DEPARTAMENT DE DIDÀCTICA DE LA MATEMÀTICA

DESCRIPCIÓN Y ANÁLISIS DE UN CASO DE ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LA DEMOSTRACIÓN EN UNA COMUNIDAD DE PRÁCTICA DE FUTUROS PROFESORES DE MATEMÁTICAS DE EDUCACIÓN SECUNDARIA.

LEONOR CAMARGO URIBE

UNIVERSITAT DE VALÈNCIA
Servei de Publicacions
2010

Aquesta Tesi Doctoral va ser presentada a València el dia 10 de novembre de 2010 davant un tribunal format per:

- Dr. Luis Puig Espinosa
- Dr. Joaquín Giménez Rodríguez
- Dra. María José González López
- Dr. Salvador Llinares Ciscar
- Dr. Josep Maria Fortuny Aymemí

Va ser dirigida per:
Dr. Ángel Gutiérrez Rodríguez

Dipòsit legal: V-3372-2011
I.S.B.N.: 978-84-370-7991-2
Edita: Universitat de València
Servei de Publicacions
C/ Arts Gràfiques, 13 baix
46010 València
Spain
Telèfon:(0034)963864115

UNIVERSITAT DE VALÈNCIA

Departament de Didàctica de la Matemàtica

Descripción y análisis de un caso de enseñanza y aprendizaje de la demostración en una comunidad de práctica de futuros profesores de matemáticas de educación secundaria

Tesis para optar al Grado de Doctora en Matemáticas

presentada por

LEONOR CAMARGO URIBE

Dirigida por

Dr. Ángel Gutiérrez Rodríguez

Valencia, junio de 2010

UNIVERSITAT DE VALÈNCIA
Departament de Didàctica de la Matemàtica

Dr. D. Ángel Gutiérrez Rodríguez, profesor de Didáctica de la Matemática de la Universitat de València,

HAGO CONSTAR

- Que la presente memoria titulada *Descripción y análisis de un caso de enseñanza y aprendizaje de la demostración en una comunidad de práctica de futuros profesores de matemáticas de educación secundaria* ha sido realizada bajo mi dirección por Dña. LEONOR CAMARGO URIBE en el Departament de Didàctica de la Matemàtica de la Universitat de València, y constituye su tesis para optar al Grado de Doctora en Matemáticas.
- Que esta memoria cumple los requisitos exigidos por la legislación vigente, por lo que autorizo su presentación en la Universitat de València.

En Valencia, a 27 de mayo de 2010.

Fdo.: Dr. Ángel Gutiérrez Rodríguez

A Carlos Alberto, Ana Lucía y Juan Pablo

Agradecimientos

A la Universidad Pedagógica Nacional por hacer posible mi estancia en Valencia y apoyarme en la realización de mis estudios de postgrado mediante el otorgamiento de una Comisión de Estudios que me permitió dedicarme al trabajo académico e investigativo sin las presiones y aprietos de un trabajo paralelo.

A los profesores y administrativos del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Valencia por sus enseñanzas y su gentil colaboración durante el tiempo de mis estudios de postgrado.

Al doctor Ángel Gutiérrez por su dedicación como tutor, el aporte ofrecido en la planeación del diseño investigativo, el análisis de resultados y la redacción del informa final y por el apoyo desinteresado que he recibido de él durante mi proceso de formación como investigadora.

A mis compañeros del Doctorado Jorge, Elgar, Carmen y Edna por sus aportes en la formulación del proyecto y su compañía durante mi estancia en Valencia.

A todos los colegas, conocidos y amigos que contribuyeron a la realización de este trabajo investigativo, especialmente a mis compañeras de la Universidad Pedagógica Nacional, Carmen Samper y Patricia Perry, por su amistad y su colaboración desinteresada en la realización de la experiencia y en el análisis de algunos datos obtenidos.

A Carmen Samper, amiga y profesora de la asignatura Geometría Plana por su apoyo incondicional al trabajo, sus aportes al mismo y por abrirme las puertas de su salón generosamente para permitirme grabar sus clases y someter sin reparos su enseñanza al escrutinio del análisis didáctico.

A los estudiantes del curso de Geometría Plana (I – 2007) por su colaboración con la investigación y el compromiso y seriedad con el que asumieron algunas tareas que les solicitamos.

A mi madre Elena y mis hermanos, Clara, Gloria, Elena, Lucía, Ángela, Ligia y Juan Arturo, todos ellos incondicionales a la hora de necesitarlos.

A Carlos Alberto, Ana Lucía y Juan Pablo por su sacrificio, comprensión y apoyo en momentos claves de la realización de la investigación y la escritura de este documento.

Índice

Anexos

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

A pesar de las diferencias de opinión en la comunidad matemática sobre la definición de demostración y del rol que tiene, es innegable que ésta ocupa un lugar central en la práctica matemática. La demostración está vigente como recurso de validación, de comunicación y de ampliación del horizonte conceptual del universo matemático. Su uso sistemático caracteriza a las matemáticas, pues permea su quehacer. En ese sentido, parece haber un consenso general sobre el hecho de que la demostración debería ser el hilo conductor de la experiencia matemática de todo aquel que la estudie.

Simultáneamente, la demostración ha sido uno de los aspectos de la matemática considerado como difícil de enseñar y de aprender (Bell, 1976; Moore, 1994; Dreyfus, 1999; Weber, 2001; Martin et al., 2005). Se reconoce que interpretar, hacer o usar demostraciones es un asunto complejo que depende de una amplia gama de creencias, conocimientos, habilidades y condicionantes sociales y culturales. La dificultad que enfrentan muchos profesores para que sus estudiantes aprendan a demostrar ha promovido estudios y debates en busca de mecanismos para lograr una enseñanza más efectiva. Una prueba de la vitalidad y pertinencia de la discusión acerca del tema es la innumerable cantidad de estudios investigativos, en donde se atiende a múltiples aspectos relacionados con su aprendizaje y su enseñanza.

Algunos investigadores han realizado estados del arte acerca de la demostración en donde clasifican los estudios en diferentes tendencias de investigación. Uno de los más recientes es el realizado por Mariotti (2006), quien presenta una visión general de las contribuciones en el tema de la demostración en los congresos organizados por el *Internacional Group for the Psychology of Mathematics Education (PME)*. Según la investigadora, ha habido una evolución a partir de los estudios centrados en las concepciones de demostración y las dificultades que afrontan los estudiantes cuando tienen que demostrar (Fischbein y Kedem, 1982; Duval, 1991; Chazan, 1993; Moore, 1994; Harel y Sowder, 1996; Almeida, 1995, 1996, 2000, 2003) hacia estudios que discuten cómo es posible superar tales dificultades a través de apropiadas intervenciones de enseñanza (Radford, 1994; Harel, 1998; Mariotti, 2000; Mariotti, 2007, Parenti et al., 2007; Boero et al., 2007). En esta última tendencia se ubican las investigaciones que reivindican el carácter social y cultural de la demostración y reconocen el papel del contexto en donde se lleva a cabo la práctica de la demostración, en el aprendizaje (Lampert, 1990; Alibert y Thomas, 1991; Yackel y Cobb, 1996; Yackel, 1996; Hoyles, 1997; Yackel, 2002; Küchemann y Hoyles, 2007).

Dentro del enfoque sociocultural, no necesariamente en relación con investigaciones sobre la demostración, ha surgido una corriente que ve en la constitución de comunidades de práctica (Wenger, 1998) una opción para favorecer el aprendizaje e incrementar la afinidad por la actividad matemática. En el marco de esta corriente se han documentado procesos de aprendizaje exitosos cuando los estudiantes (de educación básica, media o universitaria y profesores en formación) participan en comunidades de práctica en entornos institucionalizados o no, presenciales o virtuales y de larga o corta duración (Paden, 1998; Cobb y Yackel, 1998; Llinares, 2002; Clarke, 2003; Clark, 2005; Boylan, 2005; Hemmi, 2006; Llinares y Krainer, 2006; Mottier López, y Allal, 2007; Gómez, 2007). En particular, algunos estudios se han centrado en ciertas clases de matemáticas en donde se favorece el aprendizaje, gracias a la emergencia de comunidades de práctica (Goos, 2004; Clark, 2005; Smith, 2006).

El propósito de la investigación que reportamos en la presente disertación es analizar el aprendizaje de un grupo de estudiantes de un curso universitario de geometría plana quienes, junto con su profesora, participan en actividades matemáticas asociadas a la demostración y producen demostraciones en el marco de un sistema axiomático construido colectivamente. Vemos el aprendizaje como un proceso de participación en el repertorio de prácticas que se llevan a cabo en la clase y que dan sentido a la demostración, ligado al proceso de materialización que conduce a la producción de demostraciones matemáticas de enunciados geométricos. El análisis pretende dar evidencias del aprendizaje que se logra en una ‘comunidad de práctica de clase’, entendida en el sentido sugerido por Clark (2005). Nos circunscribimos al ámbito educativo institucionalizado y por eso no nos referimos a la conformación de una ‘comunidad de práctica’ a secas; queremos denotar que, a pesar de que una clase comparte muchos aspectos de la caracterización de una comunidad de práctica como la define Wenger (1998), hay particularidades, debidas a los condicionantes que agrupan a sus miembros, lo cual hace necesario reconocer que se trata de un versión un tanto artificial de una comunidad de práctica real.

En el curso universitario que sirvió de contexto a la investigación, se implementó una enseñanza experimental cuya meta era la construcción colectiva de una porción de un sistema axiomático de la geometría plana, a partir de enunciados que se obtuvieron, en su mayoría, al resolver problemas utilizando comúnmente el programa de geometría dinámica Cabri. En términos de Wenger (1998), la empresa conjunta alrededor de la cual los estudiantes y la profesora centraron la actividad es la construcción colectiva de dicho sistema. Dentro del repertorio de prácticas que dan identidad a la comunidad están aquellas que brindan la posibilidad de participación periférica legítima (Lave y Wenger, 1991) de los estudiantes, en acciones relacionadas con la exploración de situaciones geométricas en busca de regularidades, el tratamiento dado a las definiciones de los objetos geométricos que hacen parte del contenido del curso, el trabajo colectivo hecho con las conjeturas que se proponen, la argumentación conjunta con el objeto de estudiar la plausibilidad de las conjeturas y esbozar una vía para demostrar aquellas admitidas por el grupo y la demostración matemática de éstas.

En los siguientes apartados de este capítulo presentamos un bosquejo de la disertación comenzando con una síntesis de la perspectiva teórica, para después explicitar las preguntas de investigación y los alcances del trabajo y terminar con una visión panorámica de la memoria escrita, que oriente al lector sobre lo que se va a encontrar a lo largo de ésta.

1.1. PERSPECTIVA TEÓRICA

En la investigación articulamos algunos conceptos de la teoría de la práctica social sobre el aprendizaje, desarrollada por Wenger (1998), con elementos teóricos y prácticos de estudios en didáctica de las matemáticas acerca del aprendizaje de la demostración (Alibert y Thomas, 1991; Clements y Battista, 1992; Radford, 1994; Boero et al., 1996; Garuti et al., 1996; Bartolini et al., 1997; Hoyles, 1997; Mariotti et al., 1997; Arzarello et al., 1998; Marrades y Gutiérrez, 2000; Winicki-Landman y Leikin, 2000; Godino y Recio, 2001; Pedemonte, 2001; Blanton y Stylianou, 2002; Olivero, 2002; de Villiers, 2004; Stylianides y Stylianides, 2005; Mariotti, 2006; Arzarello et al., 2007; Stylianides, 2007; Douek, 2003, 2007; Hanna, 2000, Lin et al., 2009). Sugerimos una perspectiva sobre el aprendizaje de la demostración, visto como un proceso de participación en prácticas matemáticas que dan significado a demostrar y que va acompañado de la materialización de dichas prácticas en productos cercanos a los que producen las comunidades de profesionales en matemáticas. La teoría de Wenger (1998) es el lente con el que analizamos la participación de los estudiantes en un conjunto de rutinas que se llevan a cabo, articuladas en dos procesos. El primero, conduce a la formulación de una conjetura. Estas rutinas generalmente comienzan con la exploración de una situación para buscar regularidades, seguida de la formulación de conjeturas y la respectiva verificación de hechos geométricos enunciados. El segundo, se concentra en la búsqueda y organización de ideas que constituirán la demostración. Incluimos en este proceso dos formas de justificación: la argumentación y la demostración matemática. El constructo comunidad de práctica (Wenger, 1998) nos provee un marco analítico para acercarnos a la experiencia de los estudiantes y nos ilumina la búsqueda de indicadores que nos permiten afirmar que la mayoría de estudiantes tienen una experiencia matemática genuina que los hace participantes legítimos de la comunidad.

Como unidad de análisis consideramos una 'comunidad de práctica de clase' de un curso de geometría plana de un programa universitario de formación de profesores de matemáticas, en Bogotá, Colombia. En la comunidad se incluyen los estudiantes que participan en clase y la profesora responsable del curso. La empresa que permite que emerja una comunidad de práctica de clase es la construcción colectiva de una porción de un sistema axiomático de geometría plana, empresa que se lleva a cabo a medida que los estudiantes tienen la oportunidad de comprometerse en un repertorio de prácticas mediante el cual ganan ideas de lo que significa demostrar y de cómo ellos pueden ser participantes legítimos en la producción y evaluación de demostraciones. Tres características de la clase de geometría son determinantes del repertorio de prácticas: las tareas que se sugieren a los estudiantes, el uso permanente de un programa informático de geometría dinámica y el hecho de tener claramente delimitado el conjunto de enunciados del que el grupo dispone para hacer las demostraciones, pues el sistema axiomático se construye colectivamente a medida que avanza el curso.

1.2. PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

El principal reto teórico de nuestro estudio es la aplicación de la teoría de la práctica social de Wenger (1998) para dar cuenta del aprendizaje de los estudiantes del curso de geometría plana, evaluando las finalidades y su tipo de participación en acciones e interacciones comunicativas que hacen parte del repertorio de prácticas propio de la comunidad y la evolución en dicha participación a medida que conforman una identidad. Las preguntas que se responden a lo largo de la investigación se enfocan al aprendizaje de los estudiantes y en ese sentido el profesor se deja de lado, aunque toma parte como un actor secundario del estudio. Estas son:

1) ¿Qué acciones del repertorio compartido dan significado a la práctica de demostrar, y favorecen el aprendizaje de los estudiantes, en la comunidad de práctica de clase?

2) ¿Cómo evoluciona la participación de los estudiantes de la comunidad a medida que la comunidad se consolida?

1.3. ALCANCES DE LA INVESTIGACIÓN

Además de contribuir con la producción de un marco sociocultural para caracterizar el aprendizaje de la demostración, la investigación pretende impulsar una mirada al aprendizaje de la demostración que apunta a los procesos de construcción social, más que a procesos individuales. Intenta constituirse en un referente para investigaciones futuras que procuren una articulación entre la teoría de la práctica social de Wenger (1998) y teorías didácticas sobre el aprendizaje de diferentes conceptos o procesos matemáticos. Además, provee un análisis detallado de una serie de prácticas que pueden servir de guía a educadores que quieran favorecer en sus clases la emergencia de comunidades de práctica enfocadas al aprendizaje de la demostración, impulsando por esta vía nuevos diseños instruccionales.

El primer resultado del estudio es la configuración de un marco conceptual que captura las tensiones sociales y la complejidad de los procesos de enseñanza y aprendizaje de la demostración, articulando la teoría de la práctica social propuesta por Wenger (1998) con resultados investigativos, teóricos y prácticos, acerca del aprendizaje de la demostración, que reconocen su naturaleza social.

El segundo resultado tiene que ver con llamar la atención sobre las responsabilidades que adquiere un profesor universitario para favorecer el aprendizaje de sus estudiantes, acerca de la demostración, a partir de la participación de estos en un curso que se concibe como una comunidad de práctica de clase. Como miembro experto de la comunidad determina el curso de la práctica y trabaja para dirigirla hacia la empresa conjunta. Aunque delega actividades centrales a los estudiantes e impulsa su participación, está presente permanentemente en el curso de las interacciones y las regula. Junto con el diseño de situaciones problema que resuelven los estudiantes, la organización de las producciones, la introducción de lenguaje, convenciones y normas sociomatemáticas (Yackel y Cobb, 1996), y la dirección del trabajo colectivo, logra una atmósfera que da significado a la práctica de demostrar.

El tercer resultado se refiere a una manera de ver el aprendizaje individual de los estudiantes. Gracias a la participación en la comunidad, cada miembro configura una identidad de participación de acuerdo al rol que desempeña.

El cuarto resultado es el recuento detallado de una enseñanza experimental, desde nuestro punto de vista exitoso, que proporciona ideas para transformar las clases universitarias usualmente centradas en proporcionar información, para hacer de ellas espacios de construcción colectiva de conocimiento.

1.4. VISIÓN GENERAL DE LA MEMORIA

La disertación se compone de ocho capítulos. El primero corresponde a la introducción, en donde bosquejamos el estudio y mostramos una visión panorámica de éste. El segundo se compone de dos partes: (i) incluimos una síntesis de la revisión de la literatura que nos sirvió para conceptualizar la demostración matemática y la actividad demostrativa y para considerar orientaciones prácticas en el diseño de la enseñanza experimental; (ii) formulamos el planteamiento de la investigación e incluimos los objetivos del estudio. El tercer capítulo está dedicado a la presentación del marco teórico que fundamenta conceptual y analíticamente la memoria. El cuarto capítulo contiene el diseño metodológico con una visión general del tipo de estudio y una descripción detallada del proceso de constitución del cuerpo principal de datos y del sistema de códigos que usamos en el análisis de estos. En el quinto capítulo hacemos una descripción detallada de la enseñanza experimental llevada a cabo en un curso de geometría plana de nivel universitario. Los capítulos seis y siete resumen los análisis realizados. En el capítulo seis nos referimos a las finalidades de participación de los estudiantes haciendo énfasis en la negociación de significados; adicionalmente ilustramos el uso de los códigos. En el séptimo, damos cuenta de la evolución de la participación de los estudiantes en algunas acciones del repertorio de prácticas de la comunidad. En el capítulo ocho discutimos los resultados y proponemos las conclusiones del estudio.

CAPÍTULO 2

REVISIÓN DE LA LITERATURA Y PLANTEAMIENTO DE LA INVESTIGACIÓN

Este capítulo está dividido en tres partes. La primera contiene una presentación de la emergencia de la perspectiva investigativa sociocultural en la educación matemática, una síntesis de la perspectiva propuesta por Lave y Wenger (1991) y un resumen del desarrollo posterior de ésta en la teoría de la práctica social sugerido por Wenger (1998). La segunda incluye una síntesis de la revisión de la literatura que enmarca nuestra investigación. Muestra la pertinencia del tema dentro del campo de problemas vigentes en investigación en didáctica de las matemáticas y permite una identificación del origen de algunas herramientas conceptuales y metodológicas usadas en el estudio. La tercera presenta el planteamiento de la investigación con la caracterización del tema, la formulación de los objetivos del estudio y una breve presentación del diseño investigativo.

2.1. LA PERSPECTIVA SOCIOCULTURAL DE LAVE Y WENGER

Antes de referirnos a la teoría sociocultural de Lave y Wenger (1991), y su posterior desarrollo en la teoría de la práctica social de Wenger (1998), presentamos brevemente el surgimiento de tendencias investigativas socioculturales en educación matemática, apoyándonos en una revisión hecha por Lerman (2006).

Cuando nos referimos a teorías socioculturales, adoptamos la clasificación sugerida por Lerman (2006) quién ubica bajo esta denominación a los estudios en donde se afirma que el conocimiento se origina en la interacción social y por lo tanto los roles de la cultura, las prácticas sociales y los valores son centrales y no secundarios en la construcción de conocimiento. Lerman (2006) examina aspectos particulares de diferentes trabajos revisados para organizarlos según cuatro tendencias: estudios en psicología cultural -que incluyen trabajos basados en teorías de la actividad, la cognición situada, las comunidades de práctica, las interacciones sociales y la mediación semiótica-; investigaciones en etnomatemática; estudios en sociología de la educación que usan teorías como el post-estructuralismo, la hermenéutica y la teoría crítica; y trabajos orientados por teorías del discurso de índole psicoanalítica, semiótica y sociolingüística.[1] Nuestra investigación se ubica en la primera tendencia (psicología cultural), específicamente en relación con el concepto 'comunidad de práctica', la cuál nos orienta la construcción del marco analítico para dar cuenta del aprendizaje de los estudiantes que fueron observados en nuestro estudio.

Diversos investigadores coinciden en señalar los comienzos de los años 90 como el momento en donde se empiezan a adoptar teorías socioculturales en los marcos interpretativos y analíticos de las investigaciones en educación matemática (Cobb, 2000; Yackel, Rasmussen y King, 2000; Krainer, 2003; Goos, 2004; Lerman, 2006). El creciente interés acerca de los aspectos socioculturales se pone en evidencia en los reportes y artículos de investigación y en los temas discutidos en los eventos que agrupan investigadores que adoptan esta perspectiva. Por ejemplo, Lerman et al. (2003, citado en Lerman, 2006) encuentran que entre 1990 y 1995 se publican 8 artículos en la tendencia de estudios en psicología cultural en la revista *Educational Studies in Mathematics (ESM)* y 4 en la revista *Journal for Research in Mathematics Education (JRME),* mientras que entre 1996 y 2001 se publican 19 y 10, respectivamente. Y, en la misma tendencia, entre 1990 y 2005 se presentan más de 150 reportes de investigación en las conferencias del *International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME).* En los reportes de investigación se identifican como nociones recurrentes los conceptos de mediación semiótica, identidad y zona de desarrollo próximo (Lerman, 2006). Adicionalmente, como otro indicador del auge de la tendencia en estudios psicoculturales, Lerman (2006) señala el surgimiento del grupo *Mathematics, Education and Society (MES)* que lleva a cabo su cuarto encuentro en julio de 2005. En dicho encuentro, se establece la necesidad de discutir ampliamente las dimensiones sociales, culturales y políticas de la educación matemática, centrando la atención en aspectos metodológicos y de cooperación internacional.

Dado que en la presente investigación asumimos como parte de nuestro marco conceptual y analítico elementos de la perspectiva sociocultural propuesta por Lave y Wenger (1991), a continuación revisamos algunos fundamentos, presupuestos y componentes de la teoría y hacemos mención especial a la teoría de Wenger (1998) de la práctica social, debido a que en ella el autor desarrolla la

---

[1] El primero y el cuarto grupo corresponden a la clasificación que hace Goss (2004) de las dos principales tendencias socioculturales que se han aplicado en investigación en Educación Matemática.

idea de 'comunidad de práctica', la cual hemos adoptado como unidad de análisis en nuestro estudio.

2.1.1. FUNDAMENTOS DE LA TEORÍA SOCIOCULTURAL DE LAVE Y WENGER

Las perspectivas socioculturales se fundamentan en principios generales de la aproximación sociocultural al aprendizaje desarrollada por Vygotsky (1978), algunos de los cuales sintetizamos a continuación:

Los procesos cognitivos individuales tienen sus raíces en la interacción social, a través de la comunicación que se lleva a cabo en las actividades culturales en las que los individuos participan colectivamente. El aprendizaje sucede mediante un proceso de internalización en el cual los fenómenos sociales se transforman en fenómenos psicológicos que se llevan a cabo en el plano mental (Goos, 2004; Lerman, 1996). En particular, las clases pueden ser vistas como espacios de interacción social en las cuales los individuos participan en actividades colectivas, discuten acerca del significado de dichas actividades y de cómo se llevan a cabo y por esta vía aprenden.

Las acciones humanas, tanto en el plano individual como en el plano social están mediadas por herramientas y signos (Goos, 2004; Lerman, 1996; Mariotti, 2000). Este es un principio central de la aproximación sociocultural en el ámbito educativo. Al usar mediadores en diseños didácticos cuidadosamente planeados, éstos permiten desplegar una rica actividad experimental, fuente de ideas y conjeturas y, a la vez, contribuyen a generar vías de acceso al conocimiento a través de la comunicación.

La contribución de una persona más experimentada, como guía durante el aprendizaje es fundamental; esta persona debe brindar apoyo gradual según se van desarrollando las competencias del aprendiz. La interacción entre el individuo que está aprendiendo y la persona más experimentada activa funciones mentales que no han madurado en el aprendiz, pero que yacen en una región intermedia entre los niveles potencial y real de su desarrollo (Lerman, 1996; Blanton y Stylianou, 2003). Mediante la relación con el experto, el aprendiz inicia un proceso que le permite acercarse o llegar a la condición de experto a través de su participación en actividades compartidas (Forman, 1996). En el ámbito educativo este principio cobra gran importancia pues es el profesor, como miembro experto en la clase, quien introduce a los estudiantes en los estándares del conocimiento 'oficial', a través de la coordinación entre las ideas que los alumnos son capaces de producir y aquellas admitidas por la comunidad académica de referencia, a las que potencialmente los estudiantes pueden acceder.

A pesar de ser reconocida como sociocultural, la teoría formulada por Lave y Wenger (1991) se distancia de la idea del aprendizaje como un proceso de internalización de información externa para crear una representación interna, sugerida por Vygotsky (1978). Según Lave y Wenger, este proceso puede confundirse con un proceso de transmisión o asimilación de conocimiento y por esta razón evitan establecer una dicotomía entre fenómenos psicológicos internos y externos. En lugar de ello, ven el aprendizaje como participación en actividades de una comunidad que incluso puede existir fuera o dentro de una institución educativa. Desde ese punto de vista, por ejemplo, el aprendizaje de las matemáticas se considera como el acceso a prácticas significativas cercanas a las de comunidades de profesionales que producen matemáticas o las usan (Forman, 1996). Ese es precisamente el enfoque con el que queremos analizar el aprendizaje de los estudiantes en el curso universitario de geometría plana en donde llevamos a cabo el experimento de enseñanza en la presente investigación. Aunque no consideramos que la teoría sociocultural de Lave y Wenger, 1991 y la teoría de la práctica social desarrollada posteriormente por Wenger (1998) sustituyen a las demás teorías de aprendizaje, vemos que presentan un enfoque y aportan un conjunto de supuestos que nos proporcionan una base conceptual útil para analizar de una manera diferente a la usual, el aprendizaje de la demostración.

2.1.2. LA TEORÍA DE LA PRÁCTICA SOCIAL

En la introducción de su libro *Comunidades de práctica. Aprendizaje, significado e identidad*, Wenger (1998) invita reflexionar sobre el supuesto según el cual aprender es un proceso individual, separado del resto de nuestras actividades y resultado directo de una enseñanza. Bajo este supuesto se han organizado tradicionalmente las instituciones educativas y particularmente los cursos universitarios que forman en matemáticas; en ellos es común observar a los estudiantes tomar notas sobre lo que dice un profesor, ejercitarse individualmente resolviendo problemas tomados de un texto y presentar evaluaciones individuales en donde se considera que pedir o prestar colaboración es hacer trampa. Wenger se pregunta qué tipo de comprensión acerca de cómo se produce el aprendizaje y que cambios se darían en las aulas, si adoptamos un supuesto diferente y miramos el aprendizaje como un proceso social de participación impregnado de nuestras experiencias como seres humanos. Su teoría de la práctica social es un intento por desarrollar esa perspectiva. A continuación presentaremos algunos aspectos de ésta que son relevantes para nuestro proyecto de investigación.

Presupuestos y componentes de la teoría de la práctica social

Wenger (1998) parte de cuatro presupuestos sobre la naturaleza del conocimiento y del aprendizaje: (i) somos seres sociales y este es un aspecto esencial del aprendizaje; (ii) el conocimiento es un asunto de competencia en relación con ciertas actividades valoradas socialmente (entre las cuales podríamos considerar el descubrir y validar hechos científicos); (iii) conocer es cuestión de participar de manera activa en la consecución de estas empresas; (iv) el producto del aprendizaje es el significado, visto como nuestra posibilidad de experimentar el mundo en el que vivimos y nuestro compromiso con él (Wenger, 1998). Estos presupuestos llevan al centro de interés de la teoría: el aprendizaje como participación en prácticas valoradas por comunidades sociales y la construcción de una identidad con relación a dichas comunidades. En ese sentido, al adoptar este enfoque en nuestro estudio, intentamos mostrar un proceso de participación en la práctica de demostrar en geometría, práctica que es valorada por comunidades que producen y usan matemáticas; por ello, buscamos indicadores de participación de los estudiantes en un curso universitario de geometría plana, en relación con dicha práctica.

En lo que llama un inventario inicial, Wenger se refiere a los siguientes componentes que considera necesarios para poder caracterizar el aprendizaje como un proceso de participación:

significado: considerado como el producto negociado del aprendizaje y entendido como la posibilidad que tenemos, individual y colectivamente, de considerar el mundo, nuestras experiencias y nuestra vida como algo que tiene sentido y es valioso,

práctica: vista como el conjunto de recursos, sistemas de referencias, perspectivas histórica y socialmente compartidas y actuaciones que permiten asumir un compromiso mutuo en la acción,

comunidad: reconocida como la configuración social en donde nuestras empresas se definen como valiosas y nuestra participación se reconoce como competente,

identidad: puntualizada como el efecto del aprendizaje en quienes somos y en la creación de una historia personal al interior de las comunidades a las que pertenecemos.

Desde el punto de vista de Wenger (1998), estos componentes están profundamente interrelacionados y se definen mutuamente. El autor construye a partir de ellos el constructo de ‘comunidad de práctica’ que considera como una unidad de análisis del aprendizaje y algunos otros conceptos a los que haremos referencia en las siguientes secciones.

Comunidad de práctica

La unidad primaria de análisis del aprendizaje en la teoría de la práctica social no es el individuo sino la configuración social en donde éste puede llevar a cabo, junto con otros, una empresa de su interés. En la interrelación con los demás, las personas ajustan la empresa a fines comunes, modifican su relación con los demás y ganan una identidad en relación con la configuración social. Wenger (1998) usa la expresión 'comunidad de práctica' para referirse a esta configuración. En una comunidad de práctica, compuesta por expertos y novatos, las personas experimentan una historia de aprendizaje compartido que supone la existencia de unos principiantes que se incorporan a la comunidad de miembros activos y comienzan un proceso de participación en el que van ganando legitimidad para ser tratados como miembros periféricos o activos y posteriormente miembros plenos de ella. Pero también supone miembros experimentados, o expertos, que lideran y organizan el acceso de los novatos a la práctica y otorgan legitimidad a ésta según lo que la comunidad considera una práctica competente. Por tanto, la existencia de una comunidad de práctica no depende de la permanencia fija de sus miembros ni de que estos cumplan siempre la misma función. Una comunidad de práctica sugiere un organismo vivo a donde llegan nuevos miembros, los que ya están dedican parte de su tiempo a iniciar a los principiantes en las prácticas de la comunidad y eventualmente los miembros veteranos son remplazados por nuevos miembros que asumen la dirección de la comunidad hacia la consecución de una empresa conjunta.

Según Goos (2004) con el constructo 'comunidad de práctica' Wenger logra integrar algunos elementos de teorías de la estructura social -que dan primacía a las instituciones, normas y reglas- con varios elementos de teorías de la experiencia situada -que privilegian las dinámicas de la existencia diaria y la construcción local e interpersonal-. Para Cobb et al. (2003) y Stylianides (2007), en el caso de la enseñanza de las matemáticas, cuando se concibe una clase como una comunidad de práctica, el constructo también incluye lo que los miembros toman como garantía de verdad en el curso de las interacciones que transcurren en ella, que se relaciona con lo que la comunidad de profesionales de las matemáticas consideran como aceptado, verdadero o válido. Este señalamiento cobra especial relevancia si el eje central del trabajo es demostrar.

Generalmente, una comunidad de práctica se conforma libremente y por el tiempo que se requiera para llevar a cabo la empresa que se propone, pero también puede existir al interior de una organización social institucionalizada. En el segundo caso, probablemente se adapta a condicionantes de la institución tales como los tiempos de iniciación y terminación, la inclusión de nuevos miembros sólo en ciertos momentos o la definición de la empresa por agentes externos. No obstante, preserva características que permiten definirla como una comunidad de práctica como por ejemplo: la redefinición local o renegociación de la empresa, el establecimiento de su propia dinámica de relaciones y responsabilidades entre los miembros, la emergencia de actividades no planeadas y la evolución en forma autóctona en función de su propia dinámica. (Wenger, 1998). Para poder considerar una organización institucional como una comunidad de práctica, interesa, por lo tanto, capturar la riqueza de las interacciones sociales y actividades no necesariamente predeterminadas que se despliegan libremente en su interior, más allá de la simple estructura prefigurada.

Considerar que cualquier clase de matemáticas es una comunidad de práctica es una decisión polémica que genera discusión entre los investigadores. Por ejemplo, Boylan (2005) considera que, en la mayoría de los casos, la naturaleza de las clases de matemáticas se aparta de la descripción de una comunidad de práctica y, por lo tanto, el uso generalizado de la denominación tergiversa el significado de ésta y se pierde el valor analítico de la teoría. Para sustentar su planteamiento afirma, entre otras cosas, que las relaciones de poder en una clase son determinantes de la participación de los estudiantes en ella, lo que no ocurre en una comunidad de práctica en otro ámbito; en ese sentido, los estudiantes se someten a las prácticas, más que contribuir a crearlas y conformarlas. Esta idea es señalada también por Lerman (2001) al referirse a la naturaleza coercitiva de la participación de los estudiantes en una clase.

De otra parte, la clasificación de los miembros de una clase en expertos y novatos también es cuestionada por investigadores como Adler (1998) y Lerman (2001) quienes señalan que es difícil establecer la correspondencia de dicha clasificación con los roles usuales de profesor y estudiantes porque no es claro a qué comunidad de expertos representa el profesor -si a la comunidad de profesionales en matemáticas o a la comunidad de profesores de matemáticas- y además porque la mayoría de los estudiantes no participan de la clase para volverse profesores de matemáticas o matemáticos. Esto hace que conceptos de la teoría de Wenger

(1998) como participación periférica legítima[2], no se apliquen fácilmente al contexto educativo.

Adicionalmente, Adler (1998), Graven y Lerman (2003) y Krainer (2003) ponen de presente que en comunidades de práctica no institucionales el interés central del experto está en alcanzar las metas que se propone la empresa de la comunidad y, por vía indirecta, a través de su participación en las prácticas de la comunidad, el novato aprende. En cambio, en los contextos educativos el principal interés del profesor es el aprendizaje *per se* de los estudiantes. En ese sentido, el aprendizaje está mediado por esfuerzos específicos de enseñanza y este hecho condiciona la práctica que se lleva a cabo y genera una práctica específica, alejada de una práctica real.

Las consideraciones anteriores han llevado a algunos investigadores a matizar la expresión 'comunidad de práctica' cuando describen algunas clases de matemáticas que podrían concebirse como tal, en el sentido establecido por Wenger (1998). Clark (2005) se refiere a ellas como 'comunidades de práctica de clase', Goos (2004) las denomina 'comunidades de práctica inquisitiva', Rogoff (1997) las llama 'comunidades de aprendices' y Winbourne y Watson (1998, citados en Boylan 2005) les dan el apelativo de 'comunidades locales de práctica matemática'. Estos autores se refieren a dichas comunidades como ámbitos en donde los estudiantes pueden considerarse a sí mismos capaces de producir matemáticas y hay un reconocimiento público a la posibilidad de desarrollar competencias matemáticas a través de actividades conjuntas y de los roles asumidos. Los estudiantes reconocen el valor de trabajar colectivamente hacia el logro de significados comunes, comparten vías de comportarse, lenguajes, hábitos, valores y herramientas; las clases se llevan a cabo con la participación activa de los estudiantes y, por momentos, se ve que todos están comprometidos en la misma actividad. En ese sentido, describen rasgos distintivos de una comunidad de práctica en el sentido descrito por Wenger (1998) y el constructo sigue siendo válido para analizar el aprendizaje que tiene lugar en una clase de matemáticas.

Desde nuestro punto de vista, Wenger (1998) hace una contribución importante al desarrollo de perspectivas socioculturales sobre el aprendizaje al ofrecer herramientas analíticas útiles para estudiar el aprendizaje por medio de la participación y la formación de identidades. Por ello, hemos decidido adoptar el constructo

[2] Este concepto, acuñado por Lave y Wenger (1991) será explicado dos secciones más adelante.

'comunidad de práctica' como unidad de análisis en la presente investigación. Los cuestionamientos que hemos señalado en los párrafos anteriores nos llevan a atender la recomendación de Boylan (2005) cuando pide asumir una postura reflexiva y vigilante en la aplicación de la teoría asumida, para no correr el riesgo de hacer una caracterización a la ligera de las clases analizadas como ejemplo de constitución de una comunidad de práctica, tergiversando la teoría.

Aprender es participar

Según Wenger (1998), aprender es sinónimo de participar, es decir, del proceso de tomar parte activa en alguna actividad, empresa o misión social, situada en un contexto particular, al mismo tiempo que se establecen relaciones con otras personas. Estas relaciones sugieren simultáneamente acción y conexión. En interacción con el proceso de 'materializar'[3] -mediante el cual la experiencia se plasma en productos concretos que son puntos de enfoque en torno a los cuales se organiza la negociación de significados- conforman una dualidad que da sentido a la práctica que se está llevando a cabo.

Cuando Wenger (1998) se refiere al término 'significado' alude a una experiencia vital que surge de la participación en prácticas colectivas que ponen a tono las experiencias y conocimientos de un individuo que participa en una comunidad con las de los demás miembros y definen la naturaleza de la práctica que se lleva a cabo. A este proceso lo denomina 'negociación de significados'. Investigadores como Cobb (2000) consideran que el producto de la negociación, a lo largo del tiempo, es aquello que es 'tomado como compartido' por los miembros de la clase, y que se constituye en la práctica matemática del grupo. Esta práctica se regula por normas sociales y sociomatemáticas (Yackel y Cobb, 1996) que emergen y se establecen en la comunidad, con base en la negociación, a medida que se definen las formas aceptadas de participación. Las normas sociales regulan la estructura de la participación en clase mientras que las normas sociomatemáticas regulan la actividad matemática favoreciendo vías de acción, de comunicación y de análisis de aspectos matemáticos de la actividad realizada.

[3] El término 'materialización' es usado por Gómez (2007) para traducir la palabra *'reification'* que se encuentra en la edición en ingles del libro de Wenger (1998). Sin embargo, en la traducción en español hecha por Sánchez (Wenger, 2001) se usa la palabra 'cosificación'. Nosotros preferimos el término usado por Gómez pues nos parece que expresa mejor la idea que se quiere dar con la palabra '*reification*'.

Participación periférica legítima

Lave y Wenger (1991) usan la expresión 'participación periférica legítima' para referirse al proceso - característico del aprendizaje- mediante el cual los recién llegados a una comunidad se integran a ésta. Cuando una persona comienza a hacer parte de una comunidad, y va incrementando su rango de participación en la práctica, se moviliza desde su posición de 'recién llegado' por diferentes posiciones y eventualmente llega a ser 'veterano' o 'experto' en la práctica. Por eso con la expresión 'participación periférica legítima' sus creadores intentan explicar el desarrollo de una identidad personal a la vez que se producen y reproducen comunidades de práctica. En el ámbito educativo, si consideramos una clase como una comunidad de práctica, podemos usar la expresión para referirnos a la evolución en la participación personal de los estudiantes a medida en que avanzan colectivamente en las actividades matemáticas propuestas. Desde el punto de vista de Adler (1998) la expresión refleja el puente que se establece entre la persona y la comunidad de práctica pues los individuos ganan una identidad inherente al conocimiento que desarrollan, con la cual participan de las actividades de la comunidad y contribuyen en su conformación.

Repertorio compartido

Una característica de la práctica como fuente de coherencia de una comunidad es el desarrollo de un repertorio compartido, compuesto por el conjunto de recursos que la comunidad produce o adopta durante su existencia, que pasan a formar parte de la práctica y que generan una producción local de significado (Wenger, 1998). El repertorio combina aspectos de la participación y de la materialización al constituir estilos propios de actuación y de discurso mediante los cuales los miembros expresan su afiliación y su identidad con la comunidad.

Como son el resultado de la historia de desarrollo de la comunidad, los recursos compartidos son intrínsecamente ambiguos, es decir, no pueden preverse completamente ni tienen una función establecida claramente de antemano, sino que se constituyen en elementos para la negociación y, por lo tanto, para posibilitar la construcción colectiva de significados. En ese sentido, la coordinación de perspectivas y el diseño de acciones están siempre en estado de revisión y abiertos a nuevos significados.

2.2. REVISIÓN DE LA LITERATURA

Para enmarcar nuestra investigación a continuación hacemos mención a los principales trabajos revisados, particularmente a los que se relacionan en forma estrecha con nuestra investigación y nos brindan herramientas conceptuales y metodológicas. Primero nos referimos a la emergencia de estudios investigativos en educación matemática que hacen uso de la teoría de la práctica social de Wenger (1998), clasificándolos en dos grupos: los que se enfocan a la formación de profesores y los que se centran en la educación matemática primaria y secundaria. Segundo, mencionamos dos tipos de investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje de la demostración: las que expresan un interés por aspectos sociales y culturales y las que se enmarcan propiamente dentro de alguna perspectiva sociocultural.

2.2.1. ESTUDIOS INVESTIGATIVOS QUE HACEN USO DE LA TEORÍA DE LA PRÁCTICA SOCIAL

Dedicaremos esta sección a presentar algunos estudios que se basan en la teoría de la práctica social de Wenger (1998) o en su antecesora, la teoría sociocultural de Lave y Wenger (1991). Sin considerar que hemos cubierto la totalidad de éstos, creemos que brindan un panorama de la emergencia de la teoría en el campo de la educación matemática y nos proporcionan herramientas analíticas para nuestro estudio. La mayoría de trabajos que adoptan esta perspectiva corresponden a investigaciones relacionadas con la formación de profesores (Adler, 1998; Llinares 2002; Cobb et al., 2003; Graven, 2004; Smith, 2006; Llinares y Krainer, 2006; Gómez, 2007; Gavilán, García y Llinares, 2007), aunque también encontramos estudios dirigidos al aprendizaje de las matemáticas en educación primaria, secundaria y universitaria (Paden, 1998; Cobb y Yackel, 1998; Clarke, 2003; Goos, 2004; Clark, 2005; Boylan, 2005; Hemmi, 2006).

Investigaciones en formación de profesores

El campo de desempeño de los profesores es eminentemente social, por lo que se constituye en un terreno fértil para adoptar teorías socioculturales que expliquen qué aprenden los profesores y cómo aprenden a enseñar. Por esta razón, y posiblemente debido a que el trabajo inicial de Lave (1988) sobre la cognición situada se centra en prácticas matemáticas formales e informales, el uso de la perspectiva sociocultural de Lave y Wenger (1991) llama la atención de los investigadores en formación de profesores de matemáticas. El uso de factores sociales en la descripción y explicación del aprendizaje, tales como la participación en comunidades, el desarrollo de redes de aprendizaje, la solución conjunta de problemas profesionales y la constitución de comunidades de práctica, reconoce el rol que juegan los diferentes contextos en los cuales el aprendizaje de los profesores toma lugar (Llinares y Krainer, 2006). En tal sentido, la perspectiva sociocultural aplicada a la formación de profesores conceptualiza su aprendizaje como el desarrollo de una identidad profesional, a medida que hay un cambio en la participación en las prácticas de las comunidades en las que participan.

Los trabajos de investigación sobre formación de profesores que se fundamentan en la perspectiva sociocultural de Lave y Wenger (1991) son de dos tipos. En unos, se asume que el entorno usual de formación, o de desempeño profesional, es de hecho una comunidad natural de práctica y los investigadores buscan identificar los efectos de la misma en el aprendizaje (Lerman, 2001; Llinares, 2002; Cobb et al., 2003; Smith, 2006; Gavilán, García y Llinares, 2007; Gómez, 2007). En otros, se busca generar espacios de formación de profesores, o de futuros profesores, en donde ellos hagan parte de una comunidad de práctica conformada a propósito alrededor de un asunto problemático; el aprendizaje se documenta dando cuenta de la evolución de la participación o de la identidad profesional (Adler, 1998; Graven 2004). A continuación mencionaremos brevemente algunos aspectos de estos trabajos y sus principales aportes a nuestra investigación.

Con relación al primer tipo, un concepto recurrente con el cual los investigadores caracterizan el aprendizaje de los profesores es el de 'identidad' (Lerman, 2001; Llinares, 2002; Cobb et al., 2003; Smith, 2006). Con éste, describen el proceso de ganar o modificar una identidad profesional en la práctica social de volverse, o ser, profesores de matemáticas. La identidad emerge y se desarrolla a medida que los profesores llevan a cabo actividades propias de la práctica, asumen roles específicos, negocian relaciones sociales y se incrementa su participación en ellas. En particular, Smith (2006) usa tres indicadores de identidad profesional, adoptados de la teoría de Wenger (1998), que son de utilidad en nuestro estudio: compromiso, imaginación y alineación. Por compromiso, se refiere al grado en el que la persona se involucra en actividades e interacciones conjuntas. La imaginación se alude a la disposición para explorar, tomar riesgos, generar nuevas imágenes del mundo y de sí mismo. La alineación describe el proceso de coordinar perspectivas y acciones para encontrar una base común en la cual actuar.

Otro concepto usado por los investigadores referenciados dentro del primer tipo es el de 'participación periférica legítima' (Llinares, 2002; Cobb et al., 2003; Gavilán, García y Llinares, 2007). Los estudios centran la atención en la interacción que se lleva a cabo entre los profesores mientras resuelven conjuntamente tareas de diseño de propuestas de enseñanza y por esa vía discuten sus creencias y conocimientos acerca de la matemática escolar y de la enseñanza y aprendizaje de ésta, a la vez que construyen un discurso negociado sobre la práctica. El aprendizaje de los profesores se ve como el proceso de volverse sensibles a las posibilidades y limitaciones de la enseñanza de las matemáticas y evolucionar desde una participación periférica legítima hacia un papel central en la toma de decisiones en el interior de las comunidades en las que participan. El análisis de las interacciones revela diferentes formas de participación y grados de ser un participante legítimo. La investigación llevada a cabo por Llinares (2002) es útil para nuestro trabajo, particularmente desde el punto de vista metodológico porque ejemplifica cómo dar cuenta de aspectos tales como la participación diferenciada en la práctica y el desarrollo de un compromiso mutuo entre los integrantes del grupo.

La 'negociación de significados' se destaca como otro concepto usado por los investigadores que conciben el entorno de formación de profesores como una comunidad de práctica (Llinares, 2002; Cobb et al., 2003; Gómez, 2007). El aprendizaje se documenta dando cuenta del proceso de negociación de significados acerca de asuntos relacionados con la empresa de ser profesor de matemáticas. En particular, Gómez identifica tres indicadores de este proceso: la confusión, en tanto hay diversidad de significados de las nociones en juego no claramente identificados por los interlocutores; el conflicto, en cuanto a que las ideas expresadas por algún integrante del grupo generan polémica y discusión; y la participación, en cuanto a que casi todos los miembros de la comunidad intervienen en la discusión, hacen comentarios, proponen ideas que se tienen en cuenta y esperan reacciones de sus compañeros. El proceso usado por Gómez, para crear un sistema de códigos emergentes – fruto de la revisión de las trascripciones de las grabaciones de audio de la interacción entre un grupo de profesores en formación - con el cual da cuenta de un repertorio compartido de prácticas en la comunidad y la forma como sintetiza dichos códigos con el objeto de sacar a la luz algunas cuestiones que favorecen la emergencia de dicha comunidad, se constituye en un referente metodológico clave en nuestro estudio investigativo.

Con relación al segundo tipo, los conceptos de 'identidad' y 'participación periférica legítima' son usados por los investigadores para dar cuenta del proceso de constitución de comunidades de práctica de profesores interesados en atender asuntos o problemas particulares. Graven (2004), por ejemplo, da cuenta de un estudio en el que se intenta constituir una comunidad de práctica con profesores en ejercicio, quienes participan en un plan de formación que se propone para impulsar una reforma curricular en Sur África. Adler (1998, 2000, 2001), por su parte, reporta la conformación de una comunidad de práctica de profesores que se enfrenta el fenómeno del multilingüismo en las clases de matemáticas en Sur África. En su investigación Adler (2000, 2001) realiza un examen de la pertinencia de la teoría de aprendizaje sugerida por Lave y Wenger (1991) para dar cuenta del aprendizaje matemático escolar e intenta recontextualizar la teoría en el contexto particular de la educación matemática; su estudio nos orienta en la toma de decisiones sobre cómo aprovechar la teoría en nuestra investigación, sin tergiversarla.

Estudios dirigidos al aprendizaje de las matemáticas en educación primaria, secundaria y universitaria

Aunque no con el mismo impacto que las investigaciones en formación de profesores, la teoría sociocultural de Lave y Wenger (1991) y los desarrollos posteriores de Wenger (1998) han influenciado la investigación acerca del aprendizaje de las matemáticas en los diferentes niveles educativos. Sin pretender ser exhaustivos, podemos afirmar que la mayoría de trabajos hacen uso de algunos conceptos de la teoría como referente analítico pero sin ser éste el marco teórico central, pues lo combinan con teorías de aprendizaje individual (Cobb y Yackel, 1998; Boaler, 1999, 2000; Clarke, 2003; Anderson, 2007). Otros estudios, los menos, asumen la teoría de Wenger (1998) como fundamento principal y consideran las clases de matemáticas como comunidades de práctica *per se,* o con posibilidad de serlo si se hacen esfuerzos encaminado a la participación periférica legítima de los estudiantes en la construcción de conocimiento (Paden, 1998; Cobb et al., 2003; Goos, 2004; Clark, 2005; Boylan, 2005, 2007). Adicionalmente en los últimos años, y tal vez como reacción a críticas frente al uso de la teoría en el contexto educativo usual, se han desarrollado algunos trabajos que procuran un cambio radical de las clases hacia una práctica parecida a la de los contextos laborales en los que se basaron Lave y Wenger para desarrollar su teoría (Roth y Lee, 2006; Fernández, 2008; Chang et al., 2008).

A continuación vamos a mencionar algunos aspectos de las investigaciones consultadas que nos brindan elementos para el presente estudio. Ubicamos nuestra investigación dentro de las que usan la teoría de la práctica social (Wenger, 1998) para documentar el aprendizaje en un curso de geometría de nivel universitario en el que procuramos, como estrategia metodológica, impulsar la emergencia de una comunidad de práctica.

Comenzamos por un primer grupo de trabajos que tienen como objetivo identificar la naturaleza del conocimiento matemático escolar y se preguntan si las clases de matemáticas se pueden caracterizar como comunidades de práctica o no. Boaler (1999) realiza una investigación en el Reino Unido, en la cual monitorea durante tres años a dos grupos de estudiantes de secundaria en busca de indicadores para poder caracterizar las clases como una comunidad y dar cuenta de la constitución de identidades de participación. A partir de la descripción del desempeño de los estudiantes en diversas tareas propuestas por el equipo de investigación, la autora señala las ventajas de trabajar en un ambiente de clase basado en la resolución de problemas, que se vive en una de las instituciones, en comparación con la enseñanza en la otra, en donde el profesor imparte un contenido, ejemplifica como se resuelven ejercicios en los que el contenido se aplica y los estudiantes se ejercitan en otros similares. La investigadora concluye que esta segunda formación prepara para responder a las exigencias del sistema educativo, mientras que la primera prepara para la vida, pues genera identidades de participación comprometidas con sacar adelante una empresa conjunta. Para ampliar el estudio, Boaler (2000) entrevista en profundidad a 76 estudiantes de escuelas del Reino Unido sobre sus percepciones acerca de las clases de matemáticas y sobre el impacto de éstas en el conocimiento que ellos alcanzan y usan. Los estudiantes entrevistados manifiestan, en su mayoría, que las prácticas dominantes son la memorización y reproducción de procedimientos a partir de un trabajo individual. Boaler (2000) concluye que las clases descritas por los estudiantes no pueden caracterizarse como comunidades de práctica en el sentido definido por Wenger (1998) y que se hace necesario un cambio en los modelos de enseñanza de las matemáticas para dar a los estudiantes una participación más relevante en la clase, como agentes que negocian significados, contribuyen a la conformación de la práctica y deciden que posición adoptan en ella.

Un estudio empírico con un objetivo similar, en el que se analizan diversas clases de matemáticas de secundaria en Estados Unidos y el Reino Unido, es el llevado a cabo por Boylan (2005). El autor usa como categorías de análisis: la naturaleza de la participación de los miembros de la clase, la emergencia o no de una empresa conjunta, el repertorio de prácticas y el desarrollo de identidades de participación. Coincide con Boaler (1999, 2000) en concluir que, por lo general, las clases de matemáticas no pueden ser consideradas como comunidades de práctica, debido principalmente a la falta de delegación de las actividades matemáticas y sociales en los estudiantes. Desde su punto de vista, en su mayoría, las clases de matemáticas siguen siendo orientadas a la transmisión de conocimiento y se caracterizan por periodos de exposición de algoritmos o información descontextualizada y discreta, por parte de los profesores, seguidos de ejercitación individual, por parte de los estudiantes. Este tipo de práctica genera una participación coercitiva y marginal de los estudiantes, falta de negociación de significados, tolerancia más que compromiso real con la práctica, trayectorias de participación limitadas, prácticas no flexibles ni adaptadas a la dinámica del grupo y experiencias individuales que no generan identidades de participación. Aunque Boylan aclara que algunas experiencias escolares que se han llevado a la práctica en años recientes podrían tener más cercanía con lo que se denomina una comunidad de práctica -sobre todo las que enfatizan en el aprendizaje inquisitivo, promueven actividades matemáticas basadas en la resolución de problemas y en la discusión entre los estudiantes y en donde el profesor no se ve como el portador de conocimientos sino como el experto que ejemplifica para el aprendiz la forma de participar legítimamente-, se muestra escéptico sobre la pretensión de que todas las clases de matemáticas, en general, puedan considerarse comunidades de práctica en el estricto sentido descrito por Wenger (1998). Según él, no deja de ser artificial la conformación del grupo de participantes en la clase, porque es una práctica fuera de un contexto laboral, productivo o empresarial específico y porque no es claro si el profesor, como experto del grupo, realmente ejemplifica una práctica matemática o la práctica de enseñar matemáticas.

Posteriormente, como una extensión del estudio, Boylan (2007) trabaja estrechamente con un profesor de matemáticas de séptimo grado, en el Reino Unido, observando sus clases en relación con tres aspectos relacionados con la teoría sociocultural de Lave y Wenger (1991): la autoridad, la diversidad de intereses y el conflicto. Encuentra intereses diferenciados entre los miembros de la clase y conflictos generados por la asimetría en las interacciones; por ejemplo, en el sentido en que las preguntas formuladas por el profesor son indicador de conocimiento y autoridad, mientras que las preguntas de los estudiantes revelan falta de conocimiento y disminuyen el estatus en el grupo. Una de las conclusiones de Boylan (2007) es que las prácticas de clase tienen muchos nexos con prácticas sociales antidemocráticas. Invita a los profesores a realizar esfuerzos por transformarlas en espacios que abran horizontes de comprensión entre los miembros, generen experiencias y propósitos compartidos, empatía y solidaridad. Los estudiantes deben poder practicar en clase las responsabilidades y derechos de los ciudadanos y ejercer control sobre las prácticas sociales. Así mismo, para que puedan compartir la responsabilidad en la generación de conocimiento, deben ser estimulados a formular preguntas significativas.

En una investigación parecida llevada a cabo en Australia, Clarke (2003) se enfoca especialmente en analizar la contribución individual en las prácticas que se ponen en juego en las clases de matemáticas. Sigue de cerca diez secuencias de lecciones en tres cursos de grado octavo e identifica patrones de interacción entre los miembros de la clase. Concluye, a diferencia de Boylan, que cuando el profesor responsabiliza a los estudiantes de la construcción de conocimiento, ellos pueden avanzar en una trayectoria incluyente de participación y posicionamiento social frente a sus compañeros. Señala que la construcción colectiva no significa que todos los participantes tengan propósitos comunes, aunque todos estén interesados en avanzar en el aprendizaje; cada uno asume una identidad diferente de acuerdo a propósitos particulares, y según las prácticas se van refinando, modificando o remplazando en el tiempo.

El objetivo de algunas investigaciones ubicadas en el primer grupo se centra en el establecimiento de los nexos entre el aprendizaje y el desarrollo de una identidad de participación en el sentido descrito por Wenger (1998). Por ejemplo, Anderson (2007) da cuenta de una investigación llevada a cabo con 54 estudiantes de secundaria, de grados 9 a 12, de una institución rural en los Estados Unidos. A partir de un cuestionario aplicado a todos los estudiantes y de entrevistas con algunos de ellos, el autor encuentra cuatro indicadores de la conformación de identidades de participación, de los cuales los tres primeros coinciden con los señalados por Smith (2006): compromiso, imaginación, alineación y naturaleza. El compromiso es asociado por Anderson con el grado de implicación personal y de esfuerzo por desarrollar estrategias propias al resolver los problemas; la imaginación, con las expectativas que se crean sobre el futuro y la proyección de la utilidad de las matemáticas en la vida futura; la alineación, con la adaptación a las exigencias y limitaciones de las actividades matemáticas escolares; y la naturaleza, con asuntos de historia de vida personal y de habilidades innatas para las matemáticas. Así como Smith (2006), Anderson (2007) nos aporta descriptores para la caracterización de identidades de participación que son de utilidad en nuestros análisis.

Las investigaciones mencionadas previamente se centran en caracterizar las clases de matemáticas tal y como ellas se llevan a cabo. En un segundo grupo de trabajos ubicamos estudios que se preguntan por la posibilidad de constituir comunidades de práctica si se modifica la cultura de la clase en procura de ello. Aunque las investigaciones llevadas a cabo por Cobb y Yackel (1998), Paden (1998) y Goss (2004) no se enmarcan exclusivamente dentro de la teoría sociocultural de Lave y Wenger (1991), pues en los diseños didácticos ponen en juego otras aproximaciones de tipo socioconstructivista, en los análisis usan la teoría de la práctica social para referirse a aspectos como la participación periférica legítima y el uso de artefactos culturales.

Cobb y Yackel (1998) examinan las formas en que un grupo de niños de tercero de primaria perciben y manipulan símbolos fraccionarios cuando participan activamente en la clase. Desde el punto de vista de los autores, los símbolos fraccionarios son artefactos culturales que transportan en sí mismos la herencia cultural de las prácticas de las personas matemáticamente escolarizadas.

Paden (1998) da cuenta de una investigación en la que se impulsa la construcción colectiva de conocimiento en una clase de tercero de primaria, que pretende simular una comunidad matemática. Señala algunos elementos de la clase como esenciales para permitir la constitución de tal comunidad, que están en consonancia con los que se describirían para una comunidad de práctica en el sentido definido por Wenger (1998): los conceptos matemáticos se introducen como respuesta a necesidades efectivas de solución de problemas; las ideas son producidas por los estudiantes gracias al trabajo en pequeños grupos y la posterior discusión general; se comparten y defienden ideas para encontrar soluciones factibles a una tarea, revisar soluciones erradas y proponer soluciones más efectivas; se establecen relaciones sociales productivas entre los estudiantes a medida que constituyen una comunidad en la que unos confían en los otros y se ven como responsables de encontrar solución a los retos presentados; no se hace énfasis en un modo específico de solucionar los problemas sino en diversas formas, de tal suerte que la mayoría de estudiantes pueden participar de una manera plena en las prácticas que se llevan a cabo; se reconocen los esfuerzos individuales y colectivos en vez de la dependencia del profesor.

Por su parte, Goss (2004) reporta una investigación en la que ella actúa como observadora participante para apoyar a un profesor de matemáticas en la implementación de una enseñanza orientada a la indagación, con estudiantes de secundaria de grados 11 y 12, en Australia. Las orientaciones dadas al profesor provienen de teorías socioculturales, principalmente de la caracterización del aprendizaje como incremento de participación en una comunidad de práctica (Wenger, 1998) y del concepto de zona de desarrollo próximo (Vygotsky, 1978). En ese sentido, la planeación de las clases se hace evaluando los eventos que suceden en clases anteriores para adecuar nuevas lecciones de manera que las actividades resulten cada vez más retadoras y permitan a los estudiantes profundizar en exploraciones de los conceptos matemáticos. Goos llama a esta comunidad, 'comunidad de práctica de indagación' y considera que los resultados de su estudio pueden orientar a los profesores e investigadores sobre cómo generar este tipo de comunidades en sus clases. Desde nuestro punto de vista, dado que el ambiente de aprendizaje en el curso de geometría en donde llevamos a cabo nuestro estudio tiene características similares a las descritas por Cobb y Yackel (1998), Paden (1998) y Goss (2004), estas investigaciones nos brindan un soporte para presuponer la eficacia de usar la teoría de Wenger (1998) como marco de referencia en nuestros análisis.

Un aspecto considerado en las tres investigaciones anteriores es el rol del profesor. Para Cobb y Yackel (1998), el profesor tiene el rol de introducir los artefactos culturales y velar por lograr un incremento en la participación de los estudiantes en el uso de dichos recursos, acercándolos al saber matemático de referencia. Para Paden (1998), el profesor es quien guía el establecimiento y las relaciones productivas entre los miembros de la clase, genera una atmósfera de cooperación hacia una meta global y dirige la discusión sobre las soluciones hacia las más apropiadas. Para Goos (2004), el profesor es fundamental para enfatizar en el sentido de hacer y comunicar matemáticas de manera indagativa pues es quien establece las normas y prácticas, y ejemplifica el tipo de actividad matemática que espera que los estudiantes lleven a cabo.

En un tercer grupo ubicamos los estudios de Roth y Lee (2006), Fernández (2008) y Chang et al. (2008) quienes hacen uso de la teoría de Wenger (1998), no solamente como marco interpretativo de los eventos de la clase sino para proponer organizaciones escolares novedosas.

Roth y Lee (2006) ejemplifican, con dos estudios de caso, clases que ellos consideran que pueden calificarse como 'comunidades de práctica' en el estricto sentido propuesto por Wenger (1998). Se trata de las clases impartidas en dos escuelas experimentales, una en Francia y otra en Canadá en donde hay una organización curricular que establece una conexión plena entre la comunidad escolar y la sociedad en la cual se ubican, lo que hace casi imperceptibles los límites entre los dos ámbitos. Al establecer ese tipo de organización se establece una división auténtica del trabajo entre los estudiantes, los cuales realizan actividades diferenciadas en pro de metas sociales colectivas, aspecto que es central en una comunidad de práctica. Esta investigación nos alerta sobre la posibilidad efectiva de lograr la emergencia de una comunidad de práctica en una institución educativa en donde no es posible romper con restricciones curriculares como se hace en las instituciones mencionadas y nos hace dirigir la mirada hacia los papeles diferenciados de los participantes, como un indicador importante del surgimiento de una comunidad de práctica.

Por su parte, Fernández (2008) reporta un estudio investigativo en el que se acerca el contexto educativo a un ámbito laboral y se impulsa la participación de los estudiantes en una comunidad de práctica genuina. Los estudiantes, de 16 a 21 años, inscritos en un curso vocacional, interactúan con expertos en el oficio de soldar hierro y se convierten en aprendices de dicho oficio, a la vez que tienen clases teóricas de matemáticas en donde se resuelven problemas asociados al trabajo que están realizando. Al usar la expresión 'participación periférica legítima' como indicador de aprendizaje, Fernández (2008) delinea una trayectoria de participación compuesta por cuatro estados que determinan qué tanto se involucran los estudiantes en las acciones que llevan al cumplimiento de la empresa: 'periférica', 'periférica legítima', 'legítima' y 'plena'. Califica como 'periférica' a la participación de tipo pedagógico en la que los miembros recién llegados usan materiales y recursos disponibles en la comunidad de práctica para simular algunas de las prácticas, pero sin colaborar con un producto real de la comunidad. En una participación 'periférica legítima', los miembros novatos asumen tareas reales de la comunidad sobre las que probablemente no tienen mucho control pero que son aportes sustanciales al producto de la empresa. En este estado los miembros son asistidos de cerca, probablemente hacen tareas parciales o en tiempos mayores que los expertos, son supervisados permanentemente, pero su actividad es fundamental para el cumplimiento de las metas. En el estado de participación 'legítima', los novatos se desplazan hacia una posición de miembros activos de la comunidad y asumen responsabilidades autónomas configurando una identidad de participación desde la que aportan al éxito de la empresa encajando en la estructura de recursos de la comunidad. Un último estado, al que no necesariamente se espera que accedan todos los miembros, es el estado de participación 'plena', en donde algunos miembros se constituyen en líderes de la comunidad y se responsabilizan de la distribución del trabajo y asignación de responsabilidades. A este estado acceden los que son reconocidos por los demás como expertos, veteranos o maestros en el asunto. No quiere decir que el experto lo sepa todo de la práctica, pero sí que es experto en la forma de ser miembro de la comunidad de práctica, en el uso de los recursos de la comunidad y en las relaciones sociales que establece con todos demás miembros. La investigación es útil para nuestro estudio pues nos ayuda a construir una trayectoria de participación de los estudiantes a medida que pasan de una participación periférica legítima a una participación plena.

Chang et al. (2008) también se refieren a un estudio investigativo en el que se diseña un ambiente de aprendizaje muy cercano a una práctica real. Para ello, propone a estudiantes de secundaria abrir y administrar una publicación académica periódica en un sitio Web. Los estudiantes van asumiendo diferentes roles asociados al oficio y a sus posibilidades de participación; el grado de contribución va cambiando a medida que las prácticas evolucionan de una participación periférica legítima a una participación plena (Wenger, 1998). El profesor se vuelve un facilitador que apoya el aprendizaje de los estudiantes a medida que va viendo su evolución y les asigna diversos roles y tareas. El análisis de la evolución de la participación es ilustrativo pues muestra la dinámica de inclusión cada vez mayor en las tareas más relevantes de la comunidad.

Finalmente, en esta sección reportamos dos investigaciones cuyo objetivo es identificar aspectos sociales determinantes del aprendizaje de la demostración y que hacen uso de la teoría de la práctica social como marco analítico.

Clark (2005) examina, a la luz de la teoría de Wenger (1998) y de la noción de norma sociomatemática de Cobb y Yackel (1998), el aprendizaje de la demostración de los estudiantes inscritos en un curso universitario introductorio de estructuras matemáticas, en los Estados Unidos. El objetivo del curso es que los estudiantes avancen a partir de un conocimiento basado en procedimientos algebraicos, hacia la escritura de demostraciones con el rigor necesario para enfrentarse posteriormente a cursos formales de matemáticas. El autor examina la emergencia de una comunidad de práctica a medida que los estudiantes establecen como empresa conjunta el uso de argumentos deductivos como criterio para aceptar una justificación matemática. La noción de comunidad de práctica (Wenger, 1998) sirve de marco interpretativo para analizar el escenario social en el que los estudiantes trabajan aunque Clark matiza la noción refiriéndose a una ‘comunidad de práctica de clase’ y reconoce con ello las limitaciones propias de una comunidad en un contexto educativo institucional. Esta empresa conjunta es apoyada por el profesor, quién es caracterizado por Clark como un negociador (Wenger, 1998), pues hace parte de la comunidad de la clase y de la comunidad matemática, en un sentido amplio. El profesor es el encargado de apoyar el establecimiento de normas y herramientas, así como de asegurar que la actividad de los estudiantes entre en resonancia con prácticas matemáticas usuales. La investigación de Clark tiene similitud con nuestro trabajo en el sentido en que intenta destacar aspectos socioculturales que influyen en el aprendizaje de la demostración en un curso universitario. Se distancia en la empresa que se pretende llevar a cabo pues nuestro estudio se sitúa en un curso de geometría plana que busca la construcción de una porción de un sistema axiomático.

Hemmi (2006) lleva a cabo una investigación tendente a describir aspectos del aprendizaje de la demostración relacionados con la participación de los estudiantes en diversas actividades que llevan a cabo en su paso por el programa de formación matemática universitaria. En su estudio, concibe al departamento de matemáticas como una comunidad de práctica que tiene como empresa conjunta aprender matemáticas. En particular, caracteriza la demostración matemática como uno de los artefactos culturales de la comunidad y analiza qué visiones, dimensiones y conocimientos se comparten acerca de la demostración, a medida que se llevan a cabo diferentes prácticas propias de la participación en el programa de formación. Uno de los conceptos usados por la autora para analizar el aprendizaje de la demostración es el de 'transparencia' del artefacto cultural (Wenger, 1998), que hace alusión a la tensión entre atender al artefacto y sus características o a aquellas prácticas que el artefacto permite llevar a cabo. La autora toma como unidad de análisis a todo el departamento de matemáticas. Además de recoger datos de la observación de algunas clases, lleva a cabo entrevistas con matemáticos adscritos al programa, estudiantes de postgrado y estudiantes del programa de matemáticas; también hace una revisión de textos y materiales instruccionales. La investigación de Hemmi es cercana a nuestro estudio en cuanto se interesa por el aprendizaje de la demostración a nivel universitario y usa como marco interpretativo la perspectiva sociocultural de Lave y Wenger (1991). Sin embargo, los análisis dan una visión general de los acercamientos a la demostración que tienen los estudiantes a lo largo de la carrera universitaria y no de la participación específica en procesos de construcción de conocimiento.

Es pertinente notar que para Clark (2005), la demostración es vista como la empresa conjunta que definen los miembros de la clase, para Hemmi (2006) es considerada como un artefacto que caracteriza la práctica de las matemáticas y para nosotros ella va a ser el eje del repertorio de prácticas de la clase. En ese sentido, todos usamos conceptos de la teoría de Wenger (1998), pero ubicamos a la demostración en lugares diferentes, en relación al contexto en donde se realiza el trabajo.

2.2.2. LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DE LA DEMOSTRACIÓN EN GEOMETRÍA

En la enseñanza experimental que sirvió de contexto a la presente investigación, pusimos en juego una perspectiva teórica sobre el aprendizaje de la demostración que guió el diseño y el desarrollo del curso. Esta perspectiva nos permitió identificar actividades, recursos y formas de interacción con las cuales apoyar la actividad matemática de los estudiantes y tomar decisiones 'sobre la marcha' para favorecer el aprendizaje. Desde nuestro punto de vista, tal como lo señala Cobb (2000), disponer de una teoría de aprendizaje proveniente de marcos psicológicos, sociológicos o antropológicos es insuficiente cuando se organiza y se lleva a cabo una enseñanza en un dominio particular. Hacen falta fundamentos didácticos específicos de dicho dominio, por lo menos de carácter provisional, para guiar el proceso y la búsqueda de medios para organizar la enseñanza.

A continuación nos referimos a algunas investigaciones que aportan elementos para fundamentar una postura sobre la demostración que reconoce su naturaleza social, acorde con la teoría de aprendizaje adoptada en el estudio. Adicionalmente, mencionamos algunos estudios sobre el aprendizaje de la demostración que fundamentan el acercamiento investigativo y nos brindan herramientas analíticas. En la primera sección, los trabajos aluden principalmente al tipo de tareas, el ambiente de la clase, el papel del profesor, las estrategias didácticas y los recursos de mediación disponibles. En la segunda sección contemplamos estudios centrados en alguna o algunas de las prácticas que integran o se relacionan con el constructo 'actividad demostrativa', el cual definimos en el marco teórico.

Naturaleza social de la demostración y aspectos relacionados con su enseñanza y aprendizaje

Los estudios sobre la demostración en educación matemática han tenido un gran auge en las últimas tres décadas. Según Mariotti (2006), las investigaciones, en términos generales, abarcan la identificación de la influencia del currículo sobre el estado de la enseñanza y el aprendizaje de la demostración (Senk, 1985; Dreyfus, 1999; Hoyles, 1997; Healy y Hoyles, 1998), análisis de concepciones y dificultades de los estudiantes al aprender a demostrar (Fischbein y Kedem, 1982; Duval, 1991; Chazan, 1993; Moore, 1994; Almeida, 1995, 1996, 2000, 2003) y experimentos de enseñanza y su efecto en el aprendizaje, entre los cuales están aquellos que tienen en cuenta la naturaleza social de la demostración (Bell, 1976; Lampert, 1990; Alibert y Thomas, 1991; Radford, 1994; Perks y Prestage, 1985; Yackel y Cobb, 1996; Hoyles, 1997; Harel, 1998; Sackur, Drouhard y Maurel, 2000; Yackel, 2002; Blanton y Stylianou, 2002, 2003; Goos et al., 2003; Martin et al., 2005; Kucheman y Hoyles, 2007; Stylianides, 2007). Dentro de los últimos estudios ubicamos los que han incorporado el uso de programas de geometría dinámica como recurso para crear ambientes favorables al aprendizaje de la demostración (Groman, 1996; Jones, 2000; Mariotti, 2000; Marrades y Gutiérrez, 2000; Healy y Hoyles, 2001).

Nuestra investigación se sitúa en el grupo de experimentos de enseñanza, pues damos cuenta del aprendizaje de la demostración en un curso experimental de geometría plana. Por tal razón, centramos la revisión de la literatura en algunos estudios precursores en insinuar la importancia de los asuntos sociales -aunque los autores trabajen bajo otras perspectivas-, y en investigaciones que se comprometen directamente con objetivos y métodos de la perspectiva sociocultural. Sin embargo, a excepción de los estudios de Clark, (2005) y Hemmi (2006), referenciados en la sección anterior, no hemos encontrado otros que hagan uso de la teoría sociocultural de Lave y Wenger (1991) o de la teoría de la práctica social de Wenger (1998) como marco conceptual o analítico para dar cuenta del aprendizaje de la demostración; en ese sentido, consideramos que nuestro trabajo aporta al desarrollo de la investigación en esta vía.

Un primer aspecto mencionado recurrentemente cuando se pone de presente la influencia de los aspectos sociales en el aprendizaje de la demostración es el tipo de tareas que se proponen a los estudiantes.

Bell (1976) es pionero al sugerir que la tarea de investigar situaciones problema puede conducir a diversas conjeturas formuladas por los estudiantes, a la necesidad de resolver conflictos entre ellos, a la presentación de evidencias y a la construcción de argumentos formales. Esta idea es llevada a la práctica, entre otros, por Lampert (1990), Hoyles (1997) y Martin et al. (2005); el primero de ellos sugiere que los problemas propuestos incluyan la observación de patrones de regularidad pues esto conlleva a la elaboración de argumentos empíricos inductivos y a explicaciones deductivas sobre por qué un patrón puede continuar.

Por su parte, Radford (1994) hace una descripción más detallada del tipo de tareas para la geometría, proponiendo la reformulación de teoremas relevantes en términos de problemas abiertos que dan lugar a una conjetura correspondiente al enunciado del teorema, seguida de actividades que buscan mostrar que una figura no puede constituirse en una demostración y de otras que procuran la comprensión del funcionamiento de una demostración -las cuales incluyen demostraciones incompletas o cuyos pasos están desordenados con la finalidad de completarlas u organizarlas, respectivamente-. Radford dice que por esa vía los estudiantes pueden ver los teoremas como algo significativo y se motivan a demostrarlos. Harel (1998) introduce un elemento nuevo en la selección de teoremas al proponer que éstos den lugar a demostraciones ‘explicativas’ (Hanna, 1998) pues son las que motivan a los estudiantes a aprender a demostrar. Aunque Radford evalúa el éxito de su propuesta analizando los progresos individuales en la realización de demostraciones, valoramos de su investigación principalmente la reformulación de teoremas en forma de problemas y usamos esa idea en la clase de geometría plana que sirve de contexto para nuestro estudio. Adicionalmente, Marrades y Gutiérrez (2000) y Jones (2000) llaman la atención sobre la necesidad de organizar secuencias de enseñanza cuidadosas, graduar los problemas según el grado de dificultad y dar suficiente tiempo a los estudiantes para trabajar en los problemas propuestos.

Además de las tareas, un segundo aspecto al que se le presta atención, especialmente con el advenimiento de los programas informáticos de geometría dinámica, es a los recursos que se ponen a disposición de los estudiantes.

El trabajo de Groman (1996) es uno de los primeros enfocados en aspectos sociales del aprendizaje de la demostración en donde se emplea como mediador a la geometría dinámica. La investigadora señala que la presencia de la tecnología produce un cambio en la forma de hacer el curso, hacia una práctica de tipo social. A partir de la exploración de figuras geométricas para producir conjeturas y de preguntas de la forma ‘qué pasa si…’, los estudiantes, futuros profesores, pueden construir por sí mismos significados matemáticos en un ambiente social de investigación, donde el profesor es uno más de los participantes en el proceso.

La publicación especial número 44, en el año 2000, de la revista *Educational Studies in Mathematics* recoge importantes esfuerzos investigativos encaminados a preparar para la demostración o para enseñar a demostrar, en donde se enfatiza en el efecto de la mediación de los programas informáticos de geometría dinámica. En ella, algunos autores no sólo dan evidencias empíricas que refutan la idea de que la demostración esté en peligro por el uso de estos programas sino que caracterizan su importante papel en la interacción social que favorece el aprendizaje. Mariotti (2000) presenta un análisis de la relevancia de varias funciones del programa Cabri al permitir centrar la atención en los procedimientos de construcción y en su validez, más que en el resultado de los mismos. La autora ilustra - mediante episodios extraídos de un experimento de enseñanza realizado con estudiantes de 15-16 años – de qué manera aprovecha la correspondencia existente entre los comandos del menú que ofrece el programa y los axiomas y teoremas, que los estudiantes usan en sus justificaciones, para introducir la idea general de demostración y la necesidad de demostrar siguiendo los principios y reglas de inferencia aceptados por el grupo como parte de una teoría. Según Mariotti, el aprendizaje de la demostración se favorece cuando una solución propuesta por un estudiante se somete a juicio de los demás, con base en las justificaciones que éste da. De manera paulatina se va incrementando la necesidad de recurrir a la demostración como recurso de validación. Marrades y Gutiérrez (2000) señalan que el programa de geometría dinámica permite una exploración empírica de las representaciones de las figuras geométricas, hecho que influye en una evolución positiva hacia la producción de justificaciones cada vez más próximas a demostraciones deductivas. Jones (2000) propone tareas cuya intención es interesar a los estudiantes en el análisis de las propiedades geométricas que permiten establecer relaciones entre las figuras. Concluye que cuando los estudiantes intentan explicar qué características debe tener una figura construida en un programa de geometría dinámica para representar una figura geométrica específica, juegan implícitamente con la idea de inferencia y se preparan para comprender cómo opera una demostración. El programa de geometría dinámica aporta un contexto de significado a la tarea de explicar, al disponer de la función de arrastre de los objetos de la construcción; el uso de esta función motiva a preguntarse por las razones de la resistencia de una figura al arrastre o la permanencia de algunas de las características de las figuras bajo el arrastre. Así, la preparación para la demostración se hace con actividades que llevan a los estudiantes a tener conciencia de la dependencia entre propiedades, a partir del cuestionamiento de una propiedad condicionada a la validez de otra propiedad.

Healy y Hoyles (2001) reportan un estudio en el que tienen como hipótesis que las explicaciones dadas por los estudiantes, derivadas de la interacción con un programa de geometría dinámica, son más fáciles de sistematizar en una demostración deductiva que aquellas producto del trabajo con figuras hechas en papel; esto es debido a que al usar el programa se presta atención explícita a los procesos que se llevan a cabo. Las autoras organizan una serie de actividades en una secuencia de enseñanza que incluye la construcción de figuras geométricas, la identificación y descripción de las propiedades que usan en la construcción, el uso de opciones del programa informático para generar y verificar conjeturas, la formulación de una explicación informal de por qué las conjeturas pueden ser ciertas y la organización de las explicaciones en cadenas deductivas, con ayuda del profesor. Las investigadoras encuentran una estrecha relación entre el éxito en la resolución de los problemas y la producción de argumentos deductivos. Aspectos del diseño llevado a cabo por Healy y Hoyles son similares al diseño implementado en nuestro estudio, aunque nosotros trabajamos con estudiantes universitarios y no de secundaria; en ese sentido, las exigencias de rigor y formalidad en la producción de demostraciones son mayores. Junto con los otros estudios mencionados anteriormente, este trabajo nos llevó a tomar la decisión de emplear la geometría dinámica en nuestro experimento de enseñanza.

Como tercer aspecto considerado por los investigadores como determinante del aprendizaje de la demostración desde el punto de vista sociocultural está el tipo de interacciones que se promueven entre los estudiantes y con el profesor.

Bell (1976) señala que sólo hasta que los estudiantes son conscientes del estatus público del conocimiento y del valor de la verificación social, a través del trabajo cooperativo en clase, aprecian el uso de demostraciones formales. Por tal razón, sugiere, así como Lampert (1990), conducir la clase procurando que los estudiantes puedan argumentar para rechazar o legitimar una afirmación, independientemente de lo que diga el profesor o esté en un texto.

Alibert y Thomas (1991) también hacen especial mención a las estrategias didácticas en donde se invita a los estudiantes a negociar sobre lo que constituye una demostración aceptable en matemáticas. Los autores combinan diversos dispositivos didácticos -procurando constituir en el aula un clima de construcción social- tales como el trabajo individual, el trabajo en grupos y el debate; concluyen, como Hoyles (1997), que el debate es una vía óptima para discutir la validez de los enunciados matemáticos, comprender por qué son válidos y querer justificarlos mediante la producción de una demostración. Según Hoyles (1997), la demostración como recurso de comunicación de ideas, función sugerida por de Villiers (1993), se puede concretar en la práctica a través de actividades que propician la formulación de argumentos para convencer a los pares o al profesor.

Los trabajos de Perks y Prestage (1985), Sackur, Drouhard y Maurel (2000) y Küchemann y Hoyles (2007) se enfocan principalmente en desarrollar un ambiente de interacción social en el que los estudiantes, futuros profesores, pueden criticar, asumir posturas y defender ideas con las herramientas teóricas de que disponen. Además de crear un ambiente favorable hacia la demostración, resuelven conflictos suscitados por diferentes puntos de vista sobre la demostración de un enunciado geométrico. Los autores señalan que los estudiantes avanzan hacia la demostración deductiva a medida que logran una convicción propia de los enunciados en estudio, aunque es a través de la interacción social que se crea un entorno óptimo para aprender a demostrar. El ambiente inquisitivo es favorable para que ellos produzcan argumentos deductivos, pues al ser expuestos al control social se eleva su capacidad de argumentar matemáticamente.

Una forma particular de intercambio social que favorece el aprendizaje de la demostración es la enseñanza en entornos virtuales *on-line*. Estos entornos han sido objeto de investigación desde hace algunos años. Por ejemplo, Almeida (2000) da cuenta de un proceso de formación de profesores, a distancia, sobre conocimiento profesional en geometría; Borba y Zulleto (2006) investigan las interacciones entre diferentes interfaces del computador y el trabajo colectivo, en geometría, de estudiantes de diversos niveles educativos; Hung et al (2008) estudian los efectos de un sistema virtual de apoyo al desarrollo del pensamiento espacial. Particularmente sobre el aprendizaje de la demostración, Cobo y Fortuny (2007) estudian el papel de un sistema tutorial para el desarrollo de competencias argumentativas en geometría y Torregrosa-Gironés et al. (2010)-analizan la evolución de las concepciones de profesores sobre la demostración cuando participan en un entorno virtual de aprendizaje en el que, además de intervenir en foros virtuales, tienen que demostrar enunciados usando un programa de geometría dinámica.

Un cuarto aspecto tiene que ver con las normas que se establecen en clase con relación a los argumentos que son válidos.

Al respecto, es casi de obligatoria referencia la investigación de Yackel y Cobb (1996) quienes se centran en el papel de las interacciones sociales en la construcción de criterios compartidos sobre lo que es una justificación aceptable para un enunciado matemático. Aunque el estudio de estos investigadores no se enfoca específicamente en el aprendizaje de la demostración, avanza en la caracterización de las normas sociales y sociomatemáticas favorables a la práctica de justificar. Según Yackel (2001), una explicación matemática aceptable, en nuestro caso una demostración, llega a tener sentido para los estudiantes a través de la interacción de los participantes en el aula, quienes deciden si la explicación se ajusta o no a las reglas adoptadas. El significado de una norma no es preestablecido a fin de ser aplicado, sino que se comprende a partir de procesos de negociación, explícitos e implícitos, que se dan en la interacción social en el aula.

Harel (1998), Marrades y Gutiérrez (2000), Blanton y Stylianou (2002) y Martin et al. (2005), también hacen referencia a las normas en sus investigaciones. Por ejemplo, Harel (1998) reporta un trabajo con estudiantes de nivel universitario en el que intenta motivarlos a hacer demostraciones a partir del interés de presentar sus producciones, fruto de la resolución de problemas, de manera formal, según los cánones establecidos por el grupo para comunicar ideas. Marrades y Gutiérrez (2000) se refieren a la influencia del contrato didáctico que se establece en la clase en torno al significado de justificar una conjetura y Blanton y Stylianou (2002) y Martin et al. (2005) buscan identificar el proceso de evolución de las normas de la clase a medida que los estudiantes se apropian de un lenguaje y un estilo particular de hacer demostraciones. En las conclusiones de sus estudios tanto Blanton y Stylianou como Martin et al. identifican una influencia directa de las normas de la clase en el desempeño en la argumentación requerida para construir demostraciones matemáticas. A medida que el semestre progresa, se observa que la calidad de las explicaciones orales y escritas elaboradas por los estudiantes y la capacidad de expresarse cambia sustancialmente, evolucionando de formas empíricas y procedimentales a deductivas y conceptuales y los estudiantes parecen interiorizar la necesidad de justificar en un lenguaje cada vez más formalizado.

Finalmente, como quinto aspecto, mencionamos el papel del profesor en la constitución de un clima de interacción social favorable al aprendizaje de la demostración. La mayoría de los trabajos previamente referenciados hacen alusión a dicho papel (Jones, 2000; Laborde, 2000; Sackur, Drouhard y Maurel, 2000; Blanton y Stylianou, 2002, 2003 y Martin et al., 2005). Por ejemplo, Blanton y Stylianou (2003) concluyen que el parafraseo y la confirmación de ideas originadas por los estudiantes son un mecanismo exitoso mediante el cual el profesor da autoridad y confianza a los estudiantes, procede por el camino sugerido por ellos y comparte la responsabilidad en el proceso; y mediante la repetición constante del requerimiento de justificar los involucra en discusiones que favorecen la transferencia de la responsabilidad a los estudiantes en la construcción de demostraciones. La mayoría de autores referenciados consideran que la naturaleza y el impacto de las intervenciones del profesor es esencial en el proceso de acercar a los estudiantes a la demostración deductiva pues aunque se diseñen secuencias de enseñanza basadas en una organización social -en la que las soluciones propuestas por unos estudiantes deben ser aceptadas por los otros- la discusión tiene que ser guiada por el profesor; esto debido a que la construcción de conocimiento no avanza naturalmente en esa dirección, pues la demostración no es una vía social inmediata de justificar entre los estudiantes. El profesor es el responsable de impulsar a los estudiantes a explicar su razonamiento, tratar de dar sentido a las explicaciones de los compañeros y retarse unos a otros en busca de justificaciones. Además, él es la garantía de respeto a las reglas de la discusión establecidas en la clase y tiene la tarea de guiar la institucionalización de la discusión hacia la producción de demostraciones deductivas. Esta conclusión corrobora señalamientos hechos por otros investigadores (Cobb, Yackel y Woods, 1992; Hanna y Jahnke, 1996) quienes afirman que sería irreal esperar que los estudiantes redescubran métodos matemáticos sofisticados de validar, como la producción de demostraciones, sin la presencia activa del profesor. A diferencia de la posición de Harel (1998), en lugar de esperar a que los estudiantes sientan la necesidad de hacer demostraciones por sí solos, ellos señalan que es el profesor quien propone y controla las reglas de justificación que se admiten en la clase.

Actividades propias del proceso de demostrar

En esta sección presentamos algunos reportes investigativos en donde se hacen análisis detallados sobre las relaciones entre actividades como la resolución de problemas, la exploración, la formulación de conjeturas, la producción y uso de definiciones, la argumentación y la demostración (Boero et al., 1996b, 1999; Mariotti et al., 1997; Hoyles, 1997; Garuti et al., 1996; Garuti, Boero y Lemut, 1998;

Arzarello et al., 1998; 2002; Cerulli y Mariotti, 2003; Mariotti y Maracci, 1999; Douek, 1999, 2007, 2009; Furingheti, Olivero y Paola, 2001; Olivero y Robutti, 2001; Winicki-Landman, 2001; Furinghetti y Paola, 2000, 2001, 2003; Boero, Douek y Ferrari, 2002; Douek, y Pichat, 2003; Furinghetti et al., 2004; Pedemonte, 2001, 2002, 2007; Sáenz-Ludlow y Athanasopoulou, 2008). En particular nos concentramos, con algunas excepciones, en los trabajos de investigadores que ven la demostración como un proceso que integra algunas de las actividades mencionadas; en ese sentido, apoyan nuestra conceptualización de lo que denominamos 'actividad demostrativa'. Varios de estos estudios hacen análisis de corte más cognitivo que sociocultural, a pesar de reconocer la naturaleza social de la demostración; además, la mayoría de ellos se realiza en el contexto escolar y no en el universitario. Sin embargo, nos proporcionan una base que justifica el acercamiento que hacemos a la demostración en nuestro experimento de enseñanza.

La mayoría de reportes de investigación que agrupamos en esta sección provienen de una serie de estudios realizados por equipos de investigadores de universidades y colegios italianos que comparten una meta general y un marco conceptual derivado de teorías socioculturales, cuya génesis es el trabajo de Vygotsky (1978). El propósito general es lograr un acercamiento temprano a la perspectiva teórica de la geometría, de tal suerte que los estudiantes sean participantes activos en la construcción de teorías. Uno de los elementos centrales de la perspectiva teórica es lograr una aproximación a la demostración, vista desde el polo social (Arsac, 2007). En ese sentido se refieren a ella como un proceso de validación al interior de una comunidad; el proceso comprende la resolución de problemas abiertos que motivan la exploración de propiedades y búsqueda de regularidades, la formulación de conjeturas, la argumentación para admitirlas o rechazarlas y la producción de una demostración que atiende a las reglas y principios establecidos por el grupo social y que están en referencia a una teoría. Generalmente, los reportes de investigación no se centran en todo el proceso, dada su complejidad, sino que se refieren a actividades específicas relacionadas con aprender a demostrar.

Acerca de la resolución de problemas, algunos estudios identifican, coincidiendo con Radford (1994), que éste es el ambiente propicio para estimular la exploración de propiedades, la formulación de conjeturas, la necesidad de explicar el por qué de éstas y el interés por justificarlas.

Por ejemplo, Furinghetti y Paola (2003) concluyen, de una investigación realizada con estudiantes italianos de 17 años, que los problemas abiertos favorecen la delegación de la responsabilidad por construir conocimiento a los estudiantes ya que las ideas que se discuten y validan no provienen del profesor o del texto sino de investigaciones autónomas hechas por ellos. Este hecho incrementa su motivación por justificar los enunciados encontrados y la creatividad que ponen en juego para lograrlo. Sin embargo, señalan que la guía del profesor es necesaria para llevar la discusión matemática hacia la argumentación deductiva y a la producción de demostraciones, estableciendo reglas claras sobre cómo hacerlo, ya que, como le hemos mencionado anteriormente, ésta no es la forma natural como se argumenta cotidianamente.

Además de hacer referencia a la importancia de proponer problemas abiertos a los estudiantes, Furinghetti y Paola (2003) así como Furinghetti et al. (2004) y Mariotti, et al., (1997, 2000), invitan a sacar provecho de los programas de geometría dinámica como entornos de resolución de problemas favorables a la discusión matemática. Los hallazgos obtenidos, al trabajar durante varios años con estudiantes de diferentes edades, les permiten afirmar que si los estudiantes están familiarizados con ambientes de resolución de problemas, estos entornos proveen referentes concretos que estimulan la formulación de conjeturas y la argumentación fundamentada de éstas. Sin embargo, al llevar a cabo una investigación con estudiantes de liceos con orientación científica en donde usualmente no se impulsa el ambiente de resolución de problemas, Mariotti y Maracci (1999) advierten ciertas dificultades: los estudiantes no relacionan la actividad de resolver problemas con la producción de una demostración, no formulan conjeturas claramente ni desarrollan espontáneamente un argumento deductivo, aunque en otros momentos se desempeñan bien en la producción de demostraciones. En las conclusiones del estudio afirman que aunque el uso de un programa informático de geometría dinámica favorece la actividad argumental, particularmente al describir las construcciones geométricas realizadas y justificar la veracidad de las propiedades encontradas, dado que los estudiantes no formulan conjeturas como condicionales de la forma si-entonces, no ven la situación como una actividad de demostración.

Con respecto a la actividad de formulación de conjeturas, Boero et al. (1996b, 1999) estudian el efecto en la generación de conjeturas a manera de condicionales, de la exploración hecha sobre las construcciones realizadas durante la resolución de problemas. A partir de análisis detallados de la discusión sostenida por parejas de estudiantes mientras solucionan problemas, identifican diversos procesos de generación de proposiciones condicionales, impulsados frecuentemente por exploraciones dinámicas llevadas a cabo en diferentes entornos de mediación. Además, encuentran que los estudiantes que tienen éxito en la formulación de enunciados condicionales logran con mayor frecuencia la producción de justificaciones deductivas, que aquellos estudiantes que no lo hacen.

Otros estudios, dirigidos inicialmente por Boero et al. (1996a), se centran en analizar la posible continuidad entre los procesos de argumentar acerca de la plausibilidad de una conjetura obtenida y elaborar una demostración deductiva con el objeto de producir un teorema. Al analizar el razonamiento de los estudiantes -cuando tratan de validar conjeturas relacionadas con el comportamiento de la sombra de varas de madera de acuerdo a la posición del sol y la inclinación de éstas- los investigadores encuentran trazas de los argumentos con los cuáles los estudiantes justifican la plausibilidad de la conjetura. Con ello confirman lo que denominan ‘unidad cognitiva’ (Garuti et al., 1996; Mariotti et al., 1997) y el efecto positivo de la fase de exploración del problema. Posteriormente, Garuti, Boero y Lemut (1998) advierten que la unidad cognitiva puede no suceder si los argumentos para dar cuenta de la plausibilidad de la conjetura y los argumentos deductivos con los cuales se construye la demostración no se encuentran dentro de la misma teoría de referencia. Este hecho es corroborado en los estudios llevados a cabo por Furinghetti et al. (2004).

Por su parte, Arzarello et al. (1998; 2002) y Olivero y Robutti (2001) se concentran en identificar el papel desempeñado por las opciones de arrastre y de medida de los programas de geometría dinámica, en los intercambios que suceden entre los procesos de exploración que conducen a la formulación de conjeturas y los procesos de justificación que conducen a la producción de demostraciones. Ellos hacen un seguimiento detallado de las acciones e ideas verbalizadas por estudiantes de diferentes niveles educativos y profesores de matemáticas, cuando les proponen resolver problemas abiertos. Entre sus conclusiones resaltan que para sacar provecho del arrastre o de la medida en el establecimiento de un puente entre la exploración y la demostración, una vez se tiene una conjetura, hacen falta diseños didácticos cuidadosos en donde se estimule la búsqueda de explicaciones a las conjeturas formuladas, y a la producción de argumentos según reglas de validación establecidas claramente.

Con relación a la actividad de formular y usar definiciones, generalmente las investigaciones reportan análisis sobre la conceptualización que subyace a los procesos de definir en geometría por el interés que esta actividad tiene *per se*. Sin embargo, nosotros revisamos algunos estudios que mencionan la estrecha relación entre las actividades de definir (o usar definiciones) y demostrar por el papel que juegan las definiciones en la producción de cadenas deductivas. Entre ellos mencionamos la investigación realizada por Furinghetti y Paola (2000, 2002) quienes afirman que involucrar a los estudiantes en la actividad de definir tiene un valor didáctico invaluable para comprender la estructura lógica de las proposiciones de la forma si-entonces. En uno de sus experimentos de enseñanza proponen a estudiantes de secundaria hacer una clasificación de cuadriláteros conocidos, apoyándose en Cabri para hacer las figuras y compararlas. Los resultados muestran que el programa lleva a los estudiantes a preguntarse por propiedades geométricas del cuadrilátero que quieren construir y por esa vía formulan enunciados condicionales relacionados con las figuras en estudio. Un resultado similar es reportado por Sáenz-Ludlow y Athanasopoulou (2008), quienes adicionalmente señalan la interdependencia entre el conocimiento de la definición del cuadrilátero y los argumentos que despliegan los estudiantes, en este caso profesores en formación, para justificar los enunciados establecidos.

Acerca de la actividad de argumentar y su nexo con la demostración, antes de mencionar algunos resultados investigativos debemos aclarar la terminología. Generalmente, con el término ‘argumentación’ se hace referencia a dar razones fundadas para apoyar la plausibilidad de una conjetura o progresar en la resolución de un problema, mediante uno o más argumentos coherentemente conectados, aunque no necesariamente de manera deductiva. Esta es la acepción del término empleado por Duval (1991 1999), Balacheff (1999) y Pedemonte (2001, 2002, 2005). Con el término ‘demostración’ Duval (2007) se refiere a un razonamiento válido en el sentido en que cada paso debe ser necesario lógicamente y no debe haber baches entre dos pasos; es decir, como lo señala Douek (2007) para Duval, la demostración se aproxima a un cálculo lógico. Es por ello que el autor se refiere a una distancia epistemológica y cognitiva entre la argumentación y la demostración. Sin embargo, hay otras acepciones de los términos argumentación y demostración en las que se basan investigadores como Douek (1999), Boero, Douek y Ferrari (2002) y Douek y Pichat (2003) para identificar en qué casos la argumentación puede ser útil a la demostración y delinear algunas directrices educativas que permitan sacar provecho a la argumentación en el aprendizaje de la demostración. Con el término ‘argumentación’ Douek (2009) se refiere tanto al discurso que se elabora para apoyar la plausibilidad de una conjetura, como al discurso en el que se hace uso de enunciados teóricos para producir pasos de una demostración (el cuál denomina argumentación deductiva). Y con el término ‘demostración’ Douek se refiere a los textos que son reconocidos como tal por las personas que trabajan en matemáticas, los que aparece publicados en los libros escolares y aquellos mediante los cuales se comunican resultados matemáticos en revistas especializadas. Para distinguir su acercamiento del de Duval, Douek se refiere a estas demostraciones como ‘demostraciones matemáticas’. Al asumir la demostración de esa manera, es posible pensar en los posibles vínculos entre la argumentación y la demostración.

En particular, Douek y Pichat (2003), concluyen de un experimento de enseñanza con estudiantes de secundaria, que un escenario educativo basado en la participación de los estudiantes en experiencias matemáticas escogidas cuidadosamente y en la interacción social gestionada por el profesor con el interés particular de llevar a los estudiantes a la demostración, puede darles la oportunidad de desarrollar formas de argumentar próximas a la argumentación deductiva, de acuerdo a su nivel.

Por su parte, la investigación de Pedemonte (2005) avanza en el esfuerzo de bosquejar, a partir del modelo de Toulmin (1958) y de la noción de concepción de Balacheff (1997, citado en Pedemonte, 2005), semejanzas o diferencias entre argumentar y demostrar, con base en el sistema de referencias y en las concepciones que los estudiantes usan. Según la autora, la herramienta metodológica diseñada por ella responde a la necesidad de tener mejores dispositivos para un análisis comparativo que permita establecer la posible unidad cognitiva o la brecha entre ambas actividades en el curso de la resolución de un problema (Pedemonte, 2001, 2002). Esta utilidad es ilustrada con ejemplos del análisis de la resolución de problemas abiertos de geometría hecha por parejas de estudiantes en Italia y Francia.

Sobre la actividad de sistematizar, Mariotti (2000) y Cerulli y Mariotti (2003) se concentran en el uso que puede darse a los programas de geometría dinámica para que los estudiantes avancen a la perspectiva teórica participando en la organización de enunciados en axiomas, definiciones y teoremas. El interés surge de la caracterización de un teorema como una triada: enunciado-demostración-teoría (Mariotti, 1997) y de la convicción de que los estudiantes aprenden a demostrar sólo si estos tres elementos están estrechamente vinculados.

En sus experimentos de enseñanza invitan a estudiantes de 15-17 años a resolver problemas de construcción, producir reportes escritos de las funciones usadas y formular colectivamente enunciados relacionados con dichas funciones. Con la guía del profesor, los estudiantes asocian los enunciados a los axiomas de la teoría. Después, son invitados a resolver problemas de construcción no directamente relacionados a las funciones existentes, lo que les exige combinar varias funciones y generar nuevas herramientas. Los enunciados producidos por esta vía se asocian a teoremas y el procedimiento de construcción, a la demostración. Los enunciados se organizan lógica y cronológicamente en un cuaderno de notas para ir construyendo una teoría.

Los autores señalan el papel de los reportes de los estudiantes como impulsadores de las discusiones colectivas y del control de la teoría construida logrado por los estudiantes. Un indicador de dicho control, según Cerulli y Mariotti (2003), es que los estudiantes admiten usar un enunciado relacionado con un procedimiento, a manera de axioma, pero sólo de manera provisional porque son conscientes de que éste no proviene de las funciones básicas del programa y por lo tanto su demostración esta pendiente.

Furinghetti y Paola (2003) apoyan la aproximación sugerida por Cerulli y Mariotti (2003) pues afirman que es muy importante que los estudiantes tengan experiencias de construcción de demostraciones deductivas para tener una actividad matemática genuina. Señalan que, a nivel de secundaria superior, los estudiantes deben avanzar hasta la organización deductiva de argumentos al interior de una teoría porque ellos deben ganar un control epistemológico de la demostración que les permita identificar qué argumentos pueden dejar a nivel de una argumentación informal y cuáles no. Estas experiencias son del todo relevantes en el ámbito de la formación de profesores de matemáticas, como es el caso de nuestra investigación, no sólo porque los estudiantes deben tener conocimientos de contenidos matemáticos más allá de aquellos que van a enseñar, sino porque también deben tener una visión más o menos detallada de la naturaleza de las matemáticas y de las prácticas específicas a través de las cuales se hacen matemáticas.

En síntesis, los experimentos de enseñanza llevados a cabo por los investigadores reportados en los párrafos previos se caracterizan por un ambiente de resolución de problemas que da lugar a la formulación de conjeturas, la posibilidad de vincular las conjeturas con teorías de referencia en busca de la justificación de éstas y la producción de demostraciones, eventualmente a partir del nexo que se establece entre la exploración para producir la conjetura y la búsqueda de vías para demostrarla. Sin embargo, a diferencia de nuestra propuesta, no se aspira al nivel de construcción de un sistema axiomático, o de parte de éste. El experimento de enseñanza que diseñamos, desarrollamos y evaluamos para dar cuenta del aprendizaje de la demostración adopta los elementos antes mencionados, pero involucra a los estudiantes, en la producción de una porción de sistema axiomático para la geometría plana.

2.3. PLANTEAMIENTO DE LA INVESTIGACIÓN

En los siguientes párrafos exponemos el planteamiento general de la investigación. Comenzamos exponiendo las circunstancias que motivaron la realización del estudio. A continuación presentamos los objetivos, general y específicos, de la investigación. Finalizamos sintetizando las etapas del estudio.

2.3.1. MOTIVACIÓN

El interés por realizar un estudio sobre la enseñanza y el aprendizaje de la demostración en geometría tiene su origen en dos fuentes.

Primero, la observación, a lo largo de nuestra experiencia docente como profesores de matemáticas de educación secundaria y universitaria, de las dificultades con las que se enfrentan los estudiantes al interpretar, realizar o usar demostraciones deductivas en los cursos de geometría. En la educación secundaria, estas dificultades llevan a muchos profesores, desde hace algunos años, a evadir la enseñanza de la demostración llegando al grado de eliminar la práctica de la justificación en las aulas de matemáticas, con las funestas consecuencias que esto trae para la formación matemática de los estudiantes. En Colombia, a pesar de que los lineamientos curriculares vigentes, que rigen la educación primaria y secundaria desde 1998, promueven una imagen de las clases de matemáticas como lugares para que los estudiantes se involucren en la exploración de situaciones matemáticas, la comunicación oral y escrita de ideas matemáticas y la verificación, negociación y validación de éstas (MEN, 1998), el énfasis curricular en geometría está aún centrado en el reconocimiento visual de algunas figuras prototípicas, su clasificación, la memorización de algunas fórmulas para encontrar áreas y perímetros y en la memorización de demostraciones de algunos pocos teoremas. Este énfasis no sólo presenta una versión desvirtuada del conocimiento matemático, sino que no atiende el problema de la enseñanza y el aprendizaje de la demostración. En la formación universitaria, las dificultades se ven reflejadas en altos índices de fracaso en los cursos de geometría en donde la exigencia formal de hacer demostraciones es necesaria.

Segundo, como profesores universitarios de matemáticas, en cursos dirigidos a la formación de profesores de educación secundaria, nos preguntamos permanentemente por la forma como debemos orientar la enseñanza de la geometría, de tal suerte que ésta contribuya a la formación de profesores competentes para poner en marcha las ideas expuestas en los lineamientos curriculares y para enfrentar las exigencias del contexto matemático formal de su carrera universitaria. La manera habitual de exponer el contenido matemático en los cursos de nivel universitario, a partir de una aproximación axiomática deductiva que presenta a los estudiantes el contenido matemático como un producto acabado ha sido cuestionada por no dejar espacios para que ellos puedan crear, descubrir, conjeturar y participar en la producción significativa de enunciados de tipo geométrico que puedan organizarse en sistemas axiomáticos (de Villiers, 1986; Hanna, 1990; Alsina, 2001; Mason, 2001; Herbst, 2002). Conscientes de este hecho, desde hace algunos años hemos venido implementando una innovación curricular en un curso de geometría plana del programa de formación inicial de profesores de matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional (Bogotá, Colombia), en la que proponemos una aproximación metodológica diferente a la habitual, sin descuidar el formalismo y rigor propios de dicho nivel universitario. Las sucesivas versiones de la implementación de la innovación nos han aportado indicios de que tal propuesta puede dar mejores resultados que la forma tradicional de enseñar a demostrar. Sin embargo, no hemos llevado a cabo un estudio sistemático del aprendizaje que se lleva a cabo para poder divulgar los resultados, someterlos a la crítica de la comunidad y eventualmente hacer un aporte a la didáctica de las matemáticas en ese ámbito.

Al analizar los trabajos de investigación acerca del tema, constatamos que la búsqueda de formas de enseñar a demostrar, que den cuenta de efectos positivos en el aprendizaje de los estudiantes es una preocupación vigente en la comunidad. Sin embargo, trabajos de tal naturaleza son muy pocos en Colombia, particularmente en el ámbito de la formación universitaria. Adicionalmente, encontramos sólo dos estudios fuera del país sobre la enseñanza y el aprendizaje de la demostración que hacen uso de la teoría de la práctica social de Wenger (1998), por lo que nos parece pertinente aportar elementos para aprovechar este marco teórico, que proviene de estudios antropológicos en didáctica de las matemáticas.

2.3.2 OBJETIVOS

La investigación que se expone en la presente tesis doctoral persigue el siguiente objetivo general:

Describir y analizar un caso de enseñanza y aprendizaje de la demostración en un curso universitario de geometría plana de un programa de formación de futuros profesores de matemáticas para la educación secundaria, en Bogotá (Colombia), en el que la conformación de una comunidad de práctica se usa como herramienta metodológica para promover el aprendizaje.

Como objetivos específicos nos proponemos:

- Articular la teoría de la práctica social con desarrollos en didáctica de la demostración para dar cuenta del aprendizaje de la demostración, de un grupo de estudiantes inscritos en un curso de geometría plana.
- Identificar las finalidades de participación de los estudiantes en la actividad demostrativa que se lleva a cabo en el curso de geometría plana, como parte del repertorio compartido de prácticas que dan significado a la demostración.
- Caracterizar la evolución de la participación de los estudiantes en las prácticas que se llevan a cabo en el curso de geometría plana, relacionadas con la actividad demostrativa.
- Evaluar si en el curso de geometría plana en donde se llevó a cabo la parte experimental de la investigación se vivió un proceso de constitución de una comunidad de práctica o no.

2.3.3. ETAPAS DEL ESTUDIO

El estudio se plantea siguiendo un diseño que se aproxima a un experimento de enseñanza. A continuación comentamos brevemente algunas etapas de éste, no necesariamente sucesivas, sino que se retroalimentan en el curso de la investigación.

Con la intención de fundamentar a través de la investigación la innovación que implementamos en el curso de geometría plana, llevamos a cabo una revisión de la literatura sobre la enseñanza y el aprendizaje de la demostración, revisión que sintetizamos en la sección 2.2.2 de este capítulo. Con ella obtuvimos elementos teóricos iniciales con los cuales comenzar a conceptualizar la demostración y la actividad demostrativa y atendimos orientaciones prácticas para diseñar el curso e ir haciendo reformas a éste en las sucesivas implementaciones.

Paralelamente, buscamos una perspectiva para dar cuenta del aprendizaje de la demostración que fuera coherente con la conceptualización acerca de la naturaleza de la demostración. Encontramos apropiada la teoría propuesta por Lave y Wenger (1991) acerca del aprendizaje como participación y los avances realizados por Wenger (1998) sobre la teoría de la práctica social. Desde nuestro punto de vista, la mirada sociocultural al aprendizaje de la demostración, dentro de la perspectiva de estos autores, llena un vacío en didáctica de las matemáticas y el presente estudio se constituye en una posibilidad de evaluar qué tan viable es aprovecharla en la investigación en este campo.

Durante un semestre académico preparamos la enseñanza experimental específica para recolectar los datos de la presente investigación, aprovechando la información que teníamos como producto de las sucesivas implementaciones de la innovación y la que íbamos recopilando de manera informal, en una de las implementaciones de la innovación que estábamos ensayando en ese semestre. Planeamos las tareas centrales y los problemas que se propondrían a los estudiantes, los recursos informáticos que se usarían, los dispositivos didácticos que la profesora gestionaría y cómo se articularían las clases con reuniones del equipo responsable de la innovación, uno de cuyos integrantes es la profesora que impartió el curso.

En el semestre siguiente llevamos a cabo la enseñanza experimental. Los datos obtenidos durante la implementación de la primera unidad temática del curso nos sirvieron para hacer el primer ejercicio de análisis de la enseñanza y el aprendizaje de la demostración, utilizando la teoría de Wenger, en combinación con aspectos de la perspectiva emergente sugeridos por Martin et al. (2005), Blanton y Stylianou (2003), Yackel et al. (1996) y Goos (2002). Construimos unas categorías preliminares de análisis que luego ampliamos, organizamos y delimitamos a la luz de la búsqueda de indicadores en los datos. Los resultados de esa experiencia, (Camargo, 2007) nos ayudaron en el diseño investigativo específico de la tesis doctoral y nos impulsaron a adoptar la teoría de práctica social de Wenger (1998) como marco de referencia principal.

Finalmente nos concentramos en el análisis de los datos de la enseñanza experimental completa, para llevar a cabo el análisis retrospectivo reportado en la presente disertación. Debido a la gran cantidad de información acumulada tuvimos que centrar la mirada en el aprendizaje de los estudiantes, a pesar de reconocer la importancia del papel del profesor en la enseñanza experimental y de referirnos a éste en muchas oportunidades. Esperamos hacer un estudio detallado centrado en el papel del profesor en otra oportunidad.

CAPÍTULO 3

MARCO TEÓRICO

Este capítulo tiene por objetivo ubicar al lector de la presente memoria investigativa en nuestra perspectiva conceptual sobre la demostración y su aprendizaje, reconociendo de antemano que nuestra posición es sólo una de varias maneras de imaginar este importante aspecto de las matemáticas en el ámbito educativo.

Primero, describimos nuestra postura sobre lo que entendemos por demostración, desde el punto de vista sociocultural, y presentamos cuáles son las relaciones que establecemos entre actividades matemáticas, tales como explorar, conjeturar, definir, argumentar, demostrar y sistematizar, que conforman el repertorio de prácticas del constructo que hemos denominado 'actividad demostrativa'. Para ello, nos basamos en desarrollos investigativos en didáctica de las matemáticas acerca de la demostración. La perspectiva que describimos sobre la demostración nos sirvió de referencia para organizar los elementos que componen la práctica de la demostración en la enseñanza experimental implementada en un curso universitario de geometría plana, práctica que es la fuente de datos de nuestro estudio.

Segundo, exponemos un marco interpretativo sobre el aprendizaje de la demostración, a partir de la teoría de la práctica social de Wenger (1998). Esta perspectiva es coherente con nuestra mirada sociocultural sobre la demostración y nos sirve para proponer las nociones centrales que componen el encuadre analítico de nuestra investigación con el cual damos cuenta del aprendizaje de la demostración de los estudiantes que cursaron la materia. Desde nuestro punto de vista, la teoría de la práctica social contribuye a destacar aspectos importantes del aprendizaje que otras teorías no consideran prioritarios, como la participación periférica legítima en prácticas propias de la comunidad.

3.1. LA DEMOSTRACIÓN MATEMÁTICA

En nuestra investigación hacemos referencia a la demostración en el ámbito de la educación matemática, en relación a un proceso y a un producto y en ese sentido apuntamos a dos polos, no necesariamente independientes, señalados por Arsac (2007). Al hacer la revisión bibliográfica, se encuentra que los autores de los diferentes estudios investigativos usan el término ‘demostración’ en uno u otro sentido, generalmente sin hacer distinciones. Nosotros vamos a usar la expresión ‘demostración matemática’, cuando nos refiramos al producto y ‘actividad demostrativa’ cuando estemos hablando del proceso. En esta sección aludimos específicamente al producto.

Vemos la demostración matemática como un discurso que respeta ciertas reglas, fundamentado en un sistema teórico de referencia, mediante el cual se da validez a un enunciado al interior del sistema. Para ello, se establece una cadena deductiva de afirmaciones que lleva del antecedente del enunciado (de tipo condicional) al consecuente de éste. Como lo señalan diversos investigadores (Polya, 1957; Simon, 1996; Healy y Hoyles, 1998; Arzarello et al., 1998; Mariotti y Maracci, 1999; Hanna, 2000; Herbst, 2002; Olivero, 2002; Mariotti, 2006), mediante discursos deductivos los profesionales en matemáticas organizan los contenidos de dominios particulares para sistematizar y comunicar los resultados de sus investigaciones. Es también es la forma usual de presentar las demostraciones en los textos escolares y universitarios. Aunque la demostración no ha gozado del mismo grado de prominencia en diferentes periodos y contextos, y aunque los estándares de rigor han cambiado en el tiempo, ésta yace en el corazón de las matemáticas (Lin et al., 2009).

Coincidimos con la caracterización que hace Stylianides (2007) de la demostración para el contexto educativo quien señala tres particularidades centrales de las cadenas deductivas que componen una demostración matemática: (i) se usan y se explicitan claramente enunciados que se han aceptado previamente como verdaderos por la comunidad a quien se dirige la demostración; (ii) se emplean formas de razonamiento que son válidas, conocidas y al alcance de dicha comunidad; (iii) se usan formas de expresión que son aceptadas, apropiadas y al alcance conceptual de los miembros de la comunidad. Desde ese punto de vista, los principios y reglas de construcción que rigen la producción del discurso son establecidos por grupos humanos específicos y por el contexto en donde se lleva a cabo la actividad demostrativa. Por eso, concordamos con varios investigadores al señalar que la demostración matemática, aún vista como producto, es de naturaleza sociocultural y está condicionada por el contexto en donde se lleva a cabo y por el dominio específico al interior del cual se está actuando (Alibert y Thomas, 1991; Clements y Battista, 1992; Hoyles, 1997; Radford, 1994; Godino y Recio, 2001; Mariotti, 2006; Stylianides, 2007).

Además de cumplir la función de validar enunciados, consideramos, como lo señalan Hanna (1990) y Hanna et al. (2008), que la demostración para los matemáticos es también una forma de lograr la comprensión matemática, específicamente con relación a la certeza de ciertos enunciados. En ese sentido, diferenciamos la demostración matemática de la demostración formal, vista esta última como un cálculo lógico desprovisto de significados (Douek, 2007) y admitimos que en la práctica matemática se recurre a los significados de los enunciados que intervienen en una demostración. Según Hanna (1990), esta doble función, validación – comprensión, es inevitable y tiene implicaciones para la didáctica ya que aunque un enunciado es válido una vez es demostrado, no necesariamente es visto como cierto desde el punto de vista psicológico o puede resultar admisible sólo en cierto grado de aceptación. Esto no pasa en la práctica de los matemáticos profesionales, para quienes el enlace entre validez y certeza está implícito y no ven la necesidad de explicitar su relación. Pero en el ámbito educativo, en la práctica de quienes se enfrentan a la tarea de producir demostraciones por primera vez, Mariotti (1997) señala que es un grave error subvalorar la complejidad del sistema de relaciones que ligan la certeza de un enunciado, el grado de aceptación por parte de los estudiantes y su validez al interior de una teoría.

Un objetivo primordial de la educación matemática es establecer un sistema coherente de relaciones entre las ideas de certeza y validez. Desde nuestro punto de vista, esto puede lograrse si la producción de una demostración matemática se enmarca dentro de un conjunto de actividades involucradas en lo que hemos denominado ‘actividad demostrativa’, pues el hecho de que los estudiantes tengan la oportunidad de producir las conjeturas que se justifican, hace que ellos tengan un contexto de significado del cual pueden valerse para la producción de la demostración. A continuación haremos referencia a tal constructo.

3.2. LA ACTIVIDAD DEMOSTRATIVA

Definimos ‘actividad demostrativa’ como el conjunto de actividades que apoyan e impulsan la producción de una demostración matemática. Generalmente éstas comienzan con la exploración de una situación para buscar regularidades, pasan por la formulación de conjeturas y la respectiva aceptación del hecho geométrico enunciado, posteriormente se concentran en la búsqueda de ideas o argumentos que conforman la demostración del enunciado y la organización de dichas ideas en un discurso comunicable según reglas establecidas por el grupo humano al que se dirige y terminan con la inclusión del enunciado al interior de un sistema teórico. Esta conceptualización es sugerida por diversos investigadores, particularmente por aquellos que reconocen el carácter social de la demostración e impulsan su aprendizaje en cualquier nivel educativo (Boero et al., 1996; Garuti et al., 1996; Mariotti et al., 1997; Hanna, 2000, 2008; Marrades y Gutiérrez, 2000; Olivero, 2002; Blanton y Stylianou, 2002; Mariotti, 2006; Arzarello, 2007; Stylianides, 2007).

Hay una estrecha cercanía entre nuestro constructo 'actividad demostrativa' y aquello que Olivero (2002) denomina *proving process*, excepto por dos asuntos: uno, Olivero no considera la actividad de sistematizar, quizá porque su trabajo se desarrolla en el contexto de la enseñanza secundaria; dos, nosotros involucramos la actividad de definir por el papel que tienen tanto la formulación de definiciones como su uso en la construcción de eslabones para las cadenas deductiva. Dada la singularidad de la enseñanza experimental que llevamos a cabo -en la que se invita a los estudiantes a construir colectivamente una porción de sistema axiomático-, seleccionar los objetos geométricos sobre los que versa el sistema, establecer qué definición se institucionaliza y usar dicha definición en las demostraciones son tareas que hacen parte esencial de la actividad demostrativa.

A continuación vamos a definir específicamente cada una de las actividades, estableciendo semejanzas o diferencias con las acepciones mencionadas en la revisión de la literatura y explicitando algunas relaciones entre ellas. Más adelante, cuando interpretamos dicha actividad a la luz de la teoría de la práctica social, proponemos connotaciones específicas de cada una en el marco de nuestro proyecto de investigación.

3.2.1. EXPLORAR

Con el término 'explorar' nos referimos a una actividad experimental, de carácter investigativo, relacionada con el uso de estrategias de tipo heurístico (Arzarello, et al., 2007) en busca de regularidades que se puedan generalizar o de propiedades aún no identificadas, en el curso de la resolución de un problema abierto (Arsac, 1978).

La exploración en geometría, fuente de significados de ideas susceptibles de organización en cadenas deductivas, generalmente se lleva a cabo sobre figuras dibujadas en papel y lápiz, construidas con instrumentos de trazo o realizadas mediante un programa informático de geometría dinámica. Como lo señalan Laborde (2003) y Mariotti (2007), las figuras geométricas están a medio camino entre los dibujos y los conceptos geométricos y por lo tanto se convierten en mediadores que favorecen las conexiones entre el conocimiento empírico, producto de nuestras experiencias espacio-temporales, con aspectos formales de la geometría. Las experiencias matemáticas, ligadas a las representaciones geométricas, constituyen una base intuitiva sólida para adquirir evidencias acerca de la certeza de propiedades relacionadas con la espacialidad y la forma, constituyéndose en soporte que invita a establecer su validez al interior de una teoría. Como indica Mariotti, (1997; 2005), desarrollar una geometría deductiva sin esta base intuitiva es arriesgarse a realizar una actividad carente de significado.

Usamos la expresión ‘exploración dinámica’, acuñada por Mariotti et al. (1997) para referirnos a aquellas exploraciones que se logran a partir de transformaciones continuas de las representaciones. Al respecto, una herramienta que ha sido considerada fundamental en la resolución de problemas, en el contexto de la geométrica dinámica, es precisamente la opción de ‘arrastre’ disponible en los programas, que favorece la visualización de un continuo de representaciones contribuyendo a la búsqueda de regularidades y a la identificación de invariantes (Arzarello et al., 1998; Olivero, 2002; Stylianides y Stylianides, 2005).

3.2.2. CONJETURAR

Con el término ‘conjeturar’ hacemos referencia a formular una hipótesis de trabajo o una suposición, llamada conjetura, basada en evidencias empíricas. Por ser resultado de una exploración, se puede tener un alto grado de certeza sobre aquello que se afirma, pero su validez o deducibilidad sólo puede asegurarse cuando se justifique mediante una demostración matemática (Mazur, 1997 en Olivero, 2002, p. 21; Hanna, 2000; Pedemonte, 2001; Arzarello et al., 2007).

Generalmente, una conjetura tiene implícitamente la forma si-entonces de un enunciado condicional, producto de un proceso de exploración (Boero et al., 1996). Sin embargo, como lo señalan Boero et al. (1996) el proceso de formular una conjetura de manera explícita no es sencillo para los estudiantes y muchas veces se requiere la guía del profesor para obtener formulaciones lingüísticas precisas en dónde se haga evidente la estructura condicional. No son muchos los estudios que se han centrado en este proceso y se tiende a creer ingenuamente que el paso de la exploración a la producción de la conjetura es casi automático. En la presente investigación damos cuenta de varias acciones en las que los estudiantes participan relacionadas con la producción de conjeturas susceptibles de ser demostradas, que permiten dar cuenta de la complejidad de dicho proceso y sugerir algunas recomendaciones didácticas.

3.2.3. DEFINIR

Usamos el término ‘definir’ para englobar dos actividades que cobran particular relevancia en nuestra enseñanza experimental, dado que los objetos geométricos con los que se construye colectivamente el sistema axiomático no están definidos de antemano: una, formular definiciones organizando un subconjunto arbitrario de propiedades necesarias y suficientes de un concepto del cual otras propiedades de éste pueden ser deducidas (Winicki-Landman y Leikin, 2000; de Villiers, 2004); dos, usar definiciones en la producción de cadenas deductivas. Investigadores como Freudenthal (1971), Furinghetti y Paola (2000) y de Villiers (2004) han señalado que definir en matemáticas va más allá de explicitar el significado de un concepto pues las definiciones juegan un papel importante en dar significado a la estructura de enunciados de la forma si-entonces y en la organización deductiva del conocimiento. Por eso, la escogencia de las propiedades que se incluyen en una definición no es una acción inocua en procura simplemente de una descripción económica, sino que determina el conjunto de propiedades del cual se pueden derivar otras propiedades del concepto y por lo tanto determinan la organización deductiva en la cual está inmerso.

3.2.4. ARGUMENTAR

Usamos el término ‘argumentar’ en dos sentidos, que se pueden reconocer por el contexto.

- Durante la exploración, formulación y socialización de una conjetura (en el curso de la resolución de un problema), el término ‘argumentar’ se refiere a esgrimir razones o puntos de vista en pro o en contra de una afirmación con el objeto de dar cuenta de la plausibilidad de un enunciado, establecer un cierto grado de certeza de éste y postularlo como candidato para hacer una demostración (Duval, 1991; Bartolini et al., 1997). Las razones o puntos de vista pueden ser manifestaciones verbales, visuales, numéricas o de cualquier índole (Duval, 1992). Una argumentación consiste de uno o más argumentos conectados coherentemente, pero no necesariamente deductivamente.

- En el proceso de creación de la demostración de una conjetura, el término ‘argumentar’ se refiere a esgrimir razones o puntos de vista, identificar enunciados o proponer referentes teóricos, en pro de una afirmación, con el objeto de buscar ideas que conformarán la demostración matemática del enunciado. (Douek, 2007). Una argumentación consiste en uno o más argumentos expresados informalmente, que se prevé pueden ser conectados deductivamente y donde el significado de los enunciados es crucial. En ese sentido, las proposiciones asumidas como conclusiones parciales compartidas, se reinterpretan continuamente y por eso suelen repetirse en el curso de la argumentación. Adicionalmente, coincidimos con Douek (2007) y disentimos de Duval (1992) al señalar que en la argumentación es innegable la existencia de referentes teóricos que sirven de soporte, aunque éstos permanezcan como telón de fondo y no se hagan explícitos. En la argumentación, así como en una demostración matemática propiamente dicha, el conjunto de referencias que quedan implícitas está determinado socialmente. Por ejemplo, en un grupo escolar de secundaria se puede esperar bastante detalle en las referencias que apoyan una argumentación o una demostración, pero entre matemáticos éstas pueden ser consideradas evidentes y como tal podría hacerse caso omiso de muchas de ellas.

Dado que el significado de las proposiciones en una argumentación es crucial, en cualquiera de las dos acepciones descritas previamente, la caracterización de éstas suele hacer referencia al papel que desempeñan de acuerdo al contenido. Nosotros adoptamos algunos términos de los componentes del modelo sugerido por Toulmin (2007) y con base en ellos analizamos la participación de los estudiantes en la práctica de argumentar. En la Tabla 3.1 presentamos las definiciones de los componentes que usamos en la investigación.

1.	Dato	Punto de partida, información que se aduce como base de la afirmación realizada.
2.	Regla, garantía o permiso de inferir	Principio o enunciado que permite realizar inferencias en lugar de agregar información adicional.
3.	Soporte	Respaldo de la garantía que le da autoridad y vigencia a ésta.
4.	Conclusión	Afirmación que se pretende defender.
5	Refutación	Condición de excepción u objeción.

Tabla 3.1: Definición de algunos componentes del modelo de Toulmin

Nuestra segunda acepción del término ‘argumentar’ establece restricciones al tipo de conexiones que se formulan entre las razones que se esgrimen en pro de una afirmación, pues se espera que la argumentación se identifique con el proceso de creación de una demostración, es decir, con el esbozo de ésta. No usamos el término ‘demostrar’ pues éste lo reservamos para referirnos al proceso de producción de un texto comunicable, es decir, al aspecto producto de la demostración. Pero, en sentido estricto, la argumentación de tipo deductivo incluye a la demostración, y así lo considera Douek (2007). Nosotros empleamos los términos ‘justificar’ o ‘justificación’ para referirnos a la argumentación deductiva o a la demostración cuando la exposición que hacemos no requiere una distinción específica entre ellas.

3.2.5. DEMOSTRAR

Usamos el término ‘demostrar’, en relación al aspecto producto de la demostración, cuando la actividad consiste en organizar enunciados matemáticos conocidos, y que se asumen como válidos, en una cadena deductiva que lleva hasta un hecho que quiere validarse, con el objeto de establecer y comunicar la deducibilidad de un enunciado al interior de una teoría. (Stylianides, 2007; Healy y Hoyles, 1998). La validez del enunciado se logra a partir del establecimiento de relaciones deductivas de tal hecho con los previamente admitidos como válidos dentro de la teoría.

Al proponer una demostración, el significado de las proposiciones deja de ser el aspecto crucial y el estatus operativo (Duval, 1991) cobra especial relevancia. En ese sentido, las proposiciones intervienen en la cadena deductiva según el rol que juegan en las inferencias que se hacen. Por ejemplo, la conclusión de un paso es la condición inicial en el siguiente (o siguientes pasos) y en ese sentido es ‘reciclada’ como proposición inicial de un nuevo paso varias veces, sin necesidad de repetirla. En cambio, los enunciados que dan soporte a los pasos de deducción suelen ser explícitos porque son un elemento clave en la cadena de transmisión de la validez del enunciado que se demuestra. La validez de un enunciado se deriva de ser una conclusión necesaria en un encadenamiento deductivo y no de lo que éste afirma (Douek, 2007).

3.2.6. SISTEMATIZAR

Con el término ‘sistematizar’ nos referimos a la acción de organizar enunciados dados como ciertos, o que se han demostrado, de acuerdo a un conjunto de postulados, definiciones y teoremas con el objeto de construir una teoría (Mariotti, 2007).

La necesidad de considerar una teoría de referencia, al interior de la cual se encuentran los enunciados que permiten lograr el encadenamiento deductivo que da lugar a una demostración, es un aspecto destacado por Mariotti (2007). De hecho, ella define ‘teorema’ como el conjunto conformado por un enunciado, su demostración y la teoría de referencia de la cual el enunciado puede ser deducido, para enfatizar en que un enunciado se valida solamente cuando entra a formar parte de un sistema teórico con completa autonomía de cualquier verificación o argumentación a nivel empírico (Mariotti et al., 1997).

Sistematizar es una acción esencial de la actividad demostrativa y, por su puesto, de la entrada al mundo teórico de la geometría. Según Mariotti (2007), la complejidad didáctica de la enseñanza de la geometría tiene que ver con la necesidad de desarrollar una interacción productiva entre los aspectos figurales y conceptuales de ésta. La interacción se logra mediante la construcción de sistemas teóricos de propiedades geométricas, coherentemente relacionadas, en donde un conjunto de presupuestos básicos se va ampliando a medida que se introducen nuevos enunciados, los teoremas, que se relacionan a los primeros mediante una demostración (Mariotti, 2007). En nuestra investigación nos referimos a ‘sistema teórico’ o a ‘sistema axiomático’ indistintamente, pues aunque no todo sistema teórico corresponde a un sistema axiomático, generalmente en el campo de la geometría esto es así.

3.2.7. VÍNCULOS ENTRE LAS ACCIONES QUE COMPONEN LA ACTIVIDAD DEMOSTRATIVA

Con el constructo ‘actividad demostrativa’, además de diferenciar los aspectos proceso y producto de la demostración, pretendemos reconocer los vínculos, señalados por diferentes autores entre las acciones matemáticas de obtener y verificar resultados mediante la experimentación y las acciones que llevan a la organización deductiva de dichos resultados (de Villiers, 1986; Boero et al., 1996; Pedemonte, 2000; Mariotti, 1997, 2005, 2007; Olivero, 2002; Douek, 2007). Identificamos en el devenir de las matemáticas fases de invención creadora, usualmente previas a la producción de demostraciones, en las cuales a partir del estudio de los esquemas de invención se comprenden los procesos demostrativos consecutivos. Para poner un ejemplo, Mariotti (1997) se refiere a dicho vínculo en la presentación hecha por Euclides en su libro Los Elementos, en donde los métodos de construcción que presenta el autor van precedidos de esquemas de ‘invención’ que Euclides denominó ‘análisis’. Incluso, según Enriques (1920, citado por Mariotti, 2005), en la elección de los elementos fundamentales de la geometría euclidiana se escogieron las entidades más simples respecto a la intuición psicológica, como las ideas de punto, recta y plano y algunos principios, a manera de postulados, comprensibles por sí mismos de acuerdo a las imágenes espaciales que se forman en nuestra mente. Las demás propiedades geométricas son deducciones de las anteriores. Por tal razón, los conceptos y propiedades de la geometría euclidiana conservan desde su mismo origen una propiedad común, la espacialidad. Desde ese punto de vista, la experiencia concreta funda intuiciones correctas y facilita el paso de la geometría de la intuición a la geometría de la deducción.

Algunos investigadores se refieren a una necesaria ruptura en la forma de pensar entre la geometría intuitiva y la geometría deductiva (Balacheff, 1988; Duval, 1991) Según ellos, en el segundo caso, el análisis de las relaciones deductivas entre los enunciados se vuelve el modo dominante de pensamiento y ya no las interpretaciones intuitivas que inicialmente pueden haber sido adheridas a ellas. Otros investigadores, con quienes estamos de acuerdo (Boero et al., 1996; Mariotti, 1997, 2005, 2006; Garutti et al., 2008; Douek, 2009), a pesar de reconocer las diferencias, piensan que puede darse una evolución continua, aunque guiada e influenciada por requerimientos de tipo social, en la que se aprovechan las intuiciones y se esgrimen argumentos de plausibilidad en el momento de la producción de conjeturas, que luego se utilizan en la argumentación que se pone en juego cuando se trata de establecer la deducibilidad de éstas y en la posterior producción de la demostración.

Para Mariotti, la vía de acceso a la demostración a partir de la geometría intuitiva ha sido parte de la naturaleza de la actividad matemática en ciertos dominios y se hace evidente, por ejemplo, en el libro Los Elementos de Euclides. La estructura deductiva subyacente está ligada a aspectos relevantes de la cultura matemática como la necesidad de comprender, asimilar y aceptar el significado de los conceptos cuyas propiedades se analizan. Se habla entonces de las justificaciones hechas en el libro de Euclides como de 'argumentos deductivos'; éstos son un medio para validar enunciados al relacionar nuevas propiedades a hechos indubitables, pero a la vez necesarios para comprender dichos enunciados. Para Mariotti, la organización del conocimiento se vuelve funcional a la comprensión y por lo tanto ligada a las limitaciones de aceptabilidad y validación compartidas en el seno de una comunidad.

De acuerdo a las ideas mencionadas en los párrafos precedentes, un hecho crucial en el aprendizaje de la demostración es la articulación entre la fase exploratoria y la subsiguiente fase de justificación en la cuál los elementos descubiertos informalmente son reorganizados en enunciados válidos. Desde el punto de vista de Hanna (2000):

> Exploración y demostración han sido claramente complementarias. […] La exploración conduce a descubrir, mientras la demostración conduce a confirmar. La exploración de un problema puede conducir a que uno capte su estructura y ramificaciones, pero no proporciona una comprensión explícita del vínculo entre ellas. Es una demostración, haciendo una derivación a partir de premisas, la que establece firmemente la conclusión (p. 30).

En síntesis, desde nuestro punto de vista, a pesar de las diferencias innegables entre argumentar para dar cuenta de la plausibilidad de una conjetura o para establecer su deducibilidad, parece que los estudiantes pueden producir demostraciones usando razones fundadas en el proceso que lleva a la producción de la conjetura (Boero, et al., 1996), pero hace falta una intervención didáctica explícita para sacar provecho de una acción en función de la otra. Este planteamiento es central en nuestra enseñanza experimental donde procuramos que la mayoría de teoremas relevantes del contenido geométrico del curso de geometría plana sean conjeturas resultado de la resolución de problemas, se fomenta la discusión de éstas para evaluarlas y reescribirlas en forma apropiada y aceptada por todo el grupo y luego se favorece un intercambio comunicativo con miras a argumentar deductivamente a su favor y producir la demostración.

3.3. AFINIDAD ENTRE EL MARCO CONCEPTUAL SOBRE LA DEMOSTRACIÓN Y LA TEORÍA DE LA PRÁCTICA SOCIAL

En la definición que propusimos para la demostración matemática en el ámbito educativo, así como en la caracterización hecha de la ‘actividad demostrativa’ hay un reconocimiento al papel que desempeña el grupo social de una clase en la aceptación de los enunciados de los cuales se parte para validar otros, en las formas de argumentar y demostrar y en las formas de expresión usadas en la producción de demostraciones. Vemos la clase como una comunidad conformada por el profesor, experto inicial de la comunidad, y los estudiantes, quienes son guiados hacia una práctica de referencia que tipifica el quehacer de los profesionales en matemáticas.

Este reconocimiento apoya nuestra escogencia de la teoría de la práctica social de Wenger (1998) como marco teórico para referirnos al aprendizaje de la demostración por varias razones. En primer lugar, queremos centrar la atención en un grupo de estudiantes -y no en el aprendizaje individual- vista la clase como una comunidad en la que se realiza una práctica colectiva; y precisamente la unidad de análisis que propone Wenger es la ‘comunidad de práctica’. Con ello no pretendemos restar importancia al aprendizaje individual. Simplemente, creemos que es tiempo, como lo señala Lampert (1992, citado en Stylianides, 2007), de prestar atención al conocimiento que puede ser considerado como compartido y usado públicamente por un grupo de manera confortable, al interior de una clase. Segundo, pretendemos dar cuenta del proceso de acercamiento de nuestros estudiantes a una actividad demostrativa cercana a la de matemáticos profesionales; y Wenger plantea que las comunidades centran su acción en prácticas sociales y culturales de referencia hacia donde los expertos guían a los novatos. Tercero, nos referimos a la dualidad proceso-producto de la demostración; y Wenger define el aprendizaje como una dualidad participación-materialización. Cuarto, queremos dar cuenta de las finalidades de participación de nuestros estudiantes en la 'actividad demostrativa' que se lleva a cabo en el curso de geometría plana; y Wenger se refiere al repertorio de prácticas compartidas por los miembros de una comunidad. En la Tabla 3.2 correlacionamos los dos marcos conceptuales en los que nos movemos.

La demostración en Educación Matemática	El aprendizaje en la teoría de la práctica social de Wenger
Naturaleza social de la demostración en tanto práctica regulada por la interacción social del colectivo de personas en donde se realiza.	Unidad de análisis: comunidad de práctica.
En el ámbito educativo los estudiantes deben llevar a cabo acciones similares a aquellas que realizan los matemáticos profesionales cuando justifican sus afirmaciones.	Existencia de una práctica social de referencia.
Dualidad proceso – producto.	Dualidad participación – materialización.
Actividad demostrativa: explorar, conjeturar, definir, argumentar, demostrar y sistematizar. Los enunciados, formas de razonar y formas de expresión deben ser aceptados como verdaderos, válidos o pertinentes y estar al alcance de la comunidad de la clase.	Repertorio de prácticas compartidas por los miembros de la comunidad: actividades, rutinas, acciones, lenguajes, símbolos, expresiones.

Tabla 3.2: Correlación de marcos teóricos

Una vez establecidas las definiciones de las principales actividades que involucramos en la actividad demostrativa, tenemos el reto de construir un marco interpretativo para el aprendizaje de la demostración en donde ellas tengan cabida, usando la teoría de la práctica social de Wenger (1998). Nuestro principal interés es dar relevancia a la dimensión social de la demostración, mostrando una faceta de dichas actividades como conjunto de un repertorio de prácticas compartidas en el seno de una comunidad en donde se aprende a demostrar.

Adicionalmente, la teoría de la práctica social sugerida por Wenger (1998) nos sirve de marco interpretativo para analizar el aprendizaje que tiene lugar en el curso universitario de geometría plana en tanto éste tiene un diseño que promueve la interacción entre los estudiantes y la construcción colectiva de conocimiento. Metodológicamente nos permite explorar el proceso de aprendizaje de un grupo de estudiantes que conforman una de las cohortes del curso, basándonos en una visión sociocultural. Así, caracterizamos aspectos que han sido dejados de lado o desestimados por perspectivas psicológicas tradicionales que se han centrado en el desarrollo individual de los estudiantes.

Al relacionar la 'actividad demostrativa' con un repertorio de prácticas compartidas en donde los estudiantes avanzan en la participación nos distanciamos de las investigaciones de Clark (2005) y Hemmi (2006) quienes también usan la teoría de la práctica social en sus trabajos acerca de la demostración. Como señalamos en la revisión de la literatura Clark (2005) emplea el concepto 'empresa conjunta' de la teoría de la práctica social para caracterizar la demostración como la empresa definida por los estudiantes a lo largo de un curso universitario que busca proporcionar una fundamentación matemática inicial no necesariamente ligada a la demostración en geometría. Hemmi (2006) concibe la demostración como un 'artefacto cultural' presente en el aprendizaje matemático de estudiantes universitarios a lo largo de su carrera.

En nuestra investigación buscamos indicadores de la participación de los estudiantes en la actividad demostrativa que se lleva a cabo en el curso. En tanto podemos documentar que éste es un repertorio compartido y que evoluciona hacia una práctica matemática legítima, gracias al compromiso mutuo de los participantes de la clase, tenemos elementos para afirmar que la emergencia de una comunidad de práctica de clase en el curso de geometría plana favorece el aprendizaje de la demostración. A continuación vamos a precisar cómo usamos algunos conceptos de la teoría de la práctica social de Wenger (1998), dándoles cierta especificidad en el dominio de la actividad demostrativa.

3.4. EL APRENDIZAJE DE LA DEMOSTRACIÓN DESDE LA TEORÍA DE LA PRÁCTICA SOCIAL

Wenger (1998) describe los componentes de su teoría profundamente interrelacionados y definidos unos a partir de otros de tal forma que no es tarea fácil usarlos como marco analítico tal como los describe el autor. Este hecho nos lleva a tomar la decisión de proponer un esquema de relaciones entre los componentes (Figura 3.1), procurando no tergiversar la teoría.

Partimos del componente ‘comunidad’, para referirnos a la noción de comunidad de práctica, al interior de la cuál se desarrolla una ‘práctica’ con el objeto de llevar a cabo una ‘empresa conjunta’. En el devenir de dicha práctica sucede una permanente ‘negociación de significados’, gracias a procesos de ‘participación’ y ‘materialización’ en un ‘repertorio compartido’ de experiencias que produce ‘identidades de participación’ diferenciadas, según el ‘compromiso mutuo’ asumido por los participantes. Vamos a referirnos a cada uno de estos aspectos, tal como es entendido en la presente investigación.

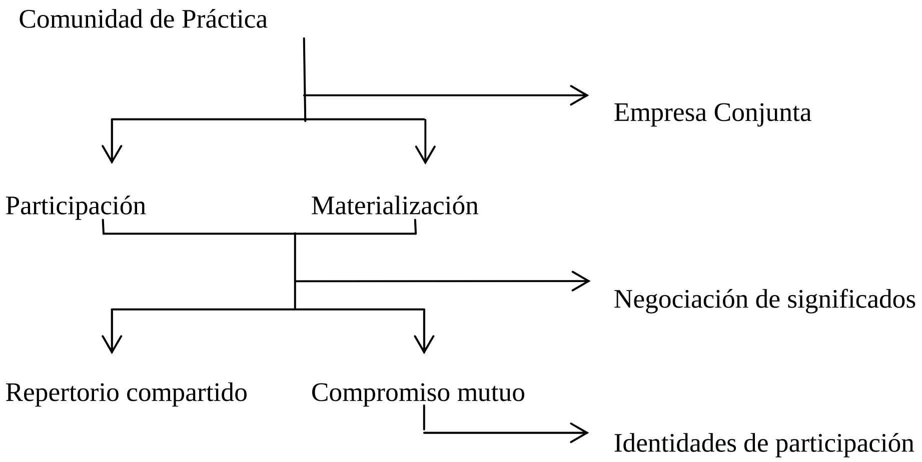


Figura 3.1: Esquema de relaciones entre los componentes de la teoría de Wenger

3.4.1. COMUNIDAD DE PRÁCTICA DE CLASE

En nuestro proyecto de investigación tenemos el propósito de caracterizar un curso universitario de geometría plana, en donde llevamos a cabo la enseñanza experimental, como una comunidad de práctica de clase. Dado que el diseño y el desarrollo del curso se hacen modificando el estilo usual de trabajo en un curso de ese nivel, en busca de la participación de los estudiantes en la actividad demostrativa, parece pertinente suponer el surgimiento de una comunidad de práctica al interior del escenario educativo institucional. Sin embargo, dado que la naturaleza de una clase es claramente diferente a la naturaleza de las comunidades que sirvieron de base a Lave y Wenger (1991) para la construcción de la teoría, consideramos más apropiado emplear el término acuñado por Clark (2005), ‘comunidad de práctica de clase’ y caracterizar a qué nos referimos con éste.

En primer lugar, una ‘comunidad de práctica de clase’ es una configuración social en donde el profesor y los estudiantes llevan a cabo una empresa de su interés. A través de la participación y el deseo de sacar adelante la empresa ocurre el aprendizaje de los estudiantes como un efecto de la práctica. Aunque el objetivo principal de los estudiantes es aprender y el del profesor es lograr que sus estudiantes aprendan, es posible proponer a los estudiantes la consecución de una empresa conjunta, diferente a la de aprender, y organizar la clase en función de ésta, buscando con ello hacer partícipes a los estudiantes de la definición de dicha empresa. En ese sentido, aunque los estudiantes no se agrupan inicialmente motivados por contribuir en una empresa que se les propone, es posible que terminen involucrándose en sacarla adelante.

Por ejemplo, en nuestra enseñanza experimental, en el marco institucional del currículo del programa de licenciatura en matemáticas la profesora redefine la meta del curso Geometría Plana invitando a los estudiantes a hacer parte activa de la construcción de una porción de un sistema axiomático. Veamos cómo la profesora introduce este propósito el primer día de clase:

P: El propósito del curso dice es iniciar la construcción de un sistema axiomático de geometría euclidiana plana. **[P1:10-10].**

P: Nosotros vamos a comenzar a armar un sistema axiomático. Dentro de este sistema tenemos varios elementos como los conceptos, o sea las definiciones, otros son postulados, otros son teoremas y también las reglas que vamos a usar para demostrar o para convencer a los demás. Vamos a tener ciertas reglas muy estrictas que son las que nosotros tenemos que seguir. **[P1:17-17].**

Ella no define la meta del curso en función del aprendizaje sino del logro de una empresa. En ese momento, los estudiantes no saben qué es un 'sistema axiomático de geometría euclidiana plana', ni la profesora intenta explicarlo; ella espera que entiendan su significado a medida que participan de la construcción de éste. Sin embargo, la declaración de intenciones no es garantía de éxito. Para poder afirmar que el curso universitario de geometría plana se constituye en una comunidad de práctica de clase debemos mostrar indicios de la construcción colectiva de la empresa conjunta y de como profesora y estudiantes avanzan en el logro de ella.

En segundo lugar, incluimos como miembros de una comunidad de práctica de clase al profesor y a aquellos estudiantes que participan en las actividades que se proponen y evidencian un compromiso abierto por sacar adelante la empresa sugerida. Dado que la agrupación de los miembros de una clase de matemáticas no es voluntaria y motivada por el interés en participar de una empresa sino por la organización curricular propia de una institución educativa optamos por buscar indicadores de la constitución de ésta en el tipo de participación y no en la razón inicial por la que las personas se agrupan. En nuestra enseñanza experimental, dado que no hubo un estudiante marcadamente disidente que nos permitiera catalogarlo como 'externo' a la comunidad incluimos en ella a la profesora y a todos los estudiantes del curso de geometría, aunque este no es necesariamente el caso más usual.

En tercer lugar, en una comunidad de práctica de clase los estudiantes tienen la posibilidad de moverse desde una posición de novatos hacia la posición de expertos gracias a las relaciones democráticas que intenta establecer el profesor. Éste propende por aprovechar la relación asimétrica que sostiene con sus estudiantes para disminuir el efecto limitante de la estructura binaria de poder en una clase -en donde el profesor tiene la autoridad de la calificación y la participación de los estudiantes puede estar motivada por temor a obtener malas calificaciones y no por un interés genuino.

Por ejemplo, en nuestro experimento de enseñanza, la profesora promueve el desarrollo colectivo de ideas de los estudiantes sobre las que eventualmente ella misma no ha pensado, lo que la pone, en ocasiones, al mismo nivel de conocimientos de algunos estudiantes en la solución de algún asunto. En otras oportunidades, algún estudiante asume una tarea como propia y adopta el liderazgo de ella, haciendo que la profesora se supedite a la organización que éste promueve. En la medida en que estas situaciones, u otras similares, no son esporádicas sino elementos característicos de la interacción entre la profesora y los estudiantes, se puede afirmar que las relaciones de poder se transforman y hay indicios de la conformación de una comunidad de práctica de clase.

Para ilustrar este tipo de eventos, veamos un fragmento de una interacción. Ocurre cuando la clase está buscando una vía para demostrar que el punto *D* -de la altura *CD* correspondiente al lado *AB* del triángulo obtusángulo *ABC* que conforma, junto con el lado *BC* el ángulo obtuso $\angle B$-, no pertenece al lado *AB* (Figura 3.2 (a)). Leopoldo sugiere suponer que no se tiene la interestancia *A-B-D* lo que lleva al grupo a analizar las posibles opciones para descartarlas: *A-D-B, D-A-B, A=D, B=D*. Comienzan suponiendo *A-D-B* (Figura 3.2(b)). En la interacción Aníbal propone la idea principal y la profesora únicamente contribuye a su desarrollo, a medida que va interpretando lo que el estudiante dice.

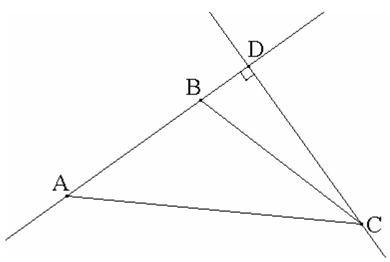


Figura 3.2 (a)

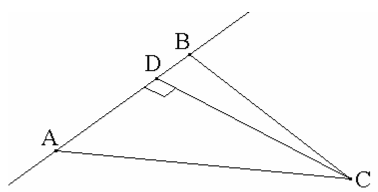


Figura 3.2 (b)

79	Aníbal:	Lo que pasa es que ese ángulo [$\angle ADC$] es recto y ese ángulo recto sería externo al triángulo *DBC*.
80	P:	O sea que Aníbal sugiere que miremos el triángulo *BDC* y que el ángulo ¿qué?
81	Aníbal:	Y que el ángulo *ADC* es externo.
82	P:	Es externo y eso ¿qué consecuencia trae?
83	Aníbal:	Pues que como ese ángulo es externo, entonces tiene que ser mayor que el ángulo/[1]
84	P:	/entonces la medida del ángulo/
85	Aníbal:	/*ADC* es mayor que la medida del ángulo *DBC/*
86	P:	/y ahí llegamos a una contradicción porque éste [$\angle B$] dijimos que sería mayor que… es obtuso… y ya, bueno, es escribirlo así. Entonces dijimos: este caso [*A-D-B*] no puede suceder.

[P90:79-86]

En síntesis, asumimos la posición sugerida por Boylan (2005) según la cuál una clase de matemáticas puede llegar a constituirse en una comunidad de práctica, pero no todas las clases de matemáticas lo son. Es decir, deben hacerse esfuerzos explícitos por lograrlo, particularmente referidos a la delegación de responsabilidades a los alumnos con relación a las prácticas matemáticas y sociales al interior de la clase, de tal suerte que pueda llevarse a cabo una trayectoria de participación incluyente de los estudiantes.

