el conocimiento y la práctica del profesor centrados en un concepto matemático específico, se debe asumir que el objeto matemático que queremos que el profesor reconstruya y afine a partir de la reflexión sobre su práctica debe considerar tanto la dimensión institucional como la dimensión personal. Es decir que debe llevar a los profesores a reflexionar sobre cómo vive el objeto matemático en la institución matemática y en la institución curricular concreta, pero también cómo ese objeto matemático se convierte en objeto de enseñanza y aprendizaje al diseñar, poner en práctica y evaluar unidades didácticas en un contexto escolar específico.

Desde esta perspectiva estamos abordando la complejidad del estudio del conocimiento del profesor, atendiendo tanto a aspectos cognitivos como a aspectos socioculturales propios de las instituciones en las cuales él se encuentra inmerso, que de alguna manera condicionan su actividad profesional (Llinares, 1996; 1998; 2000). La propuesta que sugerimos parte de la consideración de que la formación del profesorado debe centrarse en la reflexión *sobre* la práctica y *en* la práctica. Por tanto, consideramos que el diseño, implementación y evaluación de unidades didácticas es un medio significativo para generar conocimiento práctico, nuevo y válido, para los profesores. Los programas de formación permanente e inicial del profesorado deben enfrentar al profesor con la realidad concreta del aula y permitir que su conocimiento situado evolucione a partir de la reflexión sobre procesos de enseñanza y aprendizaje reales. La propuesta que presentamos se centra en la necesidad de que los programas de formación propicien la integración de dos niveles de análisis, necesarios en la elaboración de unidades didácticas (ver figura 1).

1. Análisis fino

Este análisis consiste en un estudio detallado del concepto matemático a enseñar, que persigue una reflexión epistemológica y didáctica del mismo. Es aquí donde encontramos que el concepto de descomposición genética, propuesto por Dubinsky y sus colaboradores, toma un papel relevante dentro de un programa de formación. La elaboración de la descomposición genética de un concepto matemático introduce al profesor en una reflexión epistemológica del concepto que le permite cuestionar la comprensión que tiene de él. A su vez, le lleva a usar dicho conocimiento en la estructuración de la enseñanza de los conceptos matemáticos, orientándola hacia los procesos de construcción del conocimiento que espera que sus estudiantes desarrollen. Es decir que al elaborar la descomposición genética de un concepto matemático, se conjugan dos niveles de reflexión. Un nivel de reflexión de primer orden, donde el saber de referencia es la matemática y el objetivo es la reconstrucción del objeto matemático en cuestión, atendiendo a la complejidad de los aspectos sintácticos y semánticos que lo constituyen. Y un nivel de reflexión de segundo orden, donde el saber de referencia es la didáctica de la matemática (integración con el análisis grueso), apoyándose en la epistemología e historia de la matemática como ejes centrales en la estructuración y definición del concepto matemático como objeto de enseñanza y aprendizaje. Por tanto, además del dominio del concepto en cuestión, se requiere un posicionamiento sobre las teorías de enseñanza y aprendizaje que le permita al profesor diseñar el itinerario didáctico que ayude a los estudiantes en la construcción del concepto matemático.