La emergencia de comunidades de práctica de clase es fundamental en el aprendizaje de los estudiantes puesto que el hacer matemáticas es una actividad social, como lo señala Schoenfeld (1992). En ese sentido, el aprendizaje está culturalmente determinado por una comunidad local de individuos y es estimulado cuando ellos se comprometen en el proceso de hacer matemáticas. Podemos complementar esta idea mencionando, como Wenger (1998) lo indica, que un buen funcionamiento de una comunidad de práctica es un contexto privilegiado para la construcción de conocimiento debido a que vivir experiencias de compromiso mutuo alrededor de una empresa conjunta –que implican un fuerte lazo de competencia conjunta a la vez que un profundo respeto por las experiencias particulares- es ideal para estimular la generación de nuevas ideas.

[1] Usamos el signo / para señalar que la intervención es interrumpida por el siguiente interlocutor.

3.4.2. APRENDER A DEMOSTRAR COMO PARTICIPACIÓN Y MATERIALIZACIÓN

Vamos a asumir el aprendizaje de la demostración en el sentido señalado por Wenger (1998) como sinónimo de participación en la actividad demostrativa que se despliega en el curso de geometría plana con la meta de construir colectivamente, profesora y estudiantes, una porción de un sistema axiomático de geometría euclidiana plana. En articulación con este proceso, el producto de la actividad demostrativa se materializa en un conjunto de teoremas (Mariotti et al., 1997), es decir enunciados con su correspondiente demostración matemática enmarcada dentro de un sistema axiomático de referencia. A medida que los teoremas se incorporan al sistema éste se amplía para abarcar no sólo postulados, definiciones y teoremas iniciales, sino nuevos enunciados que se incluyen a medida en que se institucionalizan.

La participación en la actividad demostrativa conforma con la producción de demostraciones, o materialización de la actividad, una dualidad que da significado a la práctica que se lleva a cabo en el curso, concretando en productos observables la experiencia realizada. El resultado de la práctica en el curso universitario de geometría plana es un conjunto de postulados, definiciones y teoremas escritos de acuerdo a las normas establecidas en la clase[2]. En ese sentido decimos que la dualidad participación – materialización es análoga a la dualidad entre los polos proceso – producto de la demostración (Arsac, 2007). Ambas dan sentido a la actividad. Mediante la participación, la rigidez de la forma de una demostración matemática y el propósito de ésta cobran significado para los estudiantes. Mediante la materialización, se organiza e institucionaliza la práctica en un conjunto de enunciados del sistema axiomático para poder comunicarlo, para tener una memoria colectiva que permita recordar decisiones y coordinar nuevas acciones. Como lo señala Wenger (1998), en comunidades cuya empresa busca la continuidad de ciertos significados -como es el caso de una comunidad de práctica de clase- la participación y la materialización deben mantener una relación de complementariedad que permita la compensación de las limitaciones de una u otra. Si predomina la participación, y la mayoría de lo importante se deja sin materializar, no habrá productos suficientes para destacar lo específico de la práctica y coordinar presupuestos divergentes. Si lo que predomina es la materialización, y hay pocas oportunidades para la experiencia compartida y la negociación interactiva, puede que no se recupere un significado colectivo. Esta perspectiva tiene implicaciones

[2] En el capítulo en donde describimos la enseñanza experimental presentamos las características específicas de las demostraciones que se realizan en el curso.

pedagógicas para la enseñanza de conocimientos complejos – como la demostración – pues una insistencia excesiva en el producto sin los correspondientes niveles de participación o, a la inversa, la desatención al producto puede desembocar en una experiencia carente de significado.

Participación	Materialización
Problema: Dados tres puntos no colineales, A, *B*, *C*, construir un punto *D* tal que los segmentos *AB* y *CD* se bisequen.	
Exploran: Usan herramientas de Cabri para hacer la construcción, verificar con medidas y con el arrastre que la construcción está bien hecha. Conjeturan: Proponen un enunciado de la forma si-entonces, tal como: *si A, B, C son puntos no colineales, ellos determinan dos segmentos que se bisecan.* Definen: Establecen una definición para ‘bisecar’ aceptada por el grupo. Argumentan: Justifican deductivamente, la existencia del punto *D*. Demuestran: Producen una demostración matemática para la existencia del punto *D*.	Ver tabla de Afirmaciones y Razones

Afirmaciones	Razones
1. Sean *A*, *B*, *C* tres puntos no colineales.	1. Dado.
2. Existe la recta $\overleftrightarrow{AB}$	2. Postulado P3.
3. Existe el segmento $\overline{AB}$	3. Definición D6, (2)
4. Sea *P* el punto medio de $\overline{AB}$	4. Teorema T7, (3)
5. Existe la recta $\overleftrightarrow{CP}$	5. Postulado P3, (1, 4)
…	

Tabla 3.3: Ilustración de la relación participación-materialización

En la Tabla 3.3 ilustramos, con un ejemplo, la dualidad participación-materialización tal como la concebimos para el caso de nuestra clase de geometría plana. A raíz de un problema que se propone a los estudiantes, ellos se involucran en la actividad demostrativa, participan en acciones específicas relacionadas con el problema (parte izquierda de la figura) y en la producción de la demostración matemática del teorema que el problema da lugar (parte derecha de la figura).

A medida que los estudiantes avanzan en la actividad demostrativa propuesta en la comunidad de práctica de clase, se espera que suceda una evolución en la participación. Como lo señalamos en la revisión de la literatura, Lave y Wenger (1991) usan la expresión ‘participación periférica legítima’ para referirse al proceso mediante el cual los recién llegados a una comunidad se integran a ésta, como una característica del aprendizaje. Sin embargo, estos autores no discriminan estados específicos para delinear la trayectoria de movilidad desde la posición de 'miembros novatos' a 'miembros expertos' de la comunidad.

Para utilizar el constructo 'participación periférica legítima' analíticamente, nosotros adaptamos la propuesta de Fernández (2008) quien define estados de involucramiento en las acciones que se llevan a cabo en el cumplimiento de la empresa. Sin embargo, no usamos los estados exactamente como los define la investigadora, porque ella los propone para dar cuenta de la constitución de una comunidad de práctica en donde unos estudiantes se integran a la práctica real de la forja del hierro en un taller a donde van en momentos diferentes a las clases usuales de matemáticas. En ese sentido, Fernández identifica un estado inicial de tipo 'pedagógico' en el que se simulan las prácticas de tipo real, situación que se aleja de nuestro caso en donde todos los momentos de participación son de tipo pedagógico.

Nosotros nos referimos a tres estados: *participación periférica legítima, participación legítima* y *participación plena*, los cuáles distinguimos por el papel que desempeña el profesor, de acuerdo con Fernández (2008), y por la calificación dada a la participación en términos de relevante (esencial y útil para el cumplimiento de la meta), genuina (con fundamento para lo que se dice o hace y con conciencia de la responsabilidad con la tarea que se lleva a cabo), autónoma (espontánea, por iniciativa propia y por un interés personal) y original (creativa, con ideas propias). En la Tabla 3.4 describimos las características particulares de cada estado, aclarando que no siempre es fácil calificar el grado de autonomía, relevancia y originalidad de la participación, por lo que la clasificación no es disjunta.

Participación periférica legítima	Los estudiantes, bajo la dirección y acompañamiento cercano del profesor, participan en la actividad demostrativa con los recursos disponibles, de manera poco autónoma, ni genuina, ni relevante ni original.
Participación legítima	Los estudiantes, con el apoyo del profesor, participan en la actividad demostrativa de manera genuina, relevante u original, pero no autónoma.
Participación plena	Los estudiantes, en interacción comunicativa con el profesor, participan en la actividad demostrativa de manera genuina, autónoma, relevante y eventualmente original y son reconocidos como líderes por los demás miembros de la comunidad.

Tabla 3.4: Estados de participación

3.4.3. NEGOCIACIÓN DE SIGNIFICADOS

Al referirnos al aprendizaje de la demostración como una dualidad participación-materialización coincidimos con Wenger (1998) en afirmar que ella da significado a la práctica que se está llevando a cabo. Debemos entonces aclarar a qué nos referimos con el término 'significado' y lo que entendemos por 'negociación de significados'.

Con relación al 'significado', tal como lo sugiere Wenger (1998), con ese término no estamos aludiendo a acepciones filosóficas o semióticas sobre la relación entre un signo y un referente sino como una manera de expresar una experiencia determinante en la vida; esta experiencia modifica la identidad de los individuos, la manera como interactúan con los demás y lo que aportan a las acciones colectivas, definiendo la naturaleza de la práctica que se lleva a cabo. En consecuencia, el significado no surge de la absorción pasiva de información o de la realización de procedimientos mecánicos o rutinarios sino de procesos de participación en las prácticas de la comunidad a la que se pertenece. Parafraseando a Wenger, afirmamos que los estudiantes del curso de geometría plana adquieren un significado de la demostración que es fruto de la interacción entre la participación en la actividad demostrativa, que el mismo grupo va configurando, y el proceso de materializar esa participación en la producción de definiciones y teoremas que alimentan el sistema axiomático de referencia.

La naturaleza de la práctica que se lleva a cabo se configura en un proceso que Wenger denomina 'negociación de significados'. Esta expresión ha sido usada de manera similar por diversos investigadores en Educación Matemática (Richards, 1996; Van Oers, 1996; McNeal y Simon, 2000; Gómez, 2007) para referirse al proceso de reorganizar las interpretaciones personales de las acciones o ideas, propias y ajenas, ante las acciones o ideas de los demás, en el curso de una interacción en clase. En la presente investigación adoptamos esa acepción y asumimos además, como lo señala Wenger (1998) que este proceso es motivado por las reacciones de unos y de otros y no necesariamente es explícito. Generalmente se presenta a través de sutiles adaptaciones de las acciones de los participantes según se van ajustando al desarrollo de sus propias interpretaciones. La negociación no es sinónimo de acuerdo total respecto de alguna interpretación sino de un nivel de afinidad que permite el éxito de la comunicación y genera la cultura de la clase.

Para el caso de nuestro experimento de enseñanza, decimos que la organización deductiva que se logra, por ser el producto de la negociación de significados, tiene su sello propio, aunque la presencia de un experto dirija la empresa hacia la configuración de un producto cercano a aquel que es valorado culturalmente como contenido para un curso de ese nivel. Cuando los estudiantes del curso de geometría plana discuten la conjetura sugerida por una pareja de compañeros, o la demostración de un enunciado propuesta por alguno de los miembros de la clase, experimentan un proceso de negociación de significados que configura lo que para ellos es demostrar. Esta negociación sería imposible si el contenido del curso no fuera fruto de la construcción colectiva. Como lo señalan algunos investigadores (de Villiers, 1986; Hanna, 1990; Herbst, 2002), cuando las demostraciones son presentadas por el profesor a los estudiantes como un producto ya materializado, sin la participación de ellos en su producción, es muy probable que esto produzca una experiencia poco significativa.

Además de considerar la participación como uno de los indicadores centrales de la negociación, en nuestro estudio también consideramos otros dos indicadores, sugeridos por Gómez (2007): la *confusión*, en tanto hay diversidad de significados de los conceptos, los términos, los enunciados puestos en juego, y el *conflicto*, en cuanto a que las ideas expresadas por algún integrante del grupo son interpretadas en forma diferente por otro generando discusión al respecto. En el capítulo seis, en donde damos cuenta de las finalidades de participación, hacemos referencias explícitas a estos dos aspectos de la negociación.

3.4.4. REPERTORIO COMPARTIDO

En el capítulo dos de revisión de la literatura, en donde hicimos una breve síntesis de algunos conceptos de la teoría de la práctica social propuesta por Wenger (1998), dijimos que el desarrollo de un repertorio compartido es una característica que da coherencia a las comunidades de práctica. Con el término ‘repertorio’ Wenger se refiere al conjunto de rutinas, palabras, gestos, instrumentos, maneras de hacer y hablar, símbolos, relatos, conceptos, etc., que la comunidad produce o adopta en el curso de su existencia. Con el objeto de precisar nuestro marco teórico, en la presente investigación hacemos referencia sólo a algunos aspectos del repertorio, dejando de lado otros no menos importantes, pero que, por dificultades metodológicas, no podemos abordar en el presente trabajo. Además, privilegiamos dos componentes del repertorio: los ‘modos de hacer’ y los ‘modos de decir’ e incluimos los otros como parte integral de estos dos (Figura 3.3).

‘Modos de hacer’		‘Modos de decir’	
	Instrumentos		Palabras
	Rutinas		Símbolos
	Normas		Conceptos
	Prácticas		Interacciones

Figura 3.3: Aspectos del repertorio compartido

‘Modos de hacer’

En el curso de geometría plana se constituye un estilo propio de ‘hacer’ referido a la manera como profesora y estudiantes llevan a cabo la actividad demostrativa. Los instrumentos de que disponen, las rutinas propias de la clase, las normas que se establecen determinan, junto con las prácticas que componen la actividad demostrativa, el ‘modo de hacer’.

Al referirnos a los instrumentos, estamos haciendo alusión principalmente al uso peculiar del programa informático de geometría dinámica, Cabri, que está a disposición de los estudiantes permanentemente; éste determina el acercamiento que ellos tienen a la demostración. De un lado, la participación en la actividad demostrativa se lleva a cabo simultáneamente con el proceso de aprender a usar el programa, y sacar provecho de éste en el desarrollo de las tareas, hecho que lleva a que parte de las acciones consistan en prestar atención al funcionamiento del programa y a cómo éste permite o limita hacer explícitos aspectos importantes de la actividad demostrativa. De otro lado, el uso frecuente del programa hace que un buen número de estudiantes lo convierta en un instrumento de apoyo en el análisis de situaciones, en la argumentación y en la producción de demostraciones, al hacer visibles aspectos de la práctica de la demostración que no se visibilizan tan fácilmente sin el recurso.

El término rutinas generalmente hace referencia a actividades o acciones acostumbradas que la comunidad va incorporando en la práctica cotidiana, fruto de la repetición de pautas de actuación. Algunas son propias de una clase cualquiera, como iniciar o interrumpir lo que están haciendo en el tiempo programado para la clase, hacer y entregar las tareas que la profesora solicita, llevar un cuaderno de apuntes con la síntesis de lo trabajado en clase, etc. Otras tienen que ver con el estilo propio con el que se desarrolla el curso de geometría. Nosotros usamos el término, preferencialmente, para referirnos con éste al conjunto de acciones que componen cada una de las actividades involucradas en la actividad demostrativa, de las que damos cuenta a través de la codificación de las conversaciones. Por ejemplo, dentro de las rutinas propias de la práctica de definir se encuentran: identificar propiedades en una representación, establecer cuál definición conviene al sistema axiomático, proponer una definición e identificar el papel que cumple una definición en una demostración.

Con respecto a las normas, nos referimos a la regulación de las formas de participación que emergen y se establecen en la comunidad con base en la negociación. Como Yackel y Cobb (1996) sugieren, diferenciamos normas sociales y normas sociomatemáticas. Las normas sociales regulan la estructura de la participación en clase y favorecen que ésta se organice alrededor de las ideas de los estudiantes. Por ejemplo, a lo largo de nuestro experimento de enseñanza, en el grupo se establece que todas las ideas propuestas por los miembros de la clase son útiles, sin importar que no estén correctas o completas. Las normas sociomatemáticas regulan la actividad matemática favoreciendo vías de acción, de comunicación y de análisis de aspectos matemáticos de la actividad realizada. En nuestro caso, estas normas regulan qué conjeturas se aceptan, qué demostraciones son válidas, qué formas de argumentar se reconocen como apropiadas, etc., es decir, qué tipo de práctica matemática se puede asociar a la actividad demostrativa y cuál no. Por ejemplo, una norma sociomatemática dominante en la clase es que las afirmaciones usadas en el proceso de argumentar una afirmación o en la producción de la demostración deben justificarse con enunciados extraídos del sistema que se está construyendo en el curso y no con información proveniente de otras fuentes, así todos la acepten como cierta.

‘Modos de decir’

Además de los modos de ‘hacer’, el repertorio compartido tiene que ver con los estilos discursivos, o modos de ‘decir’ propios de la clase, mediados por las experiencias que viven los estudiantes y por la gestión de la interacción comunicativa por parte de la profesora. Las palabras, los símbolos, los conceptos y el tipo de interacción, dependen en gran medida de los esfuerzos que ella hace por conciliar las producciones espontáneas de los estudiantes con las formas de comunicación valoradas en la comunidad de profesionales de las matemáticas. Coincidimos con Martin et al. (2005) en señalar que las formas de hablar en una clase son un híbrido entre el lenguaje matemático estándar, el lenguaje específico del dominio matemático y los estándares comunicativos de la mayoría de los profesores con los estudiantes.

A medida que transcurre el curso los estudiantes adquieren un significado de ciertas palabras, según el contexto en el que se usan.

Por ejemplo, ‘convencimiento’, ‘verdad’, ‘certeza’ y ‘validez’[3] se usan para referirse a uno de los roles centrales de la demostración, y están ligadas a la validez de las justificaciones; pero también se usan cuando se hace una verificación de tipo experimental, como paso previo a la producción de una argumentación o una demostración. A pesar de los giros de significado, los estudiantes aprenden a reconocer a qué se refiere cada término en cada momento de la actividad demostrativa.

Otras palabras tales como ‘conformar’, ‘escoger’, ‘localizar’, ‘determinar’ y ‘formar’ también van adquiriendo un significado para el grupo, a medida que las van incorporando en la comunicación. El grupo decide que el término ‘conformar’ sólo se use cuando se hace referencia a todos los elementos que constituyen un todo; por ejemplo, no se admite afirmar que tres puntos ‘conformen’ una recta, pero sí se puede decir que una recta está conformada por puntos. Utilizan ‘escoger’ para seleccionar un representante cualquiera de un conjunto dado, mientras que ‘localizar’ es sinónimo de detectar aquel con una característica especial. Las palabras ‘determinar’ y ‘formar’ se usan como sinónimos de ‘constituir’, ‘dar lugar’ o ‘dar forma’.

Los lenguajes geométrico, de teoría de conjuntos y de lógica proposicional, se mezclan con el castellano, tanto en el momento de proponer una conjetura, como de justificarla o producir la demostración.

Los significados de símbolos, términos y expresiones matemáticas son objeto de negociación permanente, favorecida por el especial celo de la profesora por el correcto uso de éstos. Por ejemplo, el cuantificador ‘existe’ se admite en el consecuente de los teoremas en donde se solicita probar que hay al menos un objeto geométrico que tiene las propiedades señaladas, mientras que su uso al formular las afirmaciones o justificaciones que componen una demostración es desestimado para evitar confusiones.

Las letras se usan como variables para hacer referencia a representantes de una clase de objetos geométricos, pero también para denominar puntos, rectas y ángulos específicos.

---

[3] Según el diccionario de la lengua española Espasa “convencer” significa incitar con razones a alguien a mudar de dictamen o probar una cosa de tal forma que racionalmente no se pueda negar y “certeza” significa convencimiento seguro y claro de alguna cosa o firme adhesión de la mente a algo cognoscible, sin temor a errar.

El repertorio de conceptos matemáticos de la clase tiene que ver con temas usuales de geometría plana básica tales como punto, recta, plano, segmento, rayo, ángulo, triángulo, cuadrilátero, con los cuales se conforma el sistema axiomático en la clase, a partir de la formulación de postulados, definiciones y teoremas alusivos a ellos.

Las interacciones a las que nos referimos, son aquellas que los estudiantes tienen entre ellos cuando resuelven y discuten los problemas, ejercicios y tareas y las que suceden durante la socialización o el intercambio comunicativo de todos con la profesora. En la descripción de la enseñanza experimental presentamos los dispositivos didácticos usados por la profesora para favorecer la interacción en clase. En la presente investigación, tomamos los datos principalmente de las transcripciones de las interacciones del grupo en general. Una de las características primordiales de tales interacciones es que en ellas hay una mediación permanente de la profesora, quien actúa como interlocutora reaccionando a las intervenciones de los estudiantes, aunque sólo sea para manifestar que ella está atenta a lo que alguno dice, parafrasear lo dicho por alguien, otorgar el uso de la palabra o estimular el diálogo.

En síntesis, el repertorio de recursos compartidos determina un estilo propio con el que los miembros de la clase llevan a cabo la actividad demostrativa y producen las demostraciones. Por ser el resultado de la dinámica específica de la comunidad, son de naturaleza ambigua y no pueden preverse completamente. Tampoco puede atribuírseles funciones claramente establecidas sino que todos ellos constituyen elementos para la negociabilidad y, por lo tanto, para posibilitar la construcción colectiva de significados.

En nuestro proyecto de investigación, enfocamos el análisis de los datos desde la perspectiva del desarrollo de un repertorio compartido con el cual los estudiantes tienen la oportunidad de participar en la actividad demostrativa y en la producción de demostraciones. Analizamos las finalidades de participación y la evolución de ésta en el tratamiento dado a las definiciones en el curso, la producción y evaluación de conjeturas que alimentan el conjunto de enunciados del sistema axiomático y la producción de argumentos y demostraciones para validar las conjeturas. El análisis de la participación en el repertorio de prácticas nos da elementos para caracterizar el curso como una comunidad de práctica de clase e ilustrar el potencial del estilo de enseñanza propuesto para favorecer el aprendizaje de la demostración, mostrando que los estudiantes viven una experiencia de participación genuina en la actividad demostrativa y asumen responsabilidades importantes en el desarrollo de ideas matemáticas.

3.4.5. COMPROMISO MUTUO E IDENTIDADES DE PARTICIPACIÓN

Wenger (1998) señala que un ingrediente esencial y fuente de cohesión de una comunidad de práctica es el compromiso mutuo de sus integrantes por sacar adelante la empresa conjunta. Pertenecer a una comunidad no significa únicamente incorporarse a un conjunto de personas que comparten alguna característica o tarea en común. Decimos, siguiendo a Wenger, que el compromiso mutuo se refiere a la generación de relaciones de participación conjunta en asuntos que son importantes, de acuerdo a una meta común.

No podemos asegurar que los estudiantes y la profesora del curso de geometría plana conforman una comunidad de práctica de clase sólo porque se reúnen tres veces por semana en un salón. Tenemos que mostrar que crean relaciones entre ellos, en función de sus rasgos personales y de la empresa que emprenden. Este hecho no significa que siempre haya armonía perfecta o coexistencia pacífica. Como en cualquier situación de compromiso interpersonal pueden darse situaciones de tensión, desacuerdo o competitividad. Coincidimos con Boylan (2005) cuando señala que los conflictos en un salón de clase no son motivo para afirmar que no puede ser una comunidad de práctica, sobre todo si, a pesar de haberlos, se hace evidente un sentido compartido de pertenecer al grupo y de apoyo mutuo en las tareas de la empresa. Claro está, menciona Boylan, esto último no se logra si no se rompe con la tradicional naturaleza individualizada de la práctica matemática en las aulas, principalmente de nivel universitario.

Según Wenger (1998), el compromiso mutuo que caracteriza una comunidad de práctica no supone homogeneidad de los participantes o de las funciones que realizan. Cada miembro de la comunidad encuentra un lugar propio, asume ciertas tareas, genera cierto tipo de situaciones y ayuda a resolver problemas. Por esta vía adquiere lo que el autor denomina una ‘identidad’ que se va configurando a medida que desarrolla formas compartidas de hacer y de decir.

Las identidades de participación son maleables y dinámicas, son construcciones en curso que resultan de la participación en una experiencia vital. El vínculo entre práctica e identidad es uno de los aspectos característicos de la teoría de la práctica social (Wenger, 1998) en tanto enfatiza en la relación entre aprender a hacer y aprender a ser. Por eso, como lo sugieren Adler (1998) y Boylan (2005) la teoría defiende una visión de aprendizaje como proyecto de identidad.

Por poner dos ejemplos ilustrativos usando nuestros datos experimentales, decimos que Nancy se especializa en sacar provecho de algunos teoremas relacionados con el postulado de separación del plano. Así, los demás compañeros, e incluso la profesora, se dirigen a ella cuando se necesita hacer uso de dichos enunciados en la producción de algún argumento o demostración. De otro lado, María asume el papel de controlar la norma de usar en las argumentaciones y demostraciones sólo enunciados que se han institucionalizado en el sistema axiomático que se esta construyendo y llama la atención a los compañeros o aún a la profesora cuando se salen de la norma. En nuestros análisis mostramos que, gracias a la participación, los estudiantes no sólo ganan conocimiento matemático sobre la demostración sino que desarrollan una identidad como aprendices de matemáticas en dicho curso, de tal forma que se ven a sí mismos y son vistos por los demás, como miembros valiosos de la comunidad.

En nuestra investigación retomamos dos de los indicadores de generación de una identidad de participación señalados por Smith (2006) y Anderson (2007) desde la teoría de la práctica social: la afiliación a la empresa, es decir, la estrecha relación y sentido de pertenencia con el grupo y la alineación, o sea el proceso de coordinar perspectivas y acciones y encontrar una base común en la cual actuar, por medio de la negociación. Al relacionar el compromiso mutuo con la generación de una identidad de participación y considerar ésta como un aspecto característico de la comunidad de práctica, completamos nuestra base conceptual con la que construimos nuestro marco analítico. Este se resume en la Tabla 3.5.

Aspectos del aprendizaje	Indicadores
Participación en: - La actividad demostrativa. - La producción de demostraciones matemáticas.	Finalidades de participación. Evolución de la participación. (Periférica legítima, legítima, plena).
Negociación de significados.	Situaciones de participación, confusión y conflicto.
Repertorio compartido	‘Modos de hacer’ y ‘modos de decir’ al definir, conjeturar, argumentar y demostrar.
Compromiso mutuo e identidad	Afiliación. Alineación. Originalidad.

Tabla 3. 5: Síntesis del marco analítico

3.5. CONCLUSIÓN DEL CAPÍTULO

En las secciones anteriores hemos presentado una base conceptual para dar cuenta del aprendizaje de la demostración como un proceso de participación de los estudiantes inscritos en un curso universitario de geometría plana, visto como una comunidad de práctica. En ese sentido, el grupo en general, estudiantes y profesora, son el ‘objeto’ de estudio y no cada uno de ellos; dirigimos la mirada a la comunidad en la cuál cada uno de ellos actúa y habla, las relaciones que establecen y las situaciones e historias personales y grupales en donde se sitúan. Atendemos la solicitud de investigadores que señalan la necesidad de reconocer que el conocimiento es situado (Kieran, 1994) y que por lo tanto varía según el contexto y las situaciones en donde emerge. Creemos que con ello hacemos una contribución al desarrollo de la investigación en el campo.

Al emplear la teoría de la práctica social (Wenger, 1998) como sustento para dar cuenta del aprendizaje, nos enfrentamos al reto de adoptar un marco de referencia que proviene de estudios sobre situaciones de aprendizaje en contextos no institucionalizados para analizar el aprendizaje en un contexto altamente restringido por variables institucionales, como es un curso universitario de geometría en un programa de formación de profesores de matemáticas. Este reto, junto con desarrollos en didáctica de las matemáticas acerca del aprendizaje de la demostración -que nos dieron la base para diseñar y desarrollar la enseñanza experimental- nos permite hacer analogías entre ambos campos teóricos y poner en juego algunos elementos de la teoría sociocultural de Lave y Wenger (1991) y de la práctica social de Wenger (1998) en la caracterización del aprendizaje. De esta manera queremos sacar a la luz aspectos del aprendizaje de la demostración que generalmente se tocan tangencialmente en la investigación. Esperamos con ello incidir en el diseño curricular de futuros cursos de geometría, en donde el compromiso colectivo en prácticas de participación y materialización, del profesor y los estudiantes, sea el foco de la enseñanza y permita de esa manera que los estudiantes adquieran un conocimiento distribuido y adaptable a diversas situaciones en donde lo requieran, de acuerdo a intereses, metas comunes y circunstancias futuras que los rodeen.

CAPÍTULO 4

DISEÑO METODOLÓGICO

4.1. CARACTERIZACIÓN DEL ESTUDIO

Caracterizamos nuestro estudio investigativo como un experimento de enseñanza (Cobb, 2000) interdependiente con una instrucción experimental desarrollada en un curso universitario de geometría plana. Es decir, el desarrollo del curso sirve como contexto investigativo y, a su vez, los análisis realizados informan de los efectos alcanzados con el fin de apoyar nuevas implementaciones. En este tipo de investigación generalmente se busca apoyar a los estudiantes en el desarrollo de un conocimiento matemático particular y paralelamente se investiga el aprendizaje que ellos logran; como resultado, se obtiene información que busca contribuir al mejoramiento de la enseñanza y el aprendizaje (Anderson, 2007; Ball, 2000).

Con esta aproximación investigativa se busca recoger información directa de la experiencia matemática de los estudiantes, hecho que la hace particularmente útil cuando se reconoce la naturaleza sociocultural del aprendizaje (Ball, 2000; Cobb, 2000). La metodología contribuye a construir un puente entre la investigación en didáctica de las matemáticas y la práctica de la enseñanza y el aprendizaje, atendiendo cuestiones de investigación actualmente relevantes. En términos generales, un experimento de enseñanza se basa en una secuencia de clases que involucran un profesor -comprometido con promover la interacción social entre sus estudiantes, la negociación de significados y formas cada vez más sofisticadas de actuar matemáticamente-, unos estudiantes -activamente comprometidos en interacciones comunicativas-, y uno o más observadores que registran aspectos de los sucesos de clase (Steffe et al., 2000). Entre las sesiones de clase el profesor y los observadores, que usualmente conforman un equipo de investigación, se reúnen para discutir el efecto de la aproximación formulada y determinar si ella necesita cambios en la trayectoria (Ball, 2000).

Desde nuestro punto de vista, el diseño y desarrollo del curso de geometría plana que nos sirve de contexto para nuestra investigación favorece la realización de un experimento de enseñanza pues tiene la pretensión de involucrar a los estudiantes en prácticas matemáticas asociadas a la actividad demostrativa mientras se hace la construcción colectiva de una porción de un sistema axiomático de geometría euclidiana plana. La profesora responsable del curso hace parte, junto con la autora de esta tesis, del grupo de investigación Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría[1], grupo que permanentemente apoya el diseño y el desarrollo del curso. La planeación general de la versión del curso en donde se recogieron los datos (semestre 01 de 2007), así como los cambios realizados sobre la marcha, fueron objeto de discusión en el grupo, en reuniones realizadas semanalmente; también lo fueron el diseño de las situaciones problema, la toma de decisiones sobre la gestión de las clases y la planeación de algunas evaluaciones.

El experimento de enseñanza se propuso con el objetivo de dar cuenta del aprendizaje de los estudiantes cuando se combina una aproximación sociocultural a la demostración, de tipo participativo, con la pretensión de lograr la producción colectiva de demostraciones deductivas ajustadas a un sistema axiomático de referencia. El estudio que informamos en la presente memoria es un análisis retrospectivo del curso, hecho a la luz de la teoría de la práctica social de Wenger (1998).

4.2. DISEÑO GENERAL DE LA INVESTIGACIÓN

En consonancia con la meta del estudio, el diseño experimental se concentró en registrar aquello que dicen o hacen profesora y estudiantes, asociado a la actividad demostrativa. Los registros de audio y video de las clases, junto con las transcripciones de dichos registros, se constituyeron en la materia prima para el análisis del aprendizaje. Sin embargo, otros materiales recolectados a lo largo de la enseñanza experimental también se usaron en los análisis, como información complementaria. Entre ellos están: notas de campo de las observaciones de las clases, notas de las reuniones de planeación y evaluación de las sesiones, copia de los cuadernos de trabajo de seis estudiantes, copias de las evaluaciones escritas de todos los estudiantes, registro de los archivos producidos por los grupos en el computador o en las calculadoras y registros de audio de algunas conversaciones informales entre la profesora y la autora de la presente investigación, realizadas para obtener información de la apreciación de la profesora sobre algunos eventos de la clase o las razones de algunas de sus decisiones imprevistas.

[1] El grupo Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría está conformado en la actualidad por la autora de la presente investigación y los profesores Carmen Samper, Patricia Perry, Armando Echeverry y Oscar Molina, del Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional (Bogotá, Colombia).

La profesora que imparte el curso está a cargo de la asignatura Geometría Plana desde hace más de ocho años. Durante las reuniones de planeación y evaluación de las sesiones de clase, además de compartir la responsabilidad del diseño de la propuesta, ella estaba especialmente atenta a la regulación del tiempo para cumplir el programa previsto, mientras que la autora de la presente tesis velaba por intereses de tipo investigativo, especialmente centrados en lograr buenos registros de la interacción social y de la construcción de conocimiento. La autora de esta disertación estuvo presente durante casi todas las clases (excepto las tres que se llevan a cabo en el mes de junio de 2007) tomando notas de campo y supervisando el registro en video y audio. En ocasiones, auxilió a la profesora en asuntos logísticos como la entrega de hojas de ejercicios, la supervisión de alguna evaluación, el uso del retroproyector y la pantalla líquida que permite proyectar imágenes de la calculadora en la pared o la atención a algunos estudiantes que tenían dudas sobre el manejo del software de geometría dinámica. En ese sentido, la observación es participante, aunque en un mínimo grado.

En el diseño investigativo contemplamos la necesidad de registrar la interacción de la profesora con el grupo de estudiantes, así como de los estudiantes cuando trabajan en parejas[2]. Como nos era imposible grabar a todos los grupos, pedimos a los profesores que habían dado clase a los estudiantes en el semestre inmediatamente anterior, que nos sugirieran a algunos de ellos por sus habilidades de expresión, dado que queríamos tener buenos registros verbales. De esta forma escogimos tres grupos. Sin embargo, sólo grabamos a dos de ellos durante todo el curso. Con el tercer grupo, desde la segunda clase tuvimos dificultades por la impuntualidad de uno de sus integrantes. Esto nos llevó a modificar el diseño previsto y optamos por grabar un tercer grupo variable, escogido al azar, cada vez que comenzaba una interacción.

Con una cámara de video registramos las interacciones de la profesora con los estudiantes, cuando éstas eran públicas. Con tres cámaras de video registramos el trabajo de los tres grupos de estudiantes, durante el trabajo por parejas hecho en papel y lápiz o cuando usaban el programa de geometría dinámica. Adicionalmente, usamos grabadoras de audio para garantizar un buen registro de voz. Una de ellas la llevaba consigo la profesora durante toda la clase y las otras se pusieron en

[2] Como eran 21 estudiantes, se conforman 9 parejas y un trío. Para facilitar la redacción, nos referimos a las parejas de estudiantes, salvo cuando hacemos mención particular al grupo de tres, en cuyo caso, nos referimos al grupo conformado por Orlando, Daniel y Melisa.

los pupitres de los integrantes de las parejas cuando registramos la interacción entre ellos.

El diseño implementado nos permitió tener el material para enfrentar la tarea de dar cuenta del aprendizaje de la demostración de los estudiantes que participan en el curso universitario de geometría plana. En la siguiente sección, correspondiente a la descripción del proceso de construcción del cuerpo de datos y de las herramientas de análisis, explicamos cómo hicimos uso de dicho material.

4.3. PROCESO DE CONSTITUCIÓN DEL CUERPO PRINCIPAL DE DATOS Y DEL SISTEMA DE CÓDIGOS

Cuando comenzamos a mirar las transcripciones de las clases ya teníamos una idea de lo que estábamos buscando pues queríamos documentar el aprendizaje de los estudiantes, a medida que se daba la emergencia de una comunidad de práctica, en el curso de geometría plana en donde la actividad demostrativa es el eje de la participación. Teníamos en mente la conceptualización de la actividad demostrativa que definimos en el marco teórico, habíamos observado a los estudiantes interactuando en la clase y queríamos documentar cómo era su participación en las rutinas propias de tal actividad, qué factores causaban dicha participación y cómo influía ésta en el desarrollo del curso. Estábamos interesados en ver qué exploraban durante la resolución de problemas, qué resultados obtenían de la exploración, qué conjeturas proponían y de qué manera se socializaban y aceptaban en el grupo, qué argumentaciones se admitían para justificar alguna conjetura y qué demostraciones producían colectivamente. El proceso interpretativo que emprendimos desde el mismo momento de empezar a observar las clases nos fue llevando a identificar como eje central del análisis, a las rutinas propias del repertorio de prácticas que conforman la actividad demostrativa en el curso.

A continuación, hacemos un recuento del proceso simultáneo de construcción del cuerpo principal de datos experimentales y del sistema de códigos que nos permitió hacer el análisis. Seguimos un proceso similar a los empleados por Clark (2005) y Gómez (2007), que contempla las siguientes cinco fases: construcción del primer conjunto de datos, codificación abierta, reducción del conjunto de datos y constitución de episodios, codificación axial e identificación del conjunto principal de datos y refinamiento de la codificación. Vamos a describir cada una de ellas.

4.3.1. CONSTRUCCIÓN DEL PRIMER CONJUNTO DE DATOS

La obtención del primer conjunto de datos comenzó con la transcripción de las grabaciones de audio y video de todas las clases del curso de geometría plana del primer semestre académico de 2007. Al estar presentes en cada una de las clases, tomar notas de campo, conocer personalmente a la profesora del curso e interactuar con ella en la planeación y evaluación de las clases, disponer de los videos para observarlos repetidamente y hacer la transcripción personal, e inmediatamente después de terminada cada clase, teníamos elementos para transcribir las intervenciones con los signos de puntuación y los acentos correspondientes a la entonación usada por los participantes, procurando reflejar el sentido de las frases y capturar lo más fielmente posible los sucesos. No desconocemos que las trascripciones ya llevan en sí mismas una base interpretativa y que quizás otros observadores podrían hacer cambios en la puntuación usada o en algunos comentarios al margen; en ese sentido la trascripción en sí misma se constituye en un primer nivel interpretativo, hecho que consideramos favorable por cuanto nos permitió comenzar el análisis al tiempo que capturábamos la información.

La transcripción de los registros de audio y video se hizo elaborando tablas de dos columnas en las que la primera contiene el nombre de quién hace la intervención y la segunda aquello que dice o hace[3]. Cuando varios estudiantes hablan al mismo tiempo, pero se entiende lo que dice cada uno, sus intervenciones se transcribieron, una a continuación de la otra; pero si dicen lo mismo, esto se escribió en la misma casilla, precedida de la palabra 'Estudiantes'. Si no podíamos captar parte de lo que alguien hablaba, se hizo la anotación: '[no se entiende]'. Intercalamos las trascripciones de la interacción de la profesora con el grupo y las trascripciones del trabajo de las parejas según el orden cronológico en el que suceden, para favorecer la comprensión de los diálogos que tienen lugar. Adicionalmente, enriquecimos las transcripciones con anotaciones o figuras hechas por la profesora o los estudiantes en el tablero (o pizarra) y con comentarios sacados de las notas de campo -que la observadora iba escribiendo con información relevante, durante la clase o en la sesión de evaluación- sobre circunstancias o acontecimientos que podían ser útiles para aclarar alguna intervención. Cuando no era posible reconocer qué estudiante hablaba, escribimos 'Estudiante' en la columna de los nombres. Para indicar que una intervención es interrumpida por el siguiente interlocutor

[3] Usamos paréntesis cuadrados, [ ], para: (i) escribir lo que se hace, y diferenciarlo de lo que se dice textualmente, (ii) escribir de manera resumida y no textual alguna intervención, (iii) incluir información adicional que contribuya a dar sentido a la intervención o (iv) señalar la omisión de intervenciones que no vienen al caso.

usamos el signo '/' al final de ésta y al comienzo de la siguiente frase. Un ejemplo de las trascripciones se aprecia en la Tabla 4.1.

[La profesora pide trabajar en parejas la demostración de la conjetura: el ángulo opuesto al lado más largo de un triángulo es el más grande. Ella representa el triángulo *OKP* en el tablero (Figura 4.1), les pide considerar que el lado *OP* es más largo que el lado *OK* y da un tiempo para trabajar. Pasados unos minutos, Juan y Ana se ofrecen a explicar cómo hacer la demostración y pasan al tablero].

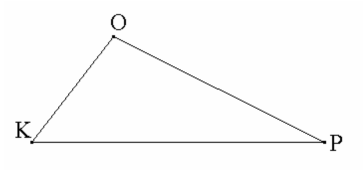


Figura 4.1

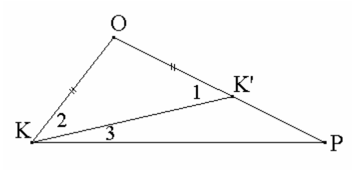


Figura 4.2

Ana:	Entonces, ya teníamos la condición de que *OP* era mayor que *OK* [Figura 4.1] [Espera que su compañero Juan escriba al lado de la figura: *OP* > *OK*]. Entonces podíamos transferir[4] esa medida [*OK*] en el segmento *OP*… digamos, en el rayo *OP*… la medida, por lo que *OP* es mayor que *OK*.
Juan:	Y además *OK* es mayor que 0 [Escribe en el tablero *OK* > 0].
P:	Bueno, un minuto, entonces Ana está diciendo qué están haciendo y tú estás diciendo por qué lo pueden hacer.
Juan:	Sí, exacto, es que como *OK* es la medida de un segmento entonces *OK* es mayor que cero; por lo tanto, como es mayor que cero, la podemos transferir[5]. […]. Luego, por la construcción, *OK* es igual a *OK'* [Escribe *OK* = *OK'*]. Y por definición de segmentos congruentes *OK* es congruente con *OK'* [Escribe $\overline{OK} \cong \overline{OK'}$; marca los segmento congruentes en la representación (Figura 4.2)].
P:	Bien. [Espera que Ana y Juan tracen el segmento *KK'*]. Ellos están construyendo un triángulo isósceles. ¿Se acuerdan que esa fue una idea que surgió en otro momento?, […]. Tenemos otra herramienta [para construir la demostración]. Ellos están construyendo un triángulo isósceles. Bien.
Ana:	Entonces, por el teorema [del triángulo isósceles[6]], tenemos que los ángulos son… que el ángulo *K/*

[4] Con el término 'transferir' Ana alude al teorema de localización de puntos que permite localizar un número positivo en un rayo, de tal forma que la distancia del origen al punto corresponda a dicho número. La clase ha adoptado el término 'transferir' para referirse a ese teorema, ya que en Cabri han hecho operativo dicho teorema usando la transferencia de medidas.

[5] Teorema de localización de puntos: sean $\overrightarrow{AB}$ y x un número positivo. Entonces existe exactamente un punto *P* de $\overrightarrow{AB}$ tal que *AP* es *x*.

[6] Teorema del triángulo isósceles: si dos lados de un triángulo son congruentes, entonces los ángulos opuestos a esos lados son congruentes.

P:	/¿El ángulo *K*?
Ana:	El ángulo *OKK'* y el ángulo *OK'K* son congruentes/
Estudiante:	/O ponga números.
P:	Pongámosle números, 1 y 2… $\angle 1$ y $\angle 2$ [Figura 4.2].
	[…]

Tabla 4.1: Ejemplo de transcripción de un registro de audio y video

Una primera lectura de las transcripciones, junto con la observación juiciosa de cada uno de los videos de las clases, nos permitió diferenciar un conjunto de asuntos tratados en cada clase. Por 'asuntos' nos referimos a temas o quehaceres tales como: el estudio de un enunciado específico (e.g., 'Postulado de separación del plano', 'Convexidad'), la resolución de una situación problema (e.g., 'Bisectrices de ángulos que son par lineal', 'Triángulo isósceles-alturas'), la sistematización del conjunto de enunciados estudiados (e.g., 'Organización de enunciados unidad uno'), la socialización de alguna producción individual o de las parejas (e.g., 'Revisión comprobación uno').

Por ser un curso que se basa en la construcción colectiva y en el cual muchas veces se atiende a propuestas surgidas sobre la marcha -por la profesora o los estudiantes-, las clases tratan diversos asuntos, algunos de los cuales quedan inconclusos para ser abordados en otra sesión. Así, por ejemplo, en la clase del 6 de marzo de 2007 se atienden cinco asuntos: 'Tres puntos no colineales determinan dos segmentos que se bisecan', 'Convexidad', 'Postulado de separación del plano', 'Teorema de separación del plano' y 'Teorema interestancia mismo lado de la recta'; la clase del 20 de abril se dedica en su totalidad a la revisión de la cuarta evaluación escrita ('Comprobación cuatro') y en la clase del 30 de abril se abordan tres asuntos: 'Acuerdos sobre el uso de información de una figura', 'Si un triángulo isósceles es obtuso las alturas a los lados congruentes caen fuera el triángulo' y 'Criterio de congruencia hipotenusa-cateto'. El tamaño de la transcripción correspondiente a un asunto por cada clase es variado, así como la cantidad de sesiones de clase dedicadas a él, pues ambas factores dependen de la naturaleza del asunto y del provecho que se saca de éste para avanzar en la construcción del sistema axiomático. Por ejemplo, el asunto 'Teorema triángulo isósceles-alturas' se extiende durante once clases, aunque en algunas de ellas sólo se hace referencia al asunto por un breve lapso de tiempo. En cambio, el asunto 'Lado largo subtiende ángulo mayor' ocupa sólo una clase.

Una vez identificados los asuntos tratados en cada clase, elaboramos una base de datos *BaseDatos1* usando como información para cada registro los segmentos de clase correspondientes a un asunto pero respetando la división de éstos por clases; esto hizo que dos o más registros correspondieran al mismo asunto. Obtuvimos así 153 registros. Al construir la base de datos colocamos los registros en el orden cronológico en el que los asuntos fueron tratados, tanto en cada clase como a lo largo del curso. Usamos los campos de cada registro para hacer una identificación básica de cada uno, colocando como información el número del registro, la fecha de la clase, el día de la semana, la unidad temática correspondiente, el asunto tratado y el fragmento del video en donde se encuentra la trascripción correspondiente. En la Tabla 4.2 ejemplificamos con 10 registros, cómo se constituye la base de datos *BaseDatos1*.

Reg.	Fecha	Día	Unid.	Asunto	Video
41	Mar06	martes	2	Tres puntos no colineales determinan dos segmentos que se bisecan	D1/video3/0:31
42	Mar06	martes	2	Convexidad	D1/video4/1:04
43	Mar06	martes	2	Postulado de separación del plano	D1/video4/1:29
44	Mar06	martes	2	Teorema de Separación del plano	D1/video5/0:00
45	Mar06	martes	2	Teorema interestancia mismo lado de la recta	D2/video2/6:38
…					
47	Mar08	jueves	2	Convexidad	D1/video1/1:34
…					
97	Abr20	viernes	4	Comprobación escrita número 4	D1/video 1/0:00
…					
113	Abr30	lunes	4	Acuerdos sobre el uso de información obtenida de las figuras	D1/video1/0:00
114	Abr30	lunes	4	Si un triángulo isósceles es obtuso, las alturas a los lados congruentes caen fuera el triángulo.	D3/video3/4:03
115	Abr30	lunes	4	Criterio hipotenusa-cateto	D5/video2/1:06
…					

Tabla 4.2: Ejemplo de registros de la base de datos *BaseDatos1*

Después de elaborar la base de datos *BaseDatos1*, llevamos a cabo un proceso de caracterización de la información contenida en cada registro, en una nueva base de datos, *BaseDatos2,* creando un conjunto de campos que contienen información relevante que puede ser útil para documentar las actividades en las que participan los estudiantes y dar cuenta del proceso de aprendizaje. A continuación explicamos cómo construimos la base *BaseDatos2*.

Para decidir qué campos crear, revisamos la categorización hecha en un estudio previo (Camargo, 2007), en donde usamos las transcripciones de la primera unidad temática del mismo curso universitario de geometría plana que sirve de contexto para la presente investigación. El estudio pretendía dar cuenta de cómo se sientan las bases para la constitución de una comunidad de práctica en el curso; se identificó cómo se lleva a cabo la reconstrucción de una porción inicial de un sistema axiomático para la geometría plana, se caracterizó el apoyo brindado por la profesora en el proceso de aprendizaje de los estudiantes y se examinó el papel del software de geometría dinámica Cabri como mediador en dicha actividad.

En consonancia con nuestra conceptualización de actividad demostrativa y la perspectiva sociocultural emergente sobre el aprendizaje (Cobb, 2000), en el estudio previo construimos categorías de análisis para los tres aspectos mencionados en el párrafo anterior. Algunas de las categorías se basaron en propuestas de Martin et al. (2005), Yackel et al. (2000), Blanton y Stylianou (2003) y Goos et al. (2002); en ese sentido, fueron construidas con base en aportes de la investigación en didáctica de las matemáticas sobre la demostración.

El estudio previo (Camargo, 2007) nos aportó elementos para ganar en sensibilidad analítica para la presente investigación. A partir de las categorías propuestas, imaginamos una serie de preguntas que nos ayudaron a configurar los campos de la base *BaseDatos2*. En cada campo se responde a una pregunta con información clave tanto para dar cuenta de la participación de los estudiantes como para mostrar la emergencia de una comunidad de práctica. Como algunas de las preguntas hacen referencia a acciones que conforman la actividad demostrativa, imaginamos que las respuestas nos permitían encontrar ejemplos del repertorio de prácticas compartido. Algunas de las preguntas de la base de datos son: ¿Qué pregunta, situación o problema introduce el tema?, ¿Qué actividad experimental hay?, ¿Qué uso dan los estudiantes al programa de geometría dinámica Cabri?, ¿Qué actividades se delegan a los estudiantes?, ¿Qué estudiantes intervienen? (Anexo 1).

Mediante el proceso descrito anteriormente obtuvimos 153 registros de la base de datos *BaseDatos2*, cada uno de los cuáles asociado a un registro de la base *BaseDatos1* y a su respectiva transcripción. Prácticamente todas las interacciones entre la profesora y el grupo de estudiantes quedaron incluidas en algún registro, salvo aquellas en donde la comunicación no tenía que ver con la actividad matemática sino con temas de la vida institucional como algún cambio de horario, cambio de salón, solicitudes de los estudiantes para cambiar la fecha de alguna evaluación o entrega de alguna tarea, entre otros.

Una nueva lectura del contenido de las transcripciones correspondientes a cada registro de la base de datos *BaseDatos2* nos llevó a descartar 38 registros que se entreveían poco útiles para el análisis porque el tratamiento dado a los asuntos se alejaba de la actividad demostrativa (e.g., el asunto 'Convexidad' se estudió con ejemplos no geométricos y un análisis basado en teoría de conjuntos), porque no eran lo suficientemente ricos en información -ya que los temas tenían un tratamiento superficial o confuso-, porque la clase se reducía a la explicación dada por la profesora de las respuestas a una evaluación individual escrita, sin intervención de los estudiantes, o simplemente porque teníamos la certeza de que había otros registros más representativos de una situación muy similar.

Mediante el proceso descrito obtuvimos nuestro primer conjunto de datos correspondiente a 115 registros de la base *BaseDatos2* junto con sus transcripciones. En el Esquema 4.1 sintetizamos las acciones realizadas y los productos obtenidos hasta este momento.

Registros de Audio/Video y notas de clase.

Transcribir	→	Identificar asuntos Por clase	→	Caracterizar registros	→	Descartar registros
Transcripciones de todas las clases		*BaseDatos1*		*BaseDatos2* (153 registros) y transcripciones de clases por asuntos.		*BaseDatos2* (115 registros) y transcripciones de clases por asuntos.

Esquema 4.1: Proceso seguido para construir el conjunto inicial de datos

4.3.2. CODIFICACIÓN ABIERTA

Con las transcripciones correspondientes a los 115 registros no descartados de la base de datos *BaseDatos2* construimos un conjunto de 115 documentos primarios[7]

[7] En el programa AtlasTi se denomina documento primario al archivo que se introduce, escrito o en audio, sobre el cuál se hace la codificación. El número correspondiente al documento primario se asigna automáticamente según el orden en que se introduce el documento primario. En nuestro caso, conservamos el orden cronológico del tratamiento de los asuntos por clase y en cada clase. Para diferencias los documentos primarios de los regis-

con el cual alimentamos el programa AtlasTi para generar un primer conjunto de códigos en un archivo denominado *CodificacionAbierta*. El proceso de codificación estuvo dirigido por las preguntas de investigación, el estudio previo sobre los sucesos de la primera unidad del curso (Camargo, 2007) y la teoría de la práctica social (Wenger, 1998) que seleccionamos para fundamentar el análisis sobre el aprendizaje de los estudiantes. A continuación explicamos en detalle cómo se llevó a cabo.

Nuestra intención era producir un conjunto de códigos que permitiera detectar aspectos esenciales del aprendizaje de los estudiantes procurando un análisis lo más completo posible; queríamos reflejar la complejidad de la tarea de aprender a demostrar aprovechando el marco conceptual, en donde integramos aspectos de la teoría de la práctica social de Wenger (1998) con desarrollos en didáctica de las matemáticas sobre el aprendizaje de la demostración. Para ello, tomamos las preguntas con las que construimos los campos de la base de datos *BaseDatos2* y las revisamos a la luz de la teoría.

Aquellas preguntas que aludían a la participación de los estudiantes en la actividad demostrativa nos parecieron útiles para dar cuenta de los procesos de participación y materialización de la empresa conjunta que se proponía en el curso y del desarrollo de un repertorio de prácticas compartido (*v.gr.* ¿Cuáles son las tareas propias de la comunidad, asociadas a la actividad demostrativa, en las que participan los estudiantes?, ¿Qué tipo de demostraciones se elaboran en el curso? ¿Qué significados son objeto de negociación?). Estos elementos son señalados por Wenger (1998) como determinantes de la construcción significativa de conocimiento a través de la negociación.

Encontramos familiaridad entre el papel del experto de una comunidad y algunos aspectos contemplados en las preguntas asociadas al soporte brindado por la profesora a las prácticas matemáticas y sociales en el curso (*v.gr.* ¿Cómo logra la profesora una participación legítima de los estudiantes?, ¿De qué manera dirige la profesora la comunidad hacia la meta?, ¿Qué estrategias de gestión pone en práctica la profesora?). Desde nuestro punto de vista, la posibilidad real de evolución de la participación de los estudiantes en prácticas legítimas de la actividad demostrativa, depende en gran medida de la gestión del profesor, a quien consideramos el experto inicial de la comunidad y responsable de introducir a los miembros novatos en las prácticas propias de ésta.

---

tros de las bases de datos, los representamos con una P, por ejemplo, P1, P4 son los documentos primarios 1 y 4.

Otras preguntas estaban relacionadas con poner en evidencia el desarrollo de identidades de participación mediante el compromiso que los estudiantes adquieren con sacar adelante la empresa que tienen bajo su responsabilidad (*v.gr.* ¿Qué estudiantes intervienen y haciendo qué?, ¿Qué acciones de los estudiantes son consideradas por la profesora como revelantes y las estimula?). Las tuvimos en cuenta puesto que, como lo señala Wenger (1998), el compromiso mutuo es fuente de coherencia de la comunidad.

Adicionalmente, en nuestro estudio previo teníamos una categoría referida al papel de la geometría dinámica porque queríamos destacar su uso, poco común en la enseñanza de la demostración a nivel universitario en donde se pretende abordar aspectos formales de la demostración. Nosotros encontramos una relación entre este interés y el señalamiento que hace Wenger (1998) a la importancia de los recursos compartidos en la comunidad y cómo éstos favorecen los procesos de participación y materialización y son elemento fundamental de la negociación de significados. Por eso consideramos las preguntas que aludían al papel del programa informático de geometría dinámica (*v.gr.* ¿Para qué se usa la geometría dinámica en el desarrollo del contenido?, ¿Qué papel juegan las construcciones realizadas con geometría dinámica en el desarrollo del contenido?, ¿Qué aspectos de la práctica social favorece la geometría dinámica?).

La comparación hecha entre las categorías del estudio previo y las dimensiones que caracterizan una comunidad de práctica nos llevó a modificar el conjunto de preguntas que usamos para constituir los campos de la base de datos *BaseDatos2*. Al imaginar posibles relaciones entre la teoría de la práctica social y aspectos de la didáctica de la demostración, cambiamos de lugar algunas preguntas, eliminamos, propusimos o integramos otras. Construimos entonces un nuevo conjunto de preguntas con las cuales guiar nuestro primer ejercicio de codificación. (Anexo 2).

Comenzamos el proceso de codificación leyendo uno a uno los documentos primarios, señalando fragmentos de las transcripciones que nos daban indicios de alguno de los aspectos considerados en las preguntas y proponiendo un código correspondiente al fragmento seleccionado. El conjunto del fragmento junto con su código constituyó un extracto[8]. Con el mismo código marcamos fragmentos similares o inventamos un nuevo código cuando creíamos que el fragmento no correspondía a ninguno de los códigos previos. Por ejemplo, aquellos fragmentos

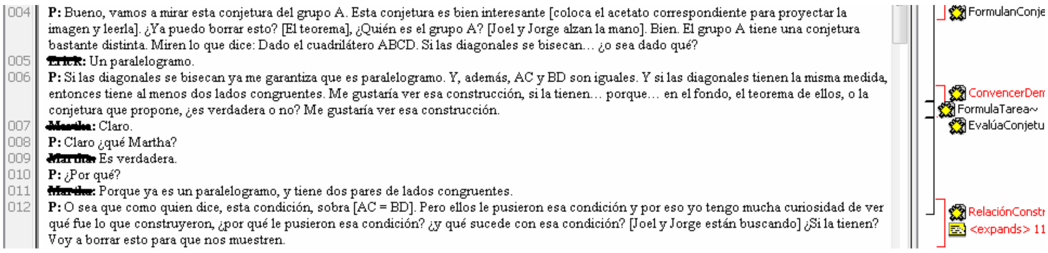
[8] En adelante llamaremos 'extracto' a un fragmento de transcripción asociado a un código o a un conjunto de códigos.

en donde se evaluaba una conjetura fueron marcados con el código EvaluaConjetura. En ese sentido, podemos decir que la codificación fue emergente -obtenida a partir de los datos-, y abierta, pues, aunque guiada por las preguntas de investigación y el marco teórico, no establecimos en ese momento relaciones entre unos códigos y otros.

El conjunto de códigos evolucionó a medida que encontramos regularidades en las intervenciones y vimos la necesidad de incluir o suprimir códigos. Por ejemplo, después de revisar los cinco primeros documentos primarios nos dimos cuenta de que algunos de los códigos inventados estaban referidos a aspectos muy amplios, lo cual producía pérdida de información relevante; por tal razón, nos vimos en la necesidad de transformarlos descomponiéndolos en varios códigos y volvimos a empezar el proceso de codificación. Esto fue lo que sucedió, por ejemplo, con el código PracArgVali, (práctica de validación por medio de la argumentación) con el cual queríamos organizar información relacionada con la argumentación deductiva, pero nos vimos en la necesidad de convertirlo en cinco códigos para poder diferenciar los siguientes aspectos específicos: AnalisisEnunciado: cuando la argumentación se refería al análisis de un enunciado; ArgumentoDeduc: si aludía a la producción de un argumento con miras a demostrar un enunciado; ComparaViaDemost: si se estaban comparando vías de demostrar; EvaluaViaDemost: si se trataba de evaluar una demostración; ConQueCuen: para el caso en que se estaban considerando enunciados del sistema que podían ser útiles para iniciar el proceso de demostrar. También tuvimos que eliminar códigos y reasignar fragmentos a códigos existentes cuando nos dimos cuenta que nos estábamos refiriendo con códigos distintos al mismo aspecto.

Después de terminar una primera asignación de códigos a todos los documentos primarios y con 72 códigos establecidos, comenzamos un proceso de depuración para revisar exactamente qué información se estaba organizando en cada código y lograr un descriptor completo y claro de cada uno. Para ello, en lugar de volver a leer cada documento primario y revisar los códigos asignados a los diferentes fragmentos decidimos tomar todos los extractos correspondientes a un código, revisar uno por uno y reasignar códigos en caso de necesidad o suprimir códigos que tenían menos de 6 fragmentos -por considerar que el aspecto contemplado no era relevante-. Adicionalmente, a medida que hicimos la revisión, elaboramos un conjunto de comentarios asociados a los extractos o a los códigos, que nos sirvieron para mejorar la descripción de cada código o para poner en evidencia aspectos claves para el análisis. Al terminar el proceso de depuración de códigos obtuvimos 54 códigos (Anexo 3). En ese proceso sacrificamos información que puede iluminar la complejidad de la práctica por la cantidad de elementos que intervienen (como el uso del lenguaje especializado de la geometría), pero ganamos en potencial analítico al poder concentrarnos en menos aspectos y hacer un estudio más detallado de éstos. Algunos de los códigos de dicha lista son: AutoriaDeAfirmac, AnalisisEnunciado, ArgumentoDeduc, CentraAtencion, ConQueCuen, ConstAuxi, DefineEmpresa, EntornoFavorable, EvaluaConjetura, FormuConjetu, FormulaTarea, PapelCabri, QueParaComoDemostrar.

La Figura 4.3, que corresponde a un trozo del documento primario P27 del archivo *CodificacionAbierta* del programa AtlasTi ilustra el ejercicio de codificación abierta, en un momento del proceso, cuando aún no habíamos definido los nombres de los códigos como quedaron establecidos finalmente[9].



004 **P:** Bueno, vamos a mirar esta conjetura del grupo A. Esta conjetura es bien interesante [coloca el acetato correspondiente para proyectar la imagen y leerla]. ¿Ya puedo borrar esto? [El teorema], ¿Quién es el grupo A? [Joel y Jorge alzan la mano]. Bien. El grupo A tiene una conjetura bastante distinta. Miren lo que dice: Dado el cuadrilátero ABCD. Si las diagonales se bisecan… ¿o sea dado qué?

005 [redacted]: Un paralelogramo.

006 **P:** Si las diagonales se bisecan ya me garantiza que es paralelogramo. Y, además, AC y BD son iguales. Y si las diagonales tienen la misma medida, entonces tiene al menos dos lados congruentes. Me gustaría ver esa construcción, si la tienen… porque… en el fondo, el teorema de ellos, o la conjetura que propone, ¿es verdadera o no? Me gustaría ver esa construcción.

007 [redacted]: Claro.

008 **P:** Claro ¿qué Martha?

009 [redacted] Es verdadera.

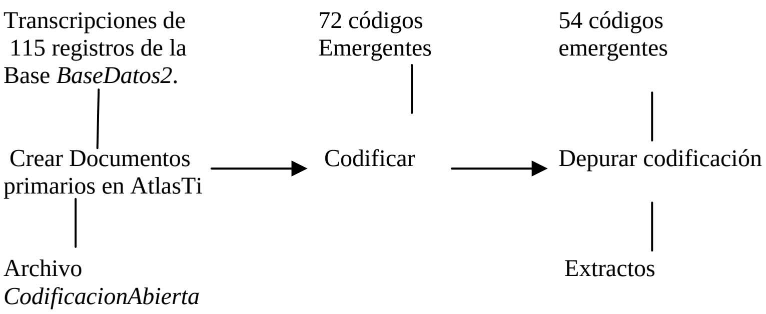
010 **P:** ¿Por qué?

011 [redacted]: Porque ya es un paralelogramo, y tiene dos pares de lados congruentes.

012 **P:** O sea que como quien dice, esta condición, sobra [AC = BD]. Pero ellos le pusieron esa condición y por eso yo tengo mucha curiosidad de ver qué fue lo que construyeron, ¿por qué le pusieron esa condición? ¿y qué sucede con esa condición? [Joel y Jorge están buscando] ¿Si la tienen? Voy a borrar esto para que nos muestren.

Figura 4.3: Ejemplo de codificación abierta realizado en el programa AtlasTi

En el Esquema 4.2 sintetizamos el proceso de codificación abierta que nos llevó a la obtención de 54 códigos emergentes, sus definiciones y los extractos de las transcripciones de las clases con ejemplos o casos del respectivo código. Usando el programa AtlasTi produjimos listados de extractos por cada documento primario, extractos por código y el listado de extractos de todo el archivo *CodificacionAbierta.*



Esquema 4.2: Proceso de codificación abierta

[9] Por ejemplo, el código ConvencerDemostrar se renombró posteriormente como QueParaComoDemost y el código RelacionConstruccionAfirmacion se renombro como ConjCons.

4.3.3. REDUCCIÓN DEL CONJUNTO DE DATOS. CONSTITUCIÓN DE EPISODIOS

Los listados que reporta el programa AtlasTi nos mostraron un panorama general sobre la actividad demostrativa en la que participaron los estudiantes, el papel desempeñado por la profesora y el uso del programa informático de geometría dinámica. Como el cúmulo de información desbordaba las posibilidades de un análisis en profundidad, que nos permitiera llegar a resultados no evidentes en una simple lectura interpretativa de las transcripciones, decidimos buscar una estrategia para reducir los datos, procurando no perder información relevante. A continuación describimos la estrategia usada.

En primer lugar, optamos por organizar los 115 documentos primarios, del archivo *CodificacionAbierta*, haciendo uso de la información contenida en uno de los campos de la base de datos *BaseDatos2*, en el que informamos de la estrategia de gestión que se privilegiaba en el fragmento de clase correspondiente a la transcripción del respectivo registro. Nos interesaba ver si podíamos descartar algunos documentos primarios en donde las estrategias empleadas no favorecieran especialmente la participación de los estudiantes; imaginábamos que probablemente serán los documentos primarios en donde la clase se centró en una explicación dada por la profesora o en la socialización de la producción correspondiente a una tarea. Esta decisión nos llevó a clasificar los documentos primarios en seis grupos (aunque unos documentos primarios quedaron incluidos en varios grupos). En la Tabla 4.3 presentamos cómo quedaron organizados los documentos primarios, según las principales estrategias de gestión de la clase impulsadas en cada uno.

Estrategia de gestión	Documentos primarios	Total
***Explicación – Profesora*:** La profesora se dirige a los estudiantes para explicar algo, repasar alguna idea o corregir alguna evaluación. En esos registros las intervenciones de los estudiantes son escasas y de poca importancia. La mayoría de interacciones corresponde a actividades de soporte instruccional tales como institucionalizar, corregir errores, establecer directrices, etc.	P1, P4, P11, P12, P16, P20, P33, P46, P51, P77, P89, 105.	12
***Clase-indagativa*:** La profesora lidera una conversación en la que espera que participen todos los estudiantes. A partir de preguntas hechas por ella, se va desarrollando una idea generalmente relacionada con un enunciado (postulado, definición o teorema) para analizar, demostrar o relacionar con los enunciados estudiados anteriormente. En estos registros la participación de los estudiantes es importante pues sus ideas son la base para lo que la profesora pregunta o desarrolla. La pregunta que reina en estas intervenciones	**P2**, P5, P6, P7, P23, P26, P29, P30, P31, P33, P34, P35, P39, P40, P43, P48, P55, **P66**, **P73, P74**, P76, P87, **P88**, **P90, P93**, P99, P108, P110.	28

Estrategia de gestión	Documentos primarios	Total
es "¿por qué?". En estos registros sucede a veces que la profesora da tiempo a los estudiantes para discutir en parejas acerca de alguna idea y luego socializar lo que hablaron para continuar el análisis.		
***Trabajo-grupo-construcción-Cabri*:** Los estudiantes trabajan en parejas un problema haciendo uso del programa Cabri. En esos registros se aprecia a los estudiantes interpretando el enunciado de un problema de construcción a medida que tratan de hacer la figura, haciendo exploraciones en busca de regularidades, formulando conjeturas y, en algunos casos, imaginando cómo justificar o demostrar la validez de una propiedad.	**P2,** P21, P22, P36, P43, P47, P50, P54, P59, P60, P61, **P62**, P63, P65, P71, P79, P86, **P88**, P101, P103, P106, P110.	22
Trabajo-colectivo-análisis-o-argumentación: Profesora y estudiantes, van proponiendo afirmaciones y posibles justificaciones para esbozar la demostración de un enunciado, en una interacción más verbal que escrita. Los estudiantes proponen vías para desarrollar una demostración, se analizan, se estudia su pertinencia, se completan, se corrigen, etc. En varias ocasiones se apoyan en alguna figura que representan en el tablero o que está en Cabri y escriben algunas afirmaciones pero no la demostración.	**P3**, P11, P12, P13, P17, P29, P32, P35, P41, P42, P48, P49, P52, P53, P55, **P66**, **P74**, P76, P81, P82, **P83, P84**, P85, **P87**, **P90**, P92, P94, P99, P100, P102, P106, P108, P109, P110, P111, P112, P113, P114.	38
***Trabajo-colectivo-demostración*:** Profesora y estudiantes producen entre todos la demostración de un teorema. Los estudiantes van sugiriendo afirmaciones y justificaciones y éstas se van analizando. Se mira si se puede afirmar algo, si la justificación es la adecuada, si conduce a algo interesante, si se ha usado toda la información dada, etc. A veces se escribe la demostración completa con afirmaciones y justificaciones, pero a veces se escriben las afirmaciones solamente y las justificaciones se hacen verbalmente.	P3, P8, P10, P19, P24, P27, P28, P42, P47, P64, **P66**, **P75**, P96, P99, P110, P111, P112, P113.	18
Socialización- producciones-privadas: Los estudiantes presentan al grupo sus producciones escritas para realizar una corrección pública y que los demás aprendan de ellas.	P9, P14, P15, P17, P18, P24, P25, P31, P37, P38, P39, P44, P45, P56, P57, P58, P67, P68, P69, P70, P72, P78, P79, **P80**, **P88**, P91, P95, P97, P98, P102, 105, 107, P112, P115	34
Total		152

Tabla 4.3: Clasificación de los registros según la principal estrategia de gestión de la clase[10]

[10] Los documentos resaltados con negrilla corresponden a los ejemplos a los que hacemos referencia al describir la estrategia de reducción.

La clasificación de los documentos primarios con relación a la estrategia de gestión de la clase fue útil para descartar algunos documentos primarios e incrementó nuestro grado de confianza en tener suficiente información para dar cuenta del aprendizaje de los estudiantes como participación en una comunidad de práctica de clase. Solamente en 12 de los 115 (10,4%) documentos primarios (*Explicación-profesora)* no había una intervención significativa de los estudiantes, lo que nos mostró que el ambiente de clase era de permanente diálogo e interacción. Sin embargo, de los 12 documentos primarios sólo descartamos ocho (P1, P4, P16, P20, P46, P51, P77, P89) porque los otros cuatro estaban incluidos en otras estrategias y podían contener información relevante para entender la participación de los estudiantes en algún asunto.

En segundo lugar, revisamos asunto por asunto[11] buscando en dónde aparecían los documentos primarios correspondientes, en la Tabla 4.3, para ver si había algunos asuntos que sobresalían por la mayor cantidad de estrategias implementadas. Al hacer esta revisión, pudimos identificar quince asuntos que son representativos de la práctica matemática que se llevó a cabo en el curso de geometría plana porque entre todos cubrían la totalidad de las estrategias de clase empleadas, incluían prácticamente todos los códigos del listado, abarcaban clases impartidas a lo largo del curso y tenían suficientes extractos para dar cuenta de la participación de los estudiantes. Cada uno comienza con una exploración hecha en el programa informático Cabri e incluye el estudio de definiciones, el análisis de conjeturas formuladas por los estudiantes, la socialización de argumentos para demostrar enunciados y la producción de alguna demostración, combinando las diversas estrategias de gestión de la clase. Veamos algunos ejemplos:

- El asunto 'Teorema de la recta' se desarrolla en las clases correspondientes a los documentos primarios P2 y P3, en donde se lleva a cabo *Trabajo-en-grupo-construcción-Cabri*, *Clase-indagativa*, y *Trabajo-colectivo-análisis-o-argumentación.*
- El asunto 'Teorema lado largo subtiende ángulo mayor' se desarrolla en la clase correspondiente al documento primario P88 únicamente, pero en ella se implementan tres estrategias: *Trabajo-en-grupo-construcción-Cabri, Clase-indagativa*, y *Socialización-de-producciones-privadas.*
- El asunto 'Triángulo isósceles-alturas' se desarrolla en las clases correspondientes a los documentos primarios P62, P66, P73, P74, P75, P80,

[11] Definimos 'asunto' en la sección 4.3.1.

P83, P84, P87, P90, P93 y en ella se implementan todas las estrategias, menos la *Explicación-profesora*.

Los quince asuntos abarcan 48 documentos primarios que agrupamos para constituir episodios y reducir el conjunto de datos para el análisis que reportamos en la presente investigación. En la Tabla 4.4 listamos el nombre dado a cada uno de ellos con una breve descripción y la mención de los documentos primarios del archivo *CodificaciónAbierta* de AtlasTi que componen el episodio. El nombre asignado a cada episodio es heredado del asunto correspondiente.

No.	Episodio	Documentos primarios
1	**Teorema de la Recta:** A raíz del interés de representar una recta en Cabri, surge la conjetura: 'una recta tiene al menos dos puntos'. En el episodio se hace la primera producción colectiva de la demostración de un teorema.	P2, P3
2	**Tres puntos no colineales determinan dos segmentos que se bisecan**: Se propone a los estudiantes encontrar, a partir de tres puntos *A*, *B* y *C* no colineales, un punto *D* tal que los segmentos *AB* y *CD* se bisequen. Los estudiantes hacen la construcción en Cabri respetando la norma de usar sólo procedimientos justificables teóricamente y luego proponen ideas para demostrar colectivamente el teorema correspondiente.	P22, P27, P28
3	**Ángulos opuestos por el vértice:** El interés por construir un ángulo congruente a otro, sin usar medidas, conduce a la definición de ángulos opuestos por el vértice, ángulos que son par lineal y ángulos adyacentes; adicionalmente se formula el teorema que establece la congruencia de los ángulos opuestos por el vértice y se lleva a cabo la demostración de este teorema.	P36, P42
4	**Bisectrices de ángulos que son par lineal:** Se propone a los estudiantes un problema que da lugar a conjeturar que las bisectrices de ángulos que son par lineal son congruentes. Se analizan diferentes enunciados relacionados con la conjetura y se identifica una vía para demostrar la conjetura.	P50, P52
5	**Existencia de perpendicular por punto de recta:** Se propone a los estudiantes, a partir de una construcción básica inicial, encontrar un punto *E* que cumpla ciertas características. Los procedimientos de construcción sugeridos por los estudiantes se asocian con conjeturas, una de las cuales conduce a tener que demostrar la existencia de la perpendicular a una recta dada por un punto de ésta.	P54, P55
6	**Existencia de perpendicular por punto externo a recta:** Se propone a los estudiantes construir un triángulo congruente con un triángulo dado. Las diferentes estrategias de construcción conducen a la formulación de conjeturas, una de las cuales requiere, para su demostración, poder afirmar que existe la perpendicular a una recta	P60, P64

No.	Episodio	Documentos primarios
	por un punto externo a ella. En el episodio se analizan las vías de construcción y se aceptan o no, según que el procedimiento tenga soporte teórico. Después, los estudiantes proponen diversas construcciones auxiliares hasta dar con una que permite demostrar el teorema.	
7	**Triángulo isósceles – alturas:** A raíz del problema de establecer una relación entre el tipo de triángulo y la propiedad 'dos de sus alturas son congruentes', surgen afirmaciones que conducen a tener que demostrar el teorema del triángulo isósceles, su recíproco y algunos otros teoremas relacionados con las líneas notables en el triángulo isósceles.	P62, P66, P73, P74, P75, P80, P83, P84, P87, P90, P93
8	**Teorema del ángulo externo:** Un problema que invita a identificar condiciones para las cuales un ángulo es mayor que otro conduce a la formulación de conjeturas, una de las cuales lleva a enunciar el teorema del ángulo externo. Además de proponer conjeturas y evaluar las conjeturas de los demás, los estudiantes sugieren construcciones auxiliares para poder demostrar el teorema.	P63, P76, P81
9	**Teorema de la mediatriz:** La identificación de un punto en el plano que cumple con ciertas condiciones dadas conduce a la formulación del teorema de la mediatriz y a la demostración del mismo, así como al interés por demostrar el teorema recíproco de éste. Las demostraciones se proponen colectivamente.	P71, P99, P100
10	**Bisectriz de $\angle BAC$ pasa por punto medio de $\overline{BC}$:** Se propone a los estudiantes identificar cuál debe ser la posición de los puntos B y C en el $\angle BAC$ para el cual la bisectriz del $\angle A$ se interseque con el $\overline{BC}$ en el punto medio. Los estudiantes formulan conjeturas que se contrastan con la exploración realizada en geometría dinámica y se demuestran.	P79, P85
11	**Criterio de congruencia hipotenusa – cateto:** La profesora solicita a los estudiantes analizar en qué casos lado-lado-ángulo puede ser un criterio de congruencia. Los estudiantes exploran diversas situaciones en geometría dinámica hasta dar con el criterio hipotenusa-cateto. Se realiza un trabajo de búsqueda de una construcción auxiliar que dé pie a la demostración de dicho criterio.	P86, P91, P94
12	**Teorema lado largo subtiende ángulo mayor:** Un problema de identificación de condiciones para las cuales un ángulo es mayor que otro conduce a la formulación de conjeturas, una de las cuales permite enunciar el teorema según el cual, el lado más largo de un triángulo subtiende al ángulo mayor. Los estudiantes elaboran argumentos para su demostración.	P88
13	**Teorema suma mínima de distancias $PQ + QR$:** Se propone a los estudiantes el problema de encontrar un punto R en una recta m para el cual la suma de las distancias de R a dos punto P y Q que se encuentran en el mismo semiplano determinado por m es la mínima.	P101, P102

No.	Episodio	Documentos primarios
	Surgen varias conjeturas, una de las cuales se demuestra y sirve de base para demostrar algunas de las otras.	
14	**Cuadrilátero de Saccheri:** Se pide a los estudiantes proponer conjeturas acerca de las propiedades geométricas de una figura que tiene ciertas condiciones dadas. La búsqueda de vías para demostrar una de las conjeturas da pie para introducir la definición de rectas paralelas, de ángulos correspondientes y ángulos alternos internos, así como para introducir el postulado de las paralelas. Se demuestran algunos teoremas asociados con la identificación de rectas paralelas.	P103, P105, P108, P109
15	**Tipo de cuadrilátero y diagonal biseca a la otra diagonal:** A raíz del problema de identificar el tipo de cuadrilátero para el cual una diagonal biseca a la otra se van conjeturando y demostrando diferentes propiedades del paralelogramo, el rectángulo, el rombo y el cuadrado.	P106, P110, P111, P112, P113, P114

Tabla 4.4: Episodios escogidos para el análisis y lista de documentos primarios que los componen

De cada uno de los 15 episodios elaboramos una narración atendiendo al orden cronológico en el que sucedieron las principales actividades, de tal suerte que la lectura permite una reconstrucción de los aspectos generales de los segmentos de las clases en donde se trata el asunto (ver Anexo 4). Para aclarar la relación entre los episodios escogidos y el desarrollo del contenido en cada unidad temática, en la Tabla 4.5 presentamos los principales problemas propuestos a los estudiantes y los componentes del sistema axiomático tratados, resaltando en negrilla el asunto elegido para analizar en el episodio. En el Anexo 5 se encuentran los enunciados del listado de postulados, definiciones y teoremas que se incluyen en la tabla.

Unidad	Principales problemas	Temas tratados
Unidad 1: Puntos, rectas, y subconjuntos de la recta.	Representar una recta en Cabri. Estudiar las relaciones entre dos puntos representados en Cabri. Representar en Cabri tres puntos que cumplan la ecuación de interestancia. ¿Cómo garantizar que existe un segmento? Construir el rayo opuesto a un rayo dado. Construir el punto medio de un segmento. ¿Cómo garantizar que el rayo *AB* y el rayo *BA* son diferentes?	Términos no definidos. Postulados: Relación punto – recta – plano; Correspondencia puntos en recta – números; De la recta; Correspondencia puntos – números; De la distancia; De la colocación de la regla. Definiciones: Distancia entre dos puntos; Coordenada de un punto; Distancia de un punto a sí mismo; puntos colineales; Interestancia; Segmento; Longitud de segmento; Congruencia de segmentos; Rayo; Rayos opuestos; Punto medio;

Unidad	Principales problemas	Temas tratados
	¿Cómo convertimos la recta en una regla? **A partir de tres puntos *A, B* y *C* no colineales, construir un punto *D* tal que los segmentos *AB* y *CD* se bisequen. (a) Describir el procedimiento de construcción justificando cada paso del mismo. (b) Escribir el teorema que el resultado de este problema permite enunciar. (c) Demostrar el teorema.**	Bisecar; Equidistancia. Teoremas: **Recta;** Relación de interestancia – orden; Segundo teorema de interestancia; Tercer teorema de interestancia; Orden entre puntos; Localización de puntos; Existencia y unicidad del punto medio; Punto medio; Existencia y unicidad del rayo opuesto.
Unidad 2: Plano, rectas, puntos	¿Cuántos puntos hay en el plano? ¿Cuáles son las relaciones entre tres puntos? ¿Pueden estar tres puntos en una recta? ¿Tienen que estar en una única recta? ¿Es posible afirmar que dos puntos *A* y *B* son colineales? ¿Cuántas rectas de un plano pueden contener un punto dado? ¿Dos puntos? ¿Cuántos puntos contiene la intersección de una recta *l* y un plano *E* que no contiene a *l?* ¿Cuántos planos contienen a dos rectas que se intersecan? ¿Es todo plano un conjunto convexo?	Postulados: Amplitud del plano; Llaneza del plano; Del plano; Separación del plano. Definiciones: Puntos coplanarios; Conjunto convexo; Semiplano. Teoremas: Una recta y un punto determinan un plano; Dos rectas intersecantes determinan un plano; Separación del plano; Interestancia un mismo lado de la recta; Interestancia lados opuestos de la recta; Semirrecta.
Unidad 3: Ángulos	Dados los ángulos *ABC* y *CBA* hallar la intersección y la unión entre ellos. Dado un ángulo *A*, ¿qué condiciones debe cumplir un ángulo *B* para ser congruente con *A?* Dados dos ángulos *A* y *B*, construir un ángulo tal que la medida sea la suma de las medidas de *A* y de *B.* Construir dos ángulos adyacentes congruentes. **Estudiar la situación, formular una conjetura y justificar la respuesta: Sean *BA* y *BE* rayos opuestos y *BK* otro rayo. Sean *BG* y *BD* las bisectrices de los ángulos *ABK* y *KBE* respectivamente, ¿Cuál debe ser la posición del rayo *BK* para que la medida del**	Postulados: Medida de ángulos; Construcción de ángulo; Adición de medida de ángulos; Par lineal. Definiciones: Ángulo; Interior de ángulo; Medida de ángulo; Par lineal; Ángulos opuestos por el vértice; Ángulos adyacentes; Ángulos suplementarios; Ángulos complementarios; Ángulo recto; Segmentos y rectas perpendiculares; Bisectriz de un ángulo; Ángulo agudo, Ángulo obtuso. Teoremas: **Ángulos opuestos por el vértice son congruentes**; Existencia y unicidad de la bisectriz; Ángulos complementarios son agudos; Ángulos congruentes y suplementarios; Suplemento de

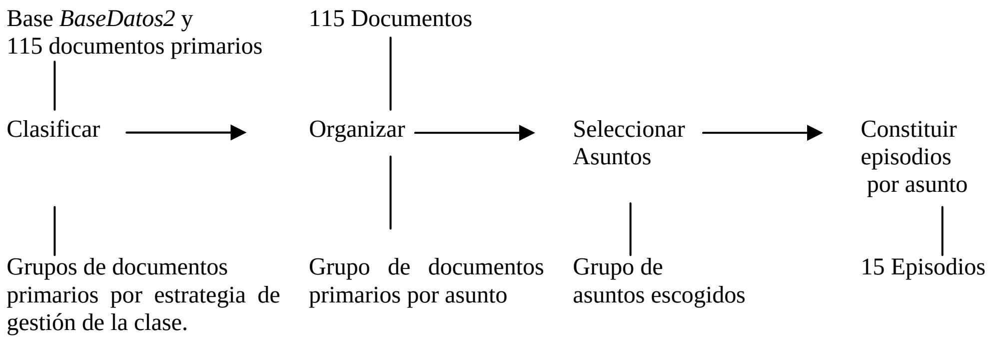
Unidad	Principales problemas	Temas tratados
	ángulo *GBD* sea la máxima? Estudiar la situación, formular una conjetura y justificar la respuesta: Sean $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ rayos opuestos y *AD* otro rayo ¿Es posible determinar un punto *E* en el mismo semiplano en el cual está *D*, para el que el $\angle BAD$ sea complementario con el $\angle CAE$?	ángulos congruentes; Complemento de ángulos congruentes; Cuatro ángulos rectos; Interior de ángulo; **Existencia de perpendicular por punto en recta.**
Unidad 4: Triángulos	Construya el triángulo *GHI* tal que m$\angle G$ = 35º, *GH* = 1.5 y *HI* = 1 $\overleftrightarrow{PC} \perp \overleftrightarrow{KM}$, con *K-P-M*. Sea *A* un punto $S_{\overleftrightarrow{KM},C} \cap S_{\overleftrightarrow{PC},K}$. ¿Cómo se determina la posición de un punto *B* para que $\Delta ACP \cong \Delta BCP$? Justifique su respuesta. **Estudiar la relación entre el tipo de triángulo y la propiedad: dos de sus alturas son congruentes. Escribir: a. el proceso de construcción; b. las conjeturas que se establecen.** Dibujar un Δ *MOP* y construir un punto *K* sobre la recta *MP*. ¿Cuándo es m$\angle OKP$ > m$\angle OMK$? Escribir a) el proceso de construcción; b) las conjeturas que se establecen. Dada una recta *m* y un punto *P* que no esté en ella. a) Para $R \in m$, hallar *Q* en el semiplano opuesto a aquel en que está *P* tal que *QR* = *PR*. b) Repetir el mismo proceso con tres puntos más de la recta *m*. c) ¿Existe un punto *X* en ese semiplano para el cual su distancia a cualquier punto *Y* de la recta es igual a la distancia de ese punto a *P?* Si es el caso, caracterizar a *X*. d) Justificar la respuesta. **En el ángulo *A* se escogen dos puntos *B* y *C*, uno a cada lado. ¿Cuándo está el punto medio del segmento *BC* en la bisectriz del ángulo *A*? Justificar la respuesta.** Explorar si bajo ciertas condiciones	Postulados: Correspondencia lado – ángulo – lado; Correspondencia ángulo – lado – ángulo; Correspondencia lado – lado – lado; Bisectriz – lado opuesto del triángulo. Definiciones: Triángulo; Interior de triángulo; Congruencia de triángulo; Triángulo isósceles; Altura de triángulo; Mediana de triángulo; Ángulo externo; Ángulo interno no contiguo a ángulo externo; Distancia punto – recta. Teoremas: **Existencia de perpendicular por punto externo a recta**; Congruencia de ángulos rectos; Medida de ángulos; Medida de ángulo que forma la bisectriz; Coplanariedad del triángulo; Triángulo isósceles; Recíproco del triángulo isósceles; **Ángulo externo**; Ángulos de la base de un triángulo isósceles; Congruencia lado – ángulo – ángulo; **Hipotenusa – cateto**; Ángulo mayor – lado mayor; **Lado mayor – ángulo mayor;** Alturas interiores; Triángulo isósceles – alturas congruentes; Recíproco del triángulo isósceles; Congruencia triángulos isósceles; Alturas exteriores; Altura y mediana del triángulo isósceles; Triángulo – ángulos rectos; Distancia mínima; Desigualdad triangular; Charnela; Recíproco de la Charnela; **Mediatriz;** Recíproco de la mediatriz.

Unidad	Principales problemas	Temas tratados
	de los triángulos, se puede admitir que lado-lado-ángulo sea un criterio de congruencia de triángulos. Dibuje un triángulo *MOP* y construya un punto *K* sobre la recta *MP*. (b) En el triángulo *OKP*, ¿qué condición obliga a que m$\angle$*OKP* > m$\angle$*OPK*?	
Unidad 5: Cuadriláteros	**Se da una recta *m* y dos puntos *P* y *Q* en el mismo semiplano determinado por *m*. Determinar el punto *R* de *m* para el cual la suma de las distancias *PR* + *RQ* es la menor. a) Describir el procedimiento geométrico para encontrar la posición de *R*; b) Formular una conjetura; c) Escribir los pasos principales de la demostración de la conjetura.** **Construir una figura *ABCD* (Figura 69) con las siguientes características: el $\angle$*D* y el $\angle$*C* son rectos, y el segmento *AD* es congruente con el segmento *BC*. Luego de tenerla, responder la siguiente pregunta ¿Qué se puede demostrar acerca de los ángulos *A* y *B*?** **Determinar la relación entre el tipo de cuadrilátero y la propiedad: una diagonal biseca a la otra.**	Postulados: Paralelas. Definiciones: Rectas paralelas; Recta secante; Ángulos alternos internos; Ángulos correspondientes; Cuadrilátero; Cuadrilátero convexo; Diagonal de cuadrilátero; Paralelogramo; Rectángulo; Trapecio; Rombo; Cuadrado. Teoremas: Rectas perpendiculares a una misma recta; Ángulos alternos internos congruentes – rectas paralelas; Ángulos correspondientes congruentes – rectas paralelas; Ángulos alternos internos congruentes; Existencia de recta paralela por punto externo; Rectas paralelas – ángulos correspondientes congruentes; Rectas paralelas – ángulos alternos internos congruentes; Cuadrilátero cuyas diagonales se bisecan; Paralelogramo – diagonales se bisecan; Paralelogramo cuyas diagonales se bisecan; Cuadrilátero con pares de lados opuestos congruentes; Ángulos opuestos del paralelogramo; Paralelogramo – vértices en el interior de ángulos; Diagonales de paralelogramo se intersecan; Suma de medidas de ángulos interiores; Medida de ángulo externo; Paralelogramo con diagonales congruentes; Ángulos del rectángulo; Cuadrilátero con diagonales perpendiculares que se bisecan; Paralelogramo con diagonales perpendiculares y congruentes; Cuadrado – diagonales congruentes y

Unidad	Principales problemas	Temas tratados
		perpendiculares; Diagonales del rectángulo; Diagonales de rombo bisecan ángulos; Cuadriláteros con lados opuestos paralelos y congruentes; Segmento por puntos medios; Ángulos alternos internos suplementarios; Rectas paralelas a una misma recta.

Tabla 4.5: Ubicación de los episodios en la Unidad de Enseñanza

Después, elaboramos un listado de los códigos utilizados en cada episodio con su correspondiente conjunto de extractos. En el Esquema 4.3 sintetizamos el proceso de reducción de datos para configurar episodios.



Esquema 4.3: Estrategia de reducción de datos

4.3.4. CODIFICACIÓN AXIAL E IDENTIFICACIÓN DEL CONJUNTO PRINCIPAL DE DATOS

A pesar del esfuerzo hecho para reducir el conjunto de datos, aún teníamos en nuestras manos más de 1600 extractos y nos era difícil manejar tanta información para el análisis. Por ello, nos dimos a la tarea de establecer relaciones entre códigos, subordinando unos a otros y ubicándolos en relación a aspectos específicos de la teoría de la práctica social de Wenger (1998). Al hacerlo, privilegiamos aquellos códigos que nos daban información sobre las finalidades de participación de los estudiantes en la actividad demostrativa y sobre la evolución de dicha participación pues decidimos centrar la mirada especialmente en esos dos aspectos y emplear los demás códigos para explicar y contextualizar la participación. La decisión adoptada nos llevó a realizar una codificación axial que describimos a continuación.

Los fragmentos de clase ubicados en cada código de los 15 episodios seleccionados comenzaron a ser vistos como posibles indicadores de una rutina del repertorio de prácticas asociado a la actividad demostrativa. Incluso, al revisar uno a uno los fragmentos asociados al código AnalisisEnunciado nos dimos cuenta que, en los 15 episodios escogidos, este análisis se refería únicamente al estudio de una definición y entonces incluimos esta rutina dentro del conjunto de prácticas asociadas a la actividad demostrativa, decisión que luego fundamentamos con referentes teóricos (Moore, 1994; Linchevsky, Vinner y Karsenty, 1996; Bills y Tall, 1998, citados en Calvo, 2001; Hemmi, 2006).

El conjunto de los 54 códigos comienzo a tener una primera organización a medida que unos códigos se agrupaban alrededor de un aspecto de la teoría. Relacionados con la Empresa Conjunta, agrupamos los códigos que se referían al oficio de la comunidad (DefineEmpresa, QueValora, IdentifNecesidTeo, RasgosSistema), al significado de demostrar negociado en la clase (QueParaComoDemost, SobreDemost) y a aspectos del entorno que favorecían o perjudicaban la consecución de la empresa (EntornoDesfavora, EntornoFavorable). Relacionados con el Repertorio de prácticas de la comunidad, agrupamos los códigos que se referían a las rutinas de explorar (ArrastreCabri, EstrategiaConstuc, ExplorCabri, PapelCabri, ProcedimientoTeoria, ProcesoCabri), conjeturar (ComparaConjeturas, ConjCons, EvaluaConjetura, FormuConjetu, GeneralEnun, PropoContraej), definir (AnalisisEnunciado), argumentar (ArgumentoDeduc, ConstrucExplica) y demostrar (ConQueCuento, EvaluaViaDemostrar, GradoFormalidad, ParticulariEnunci, ProducDemostrac, ConstucAuxiliar, ProponeViaDemost, RelaFiguraEnunci). Relacionados con el Compromiso mutuo, agrupamos los códigos que hacían referencia a una identidad de participación (AsumeResponsabil, DefineIdentidad), la afiliación a la comunidad (AutoriaAfirmacion, InventanNombres, PreguntaGenuina) y la originalidad de ideas sugeridas por los estudiantes (CompletaDemost, ContribuciónImport, ControvierteArgumen, DefiendeIdea). Y en relación con el papel del experto, agrupamos los códigos referidos a la organización del trabajo en clase (AsignaResponsabil, FormulaTarea, OrganizaAportes, RecuerdaNormSocial, RegulaContenido), a la gestión de la actividad matemática (ComparaViaDemost, DesbloqueaDemost, HaceOperatEnunci, Institucionaliza, RecapitulaProceso, SintetizaDemost) y a la gestión de la interacción (CentraAtencion, Parafrasea, RecuerdaNormSMat).

Después de organizar los códigos, volvimos a revisar las transcripciones de cada uno de los 15 episodios buscando criterios para decidir en qué aspectos centrarnos para hacer un análisis detallado de las finalidades de participación y de la evolución de ésta. El programa AtlasTi fue particularmente útil porque nos permitió localizar en la transcripción los fragmentos correspondientes a los códigos que nos interesaban, de manera rápida y eficaz, sin perder la visión global del episodio, que intentábamos mantener revisando las transcripciones y no únicamente los extractos. La revisión nos llevó a tomar las siguientes decisiones con respecto al análisis:

- Los códigos incluidos en Repertorio de Prácticas, excepto los correspondientes a la rutina de explorar, se constituyeron en códigos principales porque recogían aspectos relevantes de la participación de los estudiantes, en los que queríamos centrarnos. La rutina de explorar no se analizó en forma independiente sino en su relación con los aspectos de dicha práctica que condicionan la manera como los estudiantes participan de las demás rutinas; por esa razón, los códigos agrupados en la rutina de explorar se consideraron códigos subordinados y los aspectos allí recogidos sirvieron para dar cuenta del contexto en donde emergían las ideas sugeridas por los estudiantes para su participación en las demás rutinas. Por ejemplo, los extractos correspondientes al código ExplorCabri se usaron para mostrar de dónde pueden surgir ideas para el análisis de una definición y los extractos incluidos en el código ProcedimientoTeoria sirvieron para explicar de dónde surgían ideas para algunas demostraciones.
- No consideramos como códigos principales aquellos correspondientes al papel del experto. La información recogida en ellos se usó para complementar los análisis de la participación de los estudiantes, cuando el extracto contenía dichos códigos, pues evidentemente el papel de la profesora en la organización, gestión de la interacción y actividad matemática, condiciona y determina las posibilidades de evolución de la participación de los estudiantes. Somos conscientes de que el papel del experto puede ser objeto de un análisis especial y principal pero decidimos privilegiar la mirada en el aprendizaje, dejando en segundo plano al profesor.
- Los códigos en los que organizamos información sobre aquellas interacciones referidas a la empresa conjunta y al compromiso mutuo tampoco se consideraron como códigos principales. La información obtenida a partir de ellos se contrastó con resultados del análisis de la participación al momento de dar cuenta de éste. Específicamente, con relación a la empresa conjunta, consideramos que su constitución no puede verse como un asunto de ‘declaración’ sino de ‘declaración y puesta en funcionamiento’. En ese sentido, también consideramos dichos códigos como subordinados a los códigos principales.

Las decisiones anteriores nos llevaron a restringir el conjunto de datos a los extractos correspondientes a los códigos principales. Estos extractos se constituyeron en el conjunto principal de datos usado para el análisis en profundidad. En el Esquema 4.3 sintetizamos el proceso de codificación axial, identificación de códigos principales y subordinados y definición del conjunto definitivo de datos para realizar el análisis en profundidad.

54 Códigos

Agrupar códigos → Escoger códigos principales → Subordinar códigos

Episodios escogidos

Grupos de códigos según teoría

Códigos principales
Códigos subordinados

Extractos correspondientes a los códigos principales.

Esquema 4.3: Definición de códigos principales y subordinados y del Conjunto definitivo de datos

4.3.5. REFINAMIENTO DEL CONJUNTO DE CÓDIGOS PRINCIPALES RELACIONADOS CON LAS RUTINAS QUE CONFORMAN EL REPERTORIO DE PRÁCTICAS

La organización de códigos en principales y subordinados nos permitió limitar los extractos para un análisis a profundidad, a aquellos correspondientes a los códigos principales. Volvimos a revisar uno a uno los extractos y, con la mirada puesta específicamente en aquellos aspectos contemplados en los códigos principales, nos concentramos en interpretar la participación de los estudiantes en cada una de las rutinas escogidas, en términos de los 'modos de hacer' o 'modos de decir'. Esta revisión nos condujo a refinar la codificación para ampliar o reorganizar los aspectos ya contemplados en los códigos principales. A continuación describimos el proceso de codificación fina con el cuál analizamos cada intervención correspondiente a los extractos de los 15 episodios escogidos para el análisis a profundidad.

En el caso de Definir y dado que esta rutina no se consideró dentro del conjunto de prácticas de la actividad demostrativa desde un comienzo, solo contábamos con un código principal (AnalisisEnunciado) que nos permitió recopilar todos los extractos de los episodios en donde se llevó a cabo una acción, conversación o discusión relacionada con definir (episodios 2, 3, 4, 7, 8, 9 y 15). Un análisis de cada intervención de dichos extractos nos condujo a distinguir las siguientes situaciones, con su correspondiente código, en las que participaron los estudiantes, dentro de las cuáles está la que denominamos ExplorCabri, redefinida para el caso específico del tratamiento dado a las definiciones (Tabla 4.6):

Definir:	ConsDef	Contribución a la producción de una definición sugiriendo o rechazando propiedades o encauzando la interacción hacia la producción de una definición. (Ver ejemplo en sección 6.1, p. 150).
	DefDem	Uso de una definición en una demostración, examinando qué propiedades útiles pueden derivarse de ésta o cuáles son suficientes para establecer su necesidad. (Ver ejemplo en sección 6.1, p.144).
	Definf	Enunciación de una definición en lenguaje informal a partir de la idea intuitiva que se tiene de la figura geométrica o del término al que se alude. (Ver ejemplo en sección 6.1, p.140).
	DefSis	Escogencia de la definición que conviene al sistema axiomático o de qué términos conviene usar en una definición. (Ver ejemplo en sección 6.1, p. 154).
	Equiva	Establecimiento de la equivalencia de dos definiciones bien sea porque coinciden o porque partiendo de una se llega a la otra mediante una cadena deductiva. (Ver ejemplo en sección 6.1, p.152).
	ExplorCabri	Exploración en Cabri de propiedades geométricas presentes en una definición o asociación de una representación hecha en Cabri con la imagen conceptual que se tiene. (Ver ejemplo en sección 6.1, p.148).
	IdPrDef	Identificación, en una definición, de qué propiedades del objeto o término definido quedan determinadas, explícita o implícitamente, por su enunciado o a qué objeto se refiere una definición dada. (Ver ejemplo en sección 6.1, p. 140).
	IdPrFa	Identificación en un no-ejemplo de las propiedades que le faltan para servir como representación geométrica de un objeto definido. (Ver ejemplo en sección 6.1, p.142).
	IdPrRe	Identificación en una representación geométrica de las propiedades suficientes que caracterizan la figura o el término representado. (Ver ejemplo en sección 6.1, p.152).
	ReDefRe	Rechazo de una propuesta de definición proponiendo una representación que cumple con las propiedades establecidas pero no corresponde a la figura o término definido. (Ver ejemplo en sección 6.1, p.150).
	RepDef	Elaboración de una representación geométrica que ilustra la definición con un gesto, en papel y lápiz, en el tablero o en Cabri, a partir de la imagen conceptual que se posee. (Ver ejemplo en sección 6.1, p.148).

Tabla 4.6: Codificación fina para el tratamiento de definiciones

En el caso de Conjeturar, inicialmente teníamos 6 códigos con los cuáles pudimos identificar los extractos de clase de los episodios en donde los estudiantes participan en alguna acción o conversación correspondiente al tratamiento de conjeturas en el curso (episodios 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 15): ComparaConjeturas, ConjCons, EvaluaConjetura, FormuConjetu, GeneralEnun, PropoContraej. Al revisar detalladamente cada uno de los extractos con el fin de codificar cada interacción nos vimos en la necesidad de:

- Incluir nuevos códigos para distinguir acciones o conversaciones específicas que inicialmente habíamos incluido en los extractos anteriores.

- Subordinar algunos códigos a otros: el código ConjCons quedó subordinado a EvaluaConjetura, ya que parte de la evaluación de los enunciados correspondía a establecer la correspondencia con la construcción hecha; y el código GeneraEnun quedó subordinado a FormuConjetu, pues el resultado de la generalización de un enunciados es precisamente la formulación de una conjetura.

- Desligar del código EvaluaConjetura las acciones o intervenciones que apuntaban a determinar la aceptabilidad de las conjeturas dejando, sólo aquellas referidas a la revisión del enunciado formulado. La aceptabilidad (Acepta) de las conjeturas y su deducibilidad (Deduci) se ligaron a la acción de argumentar.

En la Tabla 4.7 presentamos la organización de códigos para la actividad de Conjeturar.

Conjeturar:	ComparaConjeturas:	Semeja	Comparación de conjeturas estableciendo semejanzas entre ellas. La comparación está relacionada con el contenido al que se alude, las propiedades incluidas en el antecedente y el consecuente, la redacción o la conclusión que se extrae. El código se asigna tanto a las intervenciones en donde se hace la comparación, como en aquellas donde se impulsa a hacerla. (Ver ejemplo en sección 6.2, p.155).
		Difere	Comparación de conjeturas estableciendo o diferencias entre ellas. La comparación está relacionada con el contenido al que se alude, las propiedades incluidas en el antecedente y el consecuente, la redacción o la conclusión que se extrae. El código se asigna tanto a las intervenciones en donde se hace la comparación, como en aquellas donde se impulsa a hacerla.
	EvaluaConjetura:	Condici	Formulación o no de una expresión condicional. El código se asigna cuando la evaluación lleva a decidir si se admite o no un enunciado como una conjetura según sea o no una expresión condicional.
		ConjCons	Concordancia o no con la construcción hecha. El código se asigna a las intervenciones que impulsan la revisión de la concordancia entre la conjetura y la construcción, en donde se describe la construcción con el fin de establecer la concordancia o en donde la evaluación se refiere específicamente a ella. (Ver ejemplo en sección 6.2, p.156).
		ConjPr:	Relación o no de la conjetura con el enunciado del problema. El código se asigna a las intervenciones que aluden a la relación entre las propiedades mencionadas en la conjetura y en el enunciado del problema, como a aquellas en donde se relaciona la conclusión obtenida en la conjetura con la pregunta formulada.

- ConjSi: Alusión o no a propiedades geométricas incluidas en el sistema axiomático, o justificables con la teoría disponible. El código se asigna cuando la evaluación impulsa o establece la relación entre la conjetura y los enunciados del sistema axiomático que se tiene hasta el momento. (Ver ejemplo en sección 6.2, p.164).
- Enunci: Identificación de propiedades faltantes o sobrantes en el enunciado para que éste sea aceptado. El código se asigna a las intervenciones en donde se impulsa o se lleva a cabo la revisión de las propiedades incluidas en el enunciado, pero no con la intención de reformular la conjetura. (Ver ejemplo en sección 6.2, p.158).

FormuConjetu:

- Afirma: Reescritura de conjeturas que han hecho uso de negaciones para usar proposiciones afirmativas y favorecer su interpretación, su comparación y su evaluación. El código se asigna a las intervenciones en donde se menciona el uso de negaciones, se pide la reescritura y ésta se lleva a cabo. (Ver ejemplo en sección 6.2, p.159).
- ForIni: Formulación inicial, resultado de la resolución del problema en parejas, la discusión de ésta entre los integrantes del grupo y su escritura para entregar a la profesora y someterla a evaluación. El código se asigna a las intervenciones en donde las conjeturas se presentan públicamente para comenzar la interacción comunicativa alrededor de ellas. (Ver ejemplo en sección 6.2, p.169).
- Format: Reescritura en formato si-entonces para favorecer su interpretación y futura demostración. El código se asigna cuando se impulsa la reescritura, se lleva a cabo o se presenta la conjetura modificada en el formato si-entonces. (Ver ejemplo en sección 6.2, p.169).
- GeneralEnun: Reescritura de una conjetura como una expresión general para favorecer la explicitación de propiedades geométricas importantes. El código se asigna a las intervenciones que impulsan este tipo de reformulación, aquellas en donde se lleva a cabo y en donde se propone la conjetura reformulada.
- Reform: Reformulación con base en la evaluación pública para incluir, modificar o suprimir propiedades y lograr un enunciado aceptable por el grupo. El código se asigna a las intervenciones en donde se impulsa a la reformulación, se lleva a cabo la acción o se presenta la conjetura reformulada. (Ver ejemplo en sección 6.2, p.171).
- Notaci Corrección o no de la notación empleada en la escritura de la conjetura. El código se asigna a las intervenciones que hace referencia a la notación o impulsan su revisión. (Ver ejemplo en sección 6.2, p.171).

PropoContraej:

- Ejempl Proposición de ejemplos para apoyar la evaluación de la conjetura. Los códigos se asignan a las intervenciones que impulsan o proponen representaciones geométricas que ejemplifican la condicional establecida en la conjetura. (Ver ejemplo en sección 6.2, p.166).

Contraej	Proposición de contraejemplos para apoyar la evaluación de la conjetura. Los códigos se asignan a las intervenciones que impulsan o proponen representaciones geométricas que refutan la condicional establecida en la conjetura. (Ver ejemplo en sección 6.2, p.169).
Noejem	Proposición de no-ejemplos para apoyar la evaluación de la conjetura. Los códigos se asignan a las intervenciones que impulsan o proponen representaciones geométricas que no cumplen el antecedente de la condicional establecida en la conjetura. (Ver ejemplo en sección 6.2, p.170).

Tabla 4.7: Codificación fina para el tratamiento de conjeturas

En el caso de Argumentar, habíamos considerado dos códigos: ArgumentoDeduc, para codificar fragmentos de interacción de los episodios en donde se aprecia un discurso razonado que usa argumentos o de plausibilidad o deductivos tendentes a proporcionar las afirmaciones y justificaciones para admitir una conjetura o proponer la demostración (episodios 1, 2, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15), y el código ConstrucExplica, para aquellas intervenciones en donde los estudiantes establecen espontáneamente una relación entre una construcción hecha (generalmente en Cabri) y el por qué de una propiedad geométrica puesta en juego o descubierta; teníamos el interés de analizar la utilidad del proceso constructivo en la construcción de una argumentación. Revisando en detalle los extractos correspondientes, decidimos:

- Incluir dentro de la rutina de argumentar los códigos Acepta y Deduci que se referían a conversaciones o discusiones tendentes a determinar la aceptabilidad de una conjetura, para ser consistentes con la definición adoptada para ‘argumentar’ en nuestro marco teórico, pues en ella hacemos referencia a la búsqueda de la plausibilidad de una conjetura.
- Identificar en las intervenciones correspondientes a argumentaciones deductivas la estructura ternaria subyacente, usando el modelo de Toulmin (1978) para distinguir los componentes de una argumentación. Así el código ArgumentoDeduc se separa en varios códigos, uno para cada componente de la estructura.
- Dejar sin subordinar el código ConstrucExplica aunque el procedimiento de construcción puede ser una de las reglas usadas por el argumentador.

En la Tabla 4.8 proponemos la organización de códigos para la rutina de Argumentar:

Argumentar	Acepta		Aceptación o no de la conjetura por parte del grupo. El código se asigna cuando las intervenciones impulsan una revisión sobre la sostenibilidad de la conjetura, o se admite a rechaza la conjetura en forma explícita. (Ver ejemplo en sección 6.2, p.165).
	Deduci		Deducibilidad a partir de los enunciados del sistema axiomático. El código se asigna a las intervenciones que apuntan a describir la vía para demostrar la conjetura, mostrando que la conjetura se puede demostrar con la teoría disponible. (Ver ejemplo en sección 6.2, p.167).
	ArgumentoDeduc	Conclu:	Idea o conclusión de la que el argumentador quiere convencer al auditorio. (Ver ejemplo en sección 6.3, p.174).
		Datos:	Datos que el argumentador presenta como evidencia iniciales de donde parte para llegar a la conclusión. Estos pueden ser hechos, información, figuras o ejemplos. (Ver ejemplo en sección 6.3, p.174).
		Regla:	Explicaciones que hace el argumentador sobre la manera como la conclusión se obtiene de los datos, generalmente en forma de una regla, permiso de inferir o principio que sirve de fundamento para conectar los datos con las conclusiones. La regla puede ser teórica o fruto de una concepción o creencia derivada de un sistema de prácticas. En todo caso, es la *razón* principal de la aceptación o de la refutación del argumento. (Ver ejemplo en sección 6.3, p.174).
		Soporte:	Nuevos elementos con los que reacciona el argumentador ante el cuestionamiento o la duda de la audiencia, o porque considera que así su argumentación quedará más completa, sobre la garantía usada para conectar los datos con la conclusión. Cuando la regla se pone en duda, es necesario entonces respaldarla o apoyarla con algunas justificaciones que constituyen el soporte de lo dicho. (Ver ejemplo en sección 6.3, p. 174).
		Refuta	Intervención en donde se refuta una argumentación bien sea porque no se acepta la regla usada o no se admite la conclusión que se saca de esta. (Ver ejemplo 1 en sección 6.3, p.174).
	ConstrucExp:		Establecimiento espontáneo de una relación entre la construcción hecha y una explicación del por qué de una propiedad geométrica puesta en juego o descubierta.

Tabla 4.8: Codificación fina para las interacciones correspondientes a una argumentación

En cuanto a la rutina de Demostrar, habíamos considerado ocho códigos con los cuales identificamos los fragmentos de clase que tenían que ver con la producción colectiva de una demostración (episodios 1, 2, 3, 4, 7, 10, 12, 15). La revisión detallada de las interacciones nos llevó a separar el código ProducDemostrac en varios códigos que nos permiten dar cuenta más detallada de la participación en la producción de demostraciones, especialmente en la organización deductiva de las afirmaciones. Tomamos como base para la codificación el análisis del razonamiento deductivo que propone Duval (2007), para separar las intervenciones según el estatus operativo que adopten. En la Tabla 4.8 presentamos la organización de códigos asumida para el análisis. Ella no pretende mirar qué tipo de demostración es o qué esquema de prueba sino las finalidades de participación de los estudiantes.

Demostrar:	ConQueCuen		Resume la información disponible en la comunidad, que puede usarse en una demostración. (Ver ejemplo en sección 6.4, p.188).
	ConstrAux		Sugiere una construcción auxiliar para enriquecer una representación en busca de ideas para la demostración. (Ver ejemplo en sección 6.4, p.188).
	EvalViaDem		Evalúa una propuesta de argumentación para hacer una demostración. (Ver ejemplo en sección 6.4, p.189).
	GradoFormalidad	Lenguaj:	Propone afirmaciones para articular los pasos de la demostración a manera de proposiciones que hacen uso del lenguaje especializado acordado y la simbología geométrica correspondiente. (Ver ejemplo en sección 6.4, p.187).
		Rigor:	Identifica la necesidad de elaborar un razonamiento previo para poder hacer una afirmación, de acuerdo al rigor exigido en la clase. (Ver ejemplo en sección 6.4, p.190).
	ParticulariEnunci		Expresión de un enunciado general usando nombres de objetos representativos del conjunto del cual se emite la afirmación.
	ProducDemostrac	CondIni:	Parte de las condiciones iniciales como los datos o lo único “dado” para comenzar la demostración. Lo dado puede estar explícito o corresponder a las propiedades geométricas “declaradas” de los objetos presentes en el antecedente de la conjetura. (Ver ejemplo en sección 6.4, p.184).
		CondSuf:	Examina en las afirmaciones previas y declara explícitamente si están las condiciones suficientes para poder hacer una afirmación, a manera de consecuente. (Ver ejemplo en sección 6.4, p.184).
		ConclNe:	Hace explícita la conclusión necesaria de las condiciones suficientes y la justificación mencionada. (Ver ejemplo en sección 6.4, p.184).
		ContrCon:	Controla que el proceso se dirige hacia la conclusión final que se quiere demostrar. (Ver ejemplo en sección 6.4, p. 184).
		Justif:	Propone la justificación correspondiente para sacar una conclusión como necesaria de las condiciones suficientes. (Ver ejemplo en sección 6.4, p.184).
	ProponeViaDemost		Sugerencias sobre caminos para hacer la demostración, aun cuando éstos no sean correctos o apropiados.
	RelaFigEnunci		Referencia explícita al uso de las figuras en las demostraciones.

Tabla 4.9: Codificación fina para las interacciones correspondientes a la producción de una demostración

En el Esquema 4.4 sintetizamos el proceso de codificación fina que hacemos para las rutinas escogidas correspondientes a los códigos principales.

Códigos principales

Nuevo listado de códigos para cada intervención.

Revisar códigos

Modificar el conjunto de códigos

Extractos correspondientes a los códigos principales.

Esquema 4.4: Obtención del listado definitivo de códigos mediante la codificación fina

La lista completa de los descriptores de los códigos secundarios que usamos en los análisis se encuentra en el Anexo 3. En la Tabla 4.10 listamos aquellos que se usan en los extractos que usamos en los siguientes capítulos para dar cuenta del análisis.

ArrastreCabri:	Alusiones al uso del arrastre que permiten identificar para qué lo usan los estudiantes o la profesora.
FormuTarea:	Intervenciones de la profesora, que dan comienzo a la actividad matemática en el episodio.
Institucionaliza:	Intervenciones, de la profesora, en donde ella pone en correspondencia la producción de la comunidad, con práctica cultural de referencia.
PapelCabri:	Alusiones hechas por la profesora o los estudiantes sobre el papel que juega Cabri en el curso.
Parafrasea:	Intervenciones, hechas por la profesora, en donde se aprecia el parafraseo con el objeto de favorecer la comunicación.

Tabla 4.10: Códigos secundarios empleados en los extractos que ejemplifican el análisis

4.4. RESULTADO DEL PROCESO DE CONSTITUCIÓN DEL CUERPO PRINCIPAL DE DATOS Y DEL SISTEMA DE CÓDIGOS PARA EL ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN

El proceso descrito a lo largo de este capítulo nos condujo a la identificación de un conjunto de extractos correspondientes a los códigos principales de los 15 episodios escogidos como representativos de la clase de geometría plana. Podemos decir que el proceso de constitución de la herramienta de análisis corrió de la mano con el proceso de reducción de datos para obtener la información específica en dónde centrar el análisis a profundidad. Partir de todas las transcripciones e ir reduciendo los datos en un proceso analítico, basado en la perspectiva teórica, nos asegura que los extractos en los que nos basamos para el análisis son representativos del conjunto de fenómenos del que queremos dar cuenta. Por otro lado, los procesos de codificación abierta, codificación axial y refinamiento de la codificación nos aseguran que los análisis profundo de los extractos escogidos tienen la riqueza de la historia de la codificación hecha; es decir, se basan en los códigos principales, pero las explicaciones e interpretaciones de los fenómenos se enriquecen gracias a los códigos que se conforman a lo largo del proceso. En los capítulos seis y siete, en donde damos cuenta de los análisis realizados, mostramos ejemplos del proceso que seguimos con los extractos escogidos.

CAPÍTULO 5

DESCRIPCIÓN DE LA ENSEÑANZA EXPERIMENTAL

En este capítulo informamos acerca de la enseñanza experimental que sirve de contexto a la investigación. Ésta se lleva a cabo en un curso universitario de geometría plana del programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional (Bogotá, Colombia), que forma profesores de matemáticas para la educación secundaria y media. En primer lugar presentamos algunas características del curso; después, mencionamos algunos aspectos didácticos relacionados con la planeación que se previó con el ánimo de impulsar el aprendizaje de la demostración matemática y finalmente describimos circunstancias específicas de la implementación.

5.1. CARACTERÍSTICAS DEL CURSO DE GEOMETRÍA PLANA

En la primera sección hacemos una breve descripción de la enseñanza experimental señalando sus características generales con el ánimo de presentar una visión global de la misma. Después, nos referimos a la ubicación del curso en el currículo del programa de formación, mencionamos los propósitos instruccionales, hacemos referencia al contenido matemático de la enseñanza y cómo se desarrolla ésta y terminamos con la descripción del acercamiento didáctico implementado.

5.1.1. DESCRIPCIÓN GENERAL DE LA ENSEÑANZA EXPERIMENTAL

El curso universitario de geometría plana correspondiente a la enseñanza experimental se desarrolló entre el 5 de febrero y el 19 de junio de 2007, durante 53 sesiones de clase; fueron 82 horas en total. Cada semana había tres sesiones de clase, dos de ellas de 2 horas de duración y la otra de una hora. Una de las sesiones de dos horas se hacía en una sala de cómputo en donde se tenía acceso al programa informático de geometría dinámica Cabri instalado en computadores. Las otras clases se hicieron en un salón, con los pupitres dispuestos en medida luna, al cual se llevaban diez calculadoras gráficas que tienen instalado el programa Cabri, un retroproyector y una pantalla para proyectar en la pared las imágenes obtenidas en las calculadoras. Los estudiantes podían disponer de las calculadoras en cualquier momento. Aunque oficialmente las clases debían impartirse los lunes, martes y jueves, algunas de ellas se llevaron a cabo los viernes, cuando circunstancias particulares obligaban a cancelar algunas de las clases previstas.

El contenido matemático del curso experimental se refiere a una porción de un sistema axiomático de geometría euclidiana plana, estructurado en cinco unidades temáticas (ver Tabla 4.5), con referencia a una organización deductiva típica que se refiere a relaciones entre puntos, rectas, plano, ángulos, triángulos y cuadriláteros. Propiedades de triángulos y cuadriláteros, así como los criterios de congruencia de triángulos se constituyen en herramientas esenciales para demostrar.

La actividad de los estudiantes gira en torno a problemas que se resuelven dentro y fuera de la clase y que buscan involucrar a los estudiantes en la actividad demostrativa. Algunos problemas llevan al descubrimiento de relaciones entre objetos y propiedades geométricas, la formulación de una conjetura y su validación dentro del sistema teórico disponible. Es el caso del problema que pide determinar la relación entre el tipo de cuadrilátero y la propiedad ‘una diagonal biseca a la otra’. Otros problemas requieren la búsqueda de una construcción geométrica de acuerdo a ciertas condiciones. Los estudiantes deben encontrar el procedimiento de construcción y validarlo. Por ejemplo, ‘construir el punto medio de un segmento’ fue uno de los problemas propuestos en una clase.

Los problemas propuestos para hacer fuera de clase difieren de los realizados en clase en dos aspectos: unos, resueltos en parejas, dan lugar a enunciados que se formulan a manera de conjeturas y que se demuestran, pero no necesariamente se incorporan al sistema axiomático a manera de teoremas, pues no siempre son indispensables para construir cadenas deductivas; por ejemplo, ‘los segmentos AP y BC se bisecan en el punto N y los segmentos AC y BQ se bisecan en el punto K ¿qué características interesantes tiene el punto C?’.Otros problemas pretenden que los estudiantes se ejerciten individualmente en el uso de enunciados del sistema axiomático para demostrar algunas afirmaciones. Por ejemplo, ‘desde el punto medio de uno de los lados de un triángulo se trazan segmentos perpendiculares a los otros dos lados; demostrar que si los segmentos son congruentes, el triángulo es isósceles’.

El desempeño de los estudiantes es evaluado mediante pruebas escritas, reportes periódicos de los enunciados institucionalizados y la participación en clase. Las pruebas escritas son realizadas individualmente o en parejas; los problemas planteados pedían demostrar n teorema no estudiado aún, completar los pasos de una demostración sugerida en forma incompleta, justificar algunas afirmaciones relacionadas con los objetos o relaciones estudiados o resolver un problema en el cual deben encontrar una conjetura y justificarla, haciendo uso de Cabri. Por ejemplo, en la última comprobación del curso, los estudiantes debían estudiar qué cuadrilátero se formaba al unir los puntos medios de un paralelogramo.

5.1.2. UBICACIÓN DEL CURSO DE GEOMETRÍA PLANA EN EL PROGRAMA DE FORMACIÓN

El programa de licenciatura en matemáticas del cual hace parte el curso denominado Geometría Plana procura impartir una formación matemática, pedagógica y didáctica, a lo largo de diez semestres académicos, en un currículo en donde la línea de matemáticas cubre las áreas de álgebra (teoría de números, algebra lineal, estructuras algebraicas), geometría (euclidiana, no euclidiana, analítica y topología), cálculo (diferencial, integral, en varias variables y análisis matemático) y estadística (descriptiva e inferencial), y la formación pedagógica y didáctica teórico-práctica se centra en la reflexión sobre las matemáticas escolares, su enseñanza y su aprendizaje y en la realización de prácticas educativas en contextos formales y no formales de la educación matemática básica y media[1].

El curso Geometría Plana es el segundo de la línea de geometría —conformada por seis cursos— y está ubicado en el segundo semestre del programa. En el primer curso de la línea, denominado Elementos de Geometría, se establece el primer contacto que tienen los estudiantes con la geometría, en la universidad. A partir de un acercamiento informal a conceptos, relaciones y propiedades geométricas, los alumnos reconstruyen o amplían su panorama geométrico y desarrollan competencias necesarias para poder asumir, en el siguiente semestre, un curso de geometría plana ajustado a un sistema axiomático.

El curso Elementos de Geometría se introdujo en el currículo de la licenciatura en el año 2000 como respuesta a la necesidad de crear un espacio académico para apoyar la superación de deficiencias en la formación en geometría de los estudiantes del programa de licenciatura, que por lo general entran a la universidad con muy poco conocimiento en este dominio. Aunque los lineamientos que orientan el currículo de la educación básica y media en Colombia desde 1998 enfatizan en la necesidad de desarrollar el sentido espacial y habilidades de razonamiento geométrico, es muy poco el impacto de estas ideas en la población estudiantil que

[1] En Colombia, la carrera de Matemáticas forma matemáticos profesionales para el desempeño en investigación, industria o docencia universitaria y la carrera de Licenciatura en Matemáticas forma específicamente profesores de matemáticas para la enseñanza básica y media (hasta los 17-18 años).

accede a la licenciatura (Camargo et al., 2008); en su mayoría, son estudiantes de niveles socioeconómicos bajos, egresados de instituciones educativas oficiales con pocos recursos y bajos índices en la calidad de la enseñanza que imparten.[2] Por tales razones, se procura que en el curso Elementos de Geometría los estudiantes avancen, entre otras cosas, en el aprendizaje de la visualización geométrica de figuras, la argumentación matemática fundamentada y la generalización de propiedades geométricas de triángulos y cuadriláteros, sin tener que enfrentarse aún con el aprendizaje de la demostración.

Desde el año 2004 los profesores responsables de la línea de geometría, entre quienes se encuentra la autora de la presente tesis, hemos venido implementando un proceso de innovación en el curso de Geometría Plana en el que se han hecho ajustes al diseño y al desarrollo curricular en busca de aumentar la probabilidad de éxito en el objetivo de que los estudiantes aprendan a demostrar. Además, aunque el curso hace parte del componente matemático de la formación en la licenciatura, tenemos la premisa de que las experiencias que los estudiantes viven durante su formación matemática son determinantes de la gestión que ellos realicen como profesores de matemáticas en su futuro desempeño profesional (McNeal y Simon, 2000; Wilson y Lloyd, 2004). Por eso, en el curso de Geometría Plana nos preocupamos por que los estudiantes logren un aprendizaje sobre la demostración matemática que no sólo les permita enfrentar las exigencias del contexto matemático formal de su carrera universitaria, sino que también alcancen una visión amplia de la demostración y de sus funciones; esperamos que adquieran el compromiso de gestionar ambientes favorables al aprendizaje de la demostración en cualquier nivel escolar en donde ejerzan como profesores.

5.1.3. PROPÓSITOS DEL CURSO DE GEOMETRÍA PLANA

El propósito del curso Geometría Plana es generar para los estudiantes un espacio y oportunidades de aprendizaje de la demostración matemática en geometría euclidiana plana no sólo desde el punto de vista disciplinar de las matemáticas sino también desde el punto de vista pedagógico. En consonancia con este propósito, esperamos que los estudiantes aprendan a demostrar – haciendo uso de postulados, definiciones y teoremas- al participar en la construcción de una organización

[2] En los exámenes de admisión para entrar a la carrera se evidencia que la mayoría de los candidatos tienen muy bajos desempeños en geometría. Prácticamente su conocimiento se limita al reconocimiento de algunas figuras geometrías prototípicas, la clasificación de triángulos según el tamaño de los lados y de los ángulos y fórmulas básicas para calcular perímetros y áreas de algunas figuras planas.

deductiva relacionada con figuras planas. Pretendemos que adquieran una visión amplia de la demostración y del papel que ésta tiene como actividad fundamental del quehacer matemático y como recurso de comprensión y de argumentación, ligado a las prácticas culturales de diversas comunidades en donde se usan las matemáticas. Algunos objetivos específicos del curso buscan que los estudiantes:

- Ganen confianza en su capacidad de explorar con miras a formular conjeturas.
- Adviertan que además de la validación de un enunciado, la demostración tiene como funciones la explicación del mismo, el vínculo de éste con otros enunciados en una organización deductiva y la comunicación de ideas.
- Ganen confianza en su capacidad de justificar fundamentados en una teoría.
- Comiencen a formarse una idea de lo que es un sistema axiomático y de lo que significa trabajar dentro de tal sistema.

Antes de que se emprendiera la innovación de la que damos cuenta en esta sección, desde nuestra perspectiva, el curso pretendía ofrecer a los estudiantes un espacio para el aprendizaje de un cierto contenido geométrico. Los profesores presentaban un sistema axiomático específico, con base en un texto guía. Los estudiantes debían aprender, de manera individual, axiomas, definiciones y teoremas a la vez que se ejercitaban en la elaboración de demostraciones imitando los esquemas de demostración ejemplificados por el profesor, con ejercicios tomados del libro, sin que esto fuera objeto de tratamiento didáctico en la clase.

Esta manera habitual de exponer el contenido matemático en los cursos de nivel universitario es criticada desde hace algún tiempo por algunos matemáticos y educadores matemáticos (de Villiers, 1986; Hanna, 1990; Alsina, 2001; Mason, 2001; Herbst, 2002). En una síntesis realizada por de Villiers (1986) sobre estas críticas, el autor menciona que este acercamiento presenta una visión irreal de la naturaleza de las matemáticas, propicia una visión distorsionada de lo que es crear en matemáticas, no ilustra la naturaleza arbitraria de un sistema de axiomas, niega a los estudiantes la oportunidad de participar en la construcción de un sistema axiomático, disminuye la posibilidad de que los postulados, definiciones y teoremas sean significativos a los estudiantes, promueve el aprendizaje por memorización sin buscar comprensión y se pierden oportunidades para que los estudiantes lleven a cabo acciones propias de la actividad matemática tales como conjeturar, generalizar y argumentar. Así que bajo esta aproximación metodológica no hay una etapa de familiarización con los objetos matemáticos relativos al tema que se estudia, previa a la aparición de los enunciados del sistema axiomático y el contenido matemático se presenta al estudiante como prefabricado.

La apreciación que teníamos del curso nos permite suponer que los estudiantes que lo tomaban desarrollaban una visión estrecha de la demostración matemática, caracterizada principalmente por desconocer acciones matemáticas involucradas en la actividad demostrativa, lo que posiblemente los llevaba a creer que la demostración no puede ser actividad central de la matemática escolar y que su enseñanza en secundaria o en educación media no promueve aprendizaje significativo. De continuar con este tipo de formación, probablemente los profesores egresados de la licenciatura no harían esfuerzos sistemáticos por enseñar a demostrar y las experiencias matemáticas de las siguientes generaciones de estudiantes de esos niveles probablemente seguirían siendo pobres o nulas en ese dominio, con las consecuencias que de ello se derivan para su formación matemática y el desarrollo de su razonamiento.

Así, en calidad de formadores de profesores de matemáticas, tomamos conciencia de la doble responsabilidad que tenemos con respecto al aprendizaje de la demostración: no solamente tenemos que apoyar a nuestros estudiantes para que aprendan a demostrar sino que las experiencias de aprendizaje que tengan al respecto les han de servir como referentes y ejemplos para el ejercicio de su profesión; a través de tales experiencias, se aportan elementos para la visión que pueden llegar a construir sobre lo que es demostrar, el papel que juega la demostración en la actividad matemática, etc. En ese sentido, la innovación que emprendimos en el año 2004 se ha ocupado de hacer modificaciones a un curso centrado en la enseñanza directa de contenidos geométricos para crear un espacio académico centrado en el aprendizaje de demostración en el campo de la geometría plana.

5.1.4. CONTENIDO MATEMÁTICO DE LA PROPUESTA DE ENSEÑANZA

Al referirnos al contenido matemático del curso usamos la expresión ‘sistema axiomático’ para hacer referencia al conjunto de términos no definidos (en este caso: punto, recta y plano) y enunciados relacionados con ángulos, triángulos y cuadriláteros que se organizan lógicamente mediante cadenas deductivas, de tal suerte que cualquier nuevo enunciado que se quiera incluir debe ser demostrado a partir de los enunciados que se han incorporado previamente al conjunto (Blumenthal, 1965). El término “enunciado” en relación con un sistema axiomático hace referencia a una sentencia que se formula usando los términos universales y los términos no definidos del sistema (Wilder, 1968). Entre los enunciados que integran un sistema axiomático se diferencian claramente por su estatus teórico (Duval, 2007), los 'axiomas o postulados' que son afirmaciones básicas acerca del tema que se axiomatiza, supuestas como verdaderas sin que ello signifique que tienen carácter universal; las 'definiciones' que contribuyen a asignar y delimitar el significado de los objetos involucrados en el tema y las relaciones entre ellos; y los 'teoremas' que son afirmaciones obtenidas por argumentación lógica a partir de definiciones, axiomas y otros teoremas del sistema.[3]

La expresión 'geometría euclidiana' es usada por diversos matemáticos (Meserve, 1955; Blumenthal, 1965; Fishback, 1962) para referirse a axiomatizaciones que se encuentran en consonancia con la formalización hecha por Euclides en su libro Los Elementos, pero que incorporan nuevos conocimientos. Con esta expresión aludimos a una geometría obtenida a partir de los cinco postulados de Euclides, pero independientemente de que todos los enunciados se encuentren en el libro de Euclides; la expresión se usa como una manera de establecer un contraste con geometrías que no admiten el quinto postulado.

La reconstrucción del sistema axiomático a lo largo del curso de geometría plana, sigue una vía parecida a la propuesta por Moise y Downs (1970) para un curso de geometría plana y espacial, dirigido a estudiantes de primeros semestres universitarios, la cual a su vez se fundamenta en una modificación del conjunto de postulados propuesto por Birkhoff (1884-1944). El libro de Moise y Downs (1970) sirvió de texto adoptado para el curso durante varios años hasta el segundo semestre de 2006. En la enseñanza experimental, base de la presente investigación, decidimos prescindir de él pues teníamos la intención de que los estudiantes experimentaran una auténtica reconstrucción de un sistema axiomático, aunque dirigida por la profesora, teniendo como referente la propuesta de estos autores. Algunos elementos importantes para señalar en relación a la porción del sistema axiomático que se intenta reconstruir en el curso son:

- Se introducen postulados y teoremas para algunas relaciones que Euclides usa sin formalizar y otras que Moise y Downs tampoco lo hacen, buscando, en lo posible, ser consistentes con la idea de articular todas las ideas usadas al interior del sistema axiomático que se construye. Así, se

[3] Wilder (1968) incluye en el sistema axiomático el conjunto formado por los términos no definidos, los axiomas y los teoremas deducidos de éstos. Nosotros vamos más allá al incluir también las definiciones.

incluye un postulado para admitir que las rectas y el plano son conjuntos de puntos, se institucionaliza la definición de interestancia y algunos teoremas de ordenación (que denominamos teoremas de interestancia). Sobre estos últimos, tomamos la idea del libro de Moise y Downs, aunque la primera introducción de enunciados para la relación de interestancia se debe al matemático Mortiz Pasch (1882, citado en Blumenthal, 1965).

- Se introducen dos postulados que no están en la propuesta de Moise y Downs pero que surgen como necesidades teóricas en algún momento. El primero, el postulado del par lineal[4], que se propone cuando aún no se han definido los ángulos suplementarios, y que posteriormente se redefine en forma similar al postulado del suplemento, que sí se encuentra en la propuesta de Moise y Downs. El segundo, un postulado que garantiza la existencia de los puntos de intersección de las bisectrices de los ángulos interiores de un triángulo con los lados opuestos a los vértices. Aunque en el libro de Moise y Downs se propone como teorema y, en estricto sentido, se tienen los elementos teóricos necesarios para poder hacer la demostración, la profesora lo sugiere como postulado por la complejidad técnica que conlleva la demostración, la cual demandaría varias sesiones de trabajo que ella prefiere ocupar en actividades matemáticas más provechosas para los estudiantes.
- Desde el comienzo de la formulación del sistema axiomático se establece la relación biunívoca entre los puntos de la recta y los números reales, a manera de postulado[5]. A partir de ésta, se introduce un sistema de coordenadas, introducción que originariamente se debe a Bolyai (1637, citado en Blumenthal, 1965), y con éste, la noción de distancia, que es un invariante poderoso de la geometría euclidiana. Al introducir los números reales, éstos se incorporan al sistema como un cuerpo ordenado y las propiedades de éste se constituyen en herramientas válidas para las demostraciones.

---

[4] Postulado del par lineal: si dos ángulos forman un par lineal, entonces la suma de sus medidas es 180. Redefinición: si dos ángulos forman un par lineal, entonces son suplementarios.

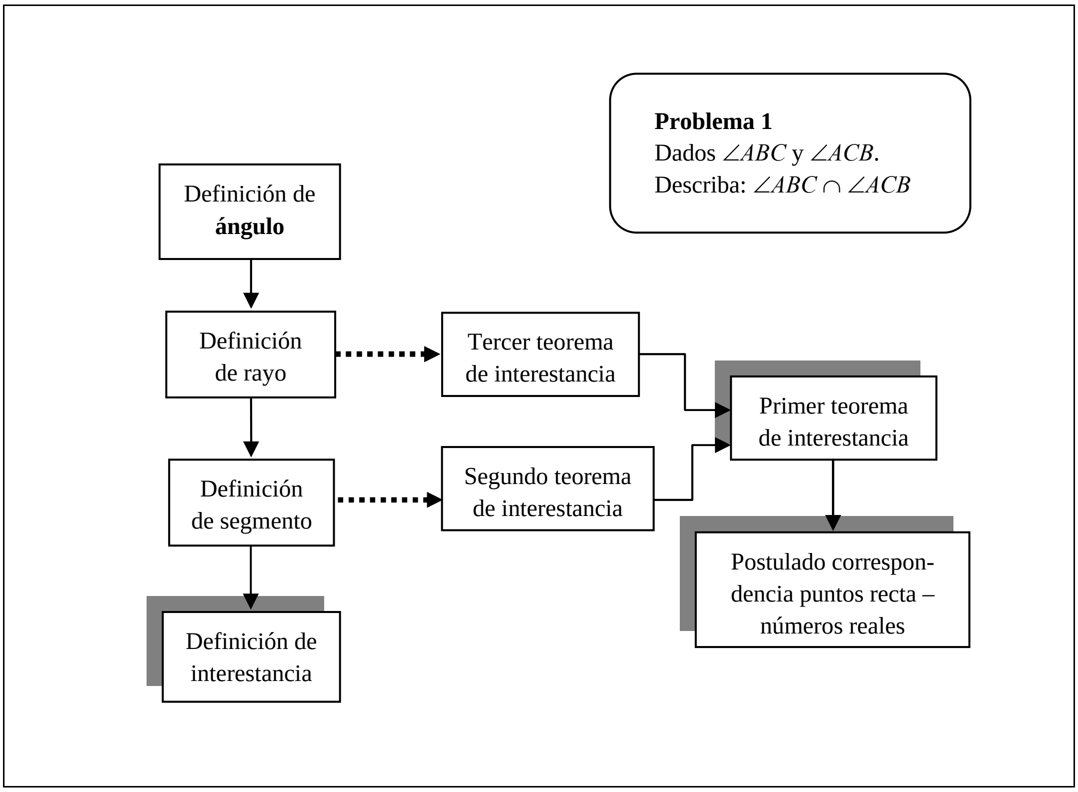
[5] Aunque en otras axiomatizaciones esta relación es considera como teorema (Teorema de Cantor – Dedekin, citado en Blumenthal, 1965) y se hace su demostración. Esta aproximación está fuera del alcance de la propuesta que hemos diseñado, porque requiere de un mayor conocimiento matemático que el que poseen los estudiantes de segundo semestre.

- La definición de ángulo que se institucionaliza en el curso difiere de las sugeridas por Euclides (siglo IV a.c.): la inclinación mutua de dos líneas que se encuentran una a otra en un plano y no están en línea recta y por Arnauld (alrededor de 1667): parte de un plano comprendida entre dos semirrectas que tienen origen común. Estas definiciones no se refieren específicamente a una figura geométrica sino a una relación (la inclinación) o a una región (parte del plano). En el curso se usa la definición propuesta por Hilbert en 1988: la unión de dos rayos que tienen el mismo origen y están contenidos en rectas diferentes, de la misma forma que lo hacen Moise y Downs, para garantizar que el ángulo sea una figura geométrica coplanar. En ese sentido, en el curso no se considera que puedan existir ángulos llanos o planos formados por rayos colineales. Adicionalmente, al introducir el Postulado de la medida de ángulos se especifica un rango para las medidas entre 0 y 180 (sin incluir éstos).

Como el acercamiento didáctico que se implementa en el curso, al que nos referimos en la próxima sesión, busca que los estudiantes participen genuinamente de la reconstrucción del sistema axiomático, éste no resulta ser exacto a la propuesta de Moise y Downs y en cada versión se produce un conjunto diferente de postulados, definiciones y teoremas; además el momento en el que se introducen los enunciados varía según las necesidades teóricas de las situaciones que surjan en un momento dado, por lo que no hay una forma fija de secuenciar el contenido.

Por ejemplo, en la versión del curso que nos ocupa, se introduce como primer teorema del sistema axiomático el teorema de la recta: ‘una recta tiene por lo menos dos puntos’. Este teorema no aparece en el texto de Moise y Downs, pero surge como una propuesta de un estudiante fruto de la resolución de un problema. A pesar de lo dicho, el sistema axiomático que se obtiene es similar al de Moise y Downs pues la profesora hace esfuerzos sistemáticos por acercar la producción de los estudiantes al sistema de referencia que ella conoce; por ello, aprovecha cualquier circunstancia en donde sea oportuno incluir una definición, un postulado o teorema para hacerlo. En el Anexo 5 se encuentra la lista de enunciados que componen el sistema axiomático construido en la versión del curso correspondiente a la enseñanza experimental base de esta investigación.

En el Esquema 1 presentamos, a manera de ejemplo, la organización del sistema axiomático comprometido en la solución de un problema, el cual llamamos sistema axiomático local. Este da lugar a las definiciones de ángulo, rayo, segmento y a dos teoremas de interestancia. Mediante flechas que vinculan parejas de elementos teóricos indicamos que para definir, postular o demostrar un enunciado (origen de la flecha) se requiere el segundo enunciado (al cual apunta la flecha). En el esquema se señalan con sombra las cajas correspondientes a los elementos que ya forman parte del sistema, fruto de un trabajo previo; los otros elementos surgen como necesidades teóricas en el curso de la actividad y se introducen para poder solucionarlo. Resolver el problema que aparece en el recuadro superior derecho pone en juego ocho elementos teóricos de los cuales se tenían previamente sólo tres (el Postulado de correspondencia entre puntos de una recta y números reales, la definición de interestancia y el Primer teorema de interestancia) y, por tanto, es necesario introducir los restantes (definición de ángulo, definición de rayo, definición de segmento, Segundo teorema de interestancia y Tercer teorema de interestancia). Es importante notar que según el grado de detalle y de rigor con el que se esté haciendo el estudio del tema e incluso el enfoque adoptado se pueden tener organizaciones diferentes para el mismo tema. En nuestro caso, las definiciones de rayo y segmento, basadas en la definición de interestancia, obligan a introducir los teoremas respectivos.



Esquema 5.1: Ejemplo de sistema axiomático local

5.2. ACERCAMIENTO DIDÁCTICO

En esta sección mencionamos características particulares de la implementación con el objeto de que el lector se haga una idea global del desarrollo de ésta. Primero, hacemos referencia a la forma como se desarrolla en contenido del curso. A continuación, destacamos algunos elementos fundamentales de la generación de un entorno favorable para aprender a demostrar, tales como las tareas matemáticas que llevan a cabo los estudiantes, los dispositivos didácticos que se ponen en juego para favorecer la interacción comunicativa, las normas sociales y sociomatemáticas que rigen la participación de los estudiantes en el curso y el papel que juega la geometría dinámica.

5.2.1. DESARROLLO DEL CONTENIDO

Una aproximación alternativa a la presentación del contenido por parte del profesor, que nosotros procuramos en la enseñanza experimental, se caracteriza por involucrar a los estudiantes, desde el momento en que se inicia el desarrollo de un contenido, en la resolución de problemas[6] de índole geométrica como medio de lograr que sean ellos quienes descubran, conjeturen y produzcan inicialmente justificaciones informales. Esto está en consonancia con la primera fase de una 'aproximación descriptiva' sugerida por Freudenthal para la educación secundaria (1973), quien señala la pertinencia de participar en la práctica de axiomatizar –que a nuestro juicio corresponde a la acción de sistematizar, tal como la definimos en el marco teórico - y propone para ello considerar dos fases: una informal en la que se obtienen de manera intuitiva resultados que se verifican; y otra que consiste en la organización deductiva de los resultados familiares que fueron previamente aceptados en la primera fase.

Al resolver los problemas, los estudiantes tienen la oportunidad de negociar interpretaciones sobre la tarea misma, reconocen el espacio de trabajo común y alcanzan un cierto grado de familiaridad[7] con los objetos geométricos sobre los que versarán los enunciados que harán parte del sistema axiomático que se construya. Además, descubren hechos geométricos y al intentar explicar informalmente por qué son ciertos, probablemente establecen nexos con conocimientos previos que pueden servir para validar posteriormente los hechos descubiertos (Radford, 1994;

---

[6] Por *problema* entendemos aquí una tarea para la cual los estudiantes no tienen un patrón de solución. Por lo regular, la tarea siempre incluye la solicitud de una justificación.

[7] Al iniciar el desarrollo de un contenido, los estudiantes tienen cierta familiaridad básica requerida para poder comenzar a abordar la pregunta o el problema; sin embargo, la mayoría de resultados geométricos cuyos enunciados llegan a ser parte del sistema axiomático que se construye en el curso son desconocidos para los estudiantes y cuando no lo son del todo, la rigurosidad con la que se enuncian los constituye en enunciados nuevos para ellos.

Bartolini Bussi, 1995; Mariotti, 1997; Mariotti y Maracci, 1999; Furinghetti y Paola, 2003).

Después de la resolución del problema, se pide a los estudiantes presentar sus producciones —que por lo general son diversas— ante la comunidad de la clase con el fin de revisarlas y concretarlas en enunciados e ideas que se convierten en material de trabajo de la comunidad para formar el sistema axiomático. A partir de las producciones presentadas, se gana familiaridad y comprensión de los objetos geométricos involucrados, se aceptan o rechazan conjeturas, se presentan contra-ejemplos cuando se rechaza una conjetura, se comparan enunciados de conjeturas para determinar si se refieren o no al mismo hecho geométrico, se revisa la formulación misma de las conjeturas, se establece la definición de un término que servirá de núcleo para el sistema axiomático local, etc.

Teniendo ya elementos para comenzar la construcción del sistema axiomático local referido al problema, ésta se va llevando a cabo a través de acciones tales como identificar qué elementos teóricos se requieren para establecer una determinada definición y en caso de que éstos no hagan parte del sistema axiomático, introducirlos; si hubiera varios enunciados para demostrar, decidir en qué secuencia se intentará hacer sus demostraciones y producirlas; identificar enunciados (postulados y teoremas) que deberían hacer parte del sistema para poder completar una demostración. Así, la construcción del sistema axiomático está fundamentada en la actividad demostrativa llevada a cabo, conformada por las rutinas que definimos en el marco teórico.

En lo que tiene que ver con la rutina misma de organizar los enunciados que harán parte del sistema, entrevemos una diferencia entre nuestra aproximación y la sugerida por Freudenthal (1973) motivada quizá porque él se refiere a la educación secundaria y nosotros llevamos a cabo la enseñanza experimental en un curso universitario. En nuestro caso, tal como se esbozó en el párrafo anterior, la organización se lleva a cabo en el acto mismo de demostrar un enunciado mientras que tal como el autor propone la 'axiomatización descriptiva' parece que se trata de un ejercicio, previo a una posible demostración, en el que se establecen relaciones lógicas entre los enunciados en cuestión.

El papel fundamental que juega la producción de sistemas axiomáticos en el desarrollo de las matemáticas nos hace suponer que en su formación inicial, los estudiantes para profesor de matemáticas deben tener oportunidades para comprender en qué consiste sistematizar un conjunto de enunciados y cuál es su propósito.

Esto no necesariamente por considerar que el ejercicio de su profesión —profesor de secundaria— les vaya a exigir hacer matemáticas en calidad de matemáticos profesionales sino por considerar que la enseñanza de las matemáticas en cualquier nivel requiere tener no sólo conocimiento de contenidos matemáticos sino también una visión más o menos detallada de la naturaleza sistemática de las matemáticas y de las prácticas específicas a través de las cuales se hace matemáticas. Por otra parte, suponemos que el desarrollo gradual de tal visión y comprensión desde el inicio de sus estudios profesionales les ayudará en el aprendizaje mismo del contenido matemático.

Ahora bien, el reto está en cómo aproximar a los estudiantes a la práctica de la sistematización de manera que puedan participar en ella y logren así una visión elaborada de esta acción. Una de las estrategias que hemos adoptado es involucrarlos en la actividad demostrativa de tal suerte que pongan en juego los enunciados que se van a sistematizar.

Por ejemplo, para lograr la organización deductiva local relacionada con la definición de ángulos, que presentamos en el Esquema 5.1, preferimos un problema que pone en juego la noción de ángulo en vez de pedir directamente que se dé una definición pues es posible que un estudiante, o bien, recite de memoria un enunciado correcto sin la suficiente comprensión, o bien, puede no tener el respectivo vocabulario para comunicar su idea aunque tenga una comprensión adecuada. Una vez logrado un acuerdo sobre la definición de ángulo se entra en un proceso de ir hacia atrás (de remontarse al origen), para revisar significados y precisar definiciones y propiedades de los objetos geométricos sobre los que se basa, directa e indirectamente, la definición adoptada de ángulo. Así, puesto que ángulo es la unión de dos rayos que cumplen dos condiciones, se hace necesario definir rayo; a su vez, para definir rayo se hace necesario definir segmento y para definir segmento es necesario definir la relación de interestancia entre tres puntos e introducir el Segundo y Tercer teoremas de interestancia, que pueden demostrarse gracias al Primer teorema de interestancia y el Postulado de correspondencia puntos en recta-números. Es así como se genera una porción del sistema axiomático local que se articula al ya construido previamente.

En síntesis, ni el profesor ni el libro de texto son la fuente de donde se toma el contenido que se estudia. Tampoco hay una forma fija de secuenciar el tratamiento de los distintos elementos teóricos que se consideran. Una cantidad considerable de los enunciados que se demuestran son formulados por la comunidad de la clase, en calidad de conjeturas provenientes de las producciones de los estudiantes al resolver tareas propuestas por la profesora. Todas las demostraciones que se hacen en el curso también son realizadas por los estudiantes con el apoyo, en mayor o menor grado, de la profesora. Las definiciones se introducen para satisfacer una necesidad manifiesta de precisar de qué objeto geométrico se ha comenzado a hablar; para hacerlo, por un lado, se parte de la imagen conceptual que los estudiantes tienen del objeto, y por otro, se hace un análisis centrado en el papel de cada condición dentro de la definición. En ocasiones, algunos enunciados resultado de la resolución de una tarea son incorporados al sistema axiomático porque se advierte la necesidad de demostrarlos para usarlos posteriormente en la demostración del teorema que se está validando.

5.2.2. ELEMENTOS FUNDAMENTALES DE LA GENERACIÓN DE UN ENTORNO FAVORABLE PARA APRENDER A DEMOSTRAR

Consideramos como elementos fundamentales en la generación de un entorno favorable para aprender a demostrar: las tareas que se proponen a los estudiantes, los dispositivos didácticos o estrategias de gestión implementados por la profesora para favorecer la participación de los estudiantes, las normas sociales y sociomatemáticas que condicionan su participación y el papel de la geometría dinámica como instrumento de mediación. A continuación nos referiremos a cada uno de estos aspectos.

Tareas que se proponen a los estudiantes

Las tareas que se proponen a los estudiantes se articulan alrededor de problemas. Éstos no se proponen esporádicamente o con el propósito de complementar lo que ordinariamente se hace en el curso sino que, como ya lo explicamos, son el medio para involucrar a los estudiantes en la actividad demostrativa. Como lo mencionamos en la sección 5.1.1, ellos tienen que enfrentarse a una situación de construcción o de exploración de una construcción, formular conjeturas, verificarlas y presentarlas al grupo para su aceptación, para luego validarlas dentro del sistema axiomático con el que cuenta.

Unos problemas impulsan al descubrimiento de relaciones entre objetos y propiedades geométricas. El esfuerzo no se concentra en lograr una construcción apropiada, pues generalmente se basan en una figura geométrica sencilla, sino de encontrar propiedades que permitan formular conjeturas que puedan ser validadas con los elementos del sistema axiomático. Los siguientes tres problemas, que dan lugar a los episodios 4, 7 y 15 son ejemplo de ello:

- Estudiar la situación, formular una conjetura y justificar la respuesta: Sean $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BE}$ rayos opuestos y $\overrightarrow{BK}$ otro rayo. Sean $\overrightarrow{BG}$ y $\overrightarrow{BD}$ las bisectrices de los ángulos $\angle ABK$ y $\angle KBE$ respectivamente, ¿Cuál debe ser la posición del $\overrightarrow{BK}$ para que la medida del $\angle GBD$ sea la máxima?

- Estudiar la relación entre el tipo de triángulo y la propiedad: dos de sus alturas son congruentes. Escribir: a. el proceso de construcción; b. las conjeturas que se establecen.

- Determinar la relación entre el tipo de cuadrilátero y la propiedad: una diagonal biseca a la otra.

Otros problemas invitan a la búsqueda de la construcción geométrica de cierta figura, de tal suerte que ésta cumpla una propiedad establecida en el enunciado del problema. Los estudiantes tienen que encontrar el camino para hacer la construcción y aplicar elementos del sistema axiomático consolidado hasta el momento para hacer la justificación de cada uno de sus pasos. A veces este tipo de problemas se usa para introducir teoremas de existencia e imaginar una vía para hacer la demostración a partir de los pasos del procedimiento de construcción. Este es el caso de los siguientes problemas, el segundo de los cuales da lugar al episodio 2:

- Construir el punto medio de un segmento[8].

- Dados tres puntos no colineales *A, B* y *C*, encontrar un punto *D* tal que los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ se bisequen.

Otras veces, los problemas de construcción se usan para introducir un nuevo teorema, cuando hay que usar una herramienta del programa de geometría dinámica que aún no tiene soporte teórico por no disponer de un teorema, o cuando los estudiantes la usan sin percatarse de que ésta no tiene soporte teórico. Los siguientes problemas, que dan lugar a los episodios 5 y 6, son ejemplo de este aprovechamiento; el primero dio pie para introducir el teorema de la existencia de la recta perpendicular a una recta dada por un punto de ésta y el segundo al teorema de la existencia de la perpendicular por un punto externo a una recta dada:

- Estudiar la situación, formular una conjetura y justificar la respuesta: Sean $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ rayos opuestos y $\overrightarrow{AD}$ otro rayo ¿Es posible determinar un punto *E* en el mismo semiplano en el cual está *D*, para el que el $\angle BAD$ sea complementario con el $\angle CAE$?

[8] Obviamente no está permitido hacer uso de la opción 'punto medio' del menú de Cabri.

- $\overleftrightarrow{PC} \perp \overleftrightarrow{KM}$, con *K-P-M*. Sea *A* un punto $S_{\overleftrightarrow{KM},C} \cap S_{\overleftrightarrow{PC},K}$. ¿Cómo se determina la posición de un punto *B* para que $\Delta ACP \cong \Delta BCP$? Justifique su respuesta.

Los problemas propuestos a los estudiantes se constituyen en elemento central de la innovación y son objeto de un diseño cuidadoso. Procuramos que sean interesantes para así poder estimular la actividad demostrativa de los estudiantes; deben ser lo más abiertos posibles, para poder generar diversos puntos de vista y favorecer la argumentación; pero también han de ser pertinentes, es decir, deben poner en juego los recursos disponibles en el sistema axiomático que se construye. En ese sentido, hemos evitado proponer problemas muy interesantes que se reportan en la bibliografía consultada, pero cuya construcción no puede ser validada con los recursos disponibles en el sistema axiomático.

Por lo general, la resolución de los problemas por parte de los estudiantes y la posterior socialización del trabajo realizado hasta llegar a la institucionalización del correspondiente contenido geométrico requieren más de una sesión de clase, dependiendo de la riqueza de la situación planteada y de la participación de los estudiantes. Los problemas más ricos, en los que es posible formular distintas conjeturas plausibles, se plantean con el propósito de generar experiencias en las que los estudiantes puedan vivenciar la ampliación del sistema axiomático, en torno a un núcleo temático, al participar en la organización de los elementos teóricos que han producido. Como ya lo mencionamos, debido al modo como se gestiona el contenido en la clase, el desarrollo temático generado con estos problemas no es el mismo en dos versiones del curso. Subyacente a esta forma de gestionar el contenido geométrico está la hipótesis didáctica según la cual, para poder construir un sistema axiomático en la clase a partir de la resolución problemas, se requiere que en ocasiones la comunidad acepte, por una parte, dejar provisionalmente incompleta la demostración de una conjetura y, por otra parte, desviarse de la situación inicial para considerar otros problemas que conducirán a obtener los elementos necesarios que permitirán completar la demostración inicial. Es una forma de vincular la coherencia local con la que se desarrolla la clase con una más global, relacionada con el sistema axiomático de referencia. Según Laborde[9], y como lo señalan Cerulli y Mariotti (2003) esta forma de gestionar el contenido es uno de los elementos de la innovación que desafían de manera más fuerte la tradición de la matemática escolar que propende por la presentación de los contenidos organizada

[9] En conversación sostenida con el grupo que lleva a cabo la innovación.

en términos de relaciones establecidas desde el saber matemático y no desde el punto de vista de la construcción del conocimiento de los estudiantes

Además de los problemas propuestos durante las clases, semanalmente se asignan tareas para realizar por fuera de la clase, que deben ser resueltas en grupos establecidos voluntariamente desde el comienzo del semestre. Se escogen problemas que tienen un grado alto de dificultad, pero que se pueden resolver con los elementos teóricos y metodológicos (*v.gr.* realizar construcciones auxiliares) ya estudiados. Deben desarrollarse las demostraciones con todo el formalismo que exige trabajar en un sistema axiomático. El propósito es suscitar la interacción entre los miembros del grupo, impulsarlos a compartir sus conocimientos, y a proveer argumentos fundamentados acerca de la solución. Las producciones correspondientes a estas tareas también son fuente para la valoración del aprendizaje. La profesora identifica los errores en las producciones escritas de los estudiantes y los utiliza como material para discusiones grupales en clase.

El estilo para escribir las demostraciones es muy similar al utilizado en los libros de texto que usualmente se usan en los cursos de geometría de nivel universitario en Colombia. Se emplea el formato a dos columnas en el que las afirmaciones que componen la cadena deductiva se colocan a la izquierda y las justificaciones o razones (escritas explícitamente o mencionando el nombre asignado, *v.gr.* Postulado de la recta, Primer Teorema de interestancia) que se usan como reglas de inferencia para hacer las afirmaciones, junto con las condiciones suficientes para obtener la afirmación correspondiente como necesaria se colocan en la columna de la derecha. Aunque el formato a dos columnas ha sido cuestionado por diversos investigadores porque puede conducir a una reconstrucción ficticia de la producción de una demostración (Herbst, 1999) o por 'ocultar' el estatus operatorio y teórico (Duval, 2007) de los enunciados que componen la cadena deductiva, nosotros creemos que puede ser aprovechado para familiarizar a los estudiantes con el estilo en el que se comunican demostraciones, siempre y cuando haya una preparación previa y se acompañe a los estudiantes en su uso. En todo caso, el uso del formato a dos columnas es menos exigente que las demostraciones escritas en un solo párrafo y optamos por usarlo como herramienta didáctica.

Dispositivos didácticos usadas por la profesora para favorecer la participación de los estudiantes

Con el objeto de favorecer la participación de los estudiantes, en el curso de geometría plana en donde se lleva a cabo la enseñanza experimental se favorecen los siguientes espacios:

Espacios de resolución de problemas. En tales espacios, generalmente en parejas y apoyados en el uso de la geometría dinámica, los estudiantes trabajan en la solución de un problema de índole geométrica. Este trabajo incluye no sólo la construcción de figuras, la exploración de éstas y la formulación de conjeturas, sino también el esbozo de unas primeras ideas para la justificación de dichas conjeturas, ideas que posteriormente se revisan y desarrollan colectivamente para lograr la correspondiente demostración en el marco del sistema axiomático.

Espacios de "conversación instruccional"[10] *entre la profesora y los estudiantes*. En dichos espacios, la profesora como miembro experto de la comunidad guía el desarrollo de la teoría —lo que usualmente sería objeto de enseñanza directa — hablando con uno o varios estudiantes, a partir de las propuestas que hacen ellos como solución de los problemas. La profesora tiene una meta, no siempre explícita para los alumnos, y las preguntas o comentarios que hace son instrumento para encausar los sucesos hacia esa meta. Así se construyen y negocian significados compartidos.

Espacios de conversación matemática como comunidad en donde la profesora es un miembro más y que tienen alguna similitud con lo que Mariotti (2000) denomina 'discusión matemática'. Estos espacios de participación tienen lugar después del trabajo en parejas y su finalidad, casi siempre, es crear una porción organizada del sistema axiomático correspondiente a una temática completa, a partir de los resultados que han obtenido los estudiantes al trabajar los problemas. Se lleva a cabo mediante un diálogo en el que estudiantes o profesora comunican sus ideas, presentan sus propuestas, hacen comentarios, ya sea dirigiéndose a la profesora o entre ellos mismos. La profesora es un miembro más de la comunidad y, en ese sentido su papel es diferente al que tiene en la conversación instruccional; la responsabilidad de culminar exitosamente la tarea recae sobre la comunidad en general.

---

[10] Tharp y Gallimore (1988, citados en Forman, 1996) usan el término *conversación instruccional* para referirse a los discursos de la clase que permiten la construcción conjunta de significado por parte de profesores y estudiantes. En este tipo de interacción se percibe un modelo de conversación realizada en lengua natural en la cual los miembros más experimentados de una cultura, instruyen a los menos experimentados, a través del diálogo.

El papel de la profesora como conductora de los tres tipos de intercambios es fundamental. Por ejemplo, en lo que tiene que ver con la presentación de las conjeturas a las que llegan los estudiantes es ella quien decide el orden en que se presenten para su revisión; detrás de esta decisión hay razones didácticas que buscan, por una parte, no quitarle sentido a la presentación y revisión de las diferentes conjeturas y, por otra parte, aprovechar la revisión de las diferentes producciones para cubrir una amplia gama de consideraciones. Adicionalmente, como la formulación de conjeturas de las que se tiene cierto convencimiento no es suficiente para emprender la construcción de la respectiva justificación, y menos aun cuando ésta debe hacerse dentro de un determinado sistema teórico, la gestión de la interacción social entre estudiantes o entre estudiantes y profesora es un factor imprescindible del aprender a demostrar, pues es en la comunicación de ideas, en el análisis crítico de éstas, en la argumentación, en donde surgen los elementos teóricos necesarios para construir o comprender una demostración. El papel de la profesora como guía de este proceso es esencial pues es ella —como experta de la comunidad de la clase— quien puede dirigir el rumbo del proceso hacia el uso de términos, símbolos y formas de expresión propias de la práctica de la demostración matemática. Además cumple un papel esencial en el establecimiento de las normas que rigen el funcionamiento de la demostración y del sistema axiomático.

A través de la interacción social, los estudiantes pueden cambiar la tradicional relación que tienen con el conocimiento, con los profesores y con sus compañeros:

Con respecto al conocimiento, pueden llegar a comprender que más que conocer la estructura de un sistema axiomático, tienen que vivir la experiencia de construirla en colaboración con los demás miembros de la comunidad.

Con respecto a la profesora, pueden dejar de considerarla como la autoridad en la clase y la única persona que tiene el saber, y en cambio pueden llegar a verla como el miembro experto de la comunidad que guía el proceso.

Con respecto a los otros estudiantes, pueden llegar a establecer un compromiso mutuo de trabajar en pro de la construcción de un sistema axiomático.

Normas sociales y sociomatemáticas

Desde el comienzo del curso la profesora explicita y vela por el cumplimiento de normas sociales relacionadas con la participación de los estudiantes en la actividad matemática desarrollada en el curso (*v.gr., es necesario escuchar a los compañeros*; *se debe respetar el uso de la palabra*; *toda contribución es importante;*

la participación es esencial para generar ideas útiles, aunque sean erróneas) y de normas sociomatemáticas relacionadas con la validación del conocimiento matemático que circula en la clase (*v.gr.*, *dar el por qué de toda afirmación que se haga* o *usar en las demostraciones sólo aquellas afirmaciones que se han validado dentro del sistema*). Sin embargo, en consonancia con el clima participativo que se promueve en el curso, tanto la profesora como los estudiantes contribuyen a la constitución interactiva de dichas normas (Goos, 2004; Graven, 2004; Martin y McCrone, 2005; Mariotti, 2000).

El papel del programa informático de geometría dinámica

En el curso de geometría plana se usa el programa informático de geometría dinámica Cabri como instrumento de mediación en el proceso de aprender a demostrar. En las diferentes versiones del curso, así como en la enseñanza experimental en la cual se basa la presente investigación, hemos podido reconocer que el uso de la geometría dinámica puede mediar en varios asuntos que son de importancia fundamental en el aprendizaje de la demostración. Dado que los principios que se usaron en el diseño del programa Cabri se corresponden esencialmente con los postulados de la geometría euclidiana, tenemos como premisa subyacente que por medio de la geometría dinámica es posible establecer conjeturas, sobre propiedades invariantes bajo el arrastre, con un alto grado de probabilidad de que ellas sean verdaderas en el sistema axiomático en construcción. Siguiendo a varios investigadores en el campo (Laborde, 2000; Mariotti, 2002; Olivero, 2002), suponemos que si vinculamos las tareas de construcción geométrica con las prácticas de justificar y organizar sistemas axiomáticos, incrementamos la posibilidad de aprender a demostrar. A continuación nos referimos a algunos asuntos en donde la geometría dinámica cumple un papel de mediador importante en la enseñanza experimental.

Entender el papel que cumplen todas las condiciones del antecedente de un enunciado de la forma si-entonces. La mayoría de los postulados, definiciones y teoremas en geometría se enuncian usando la estructura de una condicional, sea esta explicita o implícita en la respectiva formulación. Además, dos de las estructuras básicas para establecer validez matemática son las denominadas Modus Ponendo Ponens y Modus Tollendo Tollens, esquemas que hacen uso de condicionales. Una utilización apropiada de las definiciones, postulados y teoremas en el contexto de la actividad demostrativa requiere reconocer la estructura subyacente de éstos enunciados y comprender la condicional como un objeto matemático cuyas propiedades quedan bien definidas desde la lógica matemática. Para captar mejor las condiciones exigidas en una definición o un teorema, el uso de la geometría dinámica se constituye en un apoyo para estudiar las consecuencias de eliminar parte de las condiciones de la hipótesis del teorema, o alguna de las propiedades de la definición, y de esta manera comprender el papel que cumple cada una de ellas y así decidir si son necesarias. En el análisis de situaciones de este tipo es innegable que la posibilidad de hacer de manera rápida y precisa diversas construcciones permite ilustrar cómo la ausencia de alguna condición distorsiona los resultados que se esperan.

Apoyar la interpretación de relaciones geométricas que pueden quedar 'ocultas' bajo enunciados que esconden la generalidad de la situación. En ocasiones, la forma como se enuncia un problema puede llevar a los estudiantes a interpretarlo como ejemplo de una situación particular, dependiente de las condiciones específicas que se presentan, y no como un hecho geométrico generalizable (*v.gr.,* en el ΔABC $\overline{AB} \cong \overline{AC}$). Con el uso de la geometría dinámica, se identifican invariantes de un conjunto continuo de casos particulares, si se hace uso del arrastre, que dan lugar a la formulación de regularidades a manera de enunciados generalizables en forma de conjeturas.

Propiciar la creatividad, a través de construcciones auxiliares, para elaborar argumentos que llevan a la demostración de teoremas. La facilidad de hacer construcciones auxiliares de diversa naturaleza y eliminarlas si no dan los frutos esperados es uno de los factores que hacen de los programas de geometría dinámica una herramienta poderosa en la búsqueda de una justificación. La visualización de una representación fiel a las condiciones establecidas en la situación, enriquecida con construcciones que expliciten propiedades geométricas, permite evocar elementos del sistema axiomático que posiblemente resulten útiles en una demostración.

Crear situaciones que dan lugar a suficientes resultados para poder construir una porción del sistema axiomático. Este es un uso de la geometría dinámica muy importante para hacer posible la participación autónoma y relevante de los estudiantes en la actividad demostrativa que tiene lugar en la clase. A partir de un problema que favorece la exploración de propiedades geométricas, los estudiantes producen un conjunto diverso de conjeturas que, con la guía del profesor, se van organizando dentro del sistema axiomático. El papel del profesor es fundamental pues es quien puede anticipar la conveniencia de uno u otro orden en la organización de los enunciados, a efectos de ir incorporando los teoremas de tal suerte que se logre una organización deductiva local coherente.

Determinar la validez de conjeturas formuladas. Cuando los estudiantes exploran problemas y enuncian sus conjeturas, una estrategia que solemos usar para determinar si la conjetura formulada se corresponde con las condiciones de dependencia creadas, al hacer la construcción, es solicitar a los estudiantes un recuento del procedimiento de construcción, pues en ocasiones los estudiantes no perciben las condiciones reales 'que han dado' a su construcción y por tanto, la hipótesis de la conjetura formulada no es correcta. En estas ocasiones, se busca que los estudiantes realicen la construcción propuesta para analizar la validez de ésta.

Entender el desarrollo lógico de una demostración. En aquellas situaciones teóricas que buscan establecer la existencia de un objeto geométrico con propiedades especiales, el proceso necesario desde la teoría, para desarrollar una demostración, básicamente coincide con la organización requerida para realizar la construcción en el ambiente de la geometría dinámica.

Descubrir relaciones geométricas entre las partes de figuras, que se podrían involucrar en la demostración. Cuando se enuncia una situación geométrica sin la correspondiente representación gráfica, el hecho de poder realizarla con geometría dinámica, con las propiedades que exigen las condiciones establecidas en la hipótesis, da lugar a que la exploración de la figura refleje confiablemente las relaciones geométricas que existen entre las partes constituyentes de la figura. Tales relaciones pueden evocar elementos teóricos valiosos para la demostración.

5.2.3. EVALUACIÓN

En la enseñanza experimental en la que se basa nuestra investigación, el equipo responsable de la innovación consideró los siguientes aspectos para evaluar el desempeño de los estudiantes, que fueron tenidos en cuenta por la profesora a lo largo del curso:

- Comprobaciones escritas realizadas periódicamente en las que los estudiantes, de manera individual, responden dos o tres preguntas relacionadas con el tema visto en las clases anteriores. Las preguntas hacen referencia a hacer la demostración de un teorema no estudiado aún, completar los pasos de una demostración sugerida en forma incompleta o mediante un esbozo general o justificar algunas afirmaciones relacionadas con los objetos o relaciones estudiados. Generalmente los estudiantes disponen de una hora para resolver la comprobación y, terminado el tiempo, la profesora lidera una conversación tendente a socializar las soluciones dadas por los estudiantes. Una o dos clases después, la profesora entrega las comprobaciones corregidas y hace una explicación de los principales errores encontrados, tanto en el contenido geométrico como en el lenguaje usado. En ese sentido, hace de la evaluación individual una forma de aprendizaje colectivo.

- Comprobaciones escritas, realizadas principalmente hacia el final del semestre en las que los estudiantes, en parejas, resuelven un problema en el cual deben encontrar una conjetura y justificarla, haciendo uso de Cabri. Los estudiantes cuentan con una hora de clase para involucrarse en la actividad demostrativa y reportar sus hallazgos. La profesora recoge el reporte y los archivos hechos en el programa de geometría dinámica y evalúa si la conjetura se corresponde con la construcción y exploración que hacen y la demostración de ésta. Esta forma de evaluar no era común en los cursos implementados previamente a la enseñanza experimental sino que fue efecto del diseño de la misma.

- Tareas para desarrollar fuera de clase. Éstas son de dos tipos: unas, constan de un conjunto de ejercicios de aplicación de algunos teoremas en los que se pide encontrar una magnitud desconocida en una figura o comprobar una relación geométrica. Los estudiantes deben hacer los ejercicios de manera individual y en algunas clases la profesora pide a algunos de ellos pasar al tablero a resolver algún ejercicio. Otras tareas son para resolver en parejas. La profesora pide demostrar algún teorema no trabajado en clase –que no necesariamente va a ser considerado parte del sistema pero que se justifica con elementos del mismo- o completar una demostración. Como no se dispone de un texto guía, las tareas son un apoyo a los estudiantes en el estudio del contenido trabajado.

- Reportes periódicos de los enunciados institucionalizados. La profesora designa a algún estudiante para hacer un listado de los enunciados vistos en clase, con sus respectivas definiciones, reporte que es revisado por ella y reenviado a todos los estudiantes como fuente de consulta de sistema axiomático que se tiene a disposición.

- Participación en las conversaciones y discusiones en clase. Este es otro aspecto incorporado en la evaluación con motivo del diseño experimental. En conversación sostenida en el equipo responsable de la innovación se consideró oportuno incluir ese elemento, pues centrar la evaluación en desempeños individuales va en contravía de nuestra consideración sobre el aprendizaje. Aunque la profesora responsable de la enseñanza experimental estuvo de acuerdo en ese aspecto, el peso dado a la evaluación de la participación con respecto a las demás calificaciones no fue equilibrado y primó la evaluación individual.

5.3. ASPECTOS PARTICULARES DE LA IMPLEMENTACIÓN

En esta última sesión del capítulo damos un breve reporte de la implementación señalando algunas condiciones particulares de ésta y alcances y dificultades principales.

Salvo la presencia de la observadora y de algunos estudiantes de semestres superiores que colaboraron en las grabaciones de audio y video, la clase se desarrolló como se hubiera hecho si no se hubiera escogido para la enseñanza experimental. Los estudiantes se acostumbraron rápidamente a la presencia de las personas ajenas a la clase y a ser grabados. El contenido del curso se desarrolló hasta donde suele hacerse, es decir hasta el estudio de cuadriláteros.

Algunas dificultades que se sortearon a lo largo de la implementación tienen que ver con la infraestructura con la que se contó tanto para el desarrollo de algunas de las actividades planeadas como para la toma de registros apropiados. En tres ocasiones se fue la luz, lo que impidió usar el retroproyector y la pantalla líquida para ampliar las imágenes de las calculadoras y socializar resultados de los problemas. Además, se presentó una falla en el software que se había previsto para enlazar los computadores y permitir que cada pareja viera el trabajo de los demás.

Pero lo que hizo más difícil la implementación fue el clima de anormalidad académica que se vive en la Universidad Pedagógica Nacional (Bogotá, Colombia) desde hace unos años, que ocasiona una alteración frecuente de ambiente académico. En varias oportunidades la clase se llevó a cabo en medio de asambleas estudiantiles, bloqueos del edificio en donde estaba previsto realizar la clase y amenazas de desalojo por parte de la fuerza pública. Este hecho nos obligó a desplazarnos durante las últimas clases del semestre a un edificio fuera del campus universitario. Afortunadamente, el compromiso y la colaboración de los estudiantes permitieron culminar las sesiones de clase previstas.

CAPÍTULO 6

ANÁLISIS DEL DESARROLLO DEL CURSO. FINALIDADES DE PARTICIPACIÓN

Hemos dividido el informe de resultados de los análisis realizados a los extractos de las transcripciones que conforman los datos principales de la investigación (sacados de los 15 episodios escogidos como representativos del repertorio de prácticas del curso universitario de geometría plana), en dos capítulos. En este nos concentramos durante el análisis de las finalidades de participación de los estudiantes en las rutinas que conforman la actividad demostrativa, sin preocuparnos por la evolución de dicha participación; damos cuenta, principalmente, de la negociación de significados. En el capítulo siete nos enfocamos en la evolución de la participación, ilustrándola en tres momentos representativos de la dinámica de constitución de una comunidad de práctica de clase; el interés es presentar evidencias del avance de los estudiantes hacia una participación plena en la empresa que se lleva a cabo.

Respecto de las finalidades de participación, a continuación nos referimos a las prácticas relacionadas con definir, conjeturar, argumentar y demostrar que hacen parte de la actividad demostrativa, presentando ejemplos representativos de las rutinas en donde los estudiantes tienen una participación periférica legítima. Ilustramos, con algunos extractos, cómo usamos los códigos en el análisis y los motivos de la asignación de códigos a las intervenciones. La decisión de presentar más de un ejemplo, en algunos casos, está dada por la necesidad de ilustrar la mayor cantidad de códigos usados en la identificación de las finalidades de participación.

6.1. DEFINIR

A lo largo del curso, se introducen más de 20 definiciones en el sistema axiomático, la mayoría de las cuales son objeto de un proceso de negociación de significados que da lugar a las formulaciones que se institucionalizan para incluirlas en el sistema y usarlas en demostraciones. Como lo mencionamos en el marco teórico, entendemos la negociación como un proceso de ajuste colectivo de las versiones personales propuestas por los miembros de la comunidad o que se ponen en evidencia en la realización de alguna tarea, en busca de la definición 'oficial'. Los momentos de participación y especialmente cuando se presenta confusión o conflicto al respecto de una definición son indicadores de la negociación que se lleva a cabo.

Para dar cuenta de las finalidades de participación de los estudiantes en la clase y del proceso de negociación al que hacemos referencia, hemos considerado las definiciones de bisecar, ángulos opuestos por el vértice, altura, interior de cuadrilátero y rectángulo, que se discuten en algunos de los 15 episodios escogidos y cuyo tratamiento es representativo de las rutinas que se llevan a cabo alrededor de la práctica de definir.

Ejemplo 1: Definir en lenguaje informal[1]

Definición de bisecar (extracto 1): Los estudiantes están resolviendo, en parejas, el problema: 'Dados tres puntos no colineales *A, B, C*, construir un punto *D* tal que los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ se bisequen. (a) Describir el procedimiento de construcción justificando cada paso del mismo. (b) Escribir el teorema que el resultado de este problema permite enunciar. (c) Demostrar el teorema'. María y Efraín hacen la construcción en Cabri. María indica a Efraín lo que debe ir haciendo y va justificando cada paso con enunciados de la teoría, mientras Efraín se ocupa de manipular el programa. Su preocupación se centra en lograr construir lo que María le indica. A partir de los tres puntos *A, B, C*, construyen el $\overline{AB}$, hallan su punto medio *P* y luego localizan un punto *D*, sobre el rayo *CP* tal que *P* está a la misma distancia de *C* que de *D*. Al terminar la construcción, Efraín considera que el punto *D* no está bien ubicado, basado en su idea de 'bisecar', que no se corresponde con el resultado del procedimiento de construcción. María verbaliza una definición e intenta convencer a Efraín de ésta, refiriéndose a que el término bisecar se usa para segmentos y no para ángulos; pero no logra convencer a Efraín pues no está suficientemente segura. Prefieren preguntar a la profesora; ella también expresa una definición informal que Efraín acepta y constata que la representación hecha en Cabri sí corresponde a esa definición.[2]

89 Efraín: [Después de terminar la construcción hecha en Cabri arrastra los ExplorCabri

[1] Rotulamos el ejemplo con una de las rutinas que prevalece en la situación que usamos como ilustración.

[2] A lo largo de la memoria, antes de presentar cada extracto, hacemos una contextualización del mismo y una breve narración de los sucesos principales para favorecer la comprensión de giros del lenguaje o modismos locales. La lectura del diálogo queda a juicio del lector.

		puntos *A, B* y *C*] Pero, ¿ahí se están bisecando [los segmentos]? No, ahí no se están bisecando.	
90	María:	¿Bisecar no es pasar por la mitad?	DefInf
91	Efraín:	Es dividir exactamente el ángulo en dos.	DefInf
92	María:	Esa es la bisectriz, bisecar es dividir por la mitad, no bisectriz.	DefInf
93	Efraín:	Eso es mediatriz.	DefInf
94	María:	A ver…, la bisectriz [es] de un ángulo, pero bisecar un segmento es que se divida por la mitad.	DefInf
95	Efraín:	¿Estás segura?	
96	María:	Preguntémosle a la profe. [La profesora se acerca al grupo]	
97	Efraín:	¿Bisecar es dividir por la mitad?	ConsDef
98	P:	Bisecar es dividir por la mitad, ambos segmentos deben quedar divididos en dos.	DefInf
99	Efraín:	¡Ah bueno!, ahí [en la representación Cabri] está bien.	ExplorCabri

[P22: 89-99]

El resultado de la representación hecha en Cabri produce un intercambio comunicativo entre los dos estudiantes pues Efraín no reconoce, en la representación obtenida, la imagen que tiene de bisecar y manifiesta su confusión [89]. Cada uno expresa su idea de bisecar, de manera informal, [90-94], dando comienzo a una negociación. Para Efraín, el término está asociado al efecto que produce la construcción de la bisectriz en un ángulo y lo que María sugiere le evoca la idea de mediatriz. Sólo cuando la profesora, también de manera informal, confirma la idea de María [98], Efraín la acepta y admite que la representación en Cabri está bien hecha. Asignamos el mismo código a las intervenciones 90, 92 y 94 de María, pero las consideramos como intervenciones independientes, pues en cada una de ellas la estudiante formula una definición un poco diferente de bisecar modificando la frase para aclarar a Efraín lo que ella entiende por bisecar. Aunque en la intervención 97 Efraín no contribuye directamente con la producción de la definición, con su pregunta impulsa a la profesora a hacerlo. Sin embargo, la profesora no institucionaliza la definición sino que propone una definición informal pues en ese momento está interesada en que los estudiantes logren hacer la construcción.

Ejemplo 2: Identificar propiedades presentes en una definición

Definición de bisecar (extracto 2): Después del trabajo de resolución del problema al que nos referimos en el Ejemplo 1, en parejas se lleva a cabo la producción colectiva de la demostración de la existencia del punto *D*, tomando como premisa la no colinealidad de los puntos *A, B* y *C* y encadenando afirmaciones con base en el procedimiento de construcción del punto medio *P* del $\overline{AB}$ y del punto *D* localizado sobre el $\overrightarrow{CP}$, tal que *CP=PD*[3]. Cuando los estudiantes suponen terminada la escritura de la demostración, pues han concluido que *P* divide a los dos segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ por la mitad, la profesora afirma que no basta concluir que *P* equidista de *C* y *D* pues bisecar se refiere a encontrar el punto medio del segmento; ella indica que falta garantizar la interestancia *C-P-D*[4]. Juan intenta relacionar la idea de bisecar con la de punto medio, pero se equivoca al enunciar las propiedades. La profesora establece las dos condiciones para *P*: además de cumplir la igualdad de las medidas *CP* = *PD* y *AP* = *PB*, deben cumplirse las interestancias *A-P-B* y *C-P-D*

81	P:	(a) […] Y entonces aparece aquí un punto *D* […]. ¿Terminamos [la demostración]? No, porque… acuérdense, ¿qué es lo que quiero [de]mostrar? Que los segmentos se bisecan. ¿Sí?	DefDem
		(b) Ya sabemos que *P* es punto medio de *AB*.	ConsDef
82	Estudiantes:	[Falta] que es el punto medio de *CD*.	ConsDef
83	P:	Falta [de]mostrar que *P* es el punto medio de *CD*, ¿sí?	ConsDef
84	Juan:	Pero por la definición de punto medio podemos decir que la medida de *CP* más la medida de *PD* es igual a la medida de/	IdPrDef
85	P:	/¿Esa es la definición de punto medio?	IdPrDef
86	Efraín:	No, es la de interestancia.	IdPrDef
87	P:	¿No hay dos condiciones [en la definición de punto medio]?	IdPrDef
88	Ana:	Que *P* está entre *C* y *D.*	IdPrDef
89	P:	Que *P* está entre *C* y *D*, ¿y?	IdPrDef
90	Ana:	Que/	
91	Juan:	/Que la distancia *CP* es igual a la distancia *PD* y que la distancia *CP* es la mitad de la distancia *CD*.	IdPrDef
92	P:	(a) ¡Uy!, tu sí que me estás aumentando las tareas que me toca hacer… ¡tres cosas!... solo son dos…	IdPrDef

[3] El procedimiento de construcción utilizado por todas las parejas garantiza la equidistancia de *P* a los extremos *C* y *D* del segmento construido, pero no la interestancia *C-D-P*.

[4] Definición de interestancia: *B* está entre *A* y *C* si *A, B* y *C* son puntos distintos de una misma recta y *AB* + *BC* = *AC.* La profesora asocia el término ‘bisecar’ con encontrar el punto medio y como la definición de punto medio incluye dos condiciones: equidistancia a los extremos del segmento e interestancia del punto medio con relación a éstos, exige demostrar la interestancia *C-P-D*.

(b) entonces, falta [de]mostrar, […]… ¿Por qué tenemos la interestancia?… Bueno, la parte facilita [primero]: que la distancia de *P* a *D* es igual a la distancia de *P* a *C*. DefDem

[P27: 81-92]

En la intervenciones 81 y 83 la profesora asocia la definición informal de bisecar, que hasta el momento se refería sólo a la acción de dividir un segmento en dos partes iguales, con la definición de punto medio de un segmento[5] y pide garantizar que la construcción del punto *D* sí conduce a que *P* sea punto medio de $\overline{CD}$. La definición de bisecar, dada informalmente en el momento de la resolución del problema, no es suficiente para hacer la demostración pues no hace explícita la necesidad de garantizar la interestancia *C-P-D*, por lo que la profesora incluye una nueva condición que hasta el momento no había sido considerada. Además de usar el código DefDem [81] para indicar que la negociación del significado de bisecar se condiciona al uso de la definición en la demostración, también usamos el código ConsDef [81-83] pues hay un intercambio tendente a construir la definición asociándola a la definición de punto medio. Las intervenciones 84 y 91 de Juan, que hemos codificado con IdPrDef porque él intenta identificar qué propiedades del punto medio quedan explícitas en la definición, son indicios de la conexión que el estudiante pretende establecer entre la definición informal de bisecar y la definición que la profesora introduce. Incluso, usa la expresión "que la distancia *CP* es la mitad de la distancia *CD*" [91] como una adaptación de la definición de punto medio, probablemente para enfatizar en la división de cada segmento por la mitad, aunque la profesora considera que el estudiante complica las condiciones requeridas [92]. Las intervenciones 85, 87 y 89 de la profesora impulsan a la identificación de las propiedades incluidas en la definición de punto medio que son suficientes para considerar que *P* lo sea del segmento *CD*. Incitan a Efraín [86] a asociar la propiedad que Juan intenta comunicar en la intervención 84, con la definición de interestancia y a Ana a admitir que hace falta demostrar dicha interestancia [88]. En la intervención 92 la profesora insiste en las dos propiedades que permiten afirmar que el punto *P* biseca al segmento *CD*, ilustrando el papel que juega la definición en la producción de la demostración.

Los dos extractos previos son representativos del tratamiento diferenciado dado a las definiciones en la clase, en la realización de una construcción durante la resolución de un problema o en la producción de una demostración. Al hacer la cons-

[5] Definición de punto medio: un punto *B* se llama punto medio de $\overline{AC}$, si *B* está entre *A* y *C* y $AB = BC$.

trucción, aunque las parejas de estudiantes dan por sentado que tienen una idea compartida sobre lo que es bisecar, en el caso de María y Efraín -así como en el de otras parejas que observamos- esto no es así y es precisamente la realización de la tarea la que los enfrenta a la necesidad de comunicar sus diferentes interpretaciones y ponerse de acuerdo; sin embargo, con una definición informal tienen suficiente para poder cumplir con la tarea. Durante la producción de la demostración, se ve que la definición informal no basta para hacer la demostración con el grado de formalidad exigido en la clase y se revela la necesidad de asociar la definición de bisecar con la de punto medio y prestar más atención al cuidado que deben tener al formular una definición.

Ejemplo 3: Identificar propiedades que faltan en no-ejemplos

Definición de ángulos opuestos por el vértice (extracto 1): En conversación colectiva se discute cómo obtener un ángulo congruente a un ángulo dado que la profesora representa en el tablero. Orlando dibuja las rectas que contienen los rayos que conforman el ángulo y señala el ángulo opuesto por el vértice al dado; esta propuesta lleva a la profesora a institucionalizar la definición de ángulos opuestos por el vértice y a proponer demostrar que dichos ángulos son congruentes. Como preámbulo de la demostración, la profesora incentiva una discusión sobre la definición para ahondar en las condiciones que se deben garantizar cuando se quiere declarar que se tienen dos ángulos opuestos por el vértice, señalando dos ángulos que no son opuestos por el vértice, a manera de no-ejemplo.

70	P:	(a)	[…]. Bueno, dos ángulos son opuestos por el vértice [va escribiendo mientras habla], si, sus lados, forman dos pares de rayos opuestos. […].	ConsDef
		(b)	Este ángulo *DBA*, ¿será opuesto por el vértice con el ángulo *ABC*? [Figura 6.1].	IdPrFa

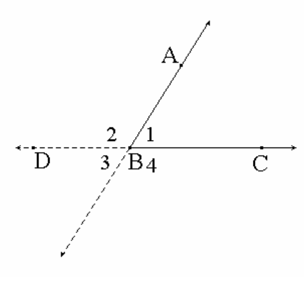


Figura 6.1

71	María:	No.	IdPrFa
72	P:	¿Por qué no? ¿Qué parte no cumple de la definición?	IdPrFa
73	Ignacio:	Dos pares de rayos opuestos.	IdPrFa

74	P:	Dos pares. Aquí hay un par de rayos opuestos, no dos. Luego la definición está clara y concisa y nos da exactamente lo que queremos.	IdPrFa

[P42:70-74]

La representación gráfica de dos ángulos opuestos por el vértice generalmente es reconocida por los estudiantes, incluso de nivel primario; probablemente por ello, cuando la profesora pregunta si un no-ejemplo corresponde a dos ángulos opuestos por el vértice, María responde [71] con un "no", sin dudar, quizás comparando la imagen conceptual que tiene con la figura que observa. Sin embargo, para efectos del uso de una definición en una demostración no basta el reconocimiento visual de una representación del objeto definido sino la identificación de las propiedades fundamentales de éste. Por ello, la profesora dirige a los estudiantes, por medio de la revisión de un no-ejemplo, a la identificación de dichas propiedades explícitamente. Ignacio dice que en el no-ejemplo hacen falta "dos pares de rayos opuestos" [73], y la profesora repite lo dicho enfatizando en "dos pares" como propiedad importante de los ángulos opuestos por el vértice; así, da inicio a un proceso de negociación de la definición de ángulos opuestos por el vértice. La acción primordial en este fragmento de conversación es la identificación de propiedades que le faltan al no-ejemplo para ser un par de ángulos opuestos por el vértice [70 - 74]. Por ello, codificamos casi todas las intervenciones con IdPrFa.

Ejemplo 4: Usar definiciones en la producción de una demostración

Definición de ángulos opuestos por el vértice (extracto 2): Después de definir ángulos opuestos por el vértice, profesora y estudiantes discuten cómo podrían demostrar que dos ángulos opuestos por el vértice son congruentes. Deciden considerar dos parejas de ángulos que son par lineal[6] y que comparten uno de los ángulos, además del postulado del par lineal[7] y algunas propiedades algebraicas, para llegar a la igualdad de las medidas de los ángulos opuestos por el vértice y de allí concluir la congruencia. Como comienzan con la representación de dos ángulos opuestos por el vértice, (los ángulos $\angle 1$ y $\angle 3$ en la Figura 6.2), pero se quieren referir a dos pares de ángulos que son par lineal (ángulos $\angle 1$ y $\angle 2$ y ángulos $\angle 2$ y $\angle 3$), deben apelar a la definición de ángulos opuestos por el vértice, pues la norma impuesta en la clase para el uso de figuras en las demostraciones les prohí-

[6] Definición de ángulos par lineal: si $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AD}$ son rayos opuestos y $\overrightarrow{AC}$ es otro rayo cualquiera, entonces $\angle BAC$ y $\angle CAD$ forman un par lineal.

[7] Postulado del par lineal: Si dos ángulos forman par lineal, entonces la suma de sus medidas es 180.

be asumir que tienen pares lineales sólo porque se ven en la representación. Con la ayuda de la profesora y de Juan, William, quien está a cargo de hacer la demostración, avanza en la producción de la misma.

185	P:	[…], pero ¿qué necesito para poder declarar que [$\angle 2$ y $\angle 3$] son par lineal [Figura 6.2]?	DefDem

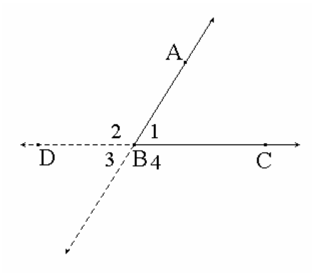


Figura 6.2

186	William:	Que [dos de sus lados] son rayos opuestos y que [tenemos] un punto de otro [rayo].	DefDem
187	P:	De otro rayo [que] no está en la recta [que determinan los rayos opuestos]. Entonces, ¿que es lo primero que vas a decir?	DefDem
		[…]	
192	William:	¡Ah ya! El rayo *AB* y el rayo *BE*.	DefDem
193	P:	¿*AB*?, el rayo *AB* es éste [el opuesto de *BA*]. Rayo *BA* y rayo *BE* son opuestos. […] ¿Cómo lo saben? ¿Cómo lo sabe él? ¿Construcción? ¿Definición de?	DefDem
194	Estudiante:	Rayos opuestos.	DefDem
195	P:	No de rayos opuestos. Definición de ángulos opuestos por el vértice. Lo que está dado son los ángulos [opuestos por el vértice] y la definición me dice que forman dos pares de rayos opuestos; y William está cogiendo un par… de rayos opuestos. Entonces, por definición de ángulos opuestos. Bueno, ¿qué más necesito?	DefDem
196	William:	¿Ahora sí la medida?	
197	P:	No, tú dijiste que querías declarar par lineal. Necesitamos un punto que no esté en la recta. ¿Quién? ¿Quién va a ser?	DefDem
	[…]		
201	William:	Mejor *D*/	
202	P:	/¿Y cómo puedes estar seguro que *D* no está en esa recta? […]	DefDem
203	Juan:	Porque son dos pares de rayos opuestos.	DefDem
204	P:	Son dos pares de rayos opuestos. […]. ¿Y eso me va a asegurar que *D*	

		no esté en la recta *AB*?	
205	Juan:	Sí, porque [el rayo] *BD* no es opuesto con [el rayo] *BA*.	DefDem
206	P:	[Rayo] *BD* no es opuesto con [rayo] *BA*. O sea, ahí lo que está jugando un papel importantísimo es esta palabra: "dos pares" [de la definición de ángulos opuestos por el vértice], porque eso me está diciendo que *D* y *C* no pueden estar en la misma recta *AE* o *AB*, porque entonces no serían otro par [de rayos opuestos]. […] Y ahora si puedes decir cuáles son par lineal.	DefDem

[P42:185-206]

El extracto anterior ejemplifica la participación de los estudiantes, guiada por la profesora, en el uso de la definición de ángulos opuestos por el vértice en una demostración. En este caso, la definición es útil tanto para establecer las propiedades fundamentales que permiten afirmar la existencia del par lineal compuesto por los ángulos $\angle 2$ y $\angle 3$ como para aprovechar que los ángulos opuestos por el vértice están dados ($\angle 1$ y $\angle 3$) y aludir a sus propiedades como garantes de una afirmación que se hace. De manera no explícita se aprovecha la bicondicionalidad de la proposición que corresponde a la definición.

En la primera intervención [185], la profesora impulsa la identificación de las propiedades fundamentales de un par lineal que deben estar explícitas en el conjunto de afirmaciones de la demostración para poder asegurar que éste se tiene. La respuesta de William [186] atiende a esa identificación y por eso la asociamos al código que se refiere a usar la definición en la demostración y no a la identificación de propiedades en una representación. A continuación [187 - 195], la profesora va guiando a William para que construya un paso de la demostración, afirmando la existencia de dos rayos opuestos y justificando dicha afirmación por la definición de ángulos opuestos por el vértice. Como William no sabe cómo justificar la existencia de $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BE}$, la profesora intenta que otros estudiantes intervengan. Sólo interviene uno [194] y no da la justificación apropiada; entonces la profesora explica cómo se usa la definición de ángulos opuestos por el vértice para poder afirmar la existencia del par de rayos opuestos [195]. Después, hace un nuevo intento por dirigir a William en la producción de una nueva afirmación en la que se completen las condiciones para garantizar que se tiene un par lineal [196 - 201], es decir, que se tiene un punto *D* que no está en la recta que forman $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BE}$ opuestos. Juan [203, 205] justifica esa condición aludiendo al "par de rayos opuestos" de la definición de ángulos opuestos por el vértice para garantizar que *D* no está en la recta. Así, sale a relucir la importancia de la propiedad "par de rayos opuestos" de la definición de ángulos opuestos por el vértice.

Los dos extractos que corresponden a los ejemplos 3 y 4 ilustran dos acciones comunes a lo largo del curso que favorecen la negociación de significados sobre las definiciones. De un lado, la identificación de propiedades faltantes en no-ejemplos o contraejemplos, IdPrFa, con lo cual se favorece el intercambio comunicativo en torno a las imágenes conceptuales que cada miembro de la clase tiene y se logra una interpretación colectiva de las definiciones que se institucionalizan. De otro lado, el uso de las definiciones en las demostraciones, DefDem, con lo cual las propiedades fundamentales de los objetos definidos ya no se ven como simples descripciones (Freudenthal, 1971;Winicki-Landman y Leikin, 2000; de Villiers, 2004) sino como proposiciones que pueden ser engranajes de las cadenas deductivas construidas. Sin duda, la prohibición de extraer información de las figuras sin la debida justificación condiciona esta práctica pues exige prestar atención cuidadosa a las propiedades que definen los objetos.

Ejemplo 5: Formular una definición

Definición de altura (extracto 1): La profesora propone a los estudiantes un problema en donde se pide establecer para qué triángulos dos de sus alturas son congruentes. Leopoldo pregunta qué van a entender por altura y comienza una conversación instruccional, liderada por la profesora, tendente a institucionalizar la definición. En el siguiente extracto de conversación Efraín y Juan proponen, de manera informal, definiciones que se someten a consideración de la clase.

8	P:	¿Quién formula la definición de altura? ¿Quién la recuerda? Ustedes la estudiaron el semestre pasado… creo. [Efraín alza la mano]. Efraín: ¿Qué es la altura?	ConsDe
9	Efraín:	Es la distancia desde el punto medio de un triángulo hasta su ángulo opuesto.	DefInf
10	P:	¿Alguien controvierte esa definición? [Se escuchan murmullos de desaprobación. Juan y Leopoldo alzan la mano]. Juan.	ConsDef
11	Juan:	Es la distancia desde un vértice hasta la recta que contiene al lado opuesto del vértice.	DefInf
12	P:	Ambos hablan de distancia. […].	ConsDef
13	Juan:	Es que al definir distancia, ya se sabe que tiene que ser perpendicular.	ConsDef
14	P:	(a) Ah, pero tendríamos entonces que haber hablado [previamente] de la distancia de un punto a una recta.	DefSis
		(b) Pero, yo les pregunto: ¿la altura es un objeto geométrico?, o, ¿es un número?	ConsDef
		[…]	

19	Estudiante:	Un segmento.	ConsDef
20	P:	En los libros hay altura definida como segmento y altura definida como recta. Nosotros vamos a trabajar la altura definida como segmento. […]	ConsDef

[P62:8-20]

Con la intervención 8 la profesora impulsa una conversación para que los estudiantes expresen qué idea tienen de altura y así favorecer la negociación del significado de ésta. Efraín propone una idea informal, DefInf, que hace referencia a la distancia entre dos puntos, uno de los cuáles es el punto medio de un lado del triángulo y el otro es el vértice opuesto [8]. Al escuchar murmullos de desaprobación, la profesora los invita a controvertir la propuesta de Efraín impulsando la construcción colectiva de la definición [9]. Juan propone una definición alternativa [11] en la que también incluye el término 'distancia', pero con una idea más próxima al concepto de altura que la de Efraín, mencionando la distancia de un vértice del triángulo a la recta que contiene al lado opuesto. La profesora centra la atención en el término 'distancia' que han mencionado Efraín y Juan [12], lo que lleva a Juan a defender su propuesta [13] indicando que con ese término él se está refiriendo a una perpendicular. Quizás Juan supone que la profesora espera una referencia específica al segmento perpendicular a un lado del triángulo. Pero la profesora parece tener dos objeciones diferentes al uso del término 'distancia' [14]: una -que no desarrolla en profundidad- tiene que ver con usar la definición de distancia de un punto a una recta, pues ésta no se ha incluido en el sistema axiomático que están construyendo y su uso implicaría institucionalizarla previamente; dos, que el término 'distancia' alude a un número y no a un objeto geométrico. Hemos codificado la primera objeción de la profesora con DefSis para indicar que las definiciones que se adoptan en la clase deben supeditarse a los enunciados del sistema axiomático que están construyendo, favoreciendo la empresa conjunta que han emprendido (construir un sistema axiomático). La segunda objeción tiene que ver con decidir si van a considerar la altura como un número, como un segmento o como una recta, aspecto clave en la negociación del significado; por ello codificamos esta objeción con ConsDef.

Ejemplo 6: Representar una figura según la definición

Definición de altura (extracto 2): Una vez se institucionaliza la definición de altura, comienzan a trabajar en parejas un problema que invita a establecer relaciones entre el tipo de triángulo y la congruencia de dos alturas. Darío y Leopoldo sostienen una conversación relacionada con la definición de altura, a raíz de diversas situaciones con las que Leopoldo se encuentra al construir un triángulo en Cabri, trazar dos de sus alturas y explorar la representación.

82	Darío:	(a)	[…] Sáquele las alturas a ese triángulo.	RepDef
		(b)	Pero acuérdese que si va a hallar la perpendicular [que pasa por el vértice del triángulo] no es al segmento [correspondiente al lado del triángulo], sino a la recta [que contiene al lado]. [Leopoldo está trabajando en el computador y Darío en una calculadora. Darío no ve lo que hace Leopoldo].	IdPrDef
83	Leopoldo:	(a)	[Después de hacer el triángulo y los segmentos perpendiculares desde dos vértices hasta los lados opuestos, arrastra los vértices del triángulo].	RepDef
		(b)	Vea que cuando el triángulo se vuelve obtusángulo, se desaparece una altura.	ExplorCabri
84	Darío:		Porque está mal [construida]. Apuesto a que usted la sacó perpendicular al lado. Es a la recta [que contiene el lado].	IdPrFa
			[…]	
87	Leopoldo:	(a)	[Leopoldo repite la construcción siguiendo las indicaciones de Darío.	RepDef
		(b)	Después vuelve a arrastrar los vértices del triángulo]. Vea que si es [triángulo] recto [se refiere a rectángulo] no hay alturas.	ExplorCabri
88	Darío:		¡Cómo no va a haber! ¿Cuántas alturas tiene un triángulo? […].	IdPrDef
89	Leopoldo:	(a)	[…] [Repite la construcción].	RepDef
		(b)	Vea Darío, me quedó otra vez mal. Me volvió a quedar mal [Lo dice porque al arrastrar los vértices dos alturas quedan por fuera del triángulo].	ExplorCabri
90	Darío:		¿Qué hizo?	RepDef
91	Leopoldo:		Yo no sé [Se ríen y luego repasan la construcción hecha].	RepDef
			[…]	
100	Darío:		¿Cuál fue el [triángulo] que hizo? ¿No fue *ABC*?	RepDef
101	Leopoldo:		Por eso, cuando el triángulo se vuelve… así... [Obtusángulo].	ExplorCabri
102	Darío:		Las alturas están afuera.	IdPrRe
103	Leopoldo:		¡Ah!, ya lo pille.	IdPrRe

[P62:82-103]

Hacer la representación de un triángulo y dos de sus alturas, en Cabri, se constituye en una oportunidad para interpretar las propiedades incluidas en la definición de altura. Inicialmente cuando Darío le pide a Leopoldo que construya un triángulo y dos de sus alturas [82] le recuerda una de las propiedades que es fundamental para hacer una representación apropiada en Cabri: la altura es un segmento perpendicular a la recta que contiene al lado del triángulo y no simplemente al lado (IdPrDef). Como Leopoldo hace caso omiso de esta condición y traza la perpendicular al lado del triángulo [83], cuando arrastra los vértices para explorar las propiedades de la figura (ExplorCabri), una de las alturas se le 'desaparece', pues en la construcción hecha no siempre hay intersección entre el lado del triángulo y el segmento perpendicular. En la representación en Cabri se hace explícita la importancia de incluir la propiedad mencionada en la definición, aunque Leopoldo no interpreta el fenómeno gráfico revisando la construcción con respecto a la propiedad y es Darío quien se encarga de hacerlo [84]. Una vez corregida la representación, Leopoldo hace otra exploración de la figura y se encuentra con un nuevo fenómeno que lo confunde y que tampoco interpreta con base en la definición: cuando el triángulo es rectángulo parece que no hubiera dos alturas [87]. Leopoldo no reconoce que la condición de perpendicularidad de las alturas conduce a la coincidencia de ellas con los lados que conforman el ángulo recto del triángulo. Nuevamente es Darío quien se encarga de explicar el fenómeno gráfico con base en la definición. Hemos usado el código IdPrDef en la intervención 88 de Darío porque, a pesar de él que no hace una identificación explícita de las propiedades de la altura en la definición, con la expresión: "¡Cómo no va a haber! ¿Cuántas alturas tiene un triángulo?" indica la imposibilidad de que un triángulo no tenga alturas, de acuerdo a la definición de éstas. A raíz de una segunda exploración hecha por Leopoldo [89] nuevamente salta a la vista que su imagen conceptual de altura está referida aún a la imagen prototípica de un segmento en el interior de un triángulo. La situación de las alturas fuera del triángulo le es tan poco familiar que incluso se confunde entre cuál es el triángulo y cuáles son las alturas. Con ayuda de Darío repasan la construcción para asegurarse que está bien hecha [90 -100] y, tras un nuevo arrastre de los vértices, Leopoldo contempla la posibilidad de que las alturas queden por fuera del triángulo [102-103].

Ejemplo 7: Rechazar propuestas de definición

Definición de interior de cuadrilátero: A raíz de una conjetura formulada por María y Efraín en la que los estudiantes hacen referencia al interior de un cuadrilátero, se genera una discusión tendente a institucionalizar su definición. Henry propone una definición, basada en la de interestancia[8], que se descarta por no cumplirse para cuadriláteros no convexos.

65	Henry:	Todos lo puntos *X*, tales que *X* está entre dos puntos de dos lados diferentes del cuadrilátero.	ConsDef
	[…]		
69	P:	¡Ah!… conjunto de los *X*… […]. Bueno, entonces ahora dice Henry: el interior del cuadrilátero [escribe mientras habla] es el conjunto de puntos *X*, tal que/	ConsDef
70	Henry:	/*X* está entre dos lados/	ConsDef
71	P:	/Se cumple *Z* - *X* - *Y*, donde *Z* y *Y* pertenecen a lados diferentes del cuadrilátero.	
72	Daniel:	No se cumple para ese de allá [Señala la Figura 6.3].	ReDefRe

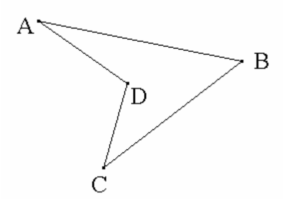


Figura 6.3

73	P:	No se cumple, ¿no? Porque si tomo acá [en el lado *AD*] y acá [en el lado *CD*] a *Y* y a *Z* y aquí a *X* [Complementa la representación; Figura 6.4]. […].	ReDefRe

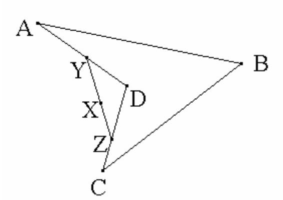


Figura 6.4

[P110:65-73]

En las interacciones 65 – 71, Henry y la profesora proponen una definición de interior de cuadrilátero a partir de la idea de Henry. De inmediato la propuesta es rechazada por Daniel quien señala una figura de un cuadrilátero no convexo que está dibujada en el tablero, indicando que en esa figura no se cumple la definición sugerida. La profesora ilustra la objeción de Daniel [73] mostrando un punto *X* que cumple la condición *Y*-*X*-*Z*, con *Y* y *Z* en lados distintos del cuadrilátero, pero que no está en el interior de éste. El extracto es representativo de una práctica

[8] Definición de interestancia: *B* está entre *A* y *C* si *A, B* y *C* son puntos distintos de una misma recta y *AB* + *BC* = *AC.*

usual en la que estudiantes y profesora rechazan propuestas de definición e ilustran con una representación por qué la definición no es apropiada. Por eso hemos usado el código ReDefRe en las intervenciones 72 y 73. Las anteriores intervenciones son ejemplos de participación en la construcción de la definición (ConsDef).

Ejemplo 8: Estudiar la equivalencia entre definiciones

Definición de rectángulo: Una conjetura, resultado de la investigación acerca del tipo de cuadrilátero para el cuál una diagonal biseca a la otra, da como resultado que algunos estudiantes se refieran a las propiedades del rectángulo. Como aún no han incluido la definición en el sistema axiomático, por solicitud de la profesora, algunos de ellos proponen definiciones para rectángulo. Después, ella lidera una comparación de las definiciones para identificar si son definiciones equivalentes o no y llegar a un acuerdo sobre cuál va a ser la definición que van a adoptar.

41	P:		Escriban sus definiciones [de rectángulo].	ConsDef
42	Darío:		[Escribe en el tablero: Es un paralelogramo que tiene al menos un ángulo recto].	ConsDef
43	P:	(a)	Una, ¿quién más? Otra definición. ¿Tú? [Se refiere a Julián].	ConsDef
		(b)	Vamos a ver si son distintas.	Equiva
		(c)	Escriban lo que ustedes creen que es un rectángulo.	ConsDef
44	Julián:		[Escribe en el tablero: Es un paralelogramo *ABCD* cuyos ángulos A*, B, C, D* son congruentes].	ConsDef
45	Ignacio:		[Escribe en el tablero: Es un paralelogramo cuyos ángulos son congruentes].	ConsDef
46	Marina:		[Escribe en el tablero: Es un cuadrilátero con dos pares de lados opuestos paralelos y al menos un ángulo interno recto].	ConsDef
47	Germán:		[Escribe en el tablero: Cuadrilátero con sus lados adyacentes perpendiculares].	ConsDef
48	P:	(a)	¿Alguien tiene una distinta? [Pausa].	ConsDef
		(b)	Bueno, tenemos cuatro definiciones, porque éstas dos coinciden [las de Julián e Ignacio].	Equiva
		(c)	Eh… la de Marina es: “un cuadrilátero con dos lados opuestos paralelos…” ¿O sea?	IdPrDef
49	Marina:		Paralelogramo.	IdPrDef
50	P:	(a)	“… y al menos un ángulo interno recto”; o sea, en el fondo es igual a ésta [la de Darío].	Equiva
		(b)	Entonces tenemos tres [definiciones]. La de Germán es: “un cuadrilátero con lados adyacentes perpendiculares” ¿De acuerdo? […]. O sea que, en pocas palabras, Germán está	IdPrDef

		diciendo que en el rectángulo hay cuatro ángulos rectos.	
		(c) En cambio aquí dicen: "… cuyos ángulos son congruentes" [en las de Julián e Ignacio] y aquí dice "paralelogramo" [en las de Julián, Ignacio, Darío].	IdPrDef
		(d) ¿Ésta [la de Germán] llevaría a ésta [la de Darío]? [Si es] cuadrilátero con lados adyacentes perpendiculares entonces, ¿es paralelogramo?... ¿por qué? [Varios hablan al tiempo].	Equiva
51	Germán:	Tiene que ser paralelogramo porque [no se entiende].	Equiva
52	P:	[…] o sea que de éstas [de las definiciones de Ignacio y Germán], podemos inferir ésta [la de Darío]. Bueno… depende… éstas dos definiciones… ésta menciona los cuatro ángulos [la de Ignacio] y ésta pide sólo uno [la de Darío].	Equiva
53	Germán:	Es que un paralelogramo puede ser así [muestra con el dedo la forma de rectángulo].	RepDef
54	P:	Sí. Pero es que ésta [la de Darío] pide un ángulo recto y ésta [la de Ignacio] pide cuatro. Entonces todavía no se sí de ésta [la de Darío] llego a ésta [la de Ignacio].	Equiva
55	Ignacio:	O de la otra a esa.	Equiva
56	P:	Ah sí. Si tengo cuatro, entonces tiene uno…	Equiva
57	Luz:	O si tiene uno, entonces tiene cuatro.	Equiva
58	P:	Y si ésta [la de Darío] lleva a ésta [la de Germán]. Es decir, si son equivalentes. Si tengo paralelogramo, con un ángulo recto, ¿tengo cuadrilátero con cuatro… con lados adyacentes perpendiculares?	Equiva
59	Ignacio:	[Varios hablan al tiempo; se destaca la voz de Ignacio]… que lados opuestos sean congruentes.	IdPrDef
60	P:	¿Sí o no?	
61	Ignacio:	El ángulo opuesto al ángulo recto del paralelogramo tiene que dar también recto.	IdPrDef
62	P:	A ver… tengo paralelogramo *ABCD*. Este es un ángulo recto [*D*] [Hace una representación como la figura 6.5].	RepDef

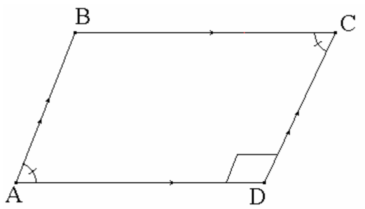


Figura 6.5

63	Ignacio:	El ángulo *B* también es recto.	IdPrRe
64	P:	Pero, siempre y cuando demostremos… ah… sí, estos dos son opuestos… son rectos [*B* y *D*] ¿y? [Varios hablan al tiempo] Tengo paralelogramo. Estas dos son paralelas… estas otras dos también	IdPrRe

> son paralelas. Por el teorema, tengo que éste ángulo también es recto, porque los opuestos son congruentes. […].
>
> […]

[P113:41-64]

El extracto incluye cuatro acciones relacionadas con la negociación de la definición de rectángulo. En primer lugar, la contribución de los estudiantes en la producción de la definición, impulsada por la profesora (ConsDef). Ellos proponen diferentes enunciados que no pueden calificarse como definiciones informales pues cualquiera de ellas podría institucionalizarse [41 - 47]. Su aceptación depende del grado de compatibilidad con el sistema axiomático que construyen y no del empleo de términos inadecuados. En segundo lugar, se revisan las propiedades explícitas en cada una (IdPrDef) con el objetivo de avanzar hacia la identificación de la más acorde con el sistema [48 – 50, 59, 61]. Por ejemplo, como Marina se refiere a un "cuadrilátero con lados opuestos paralelos…" la profesora invita a considerar a qué figura se refiere la estudiante con esa parte del enunciado [48] y Marina misma reconoce en su formulación la definición de paralelogramo [49]; o como Germán dice: "es un cuadrilátero con lados adyacentes perpendiculares" la profesora relaciona esta propiedad con tener cuatro ángulos rectos [50]. También podemos ver que en las intervenciones 59 y 61 Ignacio asocia las propiedades 'ser paralelogramo' y 'tener un ángulo recto' con el hecho de tener ángulos opuestos rectos. En tercer lugar, se identifican las propiedades del rectángulo en una representación de un paralelogramo (RepDef) como un recurso para revisar algunos de los enunciados [53, 62]. En cuarto lugar, y cómo única oportunidad a lo largo de los quince episodios seleccionados, se lleva a cabo una conversación sobre la equivalencia de algunas de las definiciones propuestas (Equiva) revisando si éstas coinciden en la formulación o si se puede llegar a una a partir de las propiedades explícitas en la otra y viceversa. En la intervención 43, la profesora insinúa el interés por establecer la equivalencia; en las intervenciones 48 y 50 se establece que las definiciones propuestas por Julián e Ignacio coinciden, así como las de Darío y Marina, porque aluden explícitamente a las mismas propiedades. Las otras intervenciones codificadas con Equiva señalan la interacción tendente a revisar si se puede llegar a una definición a partir de la otra por medio de un proceso deductivo [50-52, 54-57]. Como sí es posible, consideran que las definiciones son equivalentes. Esta acción es quizás una de las más complejas en las que participan los estudiantes relacionada con las definiciones, aunque por ser poco frecuente, podemos decir que apenas tienen un primer acercamiento a este tipo de actividad matemática.

Ejemplo 9: Escoger la definición que se ajusta al sistema

Definición de rectángulo (extracto 2): Después de analizar la equivalencia entre las distintas definiciones de rectángulo (ver ejemplo 9) la profesora considera oportuno decidir, entre dos de las propuestas, cuál es la más apropiada para incluir en el sistema que están construyendo. Después, institucionalizan la propuesta de Darío.

66	P:	[…] Entonces, esta es una definición buena [la de Germán], […]. Pero nosotros ya sabemos mucho de paralelogramos. Entonces, posiblemente nos queramos quedar con ésta [la de Darío] o con ésta [la de Ignacio] ¿Cuál de las dos? […] ¿Cuál de las dos?... Debemos adoptar una. Una vez que tengamos una ya lo demás es teorema.	DefSis
67	Nancy:	Por eso… la primera [es decir, la definición de Darío].	DefSis
68	P:	¿Prefieres la primera? ¿Por qué?	
69	Nancy:	Porque de ahí podría sacar… teniendo lo de los ángulos rectos, de ahí podría sacar que son congruentes, que miden 90.	DefSis
70	P:	La primera es como menos exigente, ¿no? Digamos… de cierta manera. Si yo quiero demostrar que algún cuadrilátero es un rectángulo, solo tengo que mostrar dos cosas: que es paralelogramo y que tiene un ángulo recto. En la otra me toca mostrar que es paralelogramo y que los cuatro ángulos son congruentes. Entonces ésta exige menos […]. [Escogen la definición de Darío].	DefSis

[P113:66-70]

La acción de decidir qué definición conviene al sistema axiomático (DefSis) es compleja y quizás es prematuro pretender que los estudiantes participen plenamente en ella. En los episodios que hemos escogido para hacer el análisis, sólo en dos oportunidades los estudiantes tienen un acercamiento a esta actividad matemática: cuando la profesora rechaza la definición de altura propuesta por Juan -ya que hace uso de la definición de distancia de un punto a una recta, que en ese momento no se ha institucionalizado-, y en esta ocasión. En las intervenciones 67 y 69 de Nancy se evidencia que ella trata de buscar una definición 'económica', es decir, con pocas propiedades explícitas para favorecer su uso en las demostraciones.

6.2. CONJETURAR

En diez de los quince episodios que escogimos para hacer el análisis a profundidad, los estudiantes tienen la oportunidad de formular, comparar, evaluar o adecuar las conjeturas que las parejas obtienen como solución a los problemas propuestos. El tratamiento dado a las conjeturas en la enseñanza experimental es un rasgo distintivo de esta comunidad, incluso en comparación con otras versiones del curso. En busca de una participación relevante de los estudiantes, y de que ellos se sientan comprometidos con la construcción colectiva de conocimiento, la profesora hace especial énfasis en discutir las conjeturas que se formulan y en hacer de ellas la fuente principal de las ideas que se organizan en el sistema axiomático. En total, en los quince episodios se discuten públicamente 63 conjeturas. La gestión de las clases relacionadas con la discusión colectiva de éstas es generalmente muy similar: los estudiantes entregan a la profesora las conjeturas obtenidas en la resolución de un problema, ella las organiza, (busca un estudio gradual, desde aquellas menos elaboradas hasta las más completas teniendo en cuenta la inclusión teórica entre éstas y aprovechando al máximo las producciones de los estudiantes para revisar una amplia gama de consideraciones), y luego presenta públicamente una por una para llevar a cabo el proceso de revisión colectiva que incluye generalmente la revisión del enunciado, la reformulación para adecuarlas a un enunciado condicional claro y completo, la comparación entre unas y otras y la evaluación en términos de su aceptabilidad y deducibilidad.

En esta sección ilustramos con ejemplos las finalidades de participación de los estudiantes en relación al tratamiento dado a las conjeturas procurando abarcar la mayoría de los códigos con los cuáles llevamos a cabo el análisis de las transcripciones.

Ejemplo 1: Analizar la concordancia entre la construcción y la conjetura

Conjetura: "Si un triángulo tiene dos lados congruentes entonces dos de sus alturas son congruentes". La profesora proyecta en el tablero una de las conjeturas propuestas por Darío y Leopoldo, (grupo C), y pide a Leopoldo leer el procedimiento de construcción que condujo a la formulación de la conjetura, seguido de la conjetura formulada. Luego, impulsa una revisión de la concordancia entre la conjetura y el proceso de construcción. Usa las letras "*p*" y "*q*" para diferenciar las proposiciones que componen la conjetura y la descripción de la construcción y así favorecer el análisis de la concordancia entre ambas.

8	P:	(a)	Bueno, ahora vamos a mirar […] las conjeturas.	FormuTarea
		(b)	Varios llegamos a las mismas conjeturas, ¿sí? Pero, por ejemplo…	Semeja
		(c)	quiero que el grupo… C […] quiero que lean lo que escribieron para la construcción. ¡Ponemos atención por favor!… ponemos atención porque quiero que se fijen muchísimo en lo que dice el grupo C y después en la	ConjCons

		conjetura que establecen.	
9	Leopoldo:	Se construyó el triángulo ABC, luego las alturas del triángulo… y mediante el arrastre se logró que dos de las alturas fueran congruentes. Conjetura…	ConjCons
		[…]	
14	P:	[…]. Ahora la conjetura.	ConjCons
15	Leopoldo:	Conjetura: Si un triángulo tiene dos lados congruentes entonces dos de sus alturas son congruentes.	ConjCons
16	P:	Bueno, entonces… mira. Vamos a determinar ahí dos cosas. Una, vamos a llamar *p*… eh… “lados congruentes del triángulo”… ¿no? Y *q*… “alturas congruentes”… […]. [Escribe en el tablero: *p*: lados congruentes del triángulo; *q:* alturas congruentes] Y… grupo C… lean otra vez la construcción.	ConjCons
17	Leopoldo:	Se construyó el triángulo *ABC*, luego las alturas del triángulo… y mediante el arrastre se logró que dos de las alturas fueran congruentes. Conjetura…	ConjCons
18	P:	O sea que ustedes obligaron a qué… ¿a *p* o a *q*?	ConjCons
19	Leopoldo:	Eh… la segunda.	ConjCons
20	P:	A *q*… ¿Sí? Esto es lo que ustedes obligaron… ¿Qué pasa?	
21	Leopoldo:	[Leopoldo hace expresión de haber caído en cuenta de algo].	ConjCons
22	P:	¿Qué pasa Leopoldo? A ver…	
		[…]	
24	Leopoldo:	No sé. Creo que de *q* dedujimos *p*.	ConjCons
25	P:	De *q* dedujeron *p*… ¿Y cuál fue la conjetura que estableciste?	ConjCons
26	Leopoldo:	Pues que si las alturas son congruentes… ¡ah!… si *p* entonces…	ConjCons
27	P:	(a) O sea… y esto no les pasó solo a ellos. Muchos hicieron lo mismo.	Semeja
		(b) La construcción de ellos fue obligar a que se cumpliera *q*… y se dieron cuenta que entonces se daba *p*. Pero la conjetura que escribieron fue: si *p* entonces *q*. Esto es muy importante. Muy importante porque en el teorema la hipótesis es aquello que sabemos como válido. […].	ConjCons

[P66:8-27]

El extracto ejemplifica una de las prácticas comunes en las clases en donde se discuten las conjeturas: se evalúa si el antecedente corresponde a las condiciones impuestas a la figura, por construcción o por arrastre, y si el consecuente es la propiedad descubierta en la exploración. En este ejemplo se aprecia de qué manera la profesora guía a Leopoldo para que él pueda reconocer si su conjetura concuerda con la construcción o no, pues es una de las primeras veces que esta práctica se lleva a cabo. Primero, le pide leer la descripción de la construcción y la conjetura e impulsa la búsqueda de la concordancia [8, 14]; después, se vale del lenguaje proposicional para que Leopoldo distinga las dos propiedades geométricas que se mencionan tanto en la conjetura como en la construcción, una de las cuales es la propiedad que se impuso por arrastre, y la otra es el resultado de éste [16, 18, 27]. Por su parte, Leopoldo participa inicialmente leyendo en voz alta la descripción de la construcción y la conjetura que formularon él y Darío. Aunque las intervenciones 9, 15 y 17 vistas fuera del contexto de la interacción podrían considerarse como ejemplos de la descripción de la estrategia de construcción o la formulación de la conjetura, hemos usado el código ConjCons porque la profesora busca que, al leer en voz alta la descripción y la conjetura, y con el apoyo de las letras *p* y *q,* Leopoldo caiga en cuenta de la no concordancia. En efecto, después de un momento de titubeo [22, 24] el estudiante logra identificar que, en la formulación de su conjetura, el antecedente debía ser el consecuente, y viceversa [26]. En la intervención 27 la profesora hace explícito el objetivo de la práctica de establecer la concordancia entre la construcción y la conjetura cuando señala la importancia de identificar que la hipótesis de un teorema incluye aquello que se sabe porque está dado o porque se impone conscientemente.

Ejemplo 2: Identificar propiedades que faltan o que sobran en el enunciado

Conjetura: "*ABC* es un triángulo y la medida de uno de sus ángulos es mayor a 90 y los lados que determinan este ángulo son congruentes entonces el triángulo es isósceles y dos de sus alturas son congruentes". La profesora proyecta en el tablero una conjetura propuesta por Luz y Marina, (grupo F); pide analizarla y opinar sobre ella. María, Orlando y Germán intervienen para hacer referencia a una condición incluida en el antecedente.

68	P:	Entonces vamos a mirar algunas de las conjeturas. Grupo… F. Y van ustedes a analizar. Grupo F, ¿quién es el grupo F? [Luz y Marina alzan la mano], dicen lo siguiente [muestra una diapositiva con la conjetura].	FormuTarea
69	Luz y Marina:	[Las estudiantes han escrito: *ABC* es un triángulo y la medida de uno de sus ángulos es mayor a 90 y los lados que determinan este ángulo son congruentes entonces el triángulo es isósceles y dos de sus alturas son congruentes].	ForIni
70	P:	[…]. Quiero que examinen la propuesta de ellas y me digan qué piensan.	Enunci
71	María:	Es como muy local.	Enunci

72	P:	¿Muy local?	Enunci
73	María:	Sí, obliga a que el ángulo sea mayor que 90. [Se refiere a un ángulo del triángulo].	Enunci
74	P:	Miren la propuesta, ¿y?	Enunci
75	María:	O sea, eso se cumple, pero para ese caso específico.	Enunci
76	P:	¿Qué es lo que se cumple?	Enunci
77	María:	Que el triángulo es isósceles y dos de sus alturas son congruentes.	Enunci
78	Orlando:	Lo que pasa que es que [según la conjetura] no puede ser cualquier triángulo isósceles sino uno con la característica de que el ángulo donde/	Enunci
79	P:	/el ángulo del vértice… se llama… el ángulo del vértice/	
80	Orlando:	/tiene que ser mayor a 90, el que forma los lados iguales.	Enunci
81	P:	Sí.	
82	Germán:	Estarían diciendo que eso no se cumple para el resto de triángulos porque estarían diciendo que cuando el triángulo tenga el vértice igual a 90 no se cumple/	Enunci
83	P:	/El ángulo del vértice. Según ellas, no parecería que se cumpliera. Entonces es una conjetura, que como dice María, está muy localizada. Y no lo más general posible.	Enunci
84	Luz:	Sí. Pero fue lo que nosotras encontramos.	ConjCons

[P66:68-84]

En general, en este extracto la profesora delega la evaluación a los estudiantes interviniendo poco y sólo para pedir alguna aclaración o complementar información. El peso de la evaluación está centrado en María, Orlando y Germán quienes consideran que Luz y Marina han añadido una condición que limita innecesariamente el universo de triángulos isósceles para los cuales las alturas a los lados congruentes son congruentes [71, 73, 75, 78, 80, 82]. Con la expresión "es como muy local" María pretende señalar este hecho [71] que luego es explicado en mejor forma por Orlando, quien aclara cuál es la condición sobrante [78, 80]. Germán manifiesta que de ser cierta la conjetura que Luz y Marina han formulado no podría afirmarse que un triángulo con dos lados congruentes y ningún ángulo mayor que 90 tendría dos alturas congruentes [82][9]. La evaluación que hacen los estudiantes se centra en una condición sobrante en el enunciado de la conjetura, hecho que es avalado por la profesora; ella sugiere que el enunciado podría ser

[9] En lenguaje proposicional, lo que Germán pretende decir es que si la conjetura de Luz y Marina fuera cierta, es decir $(p \wedge q) \rightarrow r$, no podría concluirse que $(p \wedge \neg q) \rightarrow r$, o sea que $\neg[(p \wedge \neg q) \rightarrow r]$. Por el contrario, la propiedad q es irrelevante en este caso.

expresado en forma más general [83]. Luz interviene en defensa de su conjetura señalando que Marina y ella escribieron lo que descubrieron en la exploración [84], aludiendo a la concordancia entre la construcción y la conjetura. Sin embargo, su intervención no ocasiona una reacción de la profesora o de algún compañero tendente a revisar la exploración hecha y convencer a Luz que ésta fue muy limitada ya que no revisaron triángulos acutángulos o rectángulos.

Ejemplo 3: Reescribir una conjetura usando proposiciones afirmativas

Conjetura: "Si todos los lados de un triángulo son diferentes o no son congruentes, ninguna de sus alturas es congruente a ninguna otra". William y Gonzalo, (grupo J), formulan una conjetura que incluye varias negaciones. La profesora la escribe en el tablero e impulsa una reformulación que permita una mejor interpretación de lo que la conjetura afirma.

6	P:	Lo primero que quiero hacer es devolverme un poco […] a una de las conjeturas que propuso el grupo J. Simplemente por un interés que tengo de… de que analicemos el formato con el cual construyeron la conjetura los [estudiantes] del grupo J. Dice lo siguiente: [Va escribiendo] "si todos los lados de un triángulo… […] son diferentes o no son congruentes, ninguna de sus alturas es congruente a ninguna otra" […] Esta… esta forma de decir algo es bastante "negativa". [Se ríe] Todo es con negaciones. […] Parecería que está escrito como de la forma: no *p*, entonces no *q*, ¿cierto? Si no "algo", entonces no "algo". [escribe: $\neg p \rightarrow \neg q$] Entonces mi pregunta es: ¿cuál es la contrarrecíproca de esto, o sea… debería ser *q* entonces *p*, entonces… ¿cómo quedaría?	Afirma
7	Ignacio:	Si tengo una figura… un triángulo con alturas no congruentes, entonces los lados no son congruentes.	Afirma
8	P:	Estás hablando ¿de qué? Estoy pidiendo la contrarrecíproca de esta.	Afirma
9	Ignacio:	Si sus alturas son congruentes…	Afirma
10	P:	O sea, bueno… a pesar de que está con negación, el formato digamos que sea este: [$p \rightarrow q$]. La contrarrecíproca sería: *no q* entonces *no p*, […], ¿sí? Entonces, ¿cuál sería la contrarecíproca? [Daniel alza la mano]. Habla duro para que todos oigan.	Afirma
11	Daniel:	Que si en un triángulo dos alturas son congruentes, entonces al menos dos de sus lados son congruentes.	Afirma
12	P:	¿Están de acuerdo? Si en un triángulo dos alturas son congruentes, entonces al menos dos lados son congruentes.	Afirma
13	Julián:	Serían todas. Si las alturas… pues las tres alturas, entonces los tres lados.	Afirma
14	P:	[…] Vamos a negar "ninguna altura es congruente a otra". Ninguna	Afirma

> es congruente. ¿Cuál es la negación de eso? Daniel dice, "dos son congruentes"… eh… Julián dice: "todas son congruentes". Hay tres alturas, ¿sí?, y estamos diciendo aquí: la altura 1 no es congruente a la altura 2 y la altura 1 no es congruente a la altura 3 y la altura 2 no es congruente a la altura 3, ¿sí? Estamos diciendo aquí… voy a ponerlo así: a1 no es congruente a a2, a1 tampoco es congruente a a3 y a2 tampoco es congruente a a3 [Escribe $a1 \neq a2$[10] y $a1 \neq a3$ y $a2 \neq a3$]. Y aquí [entre cada proposición] son "íes", "íes", ¿cierto? y esta [proposición] tampoco se tiene, y esta [proposición] tampoco se tiene, y esta [proposición] tampoco se tiene. Estamos negando eso. […] ¿Cual es la negación de esto? Primero que todo, estoy negando una conjunción [Escribe $\neg$ ($a1 \neq a2$ y $a1 \neq a3$ y $a2 \neq a3$)] y la negación es una disyunción. Entonces es: a1 congruente a a2, que es la negación de esto, o, a1 congruentes a a3, o, a2 congruente a a3. [$a1 \cong a2 \vee a1 \cong a3 \vee a2 \cong a3$] Pero es un "o", luego lo que propone Julián no es correcto. Pero lo que dice Daniel sí […], no es "dos…" sino "dos o tres de las alturas son congruentes entonces al menos dos lados son congruentes". Quería sacar esto a la luz, porque es mejor conformar las conjeturas de una manera positiva [se ríe] Pero, a veces es difícil para uno. Fíjense que nos costó trabajo. Y entre no conformar ninguna conjetura y formular una, pues prefiero que la formulen. Y este ejercicio es importante, porque fíjense que estamos usando que la negación de una conjunción es la disyunción de las negaciones de cada uno de los términos. Entonces quedaría esta misma conjetura, [se refiere a una conjetura ya discutida]: si, al menos dos alturas son congruentes, entonces al menos dos lados del triángulo son congruentes.
>
> **[P92:6-14]**

El extracto ejemplifica el proceso de negociación que se lleva a cabo cuando alguna pareja formula una conjetura de difícil interpretación por incluir negaciones. La profesora lidera la actividad de reformulación sugiriendo usar proposiciones afirmativas que favorezcan la claridad del significado. Por esa razón, usamos el código Afirma para caracterizar todas las intervenciones del extracto. William y Gonzalo (grupo J), además de expresar proposiciones que niegan propiedades, hacen uso de los cuantificadores 'todos' y 'ninguno' lo que complica la reformulación en positivo. Ante la petición de expresar la proposición contrarecíproca, Ignacio formula inicialmente la proposición recíproca invirtiendo la condicional, pero sin negar las proposiciones que la componen [7]; después, ante una intervención de la profesora que le insinúa que está errado, afirma la negación del consecuente: "si sus alturas son congruentes", pero se queda pensando cómo negar el antecedente para terminar de formular la condicional [9]. La profesora interviene

[10] Usamos el símbolo $\neq$ para representar "no congruente".

recordando cómo se construye la proposición contrarrecíproca de manera general [10] y vuelve a preguntar cuál sería la contrarecíproca de la conjetura de William y Gonzalo. Daniel propone una idea bastante cercana a la formulación que la profesora tiene en mente pues niega 'ninguna altura' diciendo "dos alturas" y niega 'todos lo lados' diciendo "al menos dos lados"; es decir, niega de manera apropiada los cuantificadores 'todos' y 'ninguno', salvo que en lugar de decir "dos alturas" debió referirse a 'dos o tres alturas' [11]. La profesora impulsa la negociación de la interpretación hecha pidiendo a todo el grupo opinar sobre lo que dijo Daniel. Julián interviene para referirse a la negación de 'ninguna altura'; desde su punto de vista, debería decirse 'todas las alturas' y 'tres lados congruentes'. La profesora decide entonces hacer una explicación sobre la negación del cuantificador 'ninguno' y de cómo se niega una proposición compuesta de tres conjunciones; ilustra por qué el cuantificador 'ninguno' se niega con 'al menos' y no con 'todos'. También explica cómo Daniel debió redactar el antecedente de la conjetura, incluyendo la posibilidad de que las tres alturas fueran congruentes. Con los cambios hechos, la conjetura resulta ser la misma de otra pareja y es admitida por el grupo como aceptable.

Ejemplo 4: Vincular la conjetura con enunciados del sistema

Conjetura: "Si $\overleftrightarrow{PC} \perp \overleftrightarrow{KM}$, con *K-P-M*, *A* un punto $S_{\overrightarrow{KM},C} \cap S_{\overrightarrow{PC},K}$ y se construye una recta *l* paralela a la recta *KM,* de tal manera que la intersección de la recta *l* y la recta *PC* sea *C* y *A* y *B* son puntos de *l* tal que $AC = BC$ entonces $\Delta\ ACP \cong \Delta BCP$".

El enunciado del problema que da lugar a la conjetura sugiere una construcción inicial de dos rectas perpendiculares $\overleftrightarrow{PC}$ y $\overleftrightarrow{KM}$, que se intersecan en *P* y un punto *A* ubicado en el cuadrante que ilustra la Figura 6.6:

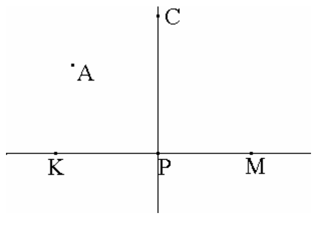


Figura 6.6

Al escribir la conjetura, Luz y Marina, (grupo F), incluyen las condiciones de la construcción como parte del antecedente de la conjetura y agregan cómo construir el punto *B* de tal forma que los triángulos ΔACP *y* ΔBCP resulten congruentes. En su propuesta de construcción, suponen que los puntos *A* y *C* están a la misma distancia de la recta *KM,* aunque no lo dicen. La profesora hace un resumen de la conjetura centrándose en aquellas condiciones que agregaron las estudiantes y luego impulsa una revisión de la conjetura para analizar si la construcción sugerida alude a objetos geométricos, relaciones o enunciados incluidos en el sistema axiomático.

11	Luz y Marina:		[Grupo F: Se construye una recta *l* paralela a la recta *KM*, de tal manera que la intersección de la recta *l* y la recta *PC* sea *C* y *A* y *B* son puntos de *l* tal que *AC* = *BC*].	ForIni
12	P:	(a)	El grupo F… no puse todo lo que dijeron sino que saqué la idea principal ¿Bien?	ForIni
		(b)	El grupo F construye una recta *l* paralela a la recta *KM*, de tal manera que la intersección de la recta *l* y la recta *PC* sea *C*. Entonces *C* es un punto por acá [Figura 6.7].	Ejempl

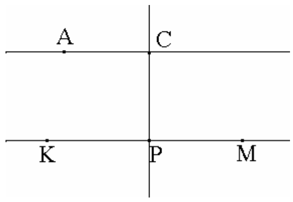


Figura 6.7

			[…] y *A* y *B* son puntos que pertenecen a *l* tal que la distancia de *AC* sea igual a la distancia *CB*.	
		(c)	¿Qué les parece esto? Vamos a mirar, de aquí en adelante las construcciones y preguntarnos: ¿concuerdan, encajan en el sistema axiomático que tenemos desarrollado hasta el momento? ¿Sí o no?	ConjSi
13	Germán:		No.	
14	P:		Tú dices que no. ¿Por qué?	ConjSi
15	Germán:		Porque no hemos definido paralelas.	ConjSi
16	P:		No hemos definido paralelismo. Luego digamos que aún cuando es posible que la construcción sea correcta, [las estudiantes] están usando conceptos que nosotros no hemos abordado. […]. Entonces, a pesar de que puede que sea correcta la sugerencia, no la vamos a analizar.	ConjSi

[P60:11-16]

Para impulsar la evaluación de la conjetura, la profesora comienza resumiendo ésta y centra la atención de la clase en las condiciones impuestas por Luz y Marina. Luego, elabora una representación que ejemplifica la parte del antecedente en donde se menciona la construcción de una recta paralela a la recta *KM*. A pesar de no hacer una representación completa, hemos codificado esta parte de la intervención con Ejempl pues la profesora hace la representación, a manera de ejemplo [12]. Después, pide a los estudiantes opinar sobre la conjetura pero condiciona la evaluación a revisar si ésta contiene sólo objetos, proposiciones o teoremas incluidos en el sistema axiomático que se tiene a disposición: "¿[la conjetura] encaja en el sistema axiomático que hemos desarrollado hasta el momento?" [12]. Germán reconoce que aún no tienen la definición de paralelismo [13, 15] y por eso la conjetura no se sigue revisando; la propuesta viola la norma de usar en las construcciones y en las justificaciones sólo aquellos objetos o enunciados que se han institucionalizado previamente o que se pueden institucionalizar en ese momento. La profesora explica que la conjetura podría admitirse, pero como hace referencia a un concepto aún no incorporado al sistema, (que no considera oportuno trabajar aún), decide no analizar a fondo la conjetura ni establecer su aceptabilidad o intentar demostrarla [16].

El extracto ejemplifica de qué manera la profesora introduce a los estudiantes en este tipo de evaluación de las conjeturas que no se ha hecho hasta el momento y que codificamos con ConjSi. Esta acción contribuye a regular el contenido del curso a favor de la empresa conjunta, al priorizar las ideas de los estudiantes ligadas a la porción del sistema ya construido antes, en lugar de otras ideas que es prematuro considerar. Por ejemplo, en contraste con el tratamiento dado a la propiedad geométrica 'paralelismo' incluida en la conjetura formulada por Luz y Marina, la profesora sí propone a los estudiantes demostrar la existencia de la recta perpendicular a otra por un punto externo a ésta, para poder admitir una construcción que sugieren Darío y Leopoldo en su conjetura relacionada con el mismo problema.

La diferencia en el tratamiento dado a las ideas de 'paralelismo' y de 'perpendicularidad' tiene una explicación de tipo didáctico: la existencia de la perpendicular a una recta por un punto externo a ésta puede demostrarse con enunciados presentes en ese momento en el sistema. En cambio, la demostración de la existencia de una recta paralela a otra por un punto dado obliga a introducir el postulado de existencia y unicidad de la recta paralela a otra -hecho que puede precipitar la introducción al sistema de algunos teoremas como el que afirma que la suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo es 180-. Esta introducción puede perjudicar la actividad geométrica alrededor de desigualdades asociadas a los triángulos, pues las demostraciones harían mayor uso de argumentos algebraicos que de propiedades geométricas. Como la profesora es el único miembro de la comunidad que tiene conocimiento pleno del sistema axiomático de referencia hacia donde pretende guiar la actividad demostrativa de los estudiantes, ella es quien puede decidir en qué momento abordar la demostración de propiedades que surgen en las propuestas de los estudiantes. En algunos momentos el tratamiento desigual dado a las propiedades que sugiren los estudiantes desconcierta a algunos, pero poco a poco van entendiendo las razones de la diferencia.

Ejemplo 5: Proponer contraejemplos

Conjetura: "Si $\overleftrightarrow{PC} \perp \overleftrightarrow{KM}$, con *K-P-M, A* un punto $S_{\overleftrightarrow{KM},C} \cap S_{\overleftrightarrow{PC},K}$ y se construyen un ángulo congruente al $\angle APC$ con lado el rayo *PB* y las rectas *AC, BC* y *BA*, haciendo *D* el punto de intersección de recta *BA* con rayo *PC*, entonces $\Delta PAC \cong \Delta PCB$, $\Delta ADC \cong \Delta DCB$ y $\Delta APD \cong \Delta PDB$". Jaime y Julián, (grupo A), incluyen en el antecedente de la conjetura las condiciones de la construcción inicial, previstas en el enunciado del problema, con las rectas perpendiculares $\overleftrightarrow{PC}$ y $\overleftrightarrow{KM}$, que se intersecan en *P*, y un punto *A* ubicado en el cuadrante que ilustra la Figura 6.8; luego agregan cómo construir un punto *B* para conformar tres pares de triángulos supuestamente congruentes.

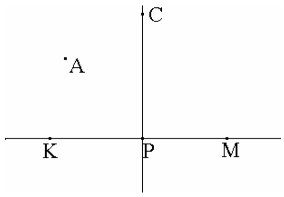


Figura 6.8

Después de hacer un resumen de la conjetura, la profesora hace una representación para favorecer el análisis de la misma en relación a las condiciones que los estudiantes escribieron en el antecedente de ésta.

17	Julián y Jaime:	[Grupo A: Si se construye un ángulo congruente al $\angle APC$ con lado el rayo *PB,* se construyen rectas *AC, BC* y *BA* haciendo *D* el punto de intersección de recta *BA* con rayo *PC* entonces $\Delta PAC \cong \Delta PCB$, $\Delta ADC \cong \Delta DCB$ y $\Delta APD \cong \Delta PDB$].	ForIni
18	P:	(a) […] construyen un ángulo congruente al ángulo *APC*… bueno, entonces está el ángulo *APC*… con lado *PB* [va haciendo el dibujo a medida que va leyendo].	Contraej
		(b) No sé donde está *B*… […]	Enunci
19	Julián:	No lo escribimos.	Enunci
20	P:	[…].Bueno, por acá [Ella determina un punto *B* al azar]. Y después, construyen las rectas esas [$\overleftrightarrow{AC}$, $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{BA}$]… y sea *D* el punto de intersección de la recta *BA* con la recta *PC*, y entonces obtienen todos esos triángulos [Figura 6.9].	Contraej

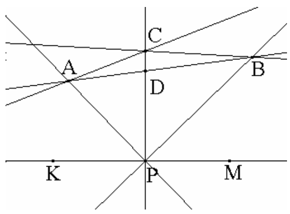


Figura 6.9

			[…] ¿Le ven alguna objeción a la construcción que ellos hacen para lograr lo que ellos pretenden ahí? [Pausa]. […]	
21	Daniel:	[No se entiende]		Acepta
22	P:	(a)	Pues el dibujo que yo he hecho…no. ¿Y por qué no? ¿Por qué [los triángulos] no son congruentes?...	Acepta
		(b)	¿Alcanzan a ver por qué no?... ¿Qué de lo que ellos me dicen…? ¿Qué condición les faltaría?	Enunci
23	Daniel:	Que *B* [no se entiende].		Enunci
24	P:	(a)	Claro… ellos escogieron a *B*, cualquier *B*… pero *B* no puede ser cualquier *B*. *B* tiene que tener una propiedad especial.	Enunci
		(b)	Entonces ahí está el error de lo que propone el grupo *A*. […]	Acepta

[P60:17-24]

Hemos escogido este extracto para ejemplificar la participación de los estudiantes en tres intercambios comunicativos que tienen que ver con la evaluación de la conjetura: la revisión del enunciado, Enunci*,* la revisión de un contraejemplo, Contraej y el rechazo de la afirmación que ésta propone, Acepta. En el ejemplo 2 habíamos ilustrado el uso del código Enunci cuando el grupo analiza que la conjetura propuesta por Luz y Marina incluye una propiedad innecesaria en las condiciones sugeridas para el antecedente. En este ejemplo, el código se aplica a la identificación de una propiedad que hay que incluir en el antecedente pues de lo contrario la conjetura resulta ser falsa. Para hacer caer en cuenta a los estudiantes de la importancia de escribir en la conjetura todas las condiciones que se consideran en la exploración, la profesora propone una representación que cumple con las propiedades del antecedente pero que no da lugar a los triángulos congruentes que Jaime y Julián mencionan en el consecuente. El contraejemplo propuesto lleva a rechazar la conjetura. Hemos codificado con Contraej la parte (a) de la intervención 18 porque la profesora comienza a hacer una representación con base en las propiedades descritas y suspende la acción para hacer evidente que hace falta una indicación sobre dónde ubicar el punto *B*. Cuando la profesora dice explícitamente que no sabe dónde está el punto *B,* Julián cae en cuenta que él y Jaime olvidaron escribir esa condición. Por eso hemos codificado la parte (b) de la intervención 18 y la intervención 19 con el código Enunci. Para ilustrar el efecto de la falta de una localización específica para el punto *B*, la profesora decide ubicarlo en cualquier parte completando la representación del contraejemplo [20]. Luego pide opinar sobre la conjetura. Daniel dice algo que no se entiende pero que se colige de la siguiente intervención, manifestando que los triángulos mencionados en el consecuente de la conjetura no son congruentes [21]. La profesora avala el rechazo que hace Daniel de la conjetura [22] y solicita identificar qué hace falta en el enunciado para que la conjetura quede correcta. Daniel hace alusión al punto *B* [23] y, aunque nuevamente no se entiende completamente lo que dice, se interpreta por la siguiente intervención que él ha indicado la falta de ubicación específica de *B* [24]. Finalmente, la profesora evalúa la conjetura como errada, lo que conduce a su rechazo. En esta oportunidad la profesora no impulsa una reformulación de la conjetura para que pueda ser admitida, aunque parece ser claro para todos que la falta de localización del punto *B* fue un olvido de Jaime y Julián, (no de otra forma podrían haber establecido la congruencia de los triángulos que mencionan en el consecuente). Aunque el código Acepta está ubicado en la acción de Argumentar, en este caso no hay mayor argumentación al respecto y lo incluimos como parte de la evaluación de la conjetura.

Ejemplo 6: Estudiar la deducibilidad de la conjetura

Conjetura: "Si $\overleftrightarrow{PC} \perp \overleftrightarrow{KM}$, con *K-P-M, A* un punto en $S_{\overleftrightarrow{KM},C} \cap S_{\overleftrightarrow{PC},K}$ y se construye *B* un punto en $S_{\overleftrightarrow{KM},C} \cap S_{\overleftrightarrow{PC},M}$ de manera que $\angle CPB \cong \angle CPA$ y $AP = PB$ entonces los triángulos ΔAPC y ΔBPC son congruentes". Germán y Aníbal, (grupo G), proponen una conjetura en la que incluyen las condiciones de la construcción inicial previstas en el enunciado del problema, con las rectas perpendiculares $\overleftrightarrow{PC}$ y $\overleftrightarrow{KM}$, que se intersecan en *P*, y un punto *A* ubicado en el cuadrante que indica la Figura 6.10; luego agregan cómo construir un punto *B* para que los triángulos *APC* y *BPC* sean congruentes.

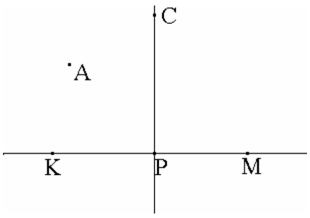


Figura 6.10

Después de hacer un resumen de la conjetura, la profesora hace una representación para favorecer el análisis de la misma, en relación con el uso de enunciados del sistema axiomático. Además de confirmar este hecho Germán decide mostrar de qué manera la conjetura se puede demostrar usando los enunciados del sistema.

26	Germán y Aníbal:	[Grupo G: Se construye *B* en el semiplano… determinado por *KM* en el cual está *C*… y [determinado] por *CP* en el cuál está *M* de tal manera que el ángulo *CPB* sea congruente al ángulo *CPA* y con *AP* igual a *PB*].	ForIni
27	P:	(a) Construyen *B* de tal manera que el ángulo *CPB* sea congruente al ángulo *CPA* y con *AP* igual a *PB* [Figura 6.11].	Ejempl

		(b) Aquí hay una cosa un poco rara, ¿no?	Notaci
		(c) Pero… bueno, ahí está *B*… entonces cumple *AP* y *PB* de igual longitud y los ángulos $\angle APC$ y $\angle CPB$ congruentes.	Ejempl

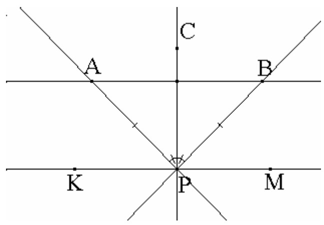


Figura 6. 11

		(d) ¿Encaja con lo que llevamos del sistema axiomático? ¿Puedo explicar cada paso?	ConjSi
		[…]	
30	Germán:	Sí. Y podría demostrar la congruencia.	Deduci
31	P:	Y podría llegar a la congruencia de los dos triángulos. ¿Usando qué?	Deduci
32	Germán:	Eh… partes correspondientes.	Deduci
33	P:	¿Usando?	Deduci
34	Aníbal:	Postulado lado- ángulo - lado.	Deduci
35	P:	Postulado lado - ángulo - lado ¿Están de acuerdo? ¿Todos lo ven? ¿Sí? Bien. […].	Deduci

[P60:26-35]

De la misma manera que en el ejemplo 5, la profesora impulsa la revisión de la conjetura proponiendo una representación en la que incluye las condiciones que Germán y Aníbal han escrito en el antecedente [27]. En este caso, hemos codificado la representación con el código Ejempl pues la representación es un ejemplo de la condicional establecida. Al momento de hacer la representación centra la atención en la notación (Notaci) usada por los estudiantes, pues ellos explican cómo determinar al punto *B* mencionando un ángulo y un segmento que de antemano incluyen al punto *B,* en cuál se va a determinar. Sin más explicaciones, la profesora dice: “Aquí hay una cosa un poco rara, ¿no?”, refiriéndose a ese hecho. [27]. Al terminar de hacer la representación, pide al grupo que opine sobre la correspondencia entre las propiedades usadas en el antecedente de la conjetura y los enunciados del sistema axiomático (ConjSi). Probablemente espera que los estudiantes mencionen que la construcción del ángulo congruente al $\angle CPA$ se puede justificar con el Postulado de construcción de ángulos[11] y que la ubicación del

[11] Postulado de la construcción de ángulos: Sea $\overrightarrow{AB}$ un rayo de la arista del semiplano *H*. Para cada número *r* entre 0 y 180, hay exactamente un $\overrightarrow{AP}$ con *P* en *H*, tal que $m\angle PAB = r$.

punto *B,* -a una distancia igual a la distancia *PA* sobre el rayo que resulta de la construcción del ángulo-, se puede justificar con el Teorema de localización de puntos[12]. Sin embargo Germán no ahonda en esos detalles [28] pues sólo afirma la correspondencia[13]. Lo que sí hace, de manera espontánea, es referirse a la posibilidad de demostrar su conjetura con enunciados del sistema. Hemos codificado con Deduci las intervenciones 30 a 35 pues, aunque la profesora no tiene pensando en ese momento adelantar la demostración de las conjeturas que el grupo admite, impulsa la acción sugerida por Germán y ésta se lleva a cabo. Con su propuesta, Germán introduce un nuevo elemento a la evaluación de las conjeturas adelantando la tarea de identificar su deducibilidad. Con ello, contribuye significativamente en la constitución de la empresa conjunta pues dirige la evaluación hacia la posibilidad de demostrar la conjetura con elementos del sistema axiomático que están construyendo. Quizás por la novedad que introduce Germán en la evaluación de la conjetura, la profesora no entra en detalles sobre cuáles son los triángulos a los que alude la propuesta de justificación de Germán; si se hubiera detenido a hacerlo, probablemente habría solicitado discutir qué pasos faltaban para garantizar la congruencia de los triángulos $\triangle ACP$ *y* $\triangle BCP$. El código Deduci se encuentra en la lista de códigos correspondientes a la acción de argumentar, pero hemos decidido no separar el fragmento de la transcripción y hacer mención de la interacción realizada al respecto en esta sección.

Ejemplo 7: Reescribir una conjetura para expresarla de la forma si-entonces

Conjetura: "Dado un triángulo *MOP* y un punto *K* sobre la recta *MP*, si en el triángulo *OKP*, la distancia *PK* es menor a la distancia entre *P* y la intersección de la altura con respecto a *O* entonces $m\angle OKP > m\angle OPK$". Se discute una conjetura propuesta por Nancy e Ignacio, (grupo E), después de resolver la segunda parte de un problema que hace referencia a un triángulo *OMP* y a un punto *K* sobre la recta *MP*[14]. En la segunda parte del enunciado del problema se pide centrar la atención en el triángulo formado por *O, P* y *K* para elaborar una conjetura relacionada con la comparación de las medidas de los ángulos $\angle OKP$ *y* $\angle OPK$. La pareja de

[12] Teorema de localización de puntos: sean $\overrightarrow{AB}$ y x un número positivo. Entonces existe exactamente un punto P de $\overrightarrow{AB}$ tal que AP es x

[13] Tenemos esta hipótesis pues en la revisión de otras conjeturas dedicaron algún tiempo a justificar cada paso de la construcción.

[14] En los episodios 8 y 12 se trabajan las partes a) y b) del mismo problema, respectivamente.

estudiantes entregó la conjetura sin el acompañamiento de una representación geométrica. La conversación gira en torno a su reformulación para expresarla en el formato si-entonces, la búsqueda de ejemplos y contraejemplos y la decisión sobre si el grupo la admite o no.

81	P:	Bueno, grupo E… voy a copiar la [conjetura] del grupo E […].	
82	Ignacio y Nancy:	[Grupo E: $m \angle OKP > m \angle OPK$ cuando *PK* es menor a la distancia entre *P* y la intersección de la altura con respecto a *O*].	ForIni
83	P:	[…] Me gustaría que reformularan esto de la forma si-entonces, para tener claro… porque… cuando las escriben así… yo no se. A veces cuesta trabajo identificar cual es la hipótesis y cuál es la tesis. […]	Format
		[…]	
87	P:	[…]… yo quiero este teorema de la forma si *p*-entonces *q* ¿Quién es *p*?	Format
88	Orlando:	Si *PK* es una recta…	Format
89	P:	¿Hasta adonde? [Encierra en paréntesis rojos "cuando *PK* es menor a la distancia entre *P* y la intersección de la altura con respecto a *O*" y la nombra con "*p*"]	Format
90	Orlando:	Hasta [señala con el dedo la primera parte de la conjetura]… entonces.	Format
91	P:	(a) [La profesora encierra en paréntesis azul: $m \angle OKP > m \angle OPK$ y la nombra con "*q*"]. ¿Sí? ¿Todos lo entienden así? […] Si *p*… lo que está en rojo, entonces *q*… lo que está en azul. Bueno, así lo interpreté yo… […].	Format
		(b) Bien, ¿es válida, o no? Verifiquen si es cierta, con la calculadora. [Pausa]. Bueno, aquí hay unos que dicen que sí, y otros que dicen que no.	Acepta
92	Estudiantes:	[Varios hablan al tiempo. Darío dice que tiene un contraejemplo].	Contraej
93	P:	Bueno, primero el contraejemplo.	Contraej
94	Darío:	[Pasa al tablero] ¿Este es el antecedente [señala la expresión encerrada en rojo]?	Format
95	P:	Sí. Todas estas condiciones. Si la distancia de *P* a *K* es menor que la distancia entre *P* y la intersección de la altura con respecto a *O*, entonces	Format
		[…]	
97	Darío:	[Darío hace una representación como la de la Figura 6.12].	ContraEj

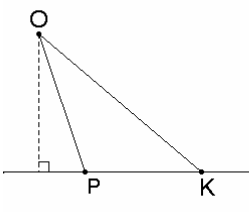


Figura 6.12

98 P: Sí. Ese es un contraejemplo. ¿Contraejemplo o no? Pero ¿qué le pasó a […] al grupo E? ¿Cuál es la representación que ustedes tienen en sus calculadoras? […]. ContraEj

99 [Ignacio pasa al tablero y dibuja algo como la Figura 6.13]. Noejem

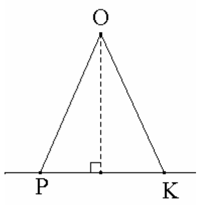


Figura 6.13

100 P: ¿Ese triángulo es como isósceles? ¿O equilátero? Noejem

101 Ignacio: No, no, no. Noejem

102 P: Entonces, lo pintas un poco más… un poco más exagerado para yo no tener esa idea. Noejem

103 Ignacio: [Ignacio cambia la figura: Figura 6.14]. Noejem

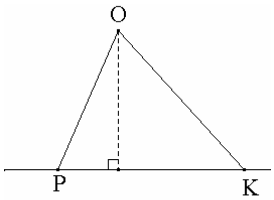


Figura 6.14

104 P: Cuando la distancia de *P* a *K* es menor a la distancia... ahí tampoco te está dando eso. Noejem

105 [Ignacio cambia nuevamente la figura: Figura 6.15]. Noejem

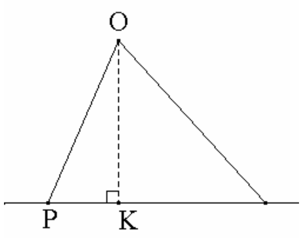


Figura 6.15

106 P: No, pero ahí no es lo que estás diciendo. Ahí estás diciendo que Noejem

		K es el pie de la altura. ¿No lo tienen ahí [en las calculadoras]?	
107	Ignacio:	Es que lo hicimos sólo en el computador.	
		[…]	
110	Nancy:	Y no me acuerdo.	
111	P:	Entonces, Germán y Daniel… Germán, decía que sí [la admitía] ¿ya no?	Acepta
112	Germán:	No, por el contraejemplo.	Acepta
113	P:	¿Y Daniel?	Acepta
114	Daniel:	Es que…, yo mire fue en esta representación [Figura 6.12] y cambie los nombres de *K* y *P* [en el dibujo de Darío, la profesora cambia las letras; Figura 6.16].	Ejempl

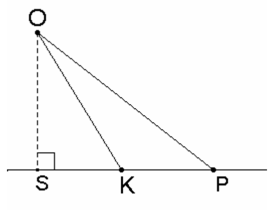


Figura 6.16

115	P:	(a) […]. Ahí, la distancia de *P* a *K*, es menor a la distancia de *P* al pie de la altura con respecto a *O*. Entonces, la hipótesis está mal expresada.	Reform
		(b) De pronto ustedes tenían un ejemplo así [Grupo E] Entonces, ¿cómo lo expresamos bien?	Enunci
116	Daniel:	Con interestancia.	Reform
117	P:	Entonces como… "si…" ¿qué?	Reform
118	Daniel:	Si *DO* es la altura…	Reform
119	P:	¿*DO*? Pero aquí dice *S*.	Notaci
120	Daniel:	*SO*.	Notaci
121	P:	Si *SO* es la altura desde *O*, en el triángulo *OKP*… y ¿qué?	Reform
122	Juan:	La interestancia	Reform
123	P:	(a) ¡ah!… y… no hablar de distancia, sino de interestancia, dice Juan. Y si tenemos esta interestancia [*S* - *K* - *P*] entonces la medida del ángulo *OKP* es mayor que la medida del ángulo *OPK* [Escribe mientras habla, el enunciado].	Reform
		(b) Y, mi pregunta es si en estas condiciones si es cierto. O sea, las condiciones que estamos interpretando en la figura que proponen…. ¿Parece que sí?	Acepta

[P88:81-123]

Hemos escogido el anterior extracto por dos razones. En primer lugar, porque se llevan a cabo dos acciones que hasta el momento no hemos ejemplificado: la reformulación de la conjetura para expresarla en el formato si-entonces (Format) y una nueva reformulación para mejorar el enunciado y que no se preste a ambigüedades (Reform). En segundo lugar porque, a diferencia de extractos anteriores, la profesora impulsa a los estudiantes a proponer contraejemplos para evaluar la conjetura formulada por Nancy e Ignacio (Contraej).

Inicialmente, la profesora pide expresar la conjetura de la forma si-entonces para asegurarse que todos tienen claro que el antecedente de la conjetura se refiere a las condiciones dadas en el enunciado del problema y sugeridas por Nancy e Ignacio -es decir, que en el triángulo *OKP,* con el punto *K* sobre la recta *MP,* la distancia *PK* es menor a la distancia de *P* a la intersección de la altura del triángulo *OKP* con respecto al vértice *O*- y el consecuente corresponde a la relación de desigualdad entre los ángulos [86, 87]. Con ayuda de la profesora, Orlando diferencia ambas partes de la conjetura [88, 90] y luego la profesora pregunta a todos si están de acuerdo [91].

Al no presentarse objeciones a la reformulación de la conjetura, en la segunda parte de la intervención 91 la profesora pregunta si la admiten o no, e invita a hacer una construcción en Cabri para establecer si la pueden aceptar. Aunque ella usa la expresión: "¿es válido o no? Verifiquen si es cierta, con la calculadora", es claro para todos que no se trata de elaborar una demostración sino de ganar confianza en que la conjetura es admisible y por lo tanto vale la pena demostrarla. En otras ocasiones la profesora usa la expresión "¿Cómo validamos la conjetura?" para referirse a cómo hacer la demostración. Aunque puede parecer confuso el lenguaje, a medida que transcurre el semestre se genera un acuerdo tácito entre la profesora y los estudiantes frente al significado del término validar, según el contexto, de tal suerte que no encontramos ningún caso de confusión en el uso de la expresión. Con base en las representaciones hechas en Cabri, algunos estudiantes expresan su acuerdo y otros su desacuerdo con la conjetura. Darío dice que tiene un contraejemplo y pasa al tablero. Antes de presentarlo ratifica que el antecedente de la conjetura sea el acordado [94, 95]. Luego hace la representación de un contraejemplo en el tablero[15] [97].

[15] En esta oportunidad no pudieron usar una proyección de las representaciones hechas en Cabri, en las calculadoras, pues no había luz.

En lugar de rechazar la conjetura y pasar a analizar otra, la profesora abre un espacio para discutir las causas por las que Nancy e Ignacio consideran dicha conjetura como posible[16]. Desafortunadamente, los estudiantes no tienen a la mano la representación con la que trabajaron el problema [107] y no la recuerdan [110]; Ignacio propone varios no-ejemplos, en lugar de un ejemplo [99, 103 y 105] en los cuáles no se cumple la condición que ellos impusieron a la distancia *PK*. Como Nancy e Ignacio no muestran evidencias de la admisibilidad de la conjetura y Darío propone un contraejemplo, la profesora interroga a Germán y a Daniel sobre la su opinión pues ellos han expresado con gestos la aceptación de la conjetura [111]. Germán acepta la equivocación [112], pero Daniel señala que con una modificación del contraejemplo –esto es, intercalando las letras *P* y *K* en la figura- éste queda convertido en un caso de la conjetura [114]. Parece entonces que la relación de interestancia entre los puntos *P, K* y el pie de la altura (que llamaron *S*) es determinante para la admisibilidad de la conjetura, por lo que la profesora pide reformularla para poder admitirla [115]. Daniel y Juan sugieren fijar la interestancia *S-K-P* como condición en el antecedente de la conjetura [116, 122], aunque Daniel nombra de manera errada a la altura *SO* [118]. Después de reescribir la conjetura todos parecen admitirla.

6.3. ARGUMENTAR

A lo largo del curso se lleva a cabo la práctica de elaborar justificaciones para establecer la plausibilidad de una conjetura o como esbozos previos a la producción de una demostración. En más de treinta oportunidades, en los quince episodios usados en el análisis, los estudiantes participan de esta práctica. Con el fin de identificar las finalidades de participación en los extractos en que ella se lleva a cabo, eliminamos las intervenciones que se intercalan con los argumentos pero que no tienen injerencia en la argumentación en sí. Cuando los argumentos se completan por un requerimiento explícito de una persona que no está a cargo de la justificación, incluimos la intervención correspondiente pues nos sirve como indicador de construcción colectiva de la argumentación. Como explicamos en el capítulo cuatro, asociamos las finalidades de participación con los elementos de una argumentación sugeridos por Toulmin (1958), lo que nos permite desglosar las intervenciones para favorecer el análisis. A continuación ejemplificamos el uso de los códigos para este análisis.

[16] La profesora parece entrever que la conjetura formulada por Nancy e Ignacio surge de una situación que obliga a que el ángulo *OKP* es obtuso y en ese sentido siempre es mayor que el ángulo *OPK*.

Ejemplo 1: Dar soporte a las afirmaciones

Enunciado: “Toda recta tiene al menos dos puntos”. El extracto de conversación corresponde a la segunda clase del curso. A raíz de la resolución del problema de construir una recta en Cabri[17], Efraín propone el enunciado “toda recta tiene al menos dos puntos” y la profesora pide justificarlo haciendo uso de los dos únicos enunciados que en ese momento componen el sistema axiomático (Postulado P1 de la relación punto-recta-plano y Postulado P2 de correspondencia entre los puntos de la recta y los números reales[18]). Es la primera vez que van a elaborar una argumentación en la clase. Germán sugiere un argumento que es refutado por Leopoldo.

69	P:		[…] Bueno, vamos a tratar de mirar esto como observación y vamos a tratar de decidir si podemos, desde lo que nosotros sabemos, confirmar la sospecha de Efraín o no, ¿sí? […].	FormuTarea
70	Germán:		Sí, por el postulado que mencionamos tenemos/	Soporte
71	P:		/de la relación punto, recta, plano/	Soporte
72	Germán:	(a)	/de la relación punto, recta, plano, decimos que la recta es un conjunto de puntos,	Regla
		(b)	Entonces podemos… podemos… a partir de la recta,	Datos
		(c)	sacar los dos puntos, que son elementos de *m/*	Conclu
73	P:		/por lo que dice conjunto de puntos, ¿están todos de acuerdo? El postulado decía: la recta es un conjunto de puntos. ¿Significa eso que la recta tiene por lo menos dos puntos, como afirma Efraín?	Refuta
74	Leopoldo:		[…]. Si uno dice que la recta es un conjunto de puntos eso no me sirve para afirmar que eso [afirmación de Efraín] es cierto porque puede ser un conjunto unitario, por ejemplo, y acá están diciendo que son dos puntos.	Refuta
75	P:		Si señor, exacto, muy bien. Hay que tener mucho cuidado con el lenguaje matemático. Yo digo conjunto de puntos, pero eso no significa que el conjunto tenga que tener más de un elemento. ¿Sí? Lo que sí significa es que el conjunto tiene… por lo menos un elemento. […].	Refuta

[P3:69-75]

[17] Es la primera vez que los estudiantes usan el programa Cabri.

[18] P1: Relación puntos, rectas, plano*:* Las rectas y los planos son conjuntos de puntos. P2: Correspondencia puntos en recta - números: existe una correspondencia entre los puntos de una recta y los números reales tal que: (i) a cada punto corresponde un único real, (ii) a cada número real corresponde un único punto.

Al solicitar una justificación de la afirmación sugerida por Efraín, la profesora condiciona la argumentación a la norma establecida en la primera sesión de clase: "toda justificación debe hacerse con base en los enunciados que se tienen a disposición en el sistema axiomático que se construye paulatinamente". Por esta razón, pide explícitamente hacer uso de los dos únicos enunciados del sistema axiomático. Germán comienza su argumentación mencionando el nombre del postulado [70] y luego lo enuncia [72]. Codificamos la intervención en la que Germán menciona el nombre con Soporte porque es una manera de 'oficializar' la afirmación que hace después, la cual se constituye en la Regla que el estudiante esgrime para sacar una conclusión. A continuación, en la segunda parte de la intervención 72c el estudiante menciona los datos de los que parte: "a partir de la recta" (Datos) y luego concluye que se pueden mencionar dos puntos de la recta, apelando al postulado [72c]. La profesora pone en entredicho la regla usada por Germán, centra la atención en la expresión: "conjunto de puntos" [73] e incita a los demás estudiantes a refutar el argumento. Leopoldo asume la refutación interpretando de manera diferente la expresión [74]; este significado es confirmado y valorado por la profesora [75] por lo que el argumento se rechaza. A pesar de ser la primera justificación que se hace en el curso se observa un paso de la argumentación en el que está presente la estructura ternaria sugerida por Toulmin (1958) con la formulación de unos datos, una regla o permiso de inferir y una conclusión. También se hace evidente la mecánica de la refutación a partir del cuestionamiento a la regla usada. Esta argumentación marca una pauta frente a cómo debe argumentarse en la clase.

Ejemplo 2: Formular conclusiones

Enunciado: "Dada la construcción (Figura 6.17), con $\angle 1 \cong \angle 2$ y $\overline{XP} \cong \overline{XN}$, los triángulos ΔXKP y ΔXKN son congruentes". Profesora y estudiantes buscan cómo demostrar la existencia de una recta perpendicular a una recta *m* que pasa por un punto *P* externo a *m*. Colectivamente, con la guía de la profesora hacen una construcción auxiliar como la que representamos en la Figura 6.17, y aseguran que $m\angle 1 = m\angle 2$ y $XP = XN$, pues así construyeron los ángulos y los segmentos respectivos. Dentro de las ideas que surgen en busca de vías para demostrar el enunciado, Melisa elabora una argumentación para justificar que los triángulos ΔXPK y ΔXNK son congruentes.

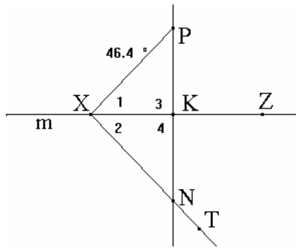


Figura 6.17

146	P:	[…]. Bueno, siguiente paso… ¿cuál será? Piensen.	FormuTarea
		[…]	
153	Melisa:	(a) El segmento *XK* es congruente al segmento *XK*,	Conclu
		(b) Por identidad.	Regla
154	P:	Sí.	
155	Melisa:	(a) Sabemos que el segmento *XN* mide lo mismo que el segmento *XP*,	Dato
		(b) entonces los dos son congruentes.	Conclu
156	P:	Sí.	
157	Melisa:	(a) Y, sabemos que el ángulo uno es congruente con el ángulo dos.	Conclu
		(b) Entonces ya tenemos… congruencia [de los triángulos].	Conclu

[P64:146-157]

A diferencia del ejemplo anterior, en esta oportunidad la profesora no indica a Melisa cuáles enunciados del sistema axiomático debe usar en la argumentación, e incluso la estudiante no elabora la justificación como respuesta a algún requerimiento específico. Ella decide justificar la congruencia de los triángulos $\triangle XPK$ y $\triangle XNK$ como aporte a la resolución del problema que están estudiando. Su argumentación consta de cuatro pasos en los que Melisa obtiene tres conclusiones parciales (Conclu) [153, 155, 157] y la conclusión definitiva de la congruencia de los triángulos [157], apelando implícitamente al criterio lado-ángulo-lado. En el primer paso, cuando menciona la congruencia del segmento *XK* consigo mismo, menciona la regla (Regla) que le permite justificar la afirmación: "por identidad" [153]. Tiene el cuidado de garantizar exactamente las condiciones del antecedente del criterio de congruencia y no considera sinónimos a los términos 'congruencia' e 'igualdad' como bien podría aceptarse en una argumentación informal. Para obtener la segunda conclusión acerca de la congruencia de dos segmentos [155], menciona como dato (Dato) que los dos segmentos miden lo mismo pero no indica qué regla le permite sacar dicha conclusión. Usa la expresión condicional "sabemos que… entonces" que indica que ella obtiene la conclusión de la información que usa como dato y probablemente supone que para los compañeros es evidente la regla (definición de congruencia de segmentos). De hecho, parece ser así porque nadie le pregunta ni refuta la conclusión parcial. En la intervención 157 concluye la congruencia de los dos ángulos sin hacer referencia al dato (igualdad de las medidas de los ángulos) ni a la regla que la sustenta (definición de congruencia de ángulos). Además, con la expresión "sabemos que el ángulo uno es congruente con el ángulo dos" parece sintetizar en una sola frase las dos funciones que cumple la afirmación sobre la congruencia de los ángulos: como conclusión y como dato para la conclusión definitiva, que recoge las conclusiones parciales. Sin embargo, hemos codificado la frase con Conclu y no como Dato porque con la expresión que viene a continuación: "entonces ya tenemos" indica que ahora sí va a considerar como datos las tres conclusiones parciales y no antes. Finalmente menciona la congruencia de los triángulos Los cuatro pasos de la argumentación de Melisa constituyen una rutina que han ejercitado previamente para demostrar congruencia de triángulos y en ese sentido no hay aporte creativo a la vía de justificación. Desde el comienzo de su argumentación se evidencia que la estudiante va a hacer uso de un criterio de congruencia de triángulos.

Ejemplo 3: Establecer los datos de los que se parte

Enunciado: "El segmento perpendicular *PK* trazado desde un punto *P* hasta una recta *m* tiene la menor longitud que cualquier otro segmento *PY* trazado desde el punto *P* hasta la recta". La profesora pide justificar por qué el segmento perpendicular a una recta trazado desde un punto *P* externo a ella, hasta la recta, es de menor longitud que cualquier otro segmento trazado desde el punto *P*. Hace una representación en el tablero (Figura 6.18) y deja un tiempo para que los estudiantes piensen en la argumentación.

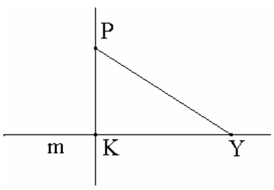


Figura 6.18

Daniel propone hacer uso del Teorema de Pitágoras para afirmar que la hipotenusa de un triángulo rectángulo (en este caso, el $\triangle PKY$) es mayor que los catetos ($\overline{PK}$, en particular) pero la propuesta se rechaza porque no se basa en enunciados incluidos en el sistema axiomático. A continuación, Nancy sugiere una vía de argumentación en la que usa el teorema del ángulo externo[19], el teorema que afirma que los cuatro ángulos formados por dos rectas perpendiculares miden 90 y el teorema según el cual si un ángulo de un triángulo es mayor que otro, subtiende a un lado mayor. Este último teorema ha sido demostrado hace poco tiempo en una tarea.

197	Nancy:	(a)	Es que ahí, como se forma un triangulito, entonces con el teorema que sacamos, o la demostración que hicimos de la tarea[20],	Regla
		(b)	podemos utilizar que el ángulo *PKM*[21] es externo al triángulo *PKY*,	Dato
		(c)	entonces, el ángulo *MKP*, es mayor que el ángulo *Y* y el ángulo *KPY.*	Conclu
		(d)	Entonces, como el ángulo *MKP* es congruente…	Dato
198	P:		Bueno, *m* era el nombre de la recta, pero bueno, digamos que voy a poner otro punto para… porque *m* era el nombre de la recta. Digamos que este es otro punto…*B* [Complementa la representación (Figura 6.19):	Notaci

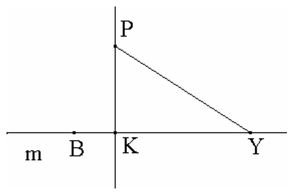


Figura 6.19

			Entonces, lo que dices es que nos fijemos en el triángulo/	Dato
199	Nancy:		*/KYP/*	Dato
200	P:		/pasa, pasa… [La invita a pasar al tablero].	
201	Nancy:	(a)	En el triángulo *KPY*, el ángulo *BKP* es externo al triángulo *KYP*,	Dato
		(b)	entonces la medida del ángulo *BKP* es mayor a la medida del ángulo/	Conclu
202	P:		/Solo el que nos interesa… *KYP/*	Conclu
203	Nancy:	(a)	/Sí. *KYP*.	Conclu
		(b)	Entonces, también tenemos que ésta [recta *PK*] es la perpendicular [a *m*],	Dato

[19] Teorema del ángulo externo: Un ángulo externo de un triángulo es mayor que cada uno de sus ángulos internos no contiguos

[20] Los estudiantes habían demostrado en una tarea el siguiente teorema: si un ángulo de un triángulo es mayor que otro, subtiende un lado más largo.

[21] Nancy confunde el nombre dado a la recta (*m*) con el nombre de un punto (*M*) sobre ésta.

(c)	entonces éste ángulo [$\angle BKP$] es de 90…	Conclu
	(d) y por el teorema… otro[22], mostramos que todos [los ángulos formados por las rectas perpendiculares] son de 90,	Regla
(e)	entonces el ángulo [*PKY*]…	Conclu
(f)	y como es de 90	Dato
(g)	Es congruente al otro, $\angle BKP$,	Conclu
(h)	entonces el ángulo *PKY* es congruente con el ángulo *BKP*…	Dato
(i)	y por sustitución,	Regla
(j)	entonces… eh… el ángulo *PKY* es mayor al ángulo *KYP*… sí, *KYP*…	Conclu
(k)	y por… el teorema que demostramos en la tarea,	Regla
(l)	entonces este segmento [$\overline{PY}$] es más largo que este [$\overline{PK}$]. […].	Conclu

[P100:197-204]

En el extracto anterior hemos usado los mismos códigos que en los dos ejemplos anteriores. Sin embargo, lo hemos escogido para ilustrar las diferencias en la elaboración de la argumentación con respecto a éstos. En el ejemplo 1, la profesora dice explícitamente qué reglas hay que usar en la justificación. En el ejemplo 2, Melisa usa una rutina muy conocida para elaborar una argumentación sobre la congruencia de dos triángulos. En cambio, en este ejemplo, Nancy elabora una argumentación en la que ella decide qué enunciados del sistema usar como reglas para sustentar las afirmaciones y cuál es la vía de la argumentación. En tres intervenciones [197, 201, 203] desarrolla una argumentación que consideramos original por cuanto no se tenía una rutina prevista para justificar el enunciado que posteriormente permite definir la distancia de un punto a una recta; Nancy es quien propone las ideas y las desarrolla.

En la intervención 197, que hemos separado en 4 partes, Nancy propone el plan general de la argumentación poniendo en evidencia que logra entrever una ruta para lograr concluir que la medida del segmento *PY* es mayor que la del segmento *PK,* a partir de la información inicial que la profesora ilustra en una representación (Figura 6.18). Probablemente la visualización del triángulo *PKY* le evoca el teorema que establece una relación entre las longitudes de los lados de un triángulo y la medida de sus ángulos interiores [197a], el cual menciona para sustentar futuras afirmaciones (Regla). Como el teorema mencionado se refiere a ángulos, ella recurre a dos ángulos de la representación (Dato) [197b] con los cuáles ella

[22] Si dos rectas forman un ángulo recto, forman cuatro ángulos rectos.

establece una relación de desigualdad en sus medidas (Conclu) [197c] con base en el teorema del ángulo externo, el cual no menciona explícitamente en ese momento. Como Nancy se equivoca al considerar que el nombre de la recta está determinando un punto *M* en ella, la profesora introduce un cambio en la representación, para incluir al punto *B* en la recta *m,* de tal forma que se tenga la interestancia *B-K-Y*, con lo cual el punto *B* puede hacer las veces del supuesto "punto *M*" en la argumentación de Nancy. Hemos codificado con Dato la segunda parte de la intervención 198 de la profesora pues con la expresión: "Entonces, lo que dices es que nos fijemos en el triángulo" ella pretende que Nancy explique en detalle de dónde está partiendo para hacer la argumentación.

En la intervención 201, Nancy pasa al tablero y comienza nuevamente su argumentación refiriéndose a la información de la que parte (Dato) [201a], es decir, que el $\angle BKP$ es externo al triángulo *KYP;* luego concluye (Conclu) [201b] que la medida del $\angle BKP$ es mayor que la medida del $\angle KYP$. Nancy no menciona explícitamente el teorema del ángulo externo para dar soporte a su conclusión, pero parece ser identificado por todos, pues nadie le pide justificarla.

En la intervención 203 Nancy avanza en su argumentación apelando a nuevos datos y enunciados del sistema axiomático para sustentar nuevas afirmaciones. En la intervención 203a sólo confirma a cuál ángulo se está refiriendo en la conclusión 201b. En la intervención 203b se refiere a un nuevo dato (Dato), la perpendicularidad de las rectas *m* y *PK*, para poder concluir, en 203c, que el $\angle BKP$ mide 90 (Conclu). En estricto sentido, para poder sacar dicha conclusión Nancy debió referirse a la definición de rectas perpendiculares como justificación para decir que el ángulo *BKP* es recto[23] y luego usar esa conclusión como dato para decir que la medida del ángulo es 90, por la definición de ángulo recto. Este hecho, que en la escritura de la demostración significaría evaluar ésta como incompleta o falta de rigor, pasa sin comentario de la profesora o de algún compañero, quizás porque hay un acuerdo tácito en el sentido en que en las argumentaciones no hay que ser tan riguroso. En la intervención 203d Nancy menciona el teorema según el cual si dos rectas forman un ángulo recto entonces forman cuatro ángulos rectos (Regla), pero cambia la palabra 'recto' por 'de 90' probablemente de manera involuntaria pero en coherencia con el hilo conductor de su argumento. Con ese teorema como justificación, concluye que el $\angle PKY$ mide 90; aunque la frase en don-

[23] Pues la definición de rectas perpendiculares hace referencia a aquellas rectas que forman un ángulo recto.

de saca dicha conclusión queda incompleta [203e], se infiere de la siguiente frase, “y como es de 90” [203f], la cual hemos considerado como dato (Dato) para poder afirmar que los ángulos $\angle PKY$ y $\angle BKP$ son congruentes [203g]. Es interesante notar que en esta parte de la argumentación Nancy encadena un paso de un argumento con el siguiente, usando como dato aquello que concluye del paso anterior, aunque sin hacer explícito en la expresión el cambio de estatus (de conclusión a dato) pues se salta la repetición de la proposición. En cambio, a continuación, repite la formulación de la congruencia de los ángulos [203h] para usarla como dato (Dato) y puede concluir que el $\angle PKY$ es mayor que el $\angle PYK$ [203j] (Conclu), después de haber explicitado la regla que le permite obtener tal afirmación: “por sustitución” [203i]. Finalmente, se refiere al teorema que dice que si un ángulo de un triángulo es mayor que otro el lado opuesto tiene mayor longitud [203k] para concluir que el lado PY es mayor que el lado PK [203l].

Salvo por la falta de cuidado para mencionar en forma explícita algunas reglas que justifican afirmaciones o para repetir afirmaciones haciendo explícito el cambio de estatus de una conclusión, para usarla como nuevo ‘dato’, la argumentación de Nancy tiene forma deductiva y respeta los acuerdos frente a la elaboración de justificaciones en la clase. Lo que calificamos como “falta de cuidado” puede deberse simplemente a que en el uso del lenguaje oral hay acuerdos más laxos sobre lo que se dice explícitamente, pues se tiene la certeza de que aquello que se omite se puede reconstruir en cualquier momento. El ejemplo ilustra una argumentación creativa caso completa en la que la profesora no interviene para guiar o sugerir pasos.

Ejemplo 4: Refutar afirmaciones

Enunciado: “Si dos rectas *m* y *l* son paralelas y cortadas por una transversal *t* entonces los ángulos alternos internos son congruentes”. Después de haber demostrado colectivamente que dadas dos rectas cortadas por una transversal, si los ángulos alternos internos son congruentes entonces las rectas son paralelas, la profesora invita a argumentar cómo se justificaría el enunciado recíproco. Ignacio propone un argumento pero éste se rechaza porque hace uso de un teorema aún no demostrado. Para elaborar el argumento, Ignacio se vale de una representación como la Figura 6.20.

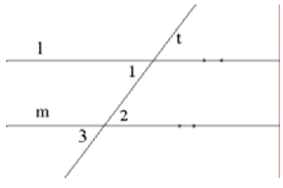


Figura 6.20

10	Ignacio:	(a)	Entonces tenemos que el ángulo 3 es correspondiente al ángulo 1 y como [$\angle 3$ y $\angle 2$], son opuestos por el vértice	Dato
		(b)	entonces el ángulo 3 es congruente con el ángulo 2.	Conclu
		(c)	Y como hemos demostrado que el ángulo… que si [las rectas] son paralelas el ángulo 1 y el ángulo 3 son congruentes.	Regla
11	P:		No, eso no lo hemos demostrado. […]	Refuta

[P109:10-11]

Escogimos este ejemplo porque aunque es una argumentación muy sencilla, ilustra una práctica común en la clase relacionada con la refutación debida al uso de enunciados que los estudiantes conocen de antemano, pero que no pueden emplearse como reglas si no han sido incluidos en el sistema axiomático. Al pedir a los estudiantes argumentar cómo se justifica que si dos rectas paralelas son cortadas por una transversal entonces los ángulos alternos internos son congruentes, Ignacio elabora una argumentación en tres partes. Primero, expresa aquello que considera dado pues es información procedente de la figura, es decir, que los ángulos $\angle 1$ y $\angle 3$ son correspondientes y que los ángulos $\angle 3$ y $\angle 2$ son opuestos por el vértice [10a][24]. Hemos codificado esta parte de la intervención con Dato, pues es lo que Ignacio considera como tal y nadie le discute, pero en realidad, según las normas de la clase para el uso de figuras, pueden afirmar que los ángulos $\angle 1$ y $\angle 3$ son correspondientes, pero deben justificar que los ángulos $\angle 3$ y $\angle 2$ son opuestos por el vértice; en ese sentido, la afirmación debe ser conclusión de un proceso argumental que Ignacio no hace. En la segunda parte [10b], menciona que los ángulos $\angle 3$ y $\angle 2$ son congruentes, como conclusión al dato de ser opuestos por el vértice (Conclu). La afirmación se admite aunque Ignacio no expresa oralmente la regla, o sea el teorema correspondiente. Finalmente, en la parte 10c menciona que ya se ha demostrado que si dos rectas son paralelas los ángulos correspondientes son congruentes (Regla), hecho que no es cierto, pero que él pretende usar como regla. La profesora reacciona con una refutación en la que le recuerda que ese enunciado no se ha demostrado y el argumento se rechaza [11].

¿Por qué la profesora sólo reacciona después de la intervención 10c de Ignacio y no antes? Como lo mencionamos en el ejemplo anterior, el hecho de omitir reglas de uso común o incluso una rutina que han practicado durante todo el curso rela-

[24] Aunque hay muchas restricciones para sacar información de una figura, en este momento del desarrollo del curso han acordado que la existencia de ángulos correspondientes o alternos internos puede admitirse a partir de la representación.

cionada con demostrar la congruencia de ángulos opuestos por el vértice parece ser admitido en las argumentaciones orales, no así en las demostraciones escritas, como una manera de abreviar el discurso que se elabora, pero con la certeza de que el argumentador puede reconstruir en cualquier momento los aspectos faltantes. En cambio, usar como regla un enunciado no demostrado viola una de las normas sociomatemáticas de la clase y hace que se produzca la refutación. Es probable que Ignacio crea que el enunciado ya se ha demostrado porque se justificó el recíproco de éste; si es así, la violación a la norma no fue voluntaria; sin embargo, el uso de esta regla deslegitima la argumentación que hace y por eso se rechaza.

6.4. DEMOSTRAR

Hemos dicho que el curso de geometría plana tiene como objetivo el aprendizaje de la demostración a partir de la participación de los estudiantes en prácticas asociadas a la actividad demostrativa, en la empresa común de construir una porción de sistema axiomático. Por tal razón, gran parte del tiempo en la clase y las tareas que los estudiantes realizan fuera del aula, se enfoca en la materialización de la actividad por medio de la producción de demostraciones de las conjeturas propuestas, de acuerdo a un estilo y unas normas que se van negociando a medida que avanza el semestre. Las finalidades de participación tienen que ver con la exigencia -que se establece desde el primer día de clase- de partir de ciertas condiciones dadas en el antecedente de la conjetura para ir encadenando afirmaciones deductivamente por medio de enunciados extraídos del sistema axiomático (como soportes de dichas afirmaciones), en el lenguaje especializado correspondiente y sin presuponer hechos no explícitos, hasta llegar al consecuente. A continuación ejemplificamos con algunos extractos el análisis realizado para ilustrar las finalidades de participación de los estudiantes en la producción escrita de demostraciones.

Ejemplo 1: Controlar que el proceso se dirija a la meta

Teorema de la recta: "en toda recta hay por lo menos dos puntos". En la segunda sesión de clase, la profesora propone demostrar la conjetura formulada por Efraín: en toda recta hay por lo menos dos puntos. Previamente, algunos estudiantes han sugerido caminos para justificar la conjetura y se ha previsto un plan para su escritura. Al momento de enfrentarse a la tarea, la profesora hace mención a la necesidad de adecuar el enunciado para facilitar la redacción de afirmaciones en la demostración: "Aquí nos vamos a dar cuenta de una cosa que nos toca hacer al transformar las proposiciones de la forma '[si] *p* entonces *q'*. Nos toca hablar de la recta, darle un nombre. Si *m* es una recta, entonces existen dos puntos en *m*… claro que aquí dicen por lo menos… existen por lo menos dos puntos en *m*”. Además, recuerda una norma que mencionó en la clase anterior, cuando estaba presentando el programa del curso: “[…] y todo lo que nosotros tengamos que justificar nos tenemos que valer de lo que tenemos en el sistema axiomático. Entonces, ¿hasta ahora que tenemos? Ayer les dije que había tres términos no definidos: punto, recta, plano; y un postulado, el postulado de relación punto, recta, plano que decía que toda recta es un conjunto de puntos y todo plano es un conjunto de puntos”. Después, sin más explicaciones, involucra a los estudiantes en la escritura de la demostración guiando el proceso con preguntas, aceptando o rechazando afirmaciones, haciendo preguntas, corrigiendo formas de expresión, etc.

109	P:	(a)	Bueno, vamos a hacerlo con afirmación – justificación,	Lenguaj
		(b)	“*m* es una recta”, esa es la afirmación, ¿no?	CondIni
		(c)	[Escribe: “1. *m* es una recta”, en la columna de afirmaciones y “1. Dado”, en la columna de justificaciones][25].	Lenguaj
		(d)	Eso está dado. Dos: ¿qué?	Justif
110	Daniel:		Existen los reales/	CondIni
111	P:		/¿Existen los reales?	CondIni
112	Daniel:		Existen dos puntos en los reales *A* y *B*.	ConclNe
113	María:		Existen dos puntos *A* y *B/*	ConclNe
114	P:		/¡No!, ¡eso es lo que quiero mostrar! … quiero mostrar que existen dos puntos [Murmullos]. Dada la recta quiero mostrar que tiene dos puntos, ¿cierto?	ContrCon
115	Melisa:		¿No sería que los reales son infinitos, como afirmación?	CondIni
116	P:		¿Y eso para que lo quiero?	ContrCon
117	Melisa:		Para poder justificar… o sea, unir todo.	ContrCon
118	Ignacio:	(a)	Según la proposición que dijimos ahora, si *A* y *B* son dos puntos de una recta, entonces existe… no, sería la primera de las dos proposiciones que sacamos [se refiere al Postulado 1],	Justif
		(b)	porque tenemos ya la recta *m*,	CondIni
		(c)	Entonces de allí podemos sacar que existen por lo menos dos puntos en ella.	ConclNe

[25] En adelante escribiremos: “1. *m* es una recta; dado”.

119	P:	¡No! Eso es lo que queremos demostrar.	ContrCon
120	Juan:	¡Ah!, eso es lo que queremos, sí, sí,.. *m* [murmullos].	ContrCon
121	María:	La recta es un conjunto de puntos.	Justif
122	P:	Ya dijimos que al decir que la recta es un conjunto de puntos significa solamente que tiene por lo menos un punto.	CondSuf
123	Melisa:	Por eso, entonces pongamos un punto, existe un punto.	CondSuf

[P3:109-123]

El extracto de interacción se lleva a cabo en la segunda clase. Algunos estudiantes tenían alguna información sobre la elaboración de demostraciones a dos columnas pero la mayoría no están familiarizados con ellas ni han tenido este tipo de práctica previamente. En lugar de escribir la demostración, a manera de ejemplo sobre cómo hacerlo, la profesora opta por involucrar a los estudiantes en la producción de ésta y a medida que van avanzando va explicando o aclarando cómo proceder. Gracias a la conversación previa en la que elabora una argumentación para validar la conjetura, los estudiantes tienen ideas para poder participar.

Hemos dividido la primera intervención de la profesora en cuatro partes según las finalidades que hemos detectado. Primero [109a], introduce el formato afirmación-justificación para la escritura de las demostraciones; usamos el código Lenguaj pues el uso del formato es determinante del lenguaje especializado que van a usar a lo largo del curso para distinguir el papel de los enunciados que intervienen en la demostración. Segundo [109b], enuncia la primera afirmación de la demostración que corresponde a la información que proporciona el antecedente de la conjetura; utilizamos el código CondIni pues tiene como finalidad ilustrar que en toda demostración se parte de las condiciones iniciales dadas en dicho antecedente. Tercero [109c], escribe en el lenguaje especializado la afirmación que acaba de enunciar (Lenguaj). Cuarto [109d], menciona la justificación para poder hacer la afirmación; usamos el código Justif para indicar que la finalidad de esta parte de la intervención de la profesora es mostrar que todas las afirmaciones deben justificarse.

Impulsado por la pregunta de la profesora: “Dos, ¿qué?” Daniel se anima a proponer una afirmación [110] que parece considerar parte de las condiciones iniciales (CondIni). La profesora repite lo dicho por él, de forma interrogativa, invitando a Daniel a reconsiderar la afirmación [111]; aunque no es claro si ella pretende que Daniel reformule lo dicho en un lenguaje más pertinente para continuar la demostración o cambie lo dicho, nosotros hemos usado el código CondIni, pues creemos que la profesora busca que Daniel use propiedades de los reales como parte de lo dado, pero en una forma más concreta[26]. La intervención de la profesora genera dos reacciones, prácticamente simultaneas: la de Daniel, quien concreta lo que habían intentado decir mencionando: "Existen dos puntos *A* y *B* en los reales" [112] y la de María: "existen dos puntos *A* y *B*" [113]. Hemos codificado ambas intervenciones con ConclNe pues ambos parecen creer que la existencia de los puntos *A* y *B* se puede asegurar por el hecho de tener la recta *m* y los números reales. La profesora interviene para decir que esa es la conclusión a la que se quiere llegar [114] por vía deductiva; usamos el código ContrCon porque la profesora controla que el proceso se dirija hacia la meta por una vía deductiva. Melisa hace un intento de concretar la idea de Daniel de usar los números reales; menciona que éstos son infinitos [115] y cuando es interrogada por la profesora sobre el interés de tal afirmación [116], aduce que se trata de "[…] poder justificar… o sea unir todo". Desde nuestro punto de vista, Melisa, así como Daniel y María, están participando con argumentos informales obtenidos de lo que ellos saben de los números reales (CondIni) pues no conocen aún la estructura operatoria de una demostración; la profesora, por su parte, hace esfuerzos por guiar las intervenciones hacia el establecimiento de proposiciones que se constituyan en antecedentes o consecuentes útiles para la conclusión a la que se espera llegar (ContrConc). Como el proceso de negociación apenas empieza, Melisa cree estar aportando elementos para la justificación con su argumento informal [117].

A continuación, Ignacio propone una argumentación en tres partes que tiene más similitud con una estructura deductiva. Comienza sugiriendo qué él se va a valer del postulado que ya tienen (Postulado 1: la recta es un conjunto de puntos) para justificar lo que va a afirmar (Justif) [118a]; luego menciona que se tiene como dado la existencia de la recta *m* (CondIni) [118b]; y termina concluyendo que se pueden obtener dos puntos en la recta *m.* Nuevamente, la profesora explica que eso es lo que deben concluir [119], insinuando que la conclusión no es directa. La intervención de Juan, "¡Ah!, eso es lo que queremos, sí, sí,.. *m* [murmullos]" [120], es un indicador del proceso de negociación que se está llevando a cabo: los estudiantes empiezan a captar que deben llegar a la conclusión por otro camino; por eso la hemos codificado con ContrCon. Sin embargo, María vuelve a mencionar, a manera de justificación, el Postulado 1 (Justif); la profesora le aclara que de

[26] En la clase anterior ella había dicho que el sistema de los números reales con las operaciones de adición y multiplicación, la relación de orden y las propiedades de las operaciones y la relación serían herramientas que podían usar, como algo aceptado de antemano.

ese postulado sólo se puede afirmar que la recta tiene un punto [122]. Con esa intervención, la profesora señala que tienen las condiciones suficientes para afirmar la existencia de un punto y nada más (CondSuf). Entonces Melisa sugiere que escriban eso como afirmación [123], avanzando en la producción de la demostración. En síntesis, la profesora intenta dirigir las ideas de los estudiantes hacia la producción de un argumento deductivo pero ellos están aún lejos de la posibilidad de hacerlo en forma autónoma.

Ejemplo 2: Identificar enunciados que podrían usarse en la demostración

Teorema del triángulo isósceles: "si un triángulo tiene dos lados congruentes, los ángulos opuestos a dichos lados son congruentes". Los estudiantes están buscando cómo demostrar que si un triángulo es isósceles las alturas correspondientes a los lados congruentes son congruentes. Varios quieren usar el hecho de que los ángulos opuestos a los lados congruentes son congruentes, pero es una afirmación que aún no se ha demostrado. Al pedir 'autorización' para usar ese enunciado, la profesora les recuerda que sólo se pueden hacer justificaciones con enunciados del sistema axiomático que tienen a disposición y propone construir colectivamente la demostración de éste, aunque no se ha llevado a cabo un trabajo previo experimental o argumental en busca de información que guíe la demostración. Las ideas se van proponiendo a medida que se avanza en la escritura de la demostración. La profesora escribe el enunciado en el tablero y lo representa gráficamente (Figura 6.21). Luego pide sugerencias para hacer la demostración. A continuación se discuten las propuestas de Julián y de Ana.

140	P:	(a)	[…] Tenemos un triángulo isósceles…	CondIni
		(b)	pero… por favor… es importantísimo, cuando uno dice triángulo *ABC* isósceles, decir cuáles son los lados congruentes, entonces… con [lado] *AB* congruente a [lado] *BC*.	Lenguaj
		(c)	Eso está dado.	CondIni
		(d)	Queremos mostrar que estos ángulos son congruentes. Serían éstos: uno y dos. [Figura 21].	ContrCon
		(e)	[Escribe: 1. *ABC* es isósceles con $\overline{AB} \cong \overline{BC}$]	Lenguaj

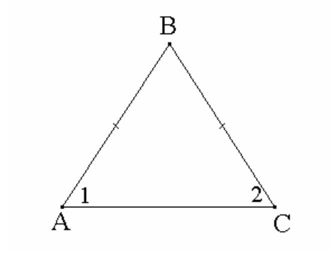


Figura 6.21

		[…]	
142	P:	Antonio, ¿se te ocurre algo? [Antonio niega con la cabeza] ¿Julián?... A ver… ¿se te ocurre algo?	CondSuf
		[…]	
144	Julián:	Pero igual no tenemos… tendríamos que tener otros ángulos congruentes, para poder decir que [los] suplementos de ángulos congruentes son congruentes.	ConQueCuen
145	P:	¡Ah, querías usar…! Entonces, ¿Cómo demostrar que dos ángulos son congruentes? Entonces a Julián se le ocurrió: “hay un teorema que dice que si son suplementos de ángulos congruentes son congruentes”… una forma… ¿Cómo más? ¿Cómo más podemos demostrar que dos ángulos son congruentes?	ConQueCuen
146	Ana:	Pues, trazando la altura correspondiente al lado [señala con la mano el lado *AC*].	ConstrAux
147	P:	Entonces, propuesta de Ana: [trazar la] altura al lado desigual.	ConstrAux
148	Efraín:	Mmm… así quedan dos triángulos.	ConstrAux
149	P:	(a) Y llamamos a este punto… *D* (Figura 6.22). [Dibuja provisionalmente la altura y señala a *D*].	Notaci

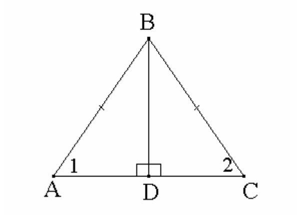


Figura 6.22

		(b) Y con esa propuesta… William… ¿se te ocurre cómo demostrar?	CondSuf
150	William:	Tendríamos dos ángulos rectos.	CondSuf
151	P:	Sí tendríamos dos ángulos rectos. Voy a mostrarte lo que tenemos. Tendríamos estos dos lados congruentes [$\overline{AB}$ y	CondSuf

		$\overline{BC}$] y esos dos ángulos [$\angle BDA$ y $\angle BDC$ congruentes].	
152	Luz:	$\overline{BD}$ [congruente] consigo mismo.	CondSuf
153	P:	Y Luz dice… pongamos atención, por favor… y Luz dice ¿Qué *BD* [es congruente] consigo mismo?	CondSuf
154	Luz:	(a) Sí,	CondSuf
		(b) pero igual no nos sirve porque no sería un criterio [de congruencia de triángulos].	EvalViaDem
155	P:	No es criterio de congruencia. Entonces no nos sirve. […]	EvalViaDem

[P66:140-155]

En la intervención 140 la profesora enuncia las condiciones de las que va a partir [140a, 140c] (CondIni), reformula el enunciado del teorema para favorecer la escritura de la demostración introduciendo lenguaje especializado [140b, 140e] (Lenguaj), y recuerda la conclusión a la que hay que llegar [140d] (ContrCon). A continuación, impulsa la participación de los estudiantes invitándolos a ver qué se puede afirmar partiendo de la información inicial [141] (CondSuf). Esta pregunta lleva a Julián a poner en práctica una acción, estimulada por la profesora [145], que consiste en revisar dentro del conjunto de enunciados del sistema axiomático cuál puede ser útil para mostrar la congruencia de dos ángulos; por eso hemos codificado con ConQueCuen la intervención 144. En ella, Julián evoca un teorema que tiene como consecuente la congruencia de dos triángulos, pero él mismo se da cuenta que no es útil pues requiere tener ángulos suplementarios.