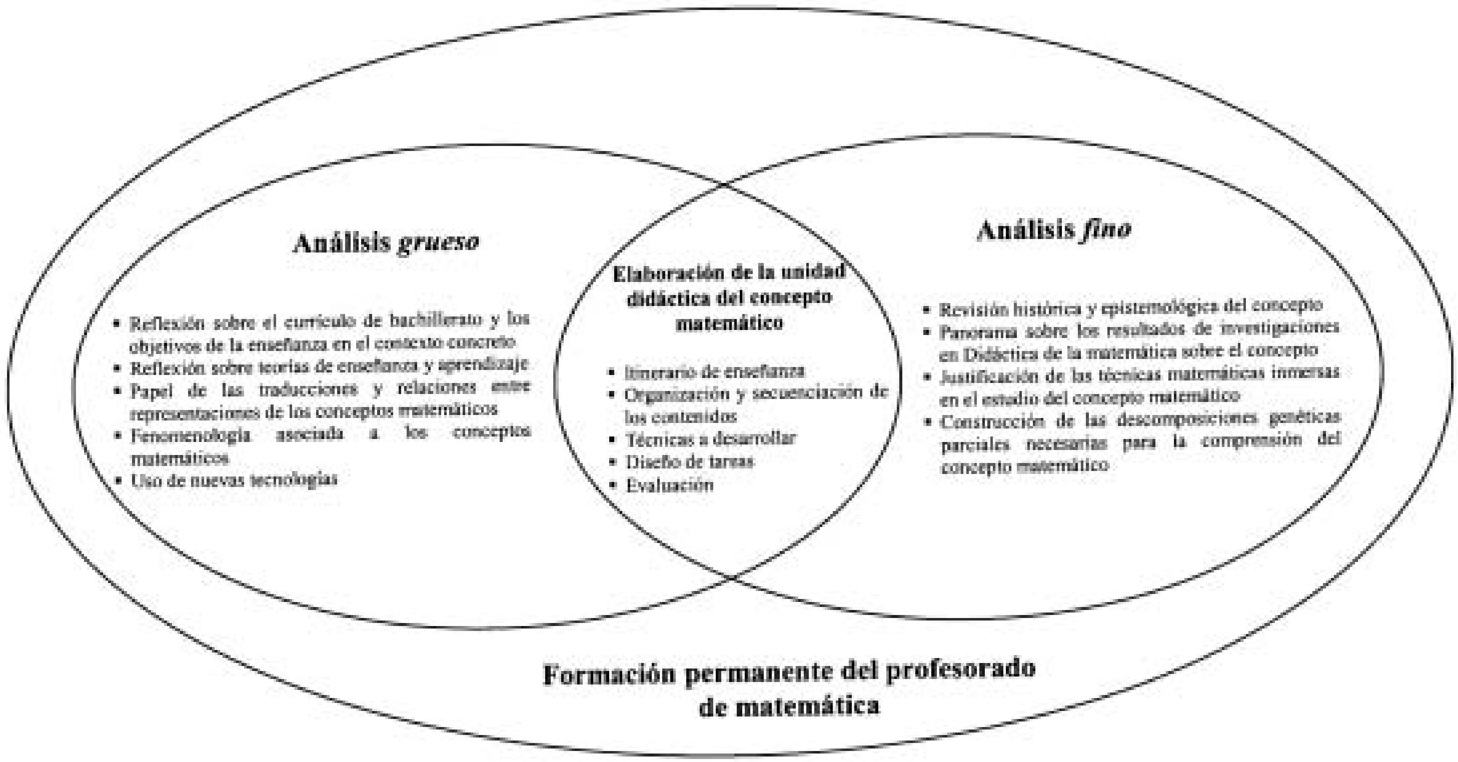


Figura 1. Niveles de análisis que realiza el profesor en el diseño, implementación y evaluación de unidades didácticas de conceptos matemáticos concretos.

Sin embargo, consideramos que en la elaboración de una unidad didáctica no podríamos hablar de una sola descomposición genética que cubra toda la complejidad del concepto matemático, sino que se necesitaría la elaboración de varias descomposiciones genéticas que integren los diferentes aspectos del concepto. La descomposición genética también orienta la elección de las situaciones problemas y de las actividades que el profesor diseña para que los estudiantes alcancen la construcción del concepto matemático. De igual forma, se convierte en una herramienta metacognitiva para el profesor sobre el proceso de enseñanza, ya que le proporciona categorías analíticas para mirar los logros de los estudiantes como resultado del proceso de enseñanza y para cuestionar los procesos de transposición.

2. Análisis grueso

Un segundo análisis, que hemos denominado análisis *grueso*, debe proporcionar al profesor elementos teóricos y conceptuales bien construidos y funcionalmente potentes, que le permitan mejorar su propia formación y disponer de un marco de referencia adecuado para abordar la complejidad del aula. Los organizadores del currículo propuestos por Rico (1997) ofrecen a los profesores un buen marco conceptual para la enseñanza de la matemática, permiten generar espacios de reflexión que muestran la complejidad de los procesos de transmisión y construcción del conocimiento matemático, y proporcionan criterios para abordar y manejar esta complejidad.

Un programa de formación centrado en el diseño, implementación y evaluación de unidades didácticas basadas en los organizadores del currículo, implica la integración y coordinación de las diferentes componentes del conocimiento profesional del profesor. Por tanto, se les debe proporcionar a los profesores diversidad de documentos y suficiente información sobre cada una de las componentes de los organizadores del currículo. Esto le permitirá configurar una base conceptual con la que puedan tomar decisiones sobre las diferentes formas de abordar la enseñanza de un concepto matemático en un contexto institucional específico. Cada organizador proporciona una base sólida y unos criterios para estructurar todas y cada una de las unidades didácticas, y para delimitar el conocimiento didáctico de sus contenidos (Rico, 1997; Gómez, 2000, 2001).

Consideramos que un programa de formación permanente del profesorado que tenga en cuenta los organizadores del currículo y la descomposición genética de un concepto matemático, ayudaría a estructurar el conocimiento práctico del profesor atendiendo a su naturaleza situada (Llinares, 1996; 1998; 2000). Concretamente, le proporcionaría la base disciplinar adecuada que permita un tratamiento objetivo del conocimiento matemático y del conocimiento didáctico sobre cada uno de los contenidos del currículo.

En este sentido, la propuesta liderada por el RUMEC nos resulta atractiva porque plantea un ciclo de investigación para el desarrollo curricular y para la investigación dentro del pensamiento matemático avanzado que nos permite perfilar un itinerario de investigación dentro del pensamiento y conocimiento del profesor apuntando a la formación permanente e inicial del profesorado. La propuesta que plantean dentro de la Teoría APOE contiene tres elementos a resaltar: un análisis fino del contenido matemático, la hipótesis constructivista de la construcción del conocimiento, y la consideración de la interacción social del individuo como medio de construcción del conocimiento. Estos elementos son relevantes dentro del estudio del conocimiento y la actividad profesional del profesor y las implicaciones que tienen en la formación del profesorado de matemática.

El ciclo de investigación que proponemos comporta dos niveles de investigación: (1) centrada en los procesos de formación del profesorado; es decir que los cursos de formación de profesores se conviertan para los formadores de profesores en espacio de investigación y reflexión que ayude a mejorar los programas de formación permanente e inicial del profesorado de matemática; y (2), centrada en la reflexión en la práctica y sobre la práctica de los profesores de secundaria y bachillerato; es decir que los profesores que participen en los cursos de formación permanente entiendan su práctica como un profesional reflexivo (Schön, 1983, 1992). Esta tarea de reflexión, por parte del profesor de matemática de secundaria y bachillerato, estaría orientada desde los propios cursos de formación permanente. Es decir que apostamos por cursos de formación permanente del profesorado que se estructuren a partir del ciclo de investigación que propone APOE, los cuales tienen como eje central la elaboración e implementación por parte de los profesores de unidad didáctica de los conceptos matemáticos constituidos a partir de la construcción y reflexión de la descomposición genética de dicho concepto matemático. Por tanto, esta propuesta implica considerar al constructo descomposición genética como elemento central de los programas de formación. En efecto, consideramos que la elaboración de la descomposición genética de un concepto matemático introduce al profesor en una reflexión epistemológica del concepto que le permite: (1) cuestionar y mejorar la comprensión que tiene del concepto matemático en cuestión; (2) usar y organizar dicho conocimiento en la estructuración de la enseñanza del mismo (diseño de tareas, etc.); y (3), orientar el aprendizaje de los alumnos hacia los procesos de construcción y reconstrucción de los conceptos matemáticos que espera que sus estudiantes desarrollen (Badillo y Azcárate, 2002).