A continuación, Ana sugiere trazar la altura del lado *AC* introduciendo como recurso para la demostración una construcción auxiliar (ConstrAux), [146]. La profesora aprueba la idea parafraseándola [147] y Efraín pone en evidencia de qué manera la construcción sugerida por Ana enriquece la construcción: "mmm… así quedan dos triángulos" [148]. Luego, la profesora pregunta a William si la construcción auxiliar le sugiere ideas para la demostración [149b], invitándolo a aprovechar nuevas propiedades para poder hacer afirmaciones (CondSuf). William menciona los dos ángulos rectos que se generan al trazar la altura [150] y la profesora recapitula que tienen así dos triángulos con dos lados congruentes y dos ángulos congruentes [151], buscando hacer explícitas las afirmaciones previas para poder sacar alguna conclusión. Luz interviene para hacer una nueva afirmación que se puede extraer de la construcción hecha [152, 154a], pero ella misma evalúa que las tres condiciones mencionadas en 151 y 152 no son suficientes para concluir la congruencia de los triángulos *ABD* y *CBD* pues no corresponden a un criterio de congruencia (EvalViaDem). La profesora corrobora la evaluación que hace Luz y la propuesta de Ana se rechaza.

Ejemplo 3: Identificar la necesidad de elaborar un razonamiento previo para obtener el rigor exigido

Teorema: “Si un cuadrilátero es paralelogramo entonces las diagonales se bisecan”. A raíz del problema de investigar la relación entre el tipo de cuadrilátero y la propiedad: una diagonal biseca a la otra, varias parejas de estudiantes formulan como conjetura: si el cuadrilátero es paralelogramo, las diagonales se bisecan. En el siguiente extracto, una vez Leopoldo ha demostrado la congruencia de dos triángulos y de allí la congruencia de los lados opuestos del paralelogramo, hace una pregunta que lleva a la necesidad de elaborar un razonamiento previo para poder seguir la demostración.

410	Leopoldo:	Hasta ahora va que los lados opuestos [del paralelogramo] son congruentes y yo estoy tratando de mostrar que las diagonales se bisecan.	ContrCon
411	P:	Sí, estás tratando de mostrar que las diagonales [de un paralelogramo] se bisecan.	ContrCon
		[…]	
413	Leopoldo:	[…], es que no se como… ¿yo cómo sé que las diagonales se intersecan?	Rigor
414	P:	**P:** ¡Ah! Una pregunta muy buena ¿Cómo sabemos que las diagonales en un paralelogramo se cortan?	Rigor
415		[…]	
423	P:	Hemos asumido en todo esto que las diagonales del cuadrilátero, o del paralelogramo se están cortando. Pero es una pregunta muy importante, ¿será que si se cortan? ¿Será que tenemos una forma de demostrar que sí se cortan? […], ¿sí? ¿Cómo demostrar que las diagonales se cortan.	Rigor

[P110: 410-423]

El extracto ejemplifica el uso que hemos dado al código Rigor para señalar aquellas intervenciones que tienen como finalidad identificar la necesidad de elaborar un razonamiento previo para poder hacer una afirmación. En esta caso, después de dos intervenciones cuya finalidad es ratificar que el proceso se dirige hacia la meta que se quiere [410, 411], Leopoldo se pregunta cómo garantizar que existe tal punto [412], pues él lo quiere usar en la demostración. Su duda surge a pesar de que algunos estudiantes habían usado en sus propuestas de demostración la identificación del punto de intersección de las diagonales de un cuadrilátero. La profesora reconoce y valora la importancia de esta pregunta y abre el espacio para hacer la respectiva demostración.

6.5. CONCLUSIÓN DEL CAPÍTULO

El análisis con el que damos cuenta de las finalidades de participación nos permitió identificar un conjunto de rutinas asociadas a la actividad demostrativa, propias de cada práctica. La cantidad de rutinas identificadas, y la imposibilidad de dar cuenta de cada una de ellas por separado, ilustran la complejidad del proceso del que toman parte los estudiantes y la gran cantidad de aspectos que intervienen en la negociación de significados de la demostración matemática. En el capítulo 8, de discusión y conclusiones, sintetizamos el análisis, presentando el conjunto de rutinas establecidas; este se constituye en producto de la investigación.

CAPÍTULO 7

ANÁLISIS DEL DESARROLLO DEL CURSO. EVOLUCIÓN DE LA PARTICIPACIÓN

En este capítulo presentamos los resultados del análisis de la evolución de la participación de los estudiantes en la actividad demostrativa que se lleva a cabo a lo largo del curso, vista a través de los 15 episodios que conforman el cuerpo principal de datos. Para ello, nos referimos nuevamente a cada práctica de las mencionadas en el capítulo seis, pero nos concentramos en aquellas acciones en donde encontramos evidencias del cambio de posición de los estudiantes, desde una participación periférica legítima, como miembros inexpertos de la comunidad, hasta una participación periférica o plena, en algunas de las rutinas que conforman el repertorio de prácticas en la clase. De acuerdo a nuestro marco teórico, la evolución de la participación tiene que ver con la relevancia de ésta para la consecución de los fines particulares de la interacción comunicativa que se lleva a cabo, el carácter genuino de dicha participación, la autonomía con la que los estudiantes intervienen y el desarrollo del compromiso mutuo, a través de la afiliación, la alineación con la empresa y la originalidad de las intervenciones. Un elemento de contraste en el análisis de la evolución de la participación es el papel que asume la profesora en cada una de las interacciones que analizamos, pues nos interesa ver que rasgos de su condición de experta inicial de la comunidad se traspasan a los estudiantes.

Para visualizar aspectos centrales de la participación y poner de presente elementos importantes que caracterizan su evolución, acompañamos los análisis de la interacción con diagramas en los que mediante un trazo continuo de una línea poligonal ilustramos quién toma la palabra, diferenciando cuándo lo hace un estudiante (extremos superiores de los segmentos) o cuando lo hace la profesora (extremos inferiores). Adicionalmente, usamos las convenciones que aparecen en la Tabla 7.1 para marcar cada intervención en términos de las características de la participación.

Características de la participación	Convención	Significado
Relevante	──◆	Aporte necesario para la consecución de los fines de la interacción comunicativa que se lleva a cabo.[1]
Genuina	⟶	Corrección, rechazo u objeción.
	F	Fundamentación a lo dicho o hecho; soporte que evidencia la apropiación de lo dicho.[2]
Autónoma	A	Intervención espontánea, por iniciativa propia o interés personal.
Afiliada	──▶	Apoyo, confirmación, complemento o pregunta.
Original	!	Idea creativa o novedosa.
Alineada	──●	Adaptación a las exigencias de la comunicación; expresión de ideas secundarias.

Tabla 7.1: Convenciones para caracterizar el estilo de participación

7.1. DEFINIR

A lo largo del curso, profesora y estudiantes participan en la enunciación informal de definiciones (DefInf), en la producción de una representación gráfica a partir de una definición (RepDef) e incluso en la generación de no-ejemplos y contraejemplos (IdPrFa) de una definición o de enunciados en proceso de constituirse en definición. Estas interacciones son más un motivo para comenzar a dialogar acerca de las propiedades que caracterizan al objeto definido y no el objetivo central del aprendizaje -que es aprender a demostrar en geometría y no únicamente aprender geometría-. Por tal razón, no son tan frecuentes, no se llevan a cabo *per se,* sino en el marco de las actividades que se realizan con el objeto de obtener conjeturas y validarlas y por tal razón no nos centramos en ellas en el análisis de la evolución de la participación.

Por otro lado, al hacer un conteo aproximado de las veces que usamos algún código, nos dimos cuenta que la mayor frecuencia de interacciones tienen la finalidad de: identificar las propiedades explícitas e implícitas del objeto o término definido (IdPrDef) o representado (IdPrRe), construir colectivamente una definición (ConsDef), proponer una representación para rechazar una definición propuesta (ReDe-

[1] Por ejemplo, en la sección 7.2, página 208, Darío hace un aporte fundamental a la redacción de la definición de altura.

[2] Por ejemplo, en la sección 7.1.1. de la página 206, Juan da una explicación con la que soporta su propuesta de definición de altura.

fRe) y usar una definición en alguna demostración (DefDem). Todas estas acciones, junto con analizar si dos defniciones son equivalentes (Equiva) y estudiar qué definición conviene adoptar (DefSis), que son de muy poca frecuencia, son evidencias de participación periférica legítima.

Al comparar los extractos señalados con cada uno de los códigos enumerados en el párrafo anterior, observamos que en tres acciones específicas se encuentran indicios de una evolución de la participación: en la formulación de definiciones (ConsDef), en el uso de definiciones en demostraciones (DefDem) y en el estudio de cuál definición conviene al sistema (DefSis). En estas tres finalidades de participación centramos el análisis, aunque nos referimos a otros códigos ocasionalmente. Damos cuenta de la evolución ilustrando, con fragmentos de interacciones, momentos del proceso en el que los estudiantes avanzan de una participación periférica legítima a una participación legítima y eventualmente a una participación plena en la práctica de definir.

7.1.1. Participación periférica legítima en la práctica de definir

Participación periférica legítima en la formulación de definiciones

Las interacciones que se llevan a cabo con el objeto de institucionalizar las definiciones de 'bisecar' y de 'par lineal' ejemplifican lo que hemos denominado participación periférica legítima de los estudiantes en la construcción de definiciones. En ellas, los estudiantes guiados por la profesora, avanzan en la idea de que una definición no es una simple descripción y se enfocan en las propiedades explicitas e implícitas en el enunciado de ésta. Veamos tres extractos de interacción que ilustran lo dicho.

<u>Ejemplo 1:</u> Definición de bisecar

Al trabajar en parejas, los estudiantes acuerdan el significado de la palabra 'bisecar' que aparece en el enunciado del problema que da inicio al Episodio 2: 'Dados tres puntos no colineales *A, B* y *C*, determinar un punto *D* tal que los segmentos *AB* y *CD* se bisequen'. Por ejemplo, después de construir los puntos *A, B* y *C* en Cabri, Dario incentiva la negociación del significado de 'bisecar' al preguntar a su compañero Leopoldo: "¿Qué significa que [los segmentos *AB* y *CD*] se bisequen? Leopoldo propone una descripción informal: "La mitad de los dos segmentos [*AB* y *CD*]; que se rompan". Darío admite esta definición pues parece coincidir con la idea que él tiene y les sirve para resolver el problema. En forma similar actúan los demás grupos de estudiantes. Sin embargo, cuando se lleva a cabo la construcción colectiva de la demostración de la existencia del punto *D,* la profesora asocia la definición de bisecar con la de ‘punto medio’ llevando a los estudiantes a modificar su idea informal hacia una definición basada en las propiedades geométricas del punto medio; es decir, P biseca a los segmentos *AB* y *CD* si *AP = PB, CP = PD, A-P-B* y *C-P-D.*

81	P:	(a)	[…] acuérdense, ¿qué es lo que quiero [de]mostrar? Que los segmentos se bisecan. ¿Sí?	DefDem
		(b)	Ya sabemos que *P* es punto medio de *AB*.	ConsDef
82	Estudiantes:		[Falta] que es el punto medio de *CD*.	ConsDef
83	P:		Falta [de]mostrar que *P* es el punto medio de *CD*, ¿sí?	ConsDef
84	Juan:		Pero por la definición de punto medio[3] podemos decir que la medida de *CP* más la medida de *PD* es igual a la medida de/	IdPrDef
85	P:		/¿Esa es la definición de punto medio?	IdPrDef
86	Efraín:		No, es la de interestancia.	IdPrDef
87	P:		¿No hay dos condiciones [en la definición de punto medio]?	IdPrDef
88	Ana:		Que *P* está entre *C* y *D/*	IdPrDef
89	P:		/Que *P* está entre *C* y *D*, ¿y?	IdPrDef
90			[…]	
91	Juan:		Que la distancia *CP* es igual a la distancia *PD* y que la distancia *CP* es la mitad de la distancia *CD*.	IdPrDef
92	P:	(a)	¡Uy!, tu sí que me estás aumentando las tareas que me toca hacer… ¡tres cosas!... solo son dos…	IdPrDef
		(b)	entonces, falta [de]mostrar, […]… ¿Por qué tenemos la interestancia [*C-P-D*]?… Bueno, la parte facilita [primero]: que la distancia de *P* a *D* es igual a la distancia de *P* a *C*.	DefDem

[P27:81-92]

En la intervención 81 la profesora introduce la relación entre bisecar y punto medio al recordar que la tarea es demostrar que los segmentos *AB* y *CD* se bisecan en el punto *P* y que ya saben que *P* es el punto medio de *AB*. De esta manera, asocia la acción de bisecar un segmento con obtener el punto medio y orienta a los estudiantes en la búsqueda de una justificación para asegurar que *P* es también punto medio del segmento *CD* [82, 83]. Juan intenta elaborar una justificación recordando que la definición de punto medio incluye igualdad de medidas, pero confunde la definición con la de interestancia [84]; por esta razón, la profesora y Efra-

[3] Definición de punto medio: un punto *B* se llama punto medio de $\overline{AC}$, si *B* está entre *A* y *C* y *AB = BC.*

ín objetan su idea [85, 86]. Luego, la profesora se encarga de insinuar que son dos las condiciones incluidas en la definición de punto medio [87], Ana menciona que *P* está entre los extremos del segmento [88] y Juan se refiere a la equidistancia de *P* a los extremos del segmento [91]. Finalmente, la profesora se refiere a ambas propiedades e indica que falta justificar la interestancia [92b].

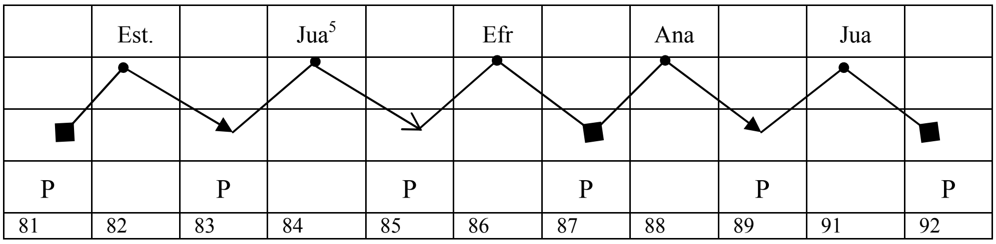


Diagrama 7.1: Participación periférica legítima en la construcción de la definición de bisecar

En el Diagrama 7.1 ilustramos la participación de los estudiantes en la conversación instruccional que estamos analizando. La dirección de la conversación está a cargo de la profesora y los estudiantes participan respondiendo sus preguntas. Ella establece la asociación entre 'bisecar' y 'punto medio', idea central de la interacción, y los estudiantes intentan justificar la equidistancia del punto *P* a los extremos del segmento. Su contribución es poco relevante pues se basa en la idea informal que tienen de 'bisecar' con la cual pueden resolver el problema sin establecer alguna asociación con la definición de 'punto medio'. Aunque tienen un referente significativo para participar en la conversación, la idea que tienen no puede ser institucionalizada. No es una participación autónoma pues ellos se limitan a responder lo que creen que la profesora espera oír. Tampoco podemos calificar la participación como genuina pues no hay indicios de que los estudiantes sean conscientes de la necesidad de aportar en una elaboración más formal del término 'definir'. Solamente en la intervención [91] de Juan entrevemos un pequeño intento de establecer el nexo entre su idea de bisecar y la definición de punto medio, pero como la profesora no explota aquello que el estudiante quiere decir, no tenemos suficientes elementos para caracterizar la intervención del estudiante como evidentemente genuina. El resto de intervenciones de los estudiantes reflejan alineación con la empresa adoptándose a las exigencias que la profesora les impone.

[5] Para facilitar la elaboración de los diagramas abreviamos los nombres de los estudiantes usando las tres primeras letras en todos los casos.

Ejemplo 2: Definición de par lineal (primera parte)

En una conversación instruccional, en donde se está buscando cómo demostrar la congruencia de los ángulos opuestos por el vértice, Juan, usa una figura que está representada en el tablero, para referirse a la posibilidad de sumar las medidas de los ángulos $\angle 1$ y $\angle 2$ [Figura 7.1]. El estudiante alude a una de las propiedades de un par lineal, pero de manera informal: “Hallar la medida de $\angle DBA$ más la medida de ángulo *ABC.* Eso queda como una recta”. Entonces, la profesora decide interrumpir la conversación que se está llevando a cabo para introducir e institucionalizar la definición de par lineal[6] hasta ahora desconocida por la mayoría de los estudiantes. Se vale de la identificación de las propiedades que caracterizan al par de ángulos que Juan quiere usar.

116	P:	[…] Pero, esos dos ángulos: $\angle 1$ y $\angle 2$ [Figura 7.1], sí tienen algo muy especial, ¿qué es?	IdPrRe

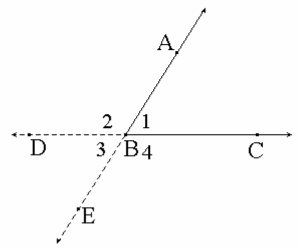


Figura 7.1

117	Daniel:	Comparten un lado.	IdPrRe
118	P:	Y si comparten un lado… ¿Tenemos algún nombre para esos ángulos que compartan un lado?	IdPrRe
119	Estudiante:	Adyacentes.	IdPrRe
		[…]	
126	P:	[…]. Pero además [de ser adyacentes] estos dos ángulos [$\angle 1$ y $\angle 2$] tienen otra cosa muy especial… ¿Juan?	IdPrRe
		[...]	
129	Juan:	Uno de ellos [lados] es rayo opuesto al otro.	IdPrRe
130	P:	Sí, el otro lado de cada ángulo [no el que comparten] son rayos opuestos, […].	IdPrRe
		Eso es lo que vamos a llamar, ángulos par lineal. Entonces, vamos	Instit

[6] Definición de par lineal: $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AD}$ son rayos opuestos y $\overrightarrow{AC}$ es otro rayo cualquiera, entonces $\angle BAC$ y $\angle CAD$ forman un par lineal.

> a definirlo. Entonces, eh… si los rayos *AB* y *AD* son opuestos y *C* es un punto que no está en la recta *AB* [escribe mientras habla], entonces los ángulos *CAB* y *CAD*, son par lineal. [Subraya par lineal]. "Par", necesito dos, "lineal", ¿Por qué? porque los rayos opuestos forman una recta. Y entonces esos son par lineal. […].
>
> **[P42:116-130]**

La profesora comienza pidiéndo a los estudiantes que se fijen en la representación e intenten identificar características especiales de los ángulos $\angle 1$ y $\angle 2$ [116]. Daniel se refiere a que los ángulos comparten un lado [117] y ella les recuerda que han denominado 'adyacentes' a ese tipo de ángulos [118, 119][8]. Como ningún otro estudiante sugiere propiedades para los ángulos, la profesora se dirige a Juan para que vuelva a mencionar aquella propiedad con la que comenzó a hablar de ellos [126]. En esta oportunidad [129], en lugar de referirse a "[…] queda como una recta", dice: "uno de ellos [los lados] es rayo opuesto al otro" procurando usar un lenguaje geométrico. La profesora retoma la idea de Juan y menciona la existencia de un punto C que no está en los rayos opuestos, el cuál determina el lado común de los ángulos; así institucionaliza la definición de ángulos par lineal. Esta forma de construir la definición es importante pues basta garantizar la existencia de un par de rayos opuestos y un punto externo a ellos para poder afirmar que se tiene un par lineal. Los estudiantes no preguntan el motivo del giro en la forma de construir la definición pues todavía no entrevén el efecto que produce al intentar usarla en las demostraciones.

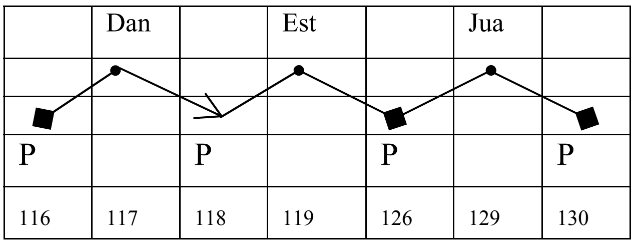


Diagrama 7.2: Participación periférica legítima en la construcción de la definición de par lineal. Primera parte

En el Diagrama 7.2 ilustramos la participación de tres estudiantes, liderada por la profesora, que consiste en responder a preguntas que ella hace para destacar las características de un par lineal [117, 119, 129]. Aunque los estudiantes mencionan dos propiedades que ella incluye en la definición y sus ideas son tenidas en cuen-

[8] En realidad, al definir ángulos adyacentes incluyeron cuatro propiedades: comparten un lado, tienen un vértice en común, no tienen puntos interiores comunes y son coplanares. La profesora omite mencionar las tres últimas propiedades.

ta, consideramos que la participación, aunque periférica legítima, es de escasa relevancia; es una muestra de afiliación a la empresa, no es genuina ni es autónoma pues obedece a dirigir la atención hacia donde la profesora pide que lo hagan. Ella es quien sugiere estudiar cierto par de ángulos, pregunta por las propiedades, pide recordar el nombre de dichos ángulos e introduce la definición de par lineal. De esta manera conduce la conversación hacia el fin que ella se propone.

<u>Ejemplo 3:</u> Definición de par lineal (segunda parte)

El siguiente extracto de conversación sucede a continuación del que presentamos en el Ejemplo 2. Mientras que la profesora escribe en el tablero la definición de par lineal, Orlando, en su mesa de trabajo, representa en Cabri dos semirrectas de origen común aparentemente opuestas y determina un tercer punto para construir un par lineal. Daniel y Melisa, que están sentados a su lado, le dicen que tiene que partir de una recta y luego sí representar sobre ella los dos rayos opuestos porque, de lo contrario, al arrastrar uno de los rayos se pierde la condición de ser opuestos. Esta discusión entre los estudiantes atrae la atención de la profesora quien decide hacerla pública para destacar la propiedad "rayos opuestos", incluida en la definición de par lineal; de esta forma, hace explícita la colinealidad del punto origen de los rayos con otros dos puntos, uno en cada rayo, propiedad que hay que garantizar para poder declarar que dos rayos son opuestos.

130	P:	[…] Aquí están discutiendo algo [oye a Daniel y Orlando discutir]. Orlando, […]…	
131	Orlando:	No, es que estaba haciendo yo algo en Cabri. Digamos… es que ellos [Daniel yMelisa] decían que yo trazaba aquí dos rayos… [Traza dos rayos aparentemente opuestos].	RepDef
		[…]	
133	Orlando:	Y hacía la prueba del arrastre [al arrastrar uno de los rayos, éstos pierden la condición de ser rayos opuestos]. Para hacer el opuesto/	ExplorCabri
134	P:	(a) /necesitas trazar una recta. [Eso era lo que Daniel le decía cuando ella escuchó la conversación].	RepDef
		(b) ¿Y por qué necesitas trazar una recta?	IdPrRe
135	Daniel:	Para que sean opuestos.	IdPrRe
136	P:	Pero, ¿por qué? ¿Por qué el tener la recta te va a dar el opuesto?	IdPrRe
137	Melisa:	Porque los dos [rayos] están en la misma recta.	IdPrRe

138	P:	Sí, pero, ¿cuál es la definición de [rayos] opuestos[9]?	IdPrDe
139	Daniel:	La interestancia.	IdPrDe
140	P:	(a) La interestancia. […]…	IdPrDe
		(b) muestra [a los demás] cómo te diste cuenta que no tenías rayos opuestos, en Cabri [Orlando arrastra una de las semirrectas y es evidente que ser rayos opuestos es solo una apariencia] si… […].	ExplorCabri

[P42:130-140]

Por solicitud de la profesora [130], Orlando hace pública la observación que Daniel y Melisa le hacen acerca de su representación; la profesora complementa la explicación y le pide que justifique por qué sus compañeros le sugieren comenzar por una recta [134]. Aunque ella se dirige directamente a Orlando, el que responde es Daniel, insistiendo en que de esa manera se logra garantizar que los rayos son opuestos [135]. La justificación no satisface a la profesora quien insiste en preguntar por qué el trazar los rayos sobre una recta garantiza que serán opuestos [136]. Melisa repite que así los rayos quedan en la misma recta [137]. La profesora recurre a pedirles recordar cuál es la definición de rayos opuestos [138]. Daniel menciona la interestancia [139], que en clases previas han asociado a la colinealidad. La profesora queda satisfecha con el establecimiento de dicha asociación y finalmente solicita a Orlando arrastrar los rayos para que los demás compañeros vean que la condición de colinealidad se pierde si no se parte de una recta.

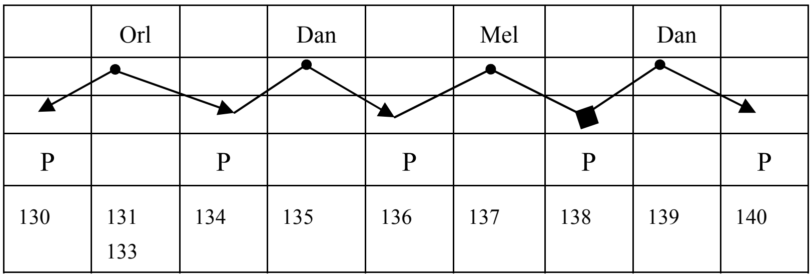


Diagrama 7.3: Participación periférica legítima en la construcción de la definición de par lineal. Segunda parte

En el Diagrama 7.3 ilustramos la participación de los estudiantes, impulsada y dirigida por la profesora. Ella es quien decide explotar la sugerencia que le hacen Daniel y Melisa a Orlando, para destacar la propiedad de colinealidad que no queda suficientemente explícita en la definición de par lineal. Sin embargo, aunque

[9] Definición de rayos opuestos: Si A está entre B y C entonces $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ se llaman opuestos.

intenta que dicha propiedad sea expresada por los estudiantes al justificar la exigencia de partir de una recta, sólo logra que Daniel se refiera a la interestancia cuando pregunta explícitamente por la definición de rayos opuestos. En ese sentido, pese a que la idea de usar la representación en Cabri para dar sentido a las propiedades de la definición de par lineal surge de los estudiantes, consideramos su participación poco relevante pues no fueron ellos quienes logaron sacar provecho de la representación para hacer explícita la propiedad de colinealidad. Tampoco es una participación autónoma, motivada por un interés personal sino por la necesidad de responder a la profesora; ni genuina, ya que los estudiantes no fundamentan su sugerencia y solo dan muestras de atender a las exigencias de la profesora.

Participación periférica legítima en el uso de definiciones en una demostración

Con relación al uso de definiciones en la producción de una demostración, hemos escogido un extracto en el que William intenta escribir la demostración de la congruencia de ángulos opuestos por el vértice, para ilustrar la participación periférica legítima de los estudiantes en esta práctica. Nos concentramos en las interacciones en las que él intenta usar las definiciones de par lineal y ángulos opuestos por el vértice. Como William quiere mencionar dos pares de ángulos par lineal que no están dados en el antecedente del teorema, debe justificar su existencia a partir de la definición de ángulos opuestos por el vértice, pues lo único que tiene para dar comienzo a la demostración es un par de ángulos opuestos por el vértice (Los ángulos $\angle 1$ y $\angle 3$ en la Figura 7.2). El estudiante propone considerar un ángulo y su par lineal: "Necesitamos el otro ángulo, el que nos forma el par lineal" y pretende afirmar su existencia sin garantizar que están presentes las condiciones suficientes para hacerlo. Entonces la profesora interviene.

185 P: […], pero ¿qué necesito para poder declarar que [$\angle 2$ y $\angle 3$] son par lineal[11] [Figura 7.2]? DefDem

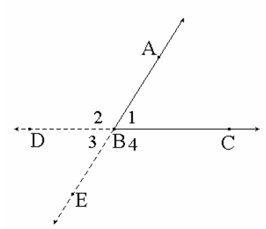


Figura 7.2

186 William: Que [dos de sus lados] son rayos opuestos y que [tenemos] un DefDem

[11] Definición de par lineal: $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{AD}$ son rayos opuestos y $\overleftrightarrow{AC}$ es otro rayo cualquiera, entonces $\angle BAC$ y $\angle CAD$ forman un par lineal

		punto de otro [rayo].	
187	P:	De otro rayo [que] no está en la recta [que determinan los rayos opuestos]. Entonces, ¿que es lo primero que vas a decirme?	DefDem
188	William:	Que el ángulo 2 y el ángulo 3/	ContrCon
189	P:	/¡No!	ContrCon
190	Luz:	Esa es una conclusión.	ContrCon
191	P:	(a) Exactamente, eso es lo que tú quieres concluir,	ContrCon
		(b) pero ¿qué elementos me hacen falta decir para poderlo concluir? Me lo acabas de decir.	CondSuf
192	William:	¡Ah ya! El rayo *AB* y el rayo *BE*.	DefDem
193	P:	¿*AB*?, el rayo *AB* es éste. [Señala el opuesto de *BA*]. Rayo *BA* y rayo *BE* son opuestos. […] ¿Cómo lo saben? ¿Cómo lo sabe él? ¿Construcción? ¿Definición de?	DefDem
194	Estudiante:	Rayos opuestos.	DefDem
195	P:	No de rayos opuestos. Definición de ángulos opuestos por el vértice. Lo que está dado son los ángulos [opuestos por el vértice] y la definición me dice que forman dos pares de rayos opuestos, y William está cogiendo un par… de rayos opuestos. Entonces, por definición de ángulos opuestos. Bueno, ¿qué más necesito?	DefDem
196	William:	¿Ahora sí la medida?	
197	P:	No, tú dijiste que querías declarar par lineal. Necesitamos un punto que no esté en la recta. ¿Quién? ¿Quién va a ser?	DefDem
198		[…]	
199	William:	*C*.	IdPrRe
200	P:	¿*C*? bueno, si puede ser *C*, pero tú dijiste que ibas a usar estos ángulos [señala $\angle 2$ y $\angle 3$], pero puede ser *C*.	IdPrRe
201	William:	Mejor *D*.	IdPrRe
202	P:	¿Y cómo puedes estar seguro que *D* no está en esa recta? […]	DefDem
203	Juan:	Porque son dos pares de rayos opuestos.	DefDem
204	P:	Son dos pares de rayos opuestos. […]. ¿Y eso me va a asegurar que *D* no esté en la recta *AB*?	
205	Juan:	Sí, porque [el rayo] *BD* no es opuesto con [el rayo] *BA*.	DefDem
206	P:	[Rayo] *BD* no es opuesto con [rayo] *BA*. O sea, ahí lo que está jugando un papel importantísimo es esta palabra: "dos pares" [de la definición de ángulos opuestos por el vértice], porque eso me	DefDem

Definición de ángulos opuestos por el vértice: dos ángulos son opuestos por el vértice si sus lados forman dos pares de rayos opuestos.

> está diciendo que *D* y *C* no pueden estar en la misma recta *AE* o *AB*, porque entonces no serían otro par [de rayos opuestos]. […] Y ahora si puedes decir cuáles son par lineal.

[P42:185-206]

La profesora guía el uso de la definición, pidiendo a William recordar qué propiedades hay que 'declarar' para poder afirmar que se tiene un par lineal [185]; William enuncia correctamente las dos propiedades presentes en la definición [186]. Pero, cuando la profesora le pide escribir, de acuerdo a lo que acaba de decir, la siguiente afirmación de la demostración [187], el estudiante da por hecho que puede declarar como dada la existencia del par lineal e intenta afirmar que $\angle 2$ y $\angle 3$ lo son [188], por lo que es interrumpido por la profesora. Luz dice que esa es la conclusión a la que hay que llegar, refiriéndose a la necesidad de garantizar previamente que están las condiciones para poder afirmar que efectivamente se tiene un par lineal [190]. La profesora confirma lo dicho por Luz y recuerda a William que él ya había mencionado las propiedades a las que tiene que hacer referencia en la demostración [191b]. William declara la existencia de dos rayos opuestos, uno de ellos mal nombrado; la profesora le corrige y pide una justificación de la afirmación de la existencia de tales rayos [193], preguntando a todos por la definición que le permite a William asegurarlo: "[…] ¿Cómo lo saben? ¿Cómo lo sabe él? ¿Construcción? ¿Definición de?" [193]. Un estudiante se refiere a la definición de rayos opuestos [194] pretendiendo justificar su existencia a partir de la definición. Como nadie más interviene, la profesora explica de qué manera están haciendo uso de la definición de ángulos opuestos por el vértice [195] y luego invita a William a continuar proponiendo las afirmaciones para poder declarar un par lineal: "¿Qué más necesito?". En lugar de referirse a un punto que no pertenece a los rayos opuestos, William considera que el asunto de garantizar el par lineal ya está resuelto y pretende continuar con la demostración [196]. La profesora interviene nuevamente para dirigir el curso de la demostración, recordando a William el requisito de escoger un punto que no pertenezca a los rayos opuestos [197]. William escoge al punto *C*, sin fijarse en las consecuencias que esto trae para seleccionar el par lineal que piensa declarar [199]. Cuando la profesora le señala las consecuencias [200], decide cambiar el punto por *D* [201]. Nuevamente, la profesora le pide justificar qué garantiza que *D* no esté en los rayos opuestos, buscando que William haga alusión a la definición de ángulos opuestos por el vértice [202]. En las intervenciones 203 y 205 Juan elabora una justificación usando dicha definición. La profesora amplía la explicación de Juan para señalar la importancia de la expresión 'dos pares de rayos opuestos' en la definición de ángulos opuestos por el vértice [206].

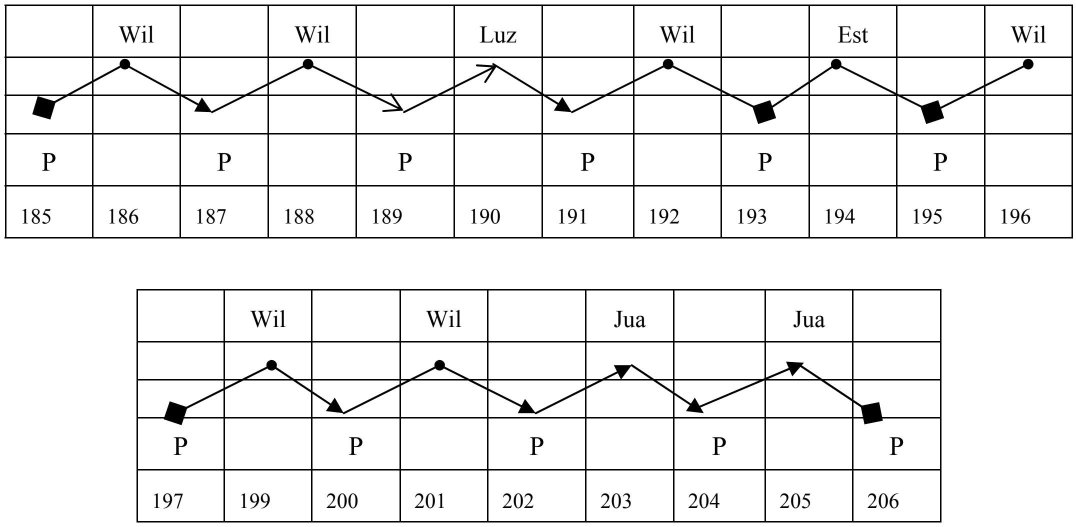


Diagrama 7.4: Participación periférica legítima de los estudiantes relacionada con usar definiciones en demostraciones

En el Diagrama 7.4 ilustramos la participación de los estudiantes dirigida por la profesora, quien intenta guiarlos en el uso de dos definiciones en la demostración. William y Juan participan con ideas como reacción a sus preguntas. Cuando William toma una iniciativa en la que omite afirmaciones importantes, relacionadas con las definiciones que está usando, ella manífiesta explícitamente su oposición y orienta al estudiante con preguntas o explicaciones sobre el proceso que hay que realizar. Por esta vía, usa lo dicho por William en la conversación y logra que las ideas de éste sean algo relevantes. La participación de William no puede considerarse genuina pues no se aprecia que tenga un fundamento personal para lo que dice; más parece que está tratando de recordar las ideas sugeridas por sus compañeros en la conversación previa. Luz parece tener más claro qué tienen que tener explícitamente todas las afirmaciones para poder declarar un par lineal [190] y Juan aprovecha una de las propiedades de la definición de ángulos opuestos por el vértice de manera apropiada [203, 205]; sin embargo, ambas intervenciones son reacciones a las sugerencias o preguntas de la profesora. Tampoco podemos afirmar que la participación de los estudiantes sea autónoma o que ellos propongan ideas originales. El análisis previo nos conduce a considerar la participación de los estudiantes como periférica legítima.

Participación periférica legítima en la selección de cual definición conviene al sistema axiomático

Con respecto a la acción de seleccionar la definición de un objeto geométrico que es más conveniente de acuerdo con el sistema axiomático que se está construyendo, no hay, a lo largo del curso, suficientes oportunidades para que los estudiantes avancen hasta una participación plena. Sin embargo, encontramos evidencias de evolución de la participación, de periférica legítima a legítima. En el siguiente ejemplo vamos a presentar un extracto en donde se aprecia una participación periférica legítima, para compararlo con una posterior participación.

Efraín y Juan proponen, por solicitud de la profesora, sugerencias para definir altura de un triángulo. Ella incentiva la evaluación de éstas y hace referencia a la conveniencia de considerar la altura como un segmento y no como un número.

8	P:	¿Quién formula la definición de altura? ¿Quién la recuerda? Ustedes la estudiaron el semestre pasado… creo. [Efraín alza la mano]. Efraín ¿Qué es la altura?	ConsDef
9	Efraín:	Es la distancia desde el punto medio de un triángulo hasta su ángulo opuesto.	DefInf
10	P:	¿Alguien controvierte esa definición? [Juan y Leopoldo alzan la mano] Juan.	
11	Juan:	Es la distancia desde un vértice hasta la recta que contiene al lado opuesto del vértice.	DefInf
12	P:	Ambos hablan de distancia. […].	ConsDef
13	Juan:	Es que al definir distancia, ya se sabe que tiene que ser perpendicular.	ConsDef
14	P:	(a) Ah, pero tendríamos entonces que haber hablado [previamente] de la distancia de un punto a una recta.	DefSis
		(b) Pero, yo les pregunto: ¿la altura es un objeto geométrico?, o, ¿es un número?	ConsDef
15	Estudiantes:	Un objeto.	ConsDef
16	P:	Efraín.	
17	Efraín:	Un objeto geométrico.	ConsDef
18	P:	Entonces no puedo decir que es la distancia… porque si es una distancia es un número. Es un objeto geométrico… ¿Qué objeto geométrico?	ConsDef
19	Estudiante:	Un segmento.	ConsDef
20	P:	En los libros hay altura definida como segmento y altura definida como recta. Nosotros vamos a trabajar la altura definida como segmento. […]	ConsDef

[P62:8-20]

La pregunta por la definición de altura [8] incita a Efraín y a Juan [11] a formular propuestas [9] que la profesora cuestiona, aunque no de manera directa, sino sugiriendo controvertir la idea de Efraín [10]. La profesora centra la atención en el hecho de que ambos estudiantes usan el término ‘distancia’ [12], lo que lleva a

Juan a aclarar que de esa forma él establece el nexo entre la distancia de un punto a una recta y la relación de perpendicularidad [13]. Este comentario da pie a la profesora para indicar que si fuera apropiado establecer la definición de altura como la distancia de un punto a una recta, ésta distancia debía ser institucionalizada previamente (cosa que no han hecho). Luego, pregunta si conviene considerar la altura como un número o como un objeto geométrico [14]. La mayoría de estudiantes parece estar de acuerdo en suponer que es un objeto geométrico [15, 17] y la profesora apoya esta decisión preguntando con qué objeto la van a asociar [18]. Efraín menciona un segmento [19] y ella institucionaliza esta idea recordando otras opciones que se encuentran en los libros [20].

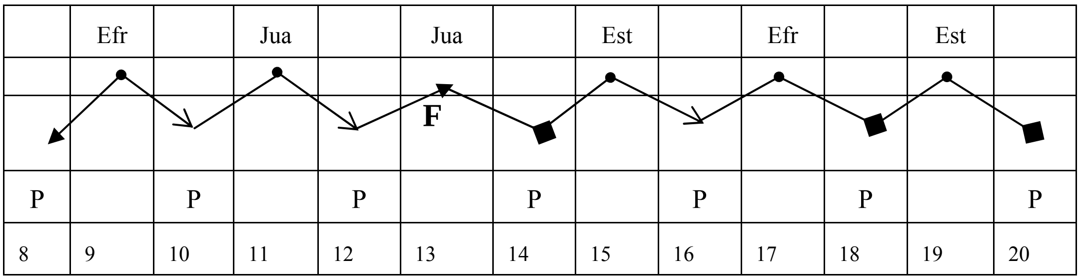


Diagrama 7.5: Participación periférica legítima de los estudiantes relacionada con identificar cuál definición conviene al sistema axiomático

El Diagrama 7.5 ilustra la participación periférica legítima de los estudiantes, motivada por las preguntas de la profesora. Es poco relevante, no solo porque Efraín da una definición equivocada de altura, sino porque él y Juan pretenden usar la distancia de un punto a una recta, noción que no ha sido institucionalizada. Los estudiantes introducen términos sin medir las consecuencias que ello implica para el sistema axiomático. Unicamente la profesora, experta de la comunidad, se da cuenta de los problemas que puede ocasionar definir altura usando la idea de distancia. La participación de los estudiantes se basa en el conocimiento previo que tienen de la altura de un triángulo, con el cuál pueden intervenir en la conversación, aunque no de manera autónoma y con poco fundamento de lo que dicen. Excepto por una intervención de Juan en la que intenta fundamentar su propuesta de definición [13], la participación de los estudiantes se condiciona a las exigencias de la profesora.

7.2. Participación legítima en la práctica de definir

Participación legítima en la formulación de definiciones

La contribución de los estudiantes en la formulación de las definiciones de 'altura' y 'ángulo externo' ejemplifica lo que denominamos una participación legítima. En el primer caso, la profesora comienza a escribir la definición pero su idea es cuestionada por un estudiante. En el segundo caso, después de que la profesora escribe la definición, ella misma duda de que haya quedado bien escrita y pide opinión de los estudiantes.

<u>Ejemplo 1</u>: Definición de altura

Al comenzar a resolver un problema que incluye el término 'altura' en el enunciado, Leopoldo se dirige a la profesora para preguntarle por qué propone un problema que hace uso de un concepto no institucionalizado aún: "¿Por qué tú hablas de altura si eso no lo hemos incluido [en el sistema]?" La pregunta de Leopoldo da lugar a una conversación en la que los estudiantes proponen posibles definiciones[13] y luego se formula una definición conjuntamente. El extracto que incluimos a continuación comienza cuando la profesora comienza a redactar una primera definición y Darío interviene para sugerir cambios.

20	P:	[…] Un segmento, […]… que contiene un vértice de un triángulo… y [rumores] y es perpendicular… al lado opuesto… no, a la recta que contiene el lado opuesto. Vamos a escribirlo. […].	ConsDef
21	Darío:	¿No hay que indicar que ese vértice está en el extremo del segmento? Porque cuando se habla de contenido, puede que esté entre los extremos.	ConsDef
22	P:	Sí. Lo que quería evitar con poner "contiene", es [tener que decir] "que va desde…" que es como aparece en los libros. Entonces, es mejor escribir como propone Darío: es un segmento, uno de cuyos extremos es un vértice del triángulo y es perpendicular a…	ConsDef
23	Juan:	Y entonces el otro extremo también.	ConsDef
24	P:	[…] Pero, arreglemos esta parte primero. Entonces, es un segmento cuyo… [Corrige la definición escrita en el tablero], uno de cuyos extremos… tocaría escribir… uno de cuyos extremos es un vértice del triángulo… tocaría decir entonces… ¿y el otro?	ConsDef
		[...]	
26	P:	Es un segmento, uno de cuyos extremos es un vértice del triángulo, y es perpendicular a la recta que contiene al lado opuesto. Pero… ¿y el otro extremo?	ConsDef
27	Ignacio:	Es la intersección entre el segmento y el lado.	ConsDef
28	P:	[…] Entonces, aquí tenemos todavía el problema del otro extremo…	ConsDef

[13] La primera parte de la conversación nos sirvió para ilustrar la participación periférica legítima en la identificación de qué definición conviene al sistema. En este ejemplo, nos concentramos en la segunda parte de la conversación, en donde encontramos indicios de participación legítima.

		¿en dónde para [el segmento]? Porque… es un segmento, uno de cuyos extremos es un vértice del triángulo, es perpendicular a la recta que contiene el lado opuesto, y el otro extremo está en esa recta. […] O sea, aquí tengo que poner una coma [en lugar de “y” es perpendicular] Aquí, coma, es perpendicular a la recta que contiene al lado opuesto, ¿y el otro extremo qué?	Instit
29	María:	Está contenido en el triángulo.	ConsDef
30	P:	El otro extremo no necesariamente está contenido en el triángulo… […] y el otro extremo ¿dónde está?... en la recta que contiene el lado opuesto… en dicha recta, podemos decir. Quedó mejor [la definición. En el tablero quedó escrito: Altura: Es un segmento uno de cuyos extremos es un vértice del triángulo, es perpendicular a la recta que contiene el lado opuesto y el otro extremo se encuentra en dicha recta].	ConsDef

[P62:20-30]

La profesora expresa verbalmente la definición de altura que quiere institucionalizar y menciona su interés en escribirla [20]. Darío interviene para objetar la redacción que la profesora pretende hacer, sugiriendo cambiar la expresión ‘segmento que contiene’ por otra y explica las razones por las que sugiere el cambio [21]. La profesora acepta la propuesta y la valora, indicando la relevancia de ésta [22]. Luego, Juan hace un nuevo aporte relacionado con la ubicación del otro extremo del segmento, también de manera espontánea [23]. Al final, ante la solicitud de la profesora de proponer cómo escribir la ubicación del otro extremo del segmento [26], Ignacio y María sugieren ideas [27, 29], una de las cuales es evaluada por la profesora y se rechaza porque no caracteriza dicho extremo [30].

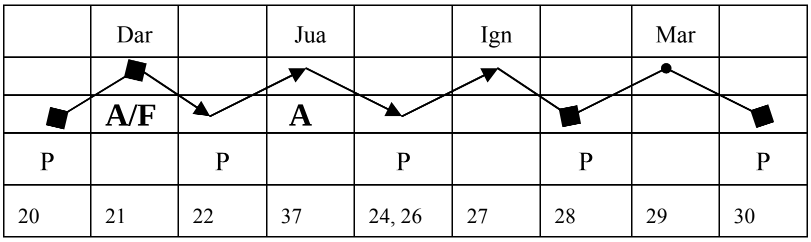


Diagrama 7.6: Participación legítima en la construcción de la definición de altura

Con el Diagrama 7.6 ilustramos la participación de los estudiantes. La intervención de Darío, relevante, espontánea y genuina, determina un estilo de participación diferente a los que hemos presentado hasta el momento. La hemos caracterizado como legítima por hacer un aporte esencial a la redacción de la definición de altura, partir del interés del estudiante, (y no por una insinuación o una pregunta de la profesora), y fundamentar su propuesta de cambio en la redacción. Con su intervención, Darío produce un giro en la dinámica de la clase que bien podría estar centrada en la redacción de la definición por parte de la profesora, mientras los estudiantes toman apuntes pasivamente. Por el contrario, después de la intervención de Darío, Juan se Aníma a complementar la redacción y la profesora, además de retomar las ideas sugeridas, impulsa a Ignació y a María para que propongan cómo finalizar la escritura de la definición. Desde nuestro punto de vista, el giro descrito es un indicativo del sentido de afiliación a la comunidad que los estudiantes experimentan y que los hace contribuir propositivamente con las tareas de la comunidad. La propuesta de definición que finalmente se institucionaliza es una construcción colectiva genuina.

Ejemplo 2: Definición de ángulo externo a un triángulo

En la socialización de las conjeturas formuladas como solución a uno de los problemas propuestos a los estudiantes, surge la necesidad de referirse al ángulo externo a un triángulo. La profesora escribe una definición en el tablero y luego pide a los estudiantes hacer una representación de los ángulos externos de un triángulo específico, $\triangle MOK$, de acuerdo a la definición. Las respuestas dadas por Ignacio y Germán hacen que ella dude si la definición quedó bien escrita; Nancy interviene señalando por qué ella considera que sí está correcta.

73	P:	[Escribe en el tablero, mientras habla] Si tenemos el triángulo *OMK* y *P* es un punto tal que se tiene esta interestancia [*M* - *K* - *P*], entonces el ángulo *OKP* es un ángulo externo del triángulo *OMK*. […]. [Figura 7.3][14].	ConsDef

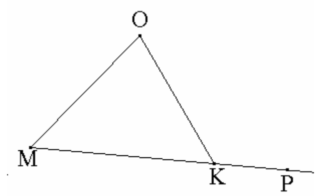


Figura 7.3

		[…]	
75	P:	[…]. ¿Cuántos ángulos externos tiene un triángulo? O sea, si comienzo con cualquier triángulo *OMK*, ¿cuántos ángulos externos tendrá?	RepDef
76	Ignacio:	Tres.	RepDef
77	P:	¿Tres? ¿En donde los vez Ignacio?	RepDef
78	Ivan:	[Pasa al tablero, dibuja tres ángulos externos; Figura 7.4].	RepDef

[14] La figura está representada en el tablero pues se usó para ilustrar las conjeturas que surgieron del problema correspondiente al episodio.

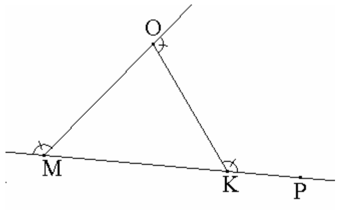


Figura 7.4

79	P:	Ahí habría uno… habría otro… [Mira a Germán que hace gestos de ver más ángulos] ¿Tú vez más Germán?	RepDef
80	Germán:	Nueve/	RepDef
81	P:	/¿Nueve? ¿Cuáles?	RepDef
82	Germán:	Pues… Ah, no mentiras… seis. Son seis… porque [No se entiende] este de aquí también. [Representa los ángulos que faltan]. [Figura 7.5]:	RepDef

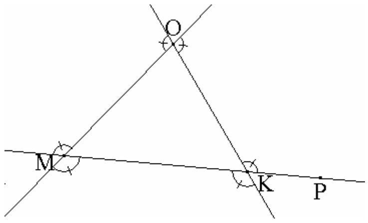


Figura 7.5

83	P:	(a) …O sea que la definición no va a estar bien. […].	ConsDef
		(b) ¿Por qué este ángulo [opuesto al ángulo *MOK*] no es externo?… Tendría que ser adyacente a uno interno…	IdPrFa
		(c) Sí… entonces más bien sería… ¿la definición no está correcta?... ¿será que nos toca añadir algo?	ConsDef
84	Nancy:	Pues es que cuando dice “el ángulo *OKP*…” entonces/	IdPrDef
85	P:	/o sea que, implícitamente estoy diciendo que comparte un lado con uno de los ángulos del triángulo/	IdPrDef
86	Ignacio:	*/OMK.*	IdPrDef

[P76:73-86]

La profesora sugiere una definición de ángulo externo a un triángulo apoyándose en un triángulo que está dibujado en el tablero [73]. Luego solicita a los estudiantes determinar cuántos ángulos externos tiene un triángulo [75]. Como Ignacio considera que son tres [76], ella le pide representarlos para ilustrar la definición [77]. Mientras Ignacio dibuja tres ángulos externos [78] la profesora da la palabra a Germán quien parece tener una opinión diferente [79]. El estudiante duda si son nueve [80] o seis [82] y con ello hace que la profesora ponga en entredicho la redacción de la definición que ella propuso [83a]; le parece que podrían quedar incluidos los ángulos opuestos por el vértice a los ángulos internos del triángulo.

Por esto reflexiona: "¿Por qué este ángulo [opuesto al ángulo *MOK*] no es externo? … Tendría que ser adyacente a uno interno…". [83b]. Ella misma alude a la condición para los ángulos externos no explícita en la definición -de ser adyacentes a uno de los ángulos interiores-, e invita a los estudiantes a sugerir cómo modificarla [83c]. Entonces Nancy interviene insinuando que la notación usada en la definición *per se* obliga a que el ángulo externo sea adyacente a uno interno [84]; la estudiante no alcanza a terminar su idea pues la profesora la "coge al vuelo" y la admite, por lo que decide no modificar la redacción [85].

En el Diagrama 7.7 ilustramos la participación de los estudiantes, inicialmente dirigida por las preguntas de la profesora, pero con una intervención importante de Nancy hacia el final de la conversación. Hemos escogido este estracto como ejemplo de participación legítima de los estudiantes, precisamente porque la profesora se apoya en Nancy para asegurarse que la definición que propuso quedó bien redactada. La estudiante da señales de saber interpretar la información que subyace a la notación empleada en la definición y tiene la seguridad para indicar a la profesora que la definición está bien redactada, aunque ella dude. Con su actuación hace un aporte relevante a la tarea que están llevando a cabo. Adicionalmente, consideramos que la participación de Nancy es reflejo de la afiliación a la comunidad pues es una muestra de la conciencia de su responsabilidad en la empresa que están desarrollando. Las intervenciones de Ignacio y Germán reflejan alineación a la comunidad y son también importantes pues al escucharlos es cuando la profesora pone en duda la definición.

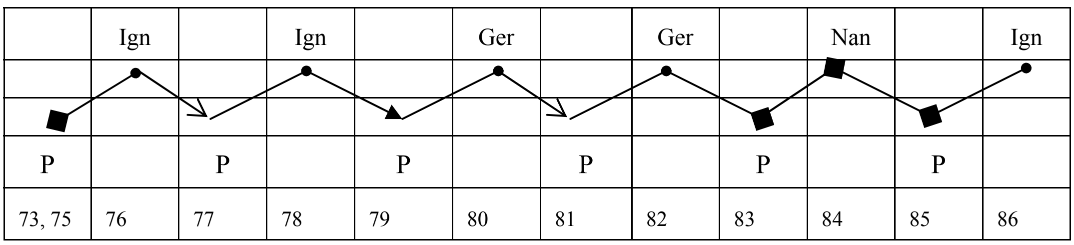


Diagrama 7.7: Participación legítima en la construcción de la definición de ángulo externo de un triángulo

Participación legítima en el uso de una definición en una demostración

Con el siguiente extracto de interacción ejemplificamos la participación legítima de los estudiantes al usar la definición de bisectriz en la producción de una demostración. Ana y Efraín hacen un uso apropiado de la definición[15] en dos momentos

[15] Definición de bisectriz: Si D es un punto en el interior del ángulo BAC, y el ángulo BAD, es congruente al ángulo DAC, entonces, el rayo AD es bisectriz del ángulo BAC.

de la producción colectiva de la demostración del teorema que afirma que el ángulo formado por las bisectrices de ángulos que forman par lineal es recto.

4	P:	[…] Tenemos dos ángulos que forman par lineal [$\angle EBK$ y $\angle KBA$ en la Figura 7.6], y sus bisectrices [*BD* y *BG*]. Y estamos mirando el ángulo formado por sus bisectrices [$\angle DBG$]. Entonces, ¿cómo lo trataron de demostrar? ¿Quién me quiere hablar? [Ana alza la mano] A ver, Ana.	FormuTarea
5	Ana:	Como la bisectriz del ángulo forma dos ángulos congruentes, entonces se puede decir que se forman dos ángulos congruentes.	DefDem
6	P:	Sí, entonces voy a llamar todos estos ángulos 1, 2, 3 y 4, para que podamos hablar más fácilmente [Figura 7.6].	RepDef

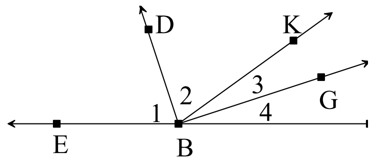


Figura 7.6

		Entonces, lo que tú me estás diciendo Ana es… ¿qué?	
7	Ana:	Las medidas de los ángulos 1 y 2 son congruentes.	DefDem
		[…]	
11	P:	Ángulo 1 es congruente a ángulo 2. [Escribe en el tablero: $\angle 1 \cong \angle 2$]. Esto va a salir de la definición de bisectriz. […] ¿Y qué más Ana?	DefDem
12	Ana:	Y el ángulo 3 es congruente al ángulo 4.	DefDem
13	P:	[Escribe: $\angle 3 \cong \angle 4$]. Bueno, eso sale por la definición de bisectriz. Entonces eso [la definición de bisectriz] va a ser un paso clave en la demostración, definitivamente. […].	DefDem
		[…]	
27	P:	Lo que tú quieres es que yo diga… digamos… que la medida del ángulo *KBE* es… digamos dos veces la medida del ángulo 2 [escribe: $2m\angle 2 = m\angle KBE$]. ¿Llegar eventualmente a eso?	Conclu
28	Luz:	Sí.	
29	P:	Pero, ¿qué me permite asegurar que eso sí está sucediendo?	Justif
		[…]	
32	Julián:	Por el postulado de la adición de medida de ángulos[16].	Justif
33	P:	Por el postulado de la adición de la medida de ángulos.	
		¿Qué necesito para poder aplicarlo?	CondSuf

[16] Postulado de adición de medidas de ángulos: Si D está en el interior del ángulo $\angle$ BAC, entonces m $\angle$ BAC = m $\angle$ BAD + m $\angle$ DAC, y m $\angle$ CAD = m $\angle$ CAB - m $\angle$ DAB.

34	Efraín:	Necesito el punto interior del ángulo, y por la definición de bisectriz...	DefDem
35	P:	¿Nosotros definimos la bisectriz mencionando un punto interior? Si la definimos así, entonces puedo decir que por la definición de bisectriz *D* está en el interior del ángulo *KBE*. Eso lo necesito para poder hacer lo que tú dices [Luz]. Solamente si tengo esa condición puedo hacer uso del postulado. ¿De acuerdo? […].	DefDem

[P52:4-35]

Como la profesora pide comenzar la demostración de la conjetura [4], Ana interviene sugiriendo un paso de la demostración que fundamenta en una de las propiedades que definen la bisectriz de un ángulo: la congruencia de los ángulos que se determinan [5]. Usando dicha propiedad, y con apoyo de la profesora, quien introduce una notación apropiada [6, 11], justifica la congruencia de los ángulos $\angle 1$ y $\angle 2$ y de los ángulos $\angle 3$ y $\angle 4$ [7 y 12]. La profesora confirma lo dicho por Ana y enfatiza en el papel que juega la definición de bisectriz en la demostración [13]. Más adelante, Luz propone un paso en la demostración que la profesora parafrasea para garantizar que todos lo entienden [27, 28] y Juan lo justifica con el postulado de la adición de medidas de ángulos [32]. Cuando la profesora solicita un soporte teórico que permita usar dicho postulado [33], Efraín indica que hay que asegurar que el punto *D* está en el interior del ángulo EBK y recurre a la definición de bisectriz, pues ésta garantiza la existencia del punto *D* [34]. La idea de usar la definición de bisectriz en ese paso de la demostración sorprende momentáneamente a la profesora, pues no recuerda que al formular la definición de bisectriz se haya mencionado la existencia del punto interior [35]; sin embargo, al escuchar a Efraín admite la idea y explica que esa sería la única forma de justificar el uso del postulado de la adición de ángulos.

En el Diagrama 7.8 ilustramos la participación legítima de los estudiantes en interacción con la profesora. Especialmente por las intervenciones de Ana y Efraín, la conversación se diferencia de aquella con la cual ilustramos la participación periférica legítima de los estudiantes en el uso de definiciones en demostraciones. En esa oportunidad, William no vio cómo aprovechar las propiedades explícitas en la definición de ángulos opuestos por el vértice como posibles eslabones de la cadena deductiva. En cambio, en este ejemplo, Ana utiliza una de las propiedades que definen la bisectriz de un ángulo y Efraín utiliza otra. Las intervenciones de ambos estudiantes son espontáneas y relevantes pues permiten avanzar en la demostración de la conjetura. Además, los dos fundamentan las afirmaciones mencionando la definición de bisectriz. Adicionalmente, la participación de Efraín es original pues recurre a una parte de la definición de bisectriz que no suele tenerse en cuenta, la existencia del punto interior en el ángulo, para justificar el uso del postulado de la adición de medidas de ángulos.

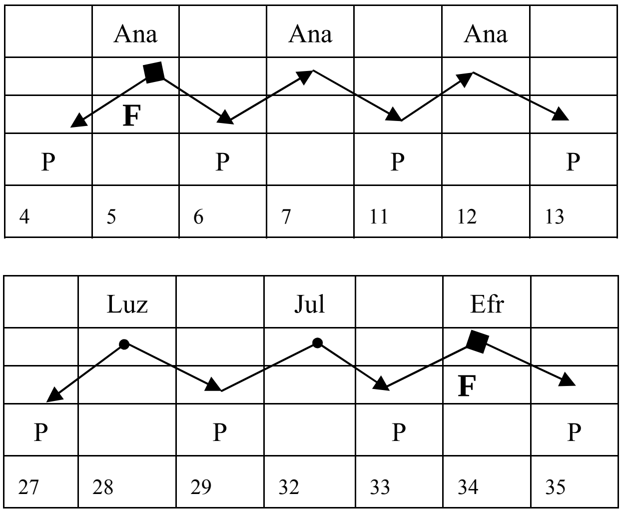


Diagrama 7.8: Participación legítima en el uso de una definición en una demostración

Participación legítima en la selección de cual definición conviene al sistema axiomático

El siguiente extracto gira alrededor de cuál definición de rectángulo van a adoptar en el curso; nos permite poner en evidencia una pequeña evolución de la participación de los estudiantes, hacia legítima, en la identificación de cuál definición conviene al sistema axiomático. Recordemos que en el ejemplo de participación periférica legítima mencionamos el uso que hacen Efraín y Juan de la palabra 'distancia' para definir altura, sin medir las consecuencias para el sistema que están construyendo. En el ejemplo que vamos a analizar, después de que algunos estudiantes intervienen en la comparación de las definiciones de rectángulo sugeridas por cinco compañeros, e Ignacio contribuye al análisis de la equivalencia de éstas, Nancy se refiere a cuál definición conviene al sistema.

Las cinco definiciones que se comparan son las siguientes: (i) Es un paralelogramo que tiene al menos un ángulo recto (Darío); (ii) Es un paralelogramo *ABCD* cuyos ángulos *A, B, C, D* son congruentes (Julián); (iii) Es un paralelogramo cuyos ángulos son congruentes (Ignacio); (iv) Es un cuadrilátero con dos pares de lados opuestos paralelos y al menos un ángulo interno recto (Marina); (v) Cuadrilátero con sus lados adyacentes perpendiculares (Germán).

48	P:	(a)	[…] Bueno, tenemos cuatro definiciones, porque éstas dos coinciden [las de Julián e Ignacio].	Equiva
		(b)	Eh… la de Marina es: "un cuadrilátero con dos lados opuestos	IdPrDef

		paralelos…" ¿O sea?	
49	Marina:	Paralelogramo.	IdPrDef
50	P:	(a) "… y al menos un ángulo interno recto"; o sea, en el fondo es igual a ésta [la de Darío].	Equiva
		(b) Entonces tenemos tres [definiciones]. La de Germán es: "un cuadrilátero con lados adyacentes perpendiculares" ¿De acuerdo? […]. O sea que, en pocas palabras, Germán está diciendo que en el rectángulo hay cuatro ángulos rectos. […]	IdPrDef
		(c) ¿Ésta [la de Germán] llevaría a ésta [la de Darío]? [Si es] cuadrilátero con lados adyacentes perpendiculares entonces, ¿es paralelogramo?... ¿por qué? [Varios hablan al tiempo].	Equiva
51	Germán:	Tiene que ser paralelogramo porque [no se entiende].	Equiva
52	P:	[…] o sea que de éstas [las de Julián y Germán], podemos inferir ésta [la de Darío]. […]	Equiva
		[...]	
57	Luz:	O si tiene uno [ángulo recto], entonces tiene cuatro [ángulos congruentes].	Equiva
58	P:	Y si ésta [la de Darío] lleva a ésta [la de Germán] Es decir, si son equivalentes. Si tengo paralelogramo, con un ángulo recto, ¿tengo cuadrilátero con cuatro… con lados adyacentes perpendiculares?	Equiva
		[...]	
61	Ignacio:	El ángulo opuesto al ángulo recto del paralelogramo tiene que dar también recto.	IdPrDe
62	P:	A ver… tengo paralelogramo *ABCD.* Este es un ángulo recto [$\angle D$] [Hace una representación como la de la Figura 7.7]	RepDef

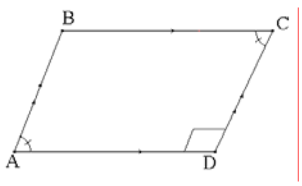


Figura 7.7

63	Ignacio:	El ángulo *B* también es recto.	IdPrRe
64	P:	Pero, siempre y cuando demostremos… ah… sí, estos dos son opuestos… son rectos [$\angle B$ y $\angle D$] ¿y? [Varios hablan al tiempo] Tengo paralelogramo. Estos dos [lados] son paralelos… estos otros dos [lados] también son paralelos. Por el teorema[18] tengo que éste ángulo [$\angle A$] también es recto porque… los [ángulos] opuestos son congruentes. […].	IdPrRe
		[…]	

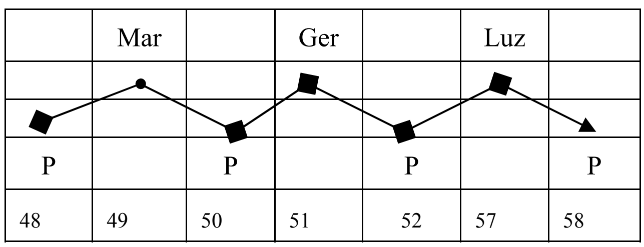
[18] Se refiere al teorema que dice: si dos rectas m y l son paralelas y $m \perp n$ entonces $l \perp n$.

66	P:	[…] Entonces, esta [la de Germán] es una definición buena […]. Pero nosotros ya sabemos mucho de paralelogramos. Entonces, posiblemente nos queramos quedar con ésta [la de Darío] o con ésta [la de Ignacio] ¿Cuál de las dos? […] ¿Cuál de las dos?... Debemos adoptar una. Una vez que tengamos una ya lo demás es teorema.	DefSis
67	Nancy:	Por eso… la primera [la de Darío].	DefSis
		[…]	
69	Nancy:	Porque de ahí podría sacar… teniendo lo de los ángulos rectos, de ahí podría sacar que son congruentes, que miden 90.	DefSis
70	P:	La primera es como menos exigente, ¿no? Digamos, de cierta manera. Si yo quiero demostrar que algún cuadrilátero es un rectángulo, solo tengo que mostrar dos cosas: que es paralelogramo y que tiene un ángulo recto. En la otra [definición] me toca mostrar que es paralelogramo y que los cuatro ángulos son congruentes. Entonces ésta exige menos para el futuro. [Escogen la definición de Darío].	DefSis

[P113:48-64]

El extracto comienza cuando la profesora da inicio a la comparación de las definiciones sugeridas por cinco estudiantes. Parte de considerar que los enunciados de Julián e Ignacio coinciden, por lo que la tarea se restringe a cuatro definiciones [48a]; luego, menciona las propiedades que Marina introdujo en su definición e invita a identifica a qué cuadrilátero se refiere [48b]. Como han definido paralelogramo como un cuadrilátero con dos pares de lados paralelos, Marina concluye que ella alude a un paralelogramo [49]; la profesora señala que la definición es equivalente a la de Darío [50a]. De esta manera, las definiciones a comparar se reducen a tres, las de Darío, Julián y Germán. Después de leer la definición sugerida por Germán, la profesora menciona que en la formulación "lados adyacentes perpendiculares" está implícita la propiedad de tener cuatro ángulos rectos [50b] y, en ese sentido, la definición corresponde a la de un cuadrilátero con cuatro ángulos rectos. Luego pregunta si la definición de Germán permite garantizar que el cuadrilátero es un paralelogramo para ver si es equivalente a la definición de Darío [50c]. Germán explica por qué el cuadrilátero con cuatro ángulos rectos tiene que ser paralelogramo [51]. Aunque el registro de la intervención de Germán no es claro, parece haber dado una buena justificación porque la profesora admite la equivalencia entre las definiciones que dan Germán y Julián y se pregunta si de ellas se puede deducir la definición de Darío [52]. Luz comenta que podría analizarse la situación contraria, es decir, si se puede partir de un paralelogramo con un ángulo recto para mostrar que tiene cuatro ángulos congruentes [57]. La profesora apoya esta idea y pregunta cómo sería la justificación [58]. Ignacio comienza el análisis diciendo que el ángulo opuesto al ángulo recto de un paralelogramo también es recto (esto porque han demostrado que los ángulos opuestos de los paralelogramos son congruentes) [61, 63]. La profesora ilustra con una representación [Figura 7.7] lo dicho por Ignacio [62] y luego se refiere a un teorema para señalar que los otros dos ángulos también tienen que ser rectos [64]. Así, admite que la propuesta de Germán es una “buena” definición para rectángulo y luego pregunta cuál definición conviene adoptar. Nancy interviene para indicar que la definición propuesta por Darío parece ser la más apropiada pues con declarar un ángulo recto, se puede demostrar que los demás lo son [67, 69]. Sin saberlo explícitamente, Nancy ha usado un criterio de economía que es útil en la adopción de definiciones, cuando éstas se usan en demostraciones. Como la profesora explica, es una definición menos exigente a efectos de garantizar que una figura es un rectángulo [70].

En el Diagrama 7.9 ilustramos la participación legítima de los estudiantes al analizar la equivalencia entre definiciones y decidir cuál de ellas conviene adoptar. Germán tiene una participación relevante justificando cómo se puede usar su definición para deducir la que sugirió Darío. La participación de Luz también es relevante pues propone una vía de análisis que la profesora no ha contemplado; su idea desvía el curso de la conversación para justificar lo que la estudiante sugiere. Ignacio aporta una idea importante para el análisis propuesto por Luz, mientras que Nataly fundamenta la elección que hace de la definición que conviene al sistema. Las intervenciones de los cuatro estudiantes no son espontáneas sino guiadas por la profesora pero muestran que ellos han alcanzado cierto nivel en el estudio de la equivalencia de enunciados. Esta acción es quizás una de las más complejas en las que ellos tienen la oportunidad de participar, relacionada con las definiciones, aunque por suceder pocas veces apenas tienen un primer acercamiento a este tipo de actividad matemática.



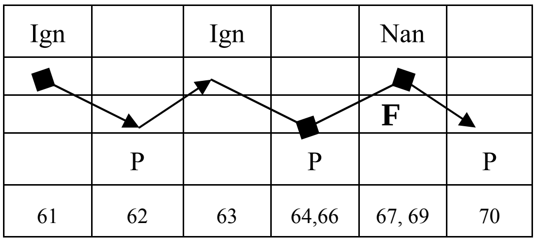


Diagrama 7.9: Participación legítima en la identificación de cuál definición conviene al sistema axiomático

7.3. Participación plena en la práctica de definir

Participación plena en la formulación de definiciones

Las interacciones correspondientes a la definición de interior de cuadrilátero, que se llevan a cabo hacia el final del curso, nos sirven para ejemplificar la participación plena de algunos estudiantes como miembros activos de la comunidad. En la planeación de las clases correspondientes a cuadriláteros, la profesora no tenía previsto discutir la definición de interior de cuadrilátero por lo que no había concebido una propuesta con la cual guiar la construcción colectiva de ésta. Tampoco suponía que los estudiantes hubieran estudiado alguna definición y por esa razón - cuando surgió el interés por ésta a raíz de una conjetura que formularon María y Efraín - no pidió recordarla sino que invitó a los estudiantes a proponer una definición, dando el espacio en la clase para que los estudiantes la formularan. A continuación vamos a analizar tres ejemplos de la participación de los estudiantes.

<u>Ejemplo 1:</u> Primeros intentos de formulación de la definición de interior de cuadrilátero.

En el siguiente extracto de conversación una primera propuesta de Germán, basada en la forma como se definió interior de triángulo, es el punto de partida de la interacción. Él, junto con Daniel y la profesora, contrastan la definición con representaciones propuestas por la profesora, en busca de una definición satisfactoria. El caso del cuadrilátero no convexo conduce a rechazarla y amplía el universo de representaciones de cuadriláteros en donde la definición debe ajustarse. Henry sugiere otra definición, con base en la forma como se definió conjunto convexo. La profesora la escribe en el tablero e invita a su revisión. Daniel presenta un contraejemplo que conduce a rechazarla.

42	P:	[…] Y entonces, ¿cómo definimos interior del cuadrilátero?	ConsDef
43	Germán:	Pues podría tomarse la intersección de… supongamos en ese	ConsDef

		caso… el interior del ángulo… no mentiras… se podría hablar de intersección de...	
44	P:	(a) ¡Ah, bueno! […], lo primero que se nos ocurre es tomar la definición de interior que tenemos para triángulo[19]. Interior de triángulo, ¿no?	ConsDef
		(b) Y si el cuadrilátero fuera así [Figura 7.8] podríamos tomarlo como tú propones. Podríamos decir: “Definición: el interior del cuadrilátero *ABCD* es la intersección de los interiores de los ángulos”. [Escribe la definición al tiempo que está diciéndola] ¿Y en ese caso funcionaría?	RepDef

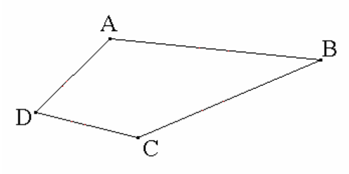


Figura 7.8

45	Germán:	Sí. En ese caso, sí.	IdPrRe
46	P:	¿Pero en este caso? [Figura 7.9] Este es un cuadrilátero.	RepDef

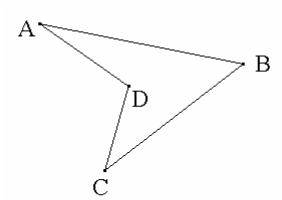


Figura 7.9

47	Daniel:	No, entonces no.	ReDefRe
		[…]	
63	Efraín:	¿Y ahí no se podría decir que un cuadrilátero es convexo si ninguno de sus ángulos… si tiene cuatro ángulos…?	ConsDef
64	P:	Estás dando otra definición para convexo… pero no para interior. [Henry alza la mano]. Henry.	ConsDef
65	Henry:	Todos lo puntos *X*, tales que *X* está entre dos puntos de dos lados diferentes del cuadrilátero.	ConsDef
		[…]	
69	P:	¡Ah!… conjunto de los *X*… […]. Bueno, entonces ahora dice Henry: el interior del cuadrilátero [escribe mientras habla] es el conjunto de puntos *X*, tal que/	ConsDef
70	Henry:	/*X* está entre dos lados/	ConsDef
71	P:	/se cumple Z - X – Y, donde *Z* y *Y* pertenecen a lados diferentes del	ConsDef

[19] Definición de interior de triángulo: int ΔABC = int $\angle A \cap$ int $\angle B$.

		cuadrilátero.	
72	Daniel:	No se cumple para ese de allá [Señala la Figura 7.10].	ReDefRe

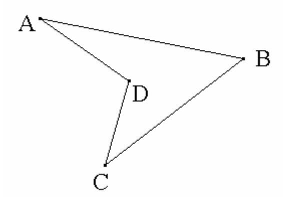


Figura 7.10

73	P:	No se cumple, ¿no? Porque si tomo acá [en el lado *AD*] y acá [en el lado *CD*] a *Y* y a *Z* y aquí a *X* [entre *Y* y *Z*]. [Complementa la representación; Figura 7.11]. […].	ReDefRe

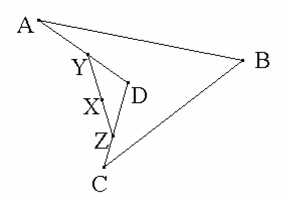


Figura 7.11

[P110:42-73]

Cuando la profesora pregunta cómo definir interior de un cuadrilátero [42], Germán evoca de inmediato, aunque no de forma muy clara, la definición de interior de triángulo, que a su vez se basa en la definición de interior de ángulo [43]. Por eso menciona la intersección de los interiores de los ángulos de la figura. La profesora le entiende la idea y la comunica de manera más clara para que los demás estudiantes interpreten a qué se refiere; luego, representa un cuadrilátero convexo y pregunta si al hacer la representación que sugiere la definición se visualiza el interior del cuadrilátero [44]. Aunque no hacen el ejercicio de sombrear el interior de los ángulos interiores del cuadrilátero, Germán confirma que su idea puede ser correcta [45]. A continuación, la profesora representa un cuadrilátero no convexo y nuevamente pregunta si para ese tipo de cuadriláteros sirve la definición que sugiere Germán [46]. De inmediato, Daniel expresa que la definición falla [47] probablemente porque evidencia que hay zonas del interior que no corresponden a la intersección de los ángulos interiores. Efraín se aventura a proponer una definición, pero confunde la tarea creyendo que se trata de definir cuadrilátero convexo [63], por lo que la profesora objeta su intervención [64]. Henry sugiere una propuesta diferente a la de Germán pero ésta también se cumple sólo para cuadriláteros convexos [70]. La profesora hace una adaptación a la formulación de Henry y en lugar de escribir: "… tal que *X* está entre dos puntos de dos lados diferentes del cuadrilátero" decide emplear la notación de interestancia: "… Tal que se cumple

Z- *X* - *Y*, donde *Z* y *Y* pertenecen a lados diferentes del cuadrilátero” [71]. Inmediatamente, Daniel rechaza la definición señalando un cuadrilátero no convexo que está representado en el tablero [72]; la profesora ilustra con un punto *X* por qué falla la definición [73].

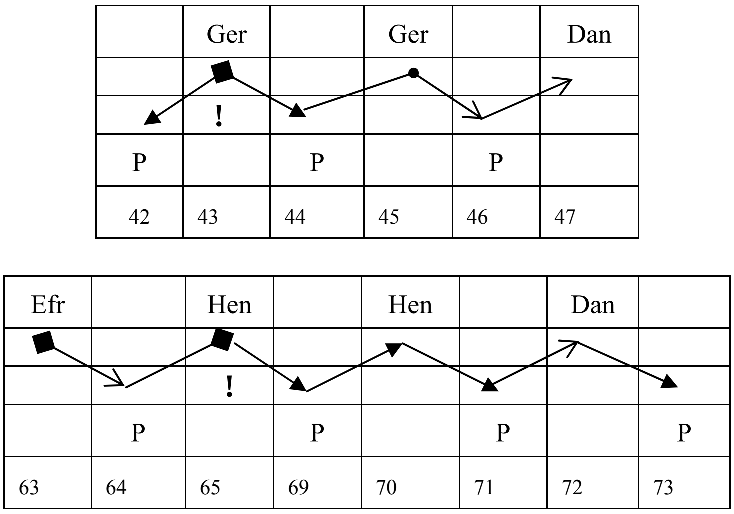


Diagrama 7.10: Participación plena en la construcción de la definición de interior de cuadrilátero. Intento 1

En el Diagrama 7.10 ilustramos la participación de los estudiantes. La hemos evaluado como plena, fundamentalmente porque la dirección de la conversación no está determinada por la profesora sino por las ideas que sugieren los estudiantes. A diferencia de los extractos con los que ilustramos la participación periférica legítima o legítima, la conversación fluye sin una dirección explícita de la profesora pues ella no tiene prevista una definición al respecto. Las ideas sugeridas por Germán y Henry son relevantes porque, aunque no conducen a la institucionalización de la definición, son originales y sugieren una vía para enfrentar la tarea. En la interacción se aprecia que la profesora acoge favorablemente las propuestas, contribuye a expresarlas más claramente y sugiere un contraejemplo que lleva a rechazarlas; pero cede la responsabilidad a los estudiantes de decidir qué proponer y de aceptar o rechazar las sugerencias. Particularmente, la participación de Daniel es genuina pues objeta con naturalidad las dos propuestas.

Ejemplo 2: Segundo intento de formulación de la definición de interior de cuadrilátero

Esta interacción sucede a continuación de la del extracto correspondiente al ejemplo 1 de esta sección. Germán y Aníbal, en sus puestos de trabajo, se concentran en la idea inicial de Germán y en cómo adaptarla para que sea una definición apropiada de interior de cuadrilátero que se ajuste al caso de los cuadriláteros convexos y no convexos. Después de la intervención de Henry, Germán pide la palabra y sugiere introducir una variación a su propuesta previa señalando exactamente cuáles ángulos tomar. Con ayuda de María y de la profesora, perfecciona su idea redactando una definición con base en uniones e intersecciones de ángulos. Al terminar de escribirla, la profesora identifica un problema relacionado con la notación, pues no encuentran una manera de redactar la idea en forma general.

75	Germán:	[…] O sea, acabamos de analizar algo acá [en su mesa de trabajo, con Aníbal]. No [se trata de] intersecar los cuatro ángulos que se pueden formar sino intersecar tres, el ángulo *DAB*, el ángulo *ABC* y el ángulo *BCD* [Figura 7.12]. Si se intersecan esos tres ángulos garantizaría que… sí, podría ser…	ConsDef
76	P:	¿Este? ¿$\angle DAB$? [Señala en la figura]. Interior de ese [$\angle DAB$], con interior de [señala con el dedo los ángulos $\angle ABC$ y $\angle BCD$].	RepDef

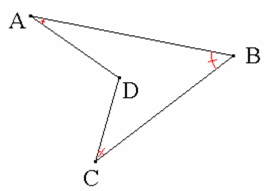


Figura 7.12

	[…]		
81	Estudiante:	Ahí sería unión/	ConsDef
82	María:	/La unión. [Varios hablan al tiempo].	ConsDef
83	Germán:	¡No!, ¡no! La unión de las intersecciones [Se ríen].	ConsDef
84	P:	A ver… una es el interior de éste ángulo *DAB* [colorea de rojo el interior] Bien. Después, ¿el interior de cuál?	RepDef
85	Germán:	*ABC/*	RepDef
86	P:	/De *ABC* [Lo colorea de azul].	RepDef
87	Germán:	[…]. Y el ángulo *BCD/*	RepDef
88	P:	[Colorea de verde el interior que menciona Germán].	RepDef
89	Germán:	/Entonces sería la unión de esos ángulos…	ConsDef
	[...]		
91	P:	Porque la intersección de esos tres ángulos miren lo que me da [Señala solo un trozo del cuadrilátero coloreado con los tres colores].	RepDef
	[...]		
94	Germán:	[…]. Entonces, podemos hablar de la intersección de esos tres ángulos, más la intersección de… pues… unión de… [Risas	ConsDef

		generales].	
95	P:	[…]. El interior del cuadrilátero *ABCD* es igual a la intersección de interior de ángulo *A*, intersección [va escribiendo la definición],	ConsDef
96	Germán:	Ángulo *A* intersección ángulo *C*/	ConsDef
97	P:	/Unido con/	ConsDef
98	Germán:	/la intersección del ángulo *A* con *B*… y/	ConsDef
99	P:	/¡Ay!, aquí es interior, interior ángulo *B* [Antepone el símbolo “int” antes de cada ángulo]/	ConsDef
100	Germán:	/unido con el interior del ángulo *B* intersección con el ángulo *C*… siempre es complicado [Risas generales].	ConsDef
101	P:	(a) [En el tablero quedo escrito: $int \ \square ABCD = (int \angle A \cap int \angle B \cap int \angle C) \cup (int \angle A \cap int \angle B) \cup (int \angle B \cap int \angle C)$].	ConsDef
		(b) Hay un pequeño problema.	ReDefRe
102	Germán:	¿Cuál?	
103	P:	¿Cómo se yo cuál es…?	ReDefRe
104	Julián:	Cuáles [vértices] me convienen.	ReDefRe
105	P:	Sí. Es decir, quién es *A*, *B* y *C* y qué propiedad cumplen para que yo escoja los ángulos que debo escoger y no escoja éste [$\angle D$].	ReDefRe
106	Julián:	¡Pequeño problema!	ReDefRe

[P110:75-106]

Germán cree haber resuelto el problema que tenía su primera propuesta de definición (ver ejemplo 1) indicando que sólo hay que referirse a la intersección de tres de los ángulos [75]. La profesora señala con el dedo qué regiones cubriría cada una de ellas [76], lo que hace evidente que no se cubre todo el interior. Un estudiante y María mencionan la unión como idea complementaria [81, 82] y Germán modifica su propuesta refiriéndose a la unión de algunas intersecciones [83]. Para aclarar de qué están hablando, la profesora, con la colaboración de Germán, decide sombrear de colores diferentes cada región y hacer visible la zona que se obtiene al intersecar los interiores de los tres ángulos [84 - 91]. Al apreciar el resultado, Germán hace una contrapropuesta sugiriendo agregar a la intersección de los tres ángulos la unión de algunas intersecciones [94]. Entre él y la profesora redactan una definición que se ajusta a la región correspondiente [95-101a]. Sin embargo, cuando Germán cree tener la definición apropiada, la profesora insinúa otro problema [101b, 103], que Julián identifica rápidamente [104]: la dependencia de la definición adoptada a la notación que usaron, pues si se cambian los nombres de los vértices, no queda claro a qué ángulos hay que referirse en las intersecciones parciales.

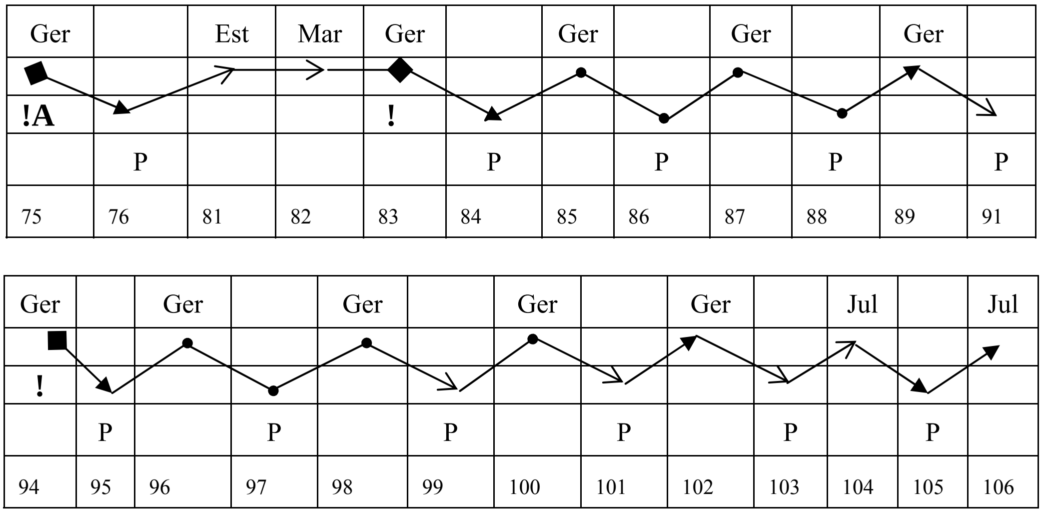


Diagrama 7.11: Participación plena en la construcción de la definición de interior de cuadriátero. Segundo intento

En el Diagrama 7.11 ilustramos el intercambio comunicativo que consideramos indicativo de una participación plena. Nuevamente, como en el ejemplo 1, la dirección de la conversación no está determinada por la profesora y es relevante por cuanto se avanza en la escritura de la definición de interior de cuadrilátero. A diferencia del ejemplo 1, en este caso, además de considerar la intervención de Gabriel [75] como original, también la evaluamos como autónoma y genuina. El estudiante participa espontáneamente buscando corregir la idea que había sugerido previamente y reacciona a la objeción de María sin esperar intervención de la profesora. Adicionalmente, una vez tienen una representación visual que ilustra el problema de la nueva propuesta, Germán tiene una nueva idea original con la cual pretende sortear la dificultad [94]. Es evidente que el liderazgo en la producción de la definición está en cabeza de Germán y no de la profesora. Ella apoya al estudiante, pero no lo guía. Por otro lado, las objeciones a la idea de Germán son sugeridas por María y Julián además de la profesora, ilustrando también una participación genuina de los estudiantes al corregir o rechazar las propuestas de los compañeros.

Ejemplo 3: Tercer intento de formulación de la definición de interior de cuadrilátero.

Este extracto de conversación tiene lugar en la clase siguiente a la que corresponde a los ejemplos 1 y 2 de esta sección. En vista de que en la clase anterior no se institucionalizó la definición de interior de cuadrilátero, Germán sigue pensando el asunto en su casa y lleva una nueva idea a la clase. La profesora le abre el espacio para exponer su nueva propuesta que él sustenta con la verificación de representaciones de cuadriláteros convexos y no convexos. Aunque la profesora pone algunos reparos a la notación usada por Germán, acepta la definición y resalta la idea principal como la salida para lograr una definición apropiada. Gracias a la discusión, logran aproximarse a una definición aceptada por todos.

42	Germán:	(a)	Lo que pasa es que… teniendo el problema que teníamos de este tipo de cuadriláteros [Dibuja dos cuadriláteros y señala el no convexo; Figura 7.13].	RepDef
		(b)	yo intenté buscar algo que me solucionara… para no tener que mencionar éste ángulo [$\angle ADC$], […] Entonces yo… mirando eso, definí el interior del cuadrilátero como la intersección del interior del ángulo *DAB*, con el interior del ángulo *DBA* unido a la intersección del interior del ángulo *CBD*, con el interior del ángulo *BDC* [Escribe: $\{\hat{i}nt\angle DAB \cap \text{int}\,\angle DBA\} \cup \{\hat{i}nt\angle CBD \cap \text{int}\,\angle BDC\}$].	ConsDef
		(c)	Y eso, pues se me cumplía para los dos cuadriláteros. [Tanto] para un cuadrilátero normal [convexo], como para este tipo de cuadrilátero [no convexo] porque lo que hice yo fue mirar, pues, los triángulos que se podrían llegar a formar. En este caso los triángulos que se podrían formar son este triángulo [*DAB*] y éste [$\triangle DBC$].	RepDef

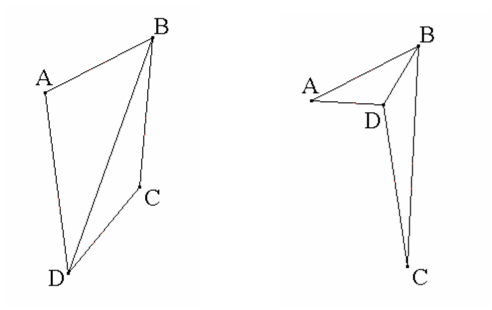


Figura 7.13

43	P:	*DAB* y *DBC*… ¡claro! porque se forman dos triángulos; entonces en realidad es el interior de los triángulos cuya unión es…	ConsDef
44	Germán:	¡Aja! Entonces yo lo miré así… pues… aparte de estos dos, miré otro par de casos en donde también [servía].	RepDef
45	P:	Pero, ¿qué pasa si este es *D* y este es *A* [intercambia los nombres de esos vértices en el cuadrilátero no convexo].	ReDeRe
	[…]		
49	Germán:	Sí, ese fue el problemita que encontré. Entonces, no se… yo lo intenté generalizar diciendo que era la unión de la intersección de los	ConsDef

ángulos formados por una diagonal… o por/

50 P: (a) /pero ya me diste una idea. La idea es conformar triángulos… y el interior del polígono es la unión de los interiores de los triángulos que se forman… ConsDef

(b) ¡Ah…! pero entonces… [Complementa la figura con la diagonal exterior *BD*]. [Figura 7.14]. ReDeRe

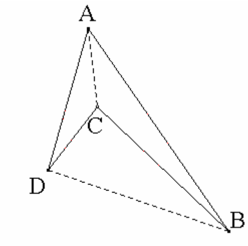


Figura 7.14

51 Germán: Espérate… Por eso yo lo tomé con una sola diagonal… y con una sola diagonal, asumiendo que se tenga que tomar es ésta [*AC*] Entonces, de ese modo yo lo miré. No dije que si las diagonales, sino desde ese punto… con una sola diagonal. ConsDef

52 P: Sí… Pero bueno, ahí está más o menos la idea. […].

[P111: 42-52]

Germán comienza señalando que él intentó buscar cómo proponer una definición que sirviera para los cuadriláteros no convexos, de tal forma que no tocara hacer referencia al ángulo *ADC* [Figura 7.13 derecha]. Esto lo llevó a referise a la unión de intersecciones de interiores de ángulos, escogiendo algunos no conformados por los lados del cuadrilátero sino por una diagonal interior y un lado, aunque él no se refiere al término ‘diagonal’ Luego menciona que después de idear la definición la examinó en un cuadrilátero convexo y en uno no convexo [42]. La profesora valora y apoya la sugerencia de considerar dos triángulos que unidos conformen el cuadrilátero y mencionar la unión de los interiores de dichos triángulos [43]. Para dar más peso a su propuesta, Germán dice que la verificó en varios cuadriláteros [44]. Después, la profesora hace referencia un problema similar al de la definición propuesta en la clase anterior: la notación empleada no asegura la generalidad de la definición [45]. Sin embargo, Germán ya ha pensado este problema y sugiere referirse a la diagonal del cuadrilátero para unir los interiores de los triángulos que se forman [49]. La profesora reconoce que Germán ha dado una idea muy buena [50a], pero de pronto le asalta una duda que expresa representando una diagonal externa de un cuadrilátero no convexo [50b]. Nuevamente Germán, quien ha estudiado esa situación previamente, explica que por tal razón él se refiere a una sóla diagonal, la interior en los cuadriláteros no convexos [51].

En el Diagrama 7.12 ilustramos la participación de Germán, quien interactúa con la profesora como si fuera otro experto de la comunidad. Son varios los elementos que nos llevan a considerar como plena su participación, pero principalmente porque el estudiante asume la tarea como un reto personal, que va más allá de atender un requerimiento de la profesora. Por eso es insistente en la formulación de propuestas de definición y pide tiempo de la clase para exponer sus ideas. De esta forma, él dirige el curso de la conversación con la profesora y está preparado para atender a los reparos que ella le hace. La participación es relevante, no solo porque propone ideas que permiten avanzar en la tarea, sino porque logra una manera exitosa de formular la definición. Es genuina, no solo porque el estudiante defiende su propuesta, sino porque ha previsto cómo resolver dificultades que la idea inicial tiene. Es autónoma, pues Germán interviene espontáneamente, motivado por un interés personal en sacar adelante la tarea del grupo, interés que lo lleva a seguir trabajando en el asunto por fuera del tiempo de la clase. Es original, pues sugiere una idea creativa, propia y útil. Adicionalmente, la afiliación a la comunidad se expresa en la indagación genuina que lleva a cabo.

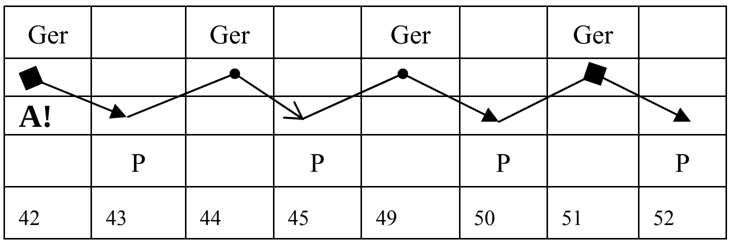


Diagrama 7.12: Participación plena en la construcción de la definición de interior de cuadrilátero. Tercer intento

Participación plena en el uso de definiciones en demostraciones

Algunas interacciones para demostrar el teorema “si un triángulo es isósceles las alturas correspondientes a los lados congruentes son congruentes”, que tuvieron lugar en tres clases diferentes, nos sirven para ilustrar la participación plena de algunos estudiantes en el uso de la definición de altura en la demostración. Nancy y Darío asumen el control del uso apropiado de la definición de altura, especialmente en las representaciones con las que la profesora y otros estudiantes se apoyan al momento de escribir la demostración. Gracias al papel que desempeñan, un resultado que se había prácticamente institucionalizado se revisa para evitar incurrir en un error.

El primer intercambio comunicativo tiene lugar cuando la profesora decide repasar cómo habían dado comienzo a la demostración colectiva de la conjetura correspondiente al enunciado del teorema, en una clase previa. La profesora usa una representación gráfica en la que las alturas intersecan los lados del triángulo [Figura 7.15] y escribe las primeras afirmaciones de la demostración. Nancy corrige una de las afirmaciones para que quede explícito que las alturas son perpendiculares a las rectas que contienen los lados del triángulo y no únicamente a los lados.

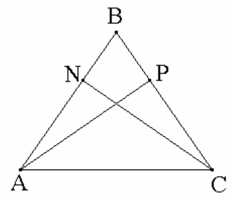


Figura 7.15

A pesar de la observación de Nancy, escriben los pasos restantes de la demostración asumiendo como dadas las interestancias *A-N-B* y *C-P-B* sin considerar que estas relaciones se tendrían sólo en un triángulo isósceles acutángulo[21].

9	P:	[…] Habíamos comenzado con [un triángulo ABC y] dos segmentos congruentes, como dado, [$\overline{AB} \cong \overline{CB}$]. […]… ¿qué más habíamos puesto? ¡Ah! Que *CN* y *AP* son alturas, como dado… [Figura 7.15].	CondIni
	[…]		
18	P:	*CN* y *AP* son las alturas a los lados congruentes. […]. Y, llegamos a que… eh… nombramos un ángulo recto [$\angle APC$].	CondSuf
	[…]		
20	P:	Entonces el segmento *CN* es perpendicular al segmento *AB* y el segmento *AP* es perpendicular al segmento *BC*, por definición de altura.	DefDem
21	Nancy:	Pero los pusimos como perpendiculares a las rectas [y no a los segmentos].	DefDem
22	P:	Gracias. ¿Por qué fue que hicimos eso?	IdPrDe
23	Nancy:	Porque no sabemos si la altura cae en el lado [del triángulo].	IdPrDe
24	P:	Y no sabemos si mi dibujo… no podemos usar información que el dibujo me esté dando. [Escribe: 3. $\overline{CN} \perp \overline{AB}$, $\overline{AP} \perp \overline{BC}$; Def. de altura (2)].	DefDem
		[…]	

[P75:18-24]

[21] No incluimos el estracto correspondiente a la producción de la demostración porque no es pertinente para ilustrar la participación que estamos analizando.

Ante un cuestionamiento a la demostración hecha, en la siguiente clase Darío comenta que no aseguraron que la altura corta al lado pero sí usaron esa información en la demostración; objeta el uso de información extraída de la figura, sin la debida justificación. En lugar de hacer un estudio de casos según las diferentes posiciones de los puntos *A, B, N* y *C, B, P,* según el tipo de triángulo, Ignacio propone demostrar que las únicas interestancias posibles son las que se asumieron como ciertas (*A-N-B* y *C-P-B*). Para ello, sugiere considerar en diferente orden los puntos *A, N* y *B* sobre la recta *AB*, e ir descartando posibilidades. Daniel elabora una argumentación con la que justifica que la interestancia *N-A-B* no es posible [Figura 7.16a].[22]

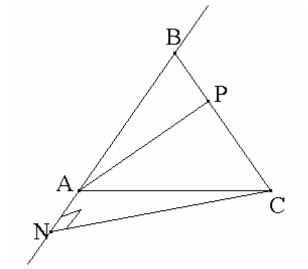


Figura 7.16a

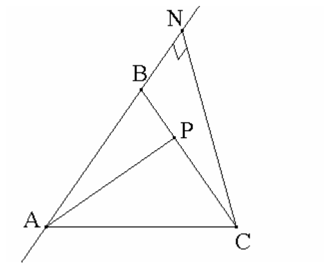


Figura 7.16b

De manera similar, descartan la opción *N=A*. No consideran el caso *N=B* porque si se tiene esa igualdad, las alturas coinciden con los lados del triángulo y la demostración es trivial.[23] Al momento de considerar el caso *A-B-N* [Figura 7.16b] la profesora dice que el análisis sería similar al caso *N-A-B*, lo que no es una afirmación precisa, pues si se considera el $\angle ABC$ externo al ΔBNC sí es posible que el $\angle B$ sea mayor que el $\angle BNC$, cuando el triángulo isósceles es obtusángulo. La profesora no cae en la cuenta de ese detalle en ese momento y el grupo concluye que sólo es posible la interestancia *A-N-B.* La conclusión sorprende a Darío quien, en su mesa de trabajo hace rápidamente una figura en Cabri en la que representa un triángulo obtusángulo y es evidente que se tiene la interestancia *A-B-N.* Como la clase ha concluido, Darío muestra la construcción a la profesora quien le da espacio al comenzar la clase siguiente para mostrar el contraejemplo.

---

[22] Daniel propone considerar el $\angle BAC$ como ángulo externo al ΔNAC; por el teorema del ángulo externo, el $\angle BAC$ resulta ser mayor que el $\angle N$, que es recto pues es el que forma la altura con la recta *AB*; pero como el ΔABC es isósceles, los ángulos $\angle$BAC y $\angle$BCA son congruentes; esto significa que el ΔABC tiene dos ángulos mayores de 90, lo cual es imposible.

[23] En realidad ese es el caso en el que el triángulo es rectángulo, pero en ese momento la profesora obvia la aclaración.

19	P:	[En una clase posterior a la que demostraron el teorema considerando las interestancias *A-N-B, C-P-B,* sin haber hecho la justificación correspondiente]. Bien. Hicimos la demostración de éste [teorema]. Y mi pregunta es si ustedes repasaron la demostración […]… [Pausa]. Bueno, entonces… ¿está bien hecha nuestra demostración? […]	EvalViaDem
		[…]	
33	Darío:	Profe, una pregunta.	EvalViaDem
34	P:	Yo le veo un pequeño problema. [Darío alza la mano] ¿Darío?	EvalViaDem
35	Darío:	[…] ¿Cómo podemos asegurar que la altura corta con el lado [del triángulo]?	DefDem
36	P:	Ese es el pequeño problema que yo le veo ¿Cómo sabemos que el punto *N*, […]… está entre *B* y *A*?... porque lo usamos ¿Sí? [Figura 7.15]. [Pausa]. Ese era el pequeño problema… muy bien Darío. Entonces, ¿cómo analizamos? […]	DefDem
		[…]	

[P87:19-36]

12	Darío:	[En la clase siguiente, después de haber justificado de manera incorrecta que la única opción era que las alturas correspondientes a los lados del triángulo intersecaran dichos lados, Dario proyecta la imagen de Cabri que tiene en su calculadora para que la vean todos: Figura 7.17a]. Entonces, pues… a mi me había quedado la duda, porque yo había visto un triángulo que era isósceles, pero que [alguna de sus alturas] no cortaba precisamente a… al segmento. [Se refiere al lado del triángulo]. Entonces, empecé a hacerlo [arrastrando los vértices del triángulo ABC] y entonces, si encontré uno que… pues cuando este ángulo [*B*] era… era mayor [obtuso] [Figura 7.17b], entonces, pues, las alturas cortaban en…	ExplorCabri

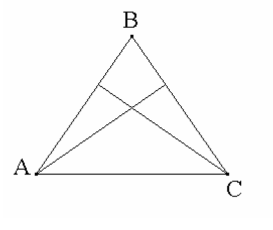


Figura 7.17a

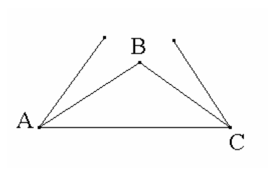


Figura 7.17b

[…]

24	P:	[…] Entonces… consecuencia… ¿qué sucede? ¿En qué nos afecta lo que acaba de decir Darío?	DefDem
25	Daniel:	Toca modificar el teorema.	DefDem
	[…]		
28	P:	¿Sí? Y toca devolvernos al teorema que demostramos, usando ese hecho, a ver si la demostración dependía o no de tener las alturas	DefDem

en la posición que queríamos. […]

[P90:12-28]

En la primera interacción, al recordar los primeros pasos de la demostración, la profesora se refiere a la perpendicularidad de las alturas a los lados del triángulo, justificando esa afirmación con la definición de altura: "$\overline{CN}$ es perpendicular al segmento *AB* y el segmento *AP* es perpendicular al segmento *BC* por definición de altura" [20]. Nancy aclara que no habían escrito que los segmentos eran perpendiculares a los lados del triángulo sino a las rectas que contienen los lados [21]. La profesora le pregunta el por qué de la necesidad de esa aclaración [22] y la estudiante afirma que no se puede asegurar que las alturas intersecan los lados del triángulo [23]; la profesora complementa la explicación recordando que no pueden basarse en información extraída de la representación [24][24], y luego guía la escritura del resto de la demostración en donde hacen uso de la interestancias *A-N-B* y *C-P-B* sin atender las implicaciones de la observación de Nataly. En la clase siguiente, con las intervenciones 19 y 34 la profesora impulsa una evaluación de la demostración hecha en la clase anterior y Darío se encarga de comentar la debilidad de la demostración. Con la expresión: "profe, una pregunta"[25] [33] introduce su evaluación en la que hace referencia a que no justificaron que la altura corta al lado [35]. La profesora avala la observación y, ante una sugerencia de Ignacio, pregunta cómo podría demostrarse que se tiene la interestancia *A-N-B* [36]. Algunos estudiantes dan una justificación que todos parecen considerar apropiada, excepto Darío quien se muestra incrédulo y decide proponer, en la siguiente clase, un contraejemplo [12][26]. La profesora pide identificar las consecuencias de lo dicho por Dario [24][27] y Daniel sugiere revisar la demostración del teorema [25]. La profesora acepta la sugerencia y la complementa proponiendo analizar en dónde usaron que las alturas intersecaban a los lados del triángulo [28].

En el Diagrama 7.13 ilustramos la participación de los estudiantes en las interacciones relacionadas con el uso de la definición de altura en la demostración

[24] Esta intervención corresponde al documento primario P75.

[25] En realidad, Darío no pretende hacer una pregunta sino manífestar un desacuerdo con la demostración. La expresión "una pregunta" suele ser usada por varios estudiantes de la clase, especialmente por Leopoldo y Darío, cuando quieren controvertir una idea.

[26] Esta intervención corresponde al documento primario P90.

[27] Esta intervención corresponde al documento primario P90

del teorema[28]. En los tres fragmentos de conversación, Nancy o Darío ejercen un control sobre lo que la profesora y los demás compañeros dicen o hacen, que es indicativo del papel asumido por un experto. Consideramos que es una participación plena pues sus objeciones son relevantes y genuinas: Nancy pide que la afirmación correspondiente a la perpendicularidad de los segmentos que representan las alturas del triángulo se ajuste a la definición y Dario objeta la demostración del teorema y la justificación de que la interestancia *A-N-B* es la única opción, por hacer uso de una propiedad de las alturas de un triángulo isósceles que no es generalizable [Figura 7.16]. La intervención de Nancy conduce a corregir una afirmación de la demostración y los planteamientos de Darío, apoyado por Daniel, llevan a replantear la demostración completa. Adicionalmente, la participación de Nancy y la segunda intervención de Dario son autónomas y movidas por un interés personal de contribuir al cumplimiento de las normas establecidas en clase para la escritura de las demostraciones; se percibe un desplazamiento de la responsabilidad de la veracidad de las conclusiones que sacan, de la profesora hacia los estudiantes. En ese sentido, ahora hay más expertos en la comunidad de la clase y no sólo la profesora.

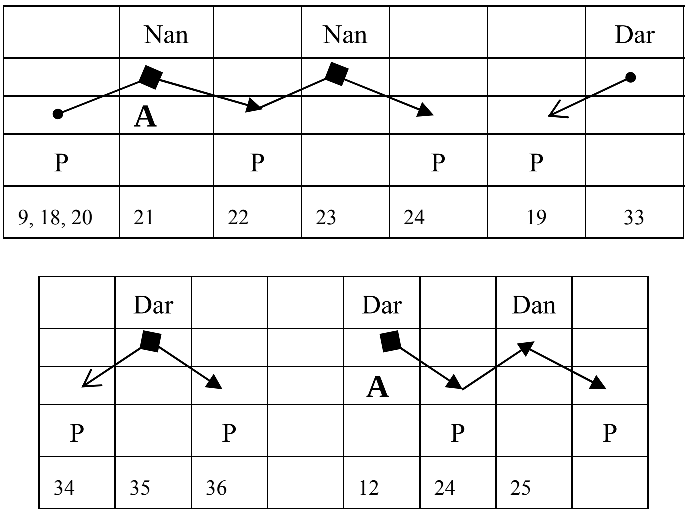


Diagrama 7.13: Participación plena en el uso de una definición en una demostración

7.2. CONJETURAR

La formulación de conjeturas, como resultado de la resolución de problemas con el uso de Cabri, es una de las prácticas comunes en la clase de geometría plana pues en la planeación de la enseñanza experimental se procuró que la mayoría de

[28] Hemos dejado intervenciones sin conectar, pues los extractos de interacción corresponden a clases diferentes.

los enunciados que se sometieran a discusión fueran fruto del trabajo experimental de los estudiantes o surgieran como una necesidad a la hora de validarlos. La distancia entre las formulaciones que los estudiantes escriben para comunicar sus resultados y lo que podría ser considerado un enunciado geométrico que puede ser demostrado en el marco del sistema axiomático, hace que la profesora lidere diferentes acciones para interpretar los enunciados, adecuarlos, evaluarlos, verificarlos y admitirlos como ciertos, antes de proponer demostrarlos. Las rutinas en las que los estudiantes intervienen tienen diferentes grados de sofisticación y, como lo analizamos en el capítulo seis, van desde la revisión de la notación o una palabra usada, hasta buscar una reformulación de la conjetura en forma de expresión general. Son reflejo de la complejidad de la tarea de ajustar las ideas que sugieren los estudiantes a la formulación de enunciados propios de la producción de expertos en matemáticas, con los cuales se pueda avanzar hacia la demostración.

En esta sección, damos cuenta de la evolución de la participación de los estudiantes en tres de las rutinas que tienen que ver con formular adecuar y evaluar las conjeturas que se discuten colectivamente. Como se puede apreciar en el análisis de las finalidades de participación (capítulo seis), las interacciones que se llevan a cabo en los quince episodios que usamos para el análisis a profundidad son diversas, justamente porque cada episodio parte de un problema que da lugar a la formulación de conjeturas y la clase gira alrededor del estudio de éstas. Una revisión detallada de las finalidades de participación, en busca de indicadores de evolución, nos permite hacer las siguientes consideraciones:

- Las acciones en las que la participación de los estudiantes es principalmente periférica legítima son: identificar semejanzas (Semeja) y diferencias (Difere); establecer relaciones entre la conjetura y el enunciado o la pregunta del problema (ConjPr) o el sistema axiomático (ConjSi); revisar la notación empleada (Notaci), estudiar si el enunciado tiene forma condicional (Condici), o si le faltan o sobran propiedades (Enunci); reescribir conjeturas para: hacer explícita la estructura condicional si-entonces (Format), agregar o suprimir propiedades (Reform), transformar en enunciados afirmativos aquellos que incluyen negaciones (Afirma), o lograr una expresión más general (GeneralEnun). En la mayoría de ocasiones, es la profesora quien se encarga de dirigir la conversación al respecto y los estudiantes intervienen principalmente respondiendo preguntas que ella les hace. Ellos tienen apenas un primer acercamiento, gracias a intervenciones poco frecuentes, que distan mucho de posibilitar su avance hacia una práctica como expertos. Sin embargo decidimos reportarlas en el capítulo seis pues caracterizan rutinas propias de la comunidad en las que los estudiantes ganan elementos para enfrentarse a la tarea en futuros cursos quizás de forma más genuina, con mayor relevancia, autonomía y originalidad.

- Las acciones en las que los estudiantes tienen mayor oportunidad de evolucionar, de una participación periférica legítima a una participación legítima o plena, corresponden a: la formulación de la primera versión de las conjeturas, fruto de la resolución de problemas (ForIni); el establecimiento de si la conjetura se admite y vale la pena demostrarla, (los códigos Acepta, Ejempl, Contraej, Noejem y Deduci nos servirán de guía para analizar esta última acción); y la evaluación de la concordancia entre la construcción realizada al momento de resolver el problema y la conjetura propuesta (ConjCons). En las acciones mencionadas en este párrafo centramos el análisis de la evolución, aunque eventualmente hacemos mención a otras acciones para enriquecer la discusión.

7.2.1. Participación periférica legítima en la práctica de conjeturar

Participación periférica legítima en la primera versión de la formulación de las conjeturas

El análisis de la participación de los estudiantes en la primera formulación de las conjeturas está basado en el momento en que la profesora expone a la clase las producciones de los grupos e invita a su revisión. Hacemos referencia fundamentalmente a la relevancia y originalidad para establecer el tipo de participación, pues no tenemos información para identificar si la participación es genuina o autónoma. Nos centramos en el Episodio 4 para ilustrar cómo es la participación periférica legítima de los estudiantes, la cual ocurre principalmente en las clases iniciales del semestre.

En el Episodio 4 la profesora pide a los estudiantes resolver el siguiente problema, formular una conjetura y justificar la respuesta:

> Sean $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BE}$ rayos opuestos y $\overrightarrow{BK}$ otro rayo. Sean $\overrightarrow{BG}$ y $\overrightarrow{BD}$ las bisectrices de los ángulos $\angle ABK$ y $\angle KBE$ respectivamente, ¿Cuál debe ser la posición del $\overrightarrow{BK}$ para que la medida del $\angle GBD$ sea la máxima?

Los estudiantes, distribuidos en parejas, formulan seis conjeturas en las que se evidencian diferencias que nos permiten analizarlas según su cercanía con un enunciado elaborado por un experto.[29] A continuación nos referimos a ellas, agrupadas en el orden en que fueron presentadas por la profesora.

> Conjetura 1: Si $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BE}$ son rayos opuestos y $\overrightarrow{BK}$ otro rayo y $\overrightarrow{BG}$ y $\overrightarrow{BD}$ son las bisectrices del $\angle ABK$ y $\angle KBE$ respectivamente, entonces la posición del rayo *BK* no influye en la medida del ángulo *GBD*.
>
> Conjetura 2: Si $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BE}$ son rayos opuestos y $\overrightarrow{BK}$ otro rayo y $\overrightarrow{BG}$ y $\overrightarrow{BD}$ son las bisectrices del $\angle ABK$ y $\angle KBE$ respectivamente, entonces para cualquier posición del rayo *BK* la medida del ángulo *GBD* es la misma.

La profesora menciona que el antecedente de las conjeturas 1 y 2 es una copia casi literal de las condiciones dadas en el enunciado del problema y que la conclusión, en ambos casos, únicamente alude a la invarianza de la medida del $\angle GBD$, de manera informal, lo que "dificulta" avanzar hacia la demostración. En efecto, es probable que los estudiantes no hagan una caracterización de la invarianza del ángulo usando el lenguaje geométrico porque aún no tienen claro cuál es el trabajo que se va a hacer con las conjeturas y entonces no ven la necesidad de hacerlo.

> Conjetura 3: Si $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BE}$ son rayos opuestos y $\overrightarrow{BK}$ otro rayo y $\overrightarrow{BG}$ y $\overrightarrow{BD}$ son las bisectrices del $\angle ABK$ y $\angle KBE$ respectivamente, entonces la medida del $\angle GBD$ es siempre 90.

La Conjetura 3 también tiene como antecedente una copia casi literal del enunciado del problema pero la conclusión se encuentra expresada en un lenguaje más próximo al lenguaje geométrico, ya que hace referencia a la medida del $\angle GBD$. La profesora explica que los estudiantes lograron una expresión condicional que expresa mejor que las anteriores conjeturas la dependencia entre dos propiedades geométricas, aunque la inclusión del término "siempre", sobra pues es un rezago innecesario de la exploración dinámica.

> Conjetura 4 El $\angle GBD$ está formado por las bisectrices de los ángulos $\angle ABK$ y $\angle KBE$, siendo $\angle ABK$ y $\angle KBE$ adyacentes y suplementarios, entonces la medida del $\angle GBD$ es siempre 90.

A diferencia de las anteriores, los estudiantes que formulan la Conjetura 4 se apartan del enunciado del problema para expresar el antecedente de tal forma que remplazan la descripción de la construcción inicial por la caracterización de los

[29] Al presentar públicamente las conjeturas, la profesora no menciona qué pareja de estudiantes la formuló por lo que en esta oportunidad no tenemos como saber cuántos grupos propusieron la misma conjetura.

ángulos que se forman, mencionando que son "adyacentes y suplementarios". No tenemos elementos para decir qué motivó a los estudiantes a redactar el antecedente de esta manera, pero especulamos que quizá pretendían darle un carácter "geométrico" al enunciado procurando una frase parecida a la que se podría encontrar en un texto. Aún cuando esta modificación puede verse como un indicador de una conjetura mejor elaborada, y la profesora valora este esfuerzo públicamente, también explica que mencionar las propiedades de los ángulos $\angle ABK$ y $\angle KBE$ tiene consecuencias poco favorables para la demostración que posiblemente los estudiantes aún no entrevén, como tener que usar las definiciones de ángulos adyacentes y suplementarios como garantes de las propiedades que se afirman y no la condición de par lineal que facilita la demostración. Por otro lado, ella dice que en esta conjetura también se incluye el término "siempre" en el consecuente, de manera innecesaria.

> Conjetura 5: Si $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BE}$ son rayos opuestos y $\overrightarrow{BK}$ otro rayo y $\overrightarrow{BG}$ y $\overrightarrow{BD}$ son las bisectrices del $\angle ABK$ y $\angle KBE$ respectivamente, entonces la medida del $\angle GBK$ más la medida del $\angle KBD$ es igual a 90 y la medida del $\angle ABG$ más la medida del $\angle DBE$ es también igual a 90.

La Conjetura 5 tiene el antecedente muy similar al enunciado del problema pero la conclusión se aparta de la respuesta a la pregunta. En lugar de referirse a la medida del $\angle GBD$, los estudiantes mencionan la suma de las medidas de dos pares de ángulos. La profesora dice que esta conjetura refleja una exploración probablemente más amplia que la hecha por los otros grupos pues parece que los estudiantes no sólo se limitaron a evaluar el ángulo que se pedía sino que midieron cada uno de los ángulos de la figura y sumaron las medidas por pares. Sin embargo, desde nuestro punto de vista, no es claro si los estudiantes visualizaron el ángulo al que hace referencia la pregunta y no quisieron referirse a él o no cayeron en cuenta que tenían que referirse a ese ángulo. En todo caso, la profesora aprovecha la propuesta de este grupo para insistir que el objetivo de los problemas es lograr variedad en las conjeturas para tener suficiente información que analizar.

> Conjetura 6: Si dos ángulos forman par lineal entonces el ángulo formado por las bisectrices respectivas es recto.

La Conjetura 6, escrita por Ignacio y Nancy, dista mucho de las demás. Es una formulación propia de un experto. Parece que, a diferencia del resto de estudiantes, ellos conocían el teorema de antemano pues al comenzar el trabajo en grupos Ignacio le recordó a Nancy que el semestre anterior lo habían estudiado. En ese sentido, no podemos considerar la conjetura como una propuesta original de los estudiantes y la descartamos de la caracterización de una participación periférica legítima. En la presentación pública de las conjeturas, la profesora la usó como modelo de referencia de una conjetura ‘bien formulada’.

En síntesis, todos los grupos formulan, explícita o implícitamente, expresiones condicionales de la forma si-entonces haciendo referencia a una relación de dependencia entre propiedades. Las propuestas permiten a la profesora impulsar la actividad matemática en la clase y avanzar con alguna intervención de los estudiantes en la formulación de un teorema que se incluye en el sistema axiomático después de la producción colectiva de la demostración. Sin embargo, caracterizamos la participación de los estudiantes como periférica legítima pues, a excepción de la Conjetura 6, los enunciados son poco relevantes, con formulaciones propias de la inexperiencia y la falta de visión del trabajo posterior con los enunciados. Las conjeturas tienen tres características que reflejan dicha inexperiencia: incluyen lenguaje informal en las conclusiones (“la medida del $\angle$ángulo *GBD* es la misma”; “la posición del rayo BK no influye en la medida del $\angle GBD$”), introducen términos que aluden a situaciones temporales propias de una exploración dinámica con el programa Cabri (“la medida del ángulo GBD es siempre 90”) y no se refieren, excepto en el caso de la Conjetura 6, a las propiedades geométricas de la construcción, sino a la construcción misma.

Participación periférica legítima en la evaluación de la aceptabilidad de las conjeturas

En el Episodio 4, la participación de los estudiantes en la evaluación de la aceptabilidad de las conjeturas es mínima. La profesora se encarga de orgAnízar las conjeturas para socializarlas, compararlas estableciendo semejanzas y diferencias entre ellas y evaluarlas con relación a la pregunta formulada, a la cercanía de la redacción con la formulación de un teorema y a su aceptabilidad. Al ir refiriéndose a cada una de ellas, llama la atención de los estudiantes en aspectos específicos y envía mensajes sobre cómo espera que, en el futuro, éstas sean formuladas. Por ejemplo, les dice que, a pesar de estar usando Cabri como contexto de exploración, deben redactar la conjetura en términos del sistema axiomático que se espera construir y no en términos ‘dinámicos’ propios de la actividad experimental con el programa. Los estudiantes escuchan y asienten cuando la profesora les pregunta si entienden.

Participación periférica legítima en la evaluación de la concordancia entre la construcción y la conjetura

Al planear la enseñanza experimental y, dado que los problemas se debían resolver con geometría dinámica, se consideró que una de las estrategias que podría implementarse para apoyar la diferenciación del estatus operatorio (Duval, 1991) entre el antecedente y el consecuente de una conjetura, era que los estudiantes relacionaran el antecedente con las propiedades impuestas a la figura, por construcción o por arrastre, y el consecuente con las propiedades que resultan de dicha imposición. Durante el desarrollo del curso, la profesora impulsó conversaciones tendentes a establecer la diferencia, aunque la no concordancia entre la construcción y la conjetura no era motivo para descartar conjeturas. El siguiente extracto del Episodio 5 ilustra la participación periférica legítima de los estudiantes en dicha práctica, al referirse a conjeturas relacionadas con el siguiente problema:

> Sean $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ rayos opuestos y $\overrightarrow{AD}$ otro rayo ¿Es posible determinar un punto E en el mismo semiplano en el cual está D, para el que $\angle BAD$ sea complementario con el $\angle CAE$?

Una representación de la situación, la cual no se entregó a los estudiantes se puede ver en la Figura 7.18.

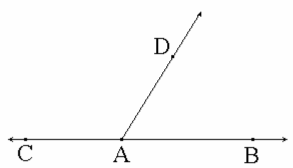


Figura 7.18

La profesora escribe en el tablero la conjetura propuesta por Jaime y Julián: "Si $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son opuestos y sea $\overrightarrow{AD}$, entonces existe un punto E en el semiplano en el cual está D tal que $m\angle EAD = 90$ y $\angle EAC$ y $\angle DAB$ son complementarios"; luego, pide a Julián y Jaime explicar a los demás compañeros la construcción que dio resultado a la conjetura e intenta que los estudiantes establezcan la concordancia o no de la conjetura con la construcción.

6	P:	[…]. [Después de escribir la conjetura en el tablero]. Esta es la conjetura del grupo A [conformado por Jaime y Julián]. Bueno, mi pregunta es: ¿qué construcción hicieron ustedes?	ConjCons
7	Julián:	Bueno, nosotros lo que hicimos fue tratar de encontrar la posición de [el rayo] *AE*.	ConjCons
	[…]		

11	Julián:	[…] entonces, lo primero que hicimos fue tomarle la medida a este ángulo [$\angle DAB$]. Después, en 'Calcular', hicimos 90 menos esta medida [m$\angle DAB$] y nos dio 32,85. Entonces construimos otro rayo, en esta parte, encima del rayo *AC*, acá encima, [en el mismo semiplano donde está D] y con la herramienta de rotación, pues… eh… primero le dimos rotar así con esta medida [32,85].[30]	ConjCons
	[…]		
15	Julián:	Bueno, listo, rotamos y quedó la construcción. Y comenzamos a mover [el rayo *AD*] y vimos que [la suma de las medidas de los ángulos complementarios] se mantenía [igual]… movíamos el ángulo y aquí se mantenía la suma, entonces… tomamos la medida de éste [$\angle EAD$], y vimos que era 90, entonces lo que dijimos era que… si… o sea… hiciéramos lo que hiciéramos, este ángulo se iba a mantener de 90.	ConjCons
16	P:	Bueno, entonces mi pregunta es: ya escucharon lo que ellos hicieron, [el grupo A]. […]. Mi pregunta es si la conjetura concuerda con la construcción que hacen. […]. Entonces, lo que viene antes de la palabra "entonces" es lo que ellos supuestamente construyeron, y lo que viene después de la palabra "entonces" es lo que supuestamente resulta. Entonces, al haber construido estas dos cosas [los rayos opuestos] y ésto, [el rayo *AD*] entonces, encuentran *E,* tal que se cumple ésto [el $\angle EAD$ de 90] y se cumple ésto [$\angle EAC$ y $\angle DAB$ complementarios]. ¿Es correcta la conjetura con respecto a lo que ellos hicieron?	ConjCons
17	Julián:	No pues… lo que está dado… nos pusimos a analizar esta mañana para poder demostrarla es… pues… nos dimos cuenta que nos faltaron varias condiciones.	Enunci
18	P:	¿Cómo por ejemplo [cuál]?	Enunci
19	Julián:	Por ejemplo, que el rayo *AD* no puede pertenecer a esta recta *BC*.	Enunci
	[…]		
24	P:	[…], vuelvo otra vez a preguntar. ¿Concuerda la conjetura que ellos escribieron, con la construcción que hicieron? [Pausa] [Murmullos] ¿Alguien va a decir algo? […]	ConjCons
	[…]		
28	P:	¿Nancy? [Le pregunta a Nancy porque ve en la actitud de la estudiante la intención de intervenir] Tú tienes algo para decir.	ConjCons
	[...]		
31	Nancy:	Bueno, para decir… es que él construyó los dos rayos y después vio que [el ángulo] era recto, o sea no…	ConjCons

[30] El estudiante se refiere a la rotación pues es la manera como en el curso han hecho operativo el Postulado de la construcción de ángulo que asegura la posibilidad de construir un ángulo con una medida determinada.

32	P:	Mi pregunta es si la conjetura concuerda con las condiciones que ellos colocaron en la construcción, para llegar a la conclusión que reportan.	ConjCons
		[…]	
36	P:	[…] Estoy preguntando primero por las condiciones. ¿Qué condiciones colocaron ellos en su construcción, qué tenían que cumplirse?	ConjCons
37	Aníbal:	Que *E* pertenece al semiplano de[terminado por la recta] *AB* donde está *D*.	ConjCons
38	P:	Eso lo tienen/	
39	Aníbal:	/dice: “entonces existe un *E*, que pertenece al semiplano”, y él lo estaba utilizando.	ConjCons
40	P:	¡Ah! Bueno, primero, eso es una cosa. Ellos construyeron esto [$\angle EAC$] y después… y después hablaron del ángulo recto y no se qué. Pero además, ellos construyeron un ángulo agudo y aquí no lo dicen… o sea, las condiciones no están correctas. Aquí hay que reportar todo lo que hicimos, ¿sí? […]	ConjCons
	[…]		
45	P:	[…] ¿Será que esta condición de complementarios [de $\angle EAC$ y $\angle DAB$] la construyeron ellos y después miraron que se formaba un ángulo recto? O simplemente construyeron estas cosas [los rayos *AB, AD* y *AC*], y ahí se dieron cuenta que había un ángulo recto y demás. Yo creo que esta es parte de la hipótesis [la complementariedad de los ángulos]. Porque creo que ustedes construyeron ese ángulo [$\angle EBC$] y… la tesis es… pues… [Muestra la propiedad: $m\angle EAD = 90$], entonces faltó esa condición.	ConjCons

[P55:5-45]

Después de escribir la conjetura en el tablero, la profesora se dirige a Julián y Jaime para que ellos expliquen a sus compañeros cómo fue la construcción hecha en Cabri que los llevó a formular la conjetura [6]. En las intervenciones 7, 11 y 15 Julián hace una explicación detallada del procedimiento de construcción de la que se infiere que él y Jaime construyeron el $\angle EAC$, complementario del $\angle DAB$, a partir del rayo *AC*, en el semiplano donde está *D*, usando para ello la herramienta rotación que ha sido aceptada en la clase como recurso para hacer operativo el postulado de construcción de ángulos. Además de describir la construcción, Julián explica que al arrastrar el punto *D* para mover el rayo *AD* apreciaron la invarianza de la suma de los ángulos complementarios y también que la medida del $\angle EAD$ es siempre 90. A continuación, la profesora pregunta si la conjetura concuerda con la construcción, de acuerdo a lo que Julián y Jaime hicieron [16]. En esa misma intervención, para favorecer la distinción entre las propiedades que deben escribirse en el antecedente de la conjetura y las que corresponden al consecuente, la profesora discrimina entre las propiedades ligadas directamente a la construcción, que van en el antecedente, y aquellas que resultan por su dependencia con las primeras, que van en el consecuente; indica además que el antecedente y el consecuente deben quedar separados por la palabra "entonces". Sin embargo, los estudiantes no parecen entender qué es lo que ella quiere que hagan y Julián se refiere a la falta de ciertas condiciones que deberían incluirse en el antecedente para poder hacer la demostración, revisando el enunciado en sí mismo [17, 19]. La profesora pregunta de manera más directa por la concordancia: "¿Concuerda la conjetura que ellos escribieron, con la construcción que hicieron?" [24]. Después de una pausa y viendo que Nancy tiene intenciones de hablar, la impulsa a expresar lo que está pensando [28]. La estudiante parece querer discriminar entre lo construido y lo descubierto pero su intervención es confusa e incompleta [31] por lo que la profesora repite la pregunta [32]; al ver que ningún estudiante alude a lo que ella espera, decide referirse primero a las condiciones de la construcción, probablemente para establecer una relación con el antecedente [36]. Así logra que Aníbal se acerque a una respuesta apropiada mencionando que en el antecedente Jaime y Julián se refieren a la construcción del $\angle EAC$, y sólo en el consecuente mencionan la existencia del punto E [39]; pero Aníbal no menciona que la complementariedad de los ángulos es una condición impuesta que debe estar en el antecedente de la conjetura y no en el consecuente. Finalmente, la profesora renuncia a seguir preguntando y ella evalúa la concordancia.

	Jul		Jul		Jul		Nan		Aní		Aní	
P		P		P		P		P	P	P		P
6	7, 11. 15	16	17	18	19	24, 28	31	32,36	37	38	39	40, 45

Diagrama 7.14: Participación periférica en la evaluación de la concordancia entre la construcción y la conjetura

En el Diagrama 7.14 ilustramos la participación periférica de los estudiantes en la tarea impulsada por la profesora. Ella dirige la conversación repitiendo la pregunta por la concordancia en tres oportunidades, en un claro intento de guiar a los estudiantes en el análisis que pretende llevar a cabo. Aunque algunos intentan responder a sus expectativas, exhibiendo alineación con la empresa, sus intervenciones no son relevantes pues no parecen tener claro qué es lo que se pretende. Julián da signos de un trabajo autónomo al comentar un interés particular en revisar su propia conjetura fuera de clase [17], aunque no sobre el asunto en cuestión, Nancy intenta infrutuosamente responder a la comparación que solicita la profesora y Aníbal logra un mejor acercamiento al asunto objetando, de manera genuina, la ubicación de una propiedad en el consecuente cuando debería hacer parte del antecedente. Pero finalmente es la profesora quien termina estableciendo la no concordancia entre la construcción y la conjetura.

Participación legítima en la práctica de conjeturar

Participación legítima en la primera formulación de las conjeturas

Para ilustrar lo que entendemos por una participación legítima en la primera formulación de las conjeturas vamos a centrarnos en el Episodio 7 en donde se propuso el siguiente problema:

> Estudiar la relación entre el tipo de triángulo y la propiedad: dos de sus alturas son congruentes. Escribir el proceso de construcción y las conjeturas que se establecen.

El problema guarda cierta similitud con el que dio lugar al Episodio 4 en cuanto a que ambos son problemas abiertos que impulsan el descubrimiento de propiedades geométricas y relaciones de dependencia entre ellas. Sin embargo, al momento de planear la clase correspondiente a la introducción del problema, se analizaron los efectos de incluir en el enunciado alusiones al estudio de la variación, como sucedió en el problema del Episodio 4 en donde se preguntaba por la posición de un rayo para lograr un ángulo máximo. Se evaluó que dicha formulación pudo ser la causa de que varios estudiantes formularan la conjetura incluyendo menciones al dinamismo (tales como: “siempre va a ser un ángulo recto”). Por eso, la pregunta del problema correspondiente al Episodio 7 se refiere a identificar ‘relaciones’ y no ‘posiciones’ especiales.

Los estudiantes formularon cuatro conjeturas bastante similares en las que identificamos un cambio en la participación de los estudiantes con relación a las conjeturas formuladas en el Episodio 4. Veamos.

> Conjetura 1: Si un triángulo tiene dos lados congruentes entonces dos de sus alturas son congruentes.

La Conjetura 1, propuesta por seis grupos, tiene las características esenciales de una conjetura bien formulada, salvo que no se especifica a cuáles alturas se hace referencia en el consecuente y esa información es determinante para la demostración. Con una pequeña adaptación en la que se incluye esa información, sugerida por María, la conjetura es admitida y queda lista para comenzar el proceso de demostración. En ese sentido consideramos relevante la participación de los estudiantes que hicieron la formulación.

> Conjetura 2: Si un triángulo tiene dos alturas congruentes entonces el triángulo tiene congruentes los lados opuestos a los vértices de las alturas.

Dos grupos de estudiantes redactaron la Conjetura 2 que es recíproca a la anterior, estableciendo la dependencia de la congruencia de dos lados del triángulo a la congruencia de las alturas correspondientes. La conjetura especifica cuál es el antecedente y el consecuente, está completa y no sobran ni faltan condiciones para considerar su demostración. En ese sentido, la participación de los estudiantes es relevante y se adopta como un enunciado a demostrar, aunque la redacción no es propia de un experto.

> Conjetura 3: Si *ABC* es un triángulo y la medida de uno de sus ángulos es mayor a 90 y los lados que determinan este ángulo son congruentes entonces el triángulo es isósceles y dos de sus alturas son congruentes.

La Conjetura 3, redactada por Luz y Marina, es muy similar a la Conjetura 1 salvo que las estudiantes incluyen una condición que sobra: “la medida de uno de sus ángulos es mayor a 90”. Como se discutió en el capítulo seis, formulada de esa forma, parece que excluye a los triángulos isósceles acutángulos. En lugar de considerar que la inclusión es un error, vemos allí un indicador de participación genuina pues las estudiantes escriben lo que ellas descubren y fundamentan la conjetura en la exploración, a pesar de no medir las consecuencias de tal inclusión.

> Conjetura 4: a. Si todos los lados de un triángulo son diferentes o no son congruentes ninguna de sus alturas es congruente a ninguna otra. b. Si hay un triángulo con dos lados congruentes entonces dos de sus alturas son congruentes. c. Si existe un triángulo con sus tres lados congruentes entonces las tres alturas correspondientes son congruentes. d. CONJETURA: Si un triángulo tiene al menos dos lados congruentes entonces al menos dos de sus alturas son congruentes.

La Conjetura 4, redactada por William y Gonzalo, realmente está compuesta por cuatro conjeturas, la última de las cuáles sintetiza la información contenida en las otras tres. Como lo comenta la profesora, refleja un trabajo sistemático de los estudiantes, aunque de alguna manera redundante. La conjetura (a) se compone de dos negaciones y establece que los triángulos escalenos tienen alturas desiguales. Ella da lugar a un trabajo de reformulación usando la proposición contrarecíproca. La conjetura (b) es similar a la Conjetura 1 y es admitida sin hacerle ningún cambio. La conjetura (c) es una extensión de la (b) pues se refiere a las tres alturas congruentes de los triángulos equiláteros. La demostración de ella da lugar a un corolario del teorema correspondiente a la Conjetura 1. Finalmente la conjetura (d) sintetiza los hallazgos hechos por el grupo y, a diferencia de las conjeturas anteriores, está redactada como lo haría un experto.

La participación de los estudiantes en la formulación de las versiones iniciales de las conjeturas correspondientes al Episodio 7 es legítima por varias razones. Es relevante, ya que da lugar a la producción de nuevos enunciados que se demuestran y se incorporan al sistema axiomático en construcción. Especialmente en las formulaciones de la Conjetura 4 se aprecia el esfuerzo de William y Gonzalo en usar lenguaje matemático al introducir un cuantificador existencial, aunque innecesario; en lugar de escribir: "si un triángulo tiene dos lados congruentes" escriben: "si *hay* un triángulo con dos lados congruentes" y, en lugar de escribir: "si un triángulo tiene tres lados congruentes" escriben: "si *existe* un triángulo con tres lados congruentes" como si la existencia de los triángulos isósceles y equiláteros se pusiera en duda. El enunciado propuesto da lugar a un trabajo de reformulación que ayuda a aclarar los significados de los cuantificadores. Se aprecia una evolución en la calidad en los enunciados pues la redacción, en au mayoría, se aproxima a la producción realizada por un experto; no se redactaron conjeturas incluyendo lenguaje informal o palabras referidas a la exploración dinámica. Es una participación genuina, pues los estudiantes producen afirmaciones fundamentadas en el proceso de exploración realizado.

Participación legítima en la aceptabilidad de las conjeturas

El siguiente extracto, tomado del Episodio 12, ejemplifica lo que hemos caracterizado una participación legítima de los estudiantes en la evaluación de la aceptabilidad de una conjetura apoyada en las acciones de formular ejemplos y contraejemplos. A raíz de un problema que hace referencia a un triángulo *OMP* y un punto *K* sobre la recta *MP* y se pide estudiar en qué casos la medida del $\angle OKP$ es mayor que la medida del ángulo $\angle OPK$. Julián y Jaime proponen la siguiente conjetura: "Sea ΔOMP y un punto K en $\overline{MP}$ entonces $m\angle OKP > m \ \angle OPK$ y si K no está en $\overline{MP}$, entonces $m\angle OPK > m \ \angle OKP$". La profesora la escribe en el tablero y pregunta al grupo si la aceptan o no. Orlando y Juan proponen ejemplos y contraejemplos y finalmente la conjetura se rechaza.

10	P:	(a)	[…]. Entonces, la pregunta es si aceptan o no esa conjetura como válida [Pausa de 2 minutos].	Acepta

		(b) Desafortunadamente no vamos a poder mostrar lo que tienen [en la calculadora][31], pero pueden ilustrar en el tablero si están o no están de acuerdo. […], aquí hay un grupo que dice que no es cierto… y van a mostrar un contraejemplo.	Contraej
11	Orlando:	Digamos que tomamos un triángulo isósceles…	Contraej
		[...]	
16	Orlando:	(a) Dice que hay un punto… si *K* está en [el segmento] *MP*. Bueno, si está acá, [señala un punto entre *M* y *P*], no importa porque… […], en ese caso sí la medida es mayor [Figura 7.19].	Ejempl

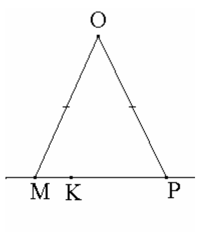


Figura 7.19

		(b) Pero si *K* es *P*, *K* pertenece al segmento *MP*.	Contraej
17	P:	Pero es que si *K* es *P*, no tendría ángulo [*OKP*]. Bueno…	Refuta
18	Orlando:	Sí. Primero. Y si *K* es *M*, entonces estas dos medidas son congruentes. [Figura 7.20].	Contraej

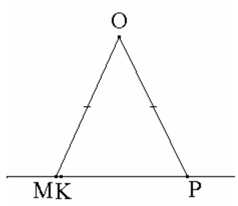


Figura 7.20

19	P:	Esa sí. Esa sí te la acepto. Si *K*… más bien es… si el triángulo *OKP* es isósceles no se tiene [la conjetura]… ¿De acuerdo?	Contraej
20	Juan:	Puede llegar a ser [cierta]. [Muestra una figura hecha en su cuaderno, a la profesora].	Acepta
21	P:	¿Si [*K*] está por aquí [entre *M* y *P*]? Dice Juan… […].	Acepta
22	Juan:	Si *K* está…	
		[…]	
26	Juan:	[Pasa al tablero y representa algo como la Figura 7.21]:	Ejempl

[31] Ese día no había luz y no se podía proyectar las imágenes de las calculadoras en la pared, para que todos pudieran verlas.

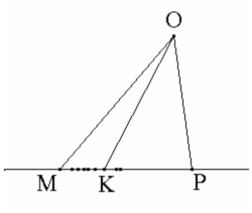


Figura 7.21

		Para cualquier punto que esté acá adelante… hasta acá [marca con puntitos una región del segmento *MK*], este ángulo [*OKP*] va a ser mayor que el [ángulo] *OPK*.	
27	P:	O sea, hay varios contraejemplos. Parece. ¿Bien?	Contraej
		O sea que conjetura del grupo A, rechazada. Bueno, bien. Entonces ya hay contraejemplos para esa conjetura.	Acepta

[P88:10-27]

Ante la solicitud de analizar si admiten o no la conjetura [10a], proponiendo figuras que permitan evaluar el enunciado [10b], los estudiantes hacen representaciones en Cabri y exploran relaciones entre las medidas de los ángulos, de acuerdo a lo expresado por el grupo A. Orlando representa un triángulo isósceles a manera de contraejemplo [11]. Según él, si *K* está entre *M* y *P* la presentación es un ejemplo de la primera parte de la conjetura [16a], pero sí *K* es *P*, la conjetura falla [16b]. La profesora objeta que si *K* es igual a *P* no hay $\angle OKP$ [17], por lo que Orlando se refiere entonces a la situación en la que *K* es igual a *M* [18]. En su indagación, Orlando analiza las situaciones extremas en las que el punto *K* coincide con *M* o con *P*. A continuación, Juan expone su propuesta indicando que si *K* está entre *M* y *P* la primera parte de la conjetura es cierta en algunos casos y en otros no. Se basa en una representación de un triángulo no isósceles en la que muestra una parte del segmento *MP* en donde debe estar localizado el punto *K* para que se cumpla la conjetura [26]. De esta forma, la profesora indica que tienen varios contraejemplos y anuncia que la conjetura del grupo A se rechaza [27].

Ilustramos en el Diagrama 7.15 la participación de Orlando y de Juan en la evaluación de la conjetura; desde nuestro punto de vista, la participación es legítima. Proponen ejemplos y contraejemplos ideados por ellos y con la conciencia plena del papel que les corresponde en la evaluación de las conjeturas. Es una participación relevante pues conduce a rechazar la conjetura. Sin embargo no es una participación autónoma pues hay un apoyo cercano de la profesora en el estudio de los contraejemplos, no surge de un interés personal y no la lidera un estudiante.

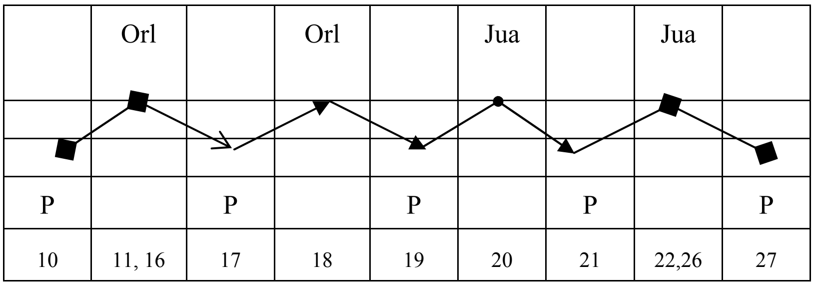


Diagrama 7.15: Participación legítima en la evaluación de la aceptabilidad de una conjetura

Participación legítima en la evaluación de la concordancia entre la construcción y la conjetura

En el Episodio 7 se evalúa la concordancia entre las construcciones y las conjeturas propuestas por Leopoldo y Darío y por Ignacio y Nancy a raíz del problema de estudiar la relación entre el tipo de triángulo y la propiedad ‘dos de sus alturas son congruentes’. Leopoldo e Ignacio explican el procedimiento de construcción de sus respectivos grupos: Leopoldo y Darío representan un triángulo sin características especiales e imponen por arrastre que dos alturas sean congruentes, para luego estudiar qué sucede a los lados. Ignacio y Nancy representan un triángulo isósceles y se dan cuenta que las alturas son congruentes. Sin embargo, las conjeturas que establecen son respectivamente recíprocas a las que deberían formular.

8	P:	[…] quiero que el grupo… C […] quiero que lean lo que escribieron para la construcción. ¡Ponemos atención por favor!… […] porque quiero que se fijen muchísimo en lo que dice el grupo C y después en la conjetura que establecen.	ConjCons
9	Leopoldo:	Se construyó el triángulo *ABC*, luego las alturas del triángulo… y mediante el arrastre se logró que dos de las alturas fueran congruentes. Conjetura…	ConjCons
		[…]	
14	P:	[…]. Ahora la conjetura.	ConjCons
15	Leopoldo:	Conjetura: Si un triángulo tiene dos lados congruentes entonces dos de sus alturas son congruentes.	ConjCons
16	P:	[…] Vamos a determinar ahí dos cosas. Una, vamos a llamar *p*… eh… “lados congruentes del triángulo”… ¿no? Y *q*… “alturas congruentes”… […]. [Escribe en el tablero: *p*: lados congruentes del triángulo; *q:* alturas congruentes] Y… grupo C… léanme otra vez la construcción.	ConjCons
17	Leopoldo:	Se construyó el triángulo *ABC*, luego las alturas del triángulo… y mediante el arrastre se logró que dos de las alturas fueran congruentes. Conjetura…	ConjCons

18	P:	O sea que ustedes obligaron a qué… ¿a *p* o a *q*?	ConjCons
19	Leopoldo:	Eh… la segunda. [Leopoldo hace expresión de haber caído en cuenta de algo].	ConjCons
20	P:	A *q*… ¿Sí? Esto es lo que ustedes obligaron… ¿Qué pasa?	
		[…]	
22	P:	¿Qué pasa Leopoldo? A ver…	ConjCo
		[…]	
24	Leopoldo:	No sé. Creo que de *q* dedujimos *p*.	ConjCo
25	P:	De *q* dedujeron *p*… ¿Y cuál fue la conjetura que me estableciste?	ConjCo
26	Leopoldo:	Pues que si las alturas son congruentes… ¡ah!… si *p* entonces…	ConCo
27	P:	O sea… y esto no les pasó solo a ellos. Muchos hicieron lo mismo. La construcción de ellos fue obligar a que se cumpliera *q*… y se dieron cuenta que entonces se daba *p*. Pero la conjetura que escribieron fue: si *p* entonces *q*. Esto es muy importante. Muy importante porque en el teorema la hipótesis es aquello que sabemos como válido. […]. Eh… también quiero que el grupo… […] ... Ah… el grupo… E, lea su construcción.	Semeja
		[…]	
29	Ignacio:	[…] construimos un triángulo con dos lados congruentes… entonces cogimos un…	ConjCons
		[…]	
31	Ignacio:	Le trazamos las alturas.	ConjCons
		[…]	
33	Ignacio:	[…] y después sí escribimos la conjetura: Si un triángulo tiene dos alturas congruentes entonces el triángulo tiene congruentes los lados opuestos a los vértices de las alturas… en síntesis tiene dos lados congruentes.	FormIni
34	P:	Entonces… ¿pusieron atención? ¿Concuerda la conjetura con la construcción?	ConjCons
35	Daniel:	No porque…	ConjCons
		[…]	
38	Ignacio:	¡Hicimos al revés!	ConjCons
39	P:	Hicieron al revés. O sea, la construcción de ellos fue *p* implica *q*… y la conjetura… *q* implica *p*. [Risas]. [...]	ConjCons

[P66:8-39]

Para favorecer la posterior comparación entre la construcción hecha y la conjetura formulada, en el enunciado del problema se pedía describir la construcción, además de escribir la conjetura. En la socialización, la profesora solicita a Leopoldo y

Darío leer la descripción seguida de la conjetura, al tiempo que exige a los demás estudiantes estar atentos a ambas lecturas [8]. Cuando Leopoldo termina de leer la construcción [9] la profesora le pide leer la conjetura [14]. Una vez el estudiante la lee [15], ella se vale del lenguaje proposicional para explicar la distinción entre las propiedades geométricas que están presentes tanto en la conjetura como en la construcción, una de las cuales es impuesta por arrastre mientras que la otra se obtiene como resultado de dicha imposición. Luego, pide a Leopoldo volver a leer la construcción [16]. Leopoldo lo hace [17] y, cuando va a continuar con la lectura de la conjetura, ella lo interrumpe pidiéndole que identifique cuáles propiedades son impuestas y cuáles descubiertas [18]. Así, Leopoldo empieza a darse cuenta que ha formulado una conjetura recíproca a la que corresponde a la construcción [19]. La profesora percibe la confunsión y lo impulsa a explicitar lo que está pensando [20, 22]; en la intervención 24 Leopoldo hace explícita su interpretación, aunque con un poco de duda. Con apoyo de la profesora [25], finalmente se da cuenta que él y Darío escribieron una conjetura recíproca a la que debían formular en concordancia con la construcción [26]. Entonces la profesora saca una conclusión al respecto, mencionando que varios grupos hicieron lo mismo [27]. Después, pide a Ignacio leer la construcción y la conjetura que escribieron él y Nancy. Ignacio hace la lectura [29, 31 y 33] y tan pronto como la profesora pregunta si hay concordancia [34], Daniel [35] e Ignacio [38] notan que la conjetura no corresponde a la construcción. Daniel evalúa que no hay concordancia [35]; pero, cuando va a explicar por qué, es interrumpido por Ignacio quién expresa sorprendido que han formulado la conjetura que no es [38]. Finalmente, la profesora concluye que este grupo también escribió la conjetura recíproca [39].

Con el Diagrama 7.16 ilustramos la participación de los estudiantes en la evaluación de la concordancia entre la construcción y la conjetura. A diferencia del extracto con el que dimos cuenta de la participación periférica legítima, en esta oportunidad los esfuerzos de la profesora por dirigir la conversación hacia la comparación de la concordancia logran los frutos deseados, especialmente gracias a Leopoldo, Daniel e Ignacio. Es una participación genuina ya que los estudiantes contribuyen a hacer la comparación y caen en cuenta de haber formulado una conjetura contraria a la correspondiente, según la construcción. Sin embargo, no podemos caracterizar la participación como autónoma pues la profesora tiene que dirigir el análisis paso a paso para que Leopoldo diferencie las proposiciones que entran en juego en la conjetura y capte el papel que cada una de ellas tiene en la construcción. El esfuerzo explicativo inicial y el uso del lenguaje proposicional surten efecto al revisar la segunda conjetura pues, tan pronto Ignacio acaba de leer la construcción y la conjetura, Daniel e Ignacio se dan cuenta de la falta de concordancia.

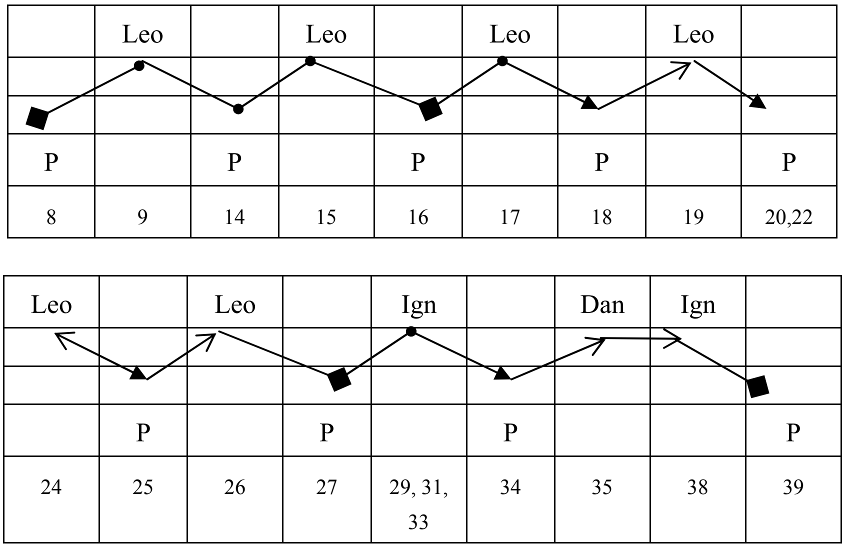


Diagrama 7.16: Participación legítima en la evaluación de la concordancia entre la construcción y la conjetura

Participación plena en la práctica de conjeturar

Para ilustrar lo que entendemos por una participación plena en la formulación y evaluación de la concordancia entre la construcción y la conjetura, hemos escogido dos extractos del Episodio 15 correspondiente a las clases finales del curso. En cuanto a la aceptabilidad de las conjeturas, la participación de los estudiantes es similar a la de la sección previa; como lo presentamos en el capítulo seis, además de presentar ejemplos y contraejemplos, los estudiantes participan en la corrección del enunciado, en la reformulación para lograr una expresión condicional, en revisar su deducibilidad, entre otras acciones. Pero como la participación es prácticamente igual de relevante, genuina, auténtica y original que en el extracto presentado, no consideramos que haya una evolución hacia una práctica propia de un experto y no presentamos un extracto para ejemplificarla.

Participación plena en la primera formulación de las conjeturas

En el Episodio 15, a partir de la solución del problema en el que se pide establecer la relación entre el tipo de cuadrilátero y la propiedad: una diagonal biseca a la otra, los estudiantes formulan más de veinte conjeturas, entre las cuales se encuentran las siguientes:

> Conjetura 1: Si en el cuadrilátero *ABCD* sus diagonales se bisecan entre sí, los lados no consecutivos son paralelos.

> Conjetura 2: Si en un cuadrilátero *ABCD* sus diagonales se bisecan entonces los lados opuestos son congruentes.
>
> Conjetura 3: Si en un cuadrilátero los lados opuestos son congruentes, entonces las diagonales se bisecan.

Consideramos que los estudiantes logran un nivel similar al de un experto en dicha formulación pues redactan los enunciados en lenguaje apropiado y establecen proposiciones generales que indican claramente qué propiedades están en el antecedente y cuáles en el consecuente. Las conjeturas analizadas colectivamente, junto con las que se proponen en el Episodio 14, sirven para desarrollar el contenido de la unidad correspondiente a cuadriláteros pues en ellas se consideran propiedades de los lados, los ángulos y las diagonales de cuadriláteros típicos como paralelogramos, rectángulos, rombos, trapecios y cuadrados. Ninguna conjetura se rechaza por ser poco clara o incluir propiedades irrelevantes. Las conjeturas que presentamos como ejemplo son las primeras que se revisan colectivamente y conducen a establecer dependencias entre la congruencia o el paralelismo de los lados opuestos de un cuadrilátero y el hecho de que las diagonales se bisecan. En medio del análisis de las propiedades involucradas se define ‘paralelogramo’ y se demuestran algunas conjeturas que conducen a teoremas sobre propiedades importantes de los lados de éste. En la Tabla 7.2 sintetizamos los teoremas que se incluyeron al sistema, relacionados con paralelogramos. Una tabla como esta se elaboró en el tablero en una clase en la que se hizo una síntesis de los teoremas demostrados, relacionados con paralelogramos.

<table>
<tr><td colspan="4">Paralelogramos</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Diagonales</td><td rowspan="2">se bisecan entonces</td><td rowspan="2">lados opuestos</td><td>Paralelos</td></tr>
<tr><td>congruentes</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Lados opuestos</td><td rowspan="2">congruentes entonces</td><td>lados opuestos</td><td>Paralelos</td></tr>
<tr><td>diagonales</td><td>se bisecan</td></tr>
<tr><td rowspan="2">paralelos entonces</td><td>lados opuestos</td><td>congruentes</td></tr>
<tr><td></td><td>diagonales</td><td>se bisecan</td></tr>
</table>

Tabla 7.2: Teoremas que se incluyen al sistema a raíz de las conjeturas sugeridas por los estudiantes

Participación plena en la evaluación de la concordancia entre la construcción y la conjetura

En el siguiente extracto del Episodio 15 encontramos evidencias de una participación plena en la evaluación de la concordancia entre la construcción y la conjetura. La profesora presenta públicamente la siguiente conjetura, sugerida por Nancy e Ignacio: "Si un cuadrilátero tiene sus ángulos y lados opuestos congruentes entonces las diagonales se bisecan". Luego, pide a Nancy leerla y se lleva a cabo la siguiente interacción comunicativa.

331	Nancy:	Construimos el cuadrilátero, luego las diagonales, ubicamos el punto medio de cada diagonal y arrastramos [los vértices de] el cuadrilátero hasta que los puntos medios coincidieran. Luego tomamos las medidas de los ángulos y los lados.	ConjCons
332	P:	¡Otra vez!	ConjCons
333	María:	Sí, debería ser lo contrario.	ConjCons
334	Nancy:	¿Qué?	ConjCons
335	María:	Porque tomaron las medidas de los ángulos… entonces… querían garantizar primero que los ángulos fueran congruentes para decir que las diagonales se bisecaran...	ConjCons
336	Nancy:	¡Ah!… lo que pasa es que nosotros… como lo tomamos, era buscar qué características necesitaba un cuadrilátero para que las diagonales se bisecaran… entonces, después de tener las diagonales ya entramos a evaluar.	ConjCons
337	P:	Por eso, ¿pero lo que dice María es qué?	ConjCons
338	María:	Como lo formularon acá. Mira, dicen: si un cuadrilátero tiene sus ángulos y lados opuestos congruentes...	ConjCons
339	Ignacio:	¡Ah! porque ahí tomamos propiedades de los ángulos y los lados.	ConjCons
340	María:	Y luego si ven que el punto medio de los dos si era…	ConjCons
341	P:	[…]. Ustedes arrastraron hasta que el punto medio coincidiera y después sí miraron los ángulos… pero su conjetura dice que ustedes miraron ángulos… arrastraron hasta que se fijaron que los ángulos fueran congruentes, y después se fijaron en las diagonales. Y eso no fue lo que ustedes hicieron. ¿Entiendes Nancy?	ConjCons
342	Nancy:	Sí.	ConjCons

[P111:331-342]

Tan pronto Nancy lee la descripción de la construcción hecha [331], la profesora exclama: "¡Otra vez!" [332] pues, como sucedió en otros casos, los estudiantes han escrito una conjetura que no concuerda con la construcción. María, de manera espontánea, hace explícito lo que la profesora insinúa con su exclamación [333] y cuando Nancy pregunta "¿Qué?", pues no ha entendido el comentario, María se aventura a explicarle [335]. Según ella, tal como está escrita la conjetura, los estudiantes debieron medir los ángulos y los lados, arrastrar hasta lograr la congruencia de los ángulos opuestos y fijarse en las diagonales. Nancy responde a la intervención de María explicando que la toma de medida de los ángulos fue posterior a tener las diagonales bisecadas, porque querían evaluar el efecto obtenido [336]. La profesora interviene para apoyar la conversación entre María y Nancy [337]. María insiste en que la conjetura está mal formulada [338] por lo que Ignacio interviene a favor de la conjetura, mencionando que él y Nancy sí tomaron las medidas de los lados y de los ángulos [339]. Después de un nuevo intento de María para aclarar el asunto [340], en vista de la confusión, la profesora compara la descripción de la construcción con la conjetura para que Nancy entienda lo que María quiere decir [341].

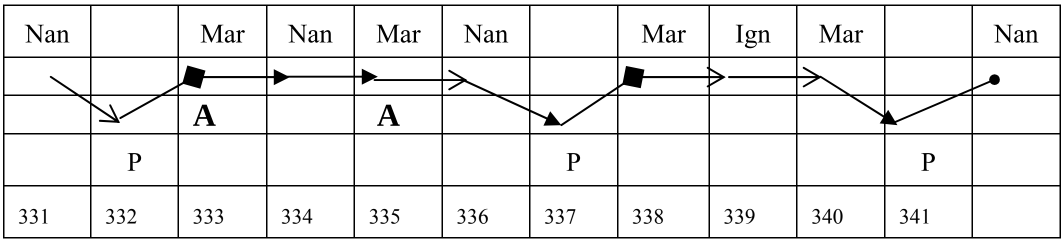


Diagrama 7.17: Participación plena en la evaluación de la concordancia entre la construcción y la conjetura

En el Diagrama 7.17 ilustramos la participación de Nancy, María e Ignacio en la comparación entre la conjetura y la construcción, con un pequeño apoyo por parte de la profesora. Varios son los indicadores de evolución hacia una participación plena. El primero de ellos es que la conversación no está dirigida por la profesora sino que toma el rumbo que María y Nancy le imprimen. En este extracto de conversación, la relevancia de la participación es notoria no sólo porque María interviene de manera espontánea, sin esperar a una pregunta de la profesora, sino porque se rompe el patrón usual de conversación profesora-estudiante-profesora y la profesora interviene solo para apoyar a María en la explicación que quiere hacer a Nancy e Ignacio. Es una participación genuina pues tanto María como Nancy e Ignacio defienden sus ideas u objetan lo que dicen sus compañeros de manera fundamentada. Además, aunque las explicaciones de María no son claras, consideramos que el hecho de asumir la responsabilidad de una tarea que hasta el momento sólo la hacía la profesora es un indicativo del sentido de afiliación a la comunidad propio de un experto.

7.3. ARGUMENTAR

A lo largo del curso se lleva a cabo la práctica de elaborar argumentaciones deductivas, generalmente a manera de esbozos de una demostración, que tienen la intención de establecer la plausibilidad o deducibilidad de una conjetura y elaborar un plan para escribir la demostración. Para mostrar la evolución de la participación de los estudiantes en esta práctica, escogimos extractos de interacciones comunicativas en tres momentos del curso -al inicio, en sesiones intermedias y en las clases finales- que son representativos de las acciones en la que los estudiantes intervienen. Como los códigos con los que distinguimos las finalidades de participación tienen relación con el modelo de Tulmin, empleamos un esquema como el que usa Pedemonte (2005) para favorecer la visualización de la evolución. Usamos color negro para escribir aquello que dice el estudiante que lidera la argumentación y con color rojo escribimos lo que, desde nuestro punto de vista y siguiendo la línea de argumentación, debería haberse mencionado para desarrollar una justificación deductiva completa. Así, contrastamos qué tan lejos está la argumentación de la demostración matemática propiamente dicha y podemos referirnos a la relevancia de ésta. Otros aspectos de la participación tales como si es genuina, autónoma, original y si se evidencia un sentido de afiliación o alineación a la empresa que se lleva a cabo se analizan a partir del sentido crítico con el que se reflexiona acerca de la propuesta, la espontaneidad y el control con los que se participa, la creatividad en las ideas expuestas, el apoyo a la tarea que se está llevando a cabo y la adaptación a las exigencias del grupo.

7.3.1. Participación periférica legítima en la práctica de argumentar

Ilustramos con dos ejemplos cómo es la participación de los estudiantes en las primeras clases del semestre. El primero corresponde a la argumentación para sustentar que toda recta tiene al menos dos puntos y el segundo para justificar por qué se tiene la interestancia *C-P-D* en una construcción hecha.

<u>Ejemplo 1:</u> 'Toda recta tiene al menos dos puntos'

El primer ejemplo de argumentación sucede en el Episodio 2, en la segunda clase del semestre. Como Efraín afirma, a raíz de una construcción hecha en Cabri, que toda recta tiene al menos dos puntos –y la clase admite la afirmación como cierta-, la profesora solicita a los estudiantes imaginar cómo justificar la afirmación, usando el Postulado 2 del sistema axiomático, incluido al sistema momentos antes.[32] Henry propone una argumentación y Mónica la complementa.

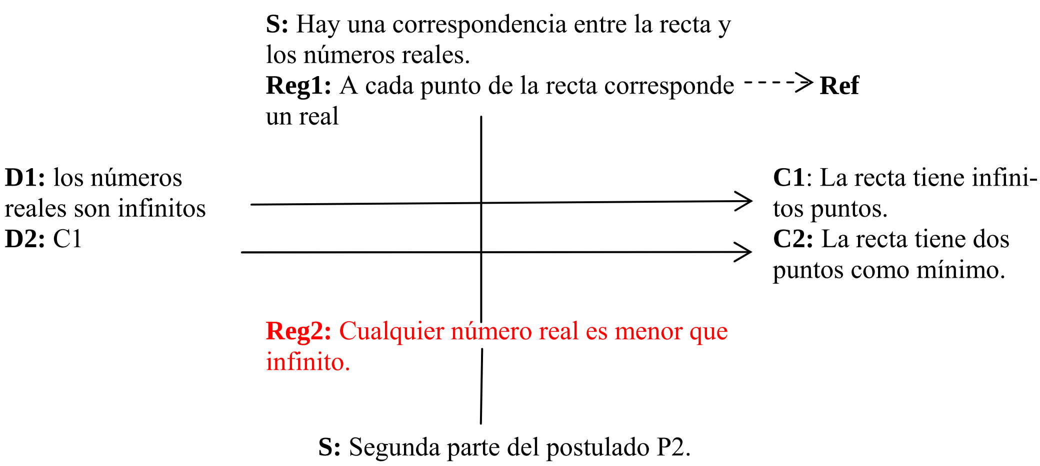
81	P:	¿Ese postulado [P2] me servirá para eso o no? Unos hacen así [gestos de aprobación] y otros así [de desaprobación] pero nadie me dice por qué. [Henry alza la mano] ¿Tu nombre? […]

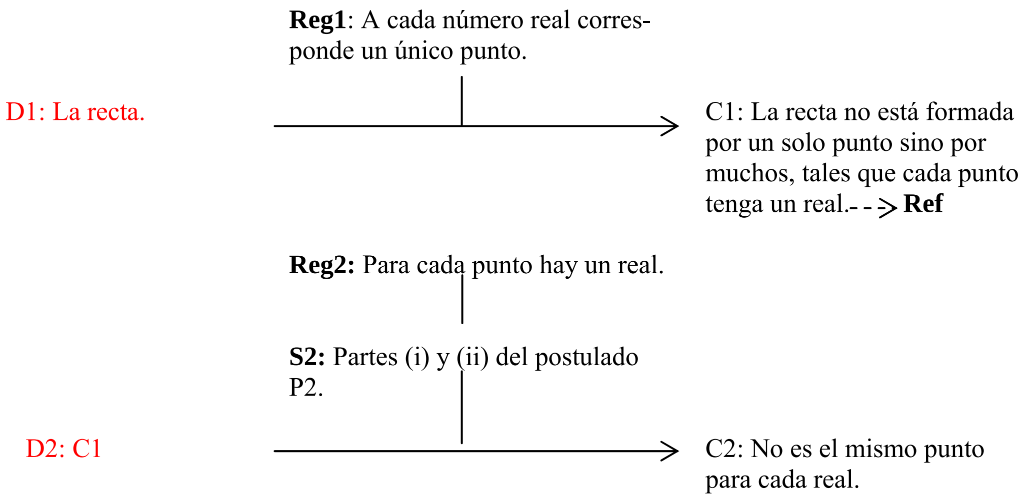
[32] Al momento, en el sistema sólo tenían los postulados P1 y P2, además de los elementos no definidos, punto, recta y plano. El postulado P1 dice que las rectas y el plano son conjuntos de puntos. El postulado P2 establece una correspondencia entre los puntos de la recta y los números reales tal que: (i) a cada punto corresponde un único real, (ii) a cada número real corresponde un único punto.

82	Henry:	(a)	Yo creo que sí me sirve [el postulado P2] porque ahí nos está diciendo que… la correspondencia entre la recta y los números reales.	Soporte
		(b)	[A] cada punto de la recta corresponde un número real	Regla
		(c)	quiere decir que la recta tiene infinitos puntos,	Conclu
		(d)	y los números reales son infinitos,	Dato
		(e)	si [la recta] tiene infinitos puntos	Dato
		(f)	entonces va a tener dos, como mínimo.	Conclu
83	P:		[…] ¿Están de acuerdo con ese argumento? … A cada punto de la recta le corresponde/	Refuta
84	Henry:		/un único número real.	Refuta
			[…]	
92	P:		Pero, si estás usando el ítem uno… hasta ahora yo lo único que puedo decir es que existe un punto, […]. Porque… ¿de dónde saco ahora para los infinitos?	Refuta
93	Henry:		Porque el postulado nos está hablando de la correspondencia entre la recta y los números reales, sin hablar de puntos, entonces, eh…	Soporte
			[…]	
101	Melisa:	(a)	Es que yo creo que también es con la segunda [parte del postulado] porque, […] porque… el segundo [ítem] dice…	Soporte
		(b)	a cada número real corresponde un único punto y está generalizando entre todos los reales, es decir, que por cada real debe haber un punto,	Regla
		(c)	entonces la recta no está formada por un solo punto, sino por muchos, tales que cada punto tenga un real.	Conclu
102	P:		[…] Pero, ¿cómo se yo que no son el mismo punto?	Regla
103	Melisa:		(a) Porque en el [ítem] primero se especifica que a cada punto hay un real,	Regla
			(b) es por eso que yo digo que el primero y el segundo son recíprocos, porque necesariamente se tiene que aclarar eso, porque si no [fuera así] se podría usar varios números en un solo punto.	Soporte

[P3:81-103]

Partimos de la intervención 82 de Henry. La hemos separado en 6 partes para identificar los elementos que la componen a la luz del esquema de Toulmin. En 82a, Henry menciona el nombre del postulado como soporte de la afirmación que va a hacer y en 82b él se refiere en forma explícita al ítem (i) de dicho postulado, para usarlo como regla para justificar su primera conclusión: “quiere decir que la recta tiene infinitos puntos” [82c]; luego, él menciona que los reales son infinitos como dato adicional que posiblemente usa para obtener la conclusión [82d]; en 82e, usa como dato lo concluido para afirmar que si la recta tiene infinitos puntos, entonces tendrá dos, como mínimo [82f]. En resumen, Henry usa el ítem (i) del postulado para concluir que la recta tiene infinitos puntos y por lo tanto tendrá mínimo dos. En la intervención 83, la profesora impulsa a los demás estudiantes a refutar la argumentación de Henry e incluso vuelve a leer la regla que el estudiante usó para obtener la primera conclusión; como no logra una reacción de parte de ellos, le indica a Henry que del ítem (i) del postulado sólo puede concluir que si se tiene un punto de la recta a éste le corresponde un real, cuestionando el hecho de que él haya mencionado infinitos puntos [92]; Henry intenta dar soporte a la afirmación refiriéndose a la correspondencia que se propone en el postulado [93]. Ante la refutación de la profesora, Melisa interviene para ampliar la argumentación: usa como soporte inicial el Postulado 1 [101a] y como regla específica el ítem (ii) de éste [101b]; concluye que la recta no puede tener un solo punto sino muchos, para que cada punto tenga un real [101c]. La profesora parece admitir la regla usada pero refuta la conclusión preguntando qué parte del postulado permite garantizar que a todos los reales no les corresponda el mismo punto [102]. Así, dirige la argumentación de Melisa y ella menciona el ítem (i) como nueva regla para garantizar que cada real tendrá su correspondiente punto [103a]. De hecho, parece que la estudiante ya hubiera pensado el asunto previamente pues usando un lenguaje informal explica: "…necesariamente se tiene que aclarar eso, porque si no, se podrían usar varios números en un solo punto" [103b]. En el Esquema 7.1 ilustramos la argumentación que sugieren Henry y Melisa.





Esquema 7.1: Argumentación: 'toda recta tiene dos puntos'[23]

En el Diagrama 7.18 ilustramos la participación de Henry y Melisa en la elaboración de la argumentación.

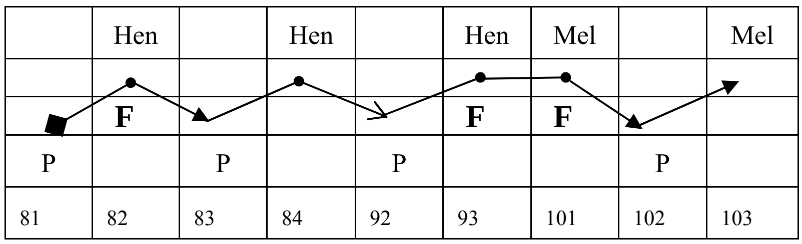


Diagrama 7.18: Participación periférica en la argumentación de la conjetura: toda recta tiene dos puntos

Consideramos que la participación de los estudiantes es periférica legítima por las siguientes razones. No es autónoma ni original ya que la profesora determina qué enunciado del sistema axiomático es el que deben usar en la argumentación y los estudiantes intervienen ante su petición, tratando de usarlo. Ella es quien refuta las afirmaciones y controla aspectos de éstas, como el uso inapropiado de los ítems del postulado, o la falta de sustento [92, 102]. Los estudiantes intentan seguir sus instrucciones pero no logran una argumentación de carácter deductivo, por lo que la justificación es poco relevante. Henry extrae una conclusión incorrecta del ítem (i) del postulado ya que de éste sólo se puede concluir que si se tiene un punto de la recta, a ese punto le corresponde un real. El estudiante elabora un argumento por asociación, de tipo informal, aunque se entrevén algunos rasgos incipientes de argumentación deductiva cuando da soporte a la primera afirmación con el postulado P2 del sistema, o cuando usa como dato del segundo paso la conclusión que

[23] Convenciones: **D**: Dato; **C**: Conclusión; **Reg:** Regla; **S**: Soporte; **Ref:** Refutación.

sacó en el primero. De manera similar, Melisa saca una conclusión por asociación que no usa en forma deductiva el ítem del postulado que ella menciona. Adicionalmente, omite el dato del primer paso de su argumentación, saca una conclusión que no surge necesariamente de la regla usada y tampoco conecta la conclusión que menciona con la segunda regla que usa para obtener la nueva conclusión. Podemos calificar la participación como genuina pues los estudiantes fundamentan las afirmaciones que hacen, aunque de manera informal. La profesora aprovecha el esfuerzo que los estudiantes hacen para adaptarse a las exigencias y, por medio de preguntas, va ilustrando cómo sería apropiado proceder.

Ejemplo 2: 'Se puede afirmar la interestancia C-P-D'

El segundo ejemplo de argumentación sucede durante la producción colectiva de la demostración del enunciado 'tres puntos no colineales determinan dos segmentos que se bisecan'. La participación de los estudiantes en la escritura de la demostración se basa en lo que ellos recuerdan de la construcción hecha en Cabri, la cuál fue realizada teniendo como norma que cada paso debía justificarse con elementos del sistema axiomático. En un momento dado, después de justificar (con base en el teorema de localización de puntos)[24] por qué pueden determinar un punto D en un rayo CP, a una distancia de P igual a la distancia CP, la profesora les pregunta cómo podrían justificar la interestancia C-P-D [Figura 7.22], pues la forma como determinaron el punto D garantiza la colinealidad de los puntos pero no la relación de orden entre ellos. Juan propone el siguiente argumento.

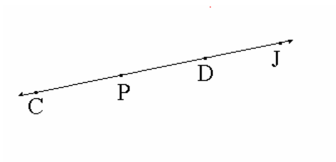


Figura 7.22

18	P:	[…] ¿Podemos asegurar que P está realmente entre C y D? […] [Juan alza la mano] Juan.		
19	Juan:	(a)	[…], además de decir que teniendo en cuenta [la medida de] el segmento CP y la recta CP …	Regla
		(b)	[decir] que ahí también [se] cumple la interestancia, que D	Conclu

[24] Teorema localización de puntos: sean $\overrightarrow{AB}$ y x un número positivo. Entonces existe exactamente un punto P de $\overrightarrow{AB}$ tal que AP es x.

		también cumple esa interestancia.	
20	P:	Por eso… quiero mostrar que cumple la interestancia, entonces ¿tú dices que…?	Conclu
21	Juan:	(a) Además de esa parte donde estábamos localizando *D*,	Conclu
		(b) podemos colocar que cumple la interestancia,	Conclu
22	P:	¡Ah, no!, tú dices que una vez que yo encuentro a *D,* con el teorema de localización de puntos ¿lo obligue a que cumpla la interestancia?	Refuta
23	Juan:	por el tercer teorema de interestancia.	Regla
		[…]	
42	P:	(a) […] La pregunta es: tengo tres puntos, […]	Dato
		(b) ¿Qué puede suceder con esos tres puntos? O tenemos a *D* entre *C* y *P*, o tenemos a *C* entre *D* y *P*, o, tenemos a *P* entre *C* y *D*. [Escribe: *C- D -P*; *D - C- P*; *C - P - D*] […]. Una de las tres interestancias se tiene que cumplir. La última es la que queremos.	Conclu
		(c) ¿Qué pasa si ésta [*C - D - P*] fuera cierta?	Dato
43	Julián	*CD* más *DP* igual a *CP*.	Conclu
44	P:	(a) Si señor. *CD*… ¿cuánto mide?, ¿sabemos? No. ¿*DP*? [mide] *r*. ¿*CP*? [mide] *r*…	Dato
		(b) concluimos: *CD* más *r* igual a *r*. [Entonces] *CD* es cero. ¡Contradicción! ¿No?	Conclu
		(c) Porque *C* tendría que coincidir con *D*. […].	Soporte
		(d) ¿Y qué pasa con ésta [*D- C – P*].	Dato
		(e) *DC* no lo conocemos. ¿*CP*?, [mide] *r*. ¿*DP*?, [mide] *r*,	Dato
		(f) entonces *DC = 0*. Lo mismo. […].	Conclu

[P28:19-44]

La profesora pregunta cómo podría justificarse la interestancia *C-P-D* [18]. Juan hace alusión, no muy claramente, a las condiciones que permitieron localizar el punto *D* como conclusión derivada del teorema de localización de puntos - es decir, a la existencia del rayo *CP* y el segmento *CP* cuya longitud se usó como número positivo en la localización- [19a], y luego dice que se puede agregar que la interestancia se cumple [19b]. La profesora parece no entenderle la idea y le recuerda que se quiere obtener la interestancia como resultado de la argumentación [20]; por eso Juan repite nuevamente su propuesta sugiriendo que escriban, como conclusión, que el punto *D* se determina como lo establece el teorema [21a] y que además cumple la interestancia [21b]. La profesora refuta la idea [22] y cuestiona a Juan el hecho de querer imponer al punto *D*, determinado por el teorema de localización de puntos, una relación de orden específica con respecto a los puntos *C* y *P*, cuando el teorema no se refiere a eso. Juan decide entonces incluir una nueva regla para justificar la interestancia aludiendo al tercer teorema de interestancia[26]. [23]. Efectivamente, este teorema dice que, dados dos puntos, en este caso *C* y *P,* en una recta, es posible encontrar un punto *N* tal que *C-P-N*; pero del teorema no se concluye que *N* sea *D*, a no ser que *D* no se haya determinado aún y uno quiera ubicarlo en ese orden con respecto a *C* y *P*. Como ningún otro estudiante sugiere cómo hacer la justificación, la profesora propone contemplar las posibles opciones para el orden de los puntos colineales *C, P* y *D* y va descartando elecciones hasta dejar como única posibilidad la interestancia *C-P-D* [42]. Ella explica cómo sería la argumentación caso por caso y saca la conclusión esperada [44]. En el Esquema 7.2 proponemos una organización de la argumentación de Juan.

Reg1 Teorema de localización de puntos.

D1: Rayo *CP* y medida del segmento *CP*. → **C1:** Existe *D* tal que *CP=PD* y *C-P-D*.

Ref: Del teorema de localización de puntos no se concluye *C-P-D*

S: Tercer teorema de interestancia. → **Ref.**

Esquema 7.2: Argumentación: 'Se tiene la interestancia *C-P-D*'

En el Diagrama 7.19 ilustramos la interacción de Juan con la profesora, con un aporte hecho por Julián. A diferencia del ejemplo anterior, la profesora no dice a los estudiantes qué enunciados del sistema deben o pueden utilizar en la justificación y a ellos no se les ocurre valerse de la definición de interestancia para analizar casos. La participación de Juan es periférica legítima pues, aunque hace el esfuerzo de construir una argumentación, y emplea enunciados del sistema para fundamentar sus afirmaciones, su aporte es poco relevante para la consecución de la meta. La justificación dista mucho de ser deductiva: como quiere justificar que el punto *D* cumple la interestancia *C-P-D*, sugiere imponer al punto tal propiedad:

[26] Tercer teorema de interestancia: Dados dos puntos *A* y *B* en una recta, existe un punto *C* tal que *B* está entre *A* y *C*.

“podemos colocar que cumple la interestancia” y, cuando la profesora le insiste en que esa afirmación debe ser la conclusión de algo, menciona el tercer teorema de interestancia que establece la existencia de un punto en una recta, pero no lo determina, como sí lo hace el teorema de localización de puntos. Su intervención es propia de una persona inexperta en la producción de discursos deductivos. Los compañeros no refutan la argumentación ni sugieren nuevas ideas. La profesora es quien objeta los argumentos en dos ocasiones y termina proponiendo el plan para hacer la demostración.

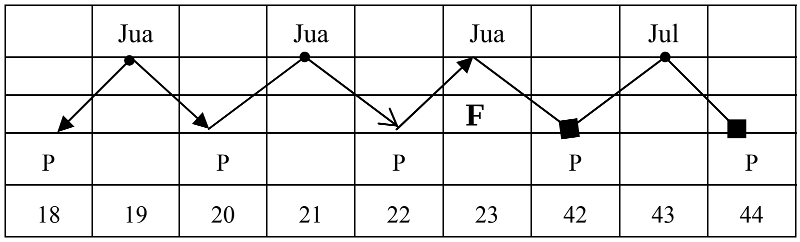


Diagrama 7.19: Participación periférica en la justificación de la interestancia *C-P-D*

7.3.2. Participación legítima en la práctica de argumentar

Hacia la mitad del curso, los estudiantes han ganado experiencia en la formulación de argumentaciones deductivas con base en enunciados del sistema axiomático tales como teoremas relacionados con el triángulo isósceles, criterios de congruencia de triángulos y el teorema del ángulo externo. Esta experiencia les permite participar de manera legítima en la producción de argumentaciones. Para documentar este hecho, presentamos dos extractos que tuvieron lugar hacia mediados del semestre. El primero corresponde a justificar por qué un triángulo isósceles no puede tener dos ángulos obtusos y el segundo a argumentar por qué un punto sobre la mediatriz de un segmento equidista de los extremos de éste.

<u>Ejemplo 1</u>: ‘Un triángulo isósceles no puede tener dos ángulos obtusos’

La argumentación se lleva a cabo debido a que Daniel sostiene que un triángulo isósceles no puede tener dos ángulos obtusos. En un primer intento de justificación, Ignacio propone usar el hecho de que la suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo es 180, pero la profesora recuerda que ese enunciado no lo puede usar pues no lo han demostrado en el curso. Orlando propone un camino en el que usa un triángulo *ABC* con $\overline{AB} \cong \overline{BC}$, un punto *D* sobre la recta *AB* tal que se tiene la interestancia *D-A-B* y el segmento *DC* (Figura 7.23).[28]

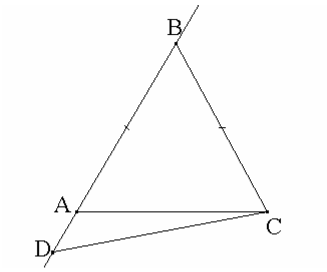


Figura 7.23

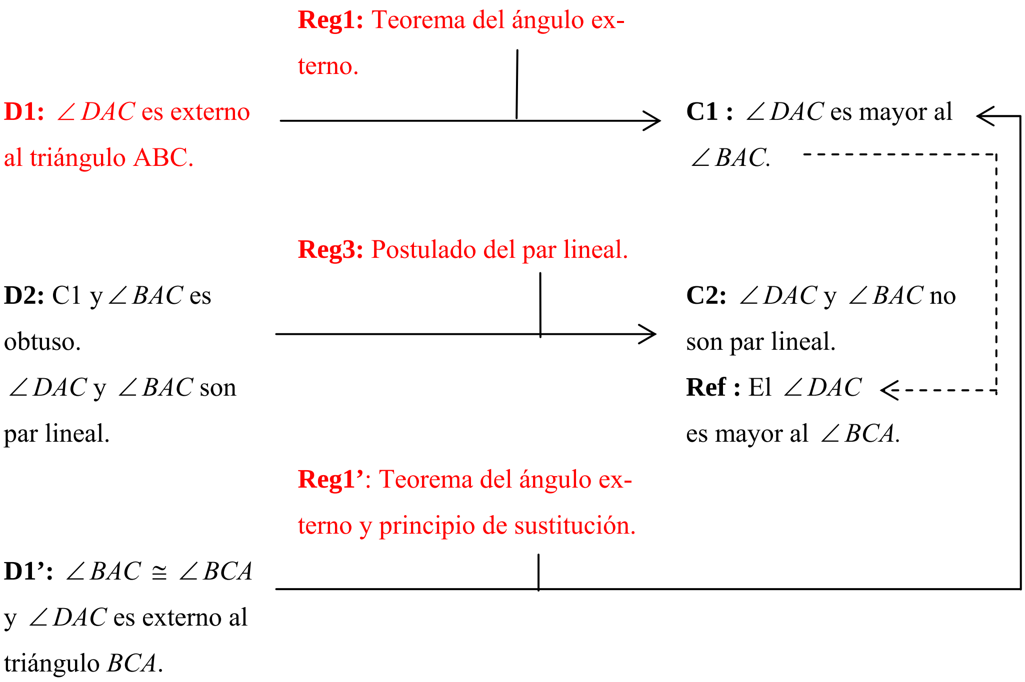
86	P	[…] pero ¿por qué?... Yo si… creo que lo podemos demostrar [Pausa de un minuto]… Sin importar teoremas de otro lado. [Oscar alza la mano] A ver, Oscar.		
87	Orlando:	(a)	El ángulo externo [señala $\angle DAC$] siempre es mayor al ángulo interno [señala $\angle BAC$ del triángulo *ABC*; Figura 7.23].	Conclu
		(b)	Y si el ángulo interno [*BAC*] es mayor que 90,	Dato
		(c)	el otro [*DAC*], como es mayor, no forman par lineal,	Conclu
		(d)	entonces tienen que formar par lineal.	Dato
88	P:	El ángulo externo es mayor que cualquier ángulo interno no adyacente. Entonces, ¿A cuál [ángulo] te estás refiriendo?		Regla
89	Orlando:	Este ángulo [$\angle DAC$] es mayor que éste [$\angle BAC$].		Conclu
90	P:	No, [el ángulo externo es] mayor que los internos no adyacentes. O sea mayor que éste [$\angle ABC$] y mayor que éste [$\angle BCA$].		Refuta
91	Orlando:	Pero sí éste [$\angle BCA$] es congruente con éste… [$\angle BAC$]		Dato
		[…]		
93	Orlando:	(a)	pues de todas formas éste [$\angle DAC$] es mayor que éste [$\angle BAC$],	Conclu
		(b)	y si éste [$\angle BAC$] es mayor de 90,	Dato
		(c)	no pueden formar par lineal.	Conclu

P87:75-93]

En la intervención 86, la profesora solicita una justificación de la afirmación hecha por Diego en donde se empleen sólo enunciados que se han incorporado al

[28] La figura estaba dibujada en el tablero aunque es un poco diferente a la que presentamos pues incluye la altura del triángulo correspondiente al lado *AB* y no tiene las marcas que representan la congruencia de los lados. La hemos modificado un poco para favorecer la comprensión de la argumentación y del análisis.

sistema. Orlando se ofrece a dar una argumentación. Dividimos la intervención 87 en cuatro partes para favorecer el análisis.



Esquema 7.3: Argumentación: Un triángulo isósceles no puede tener dos ángulos obtusos

Inicialmente, Orlando menciona que el $\angle DAC$ siempre es mayor que el $\angle BAC$ del triángulo ABC [87a]. Aunque consideramos que es una conclusión que él obtiene, el uso de la palabra 'siempre' nos da la idea que al mismo tiempo intenta darle soporte a la conclusión evocando el teorema del ángulo externo. Luego, supone cierto que el $\angle BAC$ es obtuso, asume esto como dato [87b] y aprovechando la primera conclusión afirma, como segunda conclusión, que $\angle BAC$ y $\angle DAC$ no pueden ser par lineal (87c). Finalmente insinúa que hay una contradicción pues se sabía de antemano que los ángulos sí son par lineal.[29] En su argumentación, Orlando intenta usar el principio de prueba indirecta al llegar a una conclusión que contradice un dato dado. La profesora reacciona a la argumentación para tratar de hacerla más clara. Menciona el teorema del ángulo externo, pues parece ser la regla usada por Orlando en el primer paso, y le pide confirmar a qué ángulos se refiere [88]. Cuando Orlando repite la primera conclusión [89], la profesora la refuta pues Orlando se refiere al ángulo interno adyacente al ángulo externo [90].

[29] Orlando asume como dado que los ángulos $\angle BAC$ y $\angle DAC$ forman par lineal pues han construido al punto D de tal suerte que se garantiza su colinealidad con B y A, y además se tiene C, punto que no es colineal con D, A y B por que A, B y C determinan un triángulo.

Esta refutación conduce a Orlando a elaborar un paso intermedio de la argumentación, mencionando como dato que los ángulos $\angle BAC$ y $\angle BCA$ son congruentes [91] y por lo tanto $\angle DAC$ sí es mayor que $\angle BAC$ (usa implícitamente una sustitución algebraica como regla, además del teorema del ángulo externo) [93a]; luego repite que si se asume que el $\angle BAC$ es mayor que 90 [93b] no puede formar un par lineal con $\angle DAC$ [93c]. En el Esquema 7.3 ilustramos la argumentación de Orlando. Hemos usado D1' y Reg1' para nombrar los datos y la regla que se sustituyen en el paso 1 después de la refutación.

En el Diagrama 7.20 ilustramos la participación de Orlando.

	Orl		Orl		Orl
	!				!
P		P		P	
86	87	88	89	90	91, 93

Diagrama 7.20: Participación legítima en la justificación: un triángulo isósceles no puede tener dos ángulos obtusos

Consideramos que la argumentación de Orlando es ejemplo de participación legítima pues sugiere una vía deductiva útil para justificar la afirmación de Daniel. A diferencia de las argumentaciones con las que ejemplificamos la participación periférica legítima, en este ejemplo se evidencia un discurso que encadena afirmaciones y conclusiones según el estilo de una prueba indirecta. Aunque inicialmente Orlando parece estar equivocado al justificar con el teorema del ángulo externo la relación de desigualdad entre los ángulos $\angle DAC$ y $\angle BAC$, salva su argumentación aprovechando la congruencia de $\angle BAC$ y $\angle BCA$. Es una participación relevante pues basta hacer explícitas las reglas y queda una justificación deductiva completa. También afirmamos que es una participación original, que incluso la profesora no ha considerado, aunque se vale de una figura que se ha elaborado previamente para otro asunto; muestra el compromiso que tiene Orlando con los intereses de la comunidad. En cambio, no podemos considerar que la participación sea autónoma pues obedece al requerimiento de la profesora y sólo gracias a la objeción de ella el estudiante completa los argumentos que le hacen falta.

<u>Ejemplo 2:</u> 'Un punto en la mediatriz de un segmento equidista de los extremos de este'

El segundo ejemplo de participación legítima es una argumentación elaborada por Jaime, ante la solicitud hecha por la profesora de justificar por qué un punto [*Y*] que está sobre la mediatriz de un segmento [$\overline{PX}$] equidista de los extremos de éste. Jaime se vale de una representación inicial que está en el tablero [Figura 7.24] y hace uso de un criterio de congruencia de triángulos.

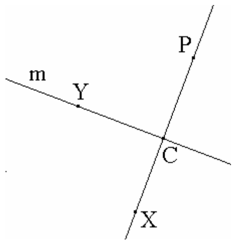


Figura 7.24

41	P:	[…] ¿Cómo demostraríamos eso?		
42	Jaime:	Se puede con triángulos.		ConstrucExp
43	P:	¿Usando triángulos congruentes, dices?		ConstrucExp
	[…]			
47	Jaime:	(a)	Tengo los tres puntos [*P, Y, X*]. Tengo esta recta [*m*], puedo construir esta otra [recta] por acá [$\overleftrightarrow{XY}$], puedo construir esta otra [recta $\overleftrightarrow{PY}$] [Figura 7.25].	ConstrAuxi

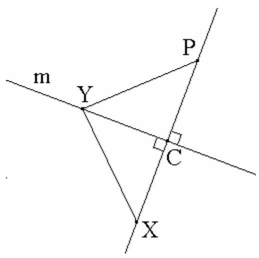


Figura 7.25

		(b)	y tengo que ésta [recta $\overleftrightarrow{PX}$] es perpendicular a ésta [recta *m*]… ¿Qué tengo? Tengo que ésta [recta $\overleftrightarrow{PX}$] es perpendicular a esta [recta *m*].	Conclu
48	P:	¿Por qué? […].		Regla
49	Jaime:	(a)	El ángulo *YCP* es un ángulo recto.	Conclu
		(b)	Tengo un ángulo recto y tengo dos rectas que se intersecan,	Dato
		(c)	entonces tengo cuatro ángulos rectos.	Conclu
		[…]		
51	Jaime:	(a)	Tengo la identidad de este segmento [$\overline{YC} \cong \overline{YC}$].	Conclu

		(b)	Tengo que este segmento *CX* [...].	Conclu
		[...]		
53	Jaime:	(a)	digo que la distancia *CX* y *CP* es la misma,	Conclu
		(b)	entonces tengo que estos segmentos [$\overline{XC}$, $\overline{PC}$] son los mismos [son congruentes],	Conclu
		(c)	y tengo entonces lado-ángulo-lado.	Regla
		(d)	Entonces es congruente [$\Delta YXC \cong \Delta YPC$], entonces	Conclu
		(e)	demuestro que éste [segmento $\overline{YX}$] es congruente a éste [segmento $\overline{YP}$]. [...].	Conclu

[P99:42-53]

A petición de la profesora [41] Jaime elabora una argumentación en la que se imagina que puede usar dos triángulos congruentes con dos lados correspondientes que determinan la equidistancia de *Y* a los extremos *X* y *P* del segmento [42]. A continuación, propone trazar las rectas *XY* y *PY* y así complementa la figura para iniciar la argumentación [47a]. Primero, afirma que la recta *PX* es perpendicular a la recta *m* [47b]. Esta es una conclusión del hecho de ser *m* la mediatriz del segmento *PX*; como Jaime no justifica la afirmación, la profesora le pide que explicite la regla correspondiente [48]. El estudiante no da la justificación sino que se refiere a una segunda conclusión que se deriva de la primera [49a]: "el ángulo *YCP* es un ángulo recto". Luego, usa como dato la segunda conclusión [49b] para afirmar, sin justificar, que las rectas *m* y *PX* forman cuatro ángulos rectos [49c]. De esta manera garantiza, sin decirlo, que los ángulos $\angle YCP$ y $\angle YCX$ son congruentes. Después menciona la congruencia del segmento *YC* consigo mismo [51a] sin dar la regla que le permite afirmarlo. En seguida, afirma la equidistancia de *C* a los puntos *P* y *X* que es consecuencia de la definición de mediatriz [53a]. A continuación, concluye la congruencia de los segmentos *CX* y *CP* [53b] y por el criterio lado-ángulo-lado [53c], concluye la congruencia de los triángulos [53d]. Finalmente, de esta última, concluye la congruencia de los segmentos *YX* y *YP* de la cual directamente se concluye la equidistancia, aunque Jaime no lo hace. En el Esquema 7.4 organizamos los pasos de la argumentación sugeridos por Jaime.

Reg1: Definición de mediatriz.

D1: *m es mediatriz del segmento XP.* ⟶ C1: $\overleftrightarrow{PX} \perp m$.

Reg2: Definición de rectas perpendiculares.

D2: C1 → **C2**: El ∠YCP es recto.

Reg3: Si dos rectas que se intersecan forman un ángulo recto, entonces forman cuatro ángulos rectos.

D3: El ∠YCP es recto. → **C3:** Forma cuatro ángulos rectos.

Reg4: Propiedad reflexiva de la congruencia.

D4: $\overline{YC}$ → **C4:** $\overline{YC} \cong \overline{YC}$

Reg5: Definición de mediatriz.

D5: *m* es mediatriz del segmento PX. → **C5:** CX = CP.

Reg6: Definición de segmentos congruentes.

D6: C5 → **C6:** $\overline{CX} \cong \overline{CP}$

Reg7: Criterio de congruencia lado-ángulo-lado.

D7: C3, C4, C6 → **C7**: ΔYCP ≅ ΔYCX.

Reg8: Partes correspondientes de triángulos congruentes.

D8: C7 → **C8:** $\overline{YX} \cong \overline{YP}$

Esquema 7.4: Argumentación: Un punto en la mediatriz de un segmento equidista de los extremos

En el Diagrama 7.21 ilustramos la participación de Jaime.

	Jai		Jai		Jai
			!		F!
P		P		P	
41	42	43	47	48	49, 51, 53

Diagrama 7.21: Participación legítima en la justificación: 'un punto en la mediatriz de un segmento equidista de los extremos'

La argumentación de Jaime es ejemplo de participación legítima por cuanto es un discurso que se organiza deductivamente, en el que están las ideas principales para escribir la demostración. La relevancia de la participación se aprecia si revisamos los ocho pasos de la argumentación. Aunque en siete de ellos el estudiante omite decir explícitamente de qué datos parte y cuál es la justificación para la conclusión que saca, esta omisión es admitida por todos, salvo en un caso en el que la profesora le pide que haga explícita la justificación. Esto puede deberse a que las justificaciones son enunciados del sistema muy conocidos por todos y parece haber un acuerdo tácito, en la argumentación oral, bajo el cual se asumen compartidas las justificaciones de las conclusiones a las que alude Jaime. Además, no repite la conclusión de un paso a manera de dato del siguiente, porque el estilo del discurso hila una conclusión con la siguiente y hace evidente que está tomando como dado lo dicho previamente. En ese sentido, no consideramos que la omisión de datos y reglas sea un indicador de error en la argumentación sino la expresión de un conocimiento compartido por los miembros de la comunidad. Es una argumentación autónoma, pues el estudiante imagina un plan, a partir de una figura inicial y lo desarrolla sin la intervención de la profesora, a quien ignora cuando ella le pide una justificación. El flujo de la argumentación está a cargo de él así como el control de éste; Jaime se muestra muy seguro de su argumentación y en ningún momento duda que va por el camino correcto. Sin embargo, no es una argumentación original pues prácticamente es una aplicación de lo aprendido en situaciones similares resueltas previamente.

7.3.3. Participación plena de los estudiantes en la práctica de argumentar

Consideramos que algunos estudiantes alcanzan una participación plena en la práctica de argumentar, proponiendo ideas relevantes, originales, genuinas y autónomas para justificar afirmaciones de interés de la clase. Otros, asumen la evaluación de los argumentos de sus compañeros con la responsabilidad propia de la afiliación y alineación con la empresa que llevan a cabo. Para ilustrar lo dicho, vamos a presentar dos argumentaciones que sucedieron en sesiones finales del curso. La primera corresponde a argumentar el por qué de una suma mínima, y la segunda a argumentar porque la suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo es 180.

Ejemplo 1: 'Si… *PR* + *RQ* es la suma mínima'

En la clase inmediatamente anterior, los estudiantes trabajaron en parejas el problema que hace referencia a una recta *m*, dos puntos *P* y *Q* en el mismo semiplano determinado por *m* y un punto *R* sobre la recta *m;* se pregunta por la posición del punto *R* para que la suma *PR* + *RQ* sea mínima. Se propusieron siete conjeturas diferentes que tenían como antecedente una caracterización geométrica del punto *R*; los grupos presentaron públicamente sus propuestas y después la profesora les pidió pensar cómo demostrarlas. En la clase correspondiente al extracto que usamos como ejemplo, Darío se ofrece voluntariamente para presentar una argumentación, con base en la desigualdad triangular, que sustenta qué si el punto *R* se construye según la conjetura que él y Leopoldo escribieron, es posible afirmar que *PR* + *RQ* es la suma mínima. La conjetura es la siguiente:

Si *P'* y *Q'* son puntos sobre las perpendiculares a *m* por *P* y *Q* tales que *PM = MP'* y *QM = MQ' y R* es el punto de corte de *PQ'* y *P'Q* entonces *R* está en la posición de la recta *m* en donde *PR* + *RQ* es la suma mínima (Figura 7.26).

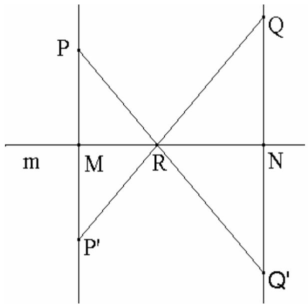


Figura 7.26

9	Darío:	Bueno, pues primero, […] yo me di cuenta que con uno de estos [segmentos, *PQ*' o *QP*'] bastaría, entonces podemos quitar uno… [Borra el segmento *PQ*'; Figura 7.27].	ConstrAuxi

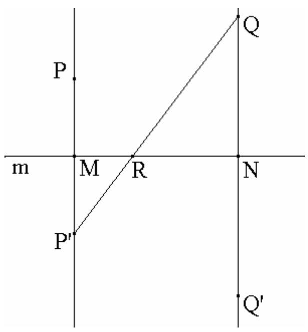


Figura 7.27

10		[…]		
11	Darío:	(a)	Entonces pues, como está el segmento *P'Q* y los puntos [*P'* y *Q*] están en dos semiplanos distintos,	Dato

		(b)	entonces intersecan a la recta *m* en *R*.	Conclu
12	P:		Escogió… *P* y *Q*… están en el mismo semiplano [determinado por *m*] y escogió *P’* y *Q* que están en semiplanos opuestos… el segmento corta [a *m*].	ConstrExp
13	Darío:	(a)	Entonces esta suma… como este punto [*R*] está entre *P’* y *Q*,	Dato
		(b)	entonces puedo decir que *P’R* más *RQ* es igual a *P’Q* [Escribe la igualdad: *P’R* + *RQ* = *P’Q*].	Conclu
		(c)	Entonces… si cojo otro punto de la recta…	ConstrAuxi
14	P:		Pero primero te tengo una pregunta… en la tarea decía era *PR* más *RQ*… y tú tienes *P’R*...	Refuta
15	Darío:	(a)	¡Ah no! es que después se hace que… como tengo un punto [*R]* en la recta [*m*] y una perpendicular [*PM*],	Dato
		(b)	trazo el segmento *PR*,	ConstrAuxi
		(c)	entonces [los triángulos] *PRM* y *P’RM* van a ser congruentes [Figura 7.28].	Conclu

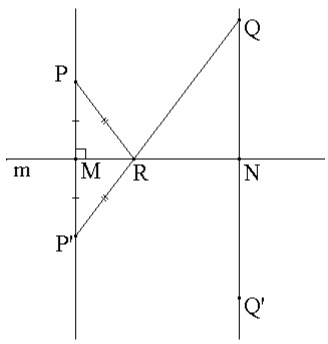


Figura 7.28

		(d)	por criterio lado-ángulo-lado.	Regla
16	P:	(a)	¿De acuerdo? Porque él construyó este segmento [*MP’*] congruente a este [*PM*] y [los triángulos] comparten un lado… bien.	ConstrExp
		(b)	O sea que esta suma [*P’R* + *RQ*] es exactamente [igual a] la que queríamos [*PR* + *RQ*];	Conclu
		(c)	y ahora sí le doy permiso de que borre el “prima” [en la igualdad que había mencionado. Sustituye *P’* por *P* y deja*: PR* + *RQ*= *P’Q*].	Conclu
17	Darío:	(a)	Bueno, entonces cojo otro punto cualquiera [*T*] en la recta.	ConstrAuxi
18	P:		¿Aquí? [Dibuja un punto *T* en el segmento *MN*; Figura 7.29].	ConstrAuxi

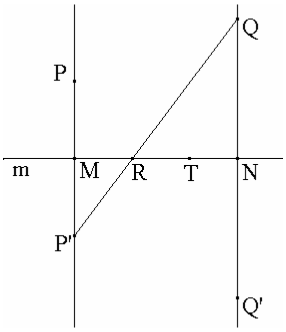


Figura 7.29

19	Darío:	(a)	[…] entonces ya no se cumpliría la interestancia *Q-T-P'*.	Conclu
		(b)	[Completa la figura dibujando los segmentos *P'T* y *TQ*; Figura 7.30].	ConstrAuxi

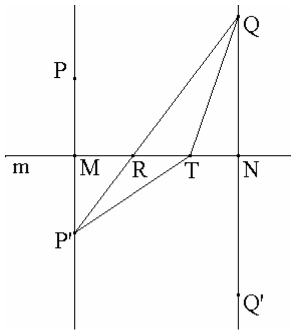


Figura 7.30

			Entonces tenemos un triángulo.	
		(c)	Entonces, por el criterio de desigualdad del triangulo	Regla
		(d)	tengo que *P'T* más *TQ* es mayor que *P'Q* o sea *P'T* más *TQ* es mayor que *PR* más *RQ*.	Conclu
		(e)	Y eso pasa con cualquier punto que se tome.	Genera

[P102:9-19]

Darío comienza su argumentación suprimiendo una de las condiciones de la construcción establecida en el antecedente de la conjetura, al darse cuenta que el punto *R* es punto de intersección de los segmentos *PQ'* y *P'Q* pero también de éstos con la recta *m,* por lo que queda determinado al intersecar uno de los segmentos con la recta [9]. A continuación, parte del hecho de que los puntos *P'* y *Q* están en semiplanos opuestos determinados por la recta *m* [11a] para asegurar que se intersecan con la recta y denomina con *R* al punto de intersección [11b]. La profesora interviene para hacer una explicación de lo dicho por Darío, refiriéndose a la construcción sugerida en el antecedente de la conjetura [12]; su explicación no es un soporte pues la profesora solo reconstruye el proceso de obtención de los puntos *P, Q* y *P'*. Ni la profesora ni Darío mencionan el postulado de separación del plano que es la regla que permite garantizar la existencia del punto de corte de la recta *m* con el segmento *P'Q*. Darío continúa con la argumentación mencionando como dato la interestancia *P'-R-Q* [13a] y de dicha interestancia concluye que la suma de *P'R* más *RQ* es igual a la suma de *P'Q* [13b], sin mencionar explícitamente la regla que le permite sacar tal conclusión (definición de interestancia). La profesora refuta el argumento pues el estudiante hace referencia a un segmento *P'R* y no al segmento *PR* que se menciona en el antecedente de la conjetura [14], hecho que obliga a Darío a desviar el curso de la argumentación para referirse a la recta *PM* perpendicular a *m* [15a], sugerir una construcción auxiliar [15b] en la que forma dos triángulos que afirma son congruentes [15c] y menciona un criterio de congruencia como regla para sustentar la afirmación [15d]. La profesora se vale de la construcción hecha por Darío para explicar a los demás por qué él está afirmando que los triángulos son congruentes [16a]; luego hace explícitas dos conclusiones que Darío no menciona: una, señala que la suma de *P'R* más *RQ* es igual a la suma de *PR* más *RQ* (ya que los segmentos *P'R* y *PR* son partes correspondientes de triángulos congruentes) [16b] y dos, usa la igualdad anterior para sustituir las expresiones en la igualdad que Darío había escrito y poder afirmar que *PR* más *RQ* es igual a *P'Q* [16c]. A continuación, Darío propone tomar otro punto en la recta *m,* diferente de *R,* el cual denomina *T* [17a] y afirma que no se verifica la interestancia *P'-T-Q* [19a] (ya que el punto de intersección es único). Con base en la afirmación, construye el triángulo *P'TQ* [19b], hace referencia a la desigualdad triangular [19c] como regla que le permite concluir que la suma de *P'T* más *TQ* es siempre mayor que la suma de *PR* más *RQ* [19d. Finaliza su argumentación señalando que esa situación sucede con cualquier punto de *m* diferente de *R.* En el Esquema 7.5 ilustramos la argumentación de Darío, discriminándola por pasos.

Reg1: Postulado de separación del plano.

D1: *P'* y *Q* están semiplanos distintos. ⟶ C1: El segmento *P'Q* corta a la recta *m* en *R*.

Reg2: Definición de interestancia.

D2: *R* está entre *P'* y *Q* ⟶ **C2**: $P'R + RQ = P'Q$.

Reg3: Criterio de congruencia lado-ángulo-lado.

D3: $\overline{PM} \cong \overline{P'M}$, $\angle PMR \cong \angle P'MR$. $\overline{MR} \cong \overline{MR}$. ⟶ **C3:** $\Delta PRM \cong \Delta P'RM$

Reg4: la intersección de dos rectas es única

D4: $T \neq R$, $T \in m$. → **C4:** No se cumple la interestancia *P'-T-Q*.

Reg5: Definición de triángulo.

D5: C4 → **C5**: Existe el $\Delta P'QT$.

Reg6: Desigualdad triangular

C6: C5 → **C6:** $P'T + TQ > P'Q$; $P'T + TQ > PR + RQ$.

Esquema 7.5: Argumentación: Si… PR + RQ es la suma mínima

En el Diagrama 7.22 ilustramos la argumentación de Darío.

Dar		Dar		Dar		Dar		Dar
A				**F**		**!**		**F**
	P		P		P			
9, 11,	12	13	14	15	16	17	18	19

Diagrama 7.22: Participación plena en la justificación: Si… PR + RQ es la suma mínima

Consideramos plena la participación de Darío pues es propia de un experto que interactúa con otro, la profesora. El estudiante propone una argumentación deductiva relevante que desarrolla en tres partes. Primero, garantiza que el punto *R* existe y está en la intersección del segmento *P'Q* y la recta *m* y así, establece una igualdad en la que aparece una suma equivalente a la suma que está en el consecuente de la conjetura, igual a la medida del segmento *P'Q*. Segundo, garantiza que la suma *PR* + *RQ* es equivalente a la suma *P'R* + *RQ*. Tercero, hace uso de la desigualdad triangular para mostrar que la suma *PT* + *TQ*, en la que *T* es cualquier otro punto de la recta diferente de *R* es menor que *P'Q*. Como la argumentación es oral hay varias conclusiones parciales que no explicitan ni él ni la profesora, pero aún así la justificación es admitida por todos pues están indicadas las afirmaciones esenciales y se entrevé la conexión entre ellas. Es una participación autónoma, no sólo porque Darío interviene por iniciativa propia sino porque dirige y controla su argumentación. La autenticidad y emoción que le imprime a la presentación de su argumentación es indicio de ello. Cuando la profesora interviene objetando una conclusión, reacomoda el discurso a las exigencias de su interlocutora y sigue desarrollando el plan que tenía previsto. Es original, pues el estudiante desarrolla una idea creativa en la que hila de manera versátil varios contenidos trabajados en el curso, sin seguir un patrón de justificaciones previas. Aunque no hace explícitas casi ninguna de las reglas con las que da soporte a sus conclusiones, podemos decir que es una participación fundamentada pues los soportes se entrevén en los datos que menciona. Por ejemplo, al decir que *P'* y *Q* están en semiplanos distintos, está aludiendo a las condiciones que le permiten hacer uso del postulado de separación del plano para garantizar la existencia del punto *R*. Las intervenciones de la profesora tienen la intención de parafrasear lo que dice Darío ayudando en la claridad de la expresión de las ideas, más que contribuir en la argumentación. Por eso decimos que la interacción con la profesora se percibe como una colaboración entre pares.

<u>Ejemplo 2</u>: 'La suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo es 180'

El segundo ejemplo es una argumentación para justificar el teorema de la suma de las medidas de los ángulos interiores del triángulo, que se demuestra cuando el curso está por terminar. A pesar de ser un teorema conocido por los estudiantes (que en varias ocasiones quisieron usar) la profesora no impulsa su incorporación al sistema axiomático sino cuando es completamente imprescindible para demostrar un teorema relacionado con los ángulos interiores de un paralelogramo[30]. Jaime y Julián proponen una primera argumentación:

219	Jaime:	Tengo el triángulo *ABC* [hace una representación en el tablero].	ConstrAuxi
220		[…]	
221	Jaime:	Aquí trazo una perpendicular [al segmento *AC*, por el punto *C*], acá trazo otra [perpendicular al segmento *AC*, por el punto *A*]. Acá trazo otra perpendicular [por *B*], a la perpendicular *CE* [Complementa la representación con algunos nombres y con números, a sugerencia de la profesora; Figura 7.31].	ConstrAuxi

[30] Hace esto para evitar que varias demostraciones tomen un tinte algebraico más que geométrico.

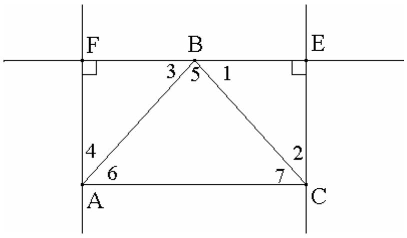


Figura 7.31

		[…]		
225	Jaime:	(a)	Acá tengo que [ángulos] 3 y 4, por el teorema que tenemos	Regla
		(b)	son agudos	Conclu
		[…]		
229	Jaime:	(a)	[…]… estaba ahora mirando que la suma de $\angle 3$, $\angle 5$ y $\angle 1$ es igual a 180…	Conclu
		(b)	y eso me puede servir pues, como tenemos que éste [$\angle 3$] no puede ser mayor	Regla
230	P:	Entonces, él está tratando de demostrar… sabemos que $\angle 3$, $\angle 5$ y $\angle 1$, la suma de los ángulos, de las medidas perdón… es 180… y/		Conclu
231	Henry:	(a)	/Profe, por alternos internos…	Regla
		(b)	sabemos que como [la recta] *EF* es perpendicular… sí, a la recta *AF/*	Dato
		[…]		
233	Ignacio:	/La recta *FE* es paralela a *AC*…		Dato
234	P:	¿Si es paralela?		Refuta
235	Ignacio:	Porque él construyó la recta *AF*, perpendicular a la recta *AC/*		Regla
236	Darío:	/¿Sí son perpendiculares [*FE* y *FA*]?		Refuta
		[…]		
241	Ignacio:	Entonces, por alternos internos…		Regla
242	Henry:	Es que no he podido deducir la colinealidad de *F, B* y *E*.		Refuta
243	P:	(a)	Ah… bueno, entonces, muy bien Henry… si son colineales *F, B* y *E*,	Dato
		(b)	entonces, lo que dice Ignacio es: estas dos son paralelas,	Conclu
		(c)	porque son perpendiculares a una misma recta. Y entonces ahí usamos/	Regla
244	Efraín:	/Alternos internos/		Regla
245	P:	*/FE* paralela a *AC/*		Dato
246	Ignacio:	(a)	/Sí. Y entonces el ángulo 3 es congruente con el ángulo 6,	Conclu

			que sería [ángulo] *BAC*, en este caso… y el ángulo 1 congruente con el ángulo 7…	
		(b)	y ahí, haciendo las transitividades…	Regla
		(c)	ya tenemos que la suma de los ángulos es 180.	Conclu
247	P:		Pero viene una gran pregunta: ¿Cómo sabemos que *F, B* y *E* son colineales. Porque lo que hicieron ellos, o lo que hizo Jaime y creo que también Henry, es una perpendicular por *B* a ésta perpendicular [*EC*], […].	Regla

El extracto es un ejemplo de argumentación colectiva. Comienza con una idea que propone Jaime, a partir de una construcción auxiliar de tres rectas perpendiculares $\overleftrightarrow{AC}$, $\overleftrightarrow{EC}$ y $\overleftrightarrow{BE}$ (Figura 7.32) y así obtiene tres triángulos [219, 221]. Después de proponer la construcción auxiliar, centra la atención en el ΔAFB y menciona que los ángulos $\angle 3$ y $\angle 4$ son agudos [225b], justificando el hecho de una manera vaga pues se refiere a un "teorema que tenemos" [225a].[31] Luego, cambia el centro de atención para dirigirse a los ángulos $\angle 3$, $\angle 5$ y $\angle 1$, expresar, a manera de conclusión, que la suma de sus medidas es 180 [229a] y establecer una relación con lo dicho anteriormente sobre el $\angle 3$ [229b]. Como Jaime duda, la profesora interviene para apoyarlo en su argumentación retomando la conclusión acerca de la suma de los ángulos $\angle 3$, $\angle 5$ y $\angle 1$ [230]. Para avanzar en la argumentación, Henry sugiere usar el teorema que sostiene que los ángulos alternos internos entre paralelas son congruentes [231a] y menciona que las rectas *AF* y *EF* son perpendiculares [231b] como una vía para llegar el paralelismo de las rectas *AC* y *FE*. Ignacio sugiere mencionar directamente el paralelismo de las rectas *FE* y *AC* [233]. Esta idea es refutada por la profesora [234] por lo que Ignacio se refiere a la construcción hecha, señalando que las rectas *AF* y *AC* se trazaron perpendiculares [235]; pero Darío cuestiona nuevamente que la recta *FE* sea perpendicular a la recta *FA* [236], hecho indispensable para poder afirmar el paralelismo de las rectas *FE* y *AC.* En definitiva, ni Henry ni Ignacio logran justificar el paralelismo de las rectas. Sin embargo Ignacio pretende seguir con la argumentación [241] pero es interrumpido por Henry quien pone en entredicho la colinealidad de los puntos *F, B* y *E* [242] que se presupuso al mencionar la recta *FE*. La profesora acepta la refutación e introduce, como dato una expresión hipotética: "si son colineales *F, B y E*" [243a]. Sobre la base de que la colinealidad sea cierta, recuerda la afirmación de Ignacio del paralelismo de las rectas *FE* y *AC* [243b] y da el soporte correspon-

[31] Jaime parece referirse a un teorema demostrado en clase, según el cual un triángulo isósceles no puede tener dos ángulos obtusos, aunque éste no viene al caso pues nada garantiza que el triángulo AFB sea isósceles.

diente [243c] con base en la construcción (ambas son perpendiculares a la recta *EC*). Efraín menciona nuevamente a los ángulos alternos internos [244] e Ignacio completa la argumentación concluyendo la congruencia de los ángulos $\angle 3$ y $\angle 6$, la congruencia de los ángulos $\angle 1$ y $\angle 7$ [246a] y que la suma de las medidas de los ángulos $\angle 5$, $\angle 6$ y $\angle 7$ es 180, al hacer las respectivas sustituciones [246c] en la suma sugerida por Jaime [229]. La argumentación queda en entredicho pues no encuentran cómo mostrar la colinealidad de los puntos *F, B* y *E*. Finalmente, la profesora sugiere modificar la construcción inicial propuesta por Jaime y Jorge, trazando una paralela a *AC* por el punto *B* y de esta manera se supera el problema. En el Esquema 7.6 ilustramos algunos pasos de la argumentación hecha.

D1: Triángulo ABC; $\overleftrightarrow{EC} \perp \overleftrightarrow{AC}$; $\overleftrightarrow{AF} \perp \overleftrightarrow{AC}$; $\overleftrightarrow{BE} \perp \overleftrightarrow{EC}$	**Reg1:** En un triángulo isósceles no puede haber dos ángulos obtusos. →	**C1:** $\angle 3$ y $\angle 4$ son agudos.
D2: D1	**Reg2:** hipótesis gráfica. →	**C2:** m$\angle 1$+ m$\angle 5$+ m$\angle 3$ = 180
D3: D1	**Reg3:** hipótesis gráfica. - - - - -> **Ref** →	$\overleftrightarrow{EF} \perp \overleftrightarrow{AF}$
D4: D1	**Reg4:** hipótesis gráfica - - - - -> **Ref** →	**C4:** $\overleftrightarrow{FE} // \overleftrightarrow{AC}$
D5: C4	**Reg5:** Ángulos alternos internos entre paralelas son congruentes. →	**C5:** $\angle 3 \cong \angle 6$; $\angle 1 \cong \angle 7$.
D6; C5	**Reg6**: Propiedad transitiva. →	**C6**: m$\angle 6$+ m$\angle 5$+ m$\angle 7$ = 180.

Esquema 7.6: Argumentación: La suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo es 180. Primera propuesta

A continuación, María y Efraín proponen otra argumentación:

252	María:	(a)	Por [postulado del] suplemento,	Regla
		(b)	tenemos… ángulos suplementarios…	Dato

(c) [medida de] ángulo 1 y [medida de] ángulo 2 miden 180. — Conclu

(d) y el ángulo 2 es externo [al triángulo], — Dato

(e) por lo tanto es mayor que el ángulo 3 y el ángulo 4. [Figura 7.32]. — Conclu

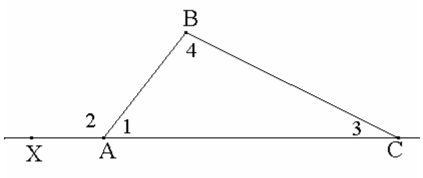


Figura 7.32

253 P: Bueno, o sea que… medida del ángulo 2 es mayor que la medida del ángulo 3 […]. — Conclu

254 María: (a) Podíamos, sobre este rayo [$\overrightarrow{AX}$], construir el ángulo 3… — ConstrAuxi

(b) y digamos que queda en el interior [de $\angle XAB$]. […]. [Figura 7.33]. — ConstrExp

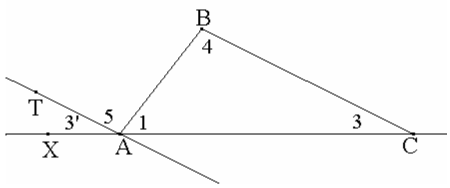


Figura 7.33

[…]

258 María: Entonces, se trata de mostrar que el ángulo 5 fuera congruente al ángulo 4, entonces ahí estábamos… — Conclu

[…]

260 Nancy: Por correspondientes [$\angle 3$ y $\angle 3'$]. — Regla

261 Ignacio: Por correspondientes. — Regla

[…]

264 Nancy: Ángulos correspondientes congruentes. — Regla

265 P: ¿Y cómo sabemos que éste [rayo *AT*] es paralelo [a lado *BC*]? — Regla

266 Nancy: Porque son correspondientes congruentes/ — Regla

267 P: (a) /¡Ah! Ellos están diciendo [que] éste rayo que construiste aquí, al construir el ángulo 3’ es paralelo a ésta [recta *BC*], — Conclu

(b) ¿por qué son ángulos correspondientes congruentes? — Regla

268 Nancy: (a) Entonces [ángulo] 5 es congruente con ángulo 4 — Conclu

(b) por alternos internos. — Regla

269 P: ¡Ah… o sea que sí tenían otra [vía hacia la] demostración!

[P112: 219-269]

María comienza su argumentación refiriéndose al “Postulado del suplemento” [252a] y al hecho de que los ángulos $\angle 1$ y $\angle 2$ son suplementarios [252b], para concluir que la suma de las medidas de los ángulos 1 y 2 mide 180 [252c]. Se refiere al $\angle 2$ como aquel que obtiene trazando el rayo *CA*, de tal manera que *X, A* y *C* son colineales (Figura 7.32). Nadie objeta su primera afirmación pues parece que todos entienden que la estudiante se está refiriendo al Postulado del par lineal tanto en la versión inicial, como en su redefinición[32]. Luego, en la misma intervención, menciona que el $\angle 2$ es externo al triángulo *ABC* [252d] y que por lo tanto su medida es mayor que las medidas de los ángulos internos no adyacentes $\angle 3$ y $\angle 4$. [252e]. La profesora enfatiza en la relación de desigualdad entre los ángulos $\angle 2$ y $\angle 3$ enfocando la atención en esos dos ángulos porque anticipa lo que María va a proponer. [253]. A continuación, la estudiante sugiere construir, a partir del rayo *AX* un ángulo congruente al $\angle 3$, el cuál llama $\angle 3'$ [254a] y menciona que éste queda en el interior del $\angle XAB$ [254b]; aunque no dice explícitamente qué regla le permite afirmar esto, es evidente que para poder justificarlo incluyó la relación de desigualdad entre el $\angle 2$ y el $\angle 3$. Con lo dicho hasta el momento, María puede afirmar que el $\angle 3$ es congruente al $\angle 3'$ y si logra concluir por alguna vía que el $\angle 5$ es congruente al $\angle 4$ puede usar el hecho de que la suma de las medidas de los ángulos $\angle 3'$, $\angle 5$ y $\angle 1$ es 180 para hacer una sustitución algebraica y llegar a justificar lo que se pide. Como María no parece segura sobre cómo proseguir con la argumentación [258] intervienen Nancy e Ignacio quienes mencionan que los ángulos $\angle 3$ y $\angle 3'$ son correspondientes [260, 261] y congruentes [264]. La profesora cree que Nancy está concluyendo la congruencia de los ángulos $\angle 3$ y $\angle 3'$ suponiendo el paralelismo del rayo *AT* y el lado *BC* del triángulo [265], pero lo que Nancy pretende es concluir el paralelismo, a partir de la congruencia de los ángulos correspondientes [266]. Con la aclaración de Nancy, la profesora rectifica la interpretación del paso de la argumentación [267a] aunque expresa de manera interrogativa la regla para que Nancy la confirme [267b]. Finalmente, Nancy completa la argumentación señalando que los ángulos $\angle 5$ y $\angle 4$ son congruentes [268a] y menciona que son alternos internos a manera de justificación. La profesora no invita a concluir la argumentación pues supone

[32] Inicialmente el Postulado del par lineal se enunció así: Si dos ángulos forman par lineal, entonces la suma de sus medidas es 180. Pero luego, al introducir la definición de ángulos suplementarios como aquellos cuya suma es 180, el postulado se re-enunció así: Si dos ángulos forman par lineal entonces son suplementarios.

que el último paso es de conocimiento general, ya que se trata de una sustitución algebraica. En el Esquema 7.7 ilustramos los pasos de la argumentación expresados por María y Nancy.

Reg1: Postulado de suplemento [sic].

D1: $\angle 1$ y $\angle 2$ son suplementarios. $\longrightarrow$ **C1**: $m\angle 1 + m\angle 2 = 180$.

Reg2: Teorema del ángulo externo.

D2: $\angle 2$ es externo al triángulo ABC. $\longrightarrow$ **C2**: $m\angle 2 > m\angle 4$; $m\angle 2 > m\angle 3$.

Reg3: Hipótesis gráfica.

D3: $\overrightarrow{AX}$; C2; $m\angle 3 > 0$ $\longrightarrow$ **C3:** $\angle 3' \cong \angle 3$.

Reg4: Si los ángulos correspondientes son congruentes, las rectas son paralelas.

D4: C3 $\longrightarrow$ **C4:** $\overleftrightarrow{AT} \parallel \overleftrightarrow{BC}$

Reg5: Los ángulos alternos internos entre rectas paralelas son congruentes.

C5: C4 $\longrightarrow$ **C5:** $\angle 5 \cong \angle 4$

Esquema 7.7: Argumentación: La suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo es 180. Segunda propuesta

Ilustramos las dos propuestas de argumentación en el Diagrama 7.23.

Jai		Hen	Ign		Ign	Dar	Ign	Hen		Efr		Ign	
F!		**F**					**F**			**F**		**F**	
	P			P					P		P		P
219,221, 225, 229	230	231	233	234	235	236	241	242	243	244	245	246	247

Mar		Mar	Nan	Ign	Nan		Nan		Nan	
F		**!**	**F**		**F**					
	P					P		P		P
252	253	254, 258	260	261	264	265	266	267	268	269

Diagrama 7.23: Participación plena en la justificación:
la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180

Desde nuestro punto de vista, el extracto ejemplifica la interacción que se lleva a cabo al interior de una comunidad, en la que se desarrolla una práctica colectiva de argumentación. Los estudiantes participan de manera plena en dicha práctica proponiendo y desarrollando justificaciones, pero también apoyando y controlando los argumentos de los compañeros. La profesora actúa como un par más, casi siempre para apoyar las ideas que los estudiantes proponen. La participación de Jaime ejemplifica la naturalidad con la que se desenvuelven los estudiantes frente al grupo. Aunque su propuesta, original y fundamentada, no está en un grado de elaboración suficientemente avanzado, Jaime la presenta y expresa las dudas que tiene frente a ella. Sus compañeros escuchan y contribuyen a organizar las ideas para construir a partir de ella. En ese sentido, la idea inicial de Jaime se vuelve relevante. Darío y Henry refutan afirmaciones no sólo por la responsabilidad que han asumido con la producción de argumentos que respeten la norma de poder ser justificados desde la teoría, sino gracias a las herramientas conceptuales que tienen para evaluar críticamente lo que dicen sus compañeros; participan de manera genuina y autónoma. De hecho, ellos son los que se dan cuenta que la construcción sugerida por Jaime no garantiza la colinealidad de los puntos *F, C* y *E* y por lo tanto el paralelismo de las rectas *FE* y *AC*, así como tampoco garantiza la perpendicularidad de las rectas *FA* y *AC*. María, igual que Jaime, participa con una idea no elaborada en su totalidad, pero original, relevante y fundamentada, que Nancy ayuda a desarrollar. El compromiso de los estudiantes es evidente, tanto en la imaginación desplegada por María y Efraín al sugerir la argumentación, como en la afiliación a la comunidad con la que Nancy contribuye a sacar adelante la empresa. Como María deja cabos sueltos, especialmente al no justificar por qué se puede construir el $\angle 3'$ de tal suerte que resulte congruente al $\angle 3$ y quede en el interior del $\angle XAB$ y que la suma de las medidas de los ángulos $\angle 3$`, $\angle 5$ y $\angle 1$ sea 180, Nancy juega el papel de experta que apoya a su compañera en el desarrollo de la argumentación. Incluso más velozmente que la profesora capta la idea de María y la ayuda a desarrollar.

7.4. DEMOSTRAR

En esta sección vamos a analizar la evolución de la participación de los estudiantes relacionada con su contribución en el proceso de producir las demostraciones de los teoremas que se incluyen en el sistema axiomático, para materializar el producto de la actividad demostrativa. En particular, vamos a analizar cinco aspectos que tienen que ver con llevar a cabo, apoyar, garantizar o controlar que se parte de las condiciones dadas en el antecedente de la conjetura y se van encadenando afirmaciones lógicamente hasta llegar a la conclusión. Estos aspectos, que enumeramos a continuación, sobresalieron como resultado de la codificación de las transcripciones en donde se llevó a cabo la escritura colectiva de una demostración:

- Partir de las condiciones iniciales como los datos o lo único 'dado' para comenzar la demostración. (CondIni).
- Proponer afirmaciones para articular los pasos de la demostración a manera de proposiciones que hacen uso del lenguaje especializado acordado y la simbología geométrica correspondiente. (Lenguaj).
- Examinar en las afirmaciones previas y declarar explícitamente si están las condiciones para poder hacer una afirmación, a manera de conclusión necesaria. (ConclNe).
- Usar una estructura operatoria deductiva para constituir pasos de la demostración al asociar las condiciones suficientes para obtener una conclusión como necesaria de ellas, haciendo explícitos los enunciados que justifican dicha conclusión. (Justif).
- Controlar que el proceso se dirige hacia la conclusión final que se quiere demostrar. (ContrCon).

La evolución de la participación de los estudiantes en la producción de las demostraciones se da en la medida en que van diferenciando la forma de la argumentación cotidiana, o de la comunicación informal al interior de un grupo, y la producción de cadenas deductivas que se exhiben como resultado del proceso, al exterior del grupo. Para que los estudiantes ganen experiencia en estos aspectos es importante que tengan la oportunidad de contribuir con sus ideas, fruto de exploraciones o argumentaciones previas - o en el curso del mismo proceso - a la producción de demostraciones. El profesor gestiona el intercambio comunicativo conciliando las expresiones de los estudiantes con las formas correspondientes a la producción formal de una demostración.

Vamos a dar cuenta de la evolución de la participación presentando extractos de interacciones en tres momentos del desarrollo del curso: al inicio, en sesiones intermedias y en las clases finales. Ellas son representativas de las acciones en la que los estudiantes intervinieron para llevar a cabo la tarea.

7.4.1. Participación periférica legítima en la práctica de demostrar

La participación periférica legítima de los estudiantes se evidencia principalmente en los dos primeros episodios escogidos para el análisis a profundidad. En el primero, se lleva a cabo la producción de la demostración de primer teorema que se incorpora al sistema axiomático: una recta tiene al menos dos puntos. En el segundo, los estudiantes participan en la producción de la demostración del teorema: tres puntos no colineales determinan dos segmentos que se bisecan.

<u>Ejemplo 1</u>: Una recta tiene al menos dos puntos

En la clase en donde transcurre el fragmento de conversación con el que ejemplificamos la participación, la profesora explica algunos de los aspectos que se deben tener en cuenta al escribir las demostraciones. Como experta inicial de la comunidad, ella hace explícitas sus expectativas y por esa vía contribuye a la emergencia de las normas al respecto. Como lo describimos en el capítulo 6, primero se refiere a la necesidad de usar lenguaje especializado para transformar proposiciones generales, asignando nombres a los objetos geométricos que se mencionan en el enunciado; según ella, esto facilita la escritura de las afirmaciones que componen la demostración. Después menciona, como una práctica obligatoria, el uso de los enunciados del sistema axiomático como garantía para justificar las conclusiones que se obtengan. Una vez discutido un camino para construir la demostración, que es sugerido por Henry y Melisa (ver sección 7.3.1), empiezan el proceso de su escritura. La profesora guía la conversación ejemplificando cómo expresar las afirmaciones, aceptando o rechazando sugerencias, preguntando a los estudiantes con qué objeto las formulan, corrigiendo las formas de expresión y haciendo explícitas sus expectativas sobre cómo producir una demostración aceptable. La profesora está frente al grupo y los estudiantes participan desde sus lugares de trabajo. La interacción sucede después de haber escrito el primer paso de la demostración en el que afirman que *m* es una recta.

135	P:	(a)	Bueno, […] podría comenzar escogiendo dos reales distintos, ¿sí? Puedo comenzar,	CondIni

		(b)	y esto sería una propiedad de los números reales,	Justif
		(c)	entonces pondría aquí: "sean 1 y 2"… si quieren, "números reales", o "a y b" si lo quiero hacer en general,	Lenguaj
		(d)	entonces esto sería una propiedad de los reales	Justif
		(e)	[Escribe: 2. sean 1 y 2 números reales; propiedad de los reales],	Lenguaj
		(f)	¿no?; y ahora ¿qué voy a usar?	Justif
136	Juan:	Acortando, el postulado/		Justif
137	Ana	/que a cada número real le corresponde un único punto.		Justif
138	P:	(a)	Exacto, entonces, ahí diría, "sea *P* el punto de *m* que corresponde a 1 y *Q* el que le corresponde a 2".	ConclNe
		(b)	[Escribe: 3. Sea *P* un punto al que le corresponde el número 1 y *Q* un punto al que le corresponde el número 2; parte (ii) del postulado P2].	Lenguaj
		(c)	Y estoy usando, ¿qué?	Justif
139	Ana:	La segunda parte del postulado de correspondencia.		Justif
140	P:	(a)	El postulado correspondencia [puntos en] recta–números, segunda parte, ¿no?	Justif
		(b)	Entonces, tengo que demostrar que son distintos, *P* y *Q*.	ContrCon
		(c)	¿Qué era lo que tú decías? [Se dirige a Melisa].	Justif
141	Melisa:	(a)	Tenemos que usar la parte uno [del postulado]	Justif
		(b)	porque o si no *P* y *Q* serían un solo punto.	ConclNe
142	P:	(a)	*P* distinto de *Q*	ConclNe
		(b)	por la parte 1 del postulado, ¿sí? porque a cada punto le corresponde un único real, no podrían ser el mismo, porque entonces el punto P tendría dos coordenadas distintas.	Justif
		c)	[Escribe: 4. $P \neq Q$; Parte (i) del postulado P2].	Lenguaj
	[...]			
150	P:	[…]. Bueno, entonces ahí tenemos nuestro primer teorema […].		Institu

[P3:135-150]

Después de escribir las afirmaciones y justificaciones de la demostración, la profesora introduce, como requisito adicional, la especificación de los pasos previos que se usaron para poder usar una justificación en un paso de la demostración. Con ello pretende que los estudiantes tengan cierto control al garantizar que todas las condiciones suficientes para hacer una inferencia hayan sido establecidas previamente:

P: Tengo que decirles una cosa muy importante. […] es muy importante anotar, de aquí en adelante, qué paso de las demostraciones están usando en su argumento. Entonces, por ejemplo, "*m* es una recta", está dado, es el paso uno. "Sean 1 y 2 dos reales", es un teorema que estamos trayendo de afuera, […], lo que es cierto para los reales lo voy a usar, no lo voy a demostrar, yo lo tomo como cierto, […]. Entonces… aquí [en la justificación del paso tres]: "correspondencia puntos en recta-números" estoy usando el paso dos [escribe (2) al lado de la justificación del paso tres], estoy usando que hay dos número reales. Uso eso para combinar con el postulado [de correspondencia puntos en recta números] parte (ii), […]. En el fondo, estoy usando los pasos dos y uno de la demostración para aplicar el postulado. [Escribe (1) al lado del (2) en la justificación del paso tres]. En el paso "P diferente de Q" estoy usando la parte (i) del postulado [de correspondencia puntos en recta-números], porque esa parte dice: "si tengo un número real, le corresponde…" y la afirmación tres [Escribe (3) al lado de la justificación del paso 4]. […]. […], los números me ayudan a ver qué están conectando con qué, y qué se está usando, para sacar una conclusión. Por ejemplo, [los pasos] uno y dos conforman la hipótesis de ese postulado [correspondencia puntos en recta-números] y se está usando la implicación para concluir algo. […]

[P3:163-164]

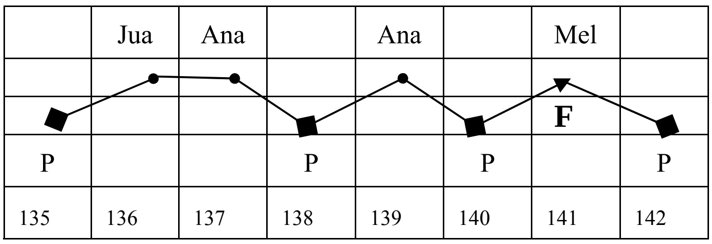


Diagrama 7.24: Participación periférica en la producción de la demostración de: 'Una recta tiene dos puntos'

En la conversación se aprecia que la profesora concreta los pasos de la demostración de acuerdo a la propuesta inicial de Juan y a una idea de Melisa. Como experta de la comunidad, la profesora es quien construye las dos primeras afirmaciones. También escribe las conclusiones específicas que se derivan de las justificaciones propuestas por Juan [136], Ana [137] y Melisa [141]. Al hacerlo, va discriminando las conclusiones parciales que se derivan de lo que ya se tiene [135a] o de las justificaciones usadas [138a, 142a] y cuáles son las justificaciones correspondientes [135b, 140a, 142b]. Adicionalmente, controla que la cadena deductiva se dirija hacia la meta, recordando cuál es la conclusión esperada [140b]. En el Diagrama 7.24 ilustramos la participación de Juan, Ana y Melisa quienes son dirigidos por la profesora.

Consideramos la participación de los estudiantes como periférica legítima. La profesora es responsable de la escritura de la demostración y dirige el rumbo de esta, aunque trata de involucrar a los estudiantes pidiéndoles justificaciones o ideas. Para ello, les hace preguntas, como "Y ahora, ¿qué voy a usar?", "¿estoy usando qué?", aunque ella es quien realiza el trabajo de escritura de la demostración y ejemplifica cómo proceder para: (i) garantizar que se parta de las condiciones dadas, (ii) controlar el uso del lenguaje especializado, (iii) garantizar que en los pasos previos se encuentran las condiciones para poder afirmar algo, de acuerdo a un enunciado condicional que se encuentre en el sistema axiomático y sin presuponer información así sea evidente, (iv) dirigir el uso de la estructura operatoria específica: afirmación-justificación-soporte de la justificación, (v) y garantizar que la cadena de afirmaciones se dirige hacia afirmar el consecuente. Los estudiantes aportan ideas generales, de acuerdo a la argumentación elaborada previamente, aunque poco relevantes para la tarea de producir la demostración; éstas no tienen la forma ni el lenguaje especializado correspondiente. Su participación no es genuina ni autónoma pues se trata de responder los requerimientos que hace la profesora. En la Tabla 7.3 presentamos la demostración que quedó escrita en el tablero, con las afirmaciones y razones que la profesora incluyó. Salvo por la idea de Melisa de usar la parte uno del postulado en el paso 4, las ideas y la escritura son responsabilidad de la profesora.

Afirmación	Justificación
1. m es una recta	1. Dado
2 Sean 1 y 2 dos números reales	2. Propiedad de los reales.
3. Sea P un punto al que le corresponde el número 1 y Q un punto al que le corresponde el número 2.	3. Parte (ii) del postulado P2. (1, 2)
4. $P \neq Q$	4. Parte (i) del postulado P2 y afirmación (3)
5. Toda recta tiene al menos dos puntos	5. (4)

Tabla 7.3: Demostración: 'una recta tiene dos puntos'

<u>Ejemplo 2:</u> 'Tres puntos no colineales determinan dos segmentos que se bisecan'

En el Episodio 2, antes de llevar a cabo la producción colectiva de la demostración del enunciado: tres puntos no colineales determinan dos segmentos que se bisecan, los estudiantes trabajaron en Cabri construyendo los segmentos *AB* y *CD* que cumplen la condición, a partir los puntos *A, B* y *C*. Como ellos debían justificar los pasos del procedimiento de construcción con enunciados del sistema axiomático, en el momento de participar en la producción de la demostración, asocian pasos de la construcción con pasos de la demostración y por esta vía tienen ideas para participar. A medida que dan sugerencias, profesora y estudiantes van contribuyendo al cumplimiento de los diferentes aspectos considerados para la escritura de las demostraciones.

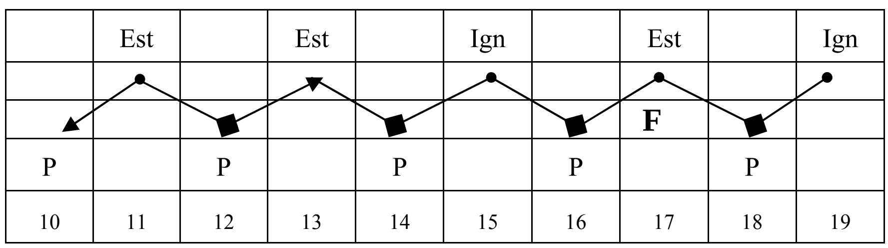
La profesora se encarga de escribir la demostración en el tablero y los estudiantes participan desde sus lugares de trabajo. Inicialmente, la profesora los impulsa a proponer afirmaciones y les recuerda que pueden valerse de las acciones que realizaron en Cabri y de las justificaciones que dieron a esas acciones. Motivados por la profesora, los estudiantes proponen cómo comenzar la demostración. La profesora aprovecha las intervenciones para explicar aspectos relacionados con la notación que van a usar, el lenguaje especializado y la justificación apropiada.

10	P:	[…] bueno, ¿cómo demostramos este teorema? Tres puntos no colineales determinan dos segmentos que se bisecan. ¿Cómo hacemos? Ese es el teorema.		
11	Est 1:	Dados *A, B, C/*		CondIni
12	P:	(a)	/Entonces comenzamos, afirmación – razón,	Lenguaj
		(b)	ustedes más o menos comenzaron… porque ustedes trataron de justificar cada acción que hacían en la calculadora, con algo de la teoría nuestra. Entonces, ¿cómo comenzamos? ¿Cuál será el primer paso?	Propone/ ViaDemost
13	Est 2:	*A, B, C*, dados/		CondIni
14	P:	(a)	/*A, B, C*, tres puntos no colineales,	CondIni
		(b)	dado.	Justif
		(c)	[Escribe: 1. *A, B, C* tres puntos no colineales; dado].	Lenguaj
		(d)	Eso es lo que tengo, nada más, todo lo demás, nos toca generarlo, ¿Cierto? […] ¿Cuál es el siguiente paso?	CondIni
15	Ignacio:	Trazar la recta *AB.*		CondSuf
16	P:	(a)	[…] si lo único que tengo son dos puntos y quiero hablar de segmento, el segmento se definió como subconjunto de la recta, entonces necesito la recta,	CondSuf
		(b)	luego, el segundo paso sería: existe la recta *AB*,	ConclNe
		(c)	¿por?	Justif
17	Est 3:	Postulado de la recta.		Justif
18	P:	(a)	Postulado de la recta,	Justif
		(b)	¿usando?, ¿usando qué? ¿El paso anterior? Uno que me diera los puntos, claro, tengo que tener los puntos para poder hacer la recta.	CondSuf
		(c)	Bueno [Escribe: 2. Existe $\overleftrightarrow{AB}$; postulado de la recta] ¿Y después?	Lenguaj

19	Ignacio:	Construimos el segmento *AB*.		CondSuf
20	P:	(a)	Construyeron el segmento ahí mismo, entonces, existe segmento *AB* y	CondSuf
		(b)	¿cuál es la justificación?	Justif
21	Est:	Definición de segmento.		Justif
22	P:	(a)	Definición de segmento,	Justif
		(b)	usando dos [el paso 2].	CondSuf
		(c)	[Escribe: 3. Existe $\overline{AB}$; definición de segmento y (2)].	Lenguaj
		(d)	Claro, necesitamos el segmento para poder hacer el siguiente paso ¿qué es?	CondSuf
23	Juan:	Existe *P* que es el punto medio [del segmento *AB*]/		ConclNe
24	P:	(a)	/porque estamos hablando de bisecar y bisecar quiere decir pasar por el punto medio.	ContrCon
		(b)	Entonces, paso cuatro, ¿qué voy a decir? Sea *P* el punto medio del segmento *AB* [Escribe: 4. Sea *P* el punto medio del segmento *AB*]. […] nosotros vamos a usar la notación, no vamos a escribir “segmento *AB*”, “recta *AB*”, vamos a usar esto [$\overline{AB}, \overleftrightarrow{AB}$] […].	Lenguaj
		[…]		
26	P:	(a)	[…]. Bueno, sea *P* el punto medio de *AB*,	ConclNe
		(b)	¿cómo lo justifico?	Justif
27	Ignacio:	Definición de punto medio.		Justif
28	P:	¿Definición de punto medio? [Murmullos].		Justif
29	Est 1:	Teorema de existencia [del punto medio de un segmento].		Justif
30	P:	(a)	Teorema de existencia [del punto medio de un segmento. Completa la justificación en el paso 4].	Justif
		(b)	Aquí quiero destacar…, el teorema de existencia del punto medio, usando que hay un segmento.	Justif
		(c)	No escribo aquí como me dijo Juan, porque ese “existe *P* que es punto medio” es un teorema nuestro; yo ya demostré que existe el punto medio, yo ya no tengo que decir que existe el punto medio sino que tengo que decir: “aparezca punto medio”, […], punto medio apareció, porque yo ya se que él está ahí, escondido de pronto, pero está. […].	Lenguaj

[P27:10-30]

El primer estudiante que interviene identifica cuál es la condición inicial de partida mencionando que se tienen los puntos *A, B* y *C* [11]. Se adelanta a la explicación de la profesora sobre la posibilidad de apoyarse en la construcción hecha para proponer pasos de la demostración [12b]. La profesora introduce el formato a dos columnas [12a], acoge y amplia la idea sugerida por el segundo estudiante [13], expresa y escribe el primer paso [14a, 14b] y recuerda que la única información inicial es la no colinealidad de los puntos. Como pasos siguientes, Ignacio describe cómo se hizo la construcción: "trazar la recta *AB*" [15], "construimos el segmento *AB*" [19]. La profesora convierte estas acciones en afirmaciones para incluirlas en la cadena deductiva: "existe la recta *AB*" [16b], "existe el segmento *AB*" [20]. Dos estudiantes, por solicitud de la profesora, mencionan las justificaciones pertinentes [17, 21] y ella concreta un nuevo paso de la demostración [22]. La intervención 23 de Juan se diferencia de las anteriores porque él intenta formular una proposición quizás procurando reproducir el estilo usado por la profesora para las afirmaciones. La profesora admite la propuesta y señala su importancia con relación a la conclusión a la que esperan llegar [24a]. Sin embargo, no escribe la sugerencia tal cual la propone Juan porque, desde su punto de vista, afirmar que existe el punto medio de un segmento es ya un teorema del sistema; en este caso, se trata sólo de determinar dicho punto asignándole un nombre, tal como lo explica en la intervención 30c. Ningún estudiante le pregunta por qué en los pasos anteriores sí escribe "existe $\overleftrightarrow{AB}$" y "existe $\overline{AB}$" en lugar de "sea $\overleftrightarrow{AB}$" y "sea $\overline{AB}$" ni ella lo aclara. Muy probablemente si algún estudiante hubiera intervenido al respecto, ella habría cambiado la palabra "existe" por la palabra "sea" para evitar confusiones. Además de modificar la afirmación propuesta por Juan, la profesora les recuerda que hay que usar el lenguaje geométrico [24b], pide la justificación de la afirmación [26b] y rechaza tácitamente una justificación sugerida por Ignacio repitiéndola en forma de interrogante [28]. Los estudiantes ya están acostumbrados a esta forma de rechazo pues tan pronto ella termina la frase, otro estudiante sugiere la justificación apropiada [29]. Después, la profesora completa el paso 4 de la demostración. En el Diagrama 7.25 ilustramos la participación de los estudiantes.



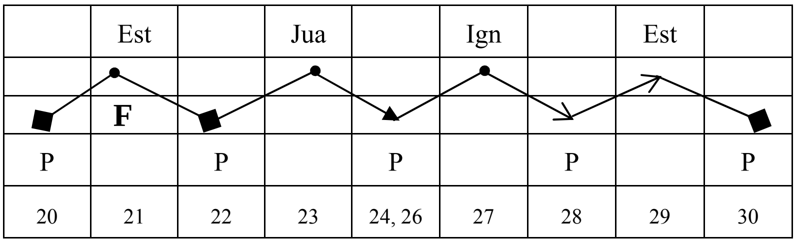


Diagrama 7.25: Participación periférica en la producción de la demostración: 'Tres puntos no colineales determinan dos segmentos que se bisecan'

La participación de los estudiantes es periférica legítima. Ellos aportan ideas recordando cómo hicieron la construcción, procuran elaborar afirmaciones en la forma en que lo hace la profesora y fundamentan con enunciados del sistema dos afirmaciones. La profesora es quien les da la forma apropiada, sugiere la notación y el lenguaje, revisa que dentro del conjunto de afirmaciones previas estén las condiciones suficientes para concluir una afirmación, pide las justificaciones, las escribe y controla que la demostración se dirija a la meta. No se limita a hacer la demostración delante de los estudiantes sino que se vale de lo que ellos dicen para examinar opciones de afirmaciones y revisar justificaciones. Por esa vía, involucra a los estudiantes en el proceso. Consideramos la participación de los estudiantes poco relevante y propia de personas inexpertas en la escritura de demostraciones, aunque exhiben un sentido de afiliación con la empresa que se lleva a cabo. En cierta medida la participación es genuina pues se fundamentan en la construcción y en las justificaciones que dieron a ésta, pero no es original sino guiada por la sugerencia de la profesora de recordar los pasos de la construcción para elaborar los pasos de la demostración. Tan es así, que la producción de la demostración continúa por esa vía hasta que llegan a un punto en el que los estudiantes ya no cuentan con un referente para proponer ideas y la profesora termina explicando cómo finalizar la demostración. Esta queda escrita en el tablero como aparece en la Tabla 7.4.

Afirmación	Justificación
1. Sean A, B, C tres puntos no colineales.	1. Dado.
2. Existe la recta $\overleftrightarrow{AB}$	2. Postulado P3[33].
3. Existe el segmento $\overline{AB}$	3. Definición de segmento, (2).
4. Sea P el punto medio del segmento $\overline{AB}$	4. Teorema de existencia del punto medio, (3).

[33] P3: por dos puntos pasa una recta.

5. Existe la recta $\overleftrightarrow{CP}$	5. Postulado P3. (1,4).
6. Sea J un punto en la recta $\overleftrightarrow{CP}$ tal que C-P-J	6. Teorema de interstancia, (5).
7. Existe el rayo $\overrightarrow{PJ}$	7. Definición de rayo, (5, 6).
8. $CP = r, r > 0$	8. Postulado P5, (1,4).
9. Existe un punto D en $\overrightarrow{PJ}$ tal que $PD = r$.	9. Teorema T6, (7, 8).
10. $PD = PC$.	10. Sustituyendo r en la afirmación 9 por CP (8)
11. *C-D-P, D-C-P,* or *C-P-D.*	11.
Caso C-D-P conduce a una contradicción.	Definición de interestancia, (1,10).
Caso D-C-P conduce a una contradicción.	Definición de interestancia, (1, 10).
Caso C-P-D.	(11).
12. P es punto medio del segmento $\overline{CD}$.	12. Definición de punto medio de un segmento, (10, 11).

Tabla 7.4: Demostración: 'Tres puntos no colineales determinan dos segmentos que se bisecan'

7.4.2. Participación legítima de los estudiantes en la práctica de demostrar

Vamos a presentar dos extractos representativos de la participación legítima de los estudiantes en la escritura de demostraciones; estos ocurren hacia mediados del semestre, en el Episodio 7. El primero de ellos sucede cuando los estudiantes intentan escribir la demostración del teorema del triángulo isósceles. El segundo, cuando buscan demostrar el recíproco del este teorema.

Ejemplo 1: 'Los ángulos opuestos a los lados congruentes de un triángulo isósceles son congruentes'

La producción colectiva de la demostración del teorema del triángulo isósceles comienza con la escritura del enunciado por parte de la profesora, quien también hace una representación en el tablero de un ΔABC con $\overline{AB}$ congruente al $\overline{BC}$, para apoyar la elaboración de la demostración. Luego, ella pide a William encargarse de ésta. En el extracto, que vamos a reproducir a continuación, no incluimos una primera parte del proceso en el que William escribe el primer paso de la demostración (1. ABC es isósceles con $\overline{AB} \cong \overline{BC}$) pero no se le ocurre cómo proseguir. Algunos estudiantes proponen ideas que se van analizando y descartando, hasta que Darío sugiere trazar el segmento cuyos extremos son el vértice B y el punto medio D del segmento AC. Nos concentramos en el momento en el que William usa la idea de Darío para continuar la escritura de la demostración, justificando la congruencia de los triángulos ABD y CBD. William va escribiendo las afirmaciones mientras que la profesora, Melisa e Ignacio controlan las justificaciones, el lenguaje y el rigor con el que se debe construir la cadena deductiva.

156	Darío:	Pues, tendríamos que hallar es el punto medio.	ConstrAux
157	Leopoldo:	Qué D sea el punto medio. [Murmullos].	ConstrAux
		[…]	
168	P:	(a) […] ahora están diciendo […]… que traces el segmento *BD*.	ConstrAux
		(b) Esto se llama una mediana. […] [Figura 7.34].	Lenguaj
		(c) Bueno, ¿ahora sí podrías hacerlo [dirigiéndose a William]… […].	FormuTarea

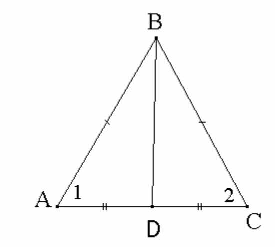


Figura 7.34

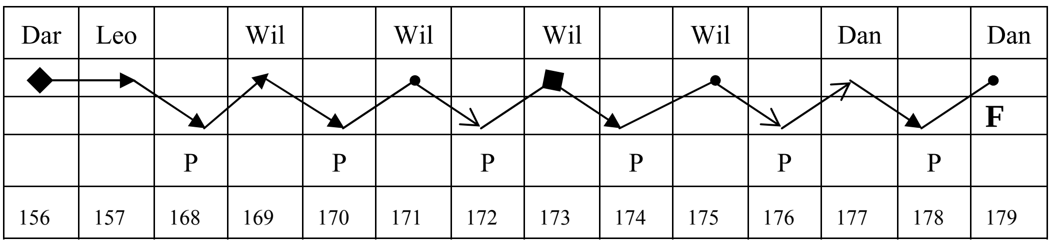
169	William:	Entonces podríamos decir esto [Escribe: 2. *D* punto medio de $\overline{AC}$].	ConclNe
170	P:	¿Y eso cómo lo justificamos?	Justif
171	William:	Definición de punto medio.	Justif
172	P:	¿Definición de punto medio?... Teorema de existencia del punto medio.	Justif
173	William:	[Completa la justificación del paso 2]. […] Ahora tenemos que por *B* y *D* pasa una recta. [Escribe: 3. Existe $\overleftrightarrow{DB}$; postulado de la recta].	Rigor
174	P:	(a) Sí. Es una construcción auxiliar. Entonces hay que justificarla.	ConstrAux
		(b) ¿Y qué paso estás usando aquí?	CondSuf
175	William:	Ninguno.	CondSuf
176	P:	¿Ninguno?	
177	Daniel:	El uno.	CondSuf
178	P:	¿Y por qué el uno?	
179	Daniel:	Porque tenemos los segmentos.	CondSuf
180	P:	¡Ah!… porque un triángulo es la unión de tres segmentos; tenemos el segmento y necesitamos un segmento para poder hablar de su punto medio.	CondSuf

181	William:	Acá, uno y dos [en el paso tres].	CondSuf
		[…]	
183	William:	[William escribe al lado de postulado de la recta: (1, 2). Después escribe el paso: 4. Existe *DB*; definición de segmento].	Lenguaj
		[…]	
185	Ana:	Allí ya habría… por lado - lado – lado.	CondSuf
		[…]	
188	P:	Es que estamos justificando todo lo que estamos haciendo.	Rigor
189	William:	[Escribe: 5. $\overline{DB} \cong \overline{DB}$]	ConclNe
190	P:	¿Y eso por qué?	Justif
191	William:	Identidad/	Justif
192	P:	/Propiedad reflexiva de la relación de congruencia.	Lenguaj
		[...]	
197	William:	[Escribe: 6. $\triangle ADB \cong \triangle CDB$].	ConclNe
198	P:	¿Por qué?	Justif
199	Melisa:	Tiene tres lados congruentes.	Justif
200	P:	Él no tiene tres lados congruentes.	CondSuf
201	William:	[Corrige paso 6: $\overline{AD} \cong \overline{DC}$; definición de punto medio].	ConclNe
202	P:	¿Están de acuerdo? ¿El segmento *AD* es congruente al segmento *DC* por definición de punto medio?	Rigor
203	Ignacio:	No, primero… primero tenemos que decir que son iguales.	Rigor
204	P:	La definición de punto medio nos da igualdad de medidas, no congruencia. Muy bien Ignacio.	Rigor
205	William:	[Corrige: 6. $AD = DC$; def. punto medio. Escribe: 7. $\overline{AD} \cong \overline{DC}$; definición de congruencia.8. $\Delta\, ADB \cong \Delta\, CBD$; Criterio congruencia].	ConclNe
206	Daniel:	Ponga los numeritos al lado [le dice a William].	CondSuf
207	P:	Muy bien Daniel. No se les olvide que tienen que poner los pasos que están usando para concluir cada uno de los pasos en la demostración.	CondSuf
208	William:	[Escribe los números correspondientes: en el paso 6: coloca (2); en el 7: coloca (6); en el paso 8, coloca (7, 5, 1)].	CondSuf
209	P:	¿Están de acuerdo con esto?	CondSuf
210	Melisa:	Está mal nombrada [la correspondencia de los triángulos en el paso 8].	Lenguaj
211	P:	La correspondencia no es la que tú has puesto.	Lenguaj
212	Ana:	*ADB y CDB.*	

213	William:	[Corrige el paso 8: $\Delta\, ADB \cong \Delta\, CDB$.		Lenguaj
		Escribe: 9. $\angle BAD \cong \angle BCD$; definición de triángulos congruentes].		CondSuf
214	Ignacio:	¿Cómo se justifica el último?		Justif
215	P:	(a)	Definición de triángulos congruentes.	Justif
		(b)	Por favor… acá me están haciendo una pregunta. Me pregunta Ignacio… cuando él ponga “ángulo *BAD* [congruente] con ángulo *BCD”* ¿qué justificación [se escribe]? Definición de triángulos congruentes… triángulos congruentes… [o] sus partes correspondientes son congruentes, es la definición.	Lenguaj

[P66:156-212]

Darío y Leopoldo proponen tomar a *D* como el punto medio del segmento *AC* [156, 157]. Como la profesora apoya la idea [168], William decide comenzar justificando dicha construcción. Escribe el segundo paso de la demostración [169] que justifica, a petición de la profesora [170], con la definición de punto medio [171]. Ella corrige la justificación refiriéndose al teorema de existencia del punto medio [172]. A continuación, en el paso 3, William se refiere a la recta *BD* [173] cuya existencia justifica mediante el postulado de la recta. Con este paso William está cumpliendo con uno de los requisitos que impone el rigor establecido en la clase: la determinación de un segmento a partir de dos puntos no puede hacerse sin haber declarado previamente la recta que pasa por ellos, pues el segmento se ha definido como subconjunto de la recta. Es una práctica usual que han adoptado para cumplir con la norma de justificar todas las afirmaciones que se hacen con enunciados tomados del sistema axiomático, incluidas las construcciones auxiliares. Además de apoyar la idea de William, la profesora le pregunta qué pasos previos le permiten hacer la afirmación [174b]. Como William declara que ninguno [175], Daniel menciona el paso 1 [177] y fundamenta por qué [179]. De esta manera contribuye con la escritura haciendo explícitas las condiciones para poder afirmar la conclusión que se escribe. William completa las condiciones diciendo que el paso 2 también debe incluirse como justificación y así se completa el paso 3 [181]. Después, escribe el paso 4 declarando la existencia del segmento *BD* [184]. Ana parece adelantarse en el proceso de escritura para sugerir que se puede afirmar la congruencia de los triángulos *ADB* y *CDB* por el criterio lado-lado-lado [185]; por esta razón, la profesora le recuerda que están justificando cada una de las afirmaciones [188]. William escribe el quinto paso de la demostración concluyendo la congruencia de un segmento consigo mismo [189][34], que justifica haciendo referencia a la “identidad” [191]. La profesora corrige el lenguaje rectificando el término para usar “propiedad reflexiva de la congruencia” [192]. A continuación, William concluye la congruencia de los triángulos $\triangle ADB$ y $\triangle CDB$ [197] prematuramente pues parece creer, como Melisa [199], que ya ha declarado explícitamente la congruencia de tres pares de lados; en realidad, en los pasos previos ha hecho explícita la congruencia de dos pares únicamente ($\overline{AB} \cong \overline{CB}$ y $\overline{DB} \cong \overline{DB}$), aunque también ha concluido que D es punto medio del segmento AC. Cuándo la profesora señala este hecho [200], William agrega la congruencia de los segmentos $\overline{AD}$ y $\overline{DC}$, justificándola con la definición de punto medio [201]. La profesora objeta la justificación [202] e Ignacio recuerda que primero hay que concluir que las distancias AD y DC son iguales, pues es lo que se puede inferir de la definición de punto medio [203]. Este es otro ejemplo del rigor con el que se trabajan las demostraciones en el curso. William corrige el paso 6 de la demostración incluyendo la igualdad de las distancias AD y DC, para luego poder afirmar la congruencia de los segmentos correspondientes y así poder concluir finalmente la congruencia de los triángulos $\triangle ADB$ y $\triangle CDB$ [205]. Cuando William termina la escritura de los pasos 6 a 8, Daniel interviene espontáneamente para recordarle que debe escribir en qué pasos previos se encuentran las condiciones suficientes para poder concluir y justificar las afirmaciones [206] y Melisa le corrige el lenguaje usado, pues William nombra los triángulos sin tener en cuenta la correspondencia de los vértices [210]. Finalmente, concluye afirmando la congruencia de los ángulos $\angle A$ y $\angle B$ del triángulo isósceles [213b] con lo que termina la escritura de la demostración. Después, por solicitud de Ignacio, la profesora hace una aclaración sobre la justificación que se debe escribir cuando se concluye la congruencia de partes correspondientes de triángulos congruentes. En el Diagrama 7.26 ilustramos la participación de los estudiantes.



[34] Codificamos la intervención 189 con ConclNe y no con Lenguaj porque William está sugiriendo una nueva conclusión para la demostración; no está traduciendo a lenguaje simbólico una conclusión ya hecha.

	Wil	Ana		Wil		Wil		Wil		Mel		Wil	
						F							
P			P		P		P		P		P		P
180	181, 183	185	188	189	190	191	192	197	198	199	200	201	202

Ign		Wil	Dan		Wil		Mel		Ana	Wil	Ign	
	P			P		P		P				P
203	204	205	206	207	208	209	210	211	212	213	214	215

Diagrama 7.26: Participación legítima en la producción de la demostración: 'los ángulos opuestos a los lados congruentes de un triángulo isósceles son congruentes'

Consideramos que la participación es legítima no sólo por las intervenciones de William, quien se esfuerza por escribir los pasos de la demostración de acuerdo a las reglas establecidas, sino por el papel que asumen Darío, Leopoldo, Daniel, Ana, Melisa e Ignacio. Se aprecia mayor relevancia en los aportes, en comparación con las intervenciones con las que ilustramos la participación periférica legítima. Darío y Leopoldo proponen una construcción auxiliar original y útil (trazar la mediana), Wilson acoge la idea e intenta darle forma en pasos de la demostración y, adicionalmente, incluye algunas afirmaciones para darle soporte teórico a la existencia de la mediana. Daniel está atento al control de los pasos previos para garantizar que estén las condiciones suficientes para afirmar algo. Ana controla, así como la profesora, que el proceso se dirija a la meta y Melisa está pendiente del uso correcto del lenguaje. Los estudiantes dan muestras de avance en la práctica pues hacen contribuciones importantes en la producción de conclusiones que llevan a la meta, en el uso del lenguaje especializado y en el control del rigor previsto para la escritura de las demostraciones. La profesora estimula principalmente las intervenciones de William apoyándolo cuando las afirmaciones son pertinentes, pidiéndole las justificaciones de las afirmaciones y objetando algunas de ellas. La participación de Daniel, Ana y Melisa es genuina por cuanto asumen la responsabilidad por el control del proceso interviniendo espontáneamente cuando consideran que pueden hacer algún aporte. Pero no la podemos considerar autónoma porque, a pesar de que la profesora no es quien propone qué escribir, va aprobando o desaprobando las ideas y por esa vía dirige la conversación. En el tablero quedó escrita la demostración, como lo indica la Tabla 7.5[35].

Afirmación	Justificación
1. ΔABC es isósceles con $\overline{AB} \cong \overline{BC}$.	1. Dado
2. D punto medio de $\overline{AC}$	2. ~~Definición de punto medio.~~Teorema de existencia del punto medio.
3. Existe $\overleftrightarrow{DB}$	3. Postulado de la recta; (1,2)
4. Existe $\overline{DB}$	4. Definición de segmento. (3)
5. $\overline{DB} \cong \overline{DB}$	4. ~~Identidad~~ Propiedad reflexiva de la congruencia.
	5. Propiedad reflexiva.
	6. Definición de punto medio. (2)
	7. Definición de congruencia. (6)
	8. Criterio de congruencia. (7, 5, 1).
	9. Partes correspondientes de triángulos congruentes.
6. ~~$\Delta ADB \cong \Delta CDB$~~	
6. AD = DC	6. Definición de punto medio. (2)
7. $\overline{AD} \cong \overline{DC}$	7. Definición de congruencia. (6)
~~8. $\Delta\, ADB \cong \Delta\, CBD$~~	8. Criterio de congruencia (7, 5, 1)
8. $\Delta ADB \cong \Delta CDB$	
9. $\angle BAD \cong \angle BCD$	9. Definición de triángulos congruentes.

Tabla 7.5: Demostración: 'Los ángulos opuestos a los lados congruentes de un triángulo isósceles son congruentes'

[35] Aunque los números usados para revisar qué pasos previos permiten concluir la afirmación siempre se escriben al lado de las justificaciones, decidimos escribirlos un renglón más abajo cuando la escritura se hizo posterior a la de la justificación, para ilustrar la dinámica del proceso. Así mismo, dejamos las primeras versiones sugeridas, las cuales tachamos cuando se corrigieron.

<u>Ejemplo 2:</u> 'Si un triángulo tiene dos ángulos internos congruentes, entonces es isósceles'

En una interacción relacionada con la justificación de una conjetura, surge la necesidad de demostrar que si dos ángulos de un triángulo son congruentes el triángulo es isósceles. La profesora pide a los estudiantes trabajar fuera de clase para ver si tienen alguna idea para demostrar el enunciado, que denomina teorema recíproco del teorema del triángulo isósceles. En la clase siguiente, Melisa dice que ella logró avanzar hasta un punto en la producción de la demostración, a partir de la construcción de una mediana, pero luego tuvo un inconveniente pues no pudo establecer la congruencia de los triángulos que se formaron. La profesora le pide exponer públicamente lo que hizo, escribiendo los avances en el tablero, y se analiza por qué la propuesta es inconveniente. A continuación, María y Jaime proponen trazar la bisectriz del ángulo no congruente pero no avanzan en la escritura de la demostración porque se dan cuenta rápidamente que así tampoco tienen cómo justificar la congruencia de dos triángulos. La profesora pide al grupo seguir pensando en la posible demostración, recordando lo que ya han intentado. Dos clases después, Melisa manifiesta que tiene una nueva propuesta, esta vez con base en la construcción de las bisectrices de los ángulos congruentes.

42 P: […] les dejé de tarea tratar de demostrar el recíproco […] ¿Sí? ¿Quién lo hizo? […].

[…]

56 Melisa: (a) […]. Bueno, entonces decíamos que el triángulo estaba dado. CondIni

(b) [Escribe: 1. ΔABC; 2. $\angle CAB \cong \angle ABC$ y hace una figura]. [Figura 7.35]. Lenguaj

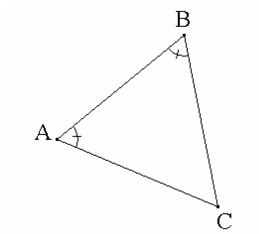


Figura 7.35

(c) Que la congruencia de los dos ángulos estaba dada. CondIni

[…]

58 Melisa: (a) Por definición de triángulo, entonces existían estos segmentos Justif

(b) [Escribe: 3. $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$]. ConclNe

		[…]		
60	Melisa:	(a)	El punto *P* es el punto medio de *AB*.	ConclNe
		(b)	[Escribe: 4. Sea *P* el punto medio de $\overline{AB}$].	Lenguaj
		(c)	Eso lo podemos decir por [el] teorema de existencia y unicidad del punto medio ¿Sí?	Justif
61	P:	¡Aja!		
62	Melisa:	(a)	¿Sí? Entonces decimos que existe *C*,	ConclNe
		(b)	[Escribe: 5. $\exists$ el punto *C* ;	Lenguaj
		(c)	Definición de segmento.] Y existe	Justif
63	P:	No, *C* esta dado en el triángulo… bueno.		Justif
64	Melisa:	Y decimos que existe el segmento *PC* [Complementa la figura; Figura 7.36].		ConclNe

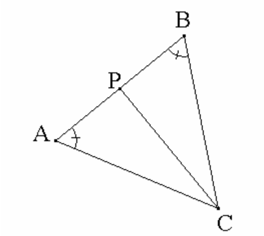


Figura 7.36

65	P:	¿Por?		Justif
66	Melisa:	(a)	Por postulado de la recta,	Justif
		(b)	decimos que por dos puntos pasa una única recta	ConclNe
		(c)	[Escribe: 6. $\exists$ $\overline{PC}$].	Lenguaj
67	P:	Entonces eso es primero.		CondSuf
68	Melisa:	(a)	Y como el segmento es subconjunto de la recta,	Justif
		(b)	Entonces existe el segmento [*PC*]. [Corrige el paso 6].	ConclNe
		[…]		
70	Melisa:	Entonces, […] ya tenemos la congruencia de éste [$\overline{PA} \equiv \overline{PB}$]…, la congruencia de éste… y tenemos la congruencia de este segmento [$\overline{PC} \equiv \overline{PC}$].		CondSuf
71	P:	O sea que eventualmente ibas a llegar a [segmento] *PB*/		ConclNe
72	Melisa:	(a)	/es congruente con [segmento] *PA* y… pues el segmento *PC* es congruente consigo mismo.	ConclNe
		(b)	Entonces, hasta ahí llegué porque pues tenía dos lados y tenía un ángulo, pero el ángulo no era éste ángulo [$\angle CPB$], entonces…	CondSuf

[P73:56-72]

		[Dos clases después]	
9	Melisa:	Bueno, entonces tenemos el triángulo *ABC*. [Figura 7.37].	CondIni

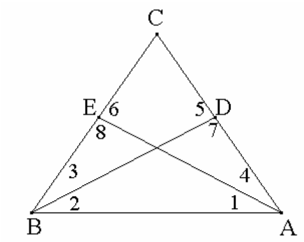


Figura 7.37

		[…]	
11	Melisa:	Con los ángulos congruentes *A*… todo el ángulo *A* y todo el ángulo *B* ¿Sí?	CondIni
12	P:	[∠] *CAB* y [∠] *CBA*. […]. Entonces tienes que nombrar el ángulo completo. No [decir] “todo A” sino, “[ángulo] *CAB* y el ángulo *CBA”*.	Lenguaj
13	Melisa:	Bueno, sí señora, entonces sería el ángulo *ACB* congruente con [∠] *CBA*.	Lenguaj
14	P:	[∠] *CAB*… bueno, [dirigiéndose a todo el curso] se equivocó ¿Y después, qué hiciste?	Lenguaj
15	Melisa:	Entonces… con la bisectriz. La bisectriz del ángulo *CAB*, corta al segmento *CB* en *E*… y la bisectriz del ángulo *CBA* en *D* ¿Listo?	ConstrAux
16	P:	Bien.[36]	
17	Melisa:	(a) Entonces decimos que como la bisectriz… la definición de la bisectriz de un ángulo nos da dos ángulos congruentes,	Justif
		(b) entonces el ángulo 1 es congruente al ángulo 2 y el ángulo 3 es congruente al ángulo 4.	ConclNe
18	P:	¿Por qué?	Justif
19	Melisa:	(a) Porque como el ángulo [∠ *CAB*] todo era congruente [con ∠ *CBA*],	CondSuf
		(b) nos da dos [ángulos] congruentes: el [∠] 4 y el [∠] 1 ¿Sí? Entonces como el [∠] 4 y el [∠]1 son congruentes, entre los dos, y el [∠]2 y el [∠] 3 son congruentes entonces… y/	ConclNe
20	P:	/Por el teorema de ayer. Ya ayer establecimos ese teorema. […] Bueno […].[37]	Justif

[36] La profesora no pide justificación de esa afirmación, pero en la clase en la que María y Jaime hicieron su propuesta recordaron que habían adoptado como postulado del sistema axiomático que las bisectrices de los ángulos de un triángulo cortan sus lados opuestos.

21	Melisa:	(a)	Entonces ya por definición de triángulo	Justif
		(b)	tenemos el triángulo *DBA* y el triángulo *EAB* ¿Sí?	ConclNe
		(c)	Entonces, tenemos […], el triángulo *EBA*, tiene un ángulo congruente con el triángulo *DBA*… que es el ángulo 2 y el ángulo 1, respectivamente.	ConSuf
		[…]		
23	Melisa:	(a)	Los dos comparten el segmento *BA*, que es congruente [consigo mismo]…	ConclNe
		(b)	y el ángulo *CAB* es congruente con el ángulo *CBA*.	ConclNe
		(c)	Entonces ya tenemos ángulo- lado-ángulo.	Justif
		(d)	Entonces podemos decir que los dos [triángulos] son congruentes [$\Delta EBA \cong \Delta DBA$].	ConclNe
24	P:	Los dos triángulos. Sí.		ConclNe
25	Melisa:	(a)	Entonces, […]… decimos, o sea, por partes correspondientes de triángulos congruentes,	Justif
		(b)	decimos que éste [$\angle 7$] es congruente con éste ángulo [$\angle 8$].	ConclNe
		[...]		
29	Melisa:	(a)	Por par lineal[38]	Justif
		(b)	podemos decir que el [ángulo] 5 y el [ángulo] 6 son congruentes.	ConclNe
		[…]		
31	Melisa:	[…]… este lado, que sería el lado *EA*, sería congruente con el lado *DB*.		ConclNe
		[…]		
33	Melisa:	(a)	Entonces ya tenemos un ángulo y un lado. Como dijimos que el [$\angle$] 4 era congruente con el [$\angle$]3,	CondSuf
		(b)	entonces podemos decir que ya tenemos ángulo-lado-ángulo. Por lo tanto los…	Justif
		[…]		
35	Melisa:	(a) El triángulo *CEA* es congruente con [Δ] *CBD*		ConclNe
		(b) y, por partes correspondientes de triángulos congruentes		Justif

[37] El teorema al que se refiere la profesora dice: Si dos ángulos son congruentes, sus bisectrices forman dos pares de ángulos respectivamente congruentes.

[38] Realmente la justificación de esa afirmación es porque los ángulos suplementarios de dos ángulos congruentes, son congruentes. Como los ángulos $\angle 5$ y $\angle 7$ – $\angle 6$ y $\angle 8$ son par lineal y además $\angle 7$ y $\angle 8$ son congruentes, entonces $\angle 5$ y $\angle 6$ también lo son.

(c) podemos decir que el lado *CA* es congruente con el lado *CB*. ConclNe

[P80:9-35]

Dividimos el extracto en dos partes pues corresponde a la interacción de Melisa y la profesora en clases diferentes. En la primera, por solicitud de la profesora, Melisa explica los cuatro primeros pasos de su propuesta de demostración: parte de la información dada [56a, 56b], justifica la existencia del segmento *AB* [58a] y declara a *P*, punto medio de este segmento. Probablemente la idea de usar el punto medio del segmento *AB* surge del éxito obtenido con ésta para demostrar el teorema del triángulo isósceles. Después, la estudiante establece las condiciones para poder afirmar que se tiene el segmento *PC* y por eso hace alusión al punto *C* [62a] sustentando su existencia a partir de la definición de segmento [62c]; la profesora objeta la justificación y explica que es algo que se puede considerar dentro de la información dada, cuando se parte del triángulo *ABC* [63]. Luego, Melisa concluye la existencia del segmento *PC* [64] pero, cuando la profesora le pide la justificación [65], ella se da cuenta que debió primero referirse a la recta *PC* pues de sólo así puede justificar la existencia del segmento; esto la lleva a corregir el paso 6 para incluir dos pasos previos [66, 68]. A continuación, Melisa explica que ya están dadas las condiciones para referirse a la congruencia de dos pares de lados correspondientes de los triángulos $\triangle APC$ y $\triangle BPC$ [70]; escribe esto como conclusión [72a] y acto seguido señala que el par de ángulos congruentes no corresponde a los ángulos formados por los lados congruentes, por lo que no puede afirmar la congruencia de los triángulos [72b]. En la segunda parte del extracto, por iniciativa propia, Melisa llega a la clase con una propuesta de demostración elaborada por ella, y la profesora cede tiempo de la clase para que ella la socialice. Melisa toma la idea de María y Jaime de usar la bisectriz, pero en lugar de trazarla para el ángulo desigual, traza las bisectrices de los ángulos congruentes [9]. De esa forma obtiene dos pares de triángulos solapados congruentes que usa convenientemente para concluir que los lados *BC* y *AC* del triángulo *ABC* son congruentes. En su exposición tiene algunas fallas en el uso del lenguaje [11, 13], deja sin justificar la existencia de los puntos *E* y *D* [15], justifica muy a la ligera la congruencia de los ángulos $\angle 5$ y $\angle 6$ [29] y se apresura a afirmar la congruencia de los pares de ángulos $\angle 1, \angle 2$ y $\angle 3, \angle 4$, sin haber afirmado primero la congruencia de los ángulos que forma cada una de las bisectrices [17b], lo que hace que la profesora le pida dicha justificación [18]. Sin embargo, avanza deductivamente hacia la conclusión esperada y concluye lo que se desea. Con el Diagrama 7.27 ilustramos la participación de Melisa en la práctica de demostrar.

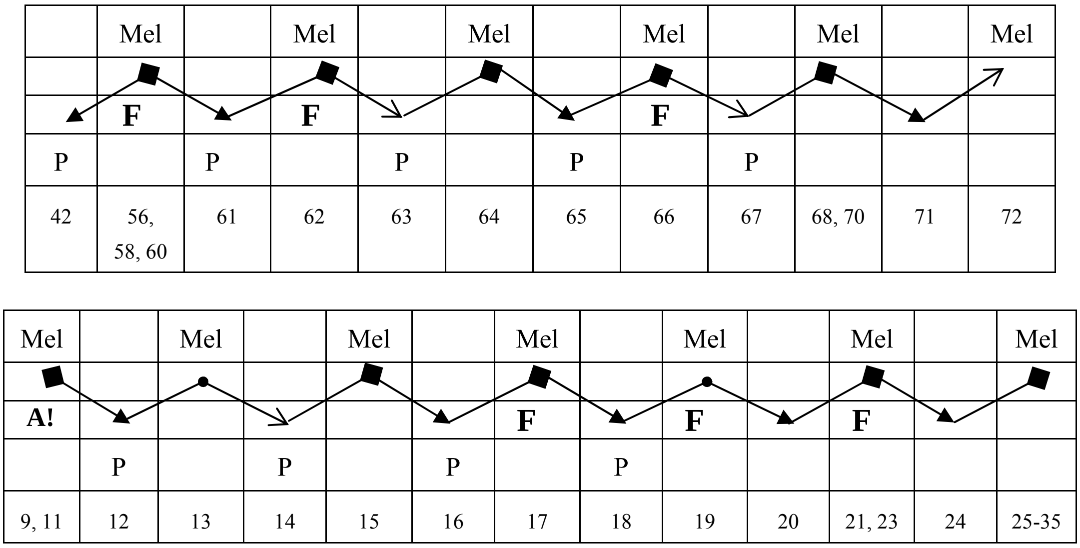


Diagrama 7.27: Participación legítima en la demostración: 'si un triángulo tiene dos ángulos internos congruentes, entonces es isósceles'

La participación de Melisa en la producción de la demostración es legítima. En primer lugar, es relevante pues ella exhibe un control importante de las diferentes acciones que se refieren a la práctica de demostrar: formula afirmaciones que justifica con enunciados del sistema, está atenta a que estén las condiciones suficientes para poder hacer una afirmación, usa el lenguaje apropiado y controla que la cadena deductiva se dirija a la meta. Aunque en una oportunidad usa una justificación inapropiada y olvida referirse a la recta *PC* antes de declarar el segmento *PC,* estos tropiezos son comprensibles pues se refieren a aspectos muy técnicos del proceso, que no son la esencia de la demostración. Además, el fracaso en su primer intento de justificación parece impulsarla a seguir pensando en la demostración y lograr éxito en la empresa. La participación es genuina, consciente de la responsabilidad de contribuir en la producción de la demostración. Aunque la primera intervención no es espontánea, pues Melisa atiende al requerimiento de la profesora, se evidencia autonomía en la participación: la estudiante elabora por su cuenta ambas propuestas, las expone y llega a una demostración completa que el grupo acepta; además, sólo recurre a la profesora en dos oportunidades para asegurarse que va por el camino correcto [61, 15]. Evaluamos la segunda propuesta de Melisa como medianamente original en tanto ella se apoya en la idea de María y Jaime de trazar la bisectriz, pero se le ocurre trazar las bisectrices de los ángulos congruentes. Por el contrario, la primera propuesta no puede considerarse original pues está basada en la construcción auxiliar que sirvió para demostrar el teorema del triángulo isósceles. No consideramos la participación de Melisa como plena porque dista de la participación de un experto en que la estudiante se preocupa por justificar ciertas afirmaciones que no son las centrales de la cadena deductiva, mientras que pasa un poco a la ligera por afirmaciones que requieren cuidado en la elaboración; es decir, se aprecia falta de regulación en el criterio sobre qué es lo que podría dejar de mencionarse y qué no. Por eso la profesora tiene que intervenir contribuyendo a dicha regulación. Además, hace falta originalidad en la producción ya que la estudiante se vale de rutinas que se están practicando en el curso en las clases en donde ella propone su demostración. En las columnas de la izquierda de las Tablas 7.6 y 7.7 presentamos cómo quedan registrados en el tablero el primer intento de demostración y la demostración misma. En las columnas de la derecha escribimos las justificaciones que la estudiante propone oralmente.

Afirmación	Justificación
1. ΔABC	1. Dado
2. $\angle$CAB $\cong$ $\angle$ABC	2. Dado
3. $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$	3. Definición de triángulo.
4. Sea P el punto medio de $\overline{AB}$	4. Teorema de existencia y unicidad del punto medio.
5. $\exists$ punto C	5. ~~Definición de segmento.~~ Dado
6. $\cancel{\exists\ \overline{PC}}$; $\exists\ \overleftrightarrow{PC}$	6. Postulado de la recta.
7. $\exists\ \overline{PC}$	7. Definición de segmento.
8. $\overline{PA} \cong \overline{PC}$; $\overline{PC} \cong \overline{PC}$	

Tabla 7.6: Demostración: 'si un triángulo tiene dos ángulos internos congruentes, entonces es isósceles'. Intento fallido

Afirmación	Justificación
1. ΔABC; $\cancel{\angle A \cong \angle B ;}$ $\angle$CAB $\cong$ $\angle$CBA	1. Dado
2. $\overrightarrow{AE}$ bisectriz de $\angle CBA$; $\overrightarrow{BD}$ bisectriz de $\angle CBA$.	
3. $\cancel{\angle 1 \cong \angle 2, \angle 3 \cong \angle 4,}$ $\angle 4 \cong \angle 1$, $\angle 2 \cong \angle 3$,	3. Definición de bisectriz.
4. $\angle 1 \cong \angle 2$, $\angle 3 \cong \angle 4$,	4. Teorema: Si dos ángulos son congruentes, sus bisectrices forman dos pares de ángulos respectivamente congruentes.
5. ΔDBA y ΔEAB	5. Definición de triángulo.
6. $\angle 1 \cong \angle 2$	

7. $\overline{BA} \cong \overline{BA}$	
8. $\angle CAB \cong \angle CBA$	
9. $\Delta DBA \cong \Delta EAB$	9. Ángulo-lado-ángulo.
10. $\angle 7 \cong \angle 8$	10. Partes correspondientes de triángulos congruen tes.
11. $\angle 5 \cong \angle 6$	11. Por par lineal.
12. $\overline{EA} \cong \overline{DB}$	12.
13. $\triangle CEA \cong \triangle CBD$	13. Ángulo-lado-ángulo.
14. $\overline{CA} \cong \overline{CB}$	14. Partes correspondientes de triángulos congruentes.

Tabla 7.7: Demostración: 'si un triángulo tiene dos ángulos internos congruentes, entonces es isósceles'. Segundo intento

7.4.3. Participación plena de los estudiantes en la práctica de demostrar

Vamos a ilustrar con un ejemplo representativo lo que consideramos una participación plena de los estudiantes en la producción de demostraciones. El extracto corresponde a una conversación sostenida en las sesiones finales del curso, en donde se demuestra la conjetura: 'el lado más largo de un triángulo subtiende al ángulo mayor'. Éste ilustra el nivel alcanzado por algunos estudiantes en la escritura colectiva de demostraciones.

Ejemplo: 'El lado más largo de un triángulo subtiende al ángulo mayor'

A raíz de la resolución del problema que da inicio al Episodio 12, surge como conjetura de varios grupos que el ángulo opuesto al lado más largo de un triángulo es el de mayor medida. La profesora hace una adaptación a la formulación del enunciado para favorecer la escritura colectiva de la demostración. Ella explica que deben comparar dos lados y sus respectivos ángulos opuestos y sugiere el siguiente enunciado: dado el triángulo *OKP*, si $OP > OK$ entonces $m\angle OKP > m\angle OPK$. Adicionalmente hace una representación como la de la Figura 7.38.

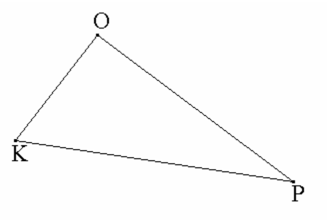


Figura 7.38

Después de trabajar un rato en parejas, Ana y Juan se ofrecen voluntariamente para escribir la demostración públicamente. Primero, proponen transferir la medida del lado *OK* en el rayo *OP* para obtener un punto *K'* tal que *OK* = *OK'*; así, construyen un triángulo isósceles *OKK'*. En su exposición muestran el cuidado para justificar la construcción auxiliar. Una vez construido y justificado el segmento *KK*', proponen los pasos centrales de la demostración haciendo uso de propiedades del triángulo isósceles y del teorema del ángulo externo a un triángulo.

162	Ana:	(a)	Entonces, ya teníamos la condición de que *OP* era mayor que *OK* [Figura 7.38].	CondIni
		(b)	Entonces podíamos transferir esa medida [*OK*] en el segmento *OP*… digamos, en el rayo *OP*… la medida,	ConstrAux
		(c)	por lo que *OP* es mayor que *OK*.	CondSuf
163	Juan:	(a)	[Escribe al lado de la figura: $\overline{OP} > \overline{OK}$].	Lenguaj
		(b)	Y además *OK* es mayor que 0.	CondSuf
		(c)	[Escribe: *OK* > 0].	Lenguaj
		[...]		
165	Juan	(a)	[…], es que como *OK* es la medida de un segmento	Justif
		(b)	entonces *OK* es mayor que cero; por lo tanto,	ConclNe
		(c)	como es mayor que cero, la podemos transferir.	CondSuf
		[…]		
168	Juan	(a)	Luego, por la construcción,	Justif
		(b)	*OK* es igual a *OK'*.	ConclNe
		(c)	[Escribe *OK* = *OK'*].	Lenguaj
		(d)	Y por definición de segmentos congruentes,	Justif
		(e)	*OK* es congruente con *OK'*.	ConclNe
		(f)	[Escribe $\overline{OK} \cong \overline{OK'}$; marca los segmentos congruentes en la figura].	Lenguaj
		[…]		
172	Ana:	(a)	Entonces, por el teorema [del triángulo isósceles],	Justif
		(b)	tenemos que los ángulos son… que el ángulo *K*.	ConclNe
173	P:	(c)	¿El ángulo *K*?	Lenguaj
174	Ana:	El ángulo *OKK*' y el ángulo *OK'K* son congruentes		ConclNe
175	Estudiante:	O ponga números		Lenguaj
176	P:	Pongámosle números, 1 y 2… [$\angle 1$ y $\angle 2$] [Figura 7.39].		Lenguaj

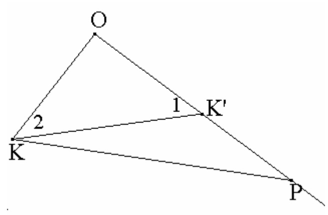


Figura 7.39

177	Juan:	No se si en la demostración tenemos que decir: "sea el triángulo *OK'K*", para decir...		Rigor
178	P:	Pues, necesitamos estar seguros de que [el triángulo] está. Pero ahora no vamos a hacer todo eso. Tenemos que asegurar que si existe ese triángulo/		Rigor
179	Juan:	[Escribe $\angle 1 \cong \angle 2$].		Lenguaj
180	Germán:	/Y de que el punto *K'* pertenece al…, pertenece al interior del ángulo *OKP*.		Rigor
181	P:	¿Por qué? Hasta ahora no lo necesito.		Rigor
182	Germán:	Pero después… [Se ríe].		ContrCon
		[…]		
184	Ana:	Listo, Entonces vamos a mirar el triángulo… que el ángulo 1 es externo al triángulo *K'PK*.		ConclNe
185	P:	Ángulo 1 externo… ¡miren! Estamos usando el teorema del ángulo externo… Sí.		Justif
186	Juan:	[Escribe: $\angle 1$ externo al $\Delta K\text{`}PK$].		Lenguaj
187	Ana:	Entonces como el ángulo 1 es congruente al ángulo 2/		CondSuf
188	Juan:	(a)	/Espere. Cómo ángulo 1 es externo	CondSuf
		(b)	entonces la medida del ángulo 1 es mayor que la medida del ángulo *OPK*. [Escribe: $m\angle 1 > m\angle OPK$].	ConclNe
		[…]		
190	Ana:	(a)	Entonces tenemos ahora que estos dos son congruentes, [$\angle 1$ y $\angle 2$],	CondSuf
		(b)	y que la medida de éste ángulo [$\angle OKP$], va a ser mucho mayor a ésta [$\angle OPK$].	ConclNe
		(c)	Entonces, la suma de estas dos medidas, la del ángulo *OKK*' y [la del ángulo] *K'KP* es mayor, entonces, va a ser mayor que…	ConclNe
		[...]		
193	Juan:	(a)	Es que como *K'* está en el interior el ángulo *OKP* entonces,	CondSuf
		(b)	por el postulado de adición de medidas de ángulos	Justif

		(c) tenemos que el ángulo 2 más/	ConclNe
194	P:	/Pongámosle [nombre] al otro	Lenguaj
195	Juan:	[Llama $\angle 3$ al $\angle K'KP$; Figura 7.40].	Lenguaj

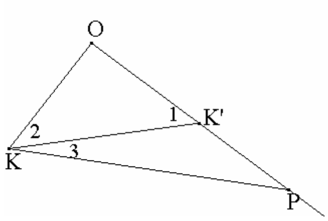


Figura 7.40

196	Juan:	(a) La medida del ángulo 2 más la medida del ángulo 3 es igual a la medida del ángulo *OKP*	ConclNe
		(b) [Escribe: $m\angle 2 + m\angle 3 = m\angle OKP$].	Lenguaj
197	P:	Siempre y cuando sí sepamos eso [que *K'* está en el interior del ángulo O*KP*].	CondSuf
198	Juan:	(a) Sí. O sea la interestancia *O-K'-P*. Teniendo eso, entonces teníamos, desde el inicio, de lo que traíamos, que la medida del ángulo 2 es mayor que la medida del ángulo *P,* bueno, *OPK* [Escribe: $m\angle 2 > m\angle P$]. Y por acá, como medida del ángulo 2 más medida del ángulo 3 es igual a medida de ángulo *OKP*,	CondSuf
		(b) también puedo escribir que la medida del ángulo 2 es mayor que la medida de ángulo…	ConclNe
199	P:	(a) Es al revés, medida del ángulo *OKP* es mayor que la medida del ángulo 2.	ConclNe
		(b) Por definición de mayor que.	Justif
200	Juan:	(a) [Escribe: $m\angle OKP > m\angle 2$].	Lenguaj
		(b) Entonces por ese lado tendré [Escribe: $m\angle OKP > m\angle 2 > m\angle P$].	ConclNe

[P88:162-200]

Juan y Ana tienen una idea original probablemente asociada al hecho de imaginar en qué casos los ángulos son iguales. Sus primeras intervenciones se refieren a los pasos de la construcción del segmento *KK'* tal que el segmento *OK* resulte ser congruente con el segmento *OK'*. Hacen explícitas las condiciones para poder usar el teorema de localización de puntos: un rayo [$\overrightarrow{OP}$] y un número positivo [*OK*]. Ana parte de la condición inicial [162a] que usa como condición [162c] para poder transferir la medida *OK* sobre el rayo *OP* [162]. En estricto sentido, la condición inicial no es necesaria para poder hacer la transferencia en el rayo *OP;* Ana la incluye quizás para garantizar que *K'* quede entre *O* y *P*, aunque no lo dice. En cambio, el hecho de que *OK* sea un número positivo sí es necesario para poder hacer uso del teorema de localización de puntos. Juan agrega dicha condición [163b], justificándola por el hecho de ser la longitud de un segmento [165]; de esta forma determinan el punto *K'*. Después, Juan se refiere a la igualdad de las medidas *OK* y *OK'* [168b] y concluye la congruencia de los segmentos [168e] aludiendo a la definición de congruencia, como justificación. Ana traza el segmento *KK'*. Una vez construido el triángulo isósceles *OKK'*, Ana concluye que los ángulos de la base son congruentes [172a, 172b, 174]. Para facilitar la comunicación un estudiante les sugiere usar números para nombrar los ángulos [175]. Luego, Juan pregunta si es necesario justificar primero la existencia del triángulo *OKK'* [177]. En respuesta a su inquietud, la profesora acepta que hay que estar seguros de que el triángulo existe, pero considera que ese es un detalle que los estudiantes pueden incluir posteriormente [178]. Con ello, flexibiliza la norma de justificar todas las afirmaciones en lugar de hacerla cumplir, pues quiere centrar el interés en las ideas principales de la demostración sugerida por Ana y Juan. Adicionalmente, Germán indica que deben justificar que el punto *K'* está en el interior del $\angle OKP$ [180], anticipándose a una necesidad posterior que parece entrever sólo él [182]. A continuación, Ana menciona que el $\angle 1$ es externo al triángulo *K'PK* [184] y pretende usar la congruencia de los ángulos $\angle 1$ y $\angle 2$ [187] para establecer la desigualdad entre el $\angle OKP$ y el $\angle OPK$ derivada de ésta [190b]. Juan la interrumpe para ir completando la demostración. Por ejemplo, él es quien concluye la desigualdad entre los ángulos $\angle 1$ y $\angle OPK$ [188b], inferida a partir del teorema del ángulo externo. También es él quién establece que la medida del $\angle OKP$ es igual a la suma de las medidas de los ángulos $\angle 2$ y $\angle 3$ [196a] y por lo tanto la desigualdad entre la medida del $\angle OKP$ y la medida del $\angle 2$ [200a]; así, obtiene la desigualdad que le falta para usar la propiedad transitiva y llegar a la conclusión del teorema [200b]. En el Diagrama 7.28 ilustramos la participación de Ana, Juan y Germán.

Ana	Jua	Ana		Ana	Est		Jua		Jua	Ger		Ger
!		!										
			P			P		P			P	
162	163, 165, 168	172	173	174	175	176	177	178	179	180	181	182

Ana		Jua	Ana	Jua	Ana	Jua		Jua		Jua		Jua
!				**F**		F						
	P						P		P		P	
184	185	186	187	188	190	193	194	195 196	197	198	199	200

Diagrama 7.28: Participación plena en la demostración:
'El lado más largo de triángulo subtiende al ángulo mayor'

Consideramos que la participación de Ana, Juan y Germán es plena. Los estudiantes interactúan entre sí y con la profesora con la naturalidad de una conversación espontánea y no con el patrón pregunta-respuesta, usual en intercambios en clase. La participación es relevante pues Ana y Juan encuentran una vía exitosa para hacer la demostración, la desarrollan atendiendo a las normas para la escritura de demostraciones e incluso se preocupan por el grado de rigor con el que se deben justificar ciertos aspectos menores, como la existencia del triángulo *KK'O.* Juan desplaza a la profesora en la función que ella generalmente asume de controlar que se hagan explícitas las justificaciones, que el lenguaje sea apropiado y que estén todas las condiciones para poder hacer una afirmación; por esta razón, la profesora asume un papel secundario, interviene poco, generalmente para apoyar el trabajo que los estudiantes están haciendo, o para tomar alguna decisión de tipo técnico relacionada con el rigor de la demostración. Aunque Germán sólo interviene dos veces, juega un papel importante pues prevé la necesidad de afirmar la interestancia *O-K'-P,* que Ana insinúa pero que ni ella ni Juan hacen explicita. Con ello da muestras de estar siguiendo el curso de la demostración con cuidado y velando por el cumplimiento de las normas. En un primer momento, la profesora parece desestimar la necesidad de afirmar la interestancia, pero luego apoya a Germán en la importancia de establecerla para poder usar el postulado de la adición de medidas de ángulos. La participación de Ana, Juan y Germán es genuina: intervienen con ideas propias, conscientes de su papel en la producción de la demostración y fundamentando cada una de las afirmaciones que hacen. Dan muestras de alineación y afiliación con la empresa de la comunidad: como Juan es más hábil que Ana para organizar las ideas de manera deductiva, asume la responsabilidad de apoyarla cuando ella se salta conclusiones parciales o cuando concluye de manera apresurada el consecuente del teorema. Adicionalmente, es una participación autónoma y original pues Juan y Ana no siguen un patrón usual, sino que articulan los teoremas del triángulo isósceles y del ángulo externo a un triángulo de manera creativa; la sorpresa con la que la profesora reacciona cuando ellos introducen el teorema del ángulo externo a un triángulo [185] es muestra de que ella no ha previsto esa vía para la demostración y que, por lo tanto, su participación no tiene el matiz didáctico de intervenciones previas, en donde ella sabe qué afirmaciones siguen y por qué se hacen, pero pregunta para regular el intercambio comunicativo. En la Tabla 7.8 reproducimos las afirmaciones que Juan escribe en el tablero y las razones que dicen él y Ana oralmente.