Teniendo en cuenta todos los aportes anteriormente descritos, proponemos un modelo de investigación para el estudio del conocimiento profesional del profesor de matemática que apunte hacia el desarrollo profesional y la formación permanente e inicial del profesorado de matemática basado en el ciclo de investigación de la Teoría APOE (ver figura 2). El modelo de investigación que proponemos parte de una reflexión sobre los programas de formación inicial en los que fueron formados los profesores que participan en el estudio, lo cual nos permite caracterizar el objeto derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en la Licenciatura en matemática y física. Lo anterior nos permite definir el conjunto de situaciones que conforman la actividad matemática que se genera en esta institución, que en cierta medida ayuda a hacer emerger en los profesores esquemas o formas de conocer de los conceptos matemáticos como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje.

A partir de esta radiografía institucional nos disponemos a elicitar las formas de conocer que tienen los profesores con relación a un concepto matemático específico. Consideramos que para acceder al conocimiento profesional del profesor se han de analizar el conjunto de prácticas contextualizadas que el profesor diseña para la enseñanza de este concepto; así como la justificación que hace de las mismas. Particularmente, optamos por la integración de las dos componentes del conocimiento: la disciplinar y la didáctica del contenido. El análisis de estas dos componentes, que nosotros hemos hecho a partir de documentos que permitan acceder a ellas, como son los documentos que los profesores elaboran para la enseñanza de este concepto, se sacan conclusiones de lo que el profesor sabe, que sugieren algunos lineamientos sobre la formación del profesorado que permiten incidir en la misma y que pueden dar luz sobre la formación inicial. Visto de esta forma no se diferencia de los aportes que hasta este momento han dado las investigaciones en didáctica de la matemática centradas en esta línea de investigación. Lo interesante de este ciclo es la adaptación que hacemos de las categorías teóricas y analíticas que propone la Teoría APOE para el análisis de las dos componentes del conocimiento profesional del profesor, y la consideración cíclica del proceso de investigación en la que cada una de las partes se reestructura y se reconstruye a partir de la reflexión de las mismas.

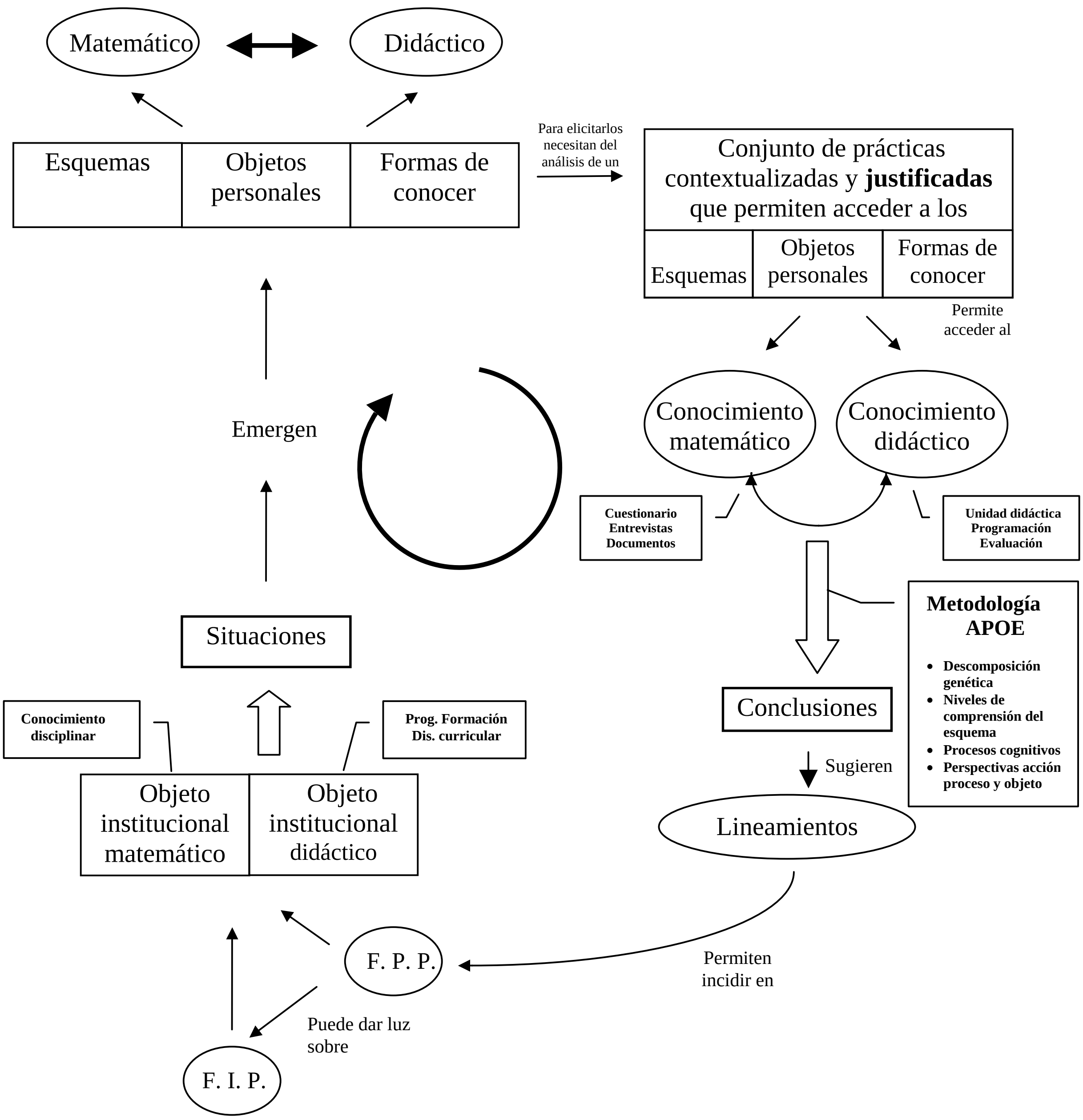


Figura 2. Modelo de investigación cíclico sobre el estudio del conocimiento profesional del profesor y la formación del profesorado de matemática basado en la teoría APOE.

Líneas de investigación futuras

Somos conscientes de que esta investigación ha sido un primer acercamiento a la investigación en didáctica de la matemática que ha contribuido a la investigación cualitativa centrada en el estudio del conocimiento y la práctica del profesor de matemática. Sin embargo, consideramos que a partir de los resultados que aporta esta memoria quedan abiertas algunas posibles líneas de investigación:

1. Contrastar los resultados encontrados con la actividad del profesor a través del aprendizaje de los alumnos. Es decir, saber qué pasa con sus alumnos; si se da en sus alumnos el fenómeno de compartimentación en la comprensión de los macro objetos f ’(a) y f ’(x); si se reproducen en sus alumnos las inconsistencias que tienen los profesores en la comprensión de estos macros objetos, etc.

2. Contrastar los resultados encontrados con la actividad del profesor centrado en la interacción profesor-alumno. Es decir, la gestión del aprendizaje del alumno: cuando el alumno duda, cuando tienen dificultades con relación al concepto matemático, cómo las gestiona el profesor antes sus propias dificultades e inconsistencias en la comprensión de estos conceptos. Por ejemplo, en nuestra investigación, el profesor A tiene dificultades en la comprensión de los macro objetos f ’(a) y f ’(x), pero si se analiza solamente el discurso o la agenda de enseñanza sin la justificación de las tareas que propone y evalúa, se podría llegar a la conclusión errónea de que sabe y que es un buen profesor. En efecto, sería interesante verlo en la gestión del aprendizaje de sus alumnos, porque éste se atreve a plantear problemas complejos, enunciados en diferentes contextos, que el mismo no sabe resolver. Igualmente, resulta llamativo estudiar la gestión en el aula que hace el profesor D. Este profesor domina relativamente el saber disciplinar, y en cambio hace una enseñanza tradicional. Este caso refleja la problemática de la falta de formación didáctica, muy típica en países donde la formación del profesorado en ciencias es más fuerte y en cambio la formación didáctica es más deficiente o casi nula, y por fuerza se deben dar unos rasgos diferentes.

3. Diseñar programas de formación permanente del profesorado en Colombia que recojan los resultados de esta investigación y que permitan aplicar el ciclo de investigación que propone la Teoría APOE que da luz sobre la formación inicial del profesorado.

4. Aplicar este modelo de investigación en España para ver los resultados que encontramos y proponer programas de formación que tengan en cuenta las características concretas de este contexto, puesto que cuando iniciamos este estudio la investigadora provenía de una realidad a la que pensaba volver y el planteamiento actual es diferente.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Adúriz-Bravo, A. (2001). *Integración de la epistemología en la formación del profesorado de ciencias.* Tesis doctoral. Bellaterra: Universitat Autònoma de Barcelona.

Alper, J. y Bridger, M. (1997). Mathematics Models and Zeno's Paradoxes. *Synthese*, 110, pp. 143-166.

Amit, M. y Vinner, S. (1990). Some misconceptions in calculus: Anecdotes of the tip of the iceberg? In Booker, G. et al. (Eds.): *Proceedings of the 14th International Conference for the Psychology of Mathematics Education, 1,* pp. 3-10. Oaxtepec, México: CINVESTAV.

Apostol, T. (1998). *Calculus. Cálculo con funciones de una variable con una introducción al álgebra lineal.* Vol. I. Barcelona: Reverté, S.A.

Arnal, J. (1997). *Metodologies de la investigació educativa*. Barcelona: Universitat Oberta de Catalunya.

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D. J., Dubinsky, E., Mathews, D. y Thomas, K. (1996). A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education. *Research in Collegiate Mathematics Education.* 2, pp. 1-32.

Asiala, M., Cottrill, J., Dubinsky, E., y Schwingendorf, K. (1997). The Development of Students' Graphical Understanding of the Derivate. *Journal of Mathematics Behavior,* 16 (4), pp. 399-430.

Aspinwall, L., Shaw, K. L. y Presmeg, N. C. (1997). Uncontrollable mental imagery: Graphical connections between a function ant its derivate. *Educational Studies in Mathematics*, *33,* pp, 301-317.

Azcárate, C. (1990). *La velocidad: introducción al concepto de derivada*. Tesis doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona.

Azcárate, C. y Deulofeu, J. (1996). *Funciones y Gráficas*. Madrid: Síntesis.

Azcárate, C., Casadevall, M., Casellas E. y Bosch, D. (1996). *Cálculo diferencial e integral.* Madrid: Síntesis.

Azcárate, P. (1995). *Estudio de las concepciones disciplinares de futuros profesores de primaria en torno a las nociones de la aleatoriedad y probabilidad.* Tesis doctoral. Universidad de Cádiz.

Badillo, E. (1999). *Estudio del conocimiento profesional de profesores de secundaria en Colombia: el caso de la relación entre derivada y velocidad.* Tesis de maestría. Universitat Autònoma de Barcelona.

Badillo, E. y Azcárate, C. (2000a). Conocimiento profesional de profesores de matemática en secundaria. Las relaciones entre derivada y velocidad en la enseñanza del cálculo diferencial. *Primeres Jornades d'Educació Matemàtica de Catalunya,* Mataró (Barcelona).

Badillo, E. y Azcárate, C. (2000b). *Análisis de las respuestas de los profesores a la paradoja de Zenón de Aquiles y la tortuga.* Documento inédito. Universitat Autònoma de Barcelona.

Badillo, E. y Azcárate, C. (2001). *Importancia del estudio del conocimiento profesional de los profesores de matemática en la formación permanente de profesores y en la reflexión sobre los conceptos que enseñan. (*Documento interno de la UAB en evaluación).

Badillo, E. y Azcárate, C. (2002). Conocimiento profesional de profesores de matemática: Integración del conocimiento del contenido y el conocimiento didáctico del contenido. En: Perafán, G. A. y Adúriz-Bravo, A. (Comps.). *Pensamiento y conocimiento de los profesores. Debates y perspectivas contemporáneas.* Santafé de Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional/ Colciencias/ Gaía Editorial, pp. 61-78.