Afirmación	Justificación
1. $\overline{OP} > \overline{OK}$	
2. OK > 0	2. Es la medida de un segmento (Postulado de la distancia).
3. OK = OK’	3. Construcción (Teorema de localización de puntos).
4. $\overline{OK} \cong \overline{OK'}$	4. Definición de congruencia de segmentos.
5. $\angle 1 \cong \angle 2$	
6. $\angle 1$ externo a ΔK’PK	
7. m$\angle$1> m $\angle$OPK	
8. m$\angle$2 + m$\angle$3 = m $\angle$OKP	
9. m$\angle$2 > m$\angle$P	
10. m $\angle$OKP > m $\angle$2	
11. m $\angle$OKP > m$\angle$2 > m $\angle$P	

Tabla 7.8: Demostración del teorema: el lado más largo de un triángulo subtiende al ángulo mayor

CAPITULO 8

DISCUSION Y CONCLUSIONES

En los capítulos precedentes hemos usado algunos elementos de la teoría de la práctica social (Wenger, 1998) para analizar el aprendizaje de la demostración, en un curso universitario de geometría plana. Hemos asumido el reto de adoptar una visión sobre el aprendizaje que privilegia su carácter social como proceso de participación en una comunidad de práctica. Por esta razón, más que preguntarnos por los procesos cognitivos y estructuras conceptuales que ganan los estudiantes del curso de geometría plana, durante el experimento de enseñanza llevado a cabo, nos interrogamos sobre cuál es el contexto social apropiado para que ellos adquieran un compromiso real de participación en la actividad demostrativa, bajo las condiciones atenuantes de una participación periférica legítima (Lave y Wenger, 1991) o avanzando hacia una trayectoria legítima o plena.

Evaluamos el aprendizaje analizando las finalidades de participación de los estudiantes en el repertorio de prácticas que se llevan a cabo en una comunidad y no mediante el grado de autonomía individual con el que cada uno se enfrenta a la producción de demostraciones. Aunque somos conscientes de la importancia de proponer estudios investigativos que busquen herramientas conceptuales o metodológicas para apoyar a los estudiantes, futuros profesores de matemáticas para la educación secundaria y media, en el desarrollo de habilidades y técnicas de demostración, nosotros nos hemos centrado en aspectos de su naturaleza social que no han sido objeto de indagación sistemática. Para ello, damos cuenta de tres asuntos. Uno, el repertorio de prácticas que favorece la participación periférica legítima de los estudiantes en la actividad demostrativa y en la construcción de una porción de un sistema axiomático. Dos, la negociación de significados sobre asuntos como las acciones y objetos matemáticos involucrados en la actividad, las posibilidades y restricciones propias del funcionamiento de una práctica regida por normas y condicionantes institucionales y el papel que juega la demostración en las matemáticas. Tres, la evolución de la participación en algunas de las acciones centrales que constituyen una base firme para que los estudiantes puedan enfrentar con éxito la tarea colectiva de demostrar, a medida que se incrementa gradualmente el compromiso y la complejidad de la práctica.

Las teorías cognitivas que se han privilegiado en los análisis sobre el conocimiento, el aprendizaje o la comprensión -tradicionalmente centradas en la adquisición de conocimientos o habilidades que pueden ser transferidos a otros contextos- no han sido lo suficientemente sensibles acerca de las relaciones entre el desarrollo de la mente, las situaciones sociales en las que el conocimiento ocurre y los recursos y medios que la cultura provee como apoyo. La necesidad de virar la mirada hacia estas relaciones ha comenzado a ser sobresaliente en la medida en que la educación no ha tenido suficiente éxito en la generación de un uso efectivo del conocimiento adquirido. Este hecho es particularmente marcado en el aprendizaje de la demostración.

Hemos organizado la discusión de los resultados del análisis en las siguientes secciones. Primero, retomamos nuestra caracterización de actividad demostrativa para especificar el conjunto de acciones que hacen parte de las rutinas del repertorio de prácticas en las que se involucran los estudiantes, aportando información para el diseño de futuras actividades de aula que busquen impulsar la actividad demostrativa. Segundo, sintetizamos el análisis presentando lo que constituye, desde nuestro punto de vista, una mirada sociocultural a la actividad demostrativa. Tercero, nos referimos al proceso de negociación de significados identificando elementos característicos del mismo y señalando factores que lo favorecen o que lo limitan. Cuarto, discutimos en qué sentido la teoría de la práctica social da cuenta del aprendizaje individual. Quinto, discutimos si efectivamente se constituye o no una comunidad de práctica en el curso de geometría plana, en qué medida, y qué elementos propician o son limitantes de dicha constitución. Sexto hacemos un planteamiento sobre la pertinencia de usar la teoría de la práctica social de Wenger (1998) como perspectiva teórica para documentar el aprendizaje de la demostración. Séptimo, nos referimos a los objetivos de la disertación y analizamos en qué grado se cumplieron.

8.1. ACCIONES QUE CONFORMAN EL REPERTORIO DE PRÁCTICAS DE LA ACTIVIDAD DEMOSTRATIVA

En el marco teórico definimos cada una de las prácticas que conforman la actividad demostrativa y el papel que desempeñan en el proceso que va desde la resolución de un problema hasta la demostración de las conjeturas a las que éste da lugar. En esta sección asociamos a cada práctica el conjunto de acciones identificadas en los análisis, en las cuales los estudiantes participaron; consideramos aspectos de cada una de ellas para mostrar la complejidad de los procesos a los que se ve abocado un grupo que pretende una construcción colectiva de conocimiento.

8.1.1. DEFINIR

El examen de la participación de los estudiantes en la clase de geometría plana nos permite corroborar que la práctica de formular y usar definiciones es un componente clave de la actividad demostrativa. Como en nuestra perspectiva sobre la demostración matemática valoramos no sólo su función de validación de enunciados sino la de comprensión matemática, es indudable que la interpretación de las definiciones de los objetos geométricos incluidos es esencial para dar significado a los enunciados que se demuestran. Adicionalmente, nuestro estudio confirma los planteamientos de Furinghetti y Paola (2000) y de Villiers (2004) quienes señalan que definir es fundamental para entender la estructura lógica de enunciados de la forma si-entonces y la organización deductiva de las demostraciones. Los análisis realizados nos permiten profundizar en esa dirección pues identificamos y caracterizamos un conjunto de acciones específicas que los estudiantes pueden realizar, que favorecen la negociación de significados y la evolución hacia una participación legítima o plena en la actividad demostrativa (Tabla 8.1). A continuación nos referimos a cada una de ellas.

Construir una definición. (ConsDef).[1]
Usar definiciones en demostraciones. (DefDem).
Ofrecer una definición informal derivada de la imagen conceptual. (Definf).
Escoger qué definición conviene al sistema axiomático. (DefSis).
Establecer si dos definiciones son equivalentes. (Equiva).
Explorar propiedades geométricas incluidas en una definición por medio de una representación dinámica. (ExplorCabri).
Identificar en una definición qué propiedades del objeto definido quedan determinadas explícita o implícitamente. (IdPrDef).
Identificar propiedades faltantes en no-ejemplos. (IdPrFa).
Identificar en ejemplos representativos qué propiedades son relevantes para definir un objeto. (IdPrRe).
Rechazar propuestas de definición proponiendo representaciones que cumplen las propiedades pero no corresponden al objeto que se desea definir. (ReDefRe).
Proponer representaciones de un objeto definido. (RepDef).

Tabla 8.1: Rutinas relacionadas con la actividad de definir

[1] Resaltamos en negrilla aquellas con las que dimos cuenta de la evolución en la participación.

Construir una definición

Contribuir en la construcción de una definición es una de las tres acciones en las cuales identificamos una evolución de la participación de los estudiantes, desde periférica legítima hasta plena. A medida que transcurre el semestre académico, los estudiantes tienen la posibilidad de participar en esta acción de manera cada vez más genuina, autónoma y relevante así como de hacer explícita su afiliación a la comunidad responsabilizándose de la tarea por interés personal.

Para dar cuenta de la participación periférica legítima en esta acción usamos las interacciones correspondientes a las definiciones de bisecar y de par lineal, construcción que recae prácticamente bajo la responsabilidad de la profesora; una participación legítima la ejemplificamos con las intervenciones relacionadas con las definiciones de altura y ángulo externo en las cuales estudiantes como Darío y Nancy asumen la responsabilidad de controlar que la definición propuesta sea la apropiada; y damos cuenta de una participación plena con la formulación de la definición de interior de cuadrilátero, liderada principalmente por Germán. En el capítulo 7 establecimos indicadores de la evolución en los que se aprecia cómo los estudiantes se apropian de la tarea y ganan una papel protagónico en la misma.

Usar definiciones en demostraciones

En la acción de usar definiciones en demostraciones también nos apoyamos para poner en evidencia una evolución en la participación, desde una participación periférica legítima hasta una participación plena. Ilustramos la participación periférica legítima con las intervenciones correspondientes a la demostración de la congruencia de los ángulos opuestos por el vértice. La profesora dirige el proceso y prácticamente lleva de la mano a William para que use las definiciones de par lineal y de ángulos opuestos por el vértice en la demostración. La participación legítima se pone en evidencia en el uso que hacen Ana y Efraín de la definición de bisectriz en la demostración del teorema que afirma que el ángulo formado por las bisectrices de ángulos que son par lineal es recto. Los estudiantes, de manera genuina y relevante usan las propiedades de la bisectriz para avanzar en la demostración y fundamentan sus afirmaciones en la definición. Y la participación plena la ilustramos con las intervenciones de Nancy y Darío quienes se responsabilizan del control del uso de la definición de altura en la demostración del teorema según el cual las alturas correspondientes a los lados congruentes de un triángulo isósceles son congruentes.

Ofrecer una definición informal derivada de la imagen conceptual

La mayoría de los objetos geométricos que se usan en la construcción del sistema axiomático son familiares a los estudiantes por lo que ellos poseen una imagen conceptual con la que pueden participar proponiendo una definición informal que sirve de base para comenzar a dialogar acerca de las propiedades que caracterizan el objeto definido. Esta acción, en combinación con otras que se encuentran en la lista, cumple dos fines: negociar el significado del objeto geométrico e identificar propiedades geométricas relevantes, que eventualmente sirven para encadenar eslabones en la producción de demostraciones. Generalmente la acción es impulsada por la profesora y sucede cuando el término correspondiente al objeto aparece en el enunciado de un problema con el que se da inicio a la actividad demostrativa o es mencionado por algún miembro del grupo. Este es el caso de la definición de altura de un triángulo que presentamos en los análisis. Otras veces la acción es sugerida por un estudiante cuando se quiere poner de acuerdo con su compañero al momento de interpretar el enunciado de un problema, como pasa con el término ‘bisecar’.

En la clase se institucionalizan a partir de enunciaciones informales los conceptos: segmento, ángulo, punto medio de un segmento, bisecar, ángulos complementarios, ángulos suplementarios, ángulo agudo, ángulo obtuso, altura de un triángulo, distancia de un punto a una recta y rectas paralelas. En la mayoría de los casos, los estudiantes proponen sugerencias bastante próximas a las definiciones institucionalizadas pero dejan sin explicitar propiedades relevantes del objeto definido. Por ejemplo, en la definición de bisecar un segmento, o hallar su punto medio, sólo se refieren a determinar un punto tal que la distancia a los extremos del segmento es igual, pero no a que dicho punto pertenezca al segmento; en la definición de altura, algunos no mencionan que el segmento debe ser perpendicular a la recta que contiene al lado opuesto al vértice correspondiente. En otros casos, las definiciones no corresponden al objeto definido. Por ejemplo, ningún estudiante propone una definición de ángulo cercana a aquella que se institucionaliza pues hacen referencia a la región contenida entre dos semirrectas de origen común pero no a la figura formada por dichas semirrectas. En el curso de geometría plana no se hacen esfuerzos para que haya una evolución de la participación de los estudiantes con respecto a esta acción pues no es objetivo del curso hacer acercamientos informales a los objetos geométricos.

Escoger qué definición conviene al sistema axiomático

Aunque no tenemos evidencia de una evolución hasta una participación plena, nos pareció importante mostrar el cambio de participación, de periférica legítima a legítima, en la identificación de qué definición conviene al sistema pues es una práctica sofisticada, asociada a las definiciones, que pocas veces se hace con participación de los estudiantes. Como ejemplo de participación periférica legítima tomamos un fragmento en el que se discute ese asunto con la definición de altura de un triángulo; y para ilustrar la participación legítima nos referimos a una interacción relacionada con la definición de rectángulo. La primera conversación tiene lugar en una clase al inicio del semestre, incluso antes de haber institucionalizado la definición de altura, cuando los estudiantes proponen definiciones informales y tienen muy pocos elementos para contribuir en la decisión de cuál definición es más acorde con el sistema en construcción. La segunda tiene lugar en las sesiones finales del curso y, aunque no es una participación plena, refleja la comprensión de la empresa conjunta que se lleva a cabo. La participación de Nancy, aunque tímida y corta, muestra que ella tiene claro que la definición de rectángulo que se adopte debe ser tal que tenga el conjunto mínimo de propiedades relevantes para favorecer el uso de la definición en demostraciones posteriores. Es decir, para ella, la escogencia de las propiedades que se incluyen en la definición no es una acción inocua en procura simplemente de una descripción económica, sino que determina el conjunto de propiedades del cual se pueden derivar otras propiedades del concepto y por lo tanto determinan la organización deductiva local o global en la cual el concepto está inmerso.

Identificar en ejemplos representativos qué propiedades son relevantes para definir un objeto

A pesar de la familiaridad que tienen los estudiantes con algunos objetos geométricos, no siempre conocen o han formulado verbalmente la definición de los mismos porque probablemente no la han requerido para el trabajo geométrico hecho previamente. Sin embargo, cuando se va a usar una definición en una demostración, es fundamental tener una definición precisa que permita hacer uso de las propiedades incluidas (e incluso de otras propiedades que se derivan de éstas). Para favorecer la participación de los estudiantes en la negociación de significados sobre algunas definiciones, la profesora propone representaciones de objetos conocidos, o pide hacer una representación de ellos, y promueve la identificación de las propiedades relevantes del objeto definido para institucionalizar la definición. Esto sucede cuando el término correspondiente al objeto aparece en el enunciado de un problema con el que se da inicio a la actividad demostrativa, o cuando es mencionado por algún miembro de la clase.

Esta acción se lleva a cabo con los conceptos de rayo, par lineal, ángulos opuestos por el vértice e interior de cuadrilátero. En los análisis realizados es notoria la dificultad que los estudiantes tienen para extraer el conjunto de propiedades y contribuir en la institucionalización de las definiciones de ángulos opuestos por el vértice e interior de cuadrilátero, a pesar de tener una imagen visual clara de ellos. Particularmente, para el caso de los ángulos opuestos por el vértice, probablemente los estudiantes nunca antes han discutido cómo definirlos y se sorprenden del papel que juega la expresión "dos pares de rayos opuestos" en la definición y en el uso de ésta en las demostraciones. El análisis de las transcripciones donde se lleva a cabo esta acción no permite evidenciar una evolución de la participación de los estudiantes en esta acción.

Identificar en una definición qué propiedades del objeto definido quedan determinadas explícita o implícitamente

Como las definiciones se proponen mediante un conjunto mínimo de propiedades relevantes que determinan el objeto definido, de ellas se pueden deducir otras propiedades que son características del objeto y que pueden ser útiles en la producción de demostraciones. Precisamente una acción que favorece la negociación de significados en el curso de geometría plana es la identificación de propiedades que están explícitas en la definición y de otras que se deducen de las anteriores. Esta acción se realiza cuando un objeto se introduce a partir de su definición o cuando, a pesar de haber realizado acciones previas que conducen a la institucionalización de una definición, sucede un evento de la clase que lleva a estudiar las propiedades que se pueden derivar.

La acción se lleva a cabo con las definiciones de par lineal, altura de un triángulo, ángulo externo, cuadrilátero convexo y rectángulo. Por ejemplo, en la definición de par lineal se hace referencia únicamente a dos rayos opuestos y a otro rayo diferente de estos. Sin embargo, al pretender declarar la existencia de un par lineal en una demostración, los estudiantes deben garantizar primero la existencia de un punto no colineal a aquellos que determinan los rayos opuestos, para así poder considerar el tercer rayo. Es decir, sale a relucir la no colinealidad de los puntos que determinan los tres rayos, propiedad que no está explícita en la definición. En cuanto a la definición de ángulo externo a un triángulo, una vez institucionalizada la definición: 'si C está entre A y D, entonces $\angle BCD$ es externo del $\triangle ABC$', Nancy pone de presente el papel que juega la notación usada para establecer la propiedad de tener un lado adyacente a un lado del triángulo. Como no son muchas las definiciones con las que se lleva a cabo esta acción, no se alcanza a hacer evidente una evolución de la participación de los estudiantes en ella.

Proponer representaciones de un objeto definido

Los estudiantes participan con propuestas de representación de objetos geométricos cuando se establece su definición. Es una manera de exteriorizar las imágenes que evoca la definición y de negociar cuáles figuras son ejemplos del objeto definido. Se lleva a cabo, por ejemplo, con las definiciones de ángulo externo y de interior de cuadrilátero. En el primer caso, después de dar la definición, la profesora pide a algunos estudiantes señalar los ángulos externos de un triángulo. Con esta actividad se ve que algunos estudiantes sólo identifican tres ángulos externos, pues restringen involuntariamente la representación a la prolongación de los lados del triángulo en una sola dirección; otros, incluyen los ángulos opuestos a los ángulos del triángulo, hecho que muestra que no identifican la condición de uno de los lados del ángulo externo, de ser adyacente a un lado del triángulo. En el caso de la definición de interior de cuadrilátero, esta actividad es liderada por Germán quien, con apoyo de la profesora, propone la definición y algunos estudiantes hacen representaciones, con las cuales interpretan la formulación sugerida por el estudiante. Esta acción se lleva a cabo muy pocas veces, pues la profesora no acostumbra empezar a trabajar un objeto geométrico a partir de su definición. Por eso no es posible evidenciar evolución en la participación.

Rechazar propuestas de definición proponiendo representaciones que cumplen las propiedades enunciadas pero no corresponden a ejemplos del objeto que se desea definir

Cuando los estudiantes participan proponiendo definiciones para los objetos geométricos que se van a incluir en el sistema, no siempre logran una formulación correcta del objeto definido bien sea porque dejan de lado propiedades relevantes o porque expresan propiedades equivocadamente. La negociación de significados se favorece al proponer representaciones que se ajustan a la definición, pero que no corresponden a ejemplos de aquello que se desea definir.

El caso más representativo de este tratamiento es el de la definición de interior de cuadrilátero. A pesar de que el grupo tiene una imagen bastante clara de lo que se quiere definir, elaborar la definición es un proceso dispendioso que lleva a la profesora y a algunos estudiantes a proponer representaciones ajustadas a las definiciones propuestas pero que realmente no caracterizan el interior de un cuadrilátero. Por esa vía se rechazan varias formulaciones hasta llegar a una que es aceptada por todos. En los quince episodios escogidos para el análisis en profundidad, no hay evidencias de evolución en la participación de los estudiantes en esta acción.

Identificar propiedades faltantes en no-ejemplos.

Una acción similar a la anterior, en la que se relaciona la definición con algunas representaciones, es la de identificar propiedades faltantes en no-ejemplos de un objeto definido. A diferencia de esa, en este caso se sabe que la definición está bien formulada, se quieren encontrar representaciones que la ejemplifiquen pero algunos estudiantes proponen figuras que no son representaciones del objeto. Surge entonces el interés por identificar en ellas qué propiedades no cumplen para ser consideradas ejemplos del objeto definido.

Propuestas de no-ejemplos se presentan para las definiciones de ángulos opuestos por el vértice, ángulo externo a un triángulo, distancia de un punto a una recta y cuadrilátero convexo. En el caso del ángulo externo a un triángulo, la representación de un ángulo opuesto a uno de los ángulos del triángulo se constituye en no-ejemplo del ángulo que se quiere definir. Como esta acción es poco frecuente, no es posible evidenciar una evolución en la participación.

Explorar propiedades geométricas incluidas en una definición por medio de una representación dinámica

La posibilidad de proponer representaciones de los objetos definidos usando un programa de geometría dinámica contribuye a la negociación del significado de las propiedades que conforman la definición, pues permite entrever cuál es el efecto de ellas en el comportamiento dinámico de las figuras representadas. Si la representación se hace atendiendo a las propiedades características de la figura, cuando se arrastran los elementos libres de la construcción las propiedades deben mantenerse constituyéndose en invariantes de la figura. Así, es posible diferenciar entre los atributos relevantes e irrelevantes y destacar de esa manera las propiedades que pueden emplearse en la producción de demostraciones.

El ejemplo más representativo de esta acción sucede después de que se institucionaliza la definición de par lineal y Orlando decide hacer una representación en Cabri. La discusión sobre cómo representar un par lineal permite hacer explícita la colinealidad de los puntos que determinan los rayos opuestos y esta colinealidad se vuelve una propiedad que se debe garantizar cuando se quiere afirmar la existencia de rayos opuestos en una figura. Probablemente, si se destinara más tiempo a la realización de esta acción, se podría identificar una evolución en la participación, a medida que los estudiantes ganan experiencia en el uso de Cabri.

Establecer si dos definiciones son equivalentes

Una de las acciones que la profesora promueve con el objetivo de que los estudiantes tengan diferentes oportunidades de aprender a usar las definiciones en las demostraciones es la de estudiar la equivalencia de definiciones usando los enunciados del sistema para ir de una a la otra a través de un encadenamiento deductivo. Los estudiantes tienen una mínima participación en esta acción por lo que no es posible evidenciar una evolución significativa. Sin embargo, no deja de ser importante resaltarla pues es un acercamiento inicial a esta compleja actividad, estrechamente relacionada con el uso de definiciones en las demostraciones.

La acción se lleva a cabo con dos definiciones de ángulo recto y con seis definiciones de rectángulo propuestas por los estudiantes.[2] En el caso de la definición de ángulo recto, una vez se deduce una definición a partir de la otra y viceversa, ambas se institucionalizan como posibles definiciones para usar en las demostraciones, pues las dos se ajustan al sistema axiomático y eventualmente puede ser más útil usar una y no la otra en futuras demostraciones. En el caso del rectángulo, las seis definiciones se van comparando para analizar su equivalencia. Finalmente se institucionaliza una sola y las demás se consideran teoremas que pueden derivarse de la definición.

8.1.2. CONJETURAR

Nuestra investigación confirma el planteamiento de Boero et al. (1996) quienes señalan que el proceso de formular conjeturas como resultado de la resolución de problemas no es sencillo y es necesaria la guía de un experto para lograr enunciados claros y completos de tipo condicional que favorezcan la actividad demostrativa. Los análisis de las transcripciones del curso de geometría plana nos permiten identificar un conjunto de acciones asociadas a la formulación, comparación y evaluación de las conjeturas que las parejas de estudiantes ponen a consideración del grupo. Casi ninguna de estas acciones se planeó en el diseño del experimento

[2] Las intervenciones correspondientes al análisis de la equivalencia de las definiciones de ángulo recto no se incluyeron en los fragmentos que se usaron para ejemplificar las diferentes acciones correspondientes a las prácticas asociadas a la actividad demostrativa por no estar en los episodios escogidos.

de enseñanza sino que se fueron dando como resultado de la necesidad de adecuar las conjeturas propuestas.

Las conjeturas se constituyen en la fuente principal de ideas con las que se lleva a cabo la construcción del sistema axiomático en el curso, por lo que el estudio de éstas toma gran parte del tiempo de la clase. Algunas de las acciones que identificamos relacionadas con esta práctica sirven de ámbito a la negociación de significados de las ideas puestas en juego. Otras se constituyen en elementos determinantes en el proceso de evolución de una participación periférica a una participación plena de los estudiantes en la actividad demostrativa en la comunidad (Tabla 8.2). A continuación nos referimos a cada una de las acciones.[3]

El análisis realizado acerca de las acciones en las que participan los estudiantes con relación a la práctica de conjeturar está centrado en la interacción entre la profesora y todo el grupo y no en el momento en el que las parejas de estudiantes descubren o identifican alguna propiedad y formulan la conjetura. Por ello los resultados se refieren al momento en que las conjeturas se socializan, una vez tiene el conjunto de enunciados.

Comparar conjeturas estableciendo semejanzas (Semeja) o diferencias (Difere) en relación al contenido, propiedades, redacción o conclusión que se extrae.
Evaluar conjeturas con relación a los siguientes aspectos: - Es o no una expresión condicional. (Condici). - **Se corresponde con la construcción hecha. (ConjCons).** - Tiene relación con el enunciado y la pregunta del problema. (ConjPr). - Hace referencia a propiedades incluidas en el sistema o justificables con elementos de éste. (ConjSi). - Faltan o sobran propiedades en el enunciado. (Enunci). - **La aceptabilidad de la conjetura. (Acepta).** - **La posibilidad de deducirla con los elementos del sistema. (Deduci).**
Formular conjeturas: - **Formulación inicial producto de la resolución del problema (ForIni).** - Re-escritura de aquellas que inicialmente se propusieron con negaciones. (Afirma). - Reescritura en la forma si-entonces para favorecer su demostración (Format).

[3] En la Tabla 8.2. aparecen dos acciones que fueron incluidas en la práctica de argumentar: aceptabilidad de las conjeturas que se someten a consideración del grupo (Acepta) y estudio de la posibilidad de demostrarlas con elementos del sistema (Deduci). Las incluimos en las acciones relacionadas con la práctica de conjeturar porque, aunque son también parte de la rutina de argumentar, están asociadas con esta práctica.

- Reescritura cono expresión general en donde se destacan propiedades importantes (GeneralEnun). - Reformulación con base en una evaluación pública para incluir o eliminar propiedades (Reform). - Reescritura para corregir una notación errada (Notaci). Proponer ejemplos **(Ejempl)**, no ejemplos (**Noejem**) y contraejemplos (**Contraej**) de una conjetura para apoyar la evaluación de ésta.

Tabla 8.2: Rutinas relacionadas con la actividad de conjeturar

Comparar conjeturas estableciendo semejanzas o diferencias

Una de las acciones más frecuentes relacionadas con la práctica de conjeturar es la comparación de los enunciados formulados por los estudiantes estableciendo semejanzas y diferencias. Sin embargo, salvo en dos episodios (12 y 15) es la profesora quien lidera la comparación, generalmente a manera de preámbulo del análisis y por eso no es posible detectar una evolución en la participación; los estudiantes colaboran principalmente asintiendo cuando comparten o comprenden la comparación o relacionando su propia conjetura con alguna de las que se compara.

Las semejanzas y diferencias entre las conjeturas formuladas tienen que ver con el contenido al que hacen referencia, la conclusión que se extrae y la redacción. Por ejemplo, los enunciados propuestos por los estudiantes y que dan lugar al teorema de la recta, al teorema de la existencia de la perpendicular por un punto de una recta, al teorema de la mediatriz y a teoremas relacionados con propiedades de lados y ángulos de cuadriláteros especiales son comparados en clase. A pesar de no intervenir propositivamente en esta acción, los estudiantes tienen la oportunidad de apreciar cómo la lleva a cabo un experto y comienzan una práctica que probablemente les da elementos para aumentar su participación en futuros cursos.

Evaluar si una conjetura está expresada en forma condicional

Uno de los requisitos de los enunciados que se proponen a manera de conjeturas es que expresen un enunciado condicional. De lo contrario se descartan ya que el interés de la socialización es evaluar enunciados que establecen relaciones entre propiedades para luego incluirlos al sistema como teoremas. La participación de los estudiantes en la acción de evaluar si el enunciado es condicional es periférica legítima a lo largo del curso debido a que muy pocos enunciados propuestos tienen una estructura diferente y a que la profesora es quien lidera el análisis respectivo.

Un ejemplo de esta acción sucede en el episodio 5 después de que algunas parejas escriben, a manera de conjetura: “Si es posible [encontrar un punto E que cumpla cierta condición], siempre y cuando $0 < m\angle BAD < 90$”. Esta es una condición que debe tener el ángulo $\angle BAD$ mencionado en el enunciado del problema, por lo que debe incluirse en el antecedente de la conjetura, pero no es un enunciado condicional propiamente dicho. Situaciones como ésta dan pie a negociar el significado de una expresión condicional en comparación con una no condicional.

Evaluar la correspondencia entre la construcción hecha y la conjetura formulada

Los análisis nos permiten confirmar que la estrategia de relacionar el antecedente de una conjetura con las propiedades impuestas a una figura, por construcción o por arrastre, y el consecuente con las propiedades que resultan de dicha imposición tiene un efecto positivo en la diferenciación del estatus operatorio (Duval, 1991) de las dos proposiciones que componen una conjetura. Además, algunos estudiantes avanzan desde una participación periférica legítima hasta una participación plena en dicha acción, a medida que el curso se desarrolla.

Inicialmente, por ejemplo cuando se discuten las conjeturas relacionadas con el teorema de la existencia de la recta perpendicular que pasa por un punto de una recta, la profesora lidera las interacciones comunicativas relacionadas con la acción, guiando a los estudiantes en el análisis que pretenden llevar a cabo. Algunos estudiantes intentan responder a la tarea de manera genuina pero sin mucha claridad en lo que se pretende. Su participación es periférica legítima aunque la profesora termina organizando el análisis. En un segundo momento, por ejemplo cuando discuten las conjeturas propuestas a raíz del problema de estudiar la relación entre el tipo de triángulo y la propiedad ‘dos de sus alturas son congruentes’, la participación de algunos estudiantes se hace legítima pues contribuyen de manera relevante y genuina haciendo la comparación. Finalmente, en el episodio 15, algunos estudiantes alcanzan una participación plena en la discusión de las conjeturas acerca de propiedades de cuadriláteros, pues la interacción toma el rumbo que dos estudiantes establecen, además de ser una participación espontánea y no como respuesta a una solicitud de la profesora. Adicionalmente, en la interacción se rompe el patrón usual de conversación profesora-estudiante-profesora. Tres estudiantes defienden sus ideas u objetan lo que dicen sus compañeros de manera fundamentada. Además, aunque las explicaciones de una de las estudiantes no son del todo claras, ella asume la responsabilidad de una tarea que hasta el momento sólo la hacía la profesora y esto lo consideramos un indicativo del sentido de afiliación a la comunidad propio de un experto.

Evaluar si una conjetura se relaciona con la pregunta que se propone en el enunciado del problema

Aunque la escasa relación entre la pregunta que aparece en el enunciado de los problemas y las conjeturas formuladas no es un factor determinante para descartar estas últimas, la evaluación de la relación es una de las acciones en las que los estudiantes participan de manera periférica legítima, a lo largo del curso y por interés de ellos. Se lleva a cabo porque los estudiantes tienden a considerar que es una característica negativa de las conjeturas propuestas y las rechazan, a pesar de que una de las normas del curso para la resolución de problemas, es que pueden dar libre curso a la imaginación para tener muchas ideas que discutir. Algunos estudiantes consideran que sus compañeros hacen "trampa" cuando ignoran restricciones impuestas por el enunciado del problema e incluso se molestan porque las conjeturas que sugieren se acepten como enunciados a demostrar. Por ejemplo, en el episodio 12 el problema pide establecer en qué casos un ángulo de un triángulo es mayor que otro, pero un grupo propone como conjetura en qué caso los ángulos son iguales. Al hacer la evaluación, Orlando rechaza la conjetura alegando que no responde a la pregunta del problema. En el episodio 15, Daniel manifiesta abiertamente su incomodidad porque, a pesar de que el problema pregunta por los cuadriláteros en donde una diagonal biseca a la otra, algunas parejas proponen conjeturas en las que se refieren al caso en que ambas diagonales se bisecan. Pese a los esfuerzos de la profesora por hacer que los estudiantes comprendan las ventajas de admitir más enunciados para la empresa que están llevando a cabo, por la riqueza de formulaciones, no todos los estudiantes logran estar cómodos frente a esa situación.

Evaluar si una conjetura hace referencia a propiedades incluidas en el sistema o justificables con elementos de éste

La participación periférica legítima de los estudiantes en evaluar si una conjetura hace referencia a propiedades incluidas en el sistema, o justificables con elementos de éste, es importante por dos razones. De un lado, se constituye en una oportunidad para hacer referencia explícita a la empresa de la comunidad y a la manera en que ésta se relaciona con las conjeturas que se proponen. Las conjeturas que incluyen propiedades que no están en la lista de enunciados del sistema axiomático se analizan bajo esta perspectiva para ver si es posible justificar las propiedades mencionadas con los elementos disponibles –en cuyo caso se admiten- o si no es posible en ese momento –en cuyo caso se descartan-. De otro lado, esta evaluación es aprovechada por la profesora, experta de la comunidad, para incentivar la inclusión de nuevas definiciones, postulados o teoremas en el momento en que lo considera oportuno; así, administra los nexos entre las ideas de los estudiantes y la organización del contenido del curso, de acuerdo al sistema axiomático de referencia. A pesar de que los estudiantes no toman decisiones al respecto y a veces no entienden del todo por qué no se aprovecha una conjetura para introducir un nuevo enunciado, ellos son partícipes de la regulación de la producción de conocimiento en la comunidad.

Uno de los temas que motiva con frecuencia la participación de los estudiantes en esta acción es el paralelismo. Desde el episodio 3, cuando se proponen conjeturas relacionadas con la construcción de ángulos congruentes, los estudiantes sugieren construir rectas paralelas cortadas por una transversal. La conjetura se descarta porque aún no han definido rectas paralelas. Luego, en el episodio 6 una pareja formula una conjetura en la que plantean la construcción de un triángulo congruente a uno dado haciendo una recta paralela; la conjetura se descarta por la misma razón. Sólo hasta el episodio 14, cuando se inicia el trabajo con cuadriláteros la profesora considera oportuno introducir la definición de rectas paralelas. Por el contrario, en el episodio 6, ante una conjetura que menciona la construcción de una recta perpendicular a otra por un punto externo, la profesora sugiere demostrar la existencia de dicha perpendicular en lugar de descartar la conjetura. Los estudiantes no discuten la diferencia en el tratamiento de las conjeturas posiblemente admitiendo que, como experta, es potestad de la profesora tomar tales decisiones. Sin embargo ella hace explícitas las razones de tal decisión, mencionando que la demostración de la existencia de la recta perpendicular por un punto externo se puede hacer con los enunciados presentes en el sistema, mientras que introducir la noción de paralelismo demasiado pronto en el desarrollo de éste puede generar un rápida atención hacia los cuadriláteros y se quedarían sin explorar muchas propiedades interesantes de los triángulos.

Evaluar si faltan o sobran propiedades en el enunciado de una conjetura y reformular ésta

Formular un enunciado completo, en donde se propongan en el antecedente las condiciones para poder concluir el consecuente como necesario de éste es una de las tareas más difíciles para los estudiantes. Implica diferenciar qué propiedades son invariantes y cuidar la redacción de la conjetura para que no les sobre o les falte ninguna. Por el contrario, evaluar si la conjetura formulada por algunos compañeros está completa es una acción más sencilla, porque los estudiantes comparan la formulación con la que ellos mismos proponen y tienen como referente la exploración realizada al resolver el problema.

Al evaluar conjeturas, los estudiantes principalmente se fijan si faltan o sobran propiedades; los análisis muestran una frecuencia alta de participaciones legítimas. Por ejemplo, cuando Luz y Marina incluyen una condición innecesaria para el ángulo de un triángulo en el que dos de sus alturas son congruentes, María, Orlando y Germán lideran las acciones de evaluación del enunciado. Adicionalmente, generalmente por insinuación de la profesora y cuando las conjeturas se admiten como ciertas, éstas se reformulan antes de someterlas al proceso de justificación.

Formular conjeturas como producto de la resolución de problemas

El análisis de la participación de los estudiantes en la formulación inicial de las conjeturas nos permite afirmar que los estudiantes evolucionan desde una participación periférica legítima a una participación plena en esta acción. En las primeras clases del semestre la participación es periférica legítima. Aunque todos los grupos formulan expresiones condicionales, explícita o implícitamente, y la profesora puede avanzar, con algunas intervenciones mínimas de los estudiantes, en la formulación de teoremas que se incluyen en el sistema axiomático después de su demostración, los enunciados propuestos tienen formulaciones propias de la inexperiencia y la falta de visión del trabajo posterior. Las conjeturas incluyen lenguaje informal, introducen términos que aluden a situaciones temporales propias de la exploración dinámica o se refieren a la construcción misma y no a una propiedad geométrica descubierta. Ese es el caso de los enunciados obtenidos como resultado de investigar el ángulo formado por las bisectrices de ángulo que son par lineal. En cambio, más adelante, hacia el episodio 7, los estudiantes logran una participación legítima en la formulación de conjeturas. Se aprecia una evolución en la calidad en la formulación de los enunciados pues su redacción, en la mayoría de ellas, se aproxima más a la producción de un experto y no se redactan conjeturas incluyendo lenguaje informal o con palabras referidas a la exploración dinámica. Los enunciados propuestos son relevantes y dan lugar a teoremas, aunque en varios casos se hace una reformulación para mejorar la redacción, el uso de cuantificadores o la notación. Esto sucede con las conjeturas que tienen que ver con la relación entre los lados de un triángulo y la congruencia de dos de sus alturas, o los enunciados que propusieron los estudiantes sobre la relación entre el punto medio del segmento cuyos extremos están en lados diferentes de un ángulo y la bisectriz de dicho ángulo. En el último episodio los estudiantes logran una participación plena, similar a la de un experto, pues el lenguaje, la redacción y el tipo de enunciados sobre propiedades de ángulos y lados de cuadriláteros especiales indican claramente qué propiedades componen el antecedente de la conjetura y cuáles el consecuente. Las conjeturas que proponen los estudiantes sirven para desarrollar el contenido correspondiente al estudio de propiedades de cuadriláteros con el cual finaliza el curso. Ninguna conjetura se rechaza por ser poco clara o incluir propiedades irrelevantes.

Reescribir las conjeturas para hacer explícito el formato si-entonces

Esta acción se realiza con el objetivo de favorece la distinción entre el antecedente de la conjetura y el consecuente. Generalmente se lleva a cabo cuando algún grupo propone una conjetura condicional pero que no está escrita en la forma si-entonces. Para favorecer la negociación del significado de la afirmación que se expresa en la conjetura, la profesora busca que los estudiantes discriminen las condiciones impuestas a la figura o al objeto que interviene en la formulación y lo que se concluye de dichas condiciones.

En el capítulo seis incluimos un ejemplo de interacción centrado en la reformulación de la conjetura sugerida por Ignacio y Nancy que no está escrita como un enunciados si-entonces de manera explícita: *‘$m\angle OKP > m\angle OPK$ cuando PK es menor a la distancia entre P y la intersección de la altura con respecto a O’.* Orlando, bajo la guía de la profesora establece cuales son el antecedente y el consecuente de la conjetura para favorecer su evaluación. La participación de los estudiantes en esta acción es periférica legítima.

Reescribir las conjeturas para lograr una formulación más general en donde se destaquen las propiedades más importantes

La acción de reescribir las conjeturas para lograr una formulación más general en donde se destaquen las propiedades más importantes sucede únicamente en uno de los episodios escogidos para el análisis, y esporádicamente en otras clases. La destacamos no tanto por la posibilidad que tienen los estudiantes de avanzar en la participación relacionada con dicha reformulación, la cual es escasa y periférica legítima, sino para poner de presente la distancia entre las producciones de los estudiantes y el conocimiento matemático institucionalizado. En los análisis de las interacciones en donde la acción tuvo lugar, se aprecia que el proceso de reformulación no es espontáneo sino impulsado por la profesora, experta de la comunidad, quien está en capacidad de identificar en aquello que los estudiantes proponen, el contenido matemático relevante.

Un ejemplo representativo de la acción sucede con la siguiente conjetura formulada por María y Efraín en el episodio 12: ‘Si O pertenece a la recta perpendicular a $\overrightarrow{KP}$, que pasa por S, punto medio de $\overline{KP}$, entonces $m\angle OPK = m\angle OKP$’. Después de haber discutido si el grupo la acepta y de haber hecho la demostración, la profesora pide a los estudiantes tratar de escribirla de forma general, de manera que quede como un teorema alusivo a propiedades geométricas. Julián y Germán, atendiendo a la solicitud, caracterizan la recta OS como bisectriz o como altura, respectivamente, y reelaboran la conjetura diciendo que la recta pasa por el punto medio del segmento KP. Sin embargo, es la profesora quien completa la caracterización de la recta como altura y propone, como conjetura, que en un triángulo, si una altura es mediana, el triángulo es isósceles, enunciado que corresponde a una propiedad general de los triángulos isósceles y que es el que ella quiere destacar desde el momento en que pide discutir la conjetura. Esta acción lleva a institucionalizar un nuevo teorema e incluirlo en el sistema axiomático.

Decidir la aceptabilidad de las conjeturas por medio de ejemplos, no ejemplos, contraejemplos y estableciendo su deducibilidad

A medida que el semestre avanza, los estudiantes tienen cada vez más elementos para decidir si admiten o no una conjetura por lo que su participación en esta acción evoluciona desde una participación periférica legítima hacia una participación legítima. Esta es una de las acciones que se constituye en un indicador de la responsabilidad que van adquiriendo los estudiantes con la empresa conjunta pues poco a poco asumen la tarea de decidir qué van a demostrar y qué no.

En los primeros episodios, la profesora se encarga de organizar las conjeturas para socializarlas, compararlas estableciendo semejanzas y diferencias entre ellas y evaluarlas con relación a la pregunta formulada, a la cercanía de la redacción con la formulación de un teorema y a su aceptabilidad. Al ir refiriéndose a cada una de ellas llama la atención de los estudiantes en aspectos específicos y envía mensajes sobre cómo espera que, en el futuro, éstas sean formuladas. Por ejemplo, respecto de los enunciados obtenidos después de resolver el problema que pedía investigar el ángulo formado por las bisectrices de ángulos que son par lineal, les dice que, a pesar de estar usando Cabri como contexto de exploración, deben redactar la conjetura en términos del sistema axiomático que se espera construir y no en términos ‘dinámicos’ propios de la actividad experimental con el programa. Los estudiantes escuchan, asienten cuando entienden cómo se hace la evaluación y responden preguntas puntuales que ellas les hace. Un poco más adelante de la mitad del semestre, en el episodio12, cuando evalúan las conjeturas obtenidas al resolver el problema en donde se menciona un triángulo *OMP* y un punto *K,* sobre la recta *MP* y se pide estudiar en qué casos la medida del $\angle OKP$ es mayor que la medida del $\angle OPK$, los estudiantes empiezan a tener una participación legítima en la evaluación de la aceptabilidad de las conjeturas. Con ejemplos, no ejemplos y contraejemplos contribuyen, de manera relevante, a admitir o rechazar conjeturas y deciden cuáles se van a demostrar. Incluso, algunos incluyen la acción de analizar la posible deducibilidad de la conjetura espontáneamente.

Reescribir las conjeturas para corregir una notación errada

La reescritura de conjeturas con el fin de corregir la notación usada por los estudiantes es una acción relativamente frecuente a lo largo del curso; sucede en cinco de los quince episodios usados en el análisis a profundidad aunque los estudiantes apenas alcanzan una participación periférica legítima. La profesora se encarga de impulsar la revisión de la notación con el objetivo de favorecer la comprensión de la conjetura e introducir a los estudiantes en las prácticas discursivas propias de la comunidad.

Uno de los errores más comunes de los estudiantes consiste en usar, para describir cómo obtener un objeto geométrico, el nombre de dicho objeto como parte de la descripción. Esto sucede, por ejemplo, en la siguiente conjetura: '*Si se construye B en el semiplano […] de tal manera que el* $\angle CPB$ *sea congruente al* $\angle CPA$ *y con AP=PB entonces...*'. Los estudiantes usan el nombre del punto que quieren determinar (*B*), para referirse a un ángulo y a una distancia que les permite ubicar a *B,* lo cual haría suponer que el punto *B* ya existe.

Reescribir las conjeturas para convertir negaciones en afirmaciones

En los episodios 7 y 15 los estudiantes formulan conjeturas en las que incluyen varias negaciones lo que las hace de difícil interpretación. Por ello, la profesora impulsa la reescritura de éstas de manera afirmativa por medio de proposiciones contrarecíprocas. Esta acción no es frecuente por lo que la participación de los estudiantes es periférica legítima y se da en la medida en que caracterizan formas típicas de enunciar conjeturas aunque no necesariamente se responsabilizan de la reformulación.

Las dos conjeturas que son objeto de un análisis detallado para lograr la reformulación en los episodios analizados son: 'si todos los lados de un triángulo son diferentes o no son congruentes, ninguna de sus alturas es congruente a ninguna otra' y 'si en un cuadrilátero ningún lado es congruente, entonces las diagonales no se bisecan'. En estricto sentido las conjeturas son correctas, pero su redacción se presta a confusión y por esa razón se promueve su reescritura.

8.1.3. ARGUMENTAR

En la clase de geometría plana, la práctica de argumentar tiene varios objetivos: establecer la plausibilidad de una conjetura, determinar su deducibilidad y esbozar las ideas con las que se construirá la demostración. La pregunta que reina en la clase es "¿por qué?" y los estudiantes poco a poco se acostumbrar a justificar todas sus afirmaciones de acuerdo a normas establecidas para ello. Por ejemplo, dado que desde la primera clase la profesora indica que todas las afirmaciones que se hagan deben tener sustento en el sistema axiomático que se va construyendo, con muy pocas excepciones las justificaciones hacen referencia a enunciados del sistema (o a enunciados que los estudiantes creen que podrían incluirse en el sistema) aunque la organización de la argumentación no siempre respete los esquemas de razonamiento deductivo. A diferencia de las prácticas de definir y conjeturar, en donde discriminamos un conjunto de acciones en las que los estudiantes evolucionan y otras en donde no, las acciones incluidas en el análisis de la práctica de argumentar (Tabla 8.3) están estrechamente relacionadas, por lo que hacemos referencia a la evolución en la argumentación en general y no a acciones puntuales. Ellas se constituyen en elementos que permiten caracterizar dicha evolución.

Proponer argumentaciones deductivas que incluyan: - Dato: información inicial de la que se parte para llegar a la conclusión (Datos). - Conclusión: Ideas de las que el argumentador quiere convencer al auditorio (Conclu). - Regla: permisos de inferir o principios que sirven de fundamento para conectar los datos con las conclusiones (Regla). - Soporte: Nuevos elementos que se introducen como reacción ante cuestionamiento o duda (Soporte). - Refutación: Rechazo a la regla usada o a la conclusión derivada de ésta (Refuta). Establecer una relación entre la construcción hecha y una explicación del por qué de una propiedad geométrica descubierta (ConstrucExp).

Tabla 8.3: Rutinas relacionadas con la actividad de argumentar

Proponer argumentaciones deductivas

A medida que los estudiantes se involucran en la empresa conjunta de construir un sistema axiomático su participación en la práctica de la argumentar evoluciona desde una participación periférica legítima hasta una participación plena. Esto se logra gracias a la negociación de significados sobre cómo se lleva a cabo el encadenamiento de afirmaciones de manera deductiva.

En las clases iniciales del semestre, la profesora invita a proponer argumentaciones para justificar ciertos enunciados y usa lo que los estudiantes dicen para incitar conversaciones sobre la manera apropiada de hacerlo. Por ejemplo, cuando pide argumentar por qué toda recta tiene al menos dos puntos. La participación de los estudiantes es periférica legítima por varias razones. No es original ni autónoma, pues la profesora determina qué enunciados del sistema axiomático son los que hay que usar en la argumentación, u orienta el uso de éstos y decide qué estudiante debe hacerlo. Ella es quien controla la organización de la argumentación y quien lleva a cabo la práctica de la refutación señalando errores que los estudiantes comenten. Los compañeros no refutan ni sugieren ideas nuevas. Las argumentaciones tienen ciertos rasgos incipientes de un esquema deductivo pues los estudiantes proponen afirmaciones iniciales que se consideran 'dadas' y usan los enunciados que la profesora les indica para justificar las conclusiones. Pero, en lugar de hacer inferencias, ellos establecen asociaciones entre la información contenida en los enunciados con los que justifican y su conocimiento previo; así, extraen conclusiones que no necesariamente se deducen directamente de usar el enunciado. También dejan baches en la argumentación pues no siempre conectan conclusiones parciales con la conclusión definitiva. El aporte es poco relevante a la consecución de la meta de elaborar una argumentación deductiva pues dista mucho de serlo. Las intervenciones de los estudiantes son propias de personas inexpertas en la producción de discursos deductivos. A pesar de ello, la profesora aprovecha el esfuerzo que hacen los estudiantes para adaptarse a las exigencias establecidas y, por medio de preguntas e insinuaciones, va ilustrando cómo sería apropiado proceder.

Hacia la mitad del curso, los estudiantes ganan experiencia en la formulación de argumentaciones deductivas con base en enunciados del sistema axiomático especialmente de teoremas relacionados con el triángulo isósceles, los criterios de congruencia de triángulos y el teorema del ángulo externo. Esta experiencia les permite participar de manera legítima en la producción de argumentaciones que tienen como fin sugerir un plan para proponer una demostración. La participación se caracteriza generalmente por ser relevante ya que los estudiantes logran propuestas útiles para justificar las afirmaciones que se argumentan. En el discurso se evidencia un esquema deductivo, prácticamente completo, en el que se encadenan afirmaciones y conclusiones aprovechando, aunque no siempre de manera explícita, enunciados del sistema axiomático y el que se encuentran las ideas principales para una posterior producción de la demostración. Aunque en algunos pasos se omite la mención de los datos de los que se parte o no se da la justificación que se usa para cierta conclusión, estas omisiones suelen ser admitidas por el grupo quizá porque corresponden a enunciados muy conocidos por todos y parece haber un acuerdo tácito en la argumentación oral bajo el cual se asume como compartida dicha información. También caracterizamos la participación como original pues los estudiantes proponen caminos para elaborar la justificación que no necesariamente reproducen justificaciones hechas previamente. Los estudiantes imaginan un plan, generalmente a partir de una figura inicial y lo desarrollan sin la intervención de la profesora. Además, el flujo de la argumentación está a cargo de los estudiantes. Sin embargo, no en todos los casos la participación es autónoma pues obedece a los requerimientos de la profesora y sólo gracias a las solicitudes explícitas de ella los estudiantes completan la argumentación que desarrollan.

Hacia el final del curso algunos estudiantes alcanzan una participación plena proponiendo ideas relevantes, originales, genuinas y autónomas para justificar afirmaciones de interés de la clase. Otros, asumen la evaluación de los argumentos de sus compañeros con la responsabilidad propia de la afiliación y alineación con la empresa que llevan a cabo. Un ejemplo de ello es la argumentación para justificar que la suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo es 180. La principal característica de este tipo de participación es que los estudiantes interactúan con la profesora como pares académicos y no como maestro y aprendiz. Proponen argumentaciones deductivas relevantes y, aunque hay conclusiones parciales que no se explicitan, se sugieren las afirmaciones esenciales y se evidencia la conexión entre ellas. La participación es autónoma pues los estudiantes intervienen por iniciativa propia, dirigiendo y controlando el hilo de la argumentación. En los casos en que la profesora u otro compañero intervienen objetando una conclusión, el autor de la argumentación reacomoda con flexibilidad el discurso a las exigencias de su interlocutor y modifica el plan previsto. Los estudiantes proponen argumentaciones originales en donde desarrollan ideas creativas en las que articulan de forma versátil varios contenidos trabajados en el curso, sin seguir un patrón previo de justificación. Aunque no se hacen explícitas todas las reglas con las que se da soporte a una conclusión, podemos decir que es una participación fundamentada pues los soportes se entrevén en los datos que se mencionan.

En el segundo ejemplo con el que describimos la participación plena en la práctica de argumentar (ver sección 7.3.3), además de evidenciarse una argumentación con las características antes señaladas, también se aprecia una práctica colectiva en la que los estudiantes participan de manera plena proponiendo y desarrollando justificaciones, pero también apoyando y controlando los argumentos de los compañeros. A pesar de no tener una vía de argumentación completamente definida, un estudiante esboza una idea vaga y expresa sus dudas frente a ella. Sus compañeros escuchan y contribuyen a organizar las ideas para construir entre todos la argumentación. La profesora actúa como un par más, casi siempre para apoyar las ideas que proponen o refutar, junto con otros estudiantes, las afirmaciones.

Establecer una relación entre la construcción hecha y una explicación del por qué de una propiedad geométrica descubierta

En algunas de las clases encontramos indicios de participación de los estudiantes en la identificación de un nexo entre la construcción hecha y el por qué de una propiedad geométrica descubierta. Sin embargo, esto no sucedió en ninguno de los 15 episodios analizados a profundidad. Por ello, pese a identificar como un aspecto clave de la argumentación esta acción, omitimos una conclusión específica sobre ella que podría conducir a pensar en una posible unidad cognitiva o no. En esta disertación no hay mayor alusión al respecto pero en los datos hay material que podría explotarse posteriormente en ese sentido.

8.1.4. DEMOSTRAR

Gracias a la participación en las rutinas propias de la actividad demostrativa, los estudiantes del curso de geometría plana tienen la oportunidad de avanzar en su comprensión de la naturaleza social de la demostración en la medida en que experimentan la producción colectiva de demostraciones matemáticas, de acuerdo a las normas establecidas en la comunidad. En un ambiente en el que las conjeturas que se someten a validación han sido propuestas generalmente por ellos mismos y han sido fruto de interpretación y estudio de su aceptabilidad, ellos contribuyen en la producción de demostraciones matemáticas -inicialmente bajo la tutela de la profesora y poco a poco de manera más relevante, genuina y autónoma-. La actividad se materializa en un conjunto de demostraciones matemáticas que se constituye en el producto de la empresa conjunta y en un indicador de aprendizaje, de acuerdo a nuestra perspectiva.

Dado que en la presente investigación hemos asumido el reto de mostrar una perspectiva sociocultural del aprendizaje de la demostración, buscamos que los aspectos de la participación se destaquen por encima de aspectos cognitivos del aprendizaje individual. Las acciones con las que ilustramos las finalidades de participación, así como la evolución de ésta, son un resultado que consideramos un aporte a la investigación en el campo. A continuación sintetizamos las acciones que con mayor frecuencia ocupan a la comunidad en relación a la práctica de demostrar (Tabla 8.4).

Resumir la información disponible, que puede usarse en una demostración (ConQueCuen).
Sugerir una construcción auxiliar para enriquecer una representación en busca de ideas para la demostración (ConstrAux).
Sugerir un camino para hacer la demostración (ProponeViaDemost).
Evaluar una propuesta para hacer una demostración (EvalViaDem).
Usar el lenguaje especializado acordado y la simbolización geométrica correspondiente (Lenguaj).
Identificar la necesidad de elaborar una argumentación previa para poder hacer una afirmación, de acuerdo al rigor exigido en la clase (Rigor).
Identificar el papel de las figuras en la producción de demostraciones (RelaFigEnunci).
Proponer pasos de la demostración que incluyan: - Hacer explícitas las condiciones iniciales (CondIni). - Establecer si están las condiciones suficientes para poder sacar una conclusión (CondSuf). - Obtener conclusiones necesarias de las condiciones suficientes y las justificaciones mencionadas (ConclNe). - Controlar que el proceso se dirija a la conclusión final que se quiere obtener (ContrCon). - Proponer las justificaciones pertinentes para sacar una conclusión como necesaria de las condiciones suficientes (Justif).

Tabla 8.4: Rutinas relacionadas con la actividad de demostrar

Resumir la información disponible que puede usarse en una demostración

Una de las acciones que se llevan a cabo permanentemente, generalmente cuando el grupo está conversando sobre cómo elaborar una demostración, es la revisión de la teoría disponible en el sistema axiomático que se puede usar en la justificación. Se revisan antecedentes y consecuentes de enunciados buscando una asociación con la afirmación que se quiere demostrar. Los estudiantes tienen una participación legítima en esta acción, que apoya argumentaciones de tipo abductivo (Douek, 1999; Arzarello, 2002) en las que se procede de manera heurística en busca de posibles justificaciones de la afirmación. En la enseñanza experimental, la participación de los estudiantes en esta acción se favorece gracias a la delimitación clara del conjunto de enunciados institucionalizados de donde pueden provenir las justificaciones. Así, los estudiantes proceden por descarte de opciones con un alto grado de seguridad de encontrar la justificación apropiada.

A medida que transcurre el semestre, algunos enunciados institucionalizados en el sistema axiomático se usan con más frecuencia que otros, en las demostraciones, por lo que su uso se va constituyendo en una rutina propia de la comunidad, que caracteriza el producto de la empresa. El postulado del par lineal, el teorema del triángulo isósceles y su recíproco, los criterios de congruencia de triángulos, el teorema del ángulo externo, el teorema de la mediatriz y su recíproco, entre otros, se utilizan permanentemente, por lo que los estudiantes acuden a ellos en busca de un camino hacia la demostración de las conjeturas.

Un ejemplo de lo que denominamos argumentación abductiva es el que realiza Julián, en una conversación en la que se discute cómo demostrar el teorema del triángulo isósceles. Julián trae a colación un teorema para ver si se puede usar: "[…] tendríamos que tener otros dos ángulos congruentes para poder decir que los suplementos de ángulos congruentes son congruentes" (ver ejemplo 2 de la sección 6.4), aunque él mismo descarta el uso del teorema porque no tienen ángulos suplementarios en la figura.

Sugerir una construcción auxiliar para enriquecer una representación en busca de ideas para la demostración

La posibilidad de sugerir construcciones auxiliares con las cuales enriquecer las figuras y encontrar una vía hacia la demostración es una acción que caracteriza la comunidad de práctica del grupo de geometría plana. Tradicionalmente, cuando una demostración requiere de una construcción auxiliar ésta es explicada por el profesor o se busca en un texto. Por el contrario, en los análisis de la enseñanza experimental encontramos varias interacciones en las que la profesora gestiona las propuestas de construcción auxiliar de los estudiantes, reuniendo aportes parciales y descartando aquellos no útiles, para lograr una figura que permita hacer la demostración.

Esta es una práctica no planeada de antemano en el diseño de la enseñanza experimental en la que los estudiantes viven una experiencia significativa de construcción colectiva de conocimiento y tienen una participación periférica legítima. Aunque no se tenía prevista, es un ejemplo del esfuerzo de la profesora por ser consistente con el objetivo de hacer del curso una empresa conjunta y de aprovechar situaciones imprevistas para favorecer el aprendizaje. Como experta líder de la comunidad, ella es capaz de integrar las ideas de unos y otros en una construcción auxiliar que de pie para hacer la demostración. Los teoremas demostrados a lo largo del semestre que requieren de una construcción auxiliar que se construye colectivamente son: el teorema de la existencia de una recta perpendicular a otra por un punto externo, el teorema del triángulo isósceles, el teorema recíproco del teorema del triángulo isósceles, el teorema del ángulo externo, el teorema hipotenusa-cateto y el teorema de la suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo.

Sugerir un camino para hacer la demostración

Cuando nos referimos a la práctica de argumentar describimos de qué manera los estudiantes participan en la elaboración de un argumento deductivo (que sirve de fuente de ideas con las que luego se construye la demostración matemática) y cuáles son las diferencias entre la argumentación y la producción de la demostración propiamente dicha. En la acción de sugerir un camino para hacer la demostración sólo hacemos referencia a aquellas intervenciones de los estudiantes en las que ellos proponen unas ideas generales que no pueden considerarse una argumentación deductiva. La participación de los estudiantes en esta acción es indicio del compromiso colectivo con sacar adelante la empresa y reflejo de cómo están comprendiendo el significado de demostrar. Los aportes proveen ideas para favorecer la interacción comunicativa. Si son considerados como factibles, la profesora impulsa la elaboración de la argumentación o la demostración correspondiente. De lo contrario, se evalúa qué problema tienen, por qué no puede ser una vía apropiada para la demostración. Así, los estudiantes construyen significado sobre cuáles son los aportes relevantes de acuerdo a las restricciones del funcionamiento de la práctica. Por ejemplo, en diversas oportunidades los estudiantes sugieren usar el teorema de la suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo aun cuando éste no se ha institucionalizado. La participación de los estudiantes en esta acción es legítima puesto que ellos se valen del listado de enunciados del sistema para hacer sus sugerencias o de conocimiento previo relacionado con el tema.

Evaluar una propuesta para hacer una demostración

A lo largo del curso, los estudiantes participan evaluando si las sugerencias que hacen los compañeros para hacer una demostración sirven o no para construirla. La profesora favorece esta práctica haciendo ella misma algunas evaluaciones, para que los estudiantes tengan un modelo a seguir, y delegando la responsabilidad de la evaluación de otras a los estudiantes, cuando los invita a opinar sobre aquello que sugieren los compañeros.

Al revisar los extractos en donde los estudiantes intervienen en esa práctica encontramos que ellos participan de manera periférica legítima en la evaluación, con aportes que tienen que ver con determinar si los enunciados que se quieren usar en la propuesta están en el sistema axiomático, conducen a lo que se quiere, se pueden vincular con la información dada en el antecedente de la conjetura (ya que están dadas las condiciones para poder usarlos), incluyen la información que se tiene disponible o no, concluyen algo útil, incluyen información correcta o si se basan en atributos relevantes de la figura que se tiene como apoyo para la argumentación y son generalizables a cualquier representación. La participación de los estudiantes en la evaluación de propuestas, así como en su formulación, es importante porque les permite identificar aspectos problemáticos de las ideas que se presentan, restricciones específicas impuestas por el grupo social o por las formas admitidas en la clase para producir una demostración y condicionantes generales, propios del discurso deductivo. Un ejemplo de dicha evaluación es la actuación de Luz cuando rechaza la propuesta de William para demostrar la congruencia de dos triángulos con base en la congruencia de dos pares de ángulos y un par de lados opuestos al tercer ángulo.

Usar el lenguaje especializado acordado y la simbolización geométrica correspondiente

Un aspecto notable de la interacción que se lleva a cabo entre los estudiantes y la profesora es el permanente control ejercido por ella al uso, por parte de los estudiantes, del lenguaje y la simbolización geométrica apropiada, así como el uso de algunos términos de la lógica proposicional y la teoría de conjuntos que se mezclan con el castellano. Los estudiantes tienen una participación periférica legítima es esta acción. Al revisar las transcripciones de las clases parecería que la fluidez de la comunicación se ve permanentemente afectada por interrupciones constantes de la profesora para corregir el lenguaje. Sin embargo, a largo plazo, el esfuerzo para que los estudiantes comuniquen sus ideas usando lenguaje apropiado les permite acceder a las formas de comunicación de la comunidad matemática de referencia. Además, resulta favoreciendo la claridad en la expresión de las ideas y la negociación de significados de los términos que se usan.

Las formas de hablar en el curso se constituyen uno de sus sellos de identidad. Ya hemos comentado en el marco teórico que términos como ‘conformar’, ‘determinar’, ‘formar’ y ‘localizar’ son permanentemente negociados y su uso se especializa en la clase para fines determinados. Lo mismo sucede con los cuantificadores ‘existe’ y ‘para todo’, que se relacionan con expresiones como “cualquier punto *Y* de la recta *m”,* y con los términos ‘contenido’ o ‘pertenece’. Palabras como ‘congruente’ o ‘igual’ se usan para objetos geométricos o para números, respectivamente, y no de otra forma. El uso de las letras es objeto de constante negociación pues a veces simbolizan objetos específicos, como en la frase “el punto medio *P* del segmento $\overline{AB}$” o variables como en “dado un punto *P* en la recta”. Incluso, el uso de las letras no es inocuo pues usadas en enunciados geométricos informan de relaciones entre ellos (por ejemplo, los ángulos *ABC* y *BCD* son adyacentes).

Identificar la necesidad de elaborar una argumentación previa para poder hacer una afirmación, de acuerdo al rigor exigido

La porción de sistema axiomático que se construye a lo largo del curso tiene como una de sus características, que lo diferencian de otros sistemas propuestos en geometría plana a nivel universitario, el grado de exhaustividad con el que se construyen las cadenas deductivas. Este se refiere a la exigencia de hacer explícitas afirmaciones que en otras aproximaciones se asumen como dadas, antes de poder afirmar algo; esto sucede debido al esfuerzo que profesora y estudiantes hacen por cumplir las normas de justificar todo aquello que se menciona con enunciados del sistema y extraer muy poca información de las figuras que representan la situación.

El proceso de codificación nos mostró que en la enseñanza experimental hay una exigencia severa por:

- Declarar explícitamente todas las condiciones que permiten hacer una afirmación, en los pasos anteriores del teorema. Por ejemplo, si se tiene como dado un segmento *AB* y se quiere afirmar la existencia de la recta *AB,* es necesario decir primero que existen los puntos *A, B,* justificando el hecho con la definición de segmento, y luego usar el postulado de la recta para afirmar la existencia de esta; o si se llega por alguna vía a proponer que un ángulo *A* mide *x* y que un ángulo *B* mide *x,* no se puede afirmar directamente que los ángulos son congruentes, pues primero hay que afirmar que *A* y *B* tienen igual medida y luego sí concluir la congruencia.

- Inferir de un postulado, definición o teorema únicamente aquello que el enunciado afirma, con toda exactitud. Veamos algunos ejemplos: (i) si *P* es el punto medio del segmento *AB*, no se puede afirmar a continuación que el segmento *AP* es congruente con el segmento *PB;* primero hay que afirmar que las medidas son iguales porque la definición de punto medio hace referencia a igualdad de medidas y no a congruencia, y luego sí se puede usar la definición de congruencia para asegurar que ésta se tiene; (ii) como la definición de bisectriz de un ángulo se refiere a la congruencia de los ángulos que forman y no a la igualdad de sus medidas, en caso de haber establecido la existencia de la bisectriz de un ángulo es necesario afirmar la congruencia y luego si se puede concluir la igualdad de sus medidas, a partir de la definición de congruencia; (iii) después de afirmar que dos ángulos de un triángulo son congruentes no se puede asegurar que el triángulo es isósceles; primero hay que afirmar que los lados opuestos son congruentes justificando esta afirmación por el teorema recíproco del triángulo isósceles, y luego sí se puede decir que el triángulo es isósceles, de acuerdo a la definición; (iv) cuando se tienen triángulos congruentes se puede afirmar congruencia de las partes correspondientes pero no igualdad de sus medidas; (v) cuando se tienen dos rectas perpendiculares, se puede afirmar la existencia sólo de un ángulo recto, de acuerdo a la definición; los demás ángulos rectos que se forman se justifican por un teorema que dice que si dos rectas forman un ángulo recto, forman cuatro ángulos rectos.

- No hacer suposiciones con base en lo que se observa en una figura que se construye como referencia, sino sólo a partir de las propiedades que se declaren específicamente. Veamos algunos ejemplos: (i) no se puede dar por hecho que dada una recta *m*, un punto *P* en ella y un punto *Q* en el semiplano *H1* determinado por *m*, entonces la semirrecta *PQ* está en *H1*, aunque visualmente se aprecie así; (ii) no se puede afirmar que un punto está en el interior de un ángulo porque así se ve al hacer una figura; (iii) no se puede afirmar que dos rectas (o segmentos) se intersecan sólo porque visualmente se ve al hacer una figura; (iv) cuando se hacen construcciones auxiliares sobre una figura, que dan lugar a triángulos, se debe justificar la existencia de éstos por la no colinealidad de los puntos que

> los determinan; (v) cuando se localiza un punto P a una distancia a del origen O de un rayo, se tiene un punto Q a una distancia b del origen y se sabe que $a < b$, no se puede afirmar la interestancia O-P-Q; (vi) para justificar la existencia de dos ángulos que son par lineal, al hacer una figura hay que asegurar que se tienen dos rayos opuestos y un punto que no está en ellos; (vii) para demostrar que un punto P es punto medio de un segmento AB hay que garantizar que la distancia de P a los extremos A, B, del segmento, sea la misma, pero también que A, B y P son colineales, lo cual no se puede admitir porque se aprecie la colinealidad visualmente, a no ser que la figura esté dada de antemano.

El nivel de rigor es producto de negociación permanente pues los estudiantes suelen obviar pasos de la demostración o exagerar las afirmaciones que hacen. En ese sentido, los estudiantes tienen una participación periférica legítima en esta acción. Adicionalmente, hacia el final del semestre, en la producción de demostraciones colectivas hechas en la clase, la profesora deja bajo la responsabilidad de los estudiantes el escribir las demostraciones exhaustivamente con posterioridad a la respectiva interacción. Ella asume que los estudiantes tienen claro el nivel de rigor y que lo ponen en práctica en sus escritos personales.

Identificar el papel de las figuras en la producción de demostraciones

Aunque la construcción geométrica y la producción de figuras es central en la actividad demostrativa que se lleva a cabo en el curso de geometría plana, su papel en la producción de demostraciones pasa a un segundo plano pues es muy poca la información que se puede extraer de ellas sin la debida justificación teórica. Por eso, el trabajo previo hecho sobre las figuras debe llevar al establecimiento de las conexiones teóricas que permitan construir la demostración. Una forma de favorecerlo es estableciendo la norma de justificar cada paso de una construcción con elementos del sistema axiomático.

Cuando una figura se asume como dada en el enunciado de una conjetura, la información que se puede extraer de ella como “hipótesis gráfica” solamente es: interestancia, no colinealidad y punto interior de un ángulo (de acuerdo al caso). Pero si la figura es fruto de una representación que se hace con posterioridad al enunciado, para tener un apoyo visual, no se puede inferir ninguna propiedad nueva a partir del dibujo, excepto decir que está en el plano. La negociación de esta norma es permanente y muchas veces se incumple aunque los estudiantes tienen una participación legítima en la negociación de ésta. Por ejemplo, en una clase en la que estaban tratando de demostrar que la correspondencia ángulo-ángulo-lado era un criterio de congruencia, Melisa, Daniel y Orlando hicieron una representación como la de la Figura 8.1.

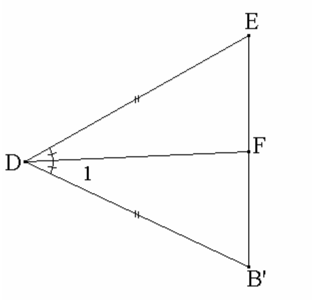


Figura 8.1

A partir del triángulo *EDF*, construyeron el ángulo 1 adyacente y congruente con el ángulo *EDF;* sobre el rayo no adyacente, localizaron a *B'* de tal forma que el segmento *ED* fuera congruente con el segmento *B'D.* Unieron *B'* con *F* y propusieron usar el teorema del triángulo isósceles para asegurar que los ángulos *E* y *B'* eran congruentes; pero no tuvieron en cuenta que no habían justificado la colinealidad de los puntos *B', F* y *E* por lo que no necesariamente habían construido un triángulo. Este hecho condujo a descartar la propuesta de demostración.

Proponer pasos de la demostración

Proponer pasos de la demostración integra el conjunto de acciones con el que dimos cuenta de la evolución de la participación de los estudiantes en la práctica de demostrar en el capítulo 7. Ellas se constituyen en elementos que permiten caracterizar dicha evolución por lo que nos referimos a ellas de manera agrupada.

Efectivamente, a lo largo del curso, la participación de los estudiantes en estas acciones evolucionó desde periférica legítima hasta plena.

Cuando el curso dio comienzo, prácticamente ningún estudiante había tenido experiencias escolares previas en la producción de demostraciones, con excepción de Juan, Aníbal y Daniel quienes habían escuchado hablar del formato a dos columnas y habían visto algunas demostraciones escritas en textos; sin embargo, no habían tenido una enseñanza directa acerca de cómo demostrar en geometría. A medida que los estudiantes participan en la producción de pasos de una demostración, como la del teorema de la recta, identifican las características de una cadena deductiva y las diferencias entre la argumentación cotidiana y la demostración matemática, gracias principalmente a la gestión de la profesora que regula el intercambio comunicativo y concilia lo que los estudiantes dicen con las formas correctas de producir los pasos. La participación periférica legítima de los estudiantes se evidencia principalmente en el hecho de que la profesora se responsabiliza de la escritura de las demostraciones en el tablero, dirige el rumbo de éstas y ejemplifica cómo proceder para garantizar que se parta de la información dada en el antecedente de la conjetura, usar lenguaje especializado, garantizar que en los pasos previos se encuentran las condiciones suficientes para poder afirmar algo, sin presuponer información así sea evidente, usar la estructura operatoria afirmación-justificación-soporte de la justificación y garantizar que la cadena de afirmaciones se dirija hacia en consecuente. Como lo señalamos en el capítulo siete, los estudiantes participan con ideas generales, de acuerdo a alguna construcción o argumentación elaborada previamente, algunas veces relevantes para la tarea de producir la demostración. Aunque procuran producir afirmaciones parecidas a las que sugiere la profesora, éstas no tienen la forma ni el lenguaje especializado correspondiente.

A mediados del semestre, la participación de los estudiantes es legítima pues ellos asumen la tarea de organizar los enunciados que se van proponiendo, unos de manera espontánea y otros por sugerencia de la profesora, y se aprecia una mayor relevancia en los aportes. Esto sucede, por ejemplo, con el teorema que en el que se afirma que los ángulos opuestos a los lados congruentes de un triángulo isósceles son congruentes. Se evidencia que ellos son conscientes de su papel. Algunos estudiantes sugieren construcciones auxiliares útiles y hacen contribuciones importantes en la producción de conclusiones parciales que llevan a la meta; otros intentan dar forma a pasos de la demostración, dan el soporte teórico a lo que se afirma, controlan que en los pasos previos estén las condiciones para las afirmaciones que se proponen, controlan que el proceso se dirija hacia la meta o hacen aportes sobre el uso del lenguaje apropiado. En general, los estudiantes dan muestras de avance en la práctica colectiva de demostrar haciendo uso de rutinas que se han practicado en la clase. Sin embargo, la participación no puede calificarse como propia de expertos pues los estudiantes no controlan cuáles son las afirmaciones centrales de las cadenas deductivas y eventualmente pasan por alto algunas, mientras que sí incluyen otras no necesarias. La profesora apoya el proceso de cerca, especialmente en la producción escrita de pasos de la demostración, exigiendo justificaciones, objetando algunas ideas, aprobando o desaprobando otras e incluyendo algunos pasos para dar a la demostración el nivel de rigor exigido. Por esa vía, la dirección del proceso está aún en sus manos.

En las sesiones finales del curso, la participación de algunos estudiantes en la producción colectiva de demostraciones es plena. Como lo señalamos en el capítulo siete, unos cuantos estudiantes interactúan entre sí y con la profesora con la naturalidad de una conversación espontánea y no con el patrón pregunta-respuesta, usual en la mayoría de intercambios iniciales. Los estudiantes encuentran vías originales y exitosas de elaborar demostraciones, que incluso se salen de las rutinas usuales que se hacen en el curso, las desarrollan prácticamente de manera autónoma, atendiendo a las reglas de producción de demostraciones, e incluso son ellos quienes se preocupan por el nivel de rigor que hay que cumplir. Hay estudiantes que asumen el rol del experto controlando que las justificaciones estén explícitas, que el lenguaje utilizado sea el apropiado y que estén todas las condiciones para poder hacer una afirmación. La profesora asume el papel de un miembro más, interviene poco y generalmente para apoyar el trabajo que los estudiantes están haciendo o para sugerir alguna idea de tipo técnico relacionada con el rigor de la demostración. Un ejemplo de esta participación es la interacción llevada a cabo para demostrar el teorema en el que se afirma que el lado más largo de un triángulo subtiende al ángulo mayor.

No podemos afirmar que todos los estudiantes asumen el papel de expertos, ni siquiera que la mayoría. Sólo algunos. Pero no por ello restamos importancia al efecto de la enseñanza experimental sobre el aprendizaje de la demostración. En lugar de mostrar la eficacia de la propuesta en la perfección con la que algunos estudiantes escriben demostraciones deductivas, nosotros mostramos una dinámica de inclusión en la práctica en la que cada estudiante se posiciona en un lugar, de acuerdo a sus posibilidades personales, y desde ese lugar aporta a la consecución de la empresa. La experiencia vivida es significativa para todos, incluso para aquellos que se quedan en una posición periférica legítima pues viven una experiencia de construcción colectiva de conocimiento, se dan una idea de cómo una clase puede constituirse en una comunidad de práctica y ganan una perspectiva de lo que significa demostrar y cómo se hace.

8.2. UNA MIRADA SOCIAL A LA ACTIVIDAD DEMOSTRATIVA

A manera de síntesis de la sección 8.1 y haciendo una comparación con la revisión de la literatura que expusimos brevemente en el capítulo dos, concluimos que nuestra investigación contribuye con una nueva mirada sobre el aprendizaje de la demostración. En particular, nuestra propuesta de analizar la participación de los estudiantes en las acciones propias de la actividad demostrativa pone de presente asuntos determinantes del aprendizaje de la demostración hasta ahora poco explorados y señala algunas tensiones a las que se enfrentan los profesores cuando toman la decisión de desarrollar el contenido de sus cursos a partir de las ideas sugeridas por los estudiantes. A continuación mostramos elementos de esta nueva mirada que sintetizan lo expuesto en los análisis y en la sección previa.

8.2.1. EL PAPEL DE LA EXPLORACIÓN EN LA ACTIVIDAD DEMOSTRATIVA

Debido a que el cuerpo principal de datos de nuestra investigación se constituye principalmente con interacciones entre la profesora y los estudiantes, en conversación instruccional o discusión colectiva, no hicimos un análisis específico de las actividades de exploración en las que participan los estudiantes, pues éstas se llevaron a cabo durante el trabajo en parejas. Sin embargo, creemos haber ilustrado tangencialmente la influencia de dichas actividades en las demás acciones en las que los estudiantes participan y por lo tanto en el aprendizaje de la demostración.

En la revisión de la literatura hicimos mención a algunas investigaciones en las que se reivindica el papel de la exploración en el aprendizaje. Mencionamos algunos resultados de estudios que reconocen que la exploración es una actividad favorable a la resolución de problemas (Radford, 1994; Furinghetti y Paola, 2003), así como el contexto de geometría dinámica (Furinghetti et al., 2004; Mariotti et al., 1997, 2000). En los estudios se menciona el efecto en la motivación por buscar justificaciones a las propiedades descubiertas, el incremento en la creatividad en las ideas y en la actividad argumental relacionada con la plausibilidad de los hallazgos. En nuestro estudio nosotros confirmamos esta influencia, aunque de manera indirecta, gracias a las intervenciones que hacen los estudiantes en la interacción posterior con todo el grupo. Adicionalmente, avanzamos en la caracterización de aspectos sociales que son regulados por la exploración, en relación con las otras acciones que conforman la actividad demostrativa.

En cuanto a definir, mencionamos que la exploración hecha en geometría dinámica favorece la negociación de significados de las propiedades incluidas en definiciones. Gracias a la confianza en que las representaciones hechas en Cabri son “buenas” representaciones de los objetos geométricos si se construyen atendiendo a sus propiedades, los estudiantes tienen un mecanismo para dirimir puntos de vista diferentes sobre las propiedades a incluir en una definición. Esto se hace evidente en definiciones como las de par lineal y altura. Adicionalmente, el uso del programa de geometría dinámica muestra la necesidad de acordar alguna definición antes de representar un objeto pues, según las normas de la clase, el proceso de construcción depende de las propiedades incluidas en la definición.

En cuanto a conjeturar, los resultados investigativos han atendido aspectos cognitivos tales como la generación de procesos de condicionalidad lógica impulsados por exploraciones dinámicas que dan lugar a conjeturas (Boero et al, 1996, 1999) y el papel del arrastre y la medida de los programas de geometría dinámica para analizar los complejos intercambios entre los procesos de exploración y los procesos de justificación (Arzarello et al., 1998, 2002; Olivero y Robutti (2001). Los resultados se derivan de seguimientos detallados a las acciones e ideas verbalizadas por estudiantes en el curso de la resolución de problemas. Dada la metodología escogida por nosotros y el interés de privilegiar aspectos sociales más que individuales, no tenemos elementos para confirmar o rechazar estos resultados. Lo que nuestro estudio sí nos permite concluir es que la exploración, en un ambiente de geometría dinámica es útil para disponer de una amplia variedad de conjeturas con las cuales impulsar procesos de argumentación y producción de demostraciones, para identificar ejemplos, no ejemplos y contraejemplos de las formulaciones y para evaluar las relaciones entre la construcción hecha y la conjetura formulada. Especialmente esta última acción se constituye en un mecanismo efectivo para negociar socialmente los significados de antecedente y consecuente de una conjetura, al relacionar el primero con las propiedades impuestas a una figura por construcción o por arrastre y el segundo con las propiedades descubiertas.

En cuanto a argumentar y demostrar, la investigación sobre el efecto del uso de ambientes como Cabri ha avanzando en la caracterización de la influencia de algunos elementos tales como el contenido y la estructura de los enunciados de los problemas en la unidad cognitiva (Garuti et. al, 1996; Mariotti et. al, 1997) que se puede lograr entre las argumentaciones que se hacen en los procesos exploratorios y aquellas con las que después se demuestran los teoremas (Garuti et al., 1996; Mariotti et al., 1997; Douek, 2009). Nosotros no podemos confirmar o rechazar estos hallazgos por dos razones relacionadas con el diseño de la enseñanza experimental. Primero, los estudiantes no tenían plena libertad para argumentar a favor de un resultado a partir de la exploración, pues se tenía la norma de sustentar teóricamente cualquier afirmación propuesta. Esta norma hizo que la fuente de ideas para argumentar sobre la plausibilidad de la conjetura o su deducibilidad fuera el sistema axiomático y no la exploración sobre la construcción. Segundo, no hicimos un seguimiento detallado al trabajo realizado a las parejas de estudiantes. Sin embargo, precisamente debido a la norma establecida de justificar las construcciones hechas en Cabri con elementos del sistema, socialmente se establece un vínculo directo entre la exploración y la producción de cadenas deductivas que favorece la participación de los estudiantes en la construcción de demostraciones. El ejemplo más representativo de esta influencia social es la forma como se elabora la demostración de la afirmación ‘tres puntos no colineales determinan dos segmentos que se bisecan’. Los estudiantes simplemente tienen que recordar los pasos de la construcción para ir proponiendo pasos de la demostración.

Aunque reconocemos, sin lugar a dudas, el efecto de la geometría dinámica en el proceso de aprendizaje, aun tenemos que clarificar cómo los estudiantes vinculan el razonamiento informal ligado a lo ostensivo con las demostraciones confinadas a un sistema axiomático y cómo el trabajo de exploración en un ambiente de geometría dinámica los conduce a generar ideas útiles para la demostración misma. Esta claridad permitiría ilustrar el principio sociocultural según el cual el uso de herramientas, en este caso de un programa de geometría dinámica, favorece una trayectoria incluyente en las prácticas sociales y culturales pues éstas transportan en sí mismas una herencia de la práctica (Lave y Wenger, 1991).

Aspectos cognitivos estudiados por otros investigadores	Aspectos socioculturales identificados en el presente estudio
Generar motivación para justificar. Desplegar una rica actividad argumental. Favorecer la unidad cognitiva entre la argumentación y la demostración.	Dirimir puntos de vista sobre propiedades a incluir en una definición. Disponer de una amplia variedad de conjeturas con las cuales impulsar procesos de justificación y producción de demostraciones. Proveer ejemplos, no ejemplos y contraejemplos de conjeturas para impulsar la discusión sobre su aceptabilidad. Negociar el significado del antecedente y el consecuente de una conjetura por medio de la identificación de relaciones entre la construcción hecha y la conjetura formulada. Usar los pasos de la construcción como base para establecer los pasos de la demostración.

Tabla 8.5: Influencia de la exploración en la actividad demostrativa

En la Tabla 8.5 sintetizamos los resultados investigativos en cuanto al papel de la exploración en la actividad demostrativa. En la columna de la izquierda están algunos aportes de la investigación desde el punto de vista cognitivo. En la columna de la derecha está nuestros aportes, desde la teoría de la práctica social.

8.2.2. DEFINIR Y DEMOSTRAR, DOS ACTIVIDADES ESTRECHAMENTE RELACIONADAS

En el marco teórico señalamos que, tal como fue sugerido por Freudenthal (1971), definir va más allá de explicitar el significado de un concepto pues la escogencia de propiedades que se incluyen en la definición determina el conjunto de propiedades del cual se pueden derivar otras; en ese sentido, la definición determina la organización deductiva en la cual el concepto esté inmerso. Bajo esta perspectiva, en la revisión de la literatura señalamos que investigadores como Furinghetti y Paola (2000, 2001) señalan los nexos entre definir y comprender la estructura si-entonces y otros como Saenz-Ludlow y Athanasopoulou (2008) establecen la interdependencia entre el conocimiento de una definición y los argumentos para justificar enunciados relacionados con el concepto definido.

En nuestra investigación, analizamos en detalle cuál fue la participación de los estudiantes en la actividad demostrativa relacionada con las definiciones y concluimos que las acciones en las que intervienen los estudiantes son de dos tipos:

En unas, la atención se centra en la negociación de las propiedades explícitas o implícitas que caracterizan al objeto definido, con miras a su formulación. Esta negociación se lleva a cabo con referencia a los enunciados incluidos en el sistema axiomático que se construye colectivamente pues las propiedades que se incluyen en una definición deben haberse institucionalizado previamente y ser el número mínimo posible para favorecer el uso de la definición en una demostración. La investigación confirma el hallazgo de Saenz-Ludlow y Athanasopoulou (2008) y avanza en la caracterización de acciones sociales de participación en clase que favorecen la negociación tales como: contribuir a formular una definición, identificar propiedades faltantes en no-ejemplos, identificar qué propiedades del objeto definido quedan determinadas explícita e implícitamente por su definición, identificar en ejemplos representativos qué propiedades son relevantes para definir un objeto geométrico, proponer representaciones de un objeto definido y rechazar propuestas de definición proponiendo contraejemplos.

En otras, el interés está en el procedimiento específico mediante el cual las definiciones se convierten en eslabones de las cadenas deductivas. Aunque Furinghetti y Paola (2000, 2001) señalan nexos entre definir y comprender la estructura si-entonces no encontramos un estudio que profundice más en detalle sobre el asunto. Nosotros nos centramos en la evolución de la participación de los estudiantes en los momentos en que la producción de una demostración requiere hacer uso de una definición, bien sea para explicitar propiedades derivadas de la existencia de un objeto geométrico o para garantizar la existencia de éste, una vez se tiene el conjunto de propiedades que lo definen. Pero más que detenernos en asuntos de la comprensión de la estructura bicondicional de las definiciones vemos el proceso como parte de la apropiación de las normas del discurso deductivo que se van aprehendiendo a medida que éste se lleva a cabo.

En la Tabla 8.6 sintetizamos nuestros resultados que apuntan a las relaciones entre definir y demostrar. En la columna de la izquierda, incluimos los aspectos cognitivos que constatamos de manera no rigurosa. En la columna de la derecha, listamos los aspectos que emergieron en el análisis.

Aspectos cognitivos constatados de manera no rigurosa	Aspectos socioculturales identificados en el presente estudio
Comprender la estructura si-entonces de una definición. Aprovechar el conocimiento de la definición de un objeto en la argumentación sobre propiedades de éste.	Negociar las propiedades que deben incluirse en una definición a partir de: - Contribuir a formular una definición. - Identificar propiedades faltantes en no-ejemplos. - Identificar qué propiedades del objeto definido quedan determinadas explícita o implícitamente por una definición. - Identificar en ejemplos representativos qué propiedades son relevantes para definir un objeto geométrico. - Proponer propuestas de definición mediante contraejemplos. Usar las definiciones en demostraciones para: - Explicitar propiedades derivadas de la existencia de un objeto geométrico. - Garantizar la existencia de éste, una vez se tiene el conjunto de propiedades que lo definen.

Tabla 8.6: Aspectos de la práctica de definir en la actividad demostrativa

8.2.3. LA COMPLEJIDAD DE LA PRODUCCIÓN DE CONJETURAS

Nuestra investigación confirma la aseveración de Boero et al. (1996) quienes señalan que formular conjeturas precisas, claras y correctas en las que sea evidente la estructura de una condicional no es sencillo y se requiere la guía del experto en dicha tarea. En nuestro experimento de enseñanza la adecuación de las conjeturas es un proceso que se cumple en tres fases.

En una primera fase, a raíz de la resolución del problema propuesto, las parejas discuten acerca de las conjeturas que pueden formular y cómo deben redactarlas. Aunque nuestro análisis no se centró en esta fase, tenemos indicios de las dificultades que los estudiantes enfrentaron pues en los registros de las tres parejas que filmamos se aprecia el tiempo que invierten en discutir cómo redactar las conjeturas y en escribirlas. Una primera versión de las conjeturas es entregada a la profesora, generalmente al término de una sesión de clase.

En una segunda fase, la profesora estudia las conjeturas entregadas y establece un orden en el que se van a discutir, de acuerdo con dos criterios que algunas veces entran en tensión. Uno, que las conjeturas permitan desarrollar el contenido previsto de tal forma que después de discutir alguna conjetura y demostrarla, el enunciado sea útil para demostrar las siguientes. Dos, que se favorezca la discusión y la participación de los estudiantes en la evaluación de las conjeturas. La organización de las conjeturas es responsabilidad de la profesora pues es únicamente ella quien tiene el conocimiento para dirigir la construcción del sistema axiomático hacia aquel que se toma como referencia en el curso.

En una tercera fase, las conjeturas se someten a consideración de la clase y son objeto de comparación, reformulación y evaluación hasta obtener enunciados admitidos por el grupo y suficientemente precisos y claros para adelantar su demostración. En el experimento de enseñanza, las comparaciones, revisiones y evaluaciones tomó más tiempo del previsto e incluso a veces más que la actividad argumental en busca de la justificación o que la producción misma de la demostración. Este hecho no planeado ocasionó cambios en la planeación. Las acciones llevadas a cabo se vuelven rutinas características de la comunidad de práctica de clase y son la fuente principal de las ideas que se discuten y demuestran. A medida que transcurre el semestre académico, los estudiantes se van involucrando cada vez más en el proceso y su participación en las acciones más frecuentes, tales como la formulación inicial de conjeturas, el análisis de la concordancia entre la conjetura y la construcción y el estudio de la admisibilidad de las mismas, evoluciona hacia una participación plena. En la Tabla 8.7 listamos las principales acciones de tipo sociocultural en las que participan los estudiantes en la práctica de conjeturar, en nuestro experimento de enseñanza.

Producir variedad de conjeturas a partir de la resolución de problemas. Comparar conjeturas estableciendo semejanzas y diferencias. Evaluar conjeturas en relación a: - Su estructura condicional. - La correspondencia con la construcción. - La relación con el enunciado del problema. - Las propiedades incluidas y si éstas están en el sistema axiomático. - La aceptabilidad por parte del grupo. - Su deducibilidad con elementos del sistema axiomático. Reformular conjeturas para garantizar que: - Tengan la estructura condicional. - Expresen afirmaciones y no negaciones, en lo posible. - Sean formulaciones generales. - El antecedente y el consecuente estén completos y claros. - La notación sea la correcta.

Tabla 8.7: Aspectos socioculturales de la práctica de conjeturar en la actividad demostrativa

8.2.4. LA ARGUMENTACIÓN DEDUCTIVA

La mayor parte de la discusión sostenida acerca de la argumentación en la actividad demostrativa se refiere a la distancia entre la formulación de argumentos informales para analizar la plausibilidad de una conjetura y los pasos de una demostración formal (Duval, 1991; Balacheff, 1999; Pedemonte, 2001, 2002, 2005). Nuestro acercamiento a la argumentación está basado en la idea de Douek (2009) quien con el término ‘argumentación’ se refiere tanto al discurso para apoyar la plausibilidad de una conjetura como al discurso en el que se hace uso de enunciados teóricos para sugerir posibles pasos de una futura demostración. De hecho, en nuestro experimento de enseñanza, el discurso para apoyar la plausibilidad de una conjetura también está basado en enunciados teóricos pues es una de las normas de la clase. Por eso nosotros nos referimos en cualquiera de los dos casos a una argumentación deductiva.

Más que establecer la distancia entre argumentar y demostrar, nosotros hemos aprovechado el modelo de Toulmin (1958), y la propuesta de Pedemonte (2005) sobre cómo usarlo, para identificar en la argumentación deductiva una estructura que es análoga a la estructura de una demostración, favorecida en nuestro caso por la norma de justificar cualquier afirmación con enunciados del sistema teórico. Con ello, sugerimos una vía didáctica para acercar a los estudiantes a la producción de demostraciones mediante normas establecidas en la clase sobre cómo argumentar. Lo que los estudiantes toman como punto de partida, que hemos llamado ‘datos’ se asocia en la producción de la demostración con las condiciones iniciales o lo ‘dado’ en el antecedente de una conjetura. La ‘regla’ corresponde al respaldo teórico o justificación que en la producción de la demostración generalmente es una implicación $p \rightarrow q$ (que permite concluir q a partir de p en los esquemas modus-ponendo-ponens) y la ’conclusión’ se asocia al consecuente de la conjetura. Los otros dos elementos de la argumentación, el ‘soporte’ y la ‘refutación’, son mecanismos sociales para controlar la dinámica de la argumentación. En el proceso de demostrar, al no poner en juego reguladores como estos, con frecuencia los miembros inexpertos se desvían de la ruta que va hacia la conclusión aunque hagan inferencias deductivas correctas. En la Tabla 8.8 proponemos cómo impulsar la práctica de argumentar, gracias a la adecuación de un discurso que tenga la estructura sugerida por Pedemonte (2005). Creemos que es una vía investigativa más productiva que el hecho de establecer la distancia cognitiva entre la argumentación informal y la demostración, por lo menos a nivel universitario.

Aspectos cognitivos señalados en investigaciones previas	Aspectos socioculturales identificados en el presente estudio
Identificar la distancia cognitiva entre la argumentación informal y la demostración.	Aprovechar la argumentación deductiva para acercar a los estudiantes a la práctica de demostrar exigiéndoles: - Identificar los datos de los que parten en su argumentación. - Establecer las reglas mediante las cuales se respaldan las afirmaciones que se hacen. - Proponer afirmaciones específicas a manera de conclusiones. - Refutar las afirmaciones o reglas sugeridas por los compañeros. - Dar un soporte más firme a las reglas o las conclusiones mediante una teoría de referencia.

Tabla 8.8: Aspectos de la práctica de argumentar en la actividad demostrativa

8.2.5. EXIGENCIAS SOCIALES QUE MEDIAN LA PRODUCCIÓN DE DEMOSTRACIONES MATEMÁTICAS

En nuestra investigación, en lugar de analizar concepciones y dificultades de los estudiantes al aprender a demostrar (Fishbein y Kedem, 1982; Almeida, 2000, 2003), tipificar esquemas de prueba (Balacheff, 2000; Harel y Sowder, 1998; Marrades y Gutiérrez, 2000) o caracterizar el tipo de demostraciones que hacen los estudiantes (Calvo, 2001), nos hemos interesado por identificar algunas acciones propias de la interacción social, entre un experto y los novatos, que favorecen el tránsito de éstos desde una participación periférica legítima hacia una participación plena en la producción colectiva de demostraciones matemáticas. Aunque en estas acciones subyacen esquemas de razonamiento deductivos, éstos no son objeto de un estudio específico ni se hacen explícitos sino que se configuran a partir de la construcción de pasos de la demostración, atendiendo a unas normas que sí se hacen públicas.

La codificación emergente llevada a cabo en los análisis de los datos nos permite identificar algunas acciones puntuales que se convierten en rutinas a lo largo del curso. Probablemente hay otras acciones importantes de carácter social encaminadas a favorecer la participación de los estudiantes en la práctica de demostrar. Sin embargo, creemos que las acciones que listamos en la columna derecha de la Tabla 8.9 ilustran aspectos socioculturales que deben ser tenidos en cuenta por quienes deseen impulsar procesos de aprendizaje de la demostración por medio de la participación. En la columna de la izquierda, a manera de contraste, incluimos aspectos que han caracterizado la investigación sobre la demostración, que no fueron objeto de análisis en la presente investigación.

Aspectos cognitivos identificados en investigaciones previas	Aspectos socioculturales identificados en el presente estudio
Identificar dificultades cognitivas al aprender a demostrar. Tipificar esquemas de prueba. Tipificar tipos de demostraciones.	Resumir la información disponible que puede usarse en una demostración. Sugerir una construcción auxiliar para enriquecer una representación en busca de ideas para la demostración. Evaluar una propuesta para hacer una demostración. Usar el lenguaje especializado acordado y la simbolización geométrica correspondiente. Identificar la necesidad de elaborar una argumentación previa para poder hacer una afirmación, de acuerdo al rigor exigido en la clase. Sugerir un camino para hacer la demostración. Identificar el papel de las figuras en la producción de demostraciones. Proponer pasos de la demostración que incluyan: - Hacer explícitas las condiciones iniciales. - Establecer si están las condiciones suficientes para poder sacar una conclusión. - Obtener conclusiones necesarias de las condiciones

Aspectos cognitivos identificados en investigaciones previas	Aspectos socioculturales identificados en el presente estudio
	suficientes y las justificaciones mencionadas. - Controlar que el proceso se dirija a la conclusión final que se quiere obtener. - Proponer las justificaciones pertinentes para sacar una conclusión como necesaria de las condiciones suficientes.

Tabla 8.9:Aspectos de la práctica de demostrar en la actividad demostrativa

8.3. ACERCA DE LA NEGOCIACIÓN DE SIGNIFICADOS

En el capítulo 6, al sintetizar los resultados del análisis de las finalidades de participación y simultáneamente ejemplificar cómo hicimos la codificación, nos centramos en algunos aspectos de la negociación de significados que caracterizan las interacciones entre los estudiantes y la profesora a lo largo del curso. Nos enfocamos en la negociación porque, desde el punto de vista de la teoría de la práctica social (Wenger, 1998), el aprendizaje es mediado por las diferencias de perspectivas entre las personas cuando interactúan en procesos de participación y materialización. Los estudiantes del curso de geometría plana aprenden acerca de la demostración matemática mientras que articulan sus perspectivas particulares, especialmente en situaciones de confusión y conflicto, relacionadas con la empresa de construir un sistema axiomático de geometría euclidiana plana.

En el curso de la interacción entre profesora y estudiantes, o entre estudiantes, identificamos situaciones no todas predecibles de antemano, que ayudan a entender la importancia de las diversas contribuciones de los participantes; entre otras podemos señalar: diferencias en las imágenes conceptuales entre los objetos que entran en juego, conjeturas no previstas, argumentaciones deductivas fuera de lo usual, acciones no imaginadas, usos poco corrientes del lenguaje. Estas situaciones son fuente de negociación de significados, influyen en el producto de la empresa y se vuelven centrales en la comprensión de los procesos reales de interacción. Ellas dan lugar a patrones sistemáticos de actuación e interacción comunicativa que son los que proveen las condiciones para la participación periférica legítima y el tránsito hacia la participación legítima o plena en ciertas rutinas, gracias a la negociación. Como lo señalan Lave y Wenger (1991), los patrones no son rígidos sino adaptativos y se vuelven resultado de la acción y no una precondición de ésta. A continuación señalamos cuatro aspectos centrales de la negociación de significados a lo largo del semestre.

Un primer aspecto es la diferenciación entre el acercamiento informal o cotidiano a los objetos geométricos y el acercamiento exigido en un curso universitario de geometría. En ese sentido se negocia, por ejemplo, cuál es la definición que se adopta de un objeto geométrico para interpretar su representación en términos de las propiedades incluidas en la definición y no en función de los fenómenos gráficos observados; o se negocia el conjunto mínimo de propiedades que determinan un objeto y cómo éstas se usan en las demostraciones, mostrando la insuficiencia de la descripción informal para avanzar en la producción de una demostración. La arbitrariedad de las definiciones, característica de su tratamiento científico, así como su economía, el grado de compatibilidad con el sistema axiomático y la equivalencia de varias definiciones son también objeto de negociación. Ésta conlleva a la maduración de los conceptos que se abordan en la clase como resultado de la fusión entre las versiones cotidiana y científica (Vygotsky, citado en Wenger, 1998).

Un segundo aspecto es la forma como se lleva a cabo la actividad demostrativa en el curso, a diferencia de otras formas de actividad matemática. Al respecto, al comprometernos con la teoría de la práctica social en el experimento de enseñanza, sometemos a los estudiantes a una situación un tanto contradictoria: los ponemos a actuar y a hablar, desde el primer día, como ellos no saben hacerlo. Para lograr que introduzcan cambios en sus prácticas hacia las formas esperadas, favorecemos la interacción entre ellos y con la profesora, experta en dicha práctica. Los estudiantes se asumen como novatos de una práctica y se unen a la experta para llevar a cabo las tareas, actuando inicialmente como participantes periféricos legítimos. Por esa vía, negocian nuevas formas de actuar y hablar que les permiten la comunicación con el experto. Poco a poco, a medida que van comprendiendo la empresa que se lleva a cabo y cómo se desarrolla, van asumiendo las prácticas de manera legítima o plena. Esta evolución supone que los novatos aceptan, aún de manera tácita, su condición de aprendices de la actividad demostrativa y desean seguir el modo de actuar y de hablar del experto; sin embargo, esto no significa una imitación desprevenida sino un interés genuino por hacer parte de la comunidad. Algunos ejemplos de la negociación de significados que se lleva a cabo a lo largo del semestre son:

- El tratamiento que hay que dar a las definiciones cuando se está resolviendo un problema o cuando se hace una demostración. En el primer caso, basta acordar una definición informal y con ello se resuelve el problema; en el segundo caso debe estar explícita la definición acordada.

- La relación entre la construcción geométrica y la conjetura que se formula como producto de la resolución de problemas, ante la exigencia de escribir como antecedente las propiedades que se emplean en la construcción, o se imponen por arrastre, y como consecuente las propiedades que resultan.
- La forma de descartar, admitir o validar conjeturas: se descartan con contraejemplos, se verifican con acciones sobre la representación y la presentación de ejemplos y se validan sólo con deducción.
- El papel que juegan las figuras en el curso, cuáles son las propiedades relevantes de una figura y cuales son las no relevantes respecto de una propiedad que se detecta en una exploración -y que son particulares de una figura específica-; como tener un ángulo obtuso, por ejemplo, en el caso de la conjetura que afirma que dos lados congruentes de un triángulo determinan dos alturas congruentes.
- La forma de llegar a una conclusión a partir de una cadena deductiva. Implícitamente, se negocia la estructura modus-ponendo-ponens de la mayoría de los razonamientos que se hacen y cómo hacer uso del conjunto de enunciados que se tienen a disposición para construir pasos de una demostración.

Un tercer elemento es el lenguaje admitido en clase en los diferentes momentos de la actividad demostrativa. Como participantes novatos de la clase de geometría, los estudiantes son introducidos a las formas discursivas propias de la comunicación oral y escrita en lenguaje geométrico aunque inicialmente ellos vean dicho discurso como algo extraño que tienen que imitar porque el experto lo usa, lo aprecia y lo exige. Este parece ser un paso inevitable en el proceso de convertirse en participantes legítimos o plenos de una comunidad de práctica. En nuestro experimento de enseñanza, la profesora procura, permanentemente, que los estudiantes se expresen con el lenguaje geométrico apropiado -aunque termina adoptando expresiones y términos a raíz de la negociación-, y los estudiantes manifiestan una disposición positiva hacia su uso, probablemente por la necesidad de comunicar sus ideas y participar en las actividades. Como en todas las comunidades de práctica, ciertos usos del lenguaje se vuelven propios de ella y reconocibles sólo por sus miembros. Por ejemplo, profesora y estudiantes terminan usando las expresiones “copia de una medida” o “transferencia de un punto” cuando se quieren referir al teorema de localización de puntos, debido a la asociación que establecen entre el teorema y la opción de transferencia de medidas del menú de Cabri. Otros aspectos del uso del lenguaje que se negocian en la clase de geometría plana son:

- El uso de cuantificadores en negaciones como “si ningún lado es congruente con otro, ninguna altura es congruente a otra”.
- El uso del formato a dos columnas: qué se pone en cada columna, qué paso va a continuación del otro y qué se pone en paréntesis. El significado de los términos ‘afirmación y ‘justificación es algo que los estudiantes logran a través del uso.

Un cuarto y último elemento tiene que ver con las normas que se promulgan para llevar a cabo la actividad demostrativa. A medida que se van desarrollando las acciones propias de cada práctica, se negocia el significado de las normas y éstas se establecen como adaptaciones de las afirmaciones iniciales, fruto de la negociación. Por ejemplo, la norma de “justificar todas las afirmaciones con enunciados del sistema axiomático” se flexibiliza hacia el final del curso por considerar que la justificación de ciertas afirmaciones es de conocimiento común y por tanto puede obviarse para agilizar cierta actividad, con la conciencia de poder reproducir el proceso en cualquier momento.

8.4. CONSTITUCIÓN DE IDENTIDADES DE PARTICIPACIÓN

En esta sección discutimos algunos resultados relacionados con la participación individual de los estudiantes en el curso de geometría plana. Hacemos referencia, en primer lugar, a la posibilidad de establecer una trayectoria incluyente de participación y, en segundo lugar, a la constitución de identidades de participación.

8.4.1. TRAYECTORIAS DE PARTICIPACIÓN

A diferencia de la manera usual de ver una clase -en donde se conciben unos roles predefinidos para la profesora y los estudiantes de acuerdo a la organización típica-, una vía mediante la cual evaluamos el aprendizaje de los estudiantes desde la perspectiva de la práctica social (Wenger, 1998) consiste en identificar trayectorias incluyentes de participación en la comunidad en donde los miembros asumen roles cambiantes que son ocupados por más de un participante. Aunque nosotros no hacemos un seguimiento individual, podemos afirmar que los estudiantes del curso de geometría plana, en su mayoría, logran una participación periférica legítima, asumiendo responsabilidades en diversas tareas de la comunidad, en colaboración con otros, y algunos de ellos avanzan hacia una participación legítima y plena en algunas de las rutinas del repertorio de prácticas asociado a la actividad demostrativa. En ese sentido, cada estudiante avanza en el dominio de algunas acciones y en la producción de algunos discursos relacionados con la actividad demostrativa de acuerdo a la trayectoria que despliega al interior de la comunidad.

Gracias a las tareas propuestas y a la gestión de la interacción promovida por la profesora, los estudiantes se distribuyen a lo largo de una línea de participación: unos se quedan en la periferia, otros llevan a cabo una participación legítima y unos pocos tienen una participación plena. Esta distribución es propia de una comunidad, pues no se puede esperar que todos los miembros se involucren de la misma forma. En cualquier caso, la participación periférica legítima tiene una connotación positiva y supone un avance de cada estudiante hacia una trayectoria incluyente. Denota el modo particular en el que los estudiantes del curso participan en la actividad demostrativa que les sugiere una experta, la profesora, aunque con un grado de autonomía limitado sobre el producto último de la práctica, una porción de un sistema axiomático. A diferencia de una práctica 'irrelevante' en donde posiblemente los estudiantes hubieran memorizado demostraciones sugeridas en un libro o propuestas por el profesor, los novatos participan periféricamente en conexión directa con la práctica de demostrar, pero además, como pasa con algunos de ellos, con la posibilidad de ganar mayor autonomía, responsabilidad y grado de compromiso con sacar adelante la empresa.

De acuerdo con las ideas de Lave y Wenger (1991) aún quienes tienen una participación periférica legítima durante todo el curso, ganan diversas perspectivas sobre la práctica que se realiza en la comunidad, en nuestro caso la actividad demostrativa, que muy posiblemente les permiten ir concibiendo una idea de lo que constituye actuar y hablar en dicha práctica como lo hace un experto; así, identifican qué tipo de colaboración se prestan los que se dedican a dicha práctica, para qué la hacen, qué ganan con ello, cómo hablan de ella, como comunican sus resultados, etc. No se trata de tener una visión estática de la práctica vista desde afuera sino de ir cambiando de impresión a medida en que participan en diversas labores asociadas y cambian de rol a lo largo de la práctica. En la medida en que sus contribuciones son aceptadas por los demás miembros de la clase y se responsabilizan de tareas más complejas se van acercando a una práctica madura que puede ser determinante de su vida futura y por lo tanto su aprendizaje es valioso y legítimo. Esto nos lleva a confirmar la idea de Lave y Wenger (1991) según la cual, la participación periférica legítima en sí misma produce aprendizaje aún si los participantes no están intentando adquirir ciertas habilidades específicas.

En el marco teórico, atendiendo a la propuesta de Fernández (2008) caracterizamos de manera general tres estados de participación: periférica legítima, legítima y plena, que distinguimos de acuerdo a qué tan relevante, genuina, autónoma y original era. Fruto de los análisis establecimos indicadores específicos para cada adjetivo que pueden orientar futuros análisis. En la Tabla 8.10 se recogen dichos indicadores.

	Caracterización inicial	Indicadores de participación
Periférica legítima	Los estudiantes, bajo la dirección y acompañamiento cercano del profesor, participan en la actividad demostrativa con los recursos disponibles, de manera poco autónoma, genuina, relevante u original.	La dirección del intercambio comunicativo está a cargo del experto inicial (la profesora). Las intervenciones de los estudiantes no son espontáneas; responden a las solicitudes del experto inicial (la profesora). Los aportes de los estudiantes se fundamentan en ideas informales o no se fundamentan explícitamente. Las correcciones, objeciones, rechazo de ideas o argumentos y exigencia de justificación están a cargo del experto inicial (la profesora). Los aportes de los estudiantes son útiles más no esenciales a la consecución de los fines de la tarea específica. Las formas discursivas y argumentativas de los estudiantes y la terminología usada son propias de la comunicación informal. Los aportes de los estudiantes son poco novedosos o creativos; generalmente atienden a una sugerencia del experto inicial (la profesora).
Legítima	Los estudiantes, con el apoyo del profesor, participan en la actividad demostrativa de manera genuina, relevante u original pero no autónoma.	La dirección del intercambio comunicativo está a cargo del experto inicial (la profesora) quien, la mayoría de las veces, aprovecha la propuesta de un estudiante y la gestiona. La mayoría de las intervenciones de los estudiantes son espontáneas. Los aportes de los estudiantes se fundamentan en enunciados del sistema axiomático. Las correcciones, objeciones, rechazo de ideas o argumentos y exigencia de justificación están a cargo del experto inicial o de algunos estudiantes que se responsabilizan de esta tarea. Los aportes de los estudiantes son esenciales a la consecución de los fines de la tarea específica. Las formas discursivas y argumentativas de los estudiantes y la terminología usada se aproximan a las de la comunidad matemática de referencia. Algunos de los aportes de los estudiantes son novedosos o creativos.

	Caracterización inicial	Indicadores de participación
Plena	Los estudiantes, en interacción comunicativa con el profesor, participan en la actividad demostrativa de manera genuina, autónoma, relevante y eventualmente original. Son reconocidos como líderes por los demás miembros de la comunidad.	La dirección del intercambio comunicativo se comparte entre el experto inicial y algún o algunos estudiantes. Las intervenciones de los estudiantes son espontáneas; responden a un interés personal por sacar adelante la empresa. Los aportes de los estudiantes se fundamentan en enunciados del sistema axiomático. Algunos estudiantes asumen la tarea de corregir, objetar, rechazar argumentos o exigir justificaciones. Los aportes de los estudiantes son útiles y esenciales a la consecución de los fines de la tarea específica. Las formas discursivas y argumentativas de los estudiantes y la terminología usada son propias de la comunicación matemática de referencia. La mayoría de aportes de los estudiantes son novedosos o creativos.

Tabla 8.10: Indicadores de participación

Como resultado de nuestro experimento de enseñanza no podemos listar un conjunto de habilidades o técnicas de demostración específicas que los estudiantes del curso de geometría plana aprendieron. Podemos afirmar que ellos lograron moverse entre modos de participación; es decir, ganaron un conjunto de formas de participación que pueden llevar a otras comunidades de práctica. Aprendieron a desenvolverse en una práctica, en colaboración con otros, anticipando lo que puede ocurrir en ella e incluso improvisando de forma legítima. Aunque fallen en escribir demostraciones de acuerdo a las normas establecidas y no logren total autonomía en dicha tarea, podemos decir que ganaron ciertas rutinas de participación que posiblemente transfieran a otras comunidades. Como lo señalan Lave y Wenger (1991), la efectividad del aprendizaje no se ve en que los aprendices logran un desempeño como el de un experto sino en el compromiso que adquieren por comportarse en vías congruentes. En forma semejante, la efectividad de un maestro para producir aprendizaje no depende de su habilidad para inculcar a los estudiantes sus propias formar de actuar o de hablar sino de su habilidad para gestionar efectivamente una división de la participación que proporcione el crecimiento de los estudiantes. En ese sentido, es la habilidad común de coparticipar la que provee el germen para el aprendizaje y no la existencia de estructuras de referencia comunes.

8.4.2. IDENTIDADES DE PARTICIPACIÓN

Además de aludir a trayectorias de participación, la teoría de la práctica social nos proporciona otra manera de evaluar el aprendizaje con un foco especial sobre las personas. Sin embargo, nos ofrece una mirada alternativa a aquella que se le suele dar desde el punto de vista cognitivo, pues en lugar de prestar atención a las habilidades y conocimientos individuales se centra en la persona como miembro de una comunidad social. Desde ese punto de vista, consideramos que aprender a demostrar supone adquirir una identidad de participación en dicha práctica asumiendo tareas y funciones específicas reconocidas y valoradas por los miembros de la comunidad que generan un sentido de alineación y afiliación a la comunidad de práctica.

Un conteo aproximado de las veces que intervienen los estudiantes en los fragmentos escogidos para ilustrar los análisis y una mirada a la caracterización de las intervenciones como relevantes, genuinas, autónomas, afiliadas, originales o alineadas nos muestra un panorama representativo de algunos roles individuales asumidos por los estudiantes a lo largo del curso.

Juan, Ignacio, Melisa y Germán intervienen más de treinta veces, lo que se constituye en un indicador del liderazgo que asumen en las conversaciones instruccionales y las discusiones matemáticas que se llevan a cabo . Juan, Germán e Ignacio se destacan desde un principio por participar constantemente, aunque cada uno lo hace de manera diferente. Juan se involucra más rápidamente que los demás en las formas de actuar y hablar que la profesora quiere incentivar, por lo que logra intervenciones relevantes, fundamentadas y genuinas y alcanza más pronto una participación plena en algunas acciones de la actividad demostrativa. Germán tiene por costumbre pensar en voz alta, por lo que interviene mucho pero no siempre de manera relevante. Gracias al hábito de verbalizar sus ideas para organizarlas, tenemos registros de un importante compromiso del estudiante en las prácticas del grupo y una evolución desde una participación periférica legítima hasta una evolución plena en varias de las acciones. Ignacio interviene frecuentemente, desde el principio del curso, explicitando su compromiso con el estilo de clase propuesto por la profesora. Sin embargo, sus intervenciones tienen más la intención de apoyar o secundar las ideas expuestas por algún compañero que proponer ideas originales. La trayectoria de Melisa es un tanto diferente pues ella va ganando confianza para intervenir en las discusiones poco a poco. Al principio interviene tímidamente, generalmente por sugerencia de la profesora y con cierta reticencia. A medida que va comprendiendo que puede participar con ideas no totalmente elaboradas, y que la intención es dar sugerencias para ser discutidas, y no dar soluciones perfectas, va aumentando la frecuencia de sus intervenciones hasta ocupar un lugar protagónico en la comunidad de práctica.

Daniel, María, Nancy, Darío, Leopoldo y William intervienen entre 20 y 30 veces en los fragmentos con los que ilustramos los análisis; esto es reflejo de una alta participación en la clase, aunque diferenciada. El estilo de participación de Darío, Nancy y Daniel es muy parecido al de Juan, con ideas relevantes, fundamentadas y creativas; sus compañeros los reconocen como personas que aportan ideas acertadas, la profesora se apoya en ellos para desentrañar algunos asuntos y ellos asumen, sobre todo hacia el final del curso, algunas responsabilidades de expertos actuando como pares de la profesora. A lo largo del curso, Leopoldo participa apoyado en su compañero Darío (quien generalmente toma la vocería de la pareja); sin embargo, gracias a su actitud reflexiva asume un importante compromiso con la empresa y la negociación de significados haciendo preguntas e intervenciones claves. María es una estudiante que supera el promedio de edad en el grupo y, aunque no se destaca por proponer ideas relevantes, juega un papel importante por su sentido de afiliación a la comunidad al asumir el control de las normas establecidas, estar atenta a su cumplimiento y llevar un registro juicioso de los enunciados institucionalizados. Adicionalmente, contribuye a la cohesión de la comunidad liderando reuniones extra-clase para resolver tareas en conjunto. Por su parte William es un miembro que se queda en la periferia de la comunidad. La frecuencia alta de sus intervenciones se debe, principalmente, a que con ellas ilustramos lo que denominamos participación periférica legítima en donde los estudiantes actúan guiados estrechamente por la profesora.

Ana, Orlando, Julián, Efraín y Jaime participan entre 10 y 20 veces en los fragmentos usados para ilustrar los análisis. Ana tiene una participación importante al comienzo del curso, con ideas relevantes aunque no suficientemente fundamentadas. Desafortunadamente, por problemas personales, comienza a faltar a las clases desde la mitad del semestre; seguramente de haber podido asistir permanentemente hubiera logrado una trayectoria incluyente de participación y no lo contrario, hecho que pone en evidencia la influencia de factores externos en el buen funcionamiento de una comunidad. Orlando y Efraín participan de manera espontánea a lo largo del semestre y en ciertas acciones logran una participación legítima con aportes centrales para el desarrollo de las tareas, aunque no muy frecuentes; particularmente no logran un buen desempeño en la construcción de pasos de las demostraciones. Julián y Jaime son estudiantes extremadamente tímidos que participan muy poco al comienzo. Después de la mitad del semestre, especialmente Julián, van avanzando hacia una participación legítima en la comunidad con mayor confianza para presentar sugerencias aun siendo conscientes de no tener resueltos los asuntos planteados.

Henry, Luz, Marina, Aníbal e Iván participan entre cuatro y nueve veces en los fragmentos escogidos para ilustrar el análisis. Henry, con un estilo de participación parecido al de Germán, pero menos frecuente, suele pensar en voz alta y aporta ideas que se constituyen en fuente de discusión. Logra una trayectoria incluyente hacia una participación legítima, aunque no plena, pues tiene algunas dificultades de expresión oral que entorpecen la comprensión de aquello que dice. Aníbal es un participante legítimo de la comunidad pero poco dado a expresar verbalmente sus ideas en público, aunque sus compañeros recurren a él frecuentemente en busca de aclaraciones. Luz y Marina participan públicamente casi siempre a solicitud de la profesora. Asumen con compromiso las responsabilidades de participantes novatas, pero no avanzan hacia una participación legítima.

Gonzalo y Antonio no intervienen en ninguno de los fragmentos escogidos. La participación de ellos dos es diferente. Al revisar las transcripciones de todas las clases, apreciamos que Antonio interviene en algunas pocas oportunidades por solicitud de la profesora, pero con interés y mostrando alineación por la empresa. En cambio Gonzalo no se involucra en las tareas ni muestra interés en llevarlas a cabo. Las pocas veces que interviene fue por solicitud de la profesora y a regañadientes. Termina abandonando el curso hacia la mitad del mismo.

Esta breve descripción nos muestra la constitución de identidades de participación en una comunidad de práctica de clase. Más que ver la díada profesor-estudiantes presentamos a un grupo de personas que interactúan desde posiciones personales y se comprometen diferenciadamente en la empresa que desarrolla la comunidad.

8.4.3. LA AUTONOMÍA Y EL PAPEL DEL EXPERTO

La revisión de los fragmentos escogidos para el análisis de las finalidades de participación en el capítulo seis y la visualización de los diagramas con los que ilustramos la evolución de la participación de los estudiantes en el capítulo siete nos conducen a afirmar que la profesora tiene un papel central en prácticamente todas las intervenciones comunicativas en clase. La frecuencia de diagramas de flechas como el 8.1 en comparación con diagramas como el 8.2 es significativamente mayor. Esto podría llevar a pensar que el experimento de enseñanza fracasó en términos de un traspaso de la responsabilidad de la tarea, de la profesora a los estudiantes. Nosotros consideramos que esto no es así y por eso dedicamos unas líneas a discutir cómo vemos la posibilidad de la autonomía de los estudiantes en una comunidad de práctica de clase.

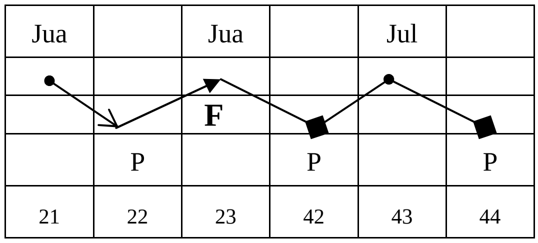


Diagrama 8.1: Ejemplo de participación central de la profesora

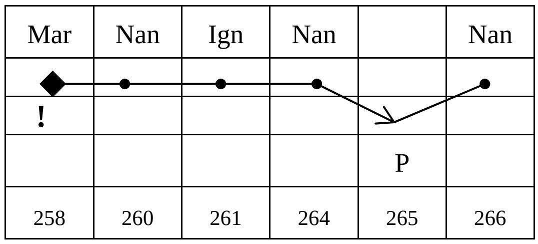


Diagrama 8.2: Ejemplo de intervenciones sin participación central de la profesora

Ingenuamente, podría pensarse que la autonomía de los estudiantes significa que ellos son los principales, o quizás los únicos, responsables de planear e implementar su propia trayectoria de aprendizaje -independientemente de la gestión de un experto- y que tienen libertad para decidir cuándo y dónde pueden encontrar nuevo conocimiento. Si se piensa en el aprendizaje como adquisición de conocimiento, eventualmente se podría pensar que éste es un proceso individual y que cada uno decide cómo acceder a él. Sin embargo, desde la teoría de la práctica social (Wenger, 1998) la posibilidad de participar en actividades reguladas por patrones históricamente establecidos muestra que las relaciones sociales son fundamentales en dicho proceso. Especialmente, para aprehender y llegar a manejar formas sociales de actuar y hablar de un dominio tan especializado como el de la demostración matemática es innegable la necesidad de una interacción permanente entre el novato y el experto y el interés o deseo del primero de seguir los pasos del segundo. Este es el sentido de ser de una comunidad de práctica.

Por lo anterior, la autonomía no puede entenderse como asumir el aprendizaje por cuenta propia sino como la posibilidad de decidir qué posición ocupar en la comunidad para interactuar de diversas maneras y dar sentido a formas de actuar y hablar acerca de los asuntos de la comunidad que inicialmente pueden ser ajenas, pero que deciden adoptarse. El reconocimiento de este proceso colectivo de inducción a formas de acción establecidas social y culturalmente conlleva a la aceptación de papeles diferenciados de los participantes en una práctica y a la conciencia de que hay ciertas tareas que siempre están bajo la responsabilidad del experto. En nuestro curso, pese a que la intención de la profesora es delegar poco a poco la responsabilidad de la actividad demostrativa en los estudiantes esto no significa que ella se desaparezca o deje de actuar. Además de ejemplificar para los estudiantes cómo es la práctica que hay que llevar a cabo, es la única con posibilidad de conciliar lenguajes informales o cotidianos con lenguajes especializados, es responsable de la conexión entre el conocimiento instituido en la comunidad y el conocimiento matemático de referencia y es eventualmente el miembro de la comunidad con más derecho a intervenir regulando la práctica. Por eso, la disminución de la frecuencia de sus intervenciones no es signo de mayor autonomía como sí lo es el tipo de intervenciones. En el capítulo 7 damos ejemplos de evolución de la participación hacia autónoma y relevante considerando aspectos como quién toma la iniciativa, quién propone las ideas fundamentales o relevantes, qué tan originales son las ideas de los estudiantes, aunque la profesora prácticamente nunca deja de intervenir.

8.5. ¿SE CONFORMÓ UNA COMUNIDAD DE PRÁCTICA EN EL CURSO DE GEOMETRÍA PLANA?

La estrategia metodológica que adoptamos en nuestro experimento de enseñanza consistió en intentar hacer del curso de geometría plana una comunidad de práctica. Creíamos que por esa vía los estudiantes podrían tener una participación significativa en la construcción de una porción de un sistema axiomático de geometría plana y por esa vía aprenderían a demostrar. Aunque el foco investigativo de nuestro estudio es el aprendizaje de los estudiantes y no el análisis de la conformación de la comunidad, en esta sección queremos hacer una reflexión orientada a evaluar en qué medida se tuvo éxito en la pretensión metodológica. Para dicha evaluación, nos basamos en los indicadores de conformación de una comunidad de práctica sugeridos por Wenger (1998) y en la caracterización que hace Clark (2005) sobre una comunidad de práctica de clase.

8.5.1. UNA COMUNIDAD DE PRÁCTICA EN PROCESO DE REPRODUCCIÓN

A continuación, vamos a referirnos brevemente a cada uno de los aspectos señalados por Wenger (1998) en su inventario de indicadores de conformación de una comunidad de práctica, señalando en cada caso si se evidencian o no en nuestro experimento de enseñanza y de qué forma.

Relaciones mutuas sostenidas: A medida que el semestre académico transcurre se genera un sistema de relaciones mutuas entre la profesora y los estudiantes y entre los estudiantes, que se configura a raíz de las actividades que se proponen, los recursos disponibles y la interacción que promueve la profesora. Podemos afirmar incluso que las relaciones establecidas son armoniosas y no conflictivas ya que el ambiente es de camaradería y colaboración; no hay tensiones mayores entre los estudiantes ni entre la profesora o algunos de ellos.

Formas compartidas de participar en la realización conjunta de actividades: La organización de la clase genera formas compartidas de participar que se van estableciendo como rutinas de trabajo típicas de la clase. Cuando se propone un problema, los estudiantes lo resuelven en parejas; cuando se socializan las conjeturas, la actividad se hace entre todos en conversación instruccional o discusión matemática; cuando se trata de argumentar deductivamente o demostrar, generalmente hay unos momentos de interacción en grupos pequeños conformados por la cercanía de los puestos de trabajo y luego hay espacios colectivos de socialización. Podemos afirmar que en las clases de geometría plana no hay lugar para el trabajo individual, salvo el que se propone como tareas para realizar extra-clase. Sin embargo, tenemos evidencias de que, de manera espontánea, la mayoría de los estudiantes terminan agrupándose para realizar dichas tareas y estudiar para las evaluaciones individuales.

Flujo de información y de propagación de innovaciones: Podemos asociar este indicador con varias acciones que se llevan a cabo permanentemente en la clase, tales como: (i) cuando una pareja hace una construcción interesante en Cabri, se favorece la socialización de la misma y la comparación con el trabajo hecho por otros; (ii) prácticamente todas las conjeturas sugeridas por las parejas se socializan y evalúan; (iii) se favorece la comunicación de ideas aunque éstas no estén en total desarrollo para que orienten el trabajo que otros están haciendo; (iv) se impulsa la comunicación de caminos fallidos para cumplir una tarea para analizar entre todos por qué no son los apropiados; (v) se propicia la comparación de diferentes maneras de hacer una demostración.

Ausencia de preámbulos introductorios: Pasadas unas cuantas clases, las actividades que generalmente se llevan a cabo se vuelven una rutina para los estudiantes, quienes llegan a clase y rápidamente se organizan de acuerdo al trabajo que está pendiente, sin mayores indicaciones por parte de la profesora. Esta ausencia de preámbulos se favorece porque muchas tareas tardan más de una clase y los estudiantes saben que hay que terminar el proceso que lleva desde la resolución de un problema hasta la demostración de algunas de las conjeturas que surgen. De esta manera, como lo señala Wenger (1998) muchas de las conversaciones y las acciones resultan ser una prolongación de un proceso continuo.

Rápido establecimiento de problemas a discutir: A medida que las normas de la clase se van estableciendo, los estudiantes comienzan a evidenciar problemas en las actuaciones o en las intervenciones de sus compañeros relacionadas con el cumplimiento de los acuerdos establecidos para las construcciones, para la formulación de conjeturas, para la argumentación o para hacer las demostraciones. Al evidenciar estos problemas, no siempre esperan a que la profesora los haga evidentes sino que algunos los ponen de presente y se suscitan discusiones al respecto.

Identificación de quien es miembro de la comunidad y quien no: Por ser una comunidad institucionalizada, la membresía a ella se da automáticamente y no hay duda frente a quien es miembro o no de la comunidad. Incluso Antonio y Gonzalo que participan muy poco en las conversaciones y discusiones son considerados por los demás como miembros de la comunidad.

Conocimiento de lo que saben los demás y en qué pueden contribuir con la empresa: Como lo señalamos en la sección de 8.4.2, los estudiantes asumen roles que los hacen ser reconocidos por sus compañeros como expertos en ciertas tareas de la comunidad; profesora y estudiantes se dirigen a ellos cuando se trata de resolver algún problema relacionado con aquello en lo que se considera que son expertos. No es necesario que todos puedan evaluar las acciones o la conducta de los demás. Pero en cuento menos sea así, más dudoso será que exista una empresa sólida, que los una, y que hayan dedicado algún esfuerzo a negociar lo que están intentado lograr.

Identidades definidas mutuamente: En relación con el indicador previo, en el grupo se definen identidades de participación diferenciadas en la medida en que no todos actúan o intervienen de la misma forma ni para lo mismo. Una de las características distintivas de una comunidad de práctica es la división de labores entre los participantes hecho que asegura el acceso de los novatos a la práctica y le da legitimidad a aquello que realizan. Los estudiantes exhiben intereses diferenciados, hacen diferentes contribuciones a la actividad y sostienen diferentes puntos de vista. Según Lave y Wenger (1991), en algunas comunidades esta división se realiza de forma natural, cercana a formas de relación cotidiana mientras que en otras, sobre todo cuando se trata de un oficio especializado, a veces media una relación contractual. Pero en cualquiera de los dos casos, es la posibilidad de participación periférica legítima de los novatos lo que favorece su aprendizaje.

La capacidad de analizar la adecuación entre acciones y productos: En la clase de geometría plana este indicador puede relacionarse con la capacidad del grupo de controlar si el sistema axiomático que están construyendo es cercano o no al sistema axiomático de referencia y si cumple con algunas especificidades como la consistencia o se evitan razonamientos circulares. Esta capacidad está bajo la responsabilidad de la profesora pues los estudiantes no tienen elementos para ejercer tal control, salvo en situaciones menores como cuando alguno pregunta si tal o cual definición ya se incorporó al sistema o si se incluyó tal propiedades en algún enunciado porque se quiere usar; o cuando algún estudiante rechaza alguna conjetura porque hace uso de enunciados no incluidos en el sistema axiomático.

Instrumentos, representaciones y otros artefactos específicos: La actividad demostrativa está mediada por el uso del programa de geometría dinámica, con las restricciones impuestas para su empleo, y por el papel que se les da a las figuras geométricas en el curso. El empleo de estas herramientas de representación contribuye a establecer el nexo entre las prácticas que se llevan a clase en la comunidad y el conocimiento cultural de referencia.

Historias compartidas, bromas internas, sonrisas de complicidad: Como en cualquier clase en donde se favorece la participación de los estudiantes, en el curso hay lugar a situaciones que para los miembros del grupo son divertidas, pero quizás otras personas no lo ven así. Por ejemplo, en una ocasión en la que Antonio, en su lugar de trabajo, realizó una demostración equivocada y la profesora le pidió que la expusiera para que entre todos la analizarán, el estudiante se dirigió al grupo diciendo "voy a convencerlos de algo que no es cierto", frase que causó una carcajada general pues resultaba paradójica de acuerdo al papel de las demostraciones en la clase. Este ejemplo, así como bromas frecuentes entre los compañeros por comentarios fuera de lugar motivados por distracciones, tartamudeo al querer hablar sin haber organizado lo dicho, equivocaciones al nombrar los enunciados, etc. son fuente de bromas en el curso y ayudan a conformar un clima de comunidad.

Jerga y atajos para la comunicación: En el curso de geometría plana se mezclan jergas propias de cualquier clase con otras propias de este grupo, relacionadas con la manera en que se lleva a cabo la actividad demostrativa. Como lo mencionamos en la sección 8.3, algunos términos o expresiones tienen un significado específico en esta clase pero éste no se da de antemano sino que se va negociando poco a poco a medida que se usa. Las formas compartidas de hablar son esenciales porque cumplen funciones específicas: comprometerse, focalizar, llamar la atención, alcanzar coordinación, de un lado; y apoyar formas comunes de memoria, de otro. Los estudiantes aprenden a hablar en el lenguaje geométrico como parte de su participación periférica legítima clave para su aprendizaje.

Estilos propios reconocidos como muestras de afiliación: El uso dado al programa de geometría dinámica, el papel dado a las figuras, las formas de argumentar, la forma en que se escriben las demostraciones y demás prácticas asociadas a la actividad demostrativa se llevan a cabo con un estilo propio que determina un modo de afiliación a la comunidad.

Discurso compartido que refleja una perspectiva sobre el mundo: En nuestro caso, decimos que los estudiantes desarrollan una perspectiva propia sobre la demostración determinada por su participación en la actividad demostrativa que se lleva a cabo. También creemos que desarrollan una perspectiva sobre ser estudiantes en un curso universitario y de cómo pueden participar en las actividades que se les propone. Y eventualmente creemos que desarrollan una idea de cómo gestionar ambientes de aprendizaje sobre la demostración en su vida profesional futura.

De acuerdo a los indicadores señalados por Wenger (1998), en nuestro curso de geometría plana se conformó una comunidad de práctica. Sin embargo hay un elemento que no se señala en la lista que, desde nuestro punto de vista, limita la caracterización y nos hace pensar en matizar el término refiriéndonos a 'comunidad de práctica de clase' Clark (2005): en una comunidad de práctica no hay una enseñanza específica observable pues el fenómeno principal es el aprendizaje. Es la participación en una práctica la que establece una especie de "currículo potencial" que determina la trayectoria de participación de los novatos a medida que ellos desarrollan una visión de aquello de lo que se trata la empresa que se lleva a cabo en la comunidad. No existe un conjunto de prácticas predeterminadas sino un conjunto de oportunidades y recursos que favorecen comprometerse, no totalmente preestablecidos e incluso en ocasiones improvisados. A medida que sucede la práctica, las oportunidades de aprender se van configurando.

Definitivamente este no es el caso del curso de geometría plana en donde hay una planeación previa delimitada por los condicionantes institucionales, hay unas metas de enseñanza, hay esfuerzos de enseñanza específicos -como es el caso de las conversaciones instruccionales-; y, aunque se da espacio a la realización de actividades no planeadas de antemano, ocasionalmente se interrumpen ciertos procesos para agilizar el trabajo y la profesora substituye la acción con explicaciones sobre lo que podría pasar, cambiando la experiencia misma de participación, por un discurso acerca de la misma. En ese sentido, se percibe en algunas interacciones un tipo de discurso didáctico pregunta-respuesta-evaluación usual en la enseñanza que no es propio de una comunidad de práctica.

Lo anterior nos lleva a distinguir, como lo propone Wenger (1998) entre una comunidad de práctica como tal y una comunidad de práctica en proceso de reproducción, que es quizás la situación específica que se da en las instituciones educativas. Aunque encontramos a un grupo de estudiantes comprometidos por un semestre académico en el aprendizaje de la demostración en geometría no podemos decir que ellos estén reproduciendo una comunidad de matemáticos demostrando. Más bien, están reproduciendo el proceso de conformación de adultos escolarizados que potencialmente podrán hacer parte de la comunidad de matemáticos. Hay varias diferencias en las formas como ellos participan y dan significado a la actividad y las formas como los matemáticos lo harían aunque por esa vía los estudiantes se comienzan a relacionar con dicha práctica. En particular, como lo señala Ben-Zvi y Sfard (2007) hay acuerdos tácitos de aprendizaje-enseñanza relacionados con: (i) el consentimiento de los estudiantes para seguir las formas discursivas y de actuación de la profesora porque reconocen en ella a la persona que establece el modelo estándar a reproducir, (ii) los papeles diferenciados que responsabilizan a la profesora del cambio en las formas de actuar y hablar de los estudiantes y a ellos de la voluntad de cambiar y (iii) la aceptación de que, por lo menos inicialmente, las formas de actuar y hablar son vistas por los estudiantes como algo extraño que tiene que ser practicado sólo porque es un discurso que otros usan y aprecian. Para hacer de estas formas de actuar y hablar algo personal los estudiantes tienen que explorar activamente las razones de la profesora para involucrarse en este discurso. Según Ben-Zvi y Sfard (2007) este proceso de imitación concienzuda parece ser lo más natural, de hecho, la única manera imaginable para entrar en nuevos discursos.

En síntesis, no afirmamos categóricamente que en el curso de geometría plana se conformó una comunidad de práctica tal y como la concibe Wenger (1998) aunque podamos encontrar evidencias de los indicadores por él señalados. Mejor decimos que se conformó una comunidad de práctica de clase. En la siguiente sección sustentaremos por qué lo afirmamos.

8.5.2. UNA COMUNIDAD DE PRÁCTICA DE CLASE

En el capítulo dos, cuando sintetizamos la revisión de la literatura, expusimos las razones que Boaler (2000) y Boylan (2005) aducen para afirmar que las clases de matemáticas, en general, no pueden considerarse como comunidades de práctica. Según estos investigadores, la mayoría se centran aún en la memorización y reproducción de conocimientos a través de acciones individuales; incluso cuando se hacen esfuerzos por llevar a cabo clases indagativas no se aprecia una delegación de las prácticas matemáticas y sociales en los estudiantes. Nosotros creemos que el experimento de enseñanza fue exitoso en términos de lograr que profesora y estudiantes compartieran prácticas matemáticas y sociales importantes -pues no esperábamos una delegación completa-. Esto permitió a los estudiantes vivir experiencias de participación y materialización significativas para el aprendizaje de la demostración. Por otro lado, a diferencia de las clases observadas por Boylan (2005) podemos afirmar que:

- No hay momentos de exposición de información descontextualizada por parte de la profesora y son mínimos aquellos momentos en que interrumpe una actividad y la reemplaza por una explicación.
- La participación de los estudiantes no es ni coercitiva ni marginal. Aunque en un comienzo pide a algunos estudiantes intervenir, poco a poco el grupo en general interviene de manera espontánea y comprometida con la empresa conjunta.
- Se lleva a cabo una permanente negociación de significados sobre la actividad demostrativa.
- Se evidencia un compromiso real de la mayoría de los estudiantes, más que cierta tolerancia o indiferencia con la práctica. Este compromiso llega hasta tal grado que aunque el semestre académico se cancela dos semanas antes de su finalización oficial, la mayoría de los estudiantes continua asistiendo de manera voluntaria e interesada a las sesiones de clase programadas de manera extraoficial por la profesora, para poder terminar la discusión sobre las conjeturas relacionadas con cuadriláteros.
- Se propicia la participación periférica legítima de los estudiantes y algunos avanzan hacia una participación legítima y plena. Es decir, no hay

trayectorias limitadas de participación que no dan acceso a los novatos a la práctica de la comunidad. Por el contrario, se generan identidades de participación.

- Se logra un sano equilibrio entre las actividades planeadas y aquellas que surgen sobre la marcha. Hay la suficiente planeación para que haya una propuesta de organización de referencia pero a su vez hay espacios y libertad para negociar significados.

Concluimos entonces que en nuestro experimento de enseñanza logramos la conformación de una comunidad de práctica de clase modificando el formato tradicional de las clases universitarias. En lugar de un profesor que sobresale y un grupo plano de estudiantes que se supone aprenden lo mismo y al mismo tiempo, mostramos un grupo que se compromete con una empresa conjunta, en donde hay espacio para el desarrollo de trayectorias individuales y generar identidades de participación, continuidad suficiente para que los participantes desarrollen unas prácticas compartidas y un compromiso a largo plazo con su empresa y con los demás.

8.6. ACERCA DE LA TEORÍA DE LA PRÁCTICA SOCIAL COMO REFERENTE TEÓRICO PARA DAR CUENTA DEL APRENDIZAJE DE LA DEMOSTRACIÓN

La revisión de la literatura resumida en el capítulo dos nos muestra que la teoría sociocultural de Lave y Wenger (1991) y su avance hacia la teoría de la práctica social de Wenger (1998) ha ido cobrando fuerza en el campo de la Educación Matemática. Particularmente la década del 2000-2010 ha sido fructífera en investigaciones que hacen uso de ella. En los estudios sobre formación de profesores, la teoría se ve como un recurso útil para dar cuenta del conocimiento profesional del profesor de matemáticas como social y situado en los contextos de desempeño profesional. En los estudios sobre la educación matemática de niños y jóvenes, la dinámica investigativa está tendiendo a pasar del uso de la teoría como marco interpretativo para analizar fenómenos sociales en las clases de matemáticas hacia la reorganización de las clases y, en algunos casos de la institución escolar, atendiendo a los elementos que Lave y Wenger (1991) y Wenger (1998) describen como centrales en el aprendizaje.

Una característica sobresaliente de las investigaciones consultadas, en donde se usa la teoría de Lave y Wenger (1991), es que hay poca documentación sobre el repertorio de prácticas compartidas que describa cómo es que se lleva a cabo el aprendizaje sobre un contenido matemático específico. Los trabajos reportan aspectos de lo que aprenden los estudiantes o profesores en términos sociales, caracterizando el ambiente de la clase o haciendo mención a la constitución de una empresa común, al desarrollo de un compromiso mutuo o a la constitución de normas que regulan la práctica. Pero pocos se centran en explicar cómo se lleva a cabo el aprendizaje de un tópico específico (Graven y Lerman, 2003) o en documentar exactamente qué es lo que aprenden los estudiantes o en qué actividades específicas, sobre un dominio particular, participan en el curso de su aprendizaje. Desde nuestro punto de vista, hay una carencia de análisis sobre este aspecto que debe ser subsanada por la investigación. Como lo señala Gómez (2007), muy poca investigación examina la interacción específica y las dinámicas particulares en cada contexto. Nosotros esperamos haber hecho un aporte en ese sentido.

En particular sobre el aprendizaje de la demostración, como lo mencionamos en la revisión de la literatura solo hemos encontrado dos investigaciones que hace uso explícito de la teoría de Wenger (1998) en sus análisis (Clark, 2005; Hemmi, 2006) pero en ninguna de ellas se da cuenta de un repertorio de prácticas asociado a la actividad demostrativa propiamente dicha cuando los estudiantes en un curso que se propone como empresa construir colectivamente una porción de un sistema axiomático de geometría euclidiana. Con nuestra investigación esperamos haber hecho un aporte a la evolución en la dinámica investigativa acerca de la enseñanza y el aprendizaje de la demostración bajo la perspectiva de la práctica social (Wenger, 1998), aunque procuramos tener en cuenta las reflexiones hechas por algunos investigadores sobre la dificultad de llevar esta perspectiva al contexto educativo y nos inclinamos a matizar su uso a la manera de Clark (2005), refiriéndonos a la emergencia de una comunidad de práctica de clase.

Consideramos que la perspectiva analítica sugerida por Wenger (1998) informa a la educación iluminando aspectos del proceso de aprendizaje que deben tenerse en cuenta y pueden examinarse. Por ejemplo, lleva a preguntarse por el lugar de la escuela en la sociedad en términos del desarrollo de identidades de expertos, o por la relación entre el conocimiento impartido en la escuela y el conocimiento que requiere la comunidad en donde ésta ubicada o incluso por la diferencia entre el mundo de los adultos y el mundo de la escuela. Permite discutir asuntos relacionados con la organización social escolar y abre un contexto para determinar qué aprenden y qué no aprenden los estudiantes. Aunque Lave y Wenger (1991) no construyen su teoría a partir de la exploración de lo que sucede en las aulas educativas, no consideran que su teoría no se pueda poner en funcionamiento en ella o que se haya construido por contraste en lo que sucede allí. La decisión de no centrar la mirada sistemáticamente en la escuela es metodológica: querían avanzar en la conceptualización de participación periférica legítima como una manera fresca de definir el aprendizaje, sin connotaciones sobre la descontextualización del saber que se supone admitida en el ámbito escolar.

8.7. ACERCA DE LOS OBJETIVOS DEL TRABAJO

Con la discusión de los resultados expuesta en este capítulo creemos haber dado elementos para poder afirmar que hemos dado cumplimiento al objetivo general de la investigación pues describimos y analizamos un caso de enseñanza y aprendizaje de la demostración en un curso universitario de geometría plana de un programa de formación de futuros profesores de matemáticas para la educación secundaria, en Bogotá (Colombia), en el que la constitución de una comunidad de práctica se usa como herramienta metodológica para promover el aprendizaje.

Adicionalmente, cada uno de los objetivos específicos se cumplió pues ellos se constituyeron en peldaños para dar cumplimiento al objetivo general. Los capítulos de la memoria son evidencia de que:

- Articulamos la teoría de la práctica social con desarrollos en didáctica de la demostración para dar cuenta del aprendizaje de la demostración de los estudiantes del curso de geometría plana.
- Identificamos las finalidades de participación de los estudiantes en la actividad demostrativa que se lleva a cabo en el curso de geometría plana, como parte del repertorio compartido de prácticas que dan significado a la demostración.
- Caracterizamos la evolución de la participación de los estudiantes en las prácticas que se llevan a cabo en el curso de geometría plana, relacionadas con la actividad demostrativa.
- Evaluamos si en el curso de geometría plana en donde se llevó a cabo la parte experimental de la investigación se vivió un proceso de constitución de una comunidad de práctica o no.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Adler, J. (1998). Lights and limits: recontextualising Lave and Wenger to theorise knowledge of teaching and learning school mathematics. En A. Watson (Ed.), *Situated cognition and the learning of mathematics* (pp. 161 - 177). Oxford: Centre for Mathematics Education Research. University of Oxford. Department of Educational Studies.

Alibert, D., y Thomas, M. (1991). Research on Mathematical proof. En D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 215 - 229). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Almeida, D. (1995). Mathematics undergraduates'perceptions of proof. *Teaching mathematics and its applications, 14(4),* 171 - 177.

Almeida, D. (1996). Justifying and proving in the mathematics classroom. *Philosophy of mathematics education newsletter, 9*, 1- 8.

Almeida, D. (2000). A survey of mathematics undergraduates' interaction with proof: some implications for mathematics education. *International journal of mathematical education in science and technology, 31(6),* 869 - 890.

Almeida, D. (2003). Engendering proof attitudes: can the genesis of mathematical knowledge teach us anything?. *International journal of mathematical education in science and technology, 34(4),* 479 - 488.

Almeida, M. (2000). *Desarrollo profesional docente en geometría: análisis de un proceso de formación a distancia*. Disertación doctoral, Universidad de Barcelona.

Alsina, C. (2001). Why the professor must be a stimulating teacher?: Towards a new paradigm of teaching mathematics at university level. En D. Holton (Ed.), *The teaching and learning of mathematics at university level: An ICMI Study* (pp. 3 - 12). The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Anderson, R. (2007). Being a mathematical learner: four faces of identity. *The mathematics Educator, 17(1),* 7 - 14.

Arsac, G. (2007). Origin of Mathematical Proof. History and Epistemology. En P. Boero (Ed.), *Theorems in school: From history, epistemology and cognition to classroom practice* (pp. 27 - 42). Rotterdam: Sense Pblishers.

Arzarello, F., Micheletti, C., Olivero, F., y Robutti, O. (1998). A model for analysing the transition to formal proofs in geometry. *Proceedings of the 22 PME International Conference 2*, 24 - 31.

Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D., y Robutti, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practises in Cabri environments. *ZDM, 34*(3), 66 - 72.

Balacheff, N. (1999). Is argumentation an obstacle? Invitation to a debate... Newsletter on proof, Mai/Juin. http://www.lettredelapreuve.it/

Balacheff, N. (2004). The researcher epistemology: a deadlock for educational research on proof. *CNRS, autumn* (109).

Battista, M.T., y Clements, D.H. (1995). Geometry and Proof. *The Mathematics Teacher, 88*(1), 48 - 54.

Bell, A.W. (1976). A Study of pupil's proof - explanation in mathematical situation. *Educational Studies in Mathematics, 7*(1), 23 - 40.

Ben-Zvi, D. y Sfard, A. (2007). Ariadna's Thread, Daedalus' Wings, and the Learner's Autonomy. *Education and Didactics*, 1(3), 123 – 141.

Blanton, M.L., y Stylianou, D.A. (2002). Exploring sociocultural aspects of undergraduate students' transition to mathematical proof. *Proceedings of the 24 Annual Meeting for the Nort American Chapter of the PME International Conference, 4*, 1673 – 1680.

Blanton, M.L., y Stylianou, D.A. (2003). The nature of scaffolding in undergraduate students' transition to mathematical proof. *Proceedings of the 27th PME International Conference, 2*, 113 – 120.

Blumenthal, L.M. (1965). *Geometría axiomática*. Madrid: Aguilar, S.A.

Boaler, J. (1999). Participation, knowledge and beliefs: a community perspective on mathematics learning. *Educational Studies in Mathematics, 40*, 259 - 181.

Boaler, J. (2000). Mathematics from another world: traditional communities and the alienation of learners. *Journal of Mathematical Behaviour, 18(4),* 379 - 397.

Boero, P., Garuti, R., Lemut, E., y Mariotti, A. (1996a). Challenging the traditional school approach to the theorems: a hypothesis about the cognitive unity of theorems. *Proceedings of the 20th PME International Conference, 2*, 113 - 120.

Boero, P., Garuti, y Mariotti, A. (1996b). Some dynamic mental processes undelying producing and proving conjectures. *Proceedings of the 20th PME International Conference, 2*, 121 - 128.

Boero, P., Garuti, y Lemut, E. (1999). About the generation of condicionality of statements and its links with proving. *Proceedings of the 23th PME International Conference, 2*, 137 - 144.

Boero, P., Douek, N., y Ferreri, P. (2002). Developing mastery of natural language: approach to theoretical aspects of mathematics. En L. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 241 - 268). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Borba, M., Zullato, R. (2006). Different media, different types of collective work in online continuing teacher education: Would you pass the pen, please? *Proceedings of the 30th PME International Conference, 2,* 201 - 208.

Boylan, M. (2005). *School classrooms: communities of practice or ecologies of practice?*
http:// org.man.ac.uk/projects/include/experiment/mark_boylan.pdf-.

Boylan, M. (2007). Teacher questioning in communities of political practice. *Philosophy of Mathematics Education, 20(june),* 1 - 9.

Bruner, J. (1984). *Acción, Pensamiento y lenguaje*. Madrid: Alianza Psicología.

Calvo C. (2001). *Un estudio sobre el papel de las definiciones y las demostraciones en cursos preuniversitarios de Cálculo Diferencial e Integral.* Disertación doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona.