Badillo, E., Adúriz-Bravo, A. y Azcárate, C. (2001). Estudio del pensamiento de profesores de física en activo acerca de la paradoja de Aquiles y la tortuga. *Actas del IV Congreso Internacional sobre Investigación en la Didáctica de las Ciencias. Enseñanza de las Ciencias* (Barcelona).

Badillo, E., Adúriz-Bravo, A. y Azcárate, C. (2002a). A powerful situation to elicit mathematics teachers' ideas on the structuring concepts of infinitesimal calculus. Workshop around the relationships between ontogenesis and phylogenesis. *Proceedings of the 54th Conference of the C.I.E.A.E.M* (en prensa). Vilanova i la Geltrú, España.

Badillo, E., Adúriz-Bravo, A. y Azcárate, C. (2002b). Estudio del pensamiento de profesores de matemática en ejercicio acerca de la paradoja de Aquiles y la tortuga. En: Adúriz-Bravo, A., Perafán, G. A. y Badillo, E. (Comp.). *Actualización en didáctica de las ciencias naturales y las matemáticas.* Santafé de Bogotá: Magisterio, pp. 35-59.

Baker, B., Cooley, L., y Trigueros, M. (2000). A Calculus Graphing Schema. *Journal for Research in Mathematics Education.*Vol. 31, pp. 1-23.

Biddle, B. y Anderson, D. (1989). Teoría, métodos, conocimiento e investigación sobre la enseñanza. En: Wittrock, M. (1989). *La investigación en la Enseñanza I. Enfoques, teorías y métodos.* Barcelona: Paidos, pp. 93-148.

Blázquez, S. (2000). *Noción de límite en Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales.* Tesis doctoral. Universidad de Valladolid.

Bliss, J., Monk, M. y Ogborn, J. (1979). The analysis of qualitative data. *European Journal of Science Education,* Vol. 1, (4), pp. 427-440.

Bliss, J., Monk, M. y Ogborn, J. (1983). *Qualitative Data Analysis for Educational Research.* London: Croom Helm.

Boyer, C. (1986). *Historia de la matemática.* Madrid: Alianza Universidad Textos.

Bromme, R. (1988). Conocimientos profesionales de los profesores. *Enseñanza de las Ciencias,* 6 (1), pp. 19-29.

Bromme, R. (1994). Beyond subject matter: A psychological topology of teachers' knowledge. En Biehler, R. et al. (Eds). *Didactics of mathematics as a scientific discipline.* Dordrecht: Kluwer Academic Pb.

Bromme, R. y Tillema, H. (1995). Fusing Experience and Theory: the Structure of Professinal Knowledge. *Learning and Instruction, 5,* pp. 261-267.

Brousseau, G. (1990). ¿Qué puede aportar a los enseñantes los diferentes enfoques de la didáctica de las matemáticas? (1ª parte). *Enseñanza de las Ciencias*, 8 (3), pp. 259-267.

Brousseau, G. (1991). ¿Qué puede aportar a los enseñantes los diferentes enfoques de la didáctica de las matemáticas? (2ª parte). *Enseñanza de las Ciencias*, 9 (1), pp. 10-21.

Cajori, F. (1915). History of Zenon`s Arguments on Motion: *American Mathematical Monthly*, Vol.22.

Cantoral, R. (s/f). Los textos de cálculo: una visión de las reformas y contrarreformas. Documento inédito. México: CINVESTAV.

Carrillo, J. (1996). *Modos de resolver problemas y concepciones sobre la matemática y su enseñanza de profesores de matemáticas de alumnos de más de 14 años. Algunas aportaciones a la metodología de la investigación y estudio de posibles relaciones*. Tesis doctoral. Universidad de Sevilla.

Calvo, C. (2001). *Un estudio sobre el papel de las definiciones y las demostraciones en cursos preuniversitarios de Cálculo diferencial e integral.* Tesis Doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona.

Clark, J., Cordero, F. Cottrill, J., Czarnocha, B., DeVries, D., St. John, D., Tolias, G. y Vidakovié, D. (1997). Constructing a schema: The case of the chain rule? *Journal of Mathematical Behavior. 16*, pp. 345-364.

Contreras, A., Font, V., Luque, L. y Ordóñez, L. (2001). Taller de Didáctica del Análisis Matemático. *V Simposio de la Sociedad de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)*, pp. 17-21.

Cooney, T. y Wilson, M. (1993). Teachers´ Thinking about Functions: Historical and Research Perspectives. En Romberg, Fennema, Carpenter (eds.): *Integrating Research on the Graphical Representation of Functions.* Londres: Lea.

Cooney, T. J. (1994). Research and teacher education: In search of common ground. *Journal of Research in Mathematics Education. 25* (6), pp. 608-636.

Cottrill, J. (1999). *Students' understanding of the concept of chain rule in first year calculus and the relation to their understanding of composition of functions.* Doctoral Thesis. Purdue University.

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K. y Vidakovié, D. (1996). Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated process schema. *Journal of Mathematical Behavior*, *15*, pp. 167-192.

Chevallard, Y. (1997). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Buenos Aires: Aique.

Delgado, C. (1998). *Estudio microgenético de esquemas conceptuales asociados a definiciones de límite y continuidad en universitarios de primer curso*. Tesis doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona.

Dubinsky, E. (1991). Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. En Tall, D. (ed.): *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Press. Pp. 95-123.

Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. *Educación Matemática.* Vol. 8 (3), pp. 24-41.

Dubinsky, E. (2000). De la investigación en matemática teórica a la investigación en matemática educativa: un viaje personal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa.* Vol. 3 (3), pp. 47-70.

Dubinsky, E. y Harel, G. (1992). The Nature of the Process Conception of Function. En Harel, G. y Dubinsky, E. (Eds.), *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy, MAA notes 25,* pp. 85-106. Washington, D.C.: Mathematical Association of America.

Duval, R. (1996). Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques? *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 6, (3), pp. 349-382.

Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking, basic issues for learning. *Actas del PME 23,* pp. 3-26.

Espinoza, L. (1998). *Organizaciones matemáticas y didácticas en torno al objeto "Límite de función". Del pensamiento del profesor a la gestión de los momentos de estudio.* Tesis doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona.

Espinoza, L. y Azcárate, C. (2000). Organizaciones matemáticas y didácticas en torno al objeto "límite de una función": una propuesta metodológica para el análisis. *Enseñanza de las Ciencias,* 18, (3), pp. 355-368.

Even, R. (1993). Subject-matter knowledge and pedagogical content knowledge: Prospective secondary teachers and the function concept. *Journal for Research in Mathematics Education, 24,* pp. 94-116

Fennema, E. y Loef, M. (1992). Teachers´ Knowledge and its Impact. En: GROUWS. D. (ed.): *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* Nueva York: MacMillan.

Ferrini-Mundy, J. y Graham, K. (1994). Research in Calculus Learning: Understanding Limits, Derivates, and Integrals. In Kaput, J., and Dubinsky, E. (Eds.). *Research issues in undergraduate Mathematics Learning, MAA notes 33,* pp. 31-45. Washington, D.C.: Mathematical Association of America.

Flores, P. (1998). *Concepciones y creencias de los futuros profesores sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje. Investigación durante las prácticas de enseñanza.* Colección MATHEMA, 12. Granada: COMARES.

Fonseca, C. y Gascón, J. (2000). Integración de praxeologías puntuales en un praxeología matemática local. La derivación de funciones en secundaria. *IV Simposio de la SEIEM*. Huelva

Font, V. (2000). *Procediments per obtenir expressions simbòliques a partir de gràfiques. Aplicacions a les derivades.* Tesis doctoral. Universitat de Barcelona.

Garbin, S. (2000). *Infinito actual: inconsistencias e incoherencias de estudiantes de 16 – 17 años.* Tesis doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona.

Garbin S. y Azcárate, C. (2000). Estudio sobre esquemas conceptuales e incoherencias de estudiantes de bachillerato en relación con el infinito actual expresado en diferentes lenguajes matemáticos. *Educación Matemática,* (12) 3, pp. 5-18.

Garbin S. y Azcárate, C. (2001). El concepto de infinito actual. Una investigación acerca de las incoherencias que se evidencian en alumnos de bachillerato. *SUMA,* 38, pp. 53-67.

Garbin S. y Azcárate, C. (2002). Infinito actual e inconsistencias: acerca de las incoherencias en los esquemas conceptuales de alumnos de 16-17 años. *Enseñanza de las Ciencias,* 20, (1), pp. 87-113.

García, M. (1997). *Conocimiento profesional del profesor de Matemáticas. El concepto de función como objeto de enseñanza-aprendizaje*. GIEM. Sevilla: Kronos.

García, M. y Llinares, S. (1994). Algunos referentes para analizar tareas matemáticas. *Suma*, 18, pp. 13-23.

García, M. y Llinares, S. (1998). Un método para el análisis del contenido y estructura del conocimiento profesional del profesor de matemática de secundaria. *UNO,* 17, pp. 65-81.

García, M. y Llinares, S. (1999). Procesos interpretativos y conocimiento profesional del profesor de matemáticas: Reflexiones desde la perspectiva de la enseñanza como diseño. *Quadrante.* Vol. 8, pp. 61-84.

Goetz, J. y LeCompte, M. (1988). *Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa*. Madrid: Morata.

Gómez, P. (2000). Los organizadores del currículo en matemáticas. *Revista EMA, 5* (3), pp. 267-277.

Gómez, P. (2001). Conocimiento didáctico del profesor y organizadores del currículo en matemáticas. En Perales, F., *et al.* (Eds.). *Congreso nacional de didácticas específicas. Las didácticas de las áreas curriculares en el siglo XXI,* (2), pp. 1245-1258. Granada: Grupo Editorial Universitario.

Grup Zero (1982). *Introducció al càlcul diferencial. Estudi de la derivada.* Barcelona: ICE de la UAB.

Grup Zero (1984). *Càlcul diferencial. Estudi de funcions.* Barcelona: ICE de la UAB.

Inglada, N. y Font, V. (2002). Le rôle des livres de texte comme médiateurs d'activation de la connaissance mathématique commune. Le cas des dérivées des fonctions élémentaires. *Actas the 54th Conference of the C.I.E.A.E.M* (en prensa). Vilanova i la Geltrú, España.

Inglada, N. y Font, V. (2002a). *Anàlisi de les definicions de derivada d'una funció en un punt i funció derivada d'una funció dels llibres de text del Batxillerat-LOGSE aplicant la Teoria de les Funcions Semiòtiques.* Documento inédito. Universitat de Barcelona.

Inglada, N. y Font, V. (2003). Significados institucionales y personales de la derivada. Conflictos semióticos relacionados con la notación incremental. *XIX Jornadas de SI-IDM*. Abril de 2003. Córdoba: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM).

Jackson, P. (1975). *La vida en las aulas.* Madrid: Morova.

Janvier, C. (1987). Translation processes in mathematics. En Janvier, C. (Ed.). *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics*, pp. 27-31. Hillsdale, New Jersey, London: LEA.

Kagan, D. (1990). Ways of evaluating teacher cognition: inferences concerning the goldilocks principle. *Review of Educational Research, 60 (3)*, pp. 419-469.

Kaput, J. J. (1992). Technology and Mathematics Education. En Grouws, D. A. (Ed) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning,* pp. 515-556. New York: Macmillan.

Latorre, A., Del Rincón, D. y Arnal, J. (1996). *Bases metodológicas de la investigación educativa*. Barcelona: Gr 92.

Leinhardt, G., Zaslavsky, O. y Stein, M. K. (1990). Functions, graphs, and graphing: Tasks, learning, and teaching. *Review of Educational Research,* 60, pp. 1-64.

Llinares, S. (1996). Conocimiento profesional del profesor de matemáticas: conocimiento, creencias y contexto en relación a la noción de función. En Ponte, J. *et al*. (Eds.). *Desenvolvimento profesional dos profesores de Matemática. ¿Que formaçao?.* Secção de Educação. Lisboa, Portugal: SPCE, pp. 47-82.