Camargo, L. (2007). *Bases para la constitución de una comunidad de práctica encaminada a la tarea de demostrar. Experiencia en un curso de formación de profesores de matemáticas en Bogotá, Colombia.* Trabajo de investigación para optar al título del DEA. Universidad de Valencia.

Camargo, L., Perry, P., Samper, S., Molina, O., y Echeverry, A. (2007). Geometría y lineamientos curriculares: una experiencia en la formación inicial de profesores. *Memorias del 9º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa.* Difusión digital.

Cerully, M., y Mariotti, A. (2003). Building theories: working in a microworld and writing the matemática notebook. *Proceedings of the 27th PME International Conference, 2,* 181 – 187.

Chang, C.K., Chen, G.D., y Li, L.Y. (2008). Constructing a community of practice to improve coursework activity. *Computers & Education, 50,* 235 - 247.

Chazan, D. (1993). High school geometry student's justification for their views of empirical evidence and mathematical proof. *Educational Studies on Mathematics, 24,* 359 - 387.

Clark, P. (2005). *The emergence of a classroom community of practice in a mathematical structures course.* Doctoral Dissertation. Department of Philosophy, Arizona State University.

Clarke, D. (2003). Practice, role and position: Whole class patterns of participation. *Proceedings of Annual Meeting of the American Educational Research Association,* http:// ifets.ieee.org/periodical/vol_3_2000/e01.pdf

Clements, D.H., y Battista, M.T. (1992). Geometry and spatial reasoning. En D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 420 - 464). N. York, EE.UU: MacMillan.

Cobb, P. (2000). Conducting teaching experiments in collaboration with teachers. En A. Kelly y R. Lesh (Eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. 307 - 326). N Jersey: Lawrence Earlbaum.

Cobb, P., Yackel, E., y Woods, T. (1992). A constructivist alternative to the representational view of mind in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education, 23,* 2 - 33.

Cobb, P., y Bauersfeld, H. (1995). *The emergence of mathematical meaning: interaction in classroom cultures.* Hillsdale, New Yersey, EE.UU: Lawrence Erlbaum.

Cobb, P., y Yackel, E. (1998). A constructivist perspective on the culture of the mathematics classroom. En F. Seeger, J. Voigt y U. Waschescio (Eds.), *The Culture of the mathematics classroom* (pp. 158 - 190). Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Cobb, P., McClain, K., de Silva Lamberg, T., y Dean, C. (2003). Situating teachers' instructional practices in the institutional setting of the school and school district. *Educational Researcher, 32 (6),* 13-24.

Cobo, P; Fortuny, J. (2007). AgentGeom*:* un sistema tutorial para el desarrollo de competencias argumentativas de los alumnos a través de la resolución de problemas. *Matematicalia, 3(3), junio*.

de Villiers, M. (1986). *The role of axiomatization in mathematics and mathematics teaching*. http://mzone.mweb.co.za/residents/profmd/axiom.pdf.

de Villiers, M. (1993). El papel y la función de la demostración en matemáticas. *Epsilon* (26), 15 - 29.

de Villiers, M. (2004). Using dynamic geometry to expand mathematics teacher' understanding of proof. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 35*(5), 703 - 724.

Douek, N. (1999). Some remarks about argumentation and mathematical proof and their educational implications. *Proceedings of CERME I International Conference, Group 1, 1,* 125 - 139.

Douek, N. (2007). Some remarks about argumentation and proof. En P. Boero (Ed.), *Theorems in school. From history, epistemology and cognition to classroom practice* (pp. 249 - 264). Rotterdam: Sense Publishers.

Douek, N. (2009). Approaching proof in school: from guided conjecturing and proving to a story of proof construction. *Proceedings of ICMI Study 19 International Conference, 1,* 142 - 147.

Douek, N., y Pichat, M. (2003). From oral to written text in grade I and the long term approach to mathematical argumentation *Proceedings of CERME III International Conference, Group 4,* 1 - 10.

Dreyfus, T. (1999). Why Johnny can't prove. *Educational Studies in Mathematics, 38,* 85 - 109.

Duval, R. (1991). Structure du raisonnement deductif et apprentissage de la demonstration. *Educational Studies in Mathematics, 22*, 233 - 261.

Duval, R. (1999). *Argumentar, demostrar, explicar: ¿continuidad o ruptura cognitiva?* México, D.F: Grupo Editorial Iberiamérica.

Duval, R. (2007). Cognitive functioning and the understanding of mathematical processes of proof. En P. Boero (Ed.), *Theorems in school. From history, epistemology and cognition to classroom practice* (pp. 137 - 162). Rotterdam: Sense Publishers.

Fernández, E. (2008). Rethinking success and failure in mathematics learning: the rol of participation. *Proceedings of the Fifth International Mathematics Education al Society Conference,* 1 - 11.

Fishback, W.T. (1962). *Projective and Euclidian geometry*. New York: John Willey & Sons, Inc.

Fishbein, E., y Kedem, I. (1982). Proof and certitude in the development of mathematical thinking. *6th PME International Conference*, 128 - 131.

Forman, E.A. (1996). Learning mathematics as participation in classroom practice: implications of sociocultural theory for educational reform. En L, Steffe; P, Nesher; P, Coob; G, Goldin; B, Greer (Eds.), *Theories of Mathematical Learning* (pp. 115 - 130). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Freudenthal, H. (1971). Geometry between the devil and the deep sea. *Educational Studies in Mathematics, 3,* 413 - 435.

Furinghetti, F., y Paola, D. (2000). Definition as a teaching object: a preliminary study. *Proceedings of the 24th PME International Conference, 2,* 289 - 296.

Furinghetti, F., Olivero, R., y Paola, D. (2001). Students approaching proof through conjectures: a snapshots in the classroom. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 32(3),* 319 - 335.

Furinghetti, F., y Paola, D. (2002). Defining with a dynamic geometry environment: notes from the classroom. *Proceedings of the 26th PME International Conference, 2,* 392 - 399.

Furinghetti, F., y Paola, D. (2003). To produce conjectures and to prove them within a dynamic geometry environment: a case study. *Proceedings of the 25th PME International Conference, 2,* 397 - 404.

Furinghetti, F., y Paola, D. (2004). To produce conjectures and to prove them with a dynamic environment: a case study. *Proceedings of the 27th PME International Conference, 2,* 397 - 404.

Galindo, E. (1998). Assessing Justification and Proof in Geometry Classes Taught using Dynamic Software. *Mathematics Teacher, 91,* 76 - 82.

Garuti, R., Boero, P., Lemut, E., y Mariotti, M.A. (1996). Callenging the traditional school approach to theorems: a hypothesis about the cognitive unity of theorems. *Proceedings of the 20th PME International Conference, 2,* 113 - 120.

Garuti, R., Boero, P., y Lemut, E. (1998). Cognitive Unity of Theorems and Difficulties of Proof. *Proceedings of the 22th PME International Conference, 2,* 345 - 352.

Gavilán, J.M., García, M.M., y Llinares, S. (2007). Una perspectiva para el análisis de la práctica del profesor de matemáticas. Implicaciones metodológicas. *Enseñanza de las ciencias, 25(2),* 157 - 170.

Godino, J., y Recio, A. (2001). Significados institucionales de la demostración. Implicaciones para la Educación Matemática. *Enseñanza de las Ciencias, 19*(3), 405 - 414.

Gómez, P. (2007). Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. Disertación doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Goos, M. (2004). Learning mathematics in a Classroom community of inquiry. *Journal for Research in Mathematics Education, 35(4),* 258 - 291.

Goos, M., Galbraith, P., Renshaw, P., y Geiger, V. (2001). Promoting collaborative inquiry in technology enriched mathematical classrooms. *Annual Meeting of the American Educational Research Association*, 2 – 11.

Goos, M., Galbraith, P., Reshaw, P., y Geiger, V. (2003). Perspectives on technology mediated in secondary school mathematics classrooms. *Journal of Mathematical Behavior, 22,* 73 - 89.

Graven, M. (2004). Investigating mathematics teacher learning within an in-service community of practice: the centrality of confidence. *Educational Studies in Mathematics, 57*, 177 - 211.

Graven, M., y Lerman, S. (2003). Wenger, E. (1998). Communities of practice: Learning, meaning and identity. *Journal of Mathematics Teacher Education, 6*, 185 - 194.

Gregg, J. (1995). The tensions and contradictions of the school mathematics tradition. *Journal for Research in Mathematics Education, 26 (5),* 442 - 466.

Groman, M. (1996). Integrating geometer'skechpad into geometry course for secondary education mathematics major. *Proceedings del ASCUE,* North Myrtle Beach, EE.UU, *june*, 9 - 13.

Hadas, N., Hershkowitz, R., y Schwarz, B.B. (2000). The role of contradiction and uncertainty in promoting the need to prove in dynamic geometry environments. *Educational Studies in Mathematics, 44*, 127 - 150.

Hanna, G. (1990). Some pedagogical aspects of proof. *Interchange, 21(1),* 6 - 13.

Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: an overview. *Educational Studies in Mathematics, 44*, 5 - 23.

Hanna, G., y Jahnke, H.N. (1996). Proof and proving. En A.J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, y C. Laborde (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 877 – 908). Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Harel, G. (1998). Two dual assertions: The first on learning and the second on teaching (or vice versa). *The American Mathematical Monthly, 105*, 497 - 507.

Harel, G., y Sowder, L. (1996). Classifying processes of proving. *Proceedings of the 20th PME International Congress, 3*, 59 - 66.

Healy, L., y Hoyles, C. (1998). Student's performance in proving: competence or curriculum? *Proceedings of CERME I International Conference, 1*, 153 - 167.

Healy, L., y Hoyles, C. (2001). Software tools for geometrical problem solving: potentials and pitfalls. *International journal of computer for Mathematical Learning, 6*, 235 - 256.

Hemmi, K. (2006). *Approaching Proof in a Community of Mathematical Practice*. Doctoral Dissertation. Department of Mathematics, Stockholm University.

Herbst, P.G. (2002). Establishing a custom of proving in American school geometry: evolution of the two - column proof in the early twentieth century. *Educational Studies in Mathematics, 49*, 283 - 312.

Hoyles, C. (1997). The curricular shaping of students' approaches. *For the learning of Mathematics, 17*(1), 7 - 16.

Hung, P; Chen, Y; Tseng, K. (2008). The effects of a spatial reasoning scaffold system for the elementary school students. *Proceedings of the 32th PME International Conference, 1*, 274.

Jones, K. (2000). Providing a foundation for deductive reasoning: students' interpretation when using dynamic geometry software and their evolving mathematical explanations. *Educational Studies in Mathematics, 44*, 55 - 85.

Jones, K., Gutiérrez, A., y Mariotti, M.A. (2000). Guest Editorial. *Educational Studies in Mathematics, 44*, 1 - 3.

Krainer, K. (2003). Teams, communities & networks. *Journal of Mathematics Teacher Education, 6,* 93 - 105.

Küchemann, D., y Hoyles, C. (2007). Observations on the development of structural reasoning in a four - phase teaching sequence. *V CERME International Congress*, Thematic Group 4. Disponible próximamente en www.cyprusisland.com/cerme/

Laborde, C. (2000). Dynamic geometry environments as a source of rich learning contexts for the complex activity of proving. *Educational Studies in Mathematics, 44*, 151 - 161.

Laborde, C. (2003). Technology used as a tool for mediating knowledge in the teaching of mathematics: The case of Cabri-geometry. En W.C. Yang, S.C. Chu, T. de Alwis y M.G. Lee (Eds.), *Proceedings of the 8th Asian Technology Conference in Mathematics,1*, 23 – 38. Hsinchu, Taiwan ROC:Chung Hua University.

Lakatos, I. (1976). *Pruebas y refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático*. Madrid: Alianza Universidad.

Lampert, M. (1990). When the problem is not the question and the solution is not the answer: mathematical knowing and teaching. *American Educational Research Journal* 27 (1), 29 - 63.

Lave, J., y Wenger, E. (1991). *Situated learning. Legitimate peripheral participation*. Cambridge: University Press.

Lerman, S. (2001). A review of research perspectives on mathematics teacher education. En F.L. Lin, T. Cooney (Eds.), *Making sense of mathematics teacher education: Past, present and future* (pp. 33-52). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Lerman, S. (2006). Socio-cultural research in PME. En A. Gutiérrez, P. Boero (Eds). *Handbook of Research on the Psichology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (pp. 347-366). Rotterdam/Taipei: Sense Publishers.

Lin, F., Hsieh, F., Hanna, G. y de Villiers, M. (2009). Proof and proving in Mathematics Education. *ICMI Study 19 Conference Proceedings*, *1*,1-7.

Linchevsky, L., Vinner, S., y Karsenty, R. (1996). To be or no to be minimal? Student teachers' views about definitions in geometry. *Proceedings of the 16h PME International Conference, 2*, 49 - 55.

Llinares, S. (2002). Participation and reification in learning to teach: the role of knowledge and beliefs. En G.C. Leder, E. Pehkonen, G. Törner (Eds.), *Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education?,* (Capítulo 12). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Llinares, S., y Krainer, K. (2006). Mathematics (student) teachers and teacher educators as learners. En A. Gutiérrez, P. Boero (Eds). *Handbook of Research on the Psichology of Mathematics Education: Past, Present and Future,* (429 - 459). Rotterdam/Taipei: Sense Publishers.

Lueng, A., y Lopez Real, F. (2002). Theorem justification and acquisition in dynamic geometry: a case of proof by contradiction. *International journal of computer for Mathematical Learning, 7*, 145 - 165.

Mariotti, M.A. (1997). Justifying and proving in geometry: the mediation of a microworld. *Proceedings of the European Conference on Mathematical Education*, 21 - 26.

Mariotti, M.A. (2000). Introduction to proof: the mediation of a dynamic software environment. *Educational Studies in Mathematics, 44*, 25 - 53.

Mariotti, M.A. (2005). *La geometria in classe. Riflessioni sull'insegnamento e apprendimiento della geometría* (primera ed.). Bologna: Pitagora.

Mariotti, M.A. (2006). Proof and proving in Mathematics Education. In A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 173 - 204). Rotterdam: Sense Publishers.

Mariotti, A., Bartolini Bussi, M.G., Boero, P., Ferri, F., y Garuti, R. (1997). Approaching geometry theorems in contexts: from history and epistemology to cognition. *Proceedings of the 21th PME International Conference, 1*, 180 - 195.

Mariotti, A., y Maracci, M. (1999). Conjecturing and proving in problem-solving situationes. *Proceedings of the 23th PME International Conference, 3*, 265 - 272.

Marrades, R., y Gutiérrez, A. (2000). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. *Educational Studies in Mathematics, 44*, 87 - 125.

Martin, T. S., Soucy McCrone, S. M., Wallace, M. L., y Dindyal, J. (2005). The interplay of teacher and student actions in the teaching and learning of geometric proof. *Educational Studies in Mathematics, 60*, 95 - 124.

Mason, J. (2001). Mathematical teaching practices at tertiary level. *Proceedings of the ICMI Study International Conference: The teaching and learning of mathematics at university level, International Conference,* (71 - 86). The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

MEN. (1998). *Lineamientos curriculares para el área matemáticas. Áreas obligatorias y fundamentales*. Colombia: Ministerio de Educación Nacional.

Meserve, B. (1955). *Fundamental concepts of geometry*. Massachusetts: Addison-Wesley.

Moise, E. E., y Downs, f. L. (1986). *Geometría Moderna.* Wilmington, Delaware: Addison – Wesley Iberoamericana.

Moore, R. (1994). Making the transition to formal proof. *Educational Studies in Mathematics, 27,* 249 - 266.

NCTM. (2000). *Principles & Standards for School Mathematics.* Traducción: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales (2003), Sevilla.

Olivero, F., y Robutti, O. (2001). Measures in Cabri as a bridge between perception and theory. *Proceedings of the 25th PME International Conference, 4,* 9 - 16.

Paden, D. (1998). Development of a community of mathematicians in the elementary classroom. *Proceedings of mathematics Education and Society International Conference.*
http://nothingham.ac.uk/csme/meas/papers/paden.html

Pedemonte, B. (2001). Some cognitive aspects of the relatioship between argumentation and proof in mathematics. *Proceedings of the 25th PME International Conference, 4,* 33 - 40.

Pedemonte, B. (2002). *Etude didactique et cognitive des rapports de l'argumentationet de la demonstration en mathématiques.* Thèse de Doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble.

Pedemonte, B. (2005). Vuelques outils pour l' analyse cognitive du rapport entre argumentation et démonstration. *Recherches en didactique des mathematiques, 25(3),* 313 - 348.

Pedemonte, B. (2007). How can the relationship between argumentation and proof be analysed? *Educational Studies in Mathematics*, *66*, 23 - 41.

Perks, P., y Prestage, S. (1985). Why don't they prove? *Mathematics in School*, *24*(3), 43 - 45.

Ponte, J.A., Boavida, A., Graca, M., y Abrantes, P. (1997). *Didáctica da matemática*. Lisboa: Ministerio da Educacao, Departamento de Ensino Secundario. Traducción de Pablo Flores.

Radford, L. (1994). La enseñanza de la demostración: aspectos teóricos y prácticos. *Educación Matemática, 6*(3), 21- 36.

Richards, J. (1996). Negotiating the negotiation of meaning: Comments on Voigt (1992) and Saxe y Bermudez (1992). En Steffe, L., Nesher, P., Cobb, P., Goldin, G., y Greer, B. (Eds.), *Theories of Mathematical Learning* (pp. 69 - 75). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Rogoff, B. (1997). Los tres planos de la actividad sociocultural: apropiación participativa, participación guiada y aprendizaje. En Wertsch, J.V., del Río, P. y Álvarez, A. (Eds), *La mente sociocultural. Aproximaciones teóricas y aplicadas* (pp. 111 – 128). Madrid: Fundación Infancia y Aprendizaje.

Roth, W.M., y Lee, Y.J. (2006). Contradictions in theorizing and implementing communities in education. *Educational Research Review, 1*, 27- 40.

Sackur, C., Drouhard, J. P., y Maurel, M (2000). Experiencing the necessity of a mathematical statement. *Proceedings of the 24th PME International Conference, 4,* 105 - 112.

Sáenz-Ludlow, A. y Athanasopoulou, A. (2008). The GSP, as a technical-symbolic tool, mediating both geometric conceptualizations and communication. En L. Radford, G. Schubring y F. Seeger (Eds.), *Semiotics in mathematics education. Epistemology, history, classroom and culture* (pp. 195-214). The Netherlands: Sense Publishers.

Senk, S. (1985). How well do students write geometry proofs? *Mathematics Teacher, 78*(6), 448 - 456.

Smith, T. (2006). Becoming a teacher of mathematics: Wenger' social theory oflearning perspective. *Proceedings of MERGA International Congress.* www.merga.net.au./documents/symp32006.pdf.

Stylianides, A.J. (2007). Proof and proving in school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 38(3),* 289-321.

Stylianides, G.J., Stylianides, A.J. (2005). Validation of solutions of construction problems in dynamic geometry environments. International journal of computer for Mathematical Learning, 10, 31- 47.

Torregrosa-Gironés, G; Haro, M.J; Penalva, M.C; Llinares, S. (2010). Concepciones del profesor sobre la prueba y software dinámico. Desarrollo en un entorno virtual de aprendizaje. Revista de Educación, 352, 379 - 404.

Toulmin (1958). *The use of arguments.* Cambridge: University Press.

Toulmin, S. (2007). *Los usos de la argumentación.* Ediciones Península, Barcelona.

Voigt, J. (1995). Thematic Patterns of interaction and sociomathematical norms. En Cobb, P. y Bauersfeld, H (1995). *The emergence of mathematical meaning* (163 - 202). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale Publishers.

Vygotsky, L.S. (1978). *Mind in society*. Harvard University Press, Cambridge, M.A.

Wenger, E. (1998). *Comminities of practice. Learning, meaming and identity*. Cambridge, Cambridge University.

Wenger, E. (2001). *Comunidades de práctica. Aprendizaje, significado e identidad*. Barcelona, Paidós. Traducción de Genis Sánchez Barberán.

Winicki-Landman, G. (2001). Research of original geometrical concepts: some episodes from the classroom. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 32*(5), 727 - 744.

Winicky-Landman, G., y Leikin, G. (2000). On equivalent and non-equivalent definitions: Part 1. *For the learning of Mathematics*, *1 (20),* 17 - 21.

Yackel, E. (1995). Children's talk in inquiry mathematics classrooms. En P. Cobb y Bauersfeld, *The emergence of mathematical meaning* (pp. 131 - 162). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale Publishers.

Yackel, E. (2001). Explanation justification and argumentation in mathematics classrooms. *Proceedings of the 25th PME International Conference, 1*, 9 - 24.

Yackel, E. (2002). What we can learn from analyzing the teacher's role in collective argumentation. *Journal of Mathematical Behavior, 21*, 423 - 440.

Yackel, E., y Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(4), 458 - 477.

Yackel, E., Rasmussen, C., y King, K. (2000). Social and sociomathematical norms in a advanced undergraduate mathematics course. *Journal of Mathematical Behaviour, 19*, 275 - 287.

UNIVERSITAT DE VALÈNCIA

Departament de Didàctica de la Matemàtica

Descripción y análisis de un caso de enseñanza y aprendizaje de la demostración en una comunidad de práctica de futuros profesores de matemáticas de educación secundaria

ANEXOS

Tesis para optar al Grado de Doctora en Matemáticas

presentada por

LEONOR CAMARGO URIBE

Dirigida por

Dr. Ángel Gutiérrez Rodríguez

Valencia, junio de 2010

ANEXO 1

PREGUNTAS QUE PERMITIERON CONFIGURAR LA BASE DE DATOS *BASEDATOS2*

Campos relacionados con el conocimiento de la comunidad acerca de la demostración.	¿Qué enunciados del sistema axiomático se estudian, relacionan u organizan? ¿Qué pregunta, situación o problema introduce el tema? ¿Qué actividad experimental hay? ¿Qué actividad argumental hay? ¿Qué acciones se hacen para producir una cadena deductiva? ¿Qué tipo de demostración se hace? ¿Con qué método? ¿Qué claves hay para identificar el grado de formalidad esperado para las demostraciones? ¿Qué regulación o control hay de las cadenas deductivas que se proponen?
Campos relacionados con el apoyo brindado por la profesora.	¿Qué estrategia de gestión de la clase se privilegia? ¿Qué normas sociales o socio-matemáticas se declaran o regulan explícitamente? ¿Qué asuntos afectan la exigencia del cumplimiento de una norma? ¿Qué recomendaciones hace la profesora para enfrentar la tarea de demostrar? ¿Qué estrategias de gestión de la clase pone en juego la profesora? ¿Qué actividades se comparten entre profesora y estudiantes? ¿Qué acciones de la profesora impulsan la discusión? ¿Qué actividades se delegan a los estudiantes? ¿Qué actividades no planeadas se llevan a cabo? ¿Qué acciones de los estudiantes resalta o usa la profesora? ¿Qué estudiantes intervienen? ¿Qué términos, expresiones, enunciados son objeto de negociación? ¿Qué acciones evaluativas se llevan a cabo? ¿Para qué?
Campos relacionados con el papel de la geometría dinámica.	¿Qué uso dan los estudiantes al programa de geometría dinámica Cabri? ¿Qué uso da la profesora al programa de geometría dinámica Cabri?

Preguntas que sirven para conformar los campos de la *BaseDatos2*

ANEXO 2

PREGUNTAS QUE GUIARON EL PRIMER EJERCICIO DE CODIFICACIÓN

<table>
<tr><td rowspan="3">Conocimiento de la comunidad sobre la demostración.</td><td rowspan="2">Participación en la comunidad</td><td>Empresa Conjunta:
¿Cuál es la empresa a la que se dedica la comunidad de práctica?
¿Cómo se organiza el contenido del curso para responder a la empresa?
¿Cómo se regula la introducción de nuevo contenido al sistema axiomático?</td></tr>
<tr><td>Repertorio Compartido:
¿Cuáles son las tareas propias de la comunidad en las que participan los estudiantes y que están asociadas a prácticas experimentales, argumentativas y deductivas?
¿Qué significados son objeto de negociación?</td></tr>
<tr><td>Materialización del producto de la empresa</td><td>¿Qué tipo de demostraciones se hacen en el curso?
¿Cuál es el grado de formalidad esperado?
¿Qué aspectos contempla el conocimiento sobre la demostración?
¿Qué pautas se adquieren para hacer demostraciones?</td></tr>
</table>

Soporte brindado por la profesora.	**Compromiso mutuo:**	*Práctica matemática:* ¿Cómo logra la profesora una participación legítima de los estudiantes en la comunidad? ¿Qué normas sociomatemáticas regulan la práctica matemática en el curso? ¿De qué manera dirige la profesora la comunidad hacia la meta? ¿Cómo concilia la profesora la participación de los estudiantes en las prácticas con el universo teórico de referencia? ¿Qué acciones de los estudiantes son consideradas por la profesora como relevantes y las estimula? *Práctica social:* ¿Mediante qué acciones incentiva la profesora la participación de los estudiantes? ¿Qué normas sociales regulan las prácticas de la comunidad? ¿Cómo se regula el intercambio comunicativo? ¿Mediante que accionas se logra una afiliación de los estudiantes a la comunidad.

ANEXO 3

PRIMER CONJUNTO DE CÓDIGOS

AnalisisEnunciado:	Análisis o interpretación de un postulado, definición, conjetura o teorema, en el que participan los estudiantes y la profesora, que pueden llevar a su reformulación.
ArgumentoDeduc:	Discurso razonado, elaborado por los estudiantes y la profesora, que usa argumentos deductivos o de plausibilidad tendiente a proporcionar las afirmaciones y justificaciones para una posterior producción de una demostración.
ArrastreCabri:	Alusiones al uso del arrastre hechas por la profesora o los estudiantes y que permiten identificar para qué la usan los estudiantes en el curso.
AsignaResponsabil:	Asignación que hace la profesora, de una responsabilidad explícita para ser realizada por los estudiantes, generalmente fuera de clase y que es relevante para el buen funcionamiento de la práctica de la comunidad.
AsumeResponsabil:	Auto-asignación de una responsabilidad explícita para ser realizada en forma voluntaria, por algún estudiante, generalmente fuera de clase y que es relevante para el buen funcionamiento de la práctica de la comunidad.
AutoriaAfirmacion:	La profesora o los estudiantes reconocen la autoría a quienes sugieren un enunciado, una propuesta de demostración o un procedimiento.
CentraAtencion:	Preguntas o requerimientos de la profesora para centrar la actividad en un aspecto específico de la actividad matemática.
ComparanConjeturas:	Intervenciones de la profesora o los estudiantes en donde se comparan conjeturas formuladas por los estudiantes bien sea por su similitud, pertinencia o utilidad.
ComparaViaDemost:	Intervenciones de la profesora en donde ella compara vías para hacer una demostración, propuestas por los estudiantes, estableciendo diferencias o similitudes.
CompletaDemost:	Intervenciones en donde algún estudiante completa espontáneamente la demostración que está desarrollando un compañero.
ConjCons:	Intervenciones en donde puede inferirse que los estudiantes o la profesora establecen relaciones entre la construcción hecha y la conjetura formulada.
ConQueCuen:	Intervenciones de los estudiantes o la profesora en donde ellos resumen la información disponible en la comunidad, que puede usarse en una demostración.
ConstrucExp:	Intervenciones de los estudiantes en donde se aprecia el establecimiento espontáneo de una relación entre la construcción hecha y una explicación del por qué de una propiedad geométrica puesta en juego o descubierta.
ContribuciónImport:	Aporte de un estudiante que juega un papel importante en el desarrollo del

	curso y que ni la profesora ni otros compañeros ha considerado.
ConstrAuxi:	Intervenciones en donde se aprecian las propuestas de construcción auxiliar por parte de los estudiantes y la profesora.
ControvierteArgumen:	Manifestaciones de desacuerdo con un argumento o una afirmación de un compañero o de la profesora.
DefiendeIdea:	Intervenciones de los estudiantes para defender una idea ante una objeción, crítica o mala interpretación hecha por algún otro miembro.
DefineEmpresa:	Declaración de la profesora o de los estudiantes sobre cuál es el oficio de la comunidad: principales acciones que se van a emprender, estilo con el que van a trabajar, roles de profesora y estudiantes.
DefineIdentidad:	Intervenciones de los estudiantes que permiten apreciar una prefiguración de una identidad en la comunidad por los roles específicos que asumen.
DesbloqueaDemost:	Intervenciones de la profesora, para desatascar un proceso demostrativo que se lleva en curso y los estudiantes ya no saben cómo proceder.
EntornoDesfavora:	Alusiones de la profesora o los estudiantes a situaciones del entorno que no favorecen la práctica del oficio de la comunidad.
EntornoFavorable:	Alusiones de la profesora o los estudiantes a situaciones del entorno que favorecen la práctica del oficio de la comunidad.
EstrategiaConstruc:	Intervenciones de los estudiantes que permiten identificar la estrategia seguida por un grupo para realizar un proceso de construcción en Cabri.
EvaluaConjetura:	Intervenciones en donde los estudiantes o la profesora evalúan conjeturas formuladas por otros compañeros o por ellos mismos.
EvalViaDemost:	Intervenciones de los estudiantes o de la profesora en donde evalúan una propuesta de un compañero o de ellos mismos para hacer una demostración.
ExplorCabri:	Exploraciones espontáneas en Cabri, hechas por los estudiantes, que son objeto de socialización pública.
FormuConjetu:	Formulación de conjeturas, por parte de los estudiantes, para evaluarlas o adecuarlas a un enunciado completo y comprensible.
FormuTarea:	Intervenciones de la profesora, que dan comienzo a la actividad matemática en el episodio.
GeneralEnun:	Elaboración de una expresión, por parte de la profesora o los estudiantes, que sintetiza un enunciado en forma general para expresarlo como suele decirse en geometría.
GradoFormalidad:	Intervenciones de la profesora o de los estudiantes que muestran evidencias del grado de formalismo que se demanda al escribir las demostraciones.
HaceOperatEnunci:	Adopción, por parte de la profesora, de herramientas de Cabri para hacer operativo un enunciado del sistema.
IdentifNecesidTeo:	Alusiones de los estudiantes o la profesora a la necesidad de incluir un nuevo enunciado al sistema con el cual podría resolverse algún problema relacionado con la aceptación de una conjetura o su demostración.

Institucionaliza:	Intervenciones, de la profesora, en donde ella pone en correspondencia la producción de la comunidad, con práctica cultural de referencia.
InventanNombres:	Intervenciones en donde la comunidad decide qué nombre ponerle a un enunciado con el cual el grupo puede reconocer de qué están hablando.
NormaDeclara:	Declaración explícita, por parte de la profesora, de normas sociales o sociomatemáticas.
OrganizaAportes:	Organización de propuestas de los estudiantes, por parte de la profesora, para lograr un desarrollo de la actividad matemática con proyección hacia la meta.
PapelCabri:	Alusiones hechas por la profesora o los estudiantes sobre el papel que juega Cabri en el curso.
Parafrasea:	Intervenciones, hechas por la profesora, en donde se aprecia el parafraseo con el objeto de favorecer la comunicación.
ParticulariEnunci:	Expresión, formulada por la profesora o los estudiantes, de un enunciado general usando nombres de objetos representativos del conjunto del cual se emite la afirmación.
PreguntaGenuina:	Pregunta de los estudiantes que expresan un interés genuino por comprender una idea o aclarar algo.
ProcedimientoTeoria:	Intervenciones de los estudiantes o de la profesora en donde justifican los pasos de un procedimiento de construcción con enunciados del sistema axiomático.
ProcesoCabri:	Descripción pública de los estudiantes sobre cómo hicieron una construcción en Cabri.
ProducDemostrac:	Intervenciones que muestran la participación de los estudiantes y la profesora en la producción escrita u oral de una demostración.
PropoContraej:	Intervenciones de los estudiantes o de la profesora en las que proponen un no ejemplo o un contraejemplo con el objeto de rechazar una afirmación.
ProponeViaDemost:	Sugerencias de los estudiantes o la profesora sobre caminos para hacer la demostración, aun cuando éstos no sean correctos o apropiados.
QueParaComoDemost:	Alusiones de la profesora o de los estudiantes que evidencian una negociación, sobre qué es demostrar, cómo se demuestra y para qué se demuestra. (Las intervenciones incluyen términos como convencer, demostrar, certeza, validez).
QuéValora:	Manifestaciones explicitas de la profesora sobre qué acciones de los estudiantes, hechos o situaciones, son valiosos para el buen desarrollo del oficio de la comunidad.
	Alusiones de la profesora o de los estudiantes que evidencian una negociación, sobre qué es demostrar, cómo se demuestra y para qué se demuestra. (Las intervenciones incluyen términos como convencer, demostrar, certeza, validez).
RasgosSistema:	Alusiones que hacen los estudiantes o la profesora a características del sistema axiomático y las razones para incluir un nuevo enunciado en él.

RecapitulaProceso:	Resumen hecho por la profesora relacionado con las acciones llevadas a cabo alrededor de un enunciado geométrico.
RecuerdaNormSMat:	Intervenciones de la profesora recordando una norma sociomatemática de la clase.
RecuerdaNormSocial:	Intervenciones de la profesora recordando una norma social en la clase.
RegulaContenido:	Intervenciones donde la profesora toma decisiones sobre la introducción o no de nuevos enunciados al trabajo que se viene desarrollando o al sistema axiomático.
RelaFigEnunci:	Intervenciones de la profesora o de los estudiantes en donde hacen referencia explícita al uso de las figuras en el curso.
SintetizaDemost:	Resumen que la profesora de una demostración hecha haciendo una síntesis de está a petición de un estudiante o para recopilar un proceso que se ha interrumpido varias veces.
SobreDemost:	Intervenciones de la profesora o de los estudiantes referidas a estrategias, técnicas, aspectos o conocimientos que amplían lo que los estudiantes saben de la demostración, independientemente de los contenidos.

DESCRIPCIÓN DE EPISODIOS

EPISODIO 1: TEOREMA DE LA RECTA

El episodio 1, Teorema de la Recta, tuvo lugar durante la primera y segunda clase del curso de geometría plana (febrero 05 y febrero 06 de 2007)[1]. Dio lugar a la primera interacción que llamamos Ciclo-Cabri a partir de la formulación de un problema, la exploración de éste en Cabri, la formulación de conjeturas y la posterior demostración de una de ellas.

En la primera sesión, previo a los sucesos de este episodio, la profesora pidió a los alumnos, distribuidos en parejas y trabajando por primera vez en Cabri[2], representar un punto. Los guió en la exploración de algunos menús básicos y les indicó cómo poner nombre al punto y arrastrarlo por el plano-Cabri. Después les pidió resolver el siguiente problema:

> Problema: Representar una recta en Cabri y escribir afirmaciones geométricas sobre lo que observan o les evoca la actividad.

Luego de proponer la tarea, los estudiantes comenzaron a trabajar en parejas, mientras la profesora se desplazaba por el salón observando las pantallas de las calculadoras, para ver cómo habían representado la recta, resolver dudas sobre el uso del programa y decidir cómo organizar la socialización. Después de un tiempo, la profesora solicitó suspender el trabajo y dio comienzo a una conversación general, pidiendo a los estudiantes explicar cómo habían hecho la representación. Se compararon dos formas diferentes de hacerla: a partir de dos puntos, o a partir de un punto y la dirección del trazo[3]. Después, la profesora pidió decir qué afirmaciones geométricas les había sugerido la actividad. A medida que los estudiantes iban dando sus ideas, la profesora las escribía en el tablero anteponiendo el nombre de quién formulaba la idea. En el tablero quedaron las siguientes anotaciones:

> Efraín: en toda recta hay por lo menos dos puntos.

[1] Documentos primarios P2 y P3 del archivo Ciclo-Cabri del programa AtlasTi.

[2] En la primera sesión del episodio los estudiantes trabajaron en el programa Cabri instalado en las calculadoras gráficas.

[3] La profesora quería usar la pantalla de proyección de la calculadora en la pared (*view – screen*), pero en esa clase no se pudo, porque no había luz.

Germán: por un punto pasan infinitas rectas.

María: Por dos puntos pasa una única recta.

Marina: dos puntos determinan una recta.

Juan: en una recta, hay por lo menos un punto.

La profesora retomó la observación formulada por Juan y le pidió explicar el proceso de representación que él había hecho. Juan, con ayuda de Daniel, explicó que al usar la función 'Recta' y oprimir la tecla 'Enter', aparecía un punto y luego había que mover el cursor para escoger la dirección del trazo; al oprimir 'Enter' nuevamente quedaba representada la recta. La profesora dijo que efectivamente así era y declaró la observación de Juan como el primer postulado del sistema, que se admitió como válido por estar en concordancia con el procedimiento de representación en Cabri (y porque, adicionalmente, los estudiantes lo conocían y admitían como postulado geométrico). El postulado se nombró como postulado uno del sistema axiomático que iban a construir a lo largo del curso: *P1: las rectas y el plano son conjuntos de puntos.* Una vez escrito el postulado, la profesora explicó que éste hacía referencia a puntos, rectas y al plano y que éstos iban a ser los tres términos no definidos que serían la base del sistema. Después tomó nota de las observaciones consignadas en el tablero y dio por terminada la clase.

En la segunda sesión, la profesora pidió a los estudiantes abrir los archivos de Cabri en dónde habían trabajado la representación de la recta, para seguir revisando las construcciones hechas y las observaciones formuladas. Tenía la intención de retomar la observación de Juan pero como este aún no había llegado al salón decidió referirse a la observación de Efraín por ser la más parecida a la de Juan[4]. Como ese día sí había luz, la profesora pidió a Efraín proyectar la pantalla de su calculadora en la pared[5] y explicar el proceso de construcción de la recta y por qué éste había dado pie a su observación: *en toda recta hay por lo menos dos puntos*. Efraín proyectó su imagen y sobre ella explicó que él y su compañera María habían usado la opción 'Recta' del menú de Cabri y que al hacerlo habían aparecido la recta y dos puntos. Revisando la construcción, Daniel notó que Efraín y María habían confundido la etiqueta que habían puesto para nombrar la recta con un punto (Figura 1). Se concluyó que la afirmación de Efraín no estaba en correspondencia con la representación en Cabri.

[4] En conversación sostenida con la profesora al finalizar la primera clase, ella manifestó que iba a aprovechar la afirmación de Juan para referirse a la expresión "al menos un punto" y comenzar una discusión que permitiera introducir el postulado que establece la correspondencia entre los puntos de la recta y los números reales. Este plan no se llevó a cabo porque Juan llegó tarde. La profesora tuvo que tomar una rápida decisión y hacer la introducción del postulado dos a partir de la afirmación de Efraín.

[5] Para ello, conectó la calculadora con el programa Cabri a una pantalla especial que con ayuda de un retroproyector permite apreciar la imagen en la pared.

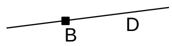


Figura 1

María intervino para decir que ellos dos, Efraín y ella, también habían hecho la afirmación: *por dos puntos pasa una única recta,* pues después de hacer la construcción que había mostrado Efraín, habían usado el punto B, y otros dos puntos que habían representado, para trazar rectas que pasaran por dos de ellos (Figura 2).

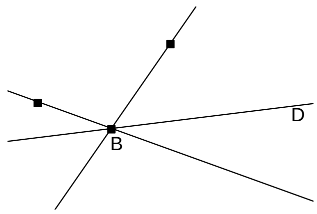


Figura 2

La profesora propuso entonces comparar los dos enunciados: *por dos puntos pasa una única recta* y *toda recta tiene por los menos dos puntos.* Preguntó si las dos frases estaban afirmando lo mismo. Leopoldo trató de dar una explicación de la diferencia pero resultó repitiendo las mismas afirmaciones. Fue Germán quien señaló que la diferencia estaba en lo que se tenía como dado en cada uno de los enunciados. La profesora mencionó que las dos afirmaciones tenían la forma condicional y les solicitó reformularlas como frases de la forma si–entonces. Algunos estudiantes intentaron cumplir la tarea, con poco éxito. Después de varios ensayos, la profesora se refirió a que los enunciados eran recíprocos, pues lo que se concluía de uno era lo que estaba dado en el otro, y viceversa.

Como la afirmación formulada por Efraín: *toda recta tiene por lo menos dos puntos,* no estaba en correspondencia con el procedimiento de representación de una recta en Cabri, la profesora sugirió pensar si la afirmación sería cierta o no y si podría justificarse con base en los elementos que se tenían a disposición en el sistema, los cuales hasta el momento eran: los términos no definidos (punto, recta, plano) y el postulado 1. La certeza de la afirmación no se puso en duda. Sobre cómo justificarla, Leopoldo argumentó que el primer postulado no se podía usar como justificación porque únicamente permitía garantizar la existencia de un punto en la recta. Entonces la profesora optó por introducir otro postulado, que iba a jugar un papel importante en el sistema y que se podía usar para demostrar la afirmación de Efraín[6]. Ella formuló entonces el postulado dos del sistema, con el

[6] Aunque la afirmación de Efraín no se había previsto como uno de los teoremas del sistema, la profesora decidió aprovechar el hecho de que había sido enunciada por un estudiante para incorporarla como teorema, porque sabía que sería muy útil disponer de ella en sucesi-

que se estableció el nexo entre los números reales y los puntos en la recta, postulado distintivo del sistema axiomático que se pretendía construir. Se discutieron posibles nombres para el postulado y finalmente se decidieron por: "Correspondencia puntos en recta – números" para referirse a él cuando hubiera necesidad. *P2: Correspondencia puntos en recta - números: existe una correspondencia entre los puntos de una recta y los números reales tal que: (i) a cada punto corresponde un único real, (ii) a cada número real corresponde un único punto.*

La profesora dirigió un análisis para interpretar las partes (i) y (ii) del enunciado. Para comprender lo que decía cada una, la profesora propuso a los estudiantes explicar qué afirmaba cada parte y expresar el enunciado de la forma si–entonces; hizo referencia a la función biyectiva que el postulado permitía asegurar entre los puntos de la recta y los reales. También introdujo la definición de coordenada para hacer alusión al número correspondiente a un punto dado. *Coordenada de un punto: número que corresponde a cada punto en una recta.*

Una vez concluido el análisis del enunciado del postulado dos, se llevó a cabo un trabajo colectivo de argumentación para ver cómo justificar la afirmación de Efraín. El análisis partió de la pregunta de la profesora sobre cómo usar el postulado dos en la demostración. Henry afirmó que el postulado era útil y trató de elaborar un argumento deductivo basado en su conocimiento sobre la equinumerosidad de los conjuntos en donde se establece una función biyectiva. Sin embargo, su argumento comenzaba con el uso del ítem (i) del postulado. La profesora le recomendó no comenzar aludiendo a este ítem porque éste se refería a "cada punto" de la recta y esa condición no podía ser aplicada, hasta el momento, sino a un punto. Como Henry parecía no comprender la observación de la profesora, e insistía en referirse al ítem (i), nuevamente dedicaron tiempo a expresar cada ítem del postulado de la forma si-entonces. Después, la profesora preguntó si estaban de acuerdo con el argumento de Henry. Melisa intervino para intentar precisar el papel que jugaban los dos ítems del postulado en la correspondencia biyectiva, pero no pudo articularlos clara y precisamente. Por su parte, Daniel y Henry continuaron señalando que a cada real correspondía un único punto, como razón para justificar que los puntos respondían a reales diferentes; parecían no comprender que esa condición aseguraba que no había dos puntos (diferentes) correspondientes para un mismo real, pero bien podría darse el caso de que a dos reales (diferentes) correspondiera el mismo punto. Finalmente la profesora trató de precisar el camino de la demostración: primero había que argumentar usando la parte (ii) del postulado para afirmar que a cada real (y se sabe que hay por lo menos dos) le corresponde un punto; luego si se debía aclarar por qué no podía ser el mismo.

La profesora propuso escribir la demostración. Primero preguntó qué formato querían usar: si escribían la demostración a dos columnas, o en forma narrativa. Como el formato a dos columnas era familiar a algunos estudiantes, pues lo han

vas demostraciones. Adicionalmente, usó el interés por demostrar esa afirmación para introducir el postulado que establece la biyección entre los reales y los puntos de la recta.

visto en textos o en algunas demostraciones que estudiaron el semestre anterior, este fue escogido por la mayoría[7], pese a que Daniel y Juan pidieron hacer la demostración en forma de párrafo[8]. La profesora incluyó como condición que al lado de la justificación de cada paso de la demostración, se escribiera el número del paso o pasos previos que se habían tenido en cuenta para incluir la afirmación que se estaba haciendo. Luego propuso como primera afirmación: "*m* es una recta". Hizo una tabla de dos columnas en el tablero; tituló la primera columna con la palabra "afirmación" y la segunda con la palabra "justificación". Luego escribió en la columna de afirmaciones: "1. *m* es una recta" y en la de las justificaciones "1. Dado". Luego invitó a los estudiantes a continuar la demostración. Algunos sugirieron ideas que fueron rechazadas por la profesora por vagas ("existen los reales", "los reales son infinitos") o porque afirmaban lo que había que demostrar ("existen dos puntos A y B"). Después de algunas intervenciones poco productivas Juan elaboró una propuesta en la que partió del ítem (i) del postulado para asignar al único punto de la recta un real y luego propuso escoger un real diferente para encontrar otro punto. A pesar de que expresó su idea en forma confusa y no la completó, la profesora la retomó y la adaptó para comenzar con dos números reales desde el principio y así obtener el paso dos de la demostración (Tabla 1). Después interrogó a los estudiantes sobre cuál sería el siguiente paso de la demostración. Juan y Ana propusieron usar el postulado P2. La profesora concretó el ítem (ii) del postulado, para hacerlo útil en la demostración, dando nombres a los puntos que iban a hacerse corresponder con dos reales escogidos 1 y 2. Después se refirió a la idea de Melisa de usar el ítem (i) para garantizar que los puntos escogidos fueran distintos. Como Juan no veía la necesidad de incluir el ítem (i) en el argumento, la profesora hizo una explicación, apelando a un diagrama de Venn, para mostrarle que si no se hacía referencia al ítem (i), los reales podrían ser asignados al mismo punto. Finalmente, la demostración quedó consignada en el tablero como aparece en la Tabla 1.

Afirmación	Justificación
1. m es una recta	1. Dado
2. Sean 1 y 2 dos números reales	2. Propiedad de los reales.
3. Sea P un punto al que le corresponde el número 1 y Q un punto al que le corresponde el número 2.	3. Parte (ii) del postulado P2 de correspondencia puntos en recta-números. (1, 2)
4. $P \neq Q$	4. Parte (i) del postulado P2 y afirmación (3)
	5. (4)

[7] Más que verlo como un formato rígido, la profesora considera que el uso del formato es un apoyo importante para el razonamiento cuando se está elaborando una demostración.

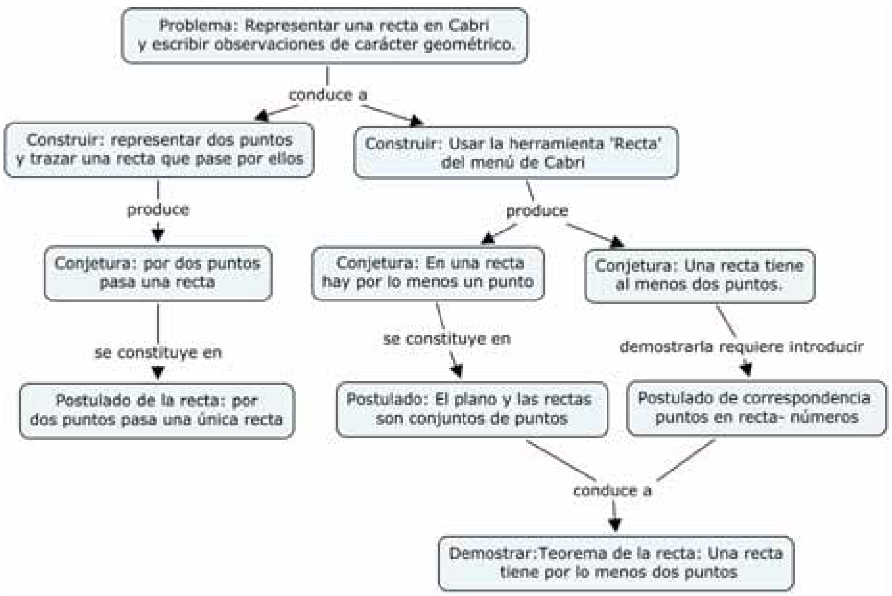
[8] Estos dos alumnos opinaron que el forma de párrafo las demostraciones eran menos dispendiosas. La profesora los autorizó a escribirlas así, siempre y cuando tuvieran la precaución de escribir las justificaciones de cada afirmación.

Afirmación	Justificación
5. Toda recta tiene al menos dos puntos	

Tabla 1

Después de escribir la demostración, la profesora complementó la información diciendo que por la misma vía se podría encontrar otro punto de la recta para reafirmar que eran más de dos puntos. Recordó a los estudiantes la importancia de escribir en paréntesis, al lado de cada justificación, el paso o los pasos que se usaron en el argumento y el hecho de que en las demostraciones podían usar propiedades de los números reales, sin demostrarlas.

A raíz del trabajo realizado en el episodio se concretaron: tres postulados (P1, P2 y P3: por dos puntos pasa una única recta), una definición (Coordenada de un punto) y un teorema: Teorema de la recta. En el Esquema 1 ilustramos las relaciones entre las actividades realizadas y el contenido desarrollado.



Esquema 1

EPISODIO 2: TRES PUNTOS NO COLINEALES DETERMINAN DOS SEGMENTOS QUE SE BISECAN

El episodio 2, Tres puntos no colineales determinan dos segmentos que se bisecan, tuvo lugar en las clases 12, 13 y 14 del curso de geometría plana (febrero 27, marzo 05 y marzo 06 de 2007)[9]. Este fue el primer problema propuesto a los estu-

[9] Documentos primarios P22, P27, P28 del Archivo Ciclo-Cabri de AtlasTi.

diantes en la perspectiva de que idearan un procedimiento de construcción para resolver un problema propuesto, formularan una conjetura y la demostraran. Los estudiantes debían justificar los pasos del procedimiento de construcción con enunciados incorporados hasta el momento en el sistema axiomático. Así, al momento de producir la demostración de la conjetura los estudiantes podrían participar en su elaboración.[10]

Hasta el momento, seis postulados y diez definiciones habían sido formulados y ocho teoremas se habían demostrado, estableciendo relaciones entre puntos y rectas, la existencia del punto medio de un segmento y la propiedad según la cual la distancia del punto medio a los extremos del segmento es igual a la mitad de la longitud del segmento. En la primera sesión del episodio, que se llevó a cabo en la sala de computadores, los estudiantes fueron invitados a resolver, en pares, la parte *a*. de este problema:

> Problema: Dados tres puntos no colineales A, B, C, construir un punto D tal que los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ se bisequen. (a) Describir el procedimiento de construcción justificando cada paso del mismo. (b) Escribir el teorema que el resultado de este problema permite enunciar. (c) Demostrar el teorema.

La Tabla 2 muestra un resumen del proceso de construcción que hicieron la mayoría de grupos. En la columna de la derecha escribimos los enunciados del sistema axiomático que dan soporte matemático a la herramienta usada.

Pasos en la construcción	Herramienta Cabri usada	Soporte teórico
1. Representar los puntos no alineados *A, B, C.*	1. Punto.	1. Postulado P1: El plano y las rectas son conjuntos de puntos.
2. Trazar la recta $\overleftrightarrow{AB}$.	2. Recta.	2. Postulado P3: Dados dos puntos, existe una única recta que los contiene.
3. Representar el segmento $\overline{AB}$.	3. Segmento.	3. Definición de segmento: El segmento $\overline{AB}$ es el conjunto de puntos *A, B,* y todos los puntos entre[11] *A* y *B*.
4. Obtener el punto P como punto medio del segmento $\overline{AB}$.	4. Punto medio.	4. Teorema: Cada segmento tiene un punto medio.

[10] El problema propuesto a los estudiantes les pedía encontrar un punto con unas características dadas. La conjetura debía aludir a la existencia de dicho punto, por lo tanto, las justificaciones de los pasos en el proceso de construcción eran, por lo menos inicialmente, bastante semejantes a las justificaciones de los pasos de la demostración.

[11] Definición de "interestancia": El punto B está entre los puntos A y C si A, B y C son colineales y sus distancias verifican la siguiente ecuación $AB + BC = AC$. Notación: *A-B-C.*

Pasos en la construcción	Herramienta Cabri usada	Soporte teórico
5. Trazar la recta $\overleftrightarrow{CP}$.	5. Recta.	5. Postulado P3.
6. Calcular la distancia *CP*.	6. Distancia o longitud.	6. Postulado P5: La distancia *AB* entre dos puntos A y B en una recta, es el valor absoluto de la diferencia de sus coordenadas.
7. Trazar el rayo $\overrightarrow{CP}$, o dibujar el punto *J* tal que *P* está entre C y J y trazar el rayo $\overrightarrow{PJ}$.	7. Rayo.	7. Definición de rayo: Un rayo $\overrightarrow{AB}$ es el conjunto de puntos que es la unión del segmento $\overline{AB}$ y los puntos C tales que B está entre A y C. Teorema: Dados los puntos A y B en una recta, existe un punto C tal que B está entre A y C.
8. Transferir el doble de la distancia *CP* en el rayo $\overrightarrow{CP}$, desde *C,* o la distancia *CP* en el rayo $\overrightarrow{PJ}$, desde *P*. Etiquetar con *D* el punto obtenido en la transferencia.	8. Transferencia de medidas.	8. Teorema de Localización de puntos: Dado el rayo $\overrightarrow{AB}$ y un número positivo *x,* existe exactamente un punto *P* en $\overrightarrow{AB}$ tal que la distancia *AP* es *x*.

Tabla 2

El uso de Cabri estaba condicionado y restringido a aquellas herramientas que tuvieran soporte teórico. Por ejemplo, para dibujar el segmento AB los estudiantes no podían simplemente usar la herramienta 'Segmento', porque en el sistema axiomático, construido hasta el momento, un segmento se había definido como subconjunto de la recta; los estudiantes tenían que dibujar primero la recta AB (paso 2) y luego sí el segmento AB (paso 3). Igualmente, para obtener el punto D en la recta CP, los estudiantes no podían usar las herramientas 'Circunferencia' y 'Compás', porque ellas aún no tenían soporte teórico. En lugar de ello, debían usar la herramienta 'Transferencia de medidas' que había sido introducida usando el Teorema de localización de puntos como soporte.

Después del paso 6 los estudiantes propusieron dos procedimientos diferentes: unos grupos trazaron el rayo CP y transfirieron el doble de la medida CP en el rayo, a partir del punto C. Otros, trazaron el punto J en la recta CP tal que P estuviera entre C y J y trazaron el rayo PJ, para después transferir la distancia CP a partir de P. El resultado de la transferencia, en ambos casos, era el punto que nombraron con D.

En la segunda sesión de este episodio la profesora pidió a los estudiantes responder la parte *b.* del problema, estableciendo una conjetura y demostrándola. Ella promovió una discusión general en la cual participaron 12 estudiantes efectivamente, formulando afirmaciones que podrían conformar la secuencia deductiva para la demostración y las justificaciones para cada una. Cuando era necesario, la profesora hacía observaciones sobre lo que proponían los estudiantes, corregía formas de expresar las ideas y escribía en el tablero los pasos de la demostración (Tabla 3). El grupo avanzó en la escritura de la demostración asociando pasos de la construcción con pasos de la demostración. Al llegar al punto de referirse al rayo en donde iban a localizar a D, se decidieron por la propuesta de Juan de usar el rayo PJ y transferir la distancia CP, a partir de P. Por esta vía, la demostración llegó hasta afirmar la existencia del punto D tal que las distancias CP y PD eran iguales. La profesora indicó entonces que, aunque la construcción hubiera terminado en ese punto, la demostración debía continuar porque aún no habían demostrado que el punto P era el punto medio del segmento CD. Algunos estudiantes propusieron argumentos deductivos correctos para demostrar la equidistancia de P a C y a D, pero los argumentos sugeridos para demostrar que P estaba entre C y D no eran correctos. La profesora pidió a los estudiantes, como tarea, pensar en este paso de la demostración. En el tablero quedó escrita la parte de la demostración hecha durante la clase (enunciados 1 a 9 de la Tabla 3).

Afirmación	Justificación
Sean A, B, C tres puntos no colineales.	Dado.
Existe la recta $\overleftrightarrow{AB}$	Postulado P3.
Existe el segmento $\overline{AB}$	Definición de segmento y afirmación 2.
Sea P el punto medio del segmento $\overline{AB}$	Teorema Existencia del punto medio de un segmento y afirmación 3.
Existe la recta $\overleftrightarrow{CP}$	Postulado P3 y afirmaciones 1 y 4.
Sea J un punto en la recta $\overleftrightarrow{CP}$ tal que C-P-J	Tercer teorema de interestancia y afirmación 5.
Existe el rayo $\overrightarrow{PJ}$	Definición de rayo y afirmaciones 5 y 6.
$CP = r,\ r > 0$	Postulado P5 y afirmaciones 1 y 4.
Existe un punto D en $\overrightarrow{PJ}$ tal que $PD = r$.	Teorema de Localización de puntos y afirmaciones 7 y 8.
$PD = PC$.	Sustituyendo *r* en la afirmación 9 por *CP* (afirmación 8)
C-D-P, D-C-P, or *C-P-D.*	11.
Caso C-D-P conduce a una contradicción.	Definición de interestancia y afirmaciones 1 y 10.
Caso D-C-P conduce a una contradicción.	Definición de interestancia y afirmaciones 1 y 10.
Caso C-P-D	Afirmación 11.
P es punto medio del segmento $\overline{CD}$.	12. Definición de punto medio y enunciados 10 y 11.

Tabla 3

En la tercera sesión de este episodio, la discusión general continuó, con la participación de 13 estudiantes quienes sugirieron nuevas ideas para completar la demostración:

Juan propuso trazar el rayo CJ en lugar del rayo PJ, y transferir el doble de la distancia CP, desde C; pero esta opción tenía en mismo problema de no saber como demostrar que P estaba entre C y D.

Henry propuso no dibujar un rayo, sino usar el postulado P6[12] para asignar la coordenada 0 a C, y la coordenada r a P, luego usar el postulado P2[13] para encontrar un punto D en la recta CP con coordenada $2r$. Como $0 < r < 2r$, por el teorema de la relación interestancia-orden[14], se podía concluir que P estaba entre C y D.

Ana propuso trazar primero el rayo PC y luego el rayo opuestos CP, para construir en este último el punto D. De esta forma era fácil demostrar que P estaba entre C y D; sin embargo esta sugerencia no era adecuada porque no habían demostrado aún la existencia del rayo opuesto a un rayo dado.

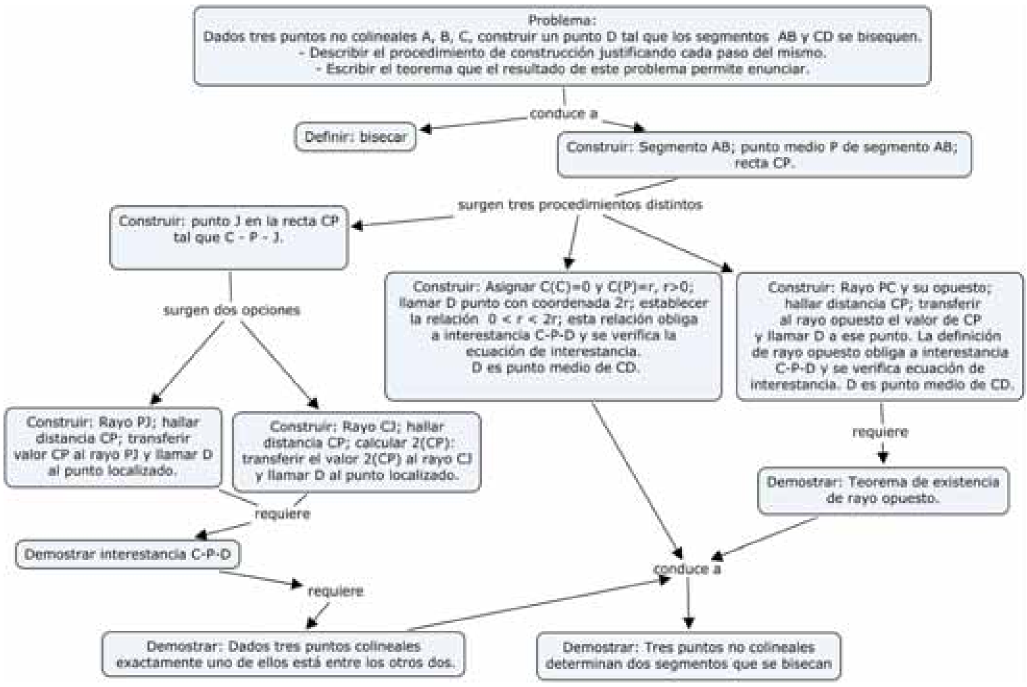
El grupo analizó y discutió cada propuesta e incluso entre varios revisaron cómo se podría hacer la construcción del rayo opuesto, justificando cada paso, con lo cual quedó planteada la vía para la demostración de la existencia del rayo opuesto y poder admitir la propuesta de Ana. Pero, un tiempo después, la profesora pidió completar la propuesta inicial de Juan. Como los estudiantes no fueron capaces de demostrar que P estaba entre C y D, la profesora sugirió considerar todas las posibles relaciones de interestancia entre los puntos C, P y D. Esta sugerencia ayudó a los estudiantes a analizar cada relación y a demostrar que dos de ellas no eran posibles; de esta forma obtuvieron la última afirmación del teorema. El resumen escrito en el tablero, sobre ésta última parte de la demostración, fueron los pasos 10 a 12 de la Tabla 3. La profesora institucionalizó este enunciado como un nuevo teorema porque ella consideró que podía ser útil más adelante (Teorema: Dados tres puntos A, B y C colineales, solamente uno de ellos está entre los otros dos). En el Esquema 2 ilustramos las relaciones entre las actividades realizadas y el contenido desarrollado.

---

[12] Postulado P6: Dados dos puntos P y Q en una recta, es posible definir un sistema de coordenadas tal que la coordenada de P sea 0 y la coordenada de Q sea positiva.

[13] Postulado P2: Existe una correspondencia uno a uno entre los puntos de una recta y los números reales tal que (i) a cada punto le corresponde un real, (ii) a cada real le corresponde un punto de la recta.

[14] Teorema de la relación de interestancia-orden: Dados tres puntos A, B, C en una recta, con coordenadas x, y, z, si $x < y < z$ entonces B está entre A y C.



Esquema 2

EPISODIO 3: ANGULOS OPUESTOS POR EL VERTICE

El episodio 3, Ángulos opuestos por el vértice, tuvo lugar en las clases 15 y 17 (marzo 08 y marzo 13 de 2007)[15] del curso de geometría plana. En la clase del 08 de marzo se dio comienzo a la tercera unidad temática del curso: ángulos. En las dos unidades anteriores se sentaron las bases del sistema axiomático que se iba a construir a lo largo del curso estableciendo, mediante postulados, definiciones y teoremas, relaciones básicas entre puntos, rectas y el plano, de tal forma que éstas tuvieran un soporte teórico y no perceptivo. La definición de interestancia,[16] con la cual se formalizó la relación "estar entre" se constituyó en la base para poder definir subconjuntos de la recta como el segmento y el rayo. Por su parte, el postulado P10, de separación del plano,[17] permitió definir el concepto de semiplano e incluir en el sistema algunos teoremas relacionados con la pertenencia o contenencia de puntos, o subconjuntos de la recta, a los semiplanos que cualquier recta determina en el plano. Una vez establecidas estas bases, la profesora sugirió comenzar a estudiar figuras más complejas, como los ángulos.

[15] Documentos primarios P36, P42 del archivo Ciclo-Cabri del programa AtlasTi.

[16] Definición de interestancia: B está entre A y C si A, B y C son puntos de una misma recta y $AB + BC = AC$. (Notación: A-B-C).

[17] Postulado P10 de separación del plano: Se da una recta m y un plano α que la contiene. Los puntos del plano que no están en la recta forman dos conjuntos H1 y H2 tales que: (i) cada uno de los conjuntos es convexo, (ii) si P está en H1 y Q en H2, entonces $\overline{PQ}$ interseca a m.

Previo a la formulación del problema que dio comienzo al episodio, se llevó a cabo una discusión tendente a establecer la definición de ángulo que se iba a incluir en el sistema axiomático, e identificar algunas implicaciones de ésta, para el sistema, tales como la no existencia de ángulos "llanos" o de ángulos "nulos". Se institucionalizó la siguiente definición:

> Definición de ángulo: unión de dos rayos que tienen el mismo origen pero que no están en la misma recta.[18]

Como algunos estudiantes habían sugerido definiciones de ángulos que estaban más cercanas a la definición de interior de ángulo, esta definición también se incluyó en el sistema axiomático:

> Definición de interior de ángulo: Sea $\angle BAC$ un ángulo en el plano β. Un punto P está en el interior de $\angle BAC$ si, (i) P y B están en el mismo lado de la recta $\overleftrightarrow{AC}$ y (ii) P y C están del mismo lado de la recta $\overleftrightarrow{AB}$.

Una vez establecidas las definiciones de ángulo y de interior de ángulo la profesora formuló el siguiente problema, con el que comenzó el episodio, y pidió a los estudiantes trabajar en parejas, haciendo uso de Cabri:

> <u>Problema</u>: ¿qué condiciones **debe** cumplir un ángulo B para ser congruente con un ángulo A?

La profesora tenía previsto que los estudiantes analizaran posibles relaciones geométricas entre dos ángulos para poder garantizar su congruencia sin medirlos; ella suponía que con este problema podría comenzar a trabajar propiedades de pares de ángulos, como los opuestos por el vértice o aquellos que son par lineal. Sin embargo, en lugar de imaginarse "condiciones" para el $\angle A$ y el $\angle B$ la mayoría de los grupos comenzó a explorar Cabri en busca de un procedimiento que les permitiera construir y medir ángulos. Otros, intentaron hacer un triángulo isósceles o construir polígonos regulares, aprovechando la opción 'Polígono regular' de Cabri.

En la plenaria que tuvo lugar para socializar el trabajo realizado por los grupos se descartaron las propuestas que hacían uso de herramientas del programa Cabri no validadas teóricamente, así como aquellas sugerencias al uso de figuras aún no incorporadas al sistema. Germán comentó que él y su compañero no tenían propuestas pues se habían dedicado a discutir qué iban a entender por congruencia y por medida de un ángulo. La intervención de Germán fue aprovechada por la profesora para sacar fruto al rumbo que había tomado el trabajo de la mayoría de los estudiantes en Cabri, aunque éste se hubiera distanciado de lo planeado. Recordó a los estudiantes que la congruencia de segmentos estaba asociada a la igualdad de su medida, por lo que una definición equivalente podría establecerse para ángulos. Faltaba tener una forma de asociar cada ángulo a un número para establecer un

[18] Esta es la definición de ángulo lineal, en contraposición con la definición de ángulo orientado. La condición de que los dos rayos no estén en la misma recta es impuesta por algunos autores para garantizar que el ángulo es una figura coplanar.

sistema de medidas. A partir de esta necesidad, se introdujeron al sistema axiomático el postulado de la medida de ángulos y las definiciones de medida de ángulo y de ángulos congruentes.

> P 11: De la medida de ángulos: a cada ángulo *BAC* le corresponde un número real entre 0 y 180.
>
> Definición de medida de un ángulo: el número dado por el postulado de la medida de ángulos se llama medida del ángulo.
>
> Definición de ángulos congruentes: dos ángulos son congruentes si tienen la misma medida.

La profesora hizo algunas explicaciones sobre el postulado de la medida de ángulos aclarando que éste excluía al 0 y al 180 como posibles valores; también señaló que, además de establecer la correspondencia entre los ángulos y los números, el postulado definía una unidad de medida, pues quedaba establecido el rango de valores entre los que debía estar la medida de cualquier ángulo. Después, en un intento de llevar la clase hacia el rumbo planeado, reformuló el problema:

> "Tengo un ángulo *A*, ¿qué condiciones debe tener un ángulo *B* para ser congruente con el ángulo *A*? Vamos a usar la calculadora, vamos a construir un ángulo *A* y vamos tratar de construir otro que tenga la misma medida, o sea un ángulo *B* con la misma medida".

Para cumplir con la tarea, la mayoría de parejas intentó reproducir el procedimiento de construcción con regla y compás que habían aprendido en el curso anterior para "copiar un ángulo". Al observar lo que estaban haciendo, la profesora dio un nuevo viraje a la clase para explicar que el procedimiento que ellos estaban intentado reproducir no tenía soporte teórico en el sistema, por lo que no lo podían usar en ese momento.[19] Pero, ante el interés de la mayoría por construir un ángulo con una medida dada, ella decidió introducir el postulado de construcción de ángulos que sustenta la existencia de ese ángulo. Adicionalmente, introdujo la herramienta de Cabri 'Rotación' para hacer operativo el postulado.[20]

> P 12. De la construcción de ángulos: Sea $\overrightarrow{AB}$ un rayo de la arista del semiplano H. Para cada número *r* entre 0 y 180, hay exactamente un $\overrightarrow{AP}$ con *P* en H, tal que $m\angle PAB = r$.

En la segunda sesión del episodio, la profesora retomó el problema propuesto con el cual esperaba introducir varios teoremas acerca de ángulos. Hizo una nueva reformulación, en un esfuerzo de centrar la atención de los estudiantes en propiedades de pares de ángulos, en lugar de su medida:

[19] La copia usual de ángulos se basa en el criterio de congruencia de triángulos lado-lado-lado que aún no había sido introducido en el curso.
[20] Así como la herramienta 'Transferencia de medidas' tiene sustento en el teorema de localización de puntos, la herramienta 'Rotación' tiene sustento en el postulado de construcción de ángulos. La herramienta 'Rotación' no se usa con el sentido geométrico de transformación en el plano, para el que está diseñada, sino simplemente a manera de transportador. La dirección del giro es controlada por el signo del número que se edita para determinar la magnitud de éste.

> "Dado el ángulo *A,* ¿qué condiciones **puede** tener un ángulo *B* para que sea congruente con el ángulo *A*? Ya vimos que una tiene que ver con la definición de congruencia pero mi pregunta es ¿qué **condiciones** puede tener?, ¿habrá otras condiciones que me aseguren que el ángulo *A* y el ángulo *B* **tienen que ser congruentes**?

El giro en el enunciado del problema al escribir "puede" en lugar de "debe" y la explicación posterior, en la que la profesora enfatizó en la expresión "tienen que ser congruentes", pretendían que los estudiantes entendieran que la tarea se trataba de buscar caminos posibles para obtener ángulos congruentes sin usar el postulado de construcción. Después de un tiempo en el que los estudiantes trabajaron en parejas la profesora comentó que había visto tres construcciones diferentes. Descartó dos de ellas porque hacían uso de objetos y relaciones geométricas aún no estudiados: triángulos equiláteros y rectas paralelas. Decidió organizar la actividad matemática alrededor de la propuesta de Orlando y sus compañeros, por lo que le pidió al estudiante que hiciera la representación que habían hecho en Cabri, en el tablero para poderla mostrar al grupo. Orlando dibujó dos ángulos opuestos por el vértice. Su representación se asemejaba a la Figura 3; el estudiante intentó reflejar con líneas punteadas que el $\angle B$ se había formado a partir de la construcción de las rectas que contenían los rayos que conforman el $\angle A$.

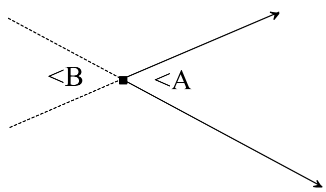


Figura 3

La profesora mencionó que la representación de las rectas prolongando los lados del ángulo conformaba tres nuevos ángulos, uno de los cuales había sido escogido por Orlando como el ángulo congruente al $\angle A$, precisamente, el ángulo opuesto por el vértice. La propiedad de la congruencia de los ángulos opuestos por el vértice era conocida y admitida por todos como cierta. Sin embargo, Daniel sugirió que tenían que hacer la demostración. Antes de dedicarse a esta actividad, la profesora introdujo la definición de ángulos opuestos por el vértice e insistió en la condición de conformar "dos pares" de rayos opuestos, que podía pasar desapercibida, pero que era muy importante en la identificación de estos pares de ángulos.

> Definición de ángulos opuestos por el vértice: dos ángulos son opuestos por el vértice si sus lados forman dos pares de rayos opuestos.

Una vez establecida la definición de ángulos opuestos por el vértice, la profesora propuso desarrollar un argumento para demostrar que los ángulos opuestos por el vértice eran congruentes. La primera propuesta, hecha por María, consistía en medir los ángulos y comprobar arrastrando los rayos que las medidas eran iguales. Esta idea suscitó una discusión sobre qué se admitía como demostración en el curso y qué era una verificación. Después de revisado ese punto, entre María, Juan y Aníbal desarrollaron un argumento que llevó a la introducción de las definiciones de ángulos que son par lineal, de ángulos adyacentes y del postulado P14 del par lineal. El postulado se introdujo pues los estudiantes querían referirse a la suma de las medidas de dos ángulos que conforman un ángulo “llano”, pero como éste no existía en el sistema, tuvieron que referirse a la medida de dos ángulos que son par lineal. Dedicaron algún tiempo a analizar si el postulado del par lineal podía ser considerado una definición o un teorema y finalmente lo admitieron como postulado.

> Definición de ángulos par lineal: si $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AD}$ son rayos opuestos y C es un punto que no está en la recta AB, entonces $\angle BAC$ y $\angle CAD$ forman un par lineal.
>
> Definición de ángulos adyacentes: dos ángulos son adyacentes si son coplanares, comparten el vértice, tienen un lado común y no tienen puntos interiores en común.
>
> P 14. Del par lineal: Si dos ángulos forman par lineal, entonces la suma de sus medidas es 180.

La profesora delegó a William la tarea de escribir la demostración en el tablero, aprovechando la argumentación propuesta por los compañeros. Sin embargo, cómo el estudiante dio muestras de no poder escribir la demostración solo, recibió ayuda de la profesora y de algunos compañeros. En la Tabla 4 se encuentra la demostración, basada en la Figura 4. Las afirmaciones se escribieron en el tablero, las razones se dijeron oralmente.

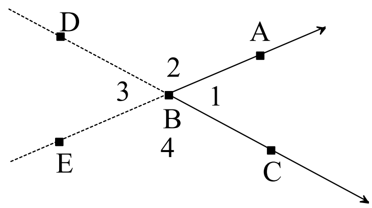


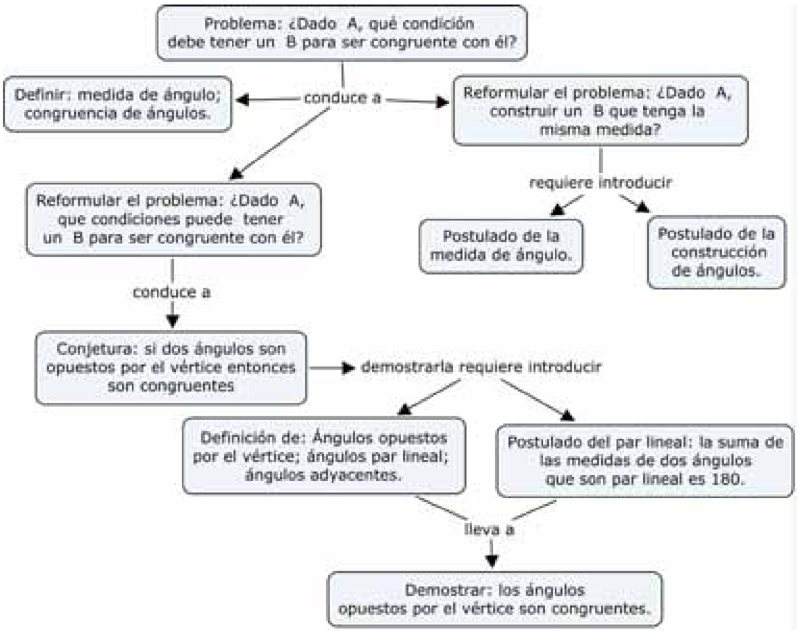
Figura 4

Afirmación	Justificación
1. Sean $\angle 1$ y $\angle 3$ opuestos por el vértice.	1. Dado.
2. $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BE}$ son opuestos; $\overrightarrow{BD}$ y $\overrightarrow{BC}$ son opuestos.	2. Definición de ángulos opuestos por el vértice y afirmación 1.
3. $D \notin \overleftrightarrow{AB}$	3. Definición de ángulos opuestos por el vértice y afirmaciones 1 y 2.
4. $\angle 2$ y $\angle 3$ son par lineal.	4. Definición de ángulos que son par lineal y afirmaciones 2 y 3.
5. m$\angle 2$ + m$\angle 3$ =180	5. Postulado del par lineal y afirmación 4.

$A \notin \overrightarrow{DC}$	6. Definición de ángulos opuestos por el vértice y afirmaciones 1 y 2.
7. $\angle 1$ y $\angle 2$ son par lineal.	7. Definición de ángulos que son par lineal y afirmaciones 2 y 3.
8. $m\angle 2 + m\angle 3 = 180$	8. Postulado del par lineal y afirmación 6.
9. $m\angle 2 + m\angle 3 = m\angle 1 + m\angle 2$	9. Propiedad transitiva de la igualdad y afirmaciones 5 y 8.
10. $m\angle 3 = m\angle 1$	10. Propiedad cancelativa y afirmación 9.
11. $\angle 3 \cong \angle 1$	11. Definición de congruencia.

Tabla 4

En el Esquema 3 ilustramos las relaciones entre las actividades realizadas y el contenido desarrollado.



Esquema 3

EPISODIO 4: BISECTRICES DE ÁNGULOS PAR LINEAL

El episodio 4, Bisectrices de ángulos par lineal, tuvo lugar en las clases 19 y 20 (marzo 20 y marzo 22 de 2007)[21] del curso de geometría plana. En clases previas se había dado comienzo a la unidad temática de ángulos y se habían incorporado al sistema axiomático las definiciones de ángulos opuestos por el vértice, ángulos adyacentes, ángulos que son par lineal, ángulo recto, ángulos complementarios, ángulos suplementarios y bisectriz de un ángulo. También se habían incluido los postulados de la medida de ángulos, de construcción de ángulos, de adición de medidas de ángulos y del par lineal. Adicionalmente, mediante un trabajo colecti-

[21] Documentos primarios P50 y P52 del archivo Ciclo-Cabri del programa AtlasTi.

vo, se había demostrado la congruencia de los ángulos opuestos por el vértice y la equivalencia de dos definiciones de ángulo recto.

En la primera sesión del episodio la profesora entregó una hoja con el siguiente problema:

> Problema: Estudiar la situación, formular una conjetura y justificar la respuesta: Sean *BA* y *BE* rayos opuestos y *BK* otro rayo. Sean *BG* y *BD* las bisectrices de los ángulos *ABK* y *KBE* respectivamente, ¿Cuál debe ser la posición del rayo *BK* para que la medida del ángulo *GBD* sea la máxima?

Los estudiantes trabajaron el problema en Cabri, en parejas, en la sala de computadores. Como sólo disponían de media hora, la profesora les pidió que en esa primera sesión se preocuparan por explorar la situación, escribir el proceso de construcción, formular una conjetura y entregarla por escrito; debían escribirla empleando el formato si-entonces, para favorecer el análisis. En la siguiente sesión debían traer hechas las demostraciones de las conjeturas. También hizo una breve explicación sobre la diferencia entre la representación de la bisectriz que el programa Cabri producía (una recta), y la representación que correspondía a la definición que ellos habían institucionalizado, en donde afirmaban que era un rayo. Les pidió que usaran la herramienta 'Bisectriz' de Cabri, pero luego trazaran un rayo superpuesto y ocultaran la recta, para que la representación en Cabri coincidiera con la definición establecida. A continuación sintetizamos el trabajo realizado por tres grupos:

Darío y Leopoldo hicieron la construcción según la información dada, midieron el $\angle GBD$ y arrastraron el rayo *BK* (Figura 5); al hacerlo, observaron que la medida era siempre igual a 90. Esto les causó sorpresa, sobre todo a Leopoldo quién al ver la invarianza se preguntó si sería una casualidad o si habrían cometido un error en la construcción. Después de usar el arrastre para mirar diferentes posiciones del rayo *BK*, Darío dio a Leopoldo una explicación, apoyado en la figura, en la que le mostró que el $\angle GBD$ estaba compuesto por dos ángulos adyacentes cuyas medidas eran respectivamente la mitad de las medidas de los ángulos formados inicialmente por el rayo *BK* (es decir, el $\angle EBK$ y el $\angle KBA$); como la suma inicial de las medidas de dichos ángulos era 180, por ser par lineal, el $\angle GBD$ debía medir 90. La conjetura que escribió este grupo fue: "Sea *BA, BE* rayos opuestos, *BK* otro rayo. $\overrightarrow{BG}$ y $\overrightarrow{BD}$ las bisectrices de los ángulos que se formaron, la medida del $\angle GBD$ es siempre 90".

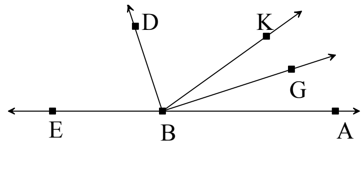


Figura 5

María y Efraín hicieron la construcción y, antes de medir el $\angle GBD$ decidieron mover el rayo *BK* para observar qué pasaba. Se imaginaron que cuando el rayo *BK* formaba una perpendicular con los rayos opuestos *BE* y *BA*, allí se tendría la medida máxima. Después tomaron la medida y comenzaron a mover el rayo *BK* dándose cuenta que la medida era constante. Establecieron como primera conjetura que: "las bisectrices de dos ángulos que son par lineal forman un ángulo recto". Después Efraín sugirió escribir la conjetura usando la medida del ángulo recto: "La medida del ángulo que se conforma de las bisectrices de dos ángulos que son par lineal es noventa". Luego, aunque Efraín consideraba innecesario escribir más, María opinó que era oportuno escribir qué pasaba cuando el rayo *BK* coincidía con alguno de los rayos opuestos y por eso escribieron una tercera conjetura: "Si el rayo *BA* y *BE* son rayos opuestos y *K* no pertenece a ninguno de esos dos rayos, o no pertenece a la recta, y el ángulo *KBA* y *KBE* forman par lineal, sus respectivas bisectrices forman un ángulo recto, cuya medida es de 90; aunque *BK* coincida con los rayos opuestos siempre la medida de *GBD*, incluso estando sobre la recta, es 90".

Ignacio y Nancy hicieron la construcción, tomaron la medida del $\angle GBD$ y encontraron que era de 90; Ignacio recordó que eso correspondía a un teorema que había estudiado en un curso anterior. Comprobaron con el arrastre la invarianza e Ignacio mencionó que los ángulos $\angle DBK$ y $\angle KBG$ eran complementarios. Después discutieron cómo redactar la conjetura, pensando si hacían referencia a un ángulo recto o a un ángulo de 90. Finalmente dejaron escrita la siguiente conjetura: "Si se tienen dos ángulos que forman par lineal, entonces la medida de un ángulo que forman sus bisectrices es de 90 grados".

Al terminar la sesión, la profesora recogió las conjeturas y las organizó de acuerdo a la similitud con la que el enunciado se parecía a un teorema escrito en un libro. En la segunda sesión del episodio, la profesora leyó nuevamente el enunciado del problema y luego hizo un análisis de las conjeturas propuestas. Leyó primero las siguientes dos conjeturas:

> Si $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BE}$ son rayos opuestos y $\overrightarrow{BK}$ otro rayo y $\overrightarrow{BG}$ y $\overrightarrow{BD}$ son las bisectrices del $\angle ABK$ y $\angle KBE$ respectivamente, entonces la posición del rayo *BK* no influye en la medida del ángulo *GBD*.
>
> Si $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BE}$ son rayos opuestos y $\overrightarrow{BK}$ otro rayo y $\overrightarrow{BG}$ y $\overrightarrow{BD}$ son las bisectrices del $\angle ABK$ y $\angle KBE$ respectivamente, entonces para cualquier posición del rayo *BK* la medida del ángulo *GBD* es la misma.

Según dijo la profesora, estas dos conjeturas hacían referencia a una conclusión visual motivada por la exploración. Aunque las consideró valiosas, por ser fruto de un trabajo hecho en geometría dinámica, mencionó que convenía reescribirlas utilizando propiedades geométricas para poder hacer uso de los enunciados del sistema en su demostración. Explicó que para expresar geométricamente que una medida no cambiaba, se podía escribir cuál era esa medida. Eso fue lo que escribieron otros grupos, cuya conjetura leyó a continuación:

> Si $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BE}$ son rayos opuestos y $\overrightarrow{BK}$ otro rayo y $\overrightarrow{BG}$ y $\overrightarrow{BD}$ son las bisectrices del $\angle ABK$ y $\angle KBE$ respectivamente, entonces la medida del ángulo *GBD* es siempre 90.

En otra conjetura, unos estudiantes hicieron referencia a los ángulos $\angle ABK$ y $\angle KBE$ como "ángulos adyacentes y suplementarios", modificando un poco la forma de expresar las condiciones iniciales, pero en esencia expresando la misma idea:

> El ángulo *GBD* está formado por las bisectrices de los ángulos $\angle ABK$ y $\angle KBE$, siendo $\angle ABK$ y $\angle KBE$ adyacentes y suplementarios, entonces la medida del ángulo *GBD* es siempre 90.

A continuación la profesora leyó otra conjetura que consideró "más completa", por hacer referencia a dos pares de ángulos, pero a la vez distanciada de la pregunta del enunciado del problema, pues ésta se refería al $\angle GBD$ y no a la suma de dos ángulos. La profesora valoró que el grupo proponente hubiera hecho una exploración más amplia de la situación y hubiera mencionado otra propiedad, diferente de aquella sugerida en el enunciado. Para que todos los estudiantes pudieran comprender la conjetura proyectó la imagen de Cabri en la pared y al leer la conjetura (Figura 6), iba señalando los ángulos a los que aludía la conjetura:

> Si $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BE}$ son rayos opuestos y $\overrightarrow{BK}$ otro rayo y $\overrightarrow{BG}$ y $\overrightarrow{BD}$ son las bisectrices del $\angle ABK$ y $\angle KBE$ respectivamente, entonces la medida del ángulo *GBK* más la medida del ángulo *KBD* es igual a 90 y la medida del ángulo *ABG* más la medida del ángulo *DBE* es también igual a 90.

Finalmente hizo referencia a una conjetura propuesta por tres grupos y mencionó que era satisfactorio como la habían formulado, pues parecía un teorema extraído de un libro, que recogía en su formulación todas las condiciones dadas, de manera sintética:

> Si dos ángulos forman par lineal entonces el ángulo formado por las bisectrices respectivas es recto.

A pesar de las diferencias en la calidad de la redacción de las conjeturas, todas ellas aludían a la propiedad del ángulo formado por las bisectrices. La profesora preguntó cómo se les ocurría hacer la demostración de la conjetura. Se llevó a cabo una conversación instruccional en la que algunos estudiantes proponían vías para la demostración en forma espontánea o por solicitud de la profesora. La producción oral de un esbozo de la demostración se hizo con el apoyo de la Figura 6 y la escritura de algunas de las afirmaciones (Tabla 5) en el tablero.

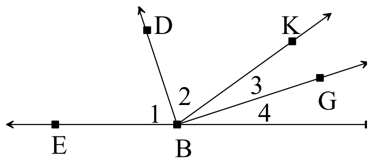


Figura 6

Inicialmente Ana propuso decir que los ángulos $\angle 1$ y $\angle 2$ eran congruentes, así como los ángulos $\angle 3$ y $\angle 4$, haciendo uso de la definición de bisectriz[22]. Luego Germán sugirió hacer referencia a los ángulos $\angle KBE$ y $\angle KBA$ que formaban un par lineal y usar el postulado del par lineal[23] para afirmar que la suma de sus medidas era 180. Luz mencionó que había que hacer una sustitución para escribir que la medida del ángulo $\angle KBE$ era dos veces la medida del ángulo 2; esta sugerencia fue justificada por Juan mediante el postulado de la adición de medidas de ángulos[24] el cual se podía usar, explicó Juan, porque la definición de bisectriz garantizaba que el punto D estaba en el interior del $\angle KBE$. Lo mismo se podía afirmar de los ángulos $\angle KBA$ y $\angle 3$. Finalmente, Jaime propuso hacer una sustitución en la ecuación sugerida por Germán, y así concluir que la medida del ángulo 2 más la medida del ángulo 3 era igual a 90. Quedó pendiente, como tarea, demostrar que el punto K estaba en el interior del $\angle GBD$ y poder así usar nuevamente el postulado de la adición de medidas de ángulos para concluir que el $\angle GBD$ medía 90; faltaba únicamente usar la definición de ángulo recto[25] para concluir que el ángulo lo era. En el tablero quedaron escritas las afirmaciones que están en la Tabla 5:

Afirmación
$\angle 1 \cong \angle 2$
$\angle 3 \cong \angle 4$
$\angle KBE$ y $\angle KBA$ forman par lineal
$m\angle KBE + m\angle KBA = 180$
$D \in \operatorname{int} \angle KBE \; y \; G \in \operatorname{int} \angle KBA$
$2m\angle 2 = m\angle KBE$
$2m\angle 3 = m\angle KBA$

[22] Definición de bisectriz: Si D está en el interior del $\angle BAC$, y $\angle BAD \cong \angle DAC$, entonces $\overrightarrow{AD}$ biseca al $\angle BAC$, y $\overrightarrow{AD}$ se llama bisectriz del $\angle BAC$.

[23] Postulado del par lineal: Si dos ángulos forman par lineal, entonces la suma de sus medidas es 180.

[24] Postulado de adición de medias de ángulos: Si D está en el interior del ángulo $\angle BAC$, entonces $m\angle BAC = m\angle BAD + m\angle DAC$, y de allí que $m\angle CAD = m\angle CAB - m\angle DAB$.

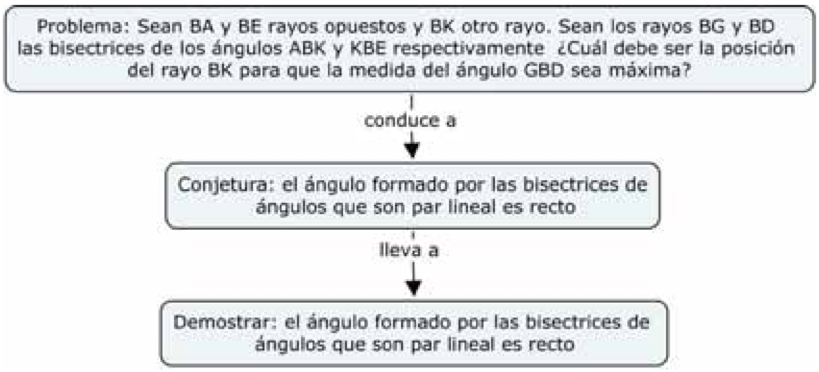
[25] Definición 1 de ángulo recto: un ángulo recto es aquel que su medida es de 90.

$2m\angle 2 + 2m\angle 3 = 180$

$m\angle DBG = 90$ (¿?)

Tabla 5

En el Esquema 4 ilustramos las relaciones entre la actividad matemática realizada y el contenido temático desarrollado. Aunque se formularon varias conjeturas, todas se refieren a la misma propiedad geométrica.



Esquema 4

EPISODIO 5: EXISTENCIA DE PERPENDICULAR POR PUNTO SOBRE RECTA

El episodio 5, Existencia de perpendicular por punto sobre recta, tuvo lugar en las clases 20 y 21 (marzo 22 y marzo 26 de 2007)[26] del curso de geometría plana. La unidad temática que se estaba desarrollando era la correspondiente a ángulos. Se habían incluido al sistema axiomático las definiciones de ángulos opuestos por el vértice, ángulos adyacentes, ángulos que son par lineal, ángulo recto, ángulos complementarios, ángulos suplementarios y bisectriz de un ángulo. También se habían institucionalizado los postulados de la medida de ángulos, de construcción de ángulos, de adición de medidas de ángulos y del par lineal. Adicionalmente, se habían elaborado las demostraciones de la congruencia de los ángulos opuestos por el vértice, de la equivalencia de dos definiciones de ángulo recto, y de la invarianza del ángulo que forman las bisectrices de ángulos que son par lineal.

En la primera sesión del episodio la profesora entregó una hoja con el siguiente problema y pidió a los estudiantes trabajar en parejas:

> Problema: Estudiar la situación, formular una conjetura y justificar la respuesta: Sean $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ rayos opuestos y AD otro rayo ¿Es posible determinar un punto E en el mismo semiplano en el cual está D, para el que el $\angle BAD$ sea complementario con el $\angle CAE$?

[26] Documentos primarios P54, P55 del archivo Ciclo-Cabri del programa AtlasTi.

Los estudiantes trabajaron el problema en Cabri, usando calculadoras. La profesora les pidió que propusieran una conjetura y su demostración. Como ningún grupo alcanzó a hacer la demostración, la profesora recogió las hojas de trabajo con las conjeturas propuestas y pidió a los estudiantes que se prepararán para defender la conjetura, ante sus compañeros, en la próxima sesión. A continuación hacemos una breve síntesis del trabajo desarrollado por tres grupos.

En el grupo compuesto por María y Efraín (Grupo B), Efraín hizo la construcción en Cabri sugerida en el enunciado, mientras que María hacía una representación en papel. Después de tener los tres rayos, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$, María releyó el enunciado del problema, dibujó en líneas punteadas un rayo cualquiera $\overrightarrow{AE}$ en el mismo semiplano que el rayo $\overrightarrow{AD}$ y expresó en voz alta que sí era posible encontrar un punto E que cumpliera la condición. Después le pidió a Efraín que midiera el $\angle DAB$ y calculara el valor de su complemento, para construir un ángulo con esa medida, usando el rayo AC como lado. Ella, por su parte, borró el rayo AE que había dibujado en línea punteada, y trazó otro rayo, $\overrightarrow{AE}$, de tal forma que el $\angle EAD$ pareciera un ángulo recto. Después, escribió la siguiente conjetura: "Dados dos ángulos complementarios y coplanares, $\angle DAB$ y $\angle CAE$ que comparten el vértice, que uno de sus lados es rayo opuesto del lado del otro, entonces el ángulo que forman los otros dos rayos es recto". Cuando Efraín terminó de hacer la construcción en Cabri, leyó la conjetura formulada por María y la aprobó.

Ignacio y Nancy (Grupo F) siguieron la misma estrategia de María y Efraín, pero ellos trabajaron colaborativamente sobre el programa Cabri. Ignacio iba accionando la calculadora y proponiendo la estrategia de construcción, y Nancy contribuía con sugerencias. Después de usar la medida del $\angle DBA$ para obtener el valor del ángulo complementario y construirlo, Nancy se dedicó a redactar una conjetura en la que afirmaba la existencia del punto E para los casos en los que el $\angle DAB$ fuera agudo. Ignacio, mientras tanto, arrastró varias veces el punto D y observó que el $\angle EAD$ era recto. Sugirió a Nancy complementar la conjetura con ese dato. La conjetura propuesta por Nancy e Ignacio quedó: "Si se tiene $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ opuestos y $\overrightarrow{AD}$ otro rayo tal que el $\angle BAD$ es agudo y el $\angle CAE$ con E en el mismo semiplano en el cual está D tal que $\angle BAD$ y $\angle CAE$ son complementarios, entonces el $\angle DAE$ es recto".

Leopoldo y Darío (Grupo C) también siguieron la misma estrategia, pero después de un proceso de discusión en el que Darío fue comprendiendo el problema a medida que intentaba explicárselo a Leopoldo. Como inicialmente él tampoco tenía claro cómo encontrar el punto E, las explicaciones, que daba a su compañero, eran incompletas y a veces contradictorias, lo que hizo que Leopoldo se limitara a seguir sus instrucciones y al final manifestara no haber comprendido. Al final de la sesión lograron hacer la construcción, pero no tuvieron tiempo de arrastrar al punto D para observar alguna propiedad; por eso su conjetura sólo aludía a que el $\angle DAB$ tenía que ser menor que 90: "Si es posible, siempre y cuando $0 < m\angle BAD < 90$".

Al terminar la sesión, la profesora recogió las hojas de trabajo con las conjeturas de nueve de los diez grupos[27] y las organizó para referirse a ellas en la siguiente clase, según el contenido de las mismas. Al comienzo de la segunda sesión del episodio, la profesora hizo un análisis de las conjeturas propuestas por cuatro grupos (C, I, F y H), a medida que las iba leyendo, no sin antes mencionar que todas las conjeturas eran valiosas. Comenzó con la conjetura propuesta por Darío y Leopoldo (Grupo C), mencionando que era una conjetura que casi todos los grupos habían formulado a manera de condición adicional a las indicaciones dadas en el enunciado del problema:

> Grupo C: "Si es posible, siempre y cuando $0 < m\angle BAD < 90$".

En efecto, según la profesora, si el $\angle BAD$ medía más de 90, no podría encontrarse un punto E para el cual el $\angle EAD$ fuera complementario (Figura 7).

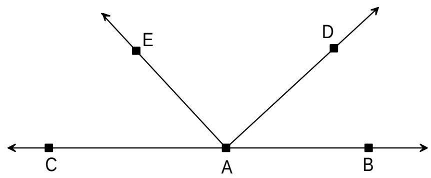


Figura 7

Después se refirió a la conjetura propuesta por Henry y Antonio (Grupo I):

> Grupo I: "Si tenemos el $\angle BAD$ y su medida es menos de 90, el número real correspondiente a la diferencia entre 90 y la medida del ángulo corresponde a la medida del ángulo complementario a $\angle BAD$".

La profesora mencionó que aunque era posible que Henry y Antonio hubieran encontrado alguna propiedad geométrica adicional la conjetura que escribieron correspondía a la definición de ángulos complementarios. Algo similar habían escrito como conjetura Luz y Marina (Grupo F), aunque ellas sólo habían hecho mención a la existencia de los ángulos, pero no a la manera como estos se obtenían:

> Grupo F: "Si $\angle A$ y $\angle B$ forman par lineal y $m\angle A$ o $m\angle B < 90$, entonces existe $\angle C$ en el mismo semiplano tal que $\angle A$ y $\angle C$ o $\angle B$ y $\angle C$ son complementarios".

Después, la profesora leyó la conjetura de Orlando, Melisa y Daniel (Grupo H) y mencionó que los estudiantes habían afirmado en su conjetura la existencia del punto E, pero no habían establecido alguna propiedad geométrica que permitiera hacer la construcción de este:

---

[27] El grupo J no alcanzó a escribir su conjetura.

Grupo H: "Si $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son rayos opuestos y $\overrightarrow{AD}$ otro rayo tal que m$\angle DAB$ < 90 entonces existe un punto $E \in S_{\overleftrightarrow{AB},D}$ tal que m$\angle DAB$ + m$\angle CAE$ = 90"

Les recordó que en el curso se había acordado justificar la existencia de objetos geométricos elaborando un procedimiento constructivo. Según se había convenido en discusiones previas, afirmar simplemente la existencia del punto *E* no garantizaba que éste existiera por lo que la afirmación no era productiva, desde el punto de vista del sistema axiomático que pretendían construir.

Las conjeturas de los grupos A, G y D fueron objeto de otro tratamiento puesto que ellas hacían propuestas de construcción y la profesora consideró importante compararlas con el procedimiento llevado a cabo. Para comenzar escribió en el tablero la conjetura de Jaime y Juan (Grupo A):

Grupo A: Si $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son opuestos y sea $\overrightarrow{AD}$, entonces existe un punto *E* en el semiplano en el cual está *D* tal que m$\angle EAD$ = 90 y $\angle EAC$ y $\angle DAB$ son complementarios.

Pidió a Juan proyectar la imagen de Cabri en la pared y narrar a los compañeros el procedimiento llevado a cabo. Juan explicó que ellos habían tomado la medida del $\angle DAB$, la sustrajeron de 90 y con el resultado construyeron el $\angle EAC$ (Figura 7), usando para ello la herramienta 'Rotación' de Cabri en el mismo semiplano donde estaba el punto *D*. Después dijo que al arrastrar el punto *D* vieron que la medida del $\angle EAD$ era siempre de 90.

La profesora preguntó al grupo si la conjetura propuesta por Juan y Jaime concordaba con el procedimiento de construcción. Se evaluó que ellos no habían escrito todas las condiciones iniciales en el antecedente (las "dadas" y las impuestas por construcción) pues, por ejemplo, el $\angle DAB$, agudo, había sido construido intencionalmente, lo mismo que el rayo *AE*. También se evaluó que en el consecuente de la conjetura aparecían condiciones impuestas a la construcción como la existencia del punto *E* y la complementariedad de los ángulos $\angle DAB$ y $\angle EAC$. Concluyeron que la única propiedad que surgió de la construcción y que podía considerarse como consecuente era que el $\angle EAD$ era recto.

Después se analizó la conjetura propuesta por Germán y Aníbal (Grupo G):

Grupo G: Si $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son rayos opuestos, $\angle BAD$ es agudo y $E \notin$ int$\angle BAD$ tal que m$\angle DAE$ = 90 entonces $\angle BAD$ y $\angle CAE$ son complementarios.

La profesora leyó la conjetura y pidió a los estudiantes explicar por qué *E* no podía estar en el interior del ángulo y cómo habían construido el $\angle DAE$. Aníbal hizo una representación en el tablero para mostrar que ellos pretendían evitar que el $\angle EAC$ quedara en el interior del $\angle EAB$. Después explicó que para obtener el $\angle DAE$ habían usado la opción 'Perpendicular' del menú de Cabri. Se analizó que la condición impuesta al punto *E* era innecesaria porque estaba garantizada por las demás propiedades sugeridas en el enunciado. Luego, la profesora pidió comparar el mecanismo de construcción sugerido por el grupo G en su conjetura, con el procedimiento propuesto por los grupos A y D. Para ello, leyó la conjetura de Ana y Juan (Grupo D):

> Grupo D: Solo es necesario que $\angle BAD$ debe ser agudo. Luego r = 90 - m$\angle BAD$. Con el rayo opuesto $\overrightarrow{AC}$ y este r podemos asignar esta medida al $\angle CAE$ de tal forma que m$\angle CAE$ es el complemento ya que aseguramos que r > 0.

La profesora explicó que el grupo G había escrito como antecedente del teorema que el $\angle EAD$ medía 90 y como consecuente que los ángulos $\angle DAB$ y $\angle EAC$ eran complementarios. El grupo A, en cambio, había puesto como consecuente ambas propiedades y el grupo D parecía sugerir que el antecedente de la conjetura era la complementariedad de los ángulos $\angle CAE$ y $\angle DAB$, aunque ellos no habían escrito un enunciado de la forma si-entonces. Estas conjeturas debían corresponder a uno de dos procedimientos: construir los ángulos complementarios o construir el ángulo $\angle EAD$ recto. El grupo G había usado la opción 'Perpendicular' para construir una recta perpendicular al $\overleftrightarrow{AD}$ por el punto A y así obtener el ángulo; es decir, su conjetura concordaba con la construcción.

Al estudiar la construcción hecha por Germán y Aníbal la profesora mencionó que en el sistema teórico que estaban construyendo aún no habían incluido un enunciado que permitiera afirmar la existencia de la recta perpendicular por un punto de ésta. Explicó que para poder justificar todos lo pasos de la construcción, debían demostrar, e incluir en el sistema, el siguiente teorema: 'Dada una recta m y un punto A sobre m, entonces existe una recta l tal que l es perpendicular a m'. [Notación: $l \perp m$]. Germán explicó que la demostración se basaba en la posibilidad de construir un ángulo de 90, para aprovechar la definición de rectas perpendiculares[28] e Ignacio mencionó, como justificación de la construcción, el postulado de la construcción de ángulos[29].

Antes de terminar la sesión, la profesora leyó las conjeturas de María y Efraín (Grupo B) y de Nancy e Ignacio (Grupo E) y pidió compararlas con la conjetura del grupo G. Se evaluó que ambos grupos habían reportado conjeturas que concordaba con la construcción, aunque el enunciado del problema preguntaba por una forma de llegar a tener los dos ángulos complementarios. Según la profesora, la conjetura del grupo G era la que estaba más cercana a la pregunta del problema. Así quedaron revisadas todas las conjeturas propuestas.

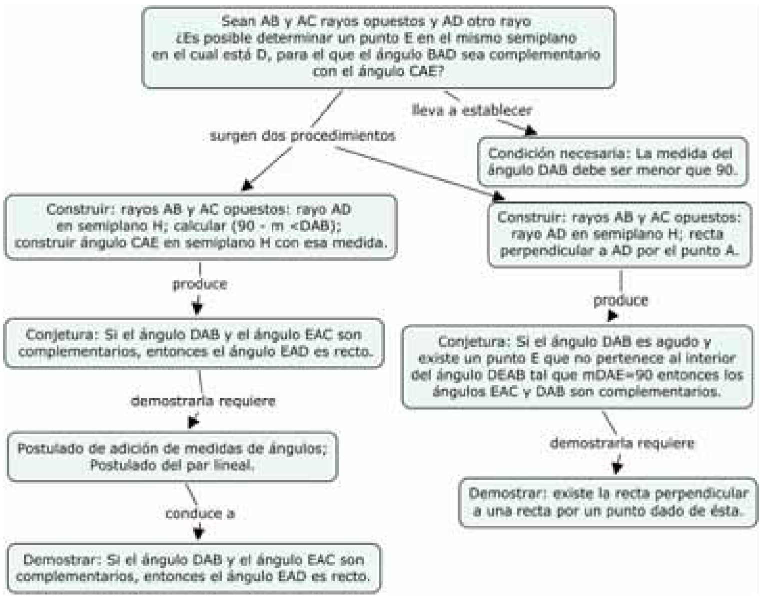
En el Esquema 5 ilustramos las relaciones entre la actividad matemática realizada y el contenido temático desarrollado. El problema condujo inicialmente al establecimiento de una condición inicial necesaria. Después, se llevaron a cabo dos

---

[28] Rectas perpendiculares: dos rectas son perpendiculares si forman un ángulo de 90.

[29] Postulado de la construcción de ángulos: Sea $\overrightarrow{AB}$ un rayo de la arista del semiplano H. Para cada número r entre 0 y 180, hay exactamente un $\overrightarrow{AP}$ con P en H, tal que $m\angle PAB = r$.

procedimientos diferentes, que llevaron a dos conjeturas prácticamente recíprocas. La segunda de ellas fue aprovechada por la profesora para introducir el teorema de la existencia de la perpendicular por un punto de una recta.



Esquema 5

EPISODIO 6: EXISTENCIA DE PERPENDICULAR POR PUNTO EXTERNO A RECTA

El episodio 6, Existencia de perpendicular por punto externo a recta, tuvo lugar en las clases 23, 25 y 27 (marzo 29, abril 9 y abril 12 de 2007)[30] del curso de geometría plana, dos clases después de haber comenzado la unidad temática "triángulos". En las unidades anteriores "rectas y puntos", "plano" y "ángulos" se había avanzado en la construcción colectiva del sistema axiomático demostrando teoremas fundamentales para constituir una versión euclidea de geometría plana, centrada en definiciones como las de interestancia, segmento, rayo, rectas perpendiculares y ángulo y en postulados que permitían establecer una correspondencia entre los números reales y los puntos de la recta y entre los números reales entre 0 y 180 y la medida de los ángulos. Al momento de comenzar el episodio 6 se había acordado la definición de triángulo y se habían establecido los criterios de congruencia lado-lado-lado, lado-ángulo-lado y ángulo-lado-ángulo. También se había realizado un trabajo en Cabri tendente a verificar que la congruencia lado-lado-ángulo no era un criterio de congruencia. Además, en la clase del 10 de abril se introdujo la definición de altura de un triángulo[31].

---

[30] Documentos primarios P60 y P64 del archivo Ciclo-Cabri del programa AtlasTi.

[31] En un problema puesto a los estudiantes en la clase del 10 de abril, que dio lugar al episodio 7, se introdujo la definición de altura de un triángulo y la profesora mencionó que

En la primera sesión del episodio, la profesora entregó a los estudiantes el siguiente enunciado para que ellos usaran Cabri, establecieran conjeturas e intentaran justificarlas:

> Problema: $\overleftrightarrow{PC} \perp \overleftrightarrow{KM}$, con *K-P-M*. Sea *A* un punto $S_{\overleftrightarrow{KM},C} \cap S_{\overleftrightarrow{PC},K}$.
>
> ¿Cómo se determina la posición de un punto *B* para que $\Delta ACP \cong \Delta BCP$? Justifique su respuesta.

Los estudiantes tenían a su disposición las calculadoras con el programa Cabri y debían resolver el problema en parejas. La profesora insistió en la importancia de escribir los pasos claves de la construcción y la conjetura. A continuación hacemos una breve síntesis de lo que hicieron María y Efraín.[32]

María y Efraín[33] construyeron el triángulo *ACP* de acuerdo a las condiciones dadas. Efraín accionaba la calculadora y María le iba dando las indicaciones a medida que leía el enunciado. María releyó la pregunta y luego mencionó que el lado *PC* debía ser común a los dos triángulos que había que construir, por lo que podrían usar un criterio de congruencia que incluyera la congruencia de un par de lados. Efraín propuso trazar una perpendicular a la recta *PC*, por el punto *A* y transferir la distancia de *A* a la recta *PC*, sobre la perpendicular, para ubicar a *B* en otro semiplano. Aunque no rechazó la propuesta explícitamente, María no la acogió inicialmente. Ella estaba buscando una construcción que pudiera justificarse teóricamente con los criterios de congruencia de triángulos. Sugirió construir ángulos congruentes a los ángulos $\angle APC$ y $\angle ACP$ usando como lados los rayos *PC* y *CP* respectivamente. El punto *B* estaría en el corte de los lados no comunes de los ángulos. Con ello, garantizaba la congruencia con el criterio ángulo-lado-ángulo. Efraín construyó el ángulo congruente al $\angle APC$ pero tuvo dificultades para construir el ángulo con vértice en *C* (porque no sabía que vector señalar para hacer la rotación); entonces optó por hacer la perpendicular a la recta *PC* por el punto *A* y tomar el punto de corte de esa recta con el lado del ángulo recién construido, para hallar *B* (Figura 8).

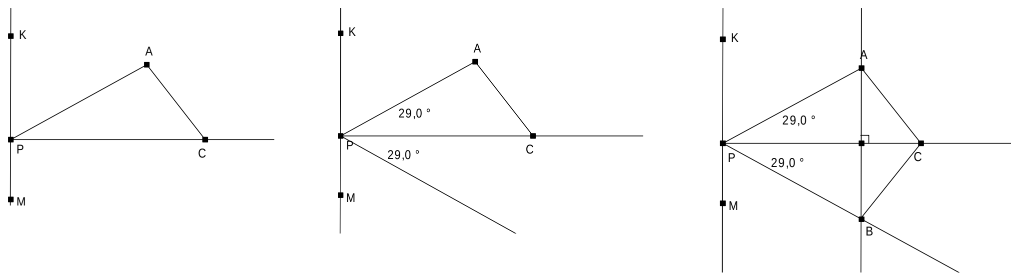


Figura 8

---

quedaba pendiente la demostración de su existencia para poder incluirla como un objeto geométrico del sistema axiomático.

[32] Por problemas técnicos fue imposible registrar el trabajo de otros dos grupos.

[33] Video: CD 31, video 3. En este episodio, es el único grupo del cual tenemos grabación de la interacción entre los dos estudiantes. Ese día no hubo posibilidad de filmar los otros dos grupos.

La sesión se vio interrumpida abruptamente por disturbios estudiantiles y ningún grupo logró demostrar la conjetura. La profesora recogió las hojas con las descripciones de la construcción y las conjeturas formuladas por ocho de los diez grupos.

En la segunda sesión de este episodio la actividad se concentró en el análisis de algunas descripciones de las construcciones hechas y de algunas conjeturas propuestas, identificando si la descripción estaba hecha de manera comprensible y completa, si la conjetura concordaba con la construcción que los estudiantes reportaban y si era admisible. Para organizar la sesión, la profesora había elaborado una diapositiva con las descripciones o conjeturas, propuestas textualmente o mediante una síntesis de éstas, elaborada por ella. A medida que se refería a la descripción o conjetura formulada por algún grupo, la iba proyectando en la pared. Adicionalmente, hizo una representación en el tablero con la información contemplada en el enunciado del problema (Figura 9) a la que llamó: “construcción inicial”; todos los grupos habían comenzando con una figura similar.

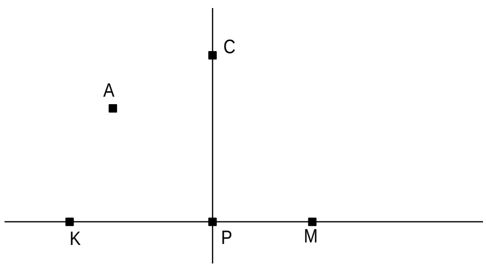


Figura 9

Después de hacer la construcción inicial, la profesora leyó la pregunta del problema y mencionó que “determinar la posición del punto *B*” significaba establecer el procedimiento constructivo para hallar a *B*; de eso debía tratar la conjetura. En ese sentido, según ella, la descripción hecha por el grupo J (Gonzalo y William) y la conjetura formulada por el grupo E (Ignacio y Nancy) no eran muy útiles para los intereses del curso, pues no era claro el hecho geométrico que se pudiera discutir o demostrar:

> Grupo J - descripción: “se construyen dos circunferencias con radio en dos segmentos”.
>
> Grupo E - conjetura: “Si en un triángulo conocemos la medida de cada uno de sus lados, podemos construir otro triángulo congruente que comparta un lado con el triángulo dado”.

Luego hizo referencia a la descripción de la construcción hecho por el grupo F (Luz y Marina). Las estudiantes proponían construir una recta paralela a la recta *KM* que pasara por *C*. Tal cómo había sucedido en un problema anterior (Episodio 3), las estudiantes de este grupo querían introducir la noción de paralelismo. La profesora explicó que, aunque ella valoraba que se propusieran ideas originales, ya que esas ideas iban a ser el origen de nuevos enunciados del sistema, en ciertas ocasiones ella tenía que "frenar" la introducción de nuevos conceptos para lograr una mejor organización del contenido del curso. El concepto de paralelismo iba a ser trabajado un poco más adelante en el curso.

A continuación, la profesora leyó la propuesta del grupo *A* que fue resumida por ella de la siguiente forma:

> Grupo A - descripción: Construyen un ángulo congruente al ángulo *APC* con lado *PB.* Construyen las rectas *AC, BC* y *BA* haciendo *D* el punto de intersección de recta *BA* con recta *PC*. Obtienen el triángulo *PAC* congruente con el triángulo *PCB*, el triángulo *ADC* congruente con el triángulo *DCB* y el triángulo *APD* congruente con el triángulo *PDB*.

Al tratar de hacer una representación geométrica siguiendo la descripción (Figura 10), se puso en evidencia que el grupo *A* no había explicado dónde ubicar el punto *B*. Si se tomaba cualquier punto del plano, no necesariamente se iban a tener los triángulos congruentes que los estudiantes decían que habían obtenido. En ese sentido la descripción estaba incompleta.

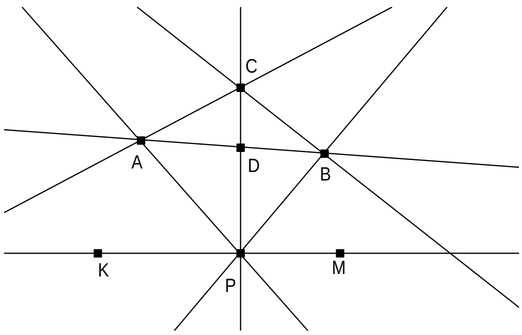


Figura 10

Después se hizo referencia a las construcciones de los grupos G (Germán y Aníbal) e I (Henry y Antonio); la profesora pidió analizar si las construcciones podían justificarse con los elementos disponibles en el sistema axiomático, a la vez que hacía una representación en el tablero:

> Grupo G – descripción: Construyen *B* en el semiplano mencionado tal que el $\angle CPB$ sea congruente al $\angle CPA$ y con $AP = PB$.
>
> Grupo I – descripción: construyen $\angle CPN$ tal que la medida del $\angle CPN$ sea igual a la medida del $\angle CPA$. Localizan sobre el rayo *PN* al punto *B* tal que $AP = BP$.

Germán respondió afirmativamente y adicionalmente agregó que él y su compañero podían demostrar que si se hacía la construcción de esa manera, los triángulos *ACP* y *BCP* eran congruentes. Aníbal hizo referencia al uso del criterio de congruencia lado-ángulo-lado (Figura 11). Entre Henry, Antonio y Germán justificaron cada uno de los pasos de la construcción con enunciados del sistema axiomático.

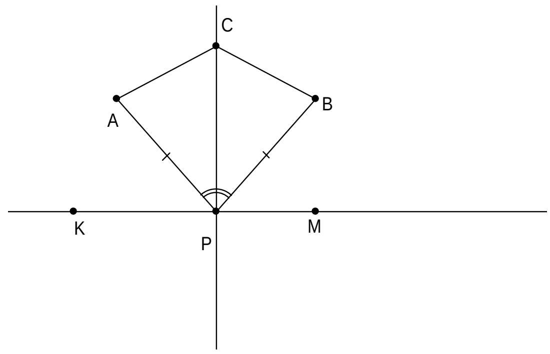


Figura 11

Aún faltaba por discutir las construcciones de los grupos C (Darío y Leopoldo) y B (María y Efraín). La profesora proyectó en una diapositiva una síntesis de las descripciones hechas por los estudiantes:

> Grupo C - descripción: "*B* debe estar sobre una recta perpendicular a la recta *PC* que contenga a *A*. Llamemos *X* la intersección entre recta *PC* y la perpendicular. La medida de *XA* debe ser igual a *XB*".
>
> Grupo B – descripción: Construyen un ángulo congruente al ángulo *APC* con lado *PC*; trazan la perpendicular a la recta *PC* por el punto *A*; la intersección de la recta perpendicular con el rayo del ángulo construido es *B* y la intersección con la recta *CP* es el punto *Q*.

Ante la pregunta por la correspondencia de los pasos de estas construcciones con los enunciados del sistema María cayó en cuenta que ya se había demostrado la existencia de la perpendicular a una recta por un punto de ésta, pero no por un punto externo. Dejaron pendiente la demostración de ese teorema y, asumiendo temporalmente que el enunciado era demostrable con los elementos del sistema, analizaron por qué razón las construcciones sugeridas por los grupos C y B daban lugar a los triángulos congruentes pedidos. La profesora explicó que en el caso de la construcción del grupo C la congruencia se garantizaba por el criterio lado-ángulo-lado (Figura 12) y en el caso del grupo B la congruencia se lograba aplicando el criterio ángulo-lado-lado[34] (Figura 13).

---

[34] Realmente, en la construcción del grupo C hay que aplicar dos veces el criterio lado-ángulo-lado: primero para mostrar la congruencia de los triángulos APX y BPX y luego para mostrar la congruencia de los triángulos pedidos. En la construcción del grupo B hay que aplicar primero el criterio ángulo-lado-ángulo para mostrar la congruencia de los triángulos AQP y BQP, luego la congruencia lado-ángulo-lado para mostrar la congruencia de los triángulos APQ y BPQ y finalmente el criterio lado-lado-lado para lograr la congruencia de los triángulos enunciados en el problema.

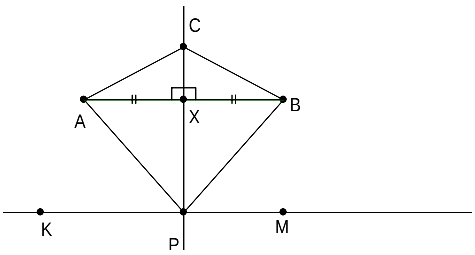


Figura 12

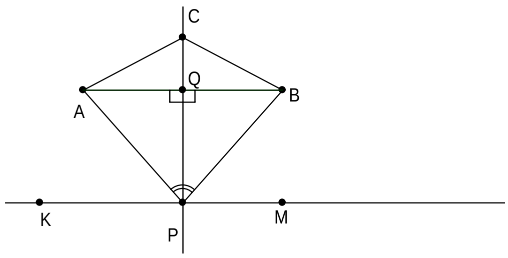


Figura 13

En la tercera sesión del episodio 6 la profesora retomó la tarea de demostrar que existía la perpendicular a una recta por un punto externo de ésta. Representó una recta *m* y un punto *P* externo a ella y pidió a los estudiantes pensar, durante unos minutos, cómo hacer la demostración. Al cabo de un tiempo Orlando propuso usar el punto *P* y dos puntos de la recta para construir un triángulo y trazar su altura; esta sería la perpendicular. Discutieron sí la propuesta era viable hasta que María argumentó que para poder garantizar la existencia de la altura, precisamente se necesitaba el teorema que se iba a demostrar. Descartaron la propuesta, pero esta fue útil porque Orlando introdujo la idea de hacer una construcción auxiliar. Pasado un tiempo, Jaime y Juan sugirieron construir un triángulo usando el punto P y dos puntos de la recta como vértices; la propuesta fue ampliada por Daniel y Melisa quienes propusieron construir el triángulo de tal manera que éste resultara isósceles para poder referirse a la altura de un triángulo de este tipo. La profesora descartó la sugerencia dado que hasta el momento no habían estudiado el triángulo isósceles, y sus propiedades, para poder usarlo. Les recordó que debían usar elementos teóricos disponibles en el sistema o construcciones justificables con la teoría.

Al ver que algunos grupos estaban haciendo construcciones sin un rumbo fijo, la profesora les pidió que pensaran qué enunciados del sistema axiomático tenían como conclusión alguna afirmación relacionada con rectas perpendiculares, o con ángulos de medida 90. Ana y Germán recordaron una de las definiciones de ángulo recto que habían estudiado en clases anteriores: si un ángulo formaba par lineal con otro y era congruente a este, era un ángulo recto. Melisa explicó que la idea que Daniel y ella habían tratado de exponer era precisamente hacer un triángulo isósceles para que la bisectriz formara un par lineal con la recta *m*.

Pasados unos minutos Aníbal sugirió tomar dos puntos *X, Z* en *m,* construir un segmento cualquiera *PX*, con *X* en *m*, tomar la medida del $\angle PXZ$ y construir un $\angle\ TXZ$ con la misma medida (Figura 14).

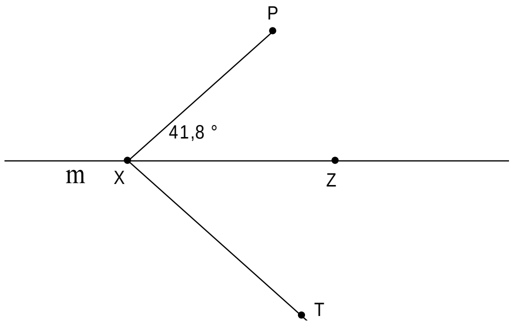


Figura 14

Aníbal quiso seguir con su propuesta pero la profesora le pidió permitir a otros estudiantes imaginarse qué podría seguir. Ana sugirió transferir la medida *XP* en el rayo *XT* y construir el segmento *XN* congruente a $\overline{XP}$, Henry propuso unir los puntos *P* y *N* y Ana mencionó al punto de corte de la recta *m* con el segmento *PN* (Figura 15).

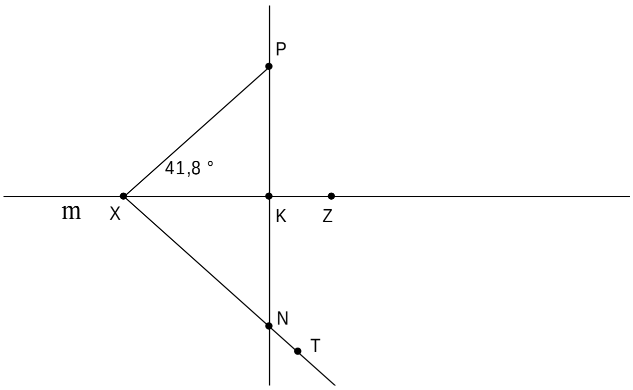


Figura 15

Discutieron por qué se podía garantizar que la recta *m* se cortaba con el segmento *PN*. Después, Melisa elaboró un argumento deductivo que incluyó la congruencia del $\angle PKX$ y el $\angle NKX$ y la congruencia del par lineal $\angle XKP$ y $\angle XKN$. La profesora pidió justificar por qué se podía afirmar la existencia del par lineal. Ignacio y María contribuyeron con ideas para esa justificación, mostrando que estaban dadas las condiciones para poder declarar la existencia del par lineal[35]. Finalmente se concluyó que el $\angle XKP$ era recto y por lo tanto la recta *PK* era perpendicular a la recta *m*. La profesora había ido escribiendo algunas afirmaciones en el tablero (Tabla 6) pero les dijo a los estudiantes que ese era un esbozo de la demostración y que ellos debían completarla cuidadosamente, incluyendo las afirmaciones que hacían falta y todas las justificaciones. Los nombres de algunos ángulos se cam-

[35] Definición de par lineal: si $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AD}$ son rayos opuestos y $\overrightarrow{AC}$ es otro rayo cualquiera, entonces $\angle BAC$ y $\angle CAD$ forman un par lineal.

biaron por números para facilitar la escritura de las afirmaciones. Estas se basan en una representación como la Figura 16.

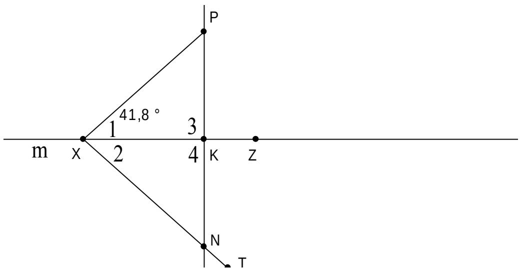


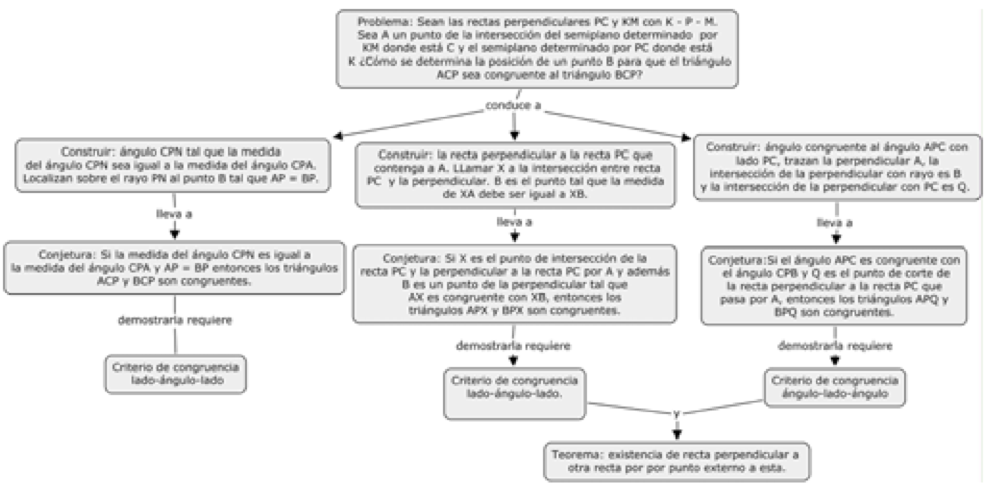
Figura 16

Algunas afirmaciones:

1. Construcción de $\angle 2$ tal que $\angle 1 \cong \angle 2$, T no pertenece a semiplano determinado por m, donde está *P*.
2. Sea *N* que pertenece a rayo *XT* tal que $XN = XP$.
3. Sea recta *PN*
4. $\Delta PXK \cong \Delta NXK$ lado-ángulo-lado.
5. $\overline{PN} \cap m \neq \varnothing$
6. $K \in \overline{PN} \cap m$
7. $P - K - N$
8. Rayo *KP* opuesto a rayo *KN*
9. $X \notin$ recta *PN*
10. $\angle 3$ y $\angle 4$ forman par lineal
11. $\angle 3$ es recto
12. Recta *PK* perpendicular a *m*.

Tabla 6

En el Esquema 6 ilustramos las relaciones entre la actividad matemática realizada y el contenido temático desarrollado. El problema condujo a tres formas de construcción que derivaron en tres conjeturas diferentes. Dos de ellas, requerían haber demostrado el teorema de la existencia de la perpendicular por punto externo a una recta, por lo que éste se demostró e incluyó en el sistema.



Esquema 6

EPISODIO 7: TRIÁNGULO ISÓSCELES-ALTURAS CONGRUENTES

El episodio 7, Triángulo isósceles – alturas congruentes, se desarrolló a lo largo de nueve clases entre abril 10 y mayo3 de 2007[36]. El desarrollo temático se llevó a cabo intercalado con otros episodios (algunos de ellos caracterizados por una interacción Ciclo-Cabri y otros no), en sesiones cortas de las clases mencionadas. El problema que dio comienzo al episodio, junto con el que dio lugar al episodio 8, dio pie para el estudio de propiedades fundamentales del triángulo isósceles y para la ampliación del sistema axiomático con nuevos enunciados relacionados con propiedades de los triángulos. Por su extensión y complejidad dividimos la descripción en ocho partes:

1) Definición de altura de un triángulo (P62)
2) Estudio del problema central y formulación de conjeturas (P62).
3) Análisis de las conjeturas en relación con el procedimiento de construcción o de la formulación hecha (P66).
4) Intentos de demostración de la conjetura principal, que llamaremos C1: si un triángulo es isósceles, las alturas correspondientes a los lados del triángulo son congruentes (P66, P73, P75).
5) Demostración del teorema del triángulo isósceles (P66).
6) Demostración del teorema recíproco del teorema del triángulo isósceles (P73, P80).
7) Demostración de la conjetura C1 y de su recíproca. (P83, P84).
8) Revisión de la demostración de la conjetura C1 (P87, P90, P93)

1) Definición de altura de un triángulo (P62):

El problema que dio lugar al episodio fue propuesto por la profesora en la clase de abril 10. Era el siguiente:

> Problema: 1. Estudiar la relación entre el tipo de triángulo y la propiedad: dos de sus alturas son congruentes. Escribir: a. el proceso de construcción; b. las conjeturas que se establecen.

Tan pronto leyó el problema, Leopoldo preguntó a la profesora qué se iba a entender en el curso por altura de un triángulo. Esta pregunta motivó un trabajo colectivo de escritura de la definición. Efraín y Jorge hicieron mención a la altura como una distancia, por lo que la profesora preguntó si la altura era un número o un objeto geométrico. Optaron por considerarla objeto geométrico y la profesora explicó que algunos textos de geometría se referían a este objeto como una recta y otros como un segmento; ellos la iban a considerar como un segmento. La profe-

[36] Documentos primarios P62, P66, P73, P74, P75, P80, P83, P84, P87, P90, P93 del archivo Ciclo-Cabri del programa AtlasTi.

sora propuso una definición que fue cuestionada por Darío. Entre la profesora, Jorge, Ignacio y María redactaron la definición que quedó establecida de la siguiente manera:

> *Definición de altura de un triángulo:* segmento, uno de cuyos extremos es un vértice del triángulo, es perpendicular a la recta que contiene el lado opuesto y el otro extremo está en dicha recta.

La profesora les recordó que la definición no garantizaba la existencia por lo que debían demostrar que existía el segmento perpendicular a una recta que pasaba por un punto externo a ésta; Como este teorema estaba pendiente de demostrar, (pues había surgido a raíz de las construcciones propuestas por algunos estudiantes en el episodio 6[37]), se asumió provisionalmente como demostrado, para poder admitir el uso de la herramienta de Cabri, 'Recta perpendicular', al construir la altura de un triángulo.

2) Estudio del problema y formulación de conjeturas (P62):

Después de leer el problema, los estudiantes trabajaron en grupos en su resolución, en la sala de computadores. Un integrante de cada grupo usó el programa Cabri de los computadores y otro hizo las mismas construcciones en la calculadora, por si había necesidad de recurrir a ellas posteriormente, cuando la clase no se hiciera en la sala. Algunos estudiantes tuvieron dificultades para construir las alturas de un triángulo, pero en general, todos los grupos resolvieron el problema y formularon conjeturas. En la socialización del trabajo realizado se reportaron tres procedimientos de solución diferentes, los cuales describimos a continuación.

El primero consistió en construir triángulos de diferentes tipos (equilátero, isósceles, escaleno), trazar dos de sus alturas y revisar si eran congruentes. Este fue el procedimiento usado por los grupos B (María y Efraín) y J (William y Gonzalo). Después de hacer las construcciones, María y Efraín usaron el arrastre para modificar el tamaño de los lados y los ángulos de los triángulos; así comprobaron que dos alturas permanecían congruentes en los triángulos isósceles, y las tres en los equiláteros. El video muestra que ellos hicieron un triángulo escaleno, un triángulo equilátero y un triángulo isósceles rectángulo. En el caso del triángulo equilátero usaron la herramienta 'Polígono regular' violando la norma de usar sólo herramientas con soporte teórico[38]. En el caso del triángulo rectángulo isósceles dibujaron un segmento y luego usaron la herramienta 'Rotación' para construir un ángulo de 90 grados. La conjetura de María y Efraín fue: "si un triángulo es isósceles dos de sus alturas son congruentes y si el triángulo es equilátero sus alturas son congruentes".

[37] El episodio 7 comienza cuando ya se han desarrollado las dos primeras sesiones del episodio 6, pero no la tercera, que es donde se demuestra el teorema de la existencia de la perpendicular a una recta que pasa por un punto externo a ésta y se justifica, a partir de dicho teorema, que existe el segmento perpendicular.

[38] Este hecho no fue objeto de discusión en el episodio pues éste se centró en el caso de los triángulos isósceles.

El segundo procedimiento consistió en construir un triángulo cualquiera, trazar dos alturas, medirlas y luego arrastrar los vértices del triángulo hasta lograr que fueran congruentes. Así, los estudiantes encontraron que esto sucedía cuando el triángulo era isósceles. Este fue el procedimiento llevado a cabo por los grupos C (Darío y Leopoldo) y E (Nancy e Ignacio), aunque estos últimos construyeron después un triángulo isósceles y comprobaron que efectivamente las alturas a los lados congruentes eran congruentes. En el video donde registramos el trabajo de Darío y Leopoldo se aprecia que ellos se dieron cuenta que el triángulo debía ser isósceles pero inicialmente no relacionaron a qué lados correspondían las alturas congruentes. Finalmente cayeron en cuenta que las alturas congruentes eran aquellas que correspondían a los lados que medían lo mismo. La conjetura del grupo C fue: "si un triángulo tiene dos lados congruentes entonces dos de sus alturas son congruentes". La Tabla 7 resume el proceso de construcción seguido por Darío y Leopoldo. En la columna de la derecha escribimos los enunciados del sistema axiomático que dan soporte matemático a la herramienta usada.

Pasos en la construcción	Herramienta Cabri usada	Soporte teórico
1. Representar los puntos no alineados *A, B, C.*	1. Punto.	1. Postulado P1: El plano y las rectas son conjuntos de puntos.
2. Trazar las rectas $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BC}$ y $\overleftrightarrow{AC}$	2. Recta.	2. Postulado P3: Dados dos puntos, existe una única recta que los contiene.
3. Representar los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$.	3. Segmento.	3. Definición D6: El segmento $\overline{AB}$ es el conjunto de puntos *A, B,* y todos los puntos entre[39] *A* y *B*.
4. Trazar la recta perpendicular a la recta *AB*, por el punto *C* y la perpendicular a la recta *AC* por el punto *B*.	4. Recta perpendicular.	4. Teorema: existencia de la perpendicular por punto externo a una recta (Demostración pendiente)
5. Representar los puntos *D* y *E* de corte de las rectas *AB* y *AC* con las perpendiculares.	5. Punto de intersección.	5. Teorema: La intersección de dos rectas que se cortan es un único punto.
6. Medir los segmentos $\overline{BD}$ y $\overline{CE}$	6. Distancia y longitud.	6. Postulado: correspondencia puntos – números.

Tabla 7

El tercer procedimiento fue realizado por los grupos I (Antonio y Henry) y D (Jorge y Ana[40]). Jorge y Ana representaron un triángulo *ABC*, construyeron las

[39] Definición D4 de "interestancia": El punto B está entre los puntos A y C si A, B y C son colineales y sus distancias verifican la siguiente ecuación AB + BC = AC. Notación: A-B-C.

rectas *AB* y *CB*, tomaron dos puntos (que llamaremos *E* y *D*) respectivamente uno en cada recta por fuera del triángulo y trazaron perpendiculares a las rectas por *D* y *E*. Después, sobre la recta perpendicular a la $\overleftrightarrow{CB}$, que pasaba por *D*, tomaron un punto *H1*, midieron la longitud del segmento $\overline{DH1}$ y transfirieron la medida a la recta perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$ a partir del punto *E*. Construyeron los segmentos congruentes $\overline{DH1}$ y $\overline{EH2}$, que iban a ser las alturas del triángulo (Figura 17 (a)). Después, arrastraron los puntos *D, E, A, B* y *C* hasta lograr que *H1* coincidiera con *A* y *H2* coincidiera con *C* (Figura 17 (b)). Observaron que el triángulo *ABC* resultaba isósceles.

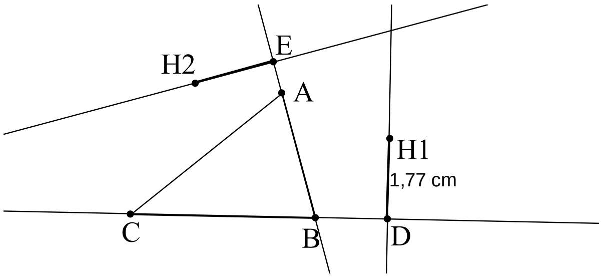


Figura 17 (a)

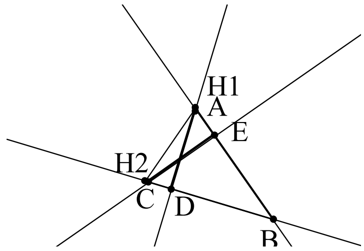


Figura 17 (b)

Todos los pasos de la construcción hecha por Jorge y Ana, excepto el arrastre, tenían soporte teórico en enunciados del sistema. La conjetura de este grupo (D) fue: “Si en un triángulo dos de sus alturas son congruentes entonces dicho triángulo es isósceles, y los lados congruentes son aquellos que están contenidos en las rectas perpendiculares a las alturas respectivas”.

3) Análisis de las conjeturas en relación con el procedimiento de construcción o de la formulación hecha (P66)[41].

La profesora organizó el material entregado por los estudiantes y preparó un acetato con algunas de las conjeturas planteadas, para proyectarlo en la pared. En la clase del 12 de abril, antes de mostrar alguna conjetura, pidió a los integrantes de los grupos C y E leer las descripciones que habían escrito como construcción y las conjeturas establecidas. Leopoldo leyó: “**Construcción:** Se construyó el triángulo *ABC*, luego las alturas del triángulo y mediante el arrastre se logró que dos de las alturas fueran congruentes**. Conjetura**: Si un triángulo tiene dos lados congruentes entonces dos de sus alturas son congruentes”. La profesora nombró con la letra *p* la proposición: “lados congruentes del triángulo” y con la letra *q*: “dos alturas congruentes”. Pidió establecer el enunciado condicional correspondiente a la conjetura y analizar la correspondencia con la construcción. Leopoldo cayó en cuenta que su conjetura no concordaba con la construcción. Después, Ignacio leyó: “**Construcción:** Construimos un triángulo con dos lados congruentes. Trazamos

[40] CD75 video 1. No tenemos registros ni evidencias de lo que hicieron los grupos que no se mencionan.

[41] CD35 video 3.

las alturas. **Conjetura:** Si un triángulo tiene dos alturas congruentes entonces el triángulo tiene congruentes los lados opuestos a los vértices de las alturas". También en este caso los estudiantes se dieron cuenta que no había concordancia entre la construcción y la conjetura. La profesora les recordó la importancia de fijarse en qué era lo que uno controlaba al arrastrar para ver qué condiciones imponía a la figura voluntariamente y cuáles surgían. Mencionó que en esta exploración era muy complicado pretender partir de dos alturas congruentes, lo que motivó a Juan a explicar su construcción y su conjetura. Se evaluó que la conjetura del grupo D concordaba con la construcción.

Después de revisar las conjeturas de los grupos C, E y D, en relación con las construcciones, la profesora pidió a los estudiantes analizar las conjeturas de los grupos F y C para establecer, independientemente de la concordancia con la construcción, si estaban bien formuladas y si eran correctas.

> Grupo F: Si *ABC* es un triángulo y la medida de uno de sus ángulos es mayor a 90 y los lados que determinan este ángulo son congruentes entonces el triángulo es isósceles y dos de sus alturas son congruentes.
>
> Grupo C: Si un triángulo tiene dos lados congruentes entonces dos de sus alturas son congruentes.

Algunos estudiantes evaluaron que la conjetura del grupo F agregaba una condición innecesaria al triángulo y que a ambas les faltaba aclarar cuáles eran las alturas congruentes. Después, la profesora presentó en una diapositiva la descripción de la construcción y las conjeturas propuestas por el grupo J (William y Gonzalo) y resaltó el trabajo organizado y sistemático que habían realizado los estudiantes. En la diapositiva estaba escrito:

> Grupo J: **Construcción:** 1. Se creó ΔABC escaleno. Se crearon $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BC}$ y $\overleftrightarrow{AC}$. Se crearon las alturas usando rectas perpendiculares con puntos exteriores a las rectas que en este caso son los vértices del ΔABC. 2. Triángulo isósceles: Se realizó el mismo proceso que el anterior triángulo pero con la característica que dos de sus lados sean congruentes.3. Triángulo equilátero: En este caso, construimos un triángulo con sus tres lados congruentes mediante la opción 'Polígono regular'. Luego construimos las alturas usando rectas perpendiculares desde cada vértice hacia el lado opuesto. **Conjeturas:** 1. Si todos los lados de un triángulo son diferentes o no son congruentes ninguna de sus alturas es congruente a ninguna otra. 2. Si hay un triángulo con dos lados congruentes entonces dos de sus alturas son congruentes. 3. Si existe un triángulo con sus tres lados congruentes entonces las tres alturas correspondientes son congruentes. CONJETURA: Si un triángulo tiene al menos dos lados congruentes entonces al menos dos de sus alturas son congruentes.

En síntesis, la profesora mencionó que la resolución del problema condujo a tres conjeturas: (i) si un triángulo es isósceles, entonces las alturas correspondientes a los lados congruentes son congruentes, (ii) si un triángulo tiene dos alturas congruentes, entonces es isósceles, (iii) si el triángulo es equilátero, tiene las alturas congruentes. El episodio se centró en la demostración de las dos primeras.

4) Intentos de demostración de la conjetura (C1): si un triángulo es isósceles, las alturas correspondientes a los lados del triángulo son congruentes (P66, P73, P75)

En la clase del 12 de abril, se comenzó a demostrar la conjetura C1: si un triángulo es isósceles, las alturas correspondientes a los lados congruentes son congruentes, pero surgió el primer obstáculo. Algunos estudiantes consideraban necesario afirmar que en un triángulo isósceles los ángulos opuestos a los lados congruentes eran congruentes. Esta necesidad llevó a suspender el trabajo de demostración de la conjetura C1 para demostrar el teorema del triángulo isósceles y su recíproco. El primero se demostró el mismo día, pero el segundo fue objeto de varias sesiones de clase.

En la clase del 17 de abril, después de la socialización de varios intentos de demostración del teorema recíproco del teorema del triángulo isósceles se realizaron nuevos intento de demostración de la conjetura C1. Como ya se disponía del teorema del triángulo isósceles, algunos estudiantes querían usarlo para justificar la congruencia de los triángulos *ACD* y *CAF* (Figura 18) pero se dieron cuenta que necesitaban nuevas propiedades de los triángulos, como por ejemplo, que la congruencia ángulo-ángulo-lado fuera un criterio de congruencia. Como ese criterio no estaba demostrado, desistieron de la propuesta de demostración.

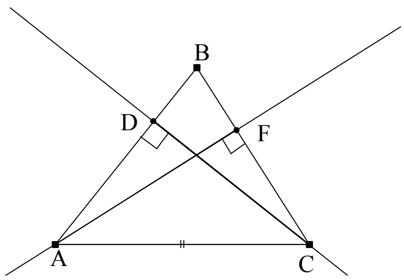


Figura 18

El 19 de abril se realizó un nuevo esfuerzo para demostrar la conjetura C1. En la Tabla 8 resumimos la producción de la demostración hasta donde se llegó ese día. Nuevamente, los estudiantes concluyeron que tenían que demostrar que la congruencia ángulo-ángulo-lado era un criterio de congruencia. El trabajo se basó en una representación como la de la Figura 19.

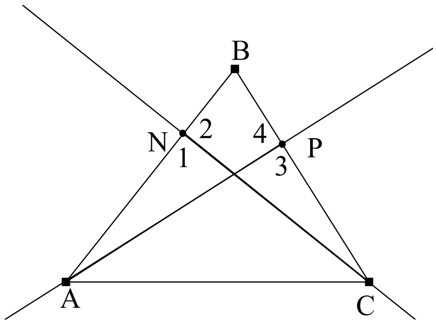


Figura 19

Afirmación	Justificación
1. ΔABC es isósceles con $\overline{AB} \cong \overline{BC}$	1. Dado.
2. Segmentos CN y AP son dos alturas del triángulo.	2. Dado.
3. Los segmentos $\overline{CN} \perp \overleftrightarrow{AB}$, $\overline{AP} \perp \overleftrightarrow{BC}$	3. Definición de altura y afirmación 2.
4. $\angle 1$ y $\angle 3$ son rectos	4. Definición de recta perpendicular y afirmación 3.
5. $\angle 2$ y $\angle 4$ son rectos	5. Teorema: si dos rectas forman un ángulo recto, entonces forman cuatro ángulos rectos y afirmación 4.
6. $\angle 1 \cong \angle 3$; $\angle 2 \cong \angle 4$	6. Teorema: todos los ángulos rectos son congruentes y afirmaciones 4 y 5.
7. ¿??	

Tabla 8

La imposibilidad de seguir con la demostración llevó a la profesora a manifestar que iban a trabajar otro problema para poder ampliar el sistema y retomar la demostración de la conjetura C1 más adelante. Esta no pudo ser demostrada hasta que no se introdujeron el teorema del ángulo externo y el criterio de congruencia ángulo-ángulo-lado (Episodio 8).

5) Demostración del teorema del triángulo isósceles (P66).

El 12 de abril, después del primer intento fallido por demostrar la conjetura C1, y debido a que algunos estudiantes expresaron públicamente la necesidad de usar el teorema del triángulo isósceles, la profesora propuso demostrarlo. Particularizó el enunciado para facilitar su demostración: si el triángulo ABC es isósceles, con los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ congruentes, entonces los ángulos $\angle 1$ y $\angle 2$ son congruentes (Figura 20).

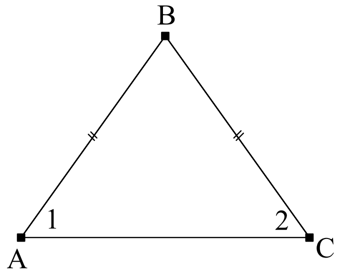


Figura 20

La profesora pidió a William encargarse de escribir la demostración en el tablero y se llevó a cabo una construcción colectiva en la que participaron Julián, Ana, Darío, William, Luz, Leopoldo, Henry, Daniel, Germán, Ignacio, Melisa y Juan. Se propusieron varias construcciones auxiliares que se fueron analizando una a una, tales como construir ángulos suplementarios a 1 y 2 que fueran congruentes, trazar la altura al lado *AC*, trazar la mediatriz al lado *AC* y trazar la mediana al lado *AC*. La última propuesta sirvió para hacer la demostración, usando el criterio de congruencia de triángulos lado-lado-lado. En la Tabla 9 resumimos las afirmaciones que quedaron consignadas en el tablero. Estas se basan en una representación como la de la Figura 21. Ese día, la profesora propuso de tarea, demostrar el teorema recíproco del teorema del triángulo isósceles.

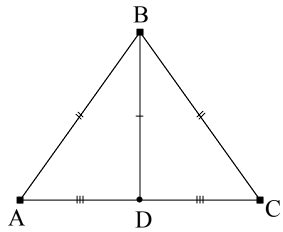


Figura 21

Afirmación	Justificación
1. ABC es isósceles con $\overline{AB} \cong \overline{BC}$.	1. Dado.
2. D punto medio de $\overline{AC}$	2. Teorema de Existencia del punto medio y afirmación 1.
3. Existe $\overleftrightarrow{DB}$	3. Postulado de la recta y afirmaciones 1 y 2.
4. Existe DB	4. Definición de segmento y afirmación 3.
5. $\overline{DB} \cong \overline{DB}$	5. Propiedad reflexiva de la relación de congruencia.
6. $AD = DC$	6. Definición de punto medio y afirmación 2.

7. $\overline{AD} \cong \overline{DC}$	7. Definición de congruencia de segmentos y afirmación 6.
8. $\Delta ADB \cong \Delta CDB$	8. Criterio congruencia lado-lado-lado y afirmaciones 1, 5, 7.
9. $\angle BAD \cong \angle BCD$	9. Definición de triángulos congruentes.

Tabla 9

6) Demostración del teorema recíproco del teorema del triángulo isósceles (P73, P80).

En la clase del 17 de abril se socializaron tres intentos de demostración del teorema recíproco del triángulo isósceles, es decir, si un triángulo tiene dos ángulos congruentes entonces es isósceles. Las propuestas fueron hechas por Melisa, María y Jaime. Aunque los estudiantes y la profesora sabían de antemano que ellos no habían logrado hacer la demostración, ella consideró importante que los estudiantes mostraran sus producciones a los compañeros porque podrían dar ideas a los otros.

El 24 de abril se retomó el trabajo de demostración del teorema recíproco del teorema del triángulo isósceles. En una clase anterior, que no hace parte del episodio 7 (abril 23), se había corregido una comprobación escrita en donde se pedía demostrar dos afirmaciones, apoyándose en dos figuras geométricas en las que se sugerían construcciones auxiliares hechas sobre triángulos. Aunque esas demostraciones no aludían al teorema recíproco al triángulo isósceles, ni lo usaban, Melisa y Henry extrajeron ideas de dichas demostraciones para proponer sendas demostraciones exitosas del teorema. Cada uno de ellos expuso su propuesta de demostración públicamente para que todos pudieran analizarla, pero no se escribieron en el tablero.

7) Demostración de la conjetura C1 y de su recíproca (P83, P84).