Llinares, S. (1998). Conocimiento profesional del profesor de matemáticas y procesos de formación. *UNO,* 17, pp. 51-63.

Llinares, S. (1999). Conocimiento y práctica profesional del profesor de Matemáticas. Características de una agenda de investigación. *Setetike.* 7 (12), pp. 1-32.

Llinares, S. (2000). Intentando comprender la práctica del profesor de matemáticas. En: Da Ponte, T. P. y Serrazina, L. (Eds.). *Educação Matemática em Portugal, Espanha e Itália.* Actas da Escola de Verão- Santarem- 1999. Lisboa, Portugal: SEM-SPCE, pp. 109-132.

Llinares, S. y García, M. (1996). El concepto de función a través de los textos escolares: reflexión sobre una evolución. *Qurriculum*, 10-11, pp. 103-115.

McDonald, M., Mathews, D. y Strobel, K. (2001). Understanding sequences: A tale of two objects. En: Dubinsky, E. Kaput, J. y Shoenfeld, A. (Eds.). *Research in collegiate mathematics education IV (RCME).* Providence, RI: American Mathematical Society y Washington DC: Mathematical Association of America.

Marcelo, C. (1987). *El pensamiento del profesor*. Barcelona: CEAC.

Marcelo, C. (1989). *Introducción a la formación del profesorado: teoría y métodos*. Sevilla: Universidad de Sevilla.

Marcelo, C. (1997). *Formación del profesorado para el cambio educativo.* Barcelona: PPU.

Marcelo, C. (2002). La investigación sobre el conocimiento de los profesores y el proceso de aprender a enseñar. Una revisión personal. En: Perafán, G. A. y Adúriz-Bravo, A. (Comp.). *Pensamiento y conocimiento de los profesores. Debates y perspectivas contemporánea.* Santafé de Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional/ Colciencias/ Gaía Editorial, pp. 45-60.

Merrian, S. (1988). *Case Study Research in Education. A Qualitative Approach.* San Francisco: Jossey-Bass.

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Currículo para la Educación Matemática en el nivel medio. Síntesis de una propuesta.* Santafé de Bogotá, D.C: Imprenta Nacional.

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (1999). *Matemáticas: lineamientos curriculares: nuevas tecnologías y currículo de matemáticas.* Santafé de Bogotá, D.C: Imprenta Nacional.

Moreno, M. (2000). *El profesor universitario de matemáticas: estudio de las concepciones y creencias acerca de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. Estudio de casos.* Tesis doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona.

Moreno, M. (2002). El pensamiento del profesor. Evolución y estado actual de las investigaciones. En: Perafán, G. y Adúriz-Bravo, A. (Comp.). *Pensamiento y conocimiento de los profesores. Debates y perspectivas contemporánea.* Santafé de Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional/ Colciencias/ Gaía Editorial, pp. 101-116.

Moreno, M. y Azcárate, C. (2003). Concepciones y creencias de los profesores universitarios de matemáticas acerca de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. *Enseñanza de las Ciencias,* 21, (2).

Norman, A. (1992). Teachers' Mathematical Knowledge of the Concept of Function. En Harel, G. y Dubinsky, E. (Eds.), *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy, MAA notes 25,* pp. 215-232. Washington, D.C.: Mathematical Association of America.

Norman, A. (1993). Integrating Research on Teachers' Knowledge of Functions and their Graphs. In Romberg, Fennema, and Carpenter (Eds.), *Integrating Research on the Graphical Representation of Functions.* London: LEA

Nuñez, R. (1997). Infinito en lo pequeño y desarrollo cognitivo: paradoja y espacios consensuales. *Educación matemática*. Vol. 9 (1), pp. 20-32.

Orton, A. (1980). An investigation into understanding of elementary calculus in adolescents and young adults. *Cognitive Development Research in science and Mathematics*, 14, pp. 201-215.

Orton, A. (1983). Students' Understanding of Differentiation. *Educational Studies in Mathematics*, 14, pp. 235-250.

Pajares, M. F. (1992). Teachers' Beliefs and Educational Research: Cleaning Up a Messy Construct. *Review of Educational Research.* Vol. 2 (3), pp. 307-332.

Perafán, G. A. (2002). La investigación acerca de los procesos de pensamiento de los docentes: orígenes y desarrollo. En: Perafán, G. A. y Adúriz-Bravo, A. (Compiladores). *Pensamiento y conocimiento de los profesores. Debates y perspectivas contemporánea.* Santafé de Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional/ Colciencias/ Gaía Editorial, pp. 11-28. ISBN 958-9097-76-6.

Piaget, J. (1990). *La equilibración de las estructuras cognitivas. Problema central del desarrollo*. Madrid: Siglo XXI.

Piaget, J. y García, R. (1982). *Psicogénesis e historia de las ciencias.* México D.F.: Editorial Siglo XXI (4ª edición).

Porlán, R. y otros. (1997). Conocimiento profesional y epistemología de los profesores I: Teoría, métodos e instrumentos. *Enseñanza de las Ciencias*, 15 (2), pp. 155-171.

Pro, A. (1999). Planificación de unidades didácticas por los profesores: análisis de tipos de actividades de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias,* 17 (3), pp. 411-429.

Puig, L. (1997). Análisis fenomenológico. En Rico *et al.*, (1997). *La educación matemática en la enseñanza secundaria*. Barcelona: ICE-Horsori, pp. 61-94.

Ramírez, J. (2000). *Análisis del modelo de descomposición genética de la cuantificación, en dos contextos: el contexto de los enunciados en matemáticas y el contexto no matemático de la representación del conocimiento con la lógica de primer orden.* Barcelona: Universitat Autònoma de Barcelona.

Ramírez, J. (2001). *Paradojas.* Documento inédito. Bellaterra: Universitat Autónoma de Barcelona.

Rico, L. (Coord.), Castro E., Coriat, M., Marín, A., Puig, L., Sierra, M. y Socas, M. (1997). *La educación matemática en la enseñanza secundaria*. Barcelona: ICE-Horsori.

Rico, L. (1997). Dimensiones y componentes de la noción de currículo. En Rico, L. (Ed.). *Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación secundaria.* Madrid: Síntesis, pp. 377-414.

Sánchez, C. y Contreras, A. (1998). Análisis de manuales a través del tratamiento didáctico dado al concepto de Límite de una función: una perspectiva desde la noción de obstáculo. *Enseñanza de las Ciencias,* 16 (1), pp. 73-84.

Schön, D. (1983). *The reflective practitioner: How professionals think in action.* New York: Jossey-Bass.

Schön, D. (1992). *La formación de profesionales reflexivos. Hacia un nuevo diseño de la enseñanza y aprendizaje en las profesiones.* Barcelona: Paidós-M.E.C.

Schubring, G. (1987). On the Methodology of Analysing Historical Textbooks: Lacroix as textbook author. *For the Learning of Mathematics*, 7 (3), pp. 41-51.

Selden J. *et al.* (1994). Even good calculus can't solve non-routine problems. In Kaput, J. and Dubinsky, E. (Eds.) *Research issues in undergraduate mathematics learning, MAA notes 33*, pp. 31-45. Washington, DC: Mathematical Association of America.

Shulman, L.S. (1989). Paradigmas y programas de investigación en el estudio de la enseñanza: una perspectiva contemporánea. En Wittrock. M. *La investigación de la enseñanza, I. Enfoques, teorías y métodos.* Barcelona: Paidos.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*, (2), pp. 4-14.

Sierra, M., González, M. T. y López, C. (1997). *Los conceptos de límite y continuidad en la educación secundaria: transposición didáctica y concepciones de los alumnos.* Salamanca: Departamento de Didáctica de la Matemática y de las Ciencias Experimentales. Documento inédito. Universidad de Salamanca.

Sierra, M., González, M. T. y López, C. (1999). Evolución histórica del concepto de límite funcional en los libros de texto de Bachillerato y curso de orientación universitaria (COU): 1945-1995. *Enseñanza de las Ciencia*, 17 (3), pp. 463-476.

Sierpinska, A. (1985). Obstacles epistémologiques relatifs à la notion de limite. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 6* (1), pp, 5-67.

Sierpinska, A. (1987). Humanities Students and Epistemological Obstacles Related to Limits. *Educational Studies in Mathematics, 18* (4), pp. 371-387.

Simón (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal of Research in Mathematics Education. 26* (2), pp. 114-145.

Slavit, D. (1997). An alternative route to the rectification of function. *Educational Studies in Mathematics, 33*, pp. 259-281.

Taba, H. (1975). *Elaboración del currículum.* Buenos Aires: Troquel.

Tall, D. (1992). Students' Difficulties in Calculus. *Plenary presentation in Working Group 3, ICME.* Québec, pp. 1-8.

Tall, D. (1991). Advanced Mathematical Thinking and the Computer. En: Tall, D. (ed.). *Advanced Mathematical Thinking.* Dordrecht/ Boston/London. Kluwer Academic Publisher, pp. 231-243.

Tall, D. (1990). Inconsistencies in the learning of calculus and analysis. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 12, pp. 49-64.

Tall, D. (1985a). Understanding the Calculus. *Mathematics Teaching,* 110, pp. 49-53.

Tall, D. (1985b). The Gradient of a Graph. *Mathematics Teaching,* 11, pp. 48-52.

Tall, D. (1981). Comments on the Difficulty and Validity of various Approaches to the Calculus. *For the learning of Mathematics, 2 (2),* pp. 16-21.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limits and Continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, pp. 151-169.

Thompson, A. (1992). Teacher’s Beliefs and Conceptions: a Synthesis of the Research. En Grows, D. (Ed.). *Handbook on Mathematics Teaching and Learning,* pp. 127-146. (New York: Macmillan).

Thompson, P. (1994). Images of rate and operational understanding of the fundamental theorem of calculus. *Educational Studies in Mathematics,* 26, pp. 229-274.

Thompson, P. y Thompson, A. (1994). Talking about Rates Conceptually, Part I: A Teacher’s Struggle. *Journal for Research on Mathematics Teaching and Learning.* New York: MacMillan.

Trigueros, M. y Álvarez, M. (1995). Estudio longitudinal de los conceptos de tangente y derivada en estudiantes de Administración. *Memorias del V Simposio Internacional en Educación matemática “Elfriede Wenzelburger”,* pp. 109-115. México: Grupo Editorial Iberamericana.

Villar, L. (1986). *Pensamiento de los profesores y toma de decisiones*. Universidad de Sevilla.

Villar, L. (1988). *Conocimiento, creencias y teorías de los profesores*. Alcoy: Marfil.

Villar, L. (2002). Pensamiento de los profesores. En: Perafán, G. y Adúriz-Bravo, A. (Comp.). *Pensamiento y conocimiento de los profesores. Debates y perspectivas contemporánea.* Santafé de Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional/ Colciencias/ Gaía Editorial, pp. 29-44.

Vinner, S. (1989). The Avoidance of Visual Considerations in Calculus Students. *Focus on Learning Problems in Mathematics,* 11, pp. 149-156.

Vinner, S. (1990). Inconsistencies: their Causes and Function in Learning Mathematics. *Focus on Learning Problems in Mathematics,* 12, pp. 85-97.

Vinner, S. (1991). The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics. En: Tall, D (ed), *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht: Kluwer Academic Press, pp. 65-81.

Vinner, S. (1992). The Function Concept as a Prototype for Problems in Mathematics Learning. En: Harel, G. y Dubinsky, E. (Eds.). *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy, MAA notes 25*, pp. 215-232. Washington, D.C.: Mathematical Association of America.

Wilson, M. (1994). One Preservice Secondary Teacher’s Understanding of Function: The Impact of a Course Integrating Mathematical Content and Pedagogy. *Journal for Research in Mathematics Education, 25,* pp. 346-370.