Concluida la demostración del teorema recíproco del teorema del triángulo isósceles y una vez se garantizó que la correspondencia ángulo-ángulo-lado era un criterio de congruencia (actividad que corresponde al episodio 8), el mismo 24 de abril, Orlando dio un argumento que servía para concluir la demostración de la conjetura C1. Mencionó que los triángulos BCD y BAF eran congruentes por el criterio ángulo-ángulo-lado ya que compartían el ángulo B, los ángulos $\angle BDC$ y $\angle BFA$ eran rectos y los lados AB y CA congruentes (Figura 22).

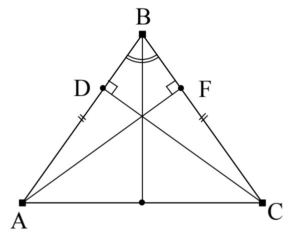


Figura 22

Por su parte, Ignacio justificó la conjetura recíproca a esta, es decir, si dos alturas de un triángulo son congruentes, el triángulo es isósceles. Para ello, usó los mismos triángulos *BCD* y *BAF* y la correspondencia lado-ángulo-ángulo (Figura 23).

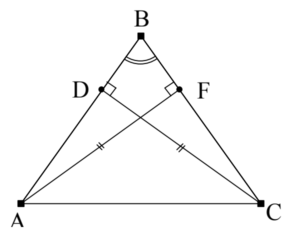


Figura 23

8) Revisión de la demostración de la conjetura C1 (P87, P90, P93)

En la clase del 26 de abril, la profesora pidió revisar entre todos la demostración de la conjetura C1, pues ella tenía una objeción a la misma. En el proceso de revisión Darío cayó en cuenta de que en la demostración hecha habían asumido que las alturas a los lados congruentes del triángulo intersecaban los lados del triángulo; esa era la misma objeción de la profesora. Ella propuso demostrar la interestancia *A-D-B* (Figura 23) para garantizar que la conjetura C1 hubiera quedado bien demostrada, pues ese hecho se había considerado en los pasos de la demostración. Estudiaron las posibles interestancias entre los puntos *A, B* y *D*, descartando opciones, para concluir que sólo era posible la opción *A-D-B*. En ese trabajo no revisaron la opción *A-B-D,* porque la creyeron equivalente a *D-A-B* (ya que se estaban imaginando que el $\angle B$ era agudo). Si la hubieran considerado, habrían visto que esa era otra posibilidad, que se tiene cuando el ángulo desigual es obtuso. Al finalizar la clase Darío manifestó que la conclusión que habían sacado era falsa y mostró un contraejemplo hecho en Cabri en el que mostraba un triángulo isósceles obtusángulo (con $\angle B$ mayor que 90) y se tenía la interestancia *A-B-D*, es decir, la altura *CD* quedaba por fuera del triángulo.

En la siguiente clase, abril 30, la profesora pidió a Darío mostrar nuevamente el contraejemplo a la afirmación que habían hecho sobre la interestancia *A-D-B* como la única opción para el extremo *D* de la altura *CD* en el triángulo *ABC* (Figura 23). Después, la profesora pidió establecer las consecuencias que el contraejemplo acarreaba para la demostración de la conjetura C1. Daniel sugirió restringir la afirmación que habían hecho en la conjetura a triángulos isósceles acutángulos y Luz propuso demostrar que si un triángulo era obtusángulo, la altura correspondiente a uno de los lados del ángulo obtuso no caía en el lado del triángulo. La profesora prefirió que dedicaran tiempo a la idea de Luz, por ser más general. Ella la reformuló pidiendo demostrar que si el $\angle B$ era obtuso, se tenía la interestancia *A-B-D* (Figura 24).

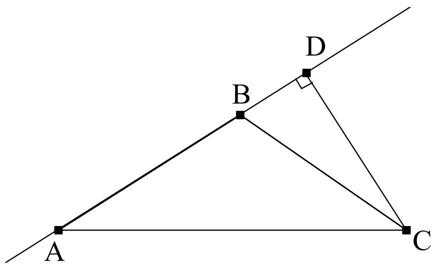
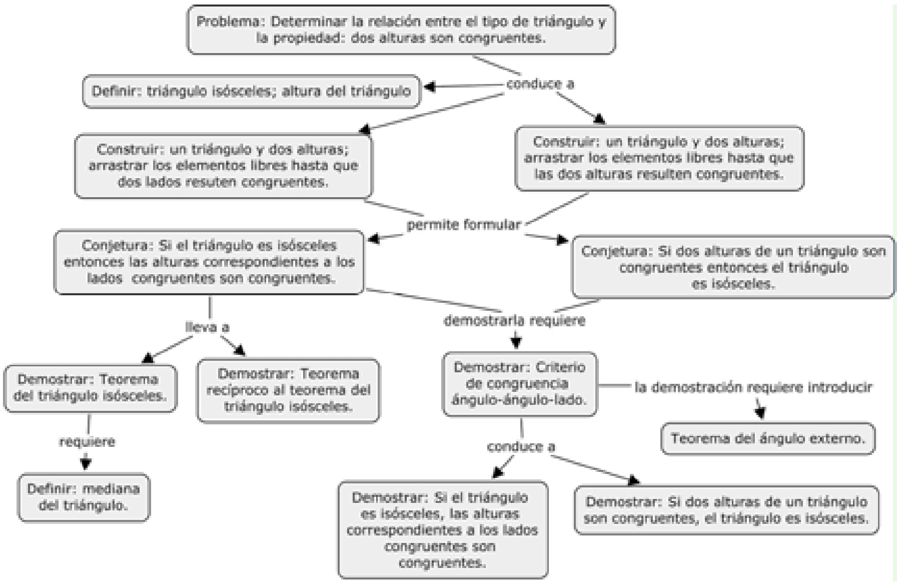


Figura 24

Se llevó a cabo la demostración colectiva de esta afirmación. En ella tomaron parte Leopoldo, María, Aníbal, Daniel, Ignacio y Orlando. Se analizaron los casos (i) *D-A-B*, (ii) *D=A*, (iii) *A-D-B*, (iv) *D=B* que se fueron descartando, haciendo uso del teorema del ángulo externo y de dos teoremas que propusieron los estudiantes: si un triángulo tiene un ángulo obtuso los otros dos ángulos son agudos y si un triángulo es isósceles, los ángulos congruentes son agudos. (Los dos teoremas se demostraron al momento de usarlos). Finalmente solo quedó como posibilidad la interestancia *A-B-D*, que era la que se quería. Al terminar la clase, la profesora les pidió revisar la demostración que hicieron de la conjetura C1 para ver en qué momento habían hecho uso de la consideración de la interestancia *A-D-B* y cómo podían mejorar la demostración.

En la clase de mayo 3 se retomó la demostración de la conjetura C1. La profesora explicó que el triángulo isósceles podía ser rectángulo, acutángulo u obtusángulo. En el caso de ser rectángulo, las alturas a los lados congruentes son los mismos lados congruentes, por lo que la demostración es trivial. Si el triángulo isósceles era acutángulo, la demostración era cómo la hecha en la clase del 24 de abril y si era obtusángulo, había una variante en los triángulos escogidos. Analizaron los cambios en las afirmaciones y quedó concluida la demostración del teorema.

En el Esquema 7 ilustramos las relaciones entre la actividad matemática realizada y el contenido temático desarrollado. El problema condujo a dos procedimientos de construcción "dinámicos", que derivaron en dos conjeturas, la que hemos denominado C1 y su recíproca. Los esfuerzos por demostrar la conjetura C1 condujeron a demostrar en teorema del triangulo isósceles y su recíproco. Además, en conexión con el episodio 8, se tuvo que incluir en el sistema el teorema del ángulo externo y el criterio de congruencia ángulo-ángulo-lado.



Esquema 7

EPISODIO 8: TEOREMA DEL ÁNGULO EXTERNO

El episodio 8, Teorema del ángulo externo a un triángulo, tuvo lugar en las clases 26, 30 y 33 (abril 10, 19 y 24 de 2007)[1] del curso de geometría plana. Comenzó en la misma clase que el episodio 7, como parte de la unidad temática correspondiente al estudio de los triángulos y se desarrolló en forma intercalada con los episodios 7 y 9. La profesora propuso los problemas correspondientes a los episodios 7 y 8 el día 10 de abril, para aprovechar la sala de cómputo. Hasta el momento se había institucionalizado la definición de triángulo y se habían estudiado los criterios de congruencia lado-lado-lado, lado-ángulo-lado y ángulo-lado-ángulo. También se habían usado dichos criterios para demostrar la existencia de la recta perpendicular a una recta dada por un punto externo de ésta. El enunciado del problema correspondiente a este episodio fue el siguiente:

> Problema: Dibujar un ΔMOP y construir un punto K sobre la $\overleftrightarrow{MP}$. ¿Cuándo es $m\angle OKP > m\angle OMK$? Escribir a) el proceso de construcción; b) las conjeturas que se establecen.

En la primera sesión del episodio se llevó a cabo el trabajo en parejas. Un estudiante debía manipular el programa Cabri instalado en los computadores y el otro era el encargado de reproducir el trabajo en la calculadora para usar la figura en futuras discusiones. El tiempo para resolver el problema fue corto pues los estudiantes emplearon la mayoría de la clase en el problema correspondiente al episodio 7. A continuación hacemos una breve síntesis del trabajo llevado a cabo por tres grupos.

María y Efraín[2] trabajaron en el computador, dejando de lado la calculadora. Efraín era el encargado de maniobrar el programa a medida que iban tomando decisiones sobre cómo proceder. Después de leer el enunciado, construyeron un ΔOMP (acutángulo), la recta *MP* y un punto *K* en la recta *MP* tal que *M-P-K*. Midieron el $\angle OKM$ (en lugar de $\angle OKP$ como decía el enunciado) y $\angle$OMK. Movieron el punto *O* acercándolo y alejándolo de la recta *MK* y hacia direcciones opuestas de la pantalla; vieron que las medidas de los ángulos cambiaban pero no encontraron ninguna regularidad pues muchos elementos de la construcción se movían. Entonces decidieron construir una recta perpendicular a la recta *MK*, por el punto *P*, para controlar la posición de *O*, a la izquierda o la derecha de la recta perpendicular. No identificaron regularidades salvo que cuando los segmentos *MO* y *OK* eran congruentes, los ángulos eran iguales. Luego decidieron arrastrar el punto *K*. Al ubicar a *K* tal que *M-K-P* vieron que el $\angle OKM$ era mayor que el $\angle OMK$, aunque Efraín dijo que eso dependía de la posición del punto *O*. Entonces decidieron mover a *K* manteniendo la interestancia *M-P-K* y el punto *O* sobre la perpendicular trazada por *P*; Efraín sugirió decir que cuando el ΔOPK era más grande que el ΔOMK el $\angle OKM$ era menor que el $\angle OMK$ pero María opinó que

[1] Documentos primarios P63, P76, P81 del archivo Ciclo-Cabri del programa AtlasTi.

[2] CD 34, videos v2-v3.

no debían hablar de triángulos grandes o pequeños porque no tenían cómo definir esa relación. Después, por insinuación de María, decidieron borrar la perpendicular, ubicar a O de tal manera que el ΔOMP fuera acutángulo y arrastraron a K sobre la recta MP, dejando quieto al punto O. Así, se dieron cuenta que cuando se tenía la interestancia M-K-P, el $\angle OKM$ era mayor que $\angle OMK$; escribieron esa relación a manera de conjetura.

Juan y Ana[3] construyeron un ΔOPM acutángulo y la recta PM; luego ubicaron a K tal que K-M-P. Después midieron el $\angle OKP$ y el $\angle OMK$. Arrastraron a K, manteniendo la interestancia y notaron que el $\angle OKP$ era siempre menor (porque el $\angle OMK$ era obtuso y no movieron el punto M). Después, movieron a K para obtener M-K-P. Allí se dieron cuenta que, sin importar que tipo de ángulo era el $\angle OMK$, siempre se cumplía que $\angle OKP$ era mayor que $\angle OMK$. Escribieron esa afirmación a manera de conjetura. A medida que Ana iba haciendo la construcción y la exploración en el computador, Juan los reproducía en la calculadora.

Darío y Leopoldo[4] construyeron un ΔOMP, la recta MP y un punto K sobre la recta, tal que M-P-K. Después midieron el $\angle OMK$ y el $\angle OKP$ y comenzaron a arrastrar a K para ubicarlo en varias posiciones hasta encontrar una en la que el $\angle OKP$ era mayor que $\angle OMK$; esto sucedió con M-K-P. Leopoldo propuso como conjetura: "[$m\angle OKP > m\angle OMK$] cuando K pertenece al segmento MP". Después la redactaron entre los dos en forma más completa: "Dado un triángulo OMP, K un punto de la recta MP, entonces la medida del $\angle OKP$ es mayor que la medida del $\angle OMK$ si K debe estar en el interior del segmento". Darío hizo la reproducción de la figura en la calculadora pero no se cercioró de la certeza de la afirmación.

En la segunda sesión del episodio, la profesora comenzó recordándoles el enunciado del problema y les dijo que ella suponía que ellos habían explorado diferentes posiciones del punto K para detectar algunas desigualdades invariantes. Antes de comenzar a analizar las conjeturas, introdujo la definición de desigualdad, pidiendo a los estudiantes recordarla. Daniel le dictó, a manera de definición: "$a > b$ si existe c tal que $b + c = a$". Ella preguntó si estaban todos de acuerdo y, como nadie la objetó ella propuso un contraejemplo. Inmediatamente Darío mencionó que había que asegurar que c era mayor que 0 y se corrigió la definición.

Después, la profesora les pidió ir analizando las conjeturas que los diferentes grupos habían formulado, apoyándose en las construcciones que habían hecho en las calculadoras para decidir si los enunciados eran admisibles o no. Ella comenzó proyectando la conjetura del grupo F (Luz y Marina) en el tablero:

> Grupo F: Si MOP es un triángulo y $K \in \overleftrightarrow{MP}$ tal que $K \notin \overline{MP}$ entonces $m\angle OKP > m\angle OPK$.

[3] Video CD 75 video 2

[4] Video: CD 80, video 1.

Antes de dar la palabra a los estudiantes, la profesora se refirió a la forma como Luz y Marina habían nombrado el triángulo. Según ella, tres letras consecutivas no podían ser un triángulo; las estudiantes debían haber escrito “si *M, O, P* determinan un triángulo” o “dado el triángulo *MOP*”. Después de hacer esta corrección, preguntó a todos si admitían la conjetura formulada por el grupo F. Pasados unos minutos, Melisa pasó a mostrar un contraejemplo proyectando en la pared una construcción hecha por su grupo; la conjetura fue rechazada (Figura 25).

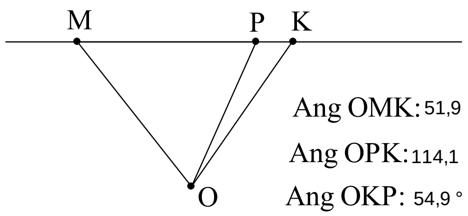


Figura 25

Luz intervino entonces para decir que la conjetura que ella y Marina habían escrito decía era “m$\angle OKP$ > m $\angle OMK$”. Se trató de un error de la profesora al copiar la conjetura escrita por ellas. Dejaron pendiente la conjetura corregida para más adelante. La profesora pidió revisar la conjetura del grupo G. Para ello, la proyectó en el tablero y la leyó en voz alta:

> Grupo G: Si en triángulo *MOP* y un punto *K* en $\overleftrightarrow{MP}$ tal que m $\angle OKP$ > m $\angle OMK$ entonces m $\angle OMK$ > m$\angle OMP$.

Julián pasó al tablero y proyectó una imagen en la calculadora para mostrar que él y su compañero Jaime habían tomado las mismas medidas que el grupo G, pero que los ángulos $\angle OMK$ y $\angle OMP$ eran el mismo ángulo, por lo que la conjetura no podía ser admitida (Figura 26):

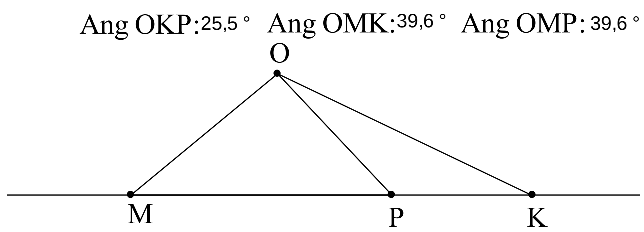


Figura 26

Después, la profesora proyectó la conjetura del grupo A y pidió analizarla considerando en qué circunstancias podía ser admitida:

> Grupo A: Sea triángulo OMP y un punto K en la recta $\overleftrightarrow{MP}$. Si K $\notin \overline{MP}$ entonces m $\angle$OKP = m $\angle$OMK.

William pasó al tablero a mostrar que la conjetura no era correcta. Proyectó una figura hecha en Cabri y arrastró *K* en diferentes posiciones, por fuera del segmento *MP* para verificar que el $\angle OKP$ no era necesariamente igual al $\angle OMK$ (Figura 27).

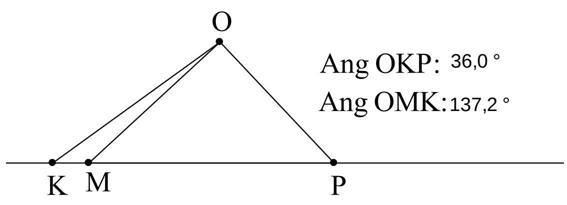


Figura 27

Darío pasó a mostrar un ejemplo en donde se cumplía la relación establecida por el grupo A. Dijo que él había tratado de conseguir que los segmentos *OK* y *OM* fueran congruentes y así había obtenido que los ángulos eran iguales (Figura 28). Se evalúo que quizás el grupo A llegó a esa situación por casualidad y no verificó la relación con el arrastre. La profesora explicó que como no era una relación generalizable para todos los casos de la hipótesis, no podían declarar la conjetura como un teorema.

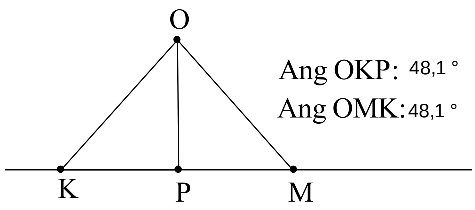


Figura 28

A continuación la profesora proyectó en la pared la conjetura del grupo E y la leyó. Después preguntó al grupo si la admitían o no.

> Grupo E: Si en el triángulo *MOP* se ubica un punto sobre $\overleftrightarrow{MP}$ entonces $m\angle OKP >$ $m\angle OMK$ cuando *K* pertenece a $\overline{MP}$ y *K* es diferente de *M*.

Todos opinaron que la conjetura era admisible, aunque Leopoldo hizo la salvedad de que debía escribirse que *K* era el punto que se tomaba sobre el segmento *MP* y Nancy e Ignacio propusieron agregar que *K* tampoco podía ser igual al punto *P*. Se analizó, entre todos, que si *K* era igual a *P* no existía $\angle OKP$, así como tampoco medida de éste y por lo tanto la conclusión de la conjetura era falsa y la implicación también.

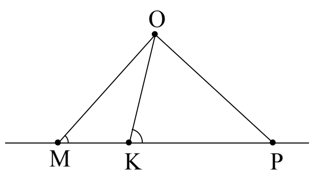
Después, la profesora dijo que el resto de grupos había escrito la siguiente conjetura, excepto el grupo de Marina y Luz pues, al hacer la corrección sugerida por Luz, ellas proponían lo contrario[5].

> Grupos B, C, D, G, H, I: Si se tiene $M - K - P$, $m\angle OKP > m\angle OMK$.

Luz explicó que ellas se habían equivocado al escribir "$K \notin \overline{MP}$" pues al abrir el archivo con la figura hecha en Cabri habían visto que *K* estaba en el segmento *MP* cuando la medida de $\angle OKP$ era mayor que la medida del $\angle OMK$, y no por fuera. Así, la conjetura del grupo F coincidía con la de los grupos anteriores. La profesora explicó que al hacer referencia a la interestancia se resolvía el problema de la conjetura del grupo E, pues la interestancia obligaba a que los puntos *M, K* y *P* fueran diferentes. Todos estuvieron de acuerdo con la conjetura, aunque Luz sugirió escribirla mejor para incluir al punto *O* en el antecedente. Entre varios reformularon la conjetura que la profesora llamó "el teorema que queremos demostrar" quedando así:

> Teorema: Si triángulo *MOP* y $M - K - P$ entonces $m\angle OKP > m\angle OMK$.

La profesora hizo una representación en el tablero (Figura 29), explicó que el ángulo *OKP* era externo al triángulo *OMK* y sugirió estudiar la definición de ángulo externo a un triángulo, con base en la figura. Para ello, escribió, al lado de la figura, la definición.



Definición de ángulo externo: Si se tiene el triángulo *OMK* y *P* es un punto tal que $M - K - P$, entonces $\angle OKP$ es un ángulo externo del triángulo *OMK*.

Figura 29

A continuación, retiñó con otro color el triángulo *OMK* y dijo que en la definición el triángulo que estaba jugando un papel importante era ese. Después, preguntó cuántos ángulos externos tenía un triángulo y dibujó un triángulo *ABC*. Ignacio propuso que eran tres y pasó al tablero a hacer una representación de ellos (Figura 30).

---

[5] La profesora incluyó en el grupo la conjetura propuesta por el grupo B a pesar de que ellos habían hecho referencia a otro par de ángulos.

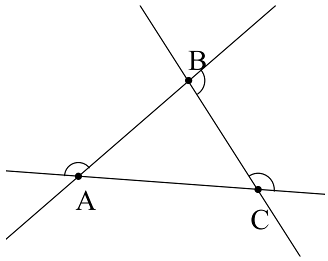


Figura 30

Germán opinó que eran 9, pues inicialmente estaba considerando incluir los ángulos opuestos por el vértice a los ángulos interiores del triángulo; después rectificó diciendo que eran 6 y pasó a representarlos (Figura 31).

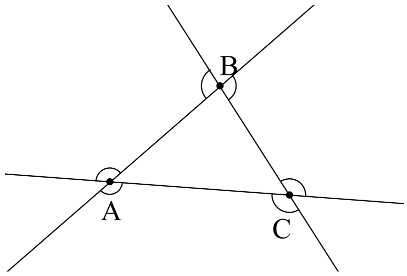


Figura 31

La profesora pidió que se fijaran que los ángulos propuestos por Germán eran opuestos por el vértice a los que había dibujado Ignacio. A pesar de la rectificación de Germán, Orlando dijo que faltaban tres ángulos por dibujar, refiriéndose a los ángulos opuestos por el vértice a los ángulos interiores del triángulo. Esta intervención generó en la profesora la duda sobre si la definición había quedado bien escrita para exceptuar esos ángulos. Nancy aclaró que la notación usada indicaba que el ángulo externo compartía un lado con el triángulo, lo que llevó a la profesora a sugerir que se podía escribir otra definición: un ángulo es externo a un triángulo si forma par lineal con uno de los ángulos interiores del triángulo. Después preguntó cuál de las dos definiciones les convenía usar en las demostraciones, según la que exigiera menos requisitos para asegurar la existencia del ángulo externo. Optaron por la definición propuesta inicialmente, ya que sólo requería declarar una interestancia. La profesora les explicó que éste era un caso en donde convenía dar la definición usando la notación de objetos particulares, pues así se facilitaba la escritura de las condiciones para poder afirmar la existencia del objeto definido.

Una vez institucionalizada la definición de ángulo externo, la profesora retomó el teorema resultado de la conjetura, y preguntó a los estudiantes si podían ampliarlo estableciendo una relación entre el ángulo externo y los otros dos ángulos internos del triángulo, y no sólo al mencionado en la conjetura. Aníbal dijo que no se podía asegurar que un ángulo externo a un triángulo fuera mayor que el ángulo adyacente a él y puso el ejemplo de un par lineal donde ambos ángulos son rectos. Luz afirmó lo mismo y sugirió como ejemplo un ángulo externo adyacente a un ángulo obtuso del triángulo. Estos dos contraejemplos los llevaron a excluir el ángulo adyacente. Para explicar que el teorema podía incluir que el ángulo externo $\angle OKP$ también era mayor que el ángulo interno $\angle MOK$ (Figura 29), Daniel intentó usar el teorema de la suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo pero la profesora le recordó que en sus argumentaciones no podían usar teoremas no demostrados en el curso. Luego, ella les mostró en una figura, que la situación a la que se refería la conjetura, tal como la habían escrito, era similar a la del $\angle 2$ y el ángulo externo $\angle 4$ o a la $\angle 1$ y el ángulo externo 3 (Figura 32). Pero como $\angle 3$ y $\angle 4$ eran congruentes, por ser opuestos por el vértice, se podía afirmar que el ángulo $\angle 3$ también era mayor que el ángulo $\angle 2$, mostrando que el ángulo externo a un triángulo era mayor que los dos ángulos interiores no adyacentes; sin embargo, había que demostrarlo.

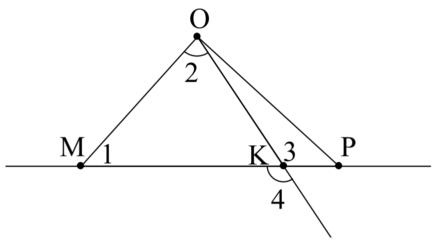


Figura 32

Después de este análisis decidieron reformular el teorema que iban a demostrar para que incluyera los dos ángulos internos no adyacentes al externo:

> Teorema el ángulo externo: Si el $\angle OKP$ es externo al triángulo *MOK*, entonces es mayor a la medida de cualquier ángulo interior del triángulo, que no sea adyacente.

A continuación el trabajo se centró en demostrar el teorema comenzando por demostrar que el ángulo $\angle 3$ era mayor que el ángulo $\angle 2$ (Figura 32). Los estudiantes empezaron a trabajar en grupos y la profesora pasaba por los puestos para informarse de lo que estaban haciendo. Por ejemplo, Efraín escribió al lado de la figura la definición de desigualdad y María le propuso recordar además la definición de par lineal a ver qué podían hacer con esas dos informaciones. Pasado un tiempo, la profesora vio que Daniel y Henry tenían algunas ideas útiles y les pidió exponerlas públicamente. Daniel dijo que como tenían que demostrar que el $\angle 3$ era mayor que el $\angle 2$, tenían que encontrar un número x positivo tal que la medida del $\angle 2$ más x era igual a la medida del $\angle 3$. Después Henry sugirió trazar una recta perpendicular m a la recta MK por el punto K y una recta perpendicular a m, llamada n por el punto O (Figura 33). Luego trazó un segmento OS perpendicular a MK y explicó que su idea era construir dos triángulos congruentes (ΔOSK y ΔKRO) y mostrar que el ángulo $\angle 3$ era mayor que el $\angle 2$ porque $\angle RKO$ (que era parte del ángulo *3*) era congruente a $\angle KOS$ (que era parte del ángulo *2*) y $\angle RKP$ era recto mientras que $\angle MOS$ era agudo (por lo tanto el trozo de $\angle 3$ no congruente con el trozo del $\angle 2$ era mayor que éste).[6] Pero, según explicó el mismo Henry, la propuesta no servía porque no tenía como garantizar la congruencia de los triángulos ΔOSK y ΔKRO). La profesora agregó además que el razonamiento de Henry estaba basado en el hecho de que el $\angle OKS$ era agudo, y eso no se podía garantizar teóricamente.

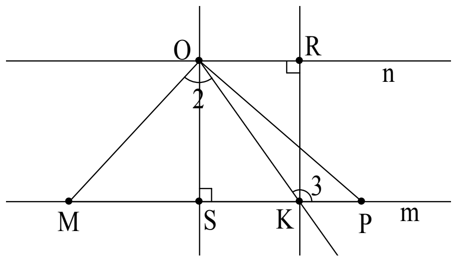


Figura 33

A pesar de que la propuesta de Henry no era útil no se pudo continuar, la profesora comentó que la veía muy importante porque él y Daniel estaban apuntando a la misma idea: encontrar un número positivo tal que sumado con la medida del $\angle 2$ diera la medida del $\angle 3$; Henry estaba dando una idea de cómo encontrar ese número haciendo una construcción de tal forma que quedara explícito que la medida del $\angle 2$ era parte de la medida del $\angle 3$.

Después de otro lapso de tiempo trabajando en grupos, Nancy propuso construir el rayo opuesto al rayo *KO* y usar el postulado de la construcción del ángulo[7] para construir un ángulo $\angle 2'$ congruente al $\angle 2$ en el interior del $\angle MKX$ (Figura 34). Según Nancy, como los ángulos $\angle MKX$ y $\angle OKP$ eran opuestos por el vértice podría afirmarse que la medida del $\angle 3$ era igual a la del $\angle 2$ más la medida del $\angle MKT$. El problema que Nancy identificó en su propuesta era que no podía garantizar que el rayo *KT* quedara en el interior del $\angle MKX$.

---

[6] A medida que Henry explicaba su propuesta de construcción la profesora hacía notar a todos que cada uno de los pasos sugeridos por Henry en la construcción auxiliar eran justificables con afirmaciones del sistema axiomático.

[7] Postulado P 12 de la construcción del ángulo: Sea $\overrightarrow{AB}$ un rayo de la arista del semiplano *H*. Para cada número r entre 0 y 180, hay exactamente un $\overrightarrow{AP}$ con *P* en *H*, tal que m $\angle PAB = r$.

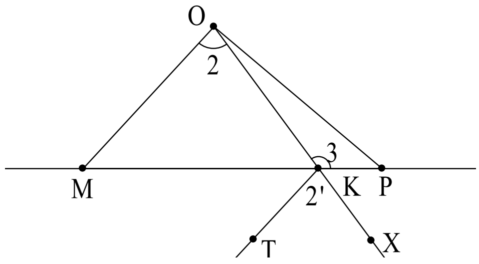


Figura 34

Para evitar el problema que tenía Nancy la profesora propuso construir el $\angle 2$ usando otro procedimiento que pudiera justificarse por una vía diferente al uso del postulado de la construcción del ángulo y que permitiera cierto control teórico sobre los lados del ángulo construido. Además, les sugirió construir el ángulo congruente al $\angle 2$ directamente en el interior del $\angle 3$. Cómo no se les ocurrían ideas, la profesora sugirió pensar qué enunciados del sistema les permitían conseguir ángulos congruentes. Daniel propuso construir triángulos isósceles, Darío dijo que construyendo ángulos opuestos por el vértice, Henry propuso usar una bisectriz, la profesora se refirió a suplementos o complementos de ángulos congruentes y a partes correspondientes de triángulos congruentes. El problema era que no se les ocurría una manera útil de construirlos.

Nuevamente trabajaron en grupos hasta que María y Efraín se animaron a hacer otra propuesta y pasaron al tablero. María explicó que habían construido un $\angle 2'$ congruente al $\angle 2$ usando el rayo *KO* como lado común y *K* como vértice; luego, sobre el rayo obtenido localizaron el punto *T* tal que *MO* fuera congruente con *KT* y unieron el punto *O* con el punto *T*. Así, quedaban dos triángulos congruentes ΔMOK y ΔTKO por el criterio lado-ángulo-lado (Figura 35).

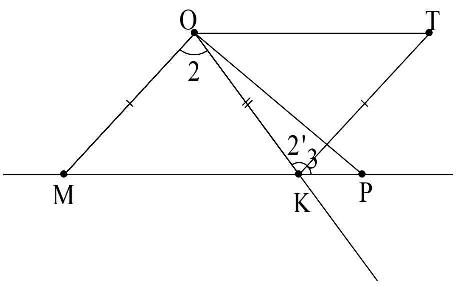


Figura 35

Aunque María y Efraín intentaron atender la sugerencia de usar partes correspondientes de triángulos congruentes construyeron el $\angle 2'$ usando un procedimiento justificable, nuevamente, con el postulado de la construcción del ángulo, por lo que la propuesta tenía el mismo problema de la sugerida por Nancy. La profesora sugirió entonces intentar obtener un ángulo congruente al $\angle 2$ por una vía indirecta; para lograrlo, les sugirió tomar el punto medio *R* del segmento *OK* y tener en cuenta que los segmentos *OR* y *KR* eran congruentes. Darío, Henry y Nancy dieron algunas ideas para hacer construcciones auxiliares que no resultaron útiles, porque no generaban dos triángulos congruentes que permitieran garantizar que un ángulo en el interior del $\angle OKP$ fuera congruente al $\angle 2$, hasta que Ignacio propuso construir el rayo *MR* y transferir, a partir de *R*, la medida *MR* para obtener un punto *T* tal que los segmento *MR* y *RT* fueran congruentes (Figura 36). Germán intervino para agregar que al trazar el segmento *KT* se obtenían dos triángulos congruentes. Entre Ignacio, Germán y Nancy justificaron la congruencia de los triángulos ΔKRT y ΔORM por el criterio lado-ángulo-lado.

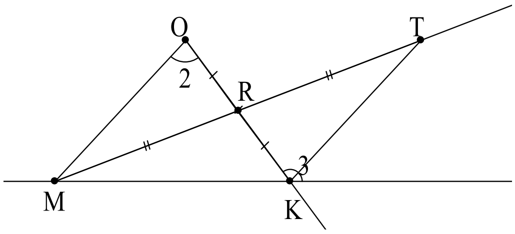


Figura 36

Faltaba mostrar que al construir el punto *T* con las condiciones que lo hicieron se podía asegurar que estuviera en el interior del $\angle 3$. Esto quedó pendiente para la siguiente sesión.

En la sesión tres del episodio 8 entre Germán, Aníbal y la profesora reconstruyeron el proceso de demostración llevado a cabo hasta el momento, reproduciendo la figura que habían construido. Les había quedado pendiente demostrar que el punto *T* quedaba en el interior del $\angle 3$ para poder usar el postulado de adición de medidas de ángulos y concluir que la medida del $\angle 2$ más un número positivo era igual a la medida del $\angle 3$ y concluir con la desigualdad que correspondía a la tesis del teorema del ángulo externo. Nancy propuso un argumento basado en algunos teoremas asociados al postulado de separación del plano. Mostró, con ayuda de la profesora que el punto *T* estaba en el mismo semiplano determinado por la recta *MP* donde estaba *O*, usando el Teorema interestancia lados opuestos de la recta[8] y en el mismo semiplano determinado por la recta *OK* donde estaba *P*, usando el Teorema interestancia mismo lado de la recta[9] y el Teorema de la semirrecta.[10] La intersección de esos dos semiplanos era precisamente el $\angle OKP$, por lo que pudo concluir que el punto *T* estaba en el interior del $\angle OKP$.

---

[8] Teorema interestancia lados opuestos de la recta: Si *A-B-C* y si *m* es una recta que contiene a *B* diferente de $\overleftrightarrow{AB}$ entonces $A \notin S_{m,C}$.

[9] Teorema interestancia mismo lado de la recta: Si *A-B-C* y si *m* es una recta que contiene a *C* diferente de $\overleftrightarrow{AB}$ entonces $A \in S_{m,B}$.

[10] Teorema de la semirrecta: Sea *m* una recta del plano α. Sea *P* un punto de *m* y *Q* un punto de α que no está en *m*. La semirrecta *PQ* está contenida en el semiplano determinado por *m* en que está *Q*.

Después de mostrar que el punto *T* estaba en el interior del ángulo, mostraron que el $\angle 2$ era congruente con el $\angle 5$, por partes correspondientes de triángulos congruentes y que la medida del $\angle 3$ era igual a la suma de las medidas de los ángulos $\angle 5$ y $\angle 6$. Como la medida del $\angle 6$ es positiva, por el Postulado de la medida de ángulos[11] pudieron establecer la desigualdad requerida $m\angle 3 > m\ \angle 2$ (Figura 37).

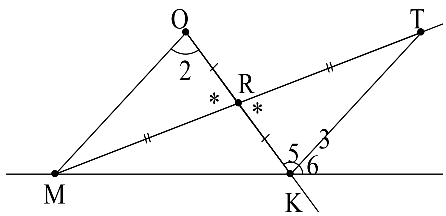
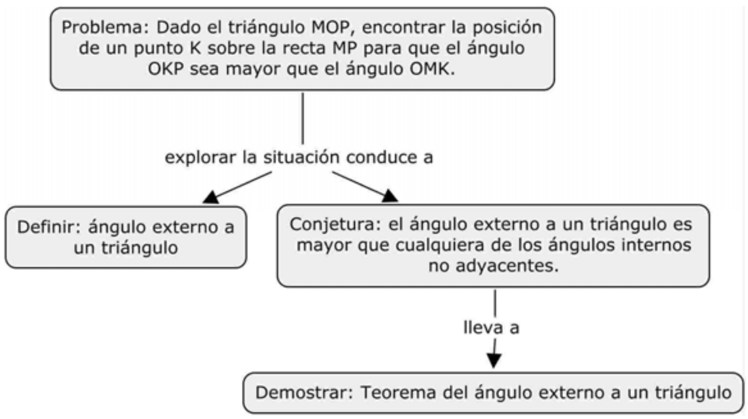


Figura 37

En el Esquema 8 ilustramos las relaciones entre la actividad matemática realizada y el contenido temático desarrollado. El problema conduce a la conjetura referente al teorema del ángulo externo y motiva su demostración.



Esquema 8

EPISODIO 9: TEOREMA DE LA MEDIATRIZ

El episodio 9, Teorema de la mediatriz, tuvo lugar en las clases 29, 38 y 39 (abril 17, mayo 07 y mayo 08 de 2007)[12] del curso de geometría plana. Comenzó simultáneamente con el episodio 7, dentro de la unidad temática correspondiente a triángulos y se desarrolló en forma intercalada con los episodios 7, 8 y 10. Hasta el momento se habían estudiado en esta unidad la definición de triángulo, los criterios de congruencia lado-lado-lado, lado-ángulo-lado, ángulo-lado-ángulo e

[11] Postulado de la medida de ángulos: a cada ángulo *BAC* le corresponde un número real entre 0 y 180.

[12] Documentos primarios P71, P99, P100 del archivo Ciclo-Cabri del programa AtlasTi.

hipotenusa-cateto[13] y se habían aprovechado dichos criterios para demostrar la existencia de la recta perpendicular a una recta dada por un punto externo de ésta, el teorema del ángulo externo, el teorema que afirma que si el lado mayor de un triángulo se opone al ángulo mayor[14], el teorema que dice que el ángulo mayor de un triángulo se opone al lado mayor[15], el teorema de la existencia y unicidad de la bisectriz de un ángulo, y algunos teoremas relacionados con propiedades del triángulo isósceles y algunas de sus líneas notables.

El enunciado del problema correspondiente a este episodio fue el siguiente:

> <u>Problema</u>: Dada una recta *m* y un punto *P* que no esté en ella. a) Para $R \in m$, hallar *Q* en el semiplano opuesto a aquel en que está *P* tal que $QR = PR$. b) Repetir el mismo proceso con tres puntos más de la recta *m*. c) ¿Existe un punto *X* en ese semiplano para el cual su distancia a cualquier punto *Y* de la recta es igual a la distancia de ese punto a *P?* Si es el caso, caracterizar a *X*. (Caracterizar significa dar una descripción geométrica de *X* en forma de conjetura); d) Justificar la respuesta.

En la primera sesión del episodio se llevó el trabajo en parejas en la sala de computadores. La profesora les pidió que sacaran el mayor provecho del programa Cabri para trabajar sobre los resultados obtenidos en la siguiente sesión. A continuación haremos una breve síntesis del trabajo realizado por tres grupos:

En el grupo de María y Efraín[16], Efraín manipuló el ratón del computador y María hizo dibujos sobre papel. Comenzaron leyendo la parte a) del enunciado y dibujando en papel una recta *m* y un punto *P* fuera de ella. Luego determinaron un punto *R* en *m* y trazaron el segmento *PR*. María dibujó a mano alzada un segmento perpendicular desde *P* a *m* y marcó el ángulo entre ellos con el signo de ángulo recto. Después, prolongó el segmento *PR* hacia el semiplano en donde no estaba *P* y allí tomó un punto *Q* tal que $RP = RQ$. Efraín reprodujo la figura en Cabri, pero como hizo una circunferencia con centro en *R* y radio *RP*, para ubicar el punto *Q*, se dio cuenta que *Q* podía estar en cualquier parte de la semicircunferencia correspondiente al semiplano donde no estaba *P*. Tomaron tres nuevos puntos *L, M, E* en la recta *m* y reprodujeron el proceso para obtener los puntos *Q1, Q2, Q3* tal que $Q1L = LP$, $Q2M = MP$ y $Q3E = EP$. Al ir tomando cada punto *Q1, Q2, Q3*, Efraín iba ocultando las circunferencias por lo que no podían apreciar que todas se cortaban en un mismo punto (Figura 38).

---

[13] Cuando comenzó el episodio no se había demostrado, pero como la segunda sesión se hizo nueve clases después de la primera, al comenzar las demostraciones ya se tenía este teorema a disposición de los estudiantes.

[14] Idem.

[15] Idem.

[16] CD 37 video 4, CD 38 videos 1 y 2.

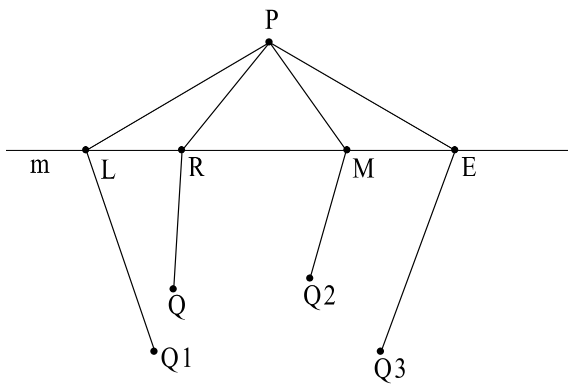


Figura 38

Después pasaron al punto b). Sin mediar una exploración, María sugirió que había muchos puntos *X* y que todos estaban en la perpendicular a *m* por *P*. Esto los llevó a trazar dicha perpendicular y arrastrar el punto *Q* para que quedara sobre ésta; pero cómo querían que *Q* quedará ligado a la perpendicular usaron la opción de Cabri 'Redefinir objeto'. Así, redefinieron los puntos *Q, Q1, Q2, Q3* sin darse cuenta que al hacerlo, se perdía la igualdad de las distancias, condición exigida en la parte a) del enunciado (según la cual, debía cumplirse que *RQ =RP, LQ1 = LP, MQ2 = MP, EQ3 = EP*). (Figura 39).

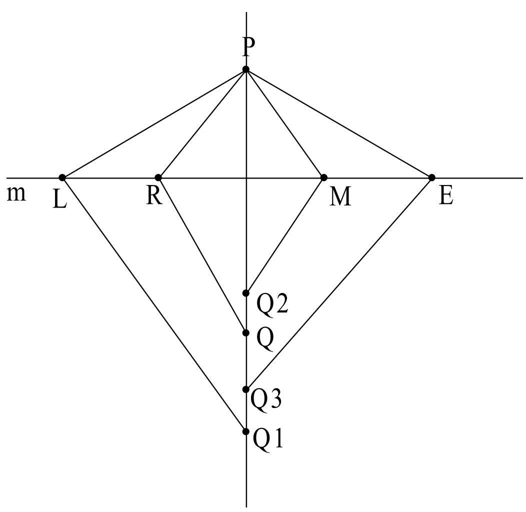


Figura 39

Decidieron concluir que existían muchos puntos *X* sobre la perpendicular a *m* por *P*. Cuando la profesora se acercó a revisar el trabajo, les hizo caer en cuenta de que la redefinición de objetos no les servía y les pidió revertir esa opción. Al hacerlo, Efraín desocultó las circunferencias que sirvieron para obtener los puntos *Q, Q1, Q2 y Q3* y se dio cuenta que todas se cortaban en un punto sobre la recta perpendicular. Sin embargo, al continuar la exploración Efraín volvió a ocultarlas, dejando sólo a la vista la circunferencia con centro en *R*, y borró la recta perpendicular. Al mover a *R* sobre la recta *m* él y María vieron que los puntos *Q1, Q2* y *Q3* quedaban sobre dicha circunferencia cuando *R* coincidía con *L, M* o *E*. Escribieron la siguiente conjetura: “existen infinitos puntos en la semicircunferencia con centro en *Y* y radio *YP* tales que la distancia de cada uno de ellos a *Y* es igual a la distancia de *P* a *Y*”. Efraín se mostró preocupado por el uso de la palabra “infinitos” y María por el hecho de no haber escrito el enunciado de la forma si-entonces. Efraín propuso cambiar “infinitos” por “al menos” pero María no estuvo de acuerdo. Dejaron como conjetura: “Si se tiene una recta *m* y un punto *Y* cualquiera en *m* y un punto *P* que no pertenece a *m* entonces existen, en el semiplano definido por *m* donde no está *P*, infinitos *X* tal que *YX* es igual a *YP* y están en la semicircunferencia del semiplano donde no está *P* con centro en *Y* y radio *PY*”.

Ignacio y Nancy[17] comenzaron la exploración leyendo la parte a) del enunciado. Luego trazaron la recta *m*, determinaron un punto *P* fuera de ella y un punto *R* en *m*. Después de pensar un momento, Nancy sugirió trazar la perpendicular a *m* por *P* y transferir la distancia de *P* a la recta en el otro semiplano, para tomar un punto *Q* en ella. Nancy estaba segura que los segmentos *RP* y *RQ* eran congruentes[18], pero no explicó por qué. Ignacio no estaba tan seguro y decidió trazarlos y tomar su medida. Después, Ignacio le dijo que debían tomar otros tres puntos en la recta *m* y Nancy dijo que al tomar otros puntos sobre *m* iban a encontrar otros puntos diferentes de *Q* sobre la perpendicular, pues la distancia de esos puntos a *P*, era diferente a la distancia *PR*. Pero Ignacio objetó que como ellos habían trasferido, sobre la perpendicular, la distancia de *P* a la recta y no la distancia *PR*, siempre se iba a tener el mismo punto *Q*. Hicieron la construcción y lo comprobaron (Figura 40).

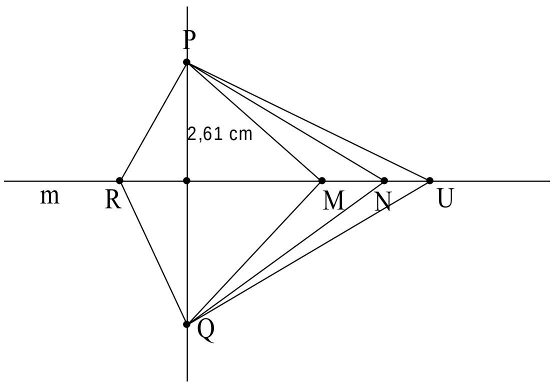


Figura 40

Antes de pasar al punto c) del problema Ignacio preguntó a Nancy por qué podían garantizar que *PM = MQ, PN = NQ* y *PU = UQ*. Ella le dijo que al trazar la perpendicular por *P*, todos los puntos de *m* equidistaban de *P* y *Q*, pero que ella no

[17] CD 75 video 2 – CD 76 video 1.

[18] La idea de Nancy indica que ella y su compañero tenían alguna idea de cómo encontrar la distancia de un punto a una recta y además que estaba intentando reproducir la construcción auxiliar que habían hecho cuando demostraron la existencia de una recta perpendicular a otra por un punto externo.

sabía explicar por qué. Revisando la figura, Ignacio mencionó que se formaban triángulos congruentes (a lado y lado de la recta *m*) y se refirió al criterio lado-ángulo-lado. Luego Nancy sugirió pensar qué pasaba si no tomaban *Q* en la perpendicular sino en cualquier otro lado. Hicieron una circunferencia con centro en *R* y radio *PR* y se dieron cuenta que se intersecaba con la perpendicular en *Q*. Cuando la profesora les pidió explicación sobre lo que estaban haciendo ellos le dijeron que iban a construir circunferencias pues, por el método que habían usado, habían condicionado el punto *Q* en cada caso, a un punto muy específico cuyas propiedades no estaban dadas de antemano. Entonces la profesora les sugirió releer la parte c) del enunciado; al hacerlo, Nancy cayó en cuenta que ellos habían encontrado a *X* en la parte a) del ejercicio pues este punto era precisamente *Q*. Luego decidieron redactar la conjetura. En una primera versión, la conjetura les quedó: "Si se tiene una recta *m* y un punto *P* que no pertenece a ella entonces existe un punto *X*, que no pertenece al semiplano determinado por *m* donde esta *P* tal que, para cualquier *Y* en *m*, *PY* = *YX*". Nancy objetó que esa conjetura no mostraba dónde estaba *X* y que había que decir que *X* estaba en la perpendicular por *P* a la recta y a una distancia a la recta igual que *P*. Ignacio decía que las propiedades de *X* no se podían poner en el antecedente porque no era información dada, pero Nancy decía que sí porque eran las condiciones de *X*. Finalmente redactaron la siguiente conjetura que entregaron, aunque no quedaron muy conformes con ella: "Si se tienen una recta *m* un punto *P* que no pertenece a *m*, un punto *Y* que pertenece a *m* entonces existe un punto *X*, que no pertenece al semiplano determinado por *m* donde está *P*, tal que *YP* = *XP* y *X* pertenece a la recta perpendicular a *m* que pasa por *P*".

Darío y Leopoldo[19] comenzaron trazando la recta *m*, determinaron los puntos *P* y *R* tal cómo sugería la parte a) del enunciado y después construyeron la circunferencia con centro en *R* y radio *RP* para localizar el lugar de puntos *Q* tales que *QR* = *RP*. Para garantizar que los puntos *Q* estuvieran en el semiplano determinado por *m* donde no está *P* trazaron un arco de circunferencia y redefinieron a *Q* sobre el arco. Respondieron al punto a) del problema escribiendo que existían infinitos puntos *Q* que cumplían la condición, aquellos que estaban sobre el arco. Después construyeron los puntos *L, M* y *N* y trazaron los arcos de circunferencias correspondientes a los lugares geométricos de los puntos *Q1, Q2* y *Q3* que cumplían la condición (Figura 41). Al no ocultar los arcos de circunferencia se fijaron que todos los arcos se intersecaban en un punto y Darío cayó en cuenta que el punto era precisamente el punto *X* al que hacía alusión la parte c) del problema. Arrastraron *R* sobre la recta *m* y se fijaron que al hacerlo el único punto invariante del arco era el punto *X*.

[19] CD 80 video 1.

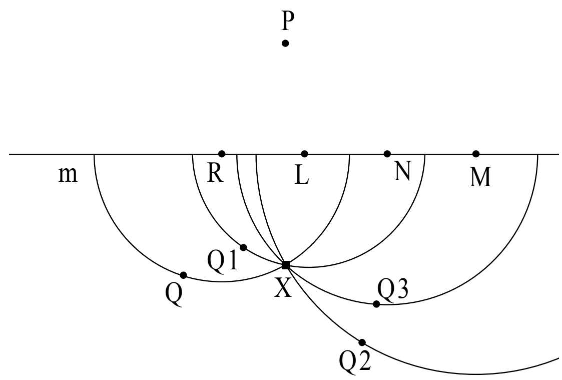


Figura 41

Leopoldo expresó haber entendido que ese punto X era tal que para cualquier Y de la recta m, PY era igual a YX pero que él no sabía por qué pasaba eso. Darío se dio cuenta que X estaba sobre la perpendicular a la recta m por P y a una distancia de la recta igual a la de P. Para comprobarlo, trazaron la recta PX y usaron la opción 'Chequear propiedades' para ver si las rectas eran perpendiculares; además, midieron las distancias de P y X a m. Darío explicó a Leopoldo que al estar sobre la perpendicular se formaban triángulos congruentes y se podía demostrar que para cualquier Y de m, $PY = XY$. Formularon la siguiente conjetura: "Si P es un punto perteneciente a un semiplano H_1 cuya arista es la recta m, entonces existe un punto X que pertenece al semiplano en que no está P, tal que X pertenece a la perpendicular determinada por P y m y la distancia de X a m es igual a la distancia de P a m".

En la segunda sesión del episodio, que tuvo lugar nueve clases después de la primera[20], la profesora llevó organizadas las conjeturas que los grupos habían entregado y propuso analizar cada una de ellas para estudiar si eran ciertas y si se podía sacar provecho de ellas para formular enunciados y demostrarlos. Comenzó por proyectar en la pared la conjetura, y su justificación, sugeridas por el grupo A, compuesto por Julián y Jaime:

> Grupo A: Si se tiene una recta m, un punto Y sobre ella y un punto $P \notin m$, entonces existe al menos un punto $X \notin S_{m,P}$ tal que $XY = PY$.
>
> Justificación Grupo A: Al analizar la situación con los puntos P y X equidistantes a un punto Y de la recta m, concluimos que tendríamos infinitos puntos X tal que $XY = PY$, más no existe un único punto X que sea equidistante a los infinitos puntos Y de la recta.

[20] El hecho de que la segunda sesión se hiciera nueve clases después de la primera se debió a que los problemas correspondientes a los episodios 7, 8 y 10 se estaban trabajando al tiempo, de acuerdo a la dinámica con la que se iban produciendo las ideas. La lejanía entre la primera y la segunda sesión hizo que los estudiantes estuvieran un poco perdidos al comenzar a discutir las conjeturas, pues no se acordaban completamente de lo que habían hecho y escrito.

La profesora preguntó qué significaba "al menos un punto *X*". Germán dijo que él entendía que no había un *X* sino que podían ser muchos. Además de confirmar esta idea, la profesora comentó que esa había sido la respuesta de la mayoría para el punto a), si se consideraba que el grupo A se estaba refiriendo a un punto *Y* determinado en la recta, como parecía suponerse por la redacción de la conjetura, en donde habían escrito "Si se tiene una recta *m*, un punto *Y* sobre ella...". Sin embargo, en la justificación, los estudiantes se habían referido a los "infinitos puntos *Y* de la recta" por lo que no quedaba claro si la conjetura se refería a un punto *Y* dado o a cualquier punto *Y* y esta falta de claridad hacia que no se pudiera concluir si la conjetura era aceptada o no. A continuación, la profesora proyectó la conjetura del grupo B, compuesto por María y Efraín:

> Grupo B: Si se tiene una recta *m*, un punto *Y* cualquiera de *m* y un punto *P* que no pertenece a *m*, entonces existen, en el semiplano definido por *m* donde no esta *P*, infinitos puntos *X* tal que *XY* es igual a *YP* y están en semicircunferencias que se encuentran en el semiplano definido por *m* donde no está *P*, con centro en *Y* y radio *PY*.

Después de leer la conjetura la profesora comentó que el grupo B había conjeturado algo parecido al grupo A, pero agregando el lugar geométrico de los puntos *X* a los que hacía referencia también el grupo A. En ambos casos, para poder admitir la conjetura, habría que pensar que los grupos A y B estaban refiriéndose a un punto *Y* determinado en la recta *m* y no a *Y* como una variable para representar cualquier punto, aunque el grupo B había escrito "… un punto *Y* cualquiera de *m…"*. A continuación proyectó la conjetura del grupo E, compuesto por Nancy e Ignacio:

> Grupo E: Si se tiene una recta *m* y un punto *P* que no pertenece a *m* y *Y* que pertenece a *m*, entonces existe *X* que no pertenece a $S_{m,P}$ tal que $YP = YX$ y *X* pertenece a la recta perpendicular a m que contiene a *P*.

Según la profesora, el grupo formuló una conjetura diferente a la de los grupos A y B pues ellos afirmaron la existencia de un punto *X*, para un *Y* dado. Al preguntar la opinión de los estudiantes por la conjetura, María dijo que Nancy e Ignacio afirmaron que el punto existía, dijeron en dónde se encontraba, pero les faltó decir cómo encontrarlo. En ese sentido, para María, la descripción estaba incompleta. Ignacio aceptó que les había faltado colocar una información referente a la distancia del punto a la recta. No se discutió si Nancy e Ignacio se habían referido a un punto *Y* determinado o a cualquier *Y*. Después, la profesora hizo pública la conjetura propuesta por el grupo G, compuesto por Germán y Aníbal[21]:

> Grupo G: Sea una recta *m* y un punto *P* que no pertenece a esa recta. Entonces existe un punto *X* que pertenece al semiplano opuesto al que pertenece *P* tal que $\overleftrightarrow{PX} \perp m$ y $XY = PY$, $Y \in m$.

[21] En esta clase Germán trabajó sólo pues Aníbal no asistió.

La profesora interrogó a los estudiantes para ver si opinaban que el grupo G había escrito mayor información que el grupo E. Nancy opinó que habían dicho lo mismo, pero que al grupo G le fallaba la redacción pues habían condiciones, como la pertenencia de *Y* a la recta *m,* que deberían estar en el antecedente. La profesora también opinó que la redacción era confusa y que les faltó decir quién era el punto *X*. A continuación propuso mirar las conjeturas de los grupos D (Ana y Juan) e I (Henry y Antonio).

> Grupos D e I: *X* debe estar sobre la perpendicular a *m* que pasa por *P* y *X* está en el semiplano opuesto en el que está *P* tal que la distancia del punto de intersección entre las rectas al punto *P* sea la misma.

La profesora dijo que ella entreveía, en la conjetura propuesta por los grupos D e I, una propuesta de construcción del punto *X*. Según ella, parecía que los grupos aceptaron que existía un punto *X*, que estaba en la recta perpendicular a *m* por el punto *P*, concordando con los grupos G y E, pero además dijeron exactamente en qué posición estaba. Como el grupo no redactó una conjetura en estricto sentido, la profesora pidió ayuda para determinar qué sería lo dado y qué había que demostrar. Al final quedó escrita la siguiente conjetura en el tablero:

> Dado: Recta m, punto P, $P \notin m$, Y cualquier punto de m. Sea l que contiene a P y $l \perp m$, $l \cap m = \{C\}$, $X \in l$ tal que $XC = PC$.
>
> Demostrar: $XY = PY$

A continuación, la profesora preguntó cómo podía demostrarse esta conjetura. Jaime, apoyado en una figura que dibujó en el tablero, propuso un argumento deductivo muy cercano a la demostración. Luego, a sugerencia de la profesora discutieron cómo podría generalizarse la conjetura, a manera de teorema, para escribirlo de tal forma que expresara alguna propiedad geométrica. Después de varias propuestas fallidas, Aníbal mencionó que si un punto estaba en la mediatriz de un segmento equidistaba de los extremos de éste. La profesora institucionalizó este teorema como el Teorema de la Mediatriz, y pidió a los estudiantes escribir rigurosamente la demostración.

> Teorema de la Mediatriz: si un punto esta en la mediatriz de un segmento equidista de los extremos de éste.

En la tercera sesión correspondiente al episodio, la profesora comenzó retomando las conjeturas de los grupos A, B, E, G, D e I para aclarar algunos aspectos, sobre todo relacionados con las expresiones en donde el punto *Y* se asume como "cualquiera" o es un punto "determinado". Esta revisión dio pie para definir mediatriz de un segmento, mediana de un triángulo, analizar por qué la existencia de la mediana estaba garantizada en el sistema axiomático que estaba construyendo y recordar los pasos claves del Teorema de la Mediatriz. Después, la profesora les pidió a los estudiantes intentar demostrar que el teorema recíproco del teorema de la mediatriz era cierto:

> Teorema Recíproco al Teorema de la Mediatriz: si un punto equidista de los extremos de un segmento, entonces está en la mediatriz de este.

Pasados unos minutos de trabajo en grupos los estudiantes propusieron dos construcciones auxiliares: Germán propuso trazar la perpendicular por el punto al segmento y demostrar que cortaba al segmento en el punto medio e Ignacio propuso trazar un segmento desde el punto hasta el punto medio del segmento y luego mostrar que ese segmento era perpendicular a la recta. La profesora aprovechó las dos propuestas para señalar que en ambas, los estudiantes habían garantizado, mediante una construcción auxiliar, una de las propiedades de la mediatriz y la demostración consistía en garantizar deductivamente la otra propiedad. Según ella, esta era una manera nueva de enfrentarse a demostraciones donde había que garantizar dos condiciones. Al momento de hacer la reflexión la profesora cayó en cuenta que la propuesta de Germán no podía ser admitida pues hasta el momento no tenían cómo demostrar que la perpendicular por un punto que equidistaba de los extremos de un segmento cortaba a dicho segmento.

Después de analizar las propuestas para demostrar el teorema recíproco al teorema de la mediatriz la profesora proyectó la conjetura del grupo C, que aún no había sido discutida:

> Grupo C: Si *P* es un punto perteneciente a un semiplano H_1 cuya arista es la recta *m*, entonces existe un punto *X* que pertenece al semiplano en que no está *P*, tal que *X* pertenece a la perpendicular determinada por *P* y *m* y la distancia de *X* a *m* es igual a la distancia de *P* a *m*.

Después de leer la conjetura, la profesora preguntó al grupo C qué querían decir con "distancia de un punto a una recta". Leopoldo dijo que ellos se referían a la menor distancia del punto *P* a la recta. Esta explicación dio pie para discutir si podía hablarse de una "menor distancia" y si realmente podía garantizarse que existía dicha distancia. La discusión condujo a definir la distancia de un punto a una recta referida a la distancia entre puntos:

> Definición de distancia de un punto a una recta: La distancia de un punto *P* a una recta *m* es la menor de las distancias de *P* a cualquier punto *Y* de la recta.

Se produjo una conversación tendiente a imaginar cómo redactar el teorema que permitía garantizar la existencia de dicha "menor distancia". Finalmente la profesora escribió el teorema:

> Teorema de existencia de la distancia de un punto a una recta: si *P* es un punto que no pertenece a la recta *m*, *l* es la recta perpendicular a *m* que contiene a *P* y *K* es la intersección de *m* con *l*, entonces $PK < PY$ para cualquier *Y* que pertenece a *m*, *Y* distinto de *K*.

La profesora pidió a los estudiantes sugerencias para demostrar el teorema. Daniel propuso hacer uso de teorema de Pitágoras (Figura 42) mostrando que la hipotenusa de un triángulo rectángulo era mayor que cualquiera de los dos catetos. La propuesta fue rechazada porque no hacía uso de los enunciados del sistema axiomático.

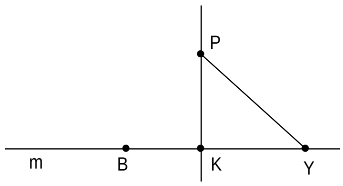


Figura 42

Un tiempo después, Nancy propuso hacer uso de dos teoremas recientemente demostrados: el teorema del ángulo externo a un triángulo y el teorema según el cual un lado de un triángulo es mayor a otro lado si se opone a un ángulo mayor. Consideró el ángulo recto $\angle PKB$ externo al triángulo *PKY*, mayor al $\angle KYP$ y congruente al $\angle PKY$; por ser $\angle PKY > \angle KYP$ entonces el lado *PY* era mayor al *PK*. Con ese argumento se aceptó que sí había una mínima distancia entre *P* y un punto de la recta *m;* la profesora aclaró que por costumbre se hablaba de la distancia de un punto a una recta para referirse a la longitud del segmento perpendicular trazado desde el punto *P* hasta la recta.

Para finalizar la sesión, la profesora se refirió a una segunda conjetura del grupo I y a la conjetura del grupo J. Primero proyectó en la pared la conjetura del grupo I:

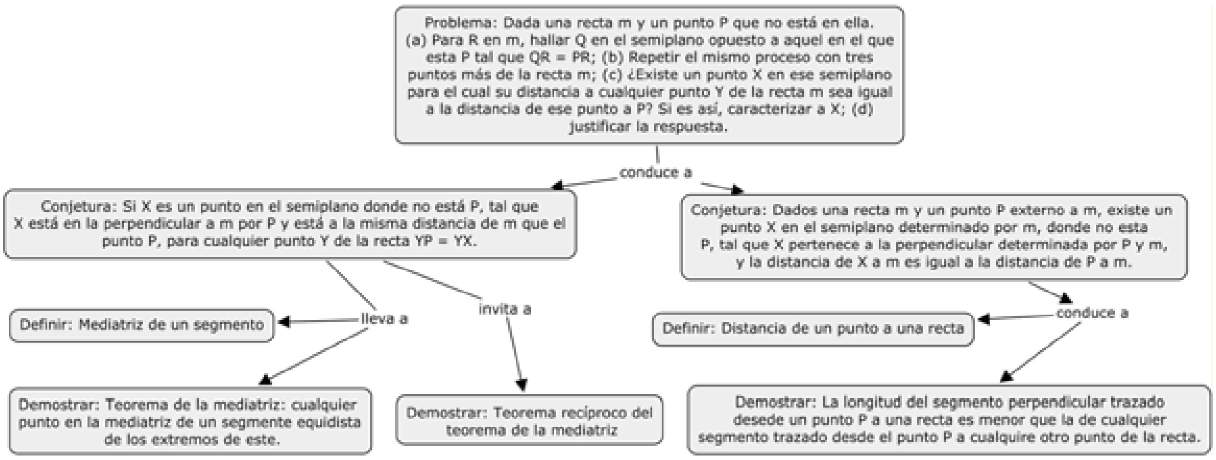
> Grupo I: para cualquier ángulo *PYX* la bisectriz está contenida en la recta *m* que pasa por *Y* y es perpendicular al segmento *PX*.

La profesora pidió opinión sobre la conjetura para ver si podían considerarla como un nuevo teorema. Ignacio dijo que la afirmación sería cierta siempre y cuando se dijera que $YP = YX$, pero esa condición no estaba incluida. Henry defendió su conjetura alegando que era complementaria de la primera que ellos habían formulado en donde se afirmaba tal condición. En ese caso, se podía admitir como cierta ya que se refería a un teorema ya demostrado en una clase anterior. Después proyectó la conjetura del grupo J:

> Grupo J: *X* siempre debe pertenecer a la circunferencia formada con radio *YP*.

Aunque la conjetura es pobre en la caracterización del punto *X* y Daniel dijo que no estaba bien formulada porque no decía que *X* estuviera en el semiplano opuesto, la profesora admitió que la condición sugerida por el grupo J era cierta pues si no hubieran borrado las circunferencias con radio *PY*, se vería que *X* si estaba en todas ellas.

En el Esquema 9 ilustramos las relaciones entre la actividad matemática realizada y el contenido temático desarrollado. El problema conduce a dos conjeturas: una de ellas lleva a definir mediatriz de un segmento, a formular el teorema de la mediatriz e invita a demostrar este teorema y su recíproco. La otra conduce a definir la distancia de un punto a una recta y demostrar que existe.



Esquema 9

EPISODIO 10: BISECTRIZ DE ÁNGULO *BAC* Y PUNTO MEDIO DE SEGMENTO *BC*

El episodio 10, Bisectriz de ángulo *BAC* y punto medio del segmento *BC*, tuvo lugar en las clases 32 y 33 (abril 23 y abril 24 de 2007)[22] del curso de geometría plana. Hasta el momento se habían incorporado al sistema axiomático enunciados básicos que determinan relaciones entre puntos, rectas y el plano, propiedades fundamentales de los ángulos y algunas propiedades de los triángulos; entre estas últimas, se habían estudiado los criterios de congruencia de triángulos lado-lado-lado, lado-ángulo-lado y ángulo-lado-ángulo y el teorema del triángulo isósceles, pero estaba pendiente la demostración del teorema recíproco al teorema del triángulo isósceles[23]. La profesora había dejado de tarea para realizar fuera de clase, en Cabri, el siguiente problema:

> Problema: En el ángulo *A* se escogen dos puntos *B* y *C*, uno a cada lado. ¿Cuándo está el punto medio del segmento *BC* en la bisectriz del ángulo *A*? Justificar la respuesta.

Los estudiantes entregaron la tarea en una clase previa a las del episodio. Sólo el grupo A, conformado por Jaime y Julián, había descrito el procedimiento de construcción; los demás habían formulado una conjetura y escrito su demostración. En la primera sesión, la profesora devolvió las tareas revisadas y pidió a dos grupos describir públicamente el procedimiento de construcción y la exploración llevada a cabo. El grupo F, compuesto por Luz y Marina, explicó que habían construido un ángulo *A* y que en lugar de señalar dos puntos *B* y *C* cualesquiera, habían decidido ubicarlos de tal forma que *AB* = *CD*, porque el problema les recordaba un

[22] Documentos primarios P79 y P85 del archivo Ciclo-Cabri del programa AtlasTi.

[23] Teorema recíproco al teorema del triángulo isósceles: si dos ángulos de un triángulo son congruentes, los lados opuestos a esos ángulos son congruentes.

teorema que aludía a una propiedad similar[24]; al trazar la bisectriz y encontrar el punto medio del $\overline{BC}$ vieron que, efectivamente, el punto medio estaba sobre la bisectriz. El grupo A explicó que ellos habían construido el ángulo *A*, su bisectriz, dos puntos *B* y *C*, uno en cada lado del ángulo, el $\overline{BC}$ y su punto medio; luego arrastraron los puntos *B* y *C* hasta lograr que el punto medio quedara en la bisectriz; en ese momento, *B* y *C* equidistaban del punto *A*. La profesora mencionó que ambos grupos tenían la misma conjetura:

> **Conjetura 1:** Si *K* es el punto medio del segmento *BC* y $AB = AC$, entonces *K* está en la bisectriz del ángulo *A*.

Dijo también que otros dos grupos habían formulado la siguiente conjetura:

> **Conjetura 2:** Si la bisectriz del ángulo *A* interseca al segmento *BC* en el punto medio, entonces $AB = AC$.

Se llevó a cabo una discusión para decidir cuál conjetura concordaba con cada procedimiento de construcción. La profesora recalcó la relación que debía haber entre el procedimiento de construcción, que impone ciertas propiedades a los objetos construidos, y la conjetura formulada: las propiedades que se imponen por construcción o por arrastre son la hipótesis de la conjetura y las propiedades que se descubren, son la tesis.

Después de analizar las descripciones y decidir que la construcción realizada por el grupo A concordaba con la segunda conjetura y no con la primera, la profesora pidió a María explicar brevemente la demostración que ella y Efraín habían hecho, relacionada con la Conjetura 2 (aunque ellos partieron de un triángulo *ABC* y no del $\angle A$) pues le parecía una propuesta muy creativa que quería que todos conocieran. El interés no era escribir exhaustivamente todos los pasos de la demostración, tal como ellos habían escrito la demostración en la tarea (Tabla 6), sino mencionar un esbozo de ésta. Al no tener suficientes elementos para demostrar que los triángulos *ABM* y *ACM* (Figura 43a) eran congruentes y así poder afirmar que los segmentos *AB* y *AC* eran congruentes (dado que la correspondencia lado-lado-ángulo no es un criterio de congruencia), María y Efraín decidieron construir un triángulo *DMB* congruente con el ΔAMC (Figura 43b)[25] y obtener por esta vía la congruencia de los ángulos *BDM* y *CAM*; esto les permitió afirmar que los lados *AC* y *BD* eran congruentes; después consideraron la congruencia de $\angle BAM$ y $\angle BDM$ por ser ambos congruentes al $\angle CAM$; por el teorema del triángulo isósce-

[24] En un ejercicio propuesto en una tarea previa se pedía a los estudiantes demostrar la existencia de la bisectriz de un ángulo *A*, a partir de algunos pasos que se sugerían en el enunciado del ejercicio entre los que estaban: tomar los puntos *B* y *C* a cada lado del ángulo de tal manera que $AB = AC$, construir el segmento *BC*, tomar el punto medio *D* del segmento *BC* y demostrar que los triángulos *ADB* y *ADC* son congruentes.

[25] Muy probablemente la idea para la construcción auxiliar surgió de una construcción que días antes se había usado en el curso para demostrar el teorema del ángulo externo. María y Efraín querían aprovechar los criterios de congruencia de triángulos y propiedades del triángulo isósceles.

les concluyeron que los segmentos *BD* y *AB* eran congruentes y, por transitividad, llegaron la congruencia de los lados *AB* y *AC*.

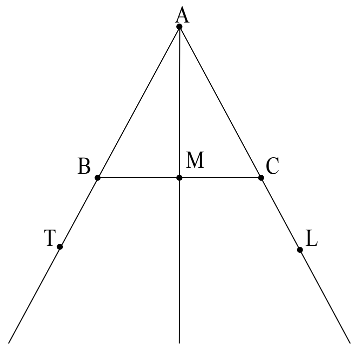


Figura 43a

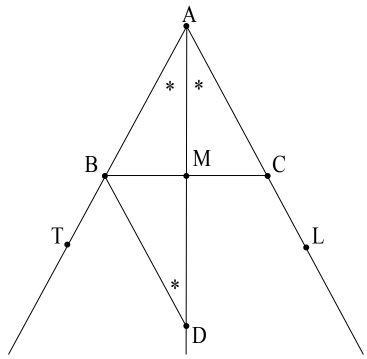


Figura 43b

Al pasar a exponer su demostración frente a los compañeros María iba leyendo las afirmaciones y, con ayuda de la profesora y el apoyo de una figura que iban complementando - a medida que la demostración incluía construcciones auxiliares - iba explicando los pasos más importantes. Como la afirmación de la congruencia de los segmentos *AB* y *DB* se justificaba con el teorema recíproco del teorema del triángulo isósceles, María justificó este paso con la frase "teorema que no hemos demostrado" (ver Tabla 6 paso 31), pues esta era una tarea que tenían pendiente. Al finalizar la exposición de María, dos estudiantes se ofrecieron a presentar sendos esbozos de las demostraciones del teorema recíproco del teorema del triángulo isósceles.

Conjetura: Dado el triángulo *A*, si la bisectriz de $\angle A$ interseca a $\overline{BC}$ en el punto medio de $\overline{BC}$, entonces $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ y ΔABC es isósceles con $\overline{AB} \cong \overline{AC}$.	
Afirmación	Justificación
1. ΔABC	1. Dado
2. $\angle$A	2. Dado
3. $\exists\ \overrightarrow{AT}$	3. Definición de ángulo y afirmación 2
4. $\exists\ \overrightarrow{AL}$	4. Definición de ángulo y afirmación 2
5. B $\in \overrightarrow{AT}$	5. Dado
6. C $\in \overrightarrow{AL}$	6. Dado
7. $\overrightarrow{AT} = \overrightarrow{AB}$	7. Definición de rayo y afirmación 5
8. $\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AC}$	8. Definición de rayo y afirmación 6
9. $\overrightarrow{AX}$ es la bisectriz de $\angle A$	9. Teorema de la existencia de la bisectriz y afirmación 2.
10. $\overrightarrow{AX}$ interseca a $\overline{BC}$	10. Postulado: la bisectriz de un $\angle$A en un ΔABC interseca al lado opuesto; y afirmaciones 1 y 2
11. $\overrightarrow{AX} \cap \overline{BC} = \{M\}$	11. Dado
12. M es el punto medio de $\overline{BC}$	12. Dado

Conjetura: Dado el triángulo A, si la bisectriz de $\angle A$ interseca a $\overline{BC}$ en el punto medio de $\overline{BC}$, entonces $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ y ΔABC es isósceles con $\overline{AB} \cong \overline{AC}$.	
13. $\overline{BM} \cong \overline{CM}$	13. Definición de punto medio y afirmación 12
14. B-M-C	14. Definición de punto medio y afirmación 12
15. $\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{AM}$	15. Definición de rayo y afirmación 11
16. $\exists\ \overline{AM}$	16. El segmento es subconjunto del rayo
17. AM = t, $t \in \mathbb{R}$ positivos	17. Postulado de correspondencia puntos-números y afirmaciones 11 y 1
18. $\exists\, P$ tal que A-M-P.	18. Tercer teorema de interestancia y afirmación 16
19. $\exists\ \overrightarrow{MP}$ y $\overrightarrow{MA}$	19. Definición de rayo y afirmación 18
20. $\exists\, D$ tal que $MD = t$	20. Teorema de localización de puntos
21. $MD = AM$	21. Propiedad transitiva y afirmaciones 17 y 20
22. $\overline{MD} \cong \overline{AM}$	22. Definición de congruencia
23. $\overrightarrow{MP}$ y $\overrightarrow{MA}$ son rayos opuestos	23. Definición de rayos opuestos y afirmación 18
24. $\exists\ \overleftrightarrow{MC}$ y $\overleftrightarrow{MB}$	24. Definición de rayos opuestos y afirmación 14
25. $\angle AMC$ y $\angle BMD$ son opuestos por el vértice.	25. Definición de ángulos opuestos por el vértice y afirmaciones 23 y 24
26. $\angle AMC \cong \angle BMD$	26. Teorema de ángulos opuestos por el vértice [son congruentes]
27. $\Delta CMA \cong \Delta\ BMD$	27. Postulado congruencia lado-ángulo-lado y afirmaciones 22, 26 y 13
28. $\angle CAM \cong \angle BDM$	28. Ángulos correspondientes de triángulos congruentes y afirmación 27
29. $\angle CAM \cong BAM$	29. Definición de bisectriz y afirmaciones 9 y 15
30. $\angle BDM \cong \angle BAM$	30. Propiedad transitiva y afirmaciones 28 y 29
31. $\overline{BD} \cong \overline{AB}$	31. Teorema que no hemos demostrado: "si dos ángulos de un triángulo son congruentes, entonces los lados opuestos a éstos son congruentes" y afirmación 30
32. $\overline{BD} \cong \overline{AC}$	32. Partes correspondientes de triángulos congruentes son congruentes.
33. $\overline{AB} \cong \overline{AC}$	Propiedad transitiva y afirmaciones 31 y 32.

Tabla 6

En la siguiente sesión de este episodio se esbozaron las demostraciones de otras conjeturas alrededor del mismo problema formuladas por otros dos grupos, sin entrar en detalles sobre el procedimiento de construcción:

Conjetura 3: Si el segmento *BC* es perpendicular a la bisectriz del ángulo *A* entonces la intersección entre la bisectriz y el segmento *BC* es el punto medio *K* del segmento *BC*.

Conjetura 4: Si el triángulo *ABC* es isósceles con *AB* igual a *AC*, entonces la bisectriz del ángulo *A* interseca al segmento *BC* en el punto medio.

La profesora pidió a Darío y a Daniel explicar cómo habían demostrado la Conjetura 3 y la Conjetura 4, respectivamente. Darío mencionó que los triángulos *AKB* y *AKC* (Figura 44) eran congruentes por el criterio ángulo-lado-ángulo, por lo que el segmento *BK* era congruente con el segmento *CK*. Por su parte, Daniel explicó que ellos habían hecho uso del criterio lado-ángulo-lado.

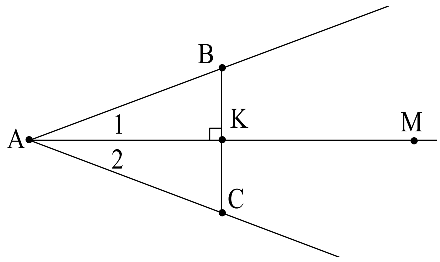
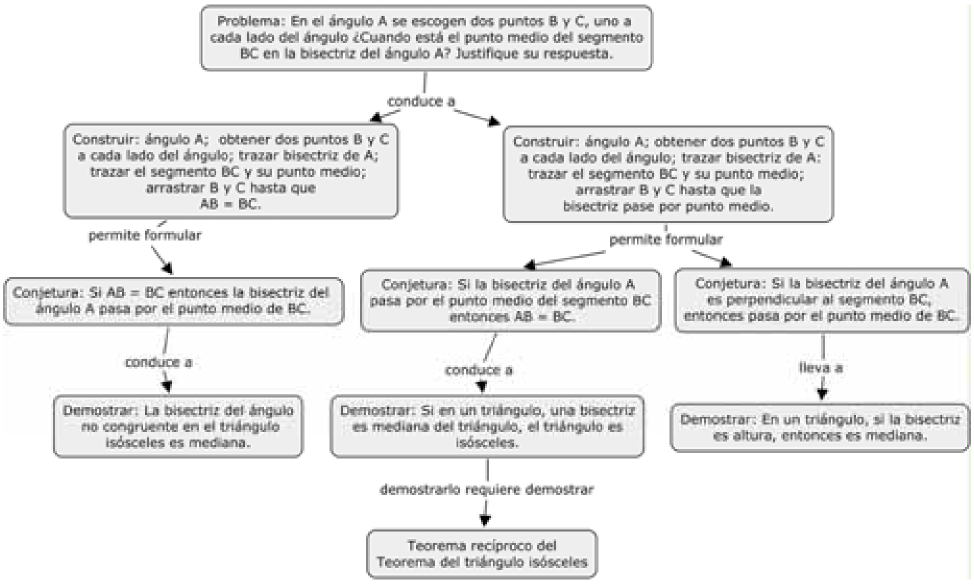


Figura 44

Una vez Daniel dio su explicación, la profesora mencionó que esa era la base para demostrar que la bisectriz del ángulo no congruente de un triángulo isósceles era también mediana del triángulo, hecho que aún no sabían cuando habían intentado demostrar el teorema del triángulo isósceles[26]. A pesar de haber hecho el esbozo de la demostración de este nuevo enunciado, la profesora decidió que no había necesidad de incluirlo en el sistema pues la demostración era fácil de reproducir en cualquier momento.

En el Esquema 1 ilustramos las relaciones entre las actividades realizadas y el contenido desarrollado.

[26] Teorema del triángulo isósceles: los ángulos opuestos a los lados congruentes de un triángulo isósceles son congruentes.



Esquema 10

EPISODIO 11: CRITERIO HIPOTENUSA - CATETO

El episodio 11, Criterio Hipotenusa - Cateto, tuvo lugar en las clases 33, 35 y 36 (abril 24, abril 30 y mayo 03)[27] del curso de geometría plana. Hasta el momento se habían incorporado al sistema axiomático enunciados básicos que determinan relaciones entre puntos, rectas y el plano, propiedades fundamentales de los ángulos y algunas propiedades de los triángulos; entre estas últimas, se habían estudiado los criterios de congruencia de triángulos lado-lado-lado, lado-ángulo-lado, ángulo-lado-ángulo y ángulo-ángulo-lado y algunos teoremas relacionados con propiedades del triángulo isósceles (como el teorema del triángulo isósceles y su recíproco). Este episodio sucedió en forma intercalada con el episodio 7 (Teorema del triángulo isósceles) y con el episodio 9 (Teorema de la mediatriz). Aunque el episodio 9 comenzó antes que el episodio 11, el teorema hipotenusa-cateto se usó en la demostración del teorema recíproco al teorema de la mediatriz, pues el episodio 9 terminó después de concluido el episodio 11.

En la clase del 29 de marzo se llegó a la conclusión de que dos triángulos que tuvieran respectivamente congruentes dos lados y un ángulo, no necesariamente eran congruentes cuando el ángulo no estaba comprendido entre los lados. La primera sesión del episodio 11 comenzó cuando la profesora sugirió la siguiente tarea:

> *Problema:* Explorar si bajo ciertas condiciones de los triángulos, se puede admitir que lado-lado-ángulo sea un criterio de congruencia de triángulos.

---

[27] Documentos primarios P86, P91 y P94 del archivo Ciclo-Cabri del programa AtlasTi.

Los estudiantes tenían a su disposición las calculadoras. La profesora les pidió trabajar en parejas, analizando diversas situaciones en las que para triángulos muy especiales quizás se pudiera admitir el criterio lado-lado-ángulo. Después de trabajar unos minutos en parejas la clase terminó y la profesora propuso retomar el problema más adelante.

La segunda sesión del episodio tuvo lugar casi una semana después. La profesora recordó cual era el problema que estaban trabajando y dio unos minutos para que las parejas retomaran la exploración que habían comenzado a hacer y propusieran sus ideas. Ella se desplazaba por los puestos de trabajo para enterarse de lo que los grupos hacían. Al ver que un estudiante hacía un dibujo a mano alzada de dos triángulos con unas supuestas medidas de los lados, puestas al azar, aclaró que los triángulos debían poderse construir, es decir, tenían que asegurarse que el dibujo correspondiera a triángulos posibles. Después revisó lo que estaba haciendo el grupo C (Darío y Leopoldo) y el grupo A (Julián y Jaime) y decidió que Julián pasara primero a exponer su idea.

Julián proyectó la figura hecha en Cabri por el grupo A y mostró a sus compañeros un triángulo, como el de la Figura 45.

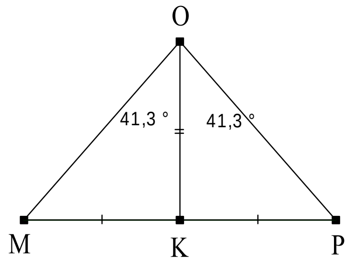


Figura 45

Explicó que los triángulos *OKM* y *OKP* tenían dos pares de lados congruentes, $\overline{MK} \cong \overline{KP}$ y $\overline{OK} \cong \overline{OK}$ y un par de ángulos congruentes $\angle MOK$ y $\angle POK$. Pero al ser interrogado sobre cómo había hecho la construcción, Julián dijo que habían tomado a *K* como punto medio del $\overline{MP}$, luego habían tomado un punto *O* cualquiera, habían construido el $\overline{KO}$ y habían arrastrado a *O* hasta que los ángulos $\angle MOK$ y $\angle POK$ quedaran congruentes; es decir, ellos habían logrado la congruencia de los ángulos moviendo el punto *O*, hasta ubicarlo sobre la mediatriz del $\overline{KO}$. La profesora evaluó que en ese caso, estaban imponiendo por arrastre la perpendicularidad de los segmentos *KO* y *MP*, es decir la congruencia de los ángulos *OKM* y *OKP*, por lo que realmente el criterio que estaba usando el grupo A era el criterio lado-ángulo-lado. Julián afirmó que en ese caso no existían triángulos especiales para los cuales se cumpliera el criterio lado-lado-ángulo.

Después pasó Darío a mostrar la propuesta del grupo C. Mostró una representación, como la de la Figura 46, que él y Leopoldo habían hecho en la clase del 29 de marzo para mostrar que lado-lado-ángulo no era un criterio de congruencia.

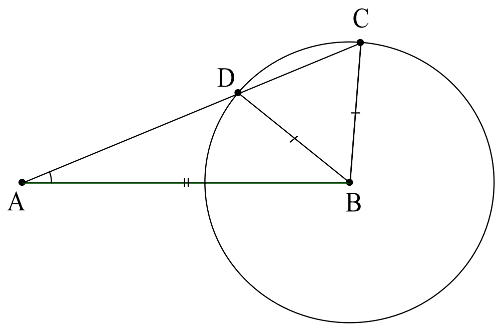


Figura 46

Darío explicó que los triángulos *ABC* y *ABD* no eran congruentes aunque tenían el $\angle A$ común, el lado *AB* común y el lado *BD* congruente con el lado *BC*. La exploración que ellos habían emprendido con respecto al nuevo problema consistió en buscar la manera de lograr obtener, a partir de la construcción, un par de triángulos congruentes (Figura 47). Por arrastre del punto *C*, en busca de una posición para la cual el tercer lado fuera congruente, llegaron al caso en el que el punto *A* coincidía con el punto *D*; en ese caso, se tenía un solo triángulo y éste era isósceles, lo que los llevó a analizar en qué casos dos triángulos isósceles cumplían el criterio lado-lado-ángulo.

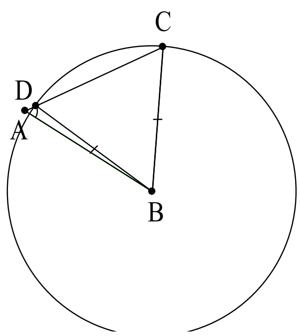


Figura 47

Darío explicó que cuando los lados respectivamente congruentes eran los lados congruentes de cada triángulo y el par de ángulos correspondiera era uno de los ángulos congruentes del triángulo isósceles, se cumplía el criterio.

A continuación pasó Ignacio a presentar la construcción que había hecho con Nancy (Grupo E). Ellos proyectaron en el tablero una imagen como la de la Figura 48.

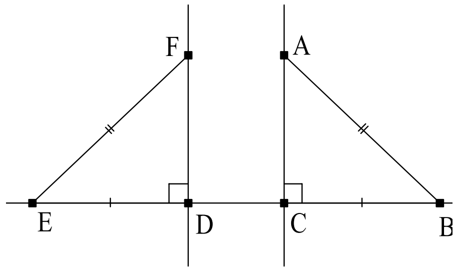


Figura 48

Ignacio explicó que ellos habían construido el $\overline{BC}$ congruente al $\overline{ED}$, sobre la misma recta. Luego habían trazado perpendiculares por los puntos D y C y determinado el punto A; luego habían usado compás para copiar la medida del $\overline{BA}$, haciendo centro en E y así obtener el $\overline{EF}$ congruente al $\overline{BA}$. Cómo habían trazado rectas perpendiculares, habían obtenido dos triángulos ΔFDE y ΔACB rectángulos y con dos lados congruentes que no comprendían al ángulo recto. Como la clase se había terminado, la profesora pidió a los estudiantes pensar en cómo demostrar que lo que habían propuesto Ignacio y Nancy era cierto.

En la tercera sesión del episodio[28] la profesora recordó que en la clase anterior habían surgido dos conjeturas relacionadas con condiciones especiales de triángulos en donde lado-lado-ángulo era criterio de congruencia. Mencionó que Darío y Leopoldo e Ignacio y Nancy habían obtenido resultados que permitían formular las siguientes dos conjeturas:

> Conjetura 1: Si dos triángulos son isósceles y tienen respectivamente congruentes los pares de lados congruentes y un par de ángulos congruentes entonces es válido el criterio lado-lado-ángulo.
>
> Conjetura 2: Si dos triángulos son rectángulos con la hipotenusa y un cateto de uno congruentes a la hipotenusa y un cateto del otro, los triángulos son congruentes.

La profesora dejó para otra clase la demostración de la primera conjetura y mencionó que la segunda se solía llamar criterio hipotenusa-cateto. Pidió a los estudiantes pensar en la demostración. Para que todos trabajaran sobre figuras similares ella propuso una representación como la de la Figura 49 en donde señaló como información inicial que $\overline{ED} \cong \overline{BC}$, $\overline{EF} \cong \overline{BA}$ y $\angle D \cong \angle C$. Comenzó a desplazarse por los puestos para enterarse de lo que hacían los grupos y organizar la socialización de las propuestas.

[28] DVD 6, CD49 video 2

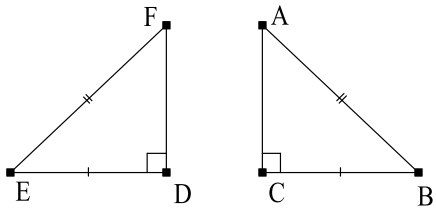


Figura 49

La primera idea que observó fue la de Daniel y su grupo quienes pretendían usar el teorema de Pitágoras para mostrar que los segmentos *FD* y *AC* eran congruentes. La profesora comentó públicamente esta idea y recordó que se debían usar sólo los enunciados del sistema. Con el teorema de Pitágoras únicamente podían re-confirmar que la conjetura era cierta.

Después de un tiempo, se refirió a la idea de Luz y Marina. Ellas habían decidido construir un triángulo trazando las rectas *CB* y *AC*, y determinando los segmentos $\overline{GC} \cong \overline{CA}$ y $\overline{CH} \cong \overline{CA}$ (Figura 50a). La profesora explicó que de esa manera el ΔGCH no quedaba congruente con ninguno de los triángulos iniciales. Según la profesora, ellas podían haber tomado el punto *G* tal que los segmentos *GC* y *CB* quedaran congruentes (Figura 50b) y así los triángulos *GCH* y *BCA* quedarían congruentes, aunque la construcción tampoco tendría relación con el triángulo *DEF*. Sin embargo, valoró el hecho de intentar construir un triángulo congruente con alguno de los triángulos iniciales.

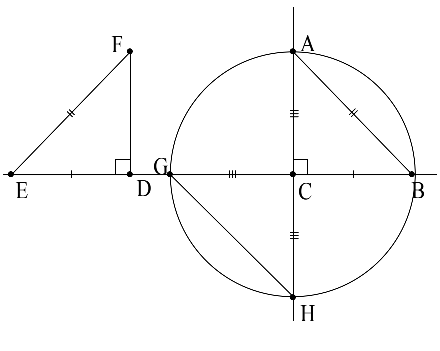


Figura 50a

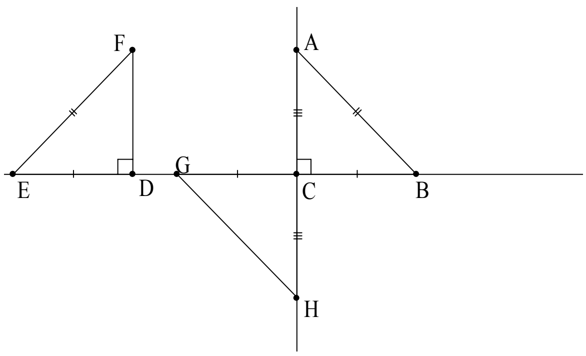


Figura 50b

Luego le pidió a Efraín contar la propuesta de él y María mientras ella la ilustraba en el tablero. Efraín propuso construir un punto *G* sobre la recta *ED* tal que $\overline{DG} \cong \overline{CB}$ y construir el ΔFDG (Figura 51). Así, obtuvo un ΔFDG congruente al ΔFDE, pegado al ΔFDE, pero no relacionado con el ΔACB, a pesar de que había intentado establecer la relación cuando transfirió la medida de *CB* en la recta *ED*.

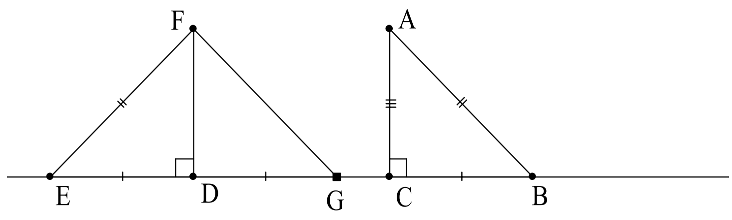


Figura 51

A continuación Henry y Antonio explicaron su propuesta mientras la profesora la ilustraba (Figura 52). La idea de ellos era construir un triángulo isósceles para lo cual, construyeron un $\angle DFH$ congruente al $\angle EFD$ y luego localizaron el punto G sobre el rayo FG tal que $\overline{EF} \cong \overline{FG}$. La profesora objetó que al hacer la construcción de esa manera no se podía garantizar que los puntos E, D y G quedaran colineales por lo que no se podía afirmar que ΔEFG fuera isósceles.

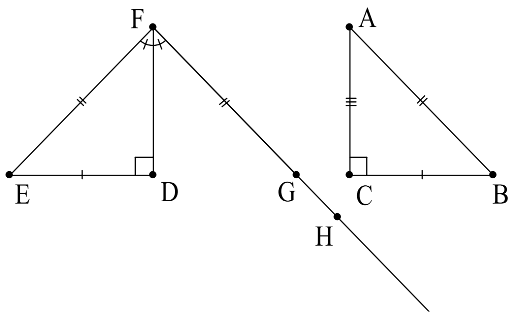


Figura 52

Luego la profesora pidió a Melisa explicar la propuesta de su grupo. Ella hizo una representación como la Figura 53. La estudiante explicó que tomó la medida del ángulo E y construyó el $\angle CBK$ y después, transfirió la medida de $\overline{EF}$ y localizó el punto G tal que el $\overline{EF} \cong \overline{BG}$, para formar el ΔCBG.

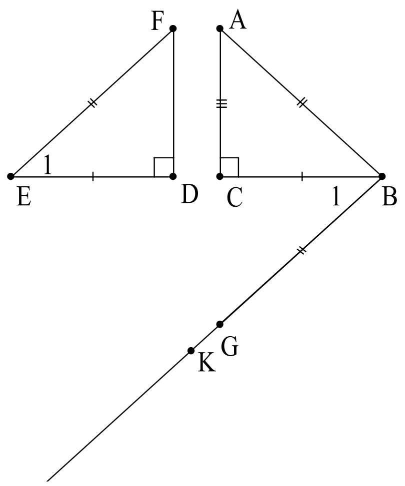


Figura 53

La profesora comentó que, a diferencia de las otras propuestas, Melisa había tomado elementos de uno de los triángulos (ΔDEF) para hacer una construcción auxiliar sobre el otro triángulo (ΔCBA). Esto era un avance, aunque la construcción tenía el mismo problema que la construcción de Henry pues no tenían como mostrar que los puntos *A, C* y *G* eran colineales. Si pudieran garantizar la colinealidad, se podría demostrar que el ΔDEF era congruente al ΔCBG y éste a su vez al ΔCBA y usar la transitividad para concluir la congruencia de los triángulos iniciales.

Finalmente, Gonzalo pasó al tablero y propuso trazar la recta *AC* y sobre el rayo opuesto al rayo *CA* transferir la medida *DF* para hallar un punto *G* tal que el $\overline{DF} \cong \overline{CG}$. Luego unió el punto *G* con el punto *B*. Gonzalo explicó que los triángulos *BCG* y *EDF* eran congruentes por el criterio lado-ángulo-lado (Figura 54).

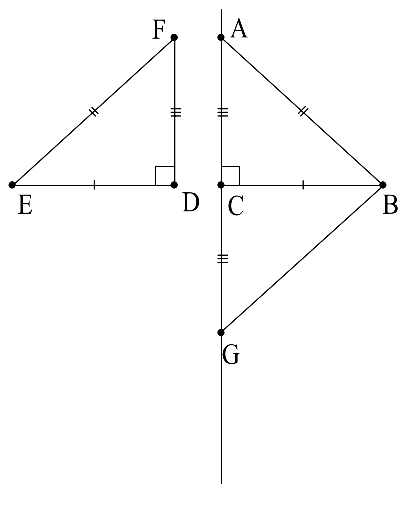
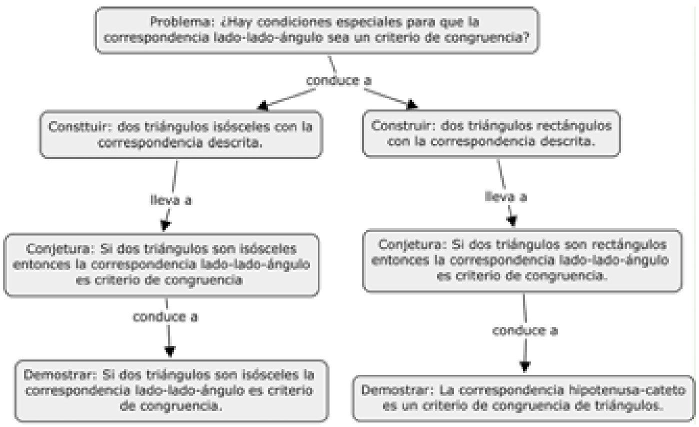


Figura 54

Entre Gonzalo, Daniel, Ignacio, Marina, Melisa y la profesora, mostraron que los triángulos *ABC* y *GBC* eran congruentes porque el triángulo *ABG* era isósceles y entonces los segmentos *AC* y *CG* eran congruentes; y como $\Delta GBC \cong \Delta EFD$ los triángulos *ABC* y *EFD* resultaban congruentes. La profesora concluyó que habían demostrado el criterio hipotenusa-cateto, gracias a la construcción colectiva.

Antes de pasar a otro tema Antonio afirmó que él tenía otra propuesta para demostrar el criterio hipotenusa-cateto. Pasó al tablero y, a partir del ΔABC rectángulo en *B*, construyó un cuadrilátero *ABCD* y empezó a establecer varias congruencias; su propuesta fracasó porque no logró involucrar al otro triángulo en la construcción. Sin embargo, la profesora resaltó el esfuerzo y mencionó que era interesante el hecho de haber usado la hipotenusa para construir un triángulo congruente a un triángulo dado.

En el Esquema 11 ilustramos las relaciones entre las actividades realizadas y el contenido desarrollado.



Esquema 11

EPISODIO 12: LADO LARGO SUBTIENDE ÁNGULO MAYOR

El episodio 12, Lado largo subtiende ángulo mayor, tuvo lugar en las clases 26 y 34 (abril 10 y abril 26)[29] del curso de Geometría Plana. Hasta el momento se habían incorporado al sistema axiomático enunciados básicos que determinan relaciones entre puntos, rectas y el plano, propiedades fundamentales de los ángulos y algunas propiedades de los triángulos; entre estas últimas, ya se habían estudiado los criterios de congruencia de triángulos lado-lado-lado, lado-ángulo-lado, ángulo-lado-ángulo y ángulo-ángulo-lado y algunos teoremas relacionados con propiedades del triángulo isósceles (teorema del triángulo isósceles, recíproco del teorema del triángulo isósceles). Este episodio sucedió en forma intercalada con los episodios 7 (Teorema del triángulo isósceles), 8 (Teorema del ángulo externo), 9 (Teorema de la mediatriz) y 11 (Criterio Hipotenusa-cateto).

[29] Documento primario P88 del archivo CicloCabri del programa AtlasTi.

En la clase del 10 de abril se hizo un primer acercamiento al problema. La profesora entregó un enunciado que constaba de dos partes a) y b). La parte a) dio lugar al episodio 8 y la parte b) a este episodio. Los estudiantes trabajaron en la sala de cómputo en busca de posibles conjeturas, que redactaron y entregaron al finalizar la clase. Las conjeturas se retomaron en la clase del 26 de abril. El enunciado del problema, con la pregunta correspondiente a este episodio fue:

> Problema: Dibuje un triángulo *MOP* y construya un punto *K* sobre la recta *MP*. (b) En el triángulo *OKP*, ¿qué condición obliga a que m$\angle OKP >$ m$\angle OPK$?

A continuación hacemos una breve síntesis del trabajo desarrollado por tres grupos. María y Efraín[30] partieron de la construcción que tenían hecha para la parte a) del problema (Figura 55), tomaron las medidas de los dos ángulos ($\angle OKP$ y $\angle OPK$) y comenzaron a arrastrar el punto *K* sobre la recta *MP*, observando el cambio en la medida de los ángulos, pero sin atender al tamaño de los lados. En varias oportunidades colocaron a *K* sobre el punto *P*, sin apreciar ningún hecho interesante. Después decidieron arrastrar a *P*, pero como éste era el punto inicial con el que había sido construida la recta, al moverlo se movía toda la construcción, lo cual les impedía identificar alguna regularidad. Después decidieron mover al punto *O*, pero esta exploración tampoco fue útil. Al terminar el tiempo de trabajo en la sala de informática este grupo no había sacado ninguna conclusión.

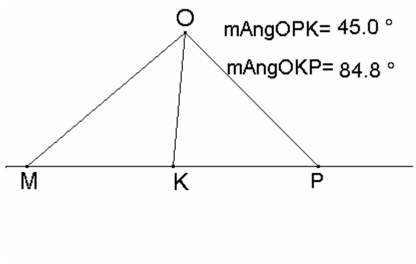


Figura 55

Darío y Leopoldo[31] también partieron de la construcción que tenían hecha para el análisis de la parte a). Midieron el ángulo *OPK* pues ya tenían la medida del ángulo *OKP* y comenzaron a arrastrar los puntos *K* y *P*. Inicialmente observaron que, cuando el segmento *OP* era perpendicular a la recta *MK* - es decir, el $\angle OPK$ medía 90 - no había ninguna posibilidad de que el ángulo *OKP* fuera mayor al ángulo *OPK*. Después, ubicaron al punto *P* de tal forma que el ángulo *OPM* fuera agudo y arrastraron el punto *K*; Darío notó que en un momento dado los ángulos eran iguales y que esto pasaba cuando el triángulo era isósceles; finalmente se fijaron que cuando el ángulo *OPK* era mayor que 90, tampoco había posibilidad de que el ángulo *OKP* fuera mayor que el $\angle OPK$. Redactaron tres conjeturas (aunque la tercera era una adaptación de la segunda a la forma si-entonces): (i) cuando el $\angle OPK$ es mayor que 90, no puede ser que *OKP* sea mayor que 90; (ii) para que

[30] CD 34 v3.

[31] CD80 video 1.

haya posibilidad de que *OKP* sea mayor, el $\angle OPK$ tiene que ser menor que 90; (iii) si la medida de $\angle OPK$ es menor que 90 entonces existe al menos un ángulo tal que la medida de $\angle OKP$ sea mayor[32].

Jorge y Ana[33] también partieron de la construcción que tenían, pero tuvieron la precaución de alejar el punto *M* de los otros puntos, para que no los afectara visualmente. Tomaron las medidas del $\angle OKP$ y del $\angle OPK$ y comenzaron a arrastrar los puntos *K* y *P* para observar alguna regularidad. Después de un tiempo sin ver nada interesante, dejaron a *P* ubicado de tal forma que el $\angle OPK$ fuera agudo y movieron a *K* sobre la recta alejándolo del punto *P*; se dieron cuenta que, en un punto dado, los dos ángulos eran iguales. Jorge se apoyó en un dibujo hecho en papel para mostrar a Ana que si el $\angle OPK$ era agudo, el $\angle OKP$ sería mayor, pero sólo hasta el punto donde eran iguales, pues después, al seguir alejándolo de *P*, el ángulo comenzaba a ser menor. El video no registra si los estudiantes escribieron alguna conjetura.

La segunda sesión del episodio tuvo dos semanas después. Los estudiantes habían entregado a la profesora las conjeturas y casi ninguno había hecho la construcción en las calculadoras, pues los problemas se habían trabajado en la sala de cómputo. Al comenzar la sesión, la profesora les devolvió las conjeturas formuladas para que ellos revisaran qué habían hecho; además, les recordó qué el problema se trataba específicamente de analizar circunstancias para las cuales la medida del $\angle$ *OKP* era mayor que la del $\angle$ *OPK*. Les dijo que sólo iban a estudiar las conjeturas referidas a esos dos ángulos, pues algunos grupos se habían dedicado a estudiar otros ángulos de la construcción, que no venían al caso para resolver la pregunta. Para comenzar el análisis, les pidió decidir si estaban de acuerdo con las conjeturas que ella les iba a ir presentando, sugeridas por uno o varios grupos; para ello, debían retomar la construcción, si la tenía en las calculadoras, o hacer otra. Comenzó con la conjetura del grupo A.

> Grupo A: Sea ΔOMP y un punto *K* en la recta *MP*, entonces $m\angle OKP > m\angle OPK$ si *K* está en el segmento *MP*, y si *K* no está en el segmento *MP*, entonces $m\angle OPK > m\angle OKP$.

Los estudiantes trabajaron sobre sus construcciones hechas en Cabri o sobre unas nuevas, en las calculadoras. Después de un tiempo, Orlando pasó al tablero a ilustrar un contraejemplo, pero, por falta de luz, no pudo proyectar su representación hecha en Cabri. Hizo un dibujo en el que mostró que cuando el triángulo *OMK* era isósceles y *K* estaba en *P* o en *M* no se cumplía la conjetura (Figura 56).

[32] El cambio en la redacción de la conjetura (ii) a la (iii) es evidencia del interés de los estudiantes por escribir la conjetura atendiendo a las normas para ello.

[33] CD75 video 2.

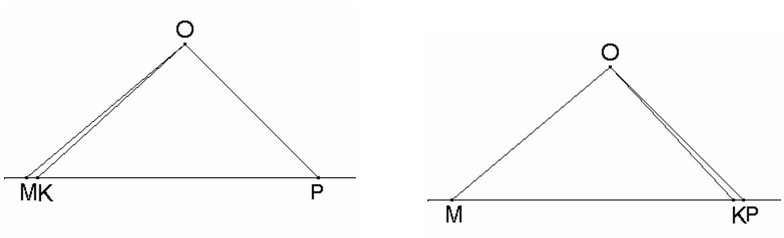


Figura 56

Según Orlando, en el caso en que *K* fuera *P* no habría triángulo, y si *K* estaba en *M* el triángulo *OKP* resultaba isósceles y tampoco se cumplía la conjetura formulada por el grupo A. Juan también pasó al tablero y mostró que si el triángulo *OMP* no era isósceles se podían tener posiciones de *K* en el segmento *MP* para las cuales el $\angle OKP$ era menor que el $\angle OPK$ (Figura 57). Aunque Juan se equivocó al señalar algunos puntos, no se discutió ese aspecto pues ya se tenían suficientes contraejemplos para rechazar la conjetura del grupo A. Después, la profesora escribió en el tablero la conjetura del grupo B.

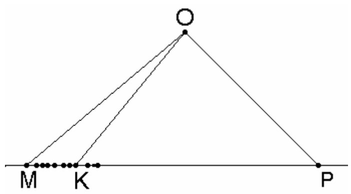


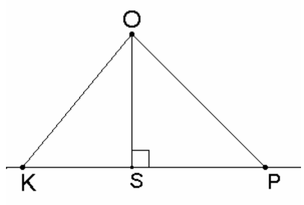
Figura 57

> Grupo B: Si *O* pertenece a la recta perpendicular a la recta *KP* que pasa por *S*, (punto medio del segmento *KP*), entonces $m\angle OPK = m\angle OKP$[34].

Nuevamente trabajaron un tiempo en parejas. Germán creyó tener un contraejemplo, pero estaba equivocado. Varios estudiantes manifestaron su aprobación de la conjetura. Después de un tiempo, Orlando dijo que él no entendía qué tenía que ver que el punto *O* estuviera en la perpendicular al segmento *KP*, trazada por el punto medio de éste, si María y Efraín habían movido al punto *K* hasta que los ángulos fueran iguales. La profesora pidió a Efraín describir qué habían hecho en Cabri para ver si la conjetura coincidía con la construcción. Efectivamente si coincidía pues ellos habían re-ubicado a *O* en la mediatriz del segmento *KP* y se habían dado cuenta que los ángulos eran iguales. Una vez hecha la aclaración, y dado que todos estaban de acuerdo con la conjetura, la profesora pidió demostrarla. Varios exclamaron a coro que se usaba lado-ángulo-lado, pero la profesora

[34] Al proponer la conjetura, Orlando opinó que no debían estudiarla pues no respondía la pregunta del problema. La profesora le dijo que sí la iban a estudiar pues ella quería sacarle provecho.

pidió que alguien pasara a explicar. Germán hizo una representación como la de la Figura 58 y fue elaborando un argumento deductivo, acompañado de la escritura simbólica de varias afirmaciones; usó el criterio lado-ángulo-lado.



$KS = SP$

$\overline{KS} \cong \overline{SP}$

$\overline{OS} \cong \overline{OS}$

$\angle KSO \cong \angle OSP$

Figura 58

Después de la intervención de Germán, la profesora pidió expresar, de una manera general, qué era lo que acababan de demostrar. Después de discutir varias propuestas, entre ella y algunos estudiantes redactaron el teorema: si en un triángulo una altura es también mediana, entonces el triángulo es isósceles. La profesora explicó que ella había escogido la conjetura del grupo B porque daba lugar a un teorema nuevo, inesperado, pero bienvenido. A continuación escribió en el tablero la conjetura sugerida por el grupo E:

> Grupo E: $m\angle OKP > m\angle OPK$ cuando PK es menor a la distancia entre P y la intersección de la altura con respecto a O.

Antes de analizar si la conjetura era cierta, la profesora pidió a los estudiantes reformularla de la forma si-entonces para que todos estuvieran seguros de cuál era la hipótesis y cuál la tesis del posible teorema. Todos aceptaron la propuesta de Orlando: si el segmento PK es menor a la distancia entre P y la intersección de la altura con respecto a O entonces $m\angle OKP > m\angle OPK$. Después, analizaron si la conjetura era cierta o no. Darío propuso un contraejemplo que llevó a rechazarla (Figura 59).

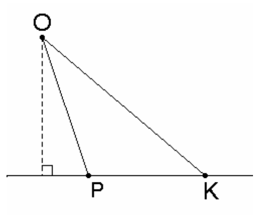


Figura 59

La profesora preguntó qué podría haber llevado al grupo E a formular dicha conjetura y Daniel sugirió que si se invertían las posiciones de los puntos K y P, sí se cumpliría la conjetura. Decidieron entonces expresar mejor la hipótesis para obtener una conjetura cierta. Juan propuso referirse a la interestancia entre los puntos P, K y S (pie de la altura) en lugar de a la distancia entre ellos. Sugirió el siguiente enunciado: "si en el triángulo OKP el segmento SO es la altura desde O a la recta

PK y se tiene la interestancia *S–K–P* entonces $m\angle OKP > m\angle OPK$ (Figura 60). Redactada de esta forma, nadie objetó que fuera cierta.

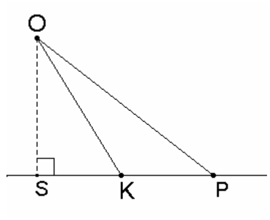


Figura 60

La profesora pidió dejar pendiente la demostración, para analizar primero la conjetura del grupo F[35], analizar si es cierta y si tenía relación con la conjetura, del grupo E, reformulada.

> Grupo F: Si *OKP* es un triángulo, si $OP > KP > OK$ entonces $m\angle OKP > m\angle OPK$.

Después de hacer algunas observaciones sobre la forma como Luz y Marina habían escrito la conjetura, la profesora les pidió considerar si era cierta. Henry mostró una figura que estaba representada en el tablero que era un contraejemplo (Figura 60); allí, no se cumplían todas las condiciones del antecedente pero si se cumplía el consecuente. Analizaron que como el antecedente era falso, no se invalidaba la conjetura; sin embargo, la profesora sugirió pensar cómo reformularla para que diera cuenta de una propiedad siempre cierta. Debían pensar qué condiciones era estrictamente necesario incluir en el antecedente, revisando qué condiciones estaban expresadas en el antecedente formulado por Luz y Marina y también en el ejemplo propuesto por Henry. Decidieron suprimir una parte de las desigualdades dejando la conjetura de la siguiente forma: Dado el triángulo *OKP*, si $OP > OK$ entonces $m\angle OKP > m\angle OPK$. La profesora pidió expresar en lenguaje cotidiano la conjetura. Juan propuso que el teorema sería: el ángulo opuesto al lado más largo de un triángulo es el más grande. Aunque la profesora estuvo de acuerdo, explicó que para hacer la demostración tocaba hacer una comparación entre dos de los ángulos. Hizo una representación en el tablero (Figura 61) para que todos se basaran en ella y les pidió pensar cómo demostrar la conjetura.

---

[35] Al demostrar la conjetura que sería una adaptación de la conjetura del grupo F se tenía un teorema con el cuál demostrar esta conjetura. En la sesión de clase no hubo tiempo para retomar la conjetura y demostrarla.

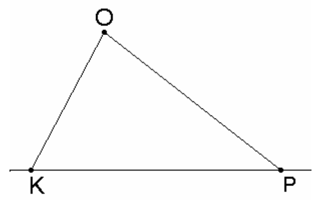


Figura 61

Los estudiantes trabajaron por parejas durante un tiempo. María sugirió a Efraín intentar usar el teorema del ángulo externo, pero no logran elaborar un argumento. Juan y Ana pasaron al tablero.[36] Primero propusieron transferir la medida *OK* en el rayo *OP* para obtener un punto *K'* tal que *OK* = *OK'*; así, construyeron un triángulo isósceles (Figura 62). La profesora les dijo que algunos detalles técnicos de la demostración, como garantizar la existencia del triángulo *OKK'* los debían hacer en su casa. Los estudiantes continuaron explicando que el triángulo *OKK'* quedaba isósceles, por lo que el ángulo 1 era congruente al ángulo 2.

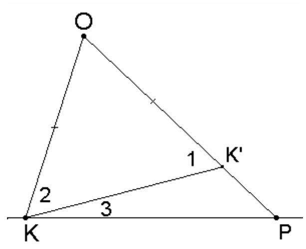
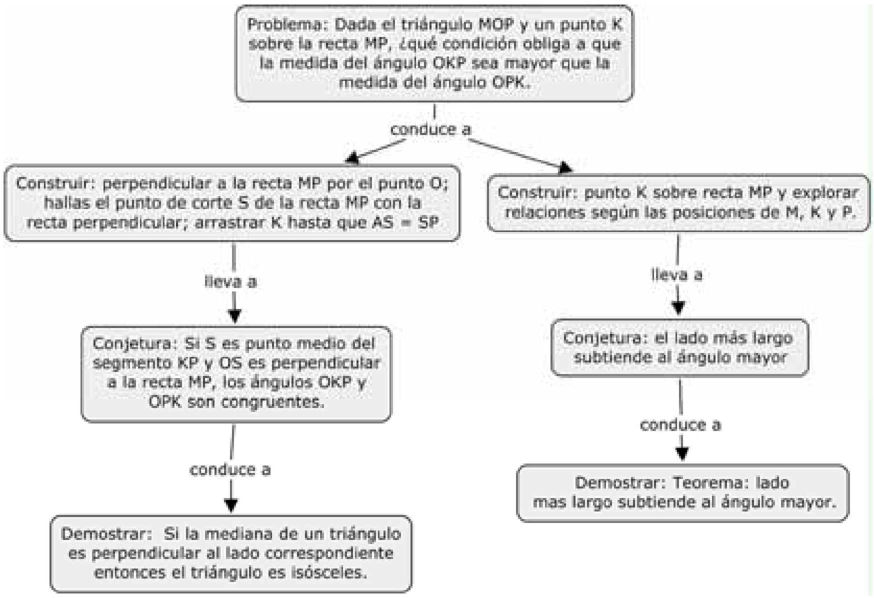


Figura 62

Después dijeron que el ángulo 1 era externo al triángulo *K'PK* y por lo tanto su medida era mayor que la medida del $\angle OPK$. Como *K'* estaba en el interior del $\angle OKP$ (hecho que había que demostrar), entonces la medida del $\angle OKP$ era igual a la medida del ángulo 2 más la medida del ángulo 3. Pero como la medida del $\angle OKP$ era mayor a la medida del ángulo 2, la medida del ángulo 2 era igual a la medida del ángulo 1, la medida del ángulo 1 era mayor a la medida del $\angle OPK$ entonces la medida del $\angle OKP$ era mayor que la medida del $\angle OPK$. La profesora dijo que toda la demostración estaba bien, pero que faltaba explicar, desde la teoría, que la interestancia *O-K'-P* se cumplía porque se había usado en dos momentos. Con ayuda de varios estudiantes la profesora recordó cómo habían demostrado esa interestancia en otro momento.

En el Esquema 12 ilustramos las relaciones entre las actividades realizadas y el contenido desarrollado.

[36] CD47, video 2.



Esquema 12

EPISODIO 13: SUMA MÍNIMA

El episodio 13, Suma mínima *PR* + *QR*, tuvo lugar en las clases 39 y 40 (mayo 08 y mayo 14 de 2007)[37] del curso de Geometría Plana, al finalizar la unidad correspondiente al estudio de propiedades de los triángulos. Los criterios de congruencia lado-lado-lado, ángulo-lado-ángulo, lado-ángulo-lado, ángulo-ángulo-lado, hipotenusa-cateto eran usados frecuentemente en las demostraciones, así como algunos teoremas relacionados con propiedades del triángulo isósceles y el teorema del ángulo externo a un triángulo. En una sesión de clase anterior al desarrollo de éste episodio se había estudiado la desigualdad triangular.

En la primera sesión, los estudiantes recibieron el enunciado del problema escrito en una hoja y sin una figura de referencia. Este decía:

> Problema: Se da una recta *m* y dos puntos *P* y *Q* en el mismo semiplano determinado por *m*. Determinar el punto *R* de *m* para el cual la suma de las distancias *PR* + *RQ* es la menor. a) Describir el procedimiento geométrico para encontrar la posición de *R*; b) Formular una conjetura; c) Escribir los pasos principales de la demostración de la conjetura.

Los estudiantes trabajaron un tiempo por parejas. A continuación resumimos el trabajo hecho por dos grupos:

[37] Documentos primarios P101 y P102 del archivo CicloCabri del programa AtlasTi.

María y Efraín[38] comenzaron por trazar, en Cabri, la recta *m* y tomar dos puntos *P* y *Q* equidistantes de *m.* Luego leyeron el enunciado nuevamente y Efraín anticipó que el punto *R* debía estar en la intersección de la recta *m* con la perpendicular a *m* que pasaba por el punto medio del segmento *PQ*[39], pues, según dijo, la menor distancia del segmento a la recta era precisamente el segmento perpendicular. María estuvo de acuerdo pero le dijo que debían llegar a esa conclusión usando el arrastre. Tomaron un punto *R* sobre la recta *m,* trazaron los segmentos *PR* y *PQ*, midieron su longitud y calcularon la suma de *PR* + *QR*. A continuación comenzaron a arrastrar *R* observando en qué posición se obtenía la menor distancia. Cómo en varias posiciones de *R* obtenían el mismo valor, aumentaron las cifras decimales y volvieron a arrastrar el punto, verificando la anticipación de Efraín. Escribieron como primera conjetura que el punto *R* se encontraba en la intersección de la recta *m* con la perpendicular a *m* por el punto medio del segmento *PQ.* Después, por insinuación de la profesora, cambiaron las posiciones de P y Q, de tal forma que los puntos ya no estaban equidistantes de *m.* Inicialmente Efraín dijo que su conjetura seguía funcionando, pero luego vieron que no era así. María propuso colocar a *P* y *Q* sobre la recta perpendicular a *m* que pasaba por el punto medio y comentó que al estar los dos puntos en dicha perpendicular R también debía estar en ella pues ya habían demostrado que la menor distancia de un punto a una recta era la medida del segmento perpendicular. Después borraron la recta perpendicular y el segmento *PQ* y trazaron perpendiculares a *m* por *P* y *Q*. Efraín anticipó que *R* debía quedar en el punto medio del segmento formado por los pies de las perpendiculares, pero luego de hacer varios arrastres "extremos" (colocando a *P* y *Q* bien lejos, colocando uno de los puntos muy cerca de *m* y el otro bien lejos) se dio cuenta que no era así. Al terminarse el tiempo, no encontraron ningún otro invariante.

Darío y Leopoldo,[40] después de leer el enunciado, dibujaron la recta *l*, los puntos *P* y *Q* y Leopoldo anticipó que el punto *R* estaría en la posición en la que las distancias *PR* y *QR* eran iguales. Calcularon la suma de las distancias y comprobaron, por arrastre, que no se cumplía lo que Leopoldo había dicho. Luego Darío supuso que el punto *R* estaba en la intersección de la recta perpendicular a *l* por el punto medio de *PQ* y la recta *l*, pero también descartaron por arrastre dicha hipótesis. Después, decidieron trazar el triángulo *PQR* y colocar a *P* y a *Q* en diferentes posiciones tratando de ver alguna propiedad de los ángulos de dicho triángulo cuando la suma fuera mínima, pero después de un tiempo descartaron esa opción. Luego optaron por colocar a *P* y *Q* equidistantes de la recta *l.* Se dieron cuenta que en ese caso R estaba en el corte de la mediatriz del segmento *PQ* y la recta *l.* Continuaron moviendo los puntos *P* y *Q* observando diferentes posiciones de *R* para obtener la suma mínima. Darío se dio cuenta que si la distancia de *P* a *l* era menor que la distancia de *Q* a *l,* entonces el punto *R* estaba más cerca de la

[38] CD 52 video 2.

[39] Con *P* y *Q* equidistantes de la recta *m* la perpendicular a *m* por el punto medio del segmento *PQ* coincide con la mediatriz.

[40] CD 80 videos v2 y v3.

perpendicular a *l* por *P* y viceversa; esta exploración los llevó a identificar que *R* debía ser un punto del segmento cuyos extremos eran los pies de las perpendiculares a la recta *l*, por *P* y por *Q*. Buscando alguna propiedad geométrica más específica, Darío construyó las circunferencias con centro en el pie de las perpendiculares y radio las distancias de *P* a *l* y de *Q* a *l* y, al hacerlo se dio cuenta de la colinealidad entre *P, R* y el simétrico de *Q* con respecto a *l* (que llamaron *Q'*)*,* así como de la colinealidad entre *Q, R* y el simétrico de *P* con respecto a *l* (que llamaron *P'*). Esto lo llevó a trazar los segmento *PQ'* y *QP'* y ver que éstos se intersecaban donde ellos tenían ubicado provisionalmente el punto *R*. Decidieron comprobar que en esa posición la suma de *PR* + *QR* era la mínima. Finalmente se preguntaron por qué será allí la mínima distancia, hasta que Darío cayó en cuenta que sumar *PR* más *RQ* era como sumar *PR* más *Q'R*, o sea que la menor distancia se tenía cuando *P, R* y *Q'* estaban alineados.

Mientras los grupos trabajaban en el computador, la profesora sostuvo conversaciones privadas con cada uno enterándose de los resultados logrados. Así, se dio cuenta que había seis exploraciones diferentes y organizó una presentación pública de éstas. Primero, pidió a los grupos A y B ilustrar en el tablero los casos particulares que ellos habían trabajado. El grupo A, conformado por Jaime y Julián, representó en el tablero el caso en el que *P* y *Q* equidistaban de la recta *m* y mostró que el punto *R* debía quedar en el punto medio del segmento *AB* (Figura 63).

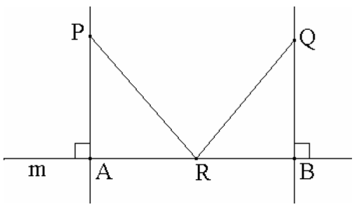


Figura 63

El grupo B, conformado por María y Efraín, ilustró en el tablero el caso en el que *P* y *Q* estaban localizados sobre una misma recta perpendicular a la recta *m*; en ese caso el punto *R* estaba en el pie de dicha perpendicular. María denominó a esa opción "solución trivial" (Figura 64).

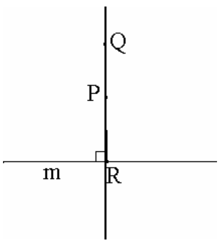


Figura 64

La profesora comentó que las exploraciones de los grupos A y B, y de otros grupos que habían hecho lo mismo, eran importantes pues eran una forma de enfrentar el problema, simplificándolo para tener más elementos bajo control; pero, también dijo que había que ser conscientes que se estaban imponiendo condiciones a los puntos P y Q, que no estaban en el enunciado del problema.

A continuación pidió a los grupos I y E presentar sus resultados. Primero pasó Henry (Grupo I) al tablero, e ilustró el resultado que habían obtenido él y Antonio (Figura 65). Explicó que la suma de PR más QR era mínima, cuando los ángulos, que llamaron $\angle 1$ y $\angle 2$ eran congruentes.

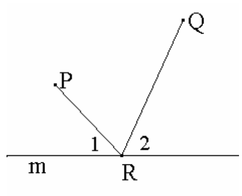


Figura 65

Luego pasó Ignacio e hizo una ilustración como la de la Figura 66. Explicó que él y Nancy (Grupo E) habían buscado alguna propiedad geométrica y encontraron que si los ángulos $\angle 1$ y $\angle 2$ eran congruentes, se tenía que la suma de PR más QR era mínima. La profesora comentó que las propuestas de los dos grupos eran dinámicas, pues ellos habían obtenido la congruencia de los ángulos arrastrando R hasta encontrar la posición de la suma mínima. Aunque eran propiedades interesantes, la profesora consideraba más útil buscar una caracterización geométrica de R de tal forma que el punto pudiera construirse con las herramientas de Cabri validadas teóricamente.

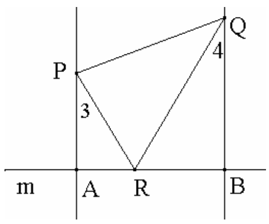


Figura 66

La profesora pidió al grupo H presentar su construcción. Daniel ilustró en el tablero el resultado encontrado (Figura 67). Él y sus compañeros Melisa y Orlando, se habían dado cuenta que al unir los pies de las perpendiculares (M y K) con los puntos Q y P, encontrar el punto de corte O de los segmentos PK y QM y trazar una perpendicular a la recta m por el punto O, encontraban la posición del punto R en donde la suma de PR más QR era la mínima. Daniel explicó que ellos habían llegado a esa construcción pues querían obtener triángulos para ver si podían aprovechar sus propiedades.

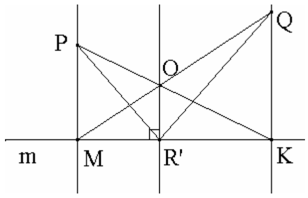


Figura 66

Por último, la profesora pidió al grupo C (Darío y Leopoldo) exponer sus resultados. Darío hizo una representación como la de la Figura 67. Explicó que ellos habían construido los puntos *P'* y *Q'* sobre las rectas perpendiculares a la recta *m* que pasaban por los puntos *P* y *Q*, de tal forma que P' estaba a igual distancia de *m* que el punto P, y Q' a igual distancia de *m* que el punto *Q*. Al trazar los segmentos *PQ'* y *QP'* vieron que éstos se intersecaban en un punto sobre la recta *m* y que éste era precisamente el punto *R*.

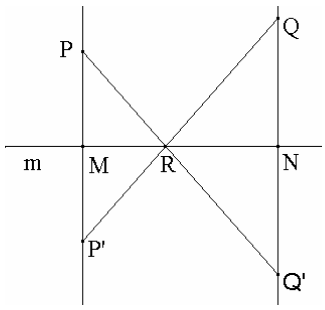


Figura 67

Después de la exposición de los diferentes resultados, la profesora comentó que, a diferencia de los otros grupos, los dos últimos habían hecho una construcción geométrica del punto *R*. A continuación formuló dos preguntas: ¿cómo demostrar que si se hacía la construcción como decían los grupos H y C se tendría que *PR* más *QR* era la suma mínima?, ¿todos los grupos habían encontrado el mismo punto *R*? Para resolver la primera pregunta les dijo que debían tomar otro punto cualquiera sobre la recta y hacer la comparación de la suma de las distancias. Dejó de tarea pensar en la demostración.

Al comenzar la segunda sesión, la profesora hizo una síntesis de las propuestas presentadas por los diferentes grupos, mostrando ilustraciones de las mismas que ella había preparado en acetatos para proyectarlas en el tablero. Después, dijo que iban a comenzar por estudiar la demostración de la conjetura del grupo C y preguntó a Darío y Leopoldo si tenían alguna propuesta. Darío se ofreció a exponer la demostración de su conjetura. Dijo que inicialmente él se había dado cuenta que bastaba construir uno de los segmentos *PQ'* o *QP'* pues el corte de éste y de la recta *m* permitía encontrar el punto *R*. Por eso, sólo trazó el segmento *P'Q*. Luego, tomó un punto *T* sobre la recta *m* y trazó los segmentos *PT* y *QT* y dijo que quería comparar la suma de *PR* más *QR* con la suma de *PT* más *QT* (Figura 68). Para hacer su comparación, Darío se valió de que el segmento *PR* era congruente al segmento *P'R*, pues eran partes correspondientes de dos triángulos congruentes; la suma de *PR* más *QR* era igual a la longitud de *P'Q*; después, usó la desigualdad triangular, teorema que habían demostrado recientemente, para mostrar que esa suma era menor que *PT* más *TQ*.

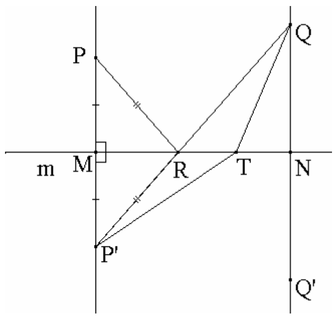


Figura 68

Después de la socialización pública de la demostración de Darío, la profesora dijo que podían aprovechar dicha demostración para justificar las otras conjeturas y de paso ver si las propuestas hacían referencia al mismo punto *R*. Para ello, proyectó una figura hecha en Cabri, con la construcción propuesta por Darío y Leopoldo. Les recordó que el grupo A había conjeturado que *R* estaba en el punto medio del segmento que unía los pies de las perpendiculares a *m* trazadas por *P* y por *Q*. Entonces, halló el punto medio de *MN* (Figura 67) y luego arrastró *P* hasta que *P* y *Q* quedaran equidistantes de la recta *m.* Al hacerlo, el punto medio del segmento *MN* coincidía con el punto R de la construcción hecha por Darío y Leopoldo. Concluyeron entonces que el caso expuesto por Julián y Jaime era un caso particular del expuesto por el grupo C y que la conjetura del grupo A podría demostrarse de la misma forma que lo hizo Darío.

Después, la profesora usó la construcción hecha por Darío y Leopoldo para examinar la conjetura expuesta por el grupo B. Al arrastrar a *Q* para que quedara sobre la recta perpendicular a *m* que pasaba por el punto *P*, observaron que el punto *R* se convertía en el pie de dicha perpendicular. Concluyeron que esta solución era el caso trivial del problema.

A continuación compararon la conjetura del grupo I con la conjetura del grupo C. Sobre la figura sugerida por el grupo C (Figura 67), la profesora tomó un punto *A* sobre la recta *m*, trazó los segmentos *PA* y *QA* y midió los ángulos *PAM* y *QAN*. Después arrastraron *A* hasta lograr que los ángulos mencionados fueran congruentes. Allí, *A* y *R* coincidían, lo cual quería decir que las construcciones habían permitido obtener el mismo punto (o sea que $\angle PAM = \angle PRM = \angle 1$, de la Figura

65, y $\angle QAN = \angle QRN = \angle 2$, de la Figura 65). Para demostrar la conjetura del grupo I, es decir, que si el ángulo $\angle PRM$ (o $\angle 1$ de la Figura 65) era congruente al ángulo $\angle QRN$ (o $\angle 2$ de la Figura 65) entonces *PR* más *QR* era la suma mínima no parecía haber un método directo. Entonces, la profesora les sugirió demostrar que si el punto *R* era tal que $\angle 1$ era congruente con $\angle 2$ entonces *R* era colineal a los puntos *Q* y *S*, con *S* sobre la perpendicular a *m* por *P* y $PM = MS$. Así, podrían elaborar un silogismo de la siguiente forma:

> si $\angle 1 \cong \angle 2$, entonces R es tal que se tiene la interestancia *S-R-Q* y $PM = MS$
>
> si *R* es tal que se tiene la interestancia *S-R-Q* y $PM = MS$ entonces $PR + QR$ era la suma mínima
>
> por lo tanto: si $\angle 1 \cong \angle 2$ entonces $PR + QR$ es la suma mínima.

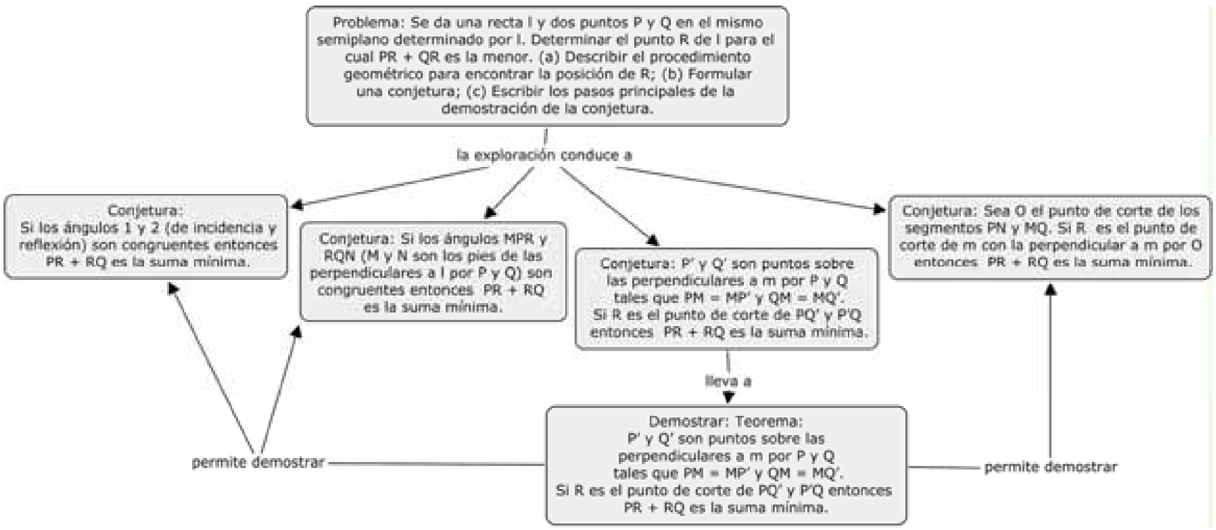
La segunda implicación correspondía a la conjetura del grupo C y ya había sido demostrada. Bastaba demostrar la primera implicación. María propuso construir el rayo opuesto al rayo *RQ* y buscar el punto *S* de intersección de dicho rayo con la recta *PM.* Así tendrían garantizada la colinealidad de *S, R* y *Q* y bastaría demostrar que *PM* era igual a *MS*. Melisa dijo que se podía usar el ángulo opuesto por el vértice al ángulo 2 y decir que era congruente al ángulo 1 y además que los ángulos *PMR* y *SMR* eran rectos para demostrar que $PM = MS$ por partes correspondientes de triángulos congruentes, usando el criterio ángulo-lado-ángulo.

A continuación decidieron estudiar la conjetura propuesta por el grupo E (Figura 66). Primero verificaron que el punto encontrado por Ignacio y Nancy era el mismo que el encontrado por Darío y Leopoldo, tomando un punto *T* sobre la recta, midiendo los ángulos $\angle APT$ y $\angle BQT$ y luego arrastrando a *T* hasta que los ángulos fueran congruentes. Después, la profesora sugirió que podrían usar el mismo camino que el usado para demostrar la conjetura del grupo I, construyendo un silogismo. Pero se les presentó el problema de no poder demostrar la implicación: si $\angle 3 \cong \angle 4$, entonces *R* es tal que se tiene la interestancia *S-R-Q* y $PA = AS$, con los elementos disponibles en el sistema. Algunos estudiantes propusieron usar sus conocimientos previos sobre la congruencia de los ángulos alternos internos entre paralelas, o sobre la suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo, pero como las propuestas violaban la norma de justificar enunciados sólo con elementos disponibles en el sistema, la conjetura quedó pendiente para ser demostrada más adelante.

La conjetura propuesta por el grupo H tuvo un tratamiento similar. Luego de usar la construcción sugerida por Darío y Leopoldo para representar sobre ella la construcción propuesta por el grupo H, comprobaron que se estaban refiriendo al mismo punto. Luego, la profesora pidió dar ideas para hacer la demostración de una implicación que tuviera como antecedente la hipótesis de la conjetura del grupo H y como tesis el antecedente de la conjetura del grupo C. Ni la profesora ni los estudiantes vieron rápidamente una propuesta aceptable, por lo que la demostración quedó pendiente.

Para terminar la clase, la profesora pidió a todos analizar si la conjetura del grupo integrado por Germán y Ana[41] era cierta. Ellos habían dicho: "*R* se encuentra en el corte de la mediatriz del segmento *PQ* con la recta *l"* Melisa mostró un contra-ejemplo dibujado a mano alzada en el tablero, pero como éste no resultó muy convincente, Nancy mostró otro contraejemplo hecho en Cabri. Se evalúo que probablemente Germán y Ana habían impuesto a *P* y a *Q* la condición de estar equidistantes de *m,* sin darse cuenta.

En el Esquema 13 ilustramos las relaciones entre las actividades realizadas y el contenido desarrollado.



Esquema 13

EPISODIO 14: CUADRILÁTERIO DE SACCHERI

El episodio 14, Cuadrilátero de Saccheri, tuvo lugar en las clases 40, 41 y 43 (mayo 14, mayo 15 y mayo 22)[42] del curso de Geometría Plana. Con este episodio se dio comienzo al estudio de los cuadriláteros, habiendo desarrollado las unidades correspondientes al estudio de relaciones entre puntos, rectas y plano, ángulos y triángulos. En la primera sesión, la profesora copió el siguiente problema en el tablero, con el cual se dio inicio al episodio:

> <u>*Problema:*</u> Construir una figura *ABCD* (Figura 69) con las siguientes características: el $\angle D$ y el $\angle C$ son rectos, y el segmento *AD* es congruente con el segmento *BC*. Luego de tenerla, responder la siguiente pregunta ¿Qué se puede demostrar acerca de los ángulos *A* y *B*?

---

[41] Gabriel y Alexandra son de los grupos *G* y *D*, respectivamente. Pero como sus compañeros no asistieron a clase el día del trabajo en Cabri, ellos dos trabajaron juntos.

[42] Documentos primarios P103, P105, P108, P109 del archivo CicloCabri del programa AtlasTi.

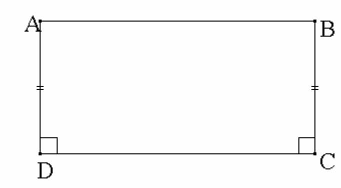


Figura 69

Los estudiantes disponían de las calculadoras con el programa Cabri. Trabajaron durante un tiempo, en parejas, mientras la profesora pasaba por los puestos para enterarse de lo que estaban haciendo. A continuación resumimos el trabajo realizado por tres grupos:

María y Efraín[43] construyeron en Cabri un segmento *DC*, trazaron perpendiculares al segmento por los puntos *D* y *C*, determinaron un punto *A* en la perpendicular por *D* y copiaron la medida en la otra perpendicular para localizar el punto *B*. Mientras Efraín hacía la figura en Cabri, María hacía una representación en papel. Sobre el papel ella trazó los segmentos *AC* y *BD* y le sugirió a Efraín hacer lo mismo. Estudiaron durante un tiempo la figura obtenida (Figura 70) y luego María le pidió a Efraín hallar las medidas de los ángulos *DAC* y *CBD*, anticipando que debían ser congruentes por ser partes correspondientes de los triángulos *DAC* y *CBD*, los cuales son congruentes por el criterio lado-ángulo-lado. Después de comprobarlo, María le dijo a Efraín que calculara el complemento del ángulo *DAC* y construyera dos ángulos con esa medida, uno, usando como lado el segmento *AC* (y *A* como vértice) para fijarse si el nuevo lado pasaba por *B* y otro, usando como lado el segmento *BD* (y vértice *B*) para fijarse si el nuevo lado pasaba por *A*. Así, podrían asegurar que los ángulos *A* y *B* eran congruentes y rectos.

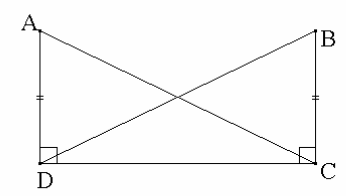


Figura 70

Nancy el Ignacio[44] leyeron el enunciado y, antes de hacer cualquier representación, anticiparon que $\angle DAC$ debía ser congruente con $\angle CBD$; incluso Ignacio propuso algunos argumentos para demostrarlo. Después, Nancy construyó un segmento *DC*, trazó las perpendiculares al segmento por los puntos *D* y *C* y luego determinó *A* en la perpendicular por *D* y localizó a *B* en la otra perpendicular usando transferencia de medidas. Después trazó el segmento *AB*. Con base en la figura, Ignacio explicó a Nancy que los segmentos *AC* y *BD* eran congruentes por

[43] CD 53 videos 3 y 4

[44] CD 54 videos 1, 2.

ser partes correspondientes de los triángulos congruentes *DAC* y *CBD*; estos triángulos eran congruentes por el criterio lado-ángulo-lado. Después se fijaron en que los triángulos *DAB* y *CBA* y dedujeron que eran congruentes por el criterio lado-lado-lado. Esto los llevó a concluir que los ángulos *A* y *B*, originales, eran congruentes. Luego se fijaron en otras congruencias entre ángulos e incluso en que se formaban varios triángulos isósceles. Finalmente, se preguntaron cómo demostrar que los ángulos *A* y *B* eran rectos, usando los elementos teóricos disponibles en el sistema axiomático, pero no lograron hacer la demostración.

Darío y Leopoldo[45] leyeron el enunciado y mientras Darío hacía la figura en la calculadora Leopoldo hizo una representación en papel en la que, además de la figura propuesta en el enunciado dibujó los segmentos *AC* y *BD* y puso marcas de ángulos rectos a los ángulos *A* y *B* (Figura 71); al ser interrogado por la profesora explicó que quería representar dos triángulos (*BAD* y *ABC*) rectángulos y mostrar que los ángulos *A* y *B* eran rectos. También explicó que se podía asegurar que los triángulos *ADC* y *BCD* eran congruentes por tener dos pares de lados y un par de ángulos respectivamente congruentes. Después Darío identificó en la figura las partes correspondientes congruentes de los triángulos *ABC* y *BAD* con lo cual pudo concluir que dichos triángulos eran congruentes y por lo tanto que los ángulos $\angle A$ y $\angle B$ eran congruentes, más no que fueran rectos.

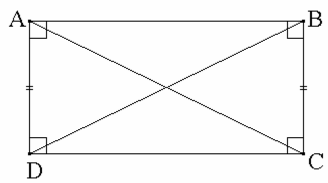


Figura 71

En la segunda sesión del episodio, la profesora declaró que al revisar el trabajo hecho por los diferentes grupos encontró que la mayoría habían formulado dos conjeturas. Una, que los ángulos *A* y *B* eran congruentes; dos, que los ángulos *A* y *B* eran rectos. Les propuso comenzar por la primera conjetura e invitó a algún estudiante a demostrar que los ángulos *A* y *B* eran congruentes. Leopoldo pasó al tablero y demostró primero que los triángulos *DAC* y *CBD* eran congruentes, usando el criterio lado-ángulo-lado. Luego dijo que los ángulos $\angle 1$ y $\angle 2$ eran congruentes, y los segmentos *AC* y *DB* también eran congruentes por ser partes correspondientes de dos triángulos congruentes. También afirmó que los ángulos $\angle 3$ y $\angle 4$ (Figura 72) eran congruentes por ser complementos de ángulos congruentes. Con las afirmaciones anteriores, y cómo estaba dado que los segmentos *DA* y *CB* eran congruentes, demostró que los triángulos *ADB* y *BCA* eran congruentes, por el criterio lado-ángulo-lado, y por lo tanto los ángulos $\angle A$ y $\angle B$ eran congruentes.

[45] CD 80 video 3.

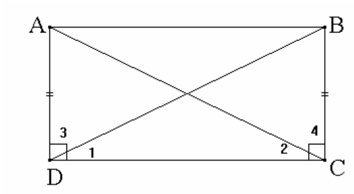


Figura 72

Como la profesora había visto que algunos grupos habían intentado usar el punto de intersección de los segmentos AC y BD, ella preguntó si se podía garantizar dicha intersección, lo que llevó a invertir un tiempo de la clase tratando de justificar dicha intersección. En la discusión, se aceptó como hipótesis gráfica que el punto B estaba en el interior del ángulo ADC.

Después la profesora pidió que se concentraran en tratar de demostrar que los ángulos A y B eran rectos. Henry propuso demostrar que los triángulos DAB y BCD eran congruentes, para aprovechar que se sabía que el ángulo C era recto y poder garantizar que el ángulo A lo era. Él, Daniel, Germán y Orlando sugirieron varias congruencias pero no pudieron relacionar los ángulos A y C. Incluso, Daniel propuso demostrar que los triángulos AXB y CXD eran congruentes y así se podría afirmar que el $\angle 1$ era congruente al ángulo $\angle 1$’ y el ángulo $\angle 2$ era congruente al ángulo $\angle 2$’ (Figura 73), como si el hecho de ser ambos triángulos isósceles permitiera garantizar que eran congruentes.

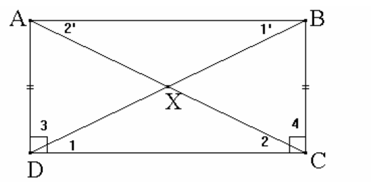


Figura 73

Después de varios intentos de hacer la demostración, la profesora les dijo que la figura sugerida en el problema se llamaba Cuadrilátero de Saccheri y que, aunque todos parecían convencidos de que los ángulos $\angle A$ y $\angle B$ eran rectos, con los elementos que tenían en ese momento en el sistema axiomático no iban a poder hacerlo. Les pidió dejar pendiente la conjetura hasta tener nuevas herramientas teóricas y les pidió imaginar nuevas conjeturas relacionadas con el cuadrilátero. A medida que los estudiantes daban ideas, ella las escribía en el tablero. Además de la conjetura de que A y B eran ángulos rectos, surgieron las siguientes: X es punto medio de los segmentos AC y BD, el segmento AB es congruente con el segmento DC, el triángulo ADB es congruente con el triángulo BCD, el triángulos ABX es congruente con el triángulo ABX es congruente con el triángulo DCX, la recta AD y la recta BC no se cortan.

La profesora decidió entonces introducir el concepto de rectas paralelas, con el que las conjeturas propuestas se iban a poder demostrar. Propuso la siguiente definición de rectas paralelas:

> Definición: Las rectas *l,* m son paralelas si (i) son coplanares y (ii) no se intersecan.

Después les pidió fijarse en alguna propiedad especial de las rectas AD y BC y María dijo que ambas eran perpendiculares a la recta DC. Entonces la profesora les sugirió que podría ser interesante analizar si la siguiente conjetura era cierta: "si dos rectas coplanares[46] son perpendiculares a una misma recta, entonces son paralelas". Leopoldo elaboró un argumento en el que supuso que si no fueran paralelas se cortarían en un punto, formarían un triángulo con dos ángulos rectos y esto es imposible pues habría un ángulo externo igual a un ángulo interno no adyacente. La profesora explicó que el enunciado demostrado era un teorema muy importante pues permitía garantizar que dos rectas eran paralelas sin hacer uso de la definición. Luego les propuso pensar qué otras formas conocían ellos para poder afirmar que dos rectas eran paralelas. Pasado un breve tiempo, Leopoldo recordó que si dos rectas cortaban a una tercera formando el mismo ángulo las rectas eran paralelas. La intervención de Leopoldo llevó a definir cuándo dos rectas eran secantes. Además, la profesora les pidió pensar cómo definirían la relación que tenían los ángulos considerados congruentes pues no todos podrían estar refiriéndose al mismo par de ángulos.

> Definición: recta secante a dos rectas: si las rectas cortan a ésta en dos puntos distintos.

Para referirse a los ángulos sugeridos por Leopoldo, la profesora mencionó que se llamaban correspondientes y que la mayoría de los textos los definían con base en una representación, ya que proponer la definición no era asunto sencillo. Quedó como tarea pensar en una posible definición de ángulos correspondientes. A continuación la profesora les pidió pensar cómo demostrar que si dos ángulos correspondientes eran congruentes las rectas que los conformaban eran paralelas. Nuevamente Leopoldo elaboró un argumento similar al que desarrollo para proponer una demostración del paralelismo de dos rectas perpendiculares a una tercera: se suponen no paralelas, se analiza el triángulo que se forma y se llega a una contradicción que hace uso del teorema del ángulo externo.

En la tercera sesión, la profesora hizo un recuento de los enunciados incorporados al sistema a raíz del problema del cuadrilátero de Saccheri. Después, les propuso analizar las definiciones de ángulos alternos y de ángulos correspondientes que ella les había enviado por correo electrónico; a continuación, acordaron aceptar, por hipótesis gráfica, la existencia de este tipo de pares de ángulos pues justificar cada una de las condiciones para admitir su existencia era una tarea larga y no valía la pena invertir tiempo en ello.

---

[46] Aunque el curso es de geometría plana, en algunas oportunidades la profesora hace algunas reflexiones sobre situaciones geométricas en el espacio. Al definir rectas paralelas ella creyó necesario incluir la propiedad de coplanariedad para distinguir rectas paralelas de rectas alabeadas.

Después, la profesora recapituló que, además de la definición, ya tenían dos formas de demostrar que dos rectas eran paralelas: si eran perpendiculares a una misma recta y si eran ángulos correspondientes congruentes. Preguntó si se les ocurría otra forma de garantizar el paralelismo de dos rectas y Leopoldo sugirió que si dos ángulos alternos internos eran congruentes, las rectas secantes eran paralelas. La profesora institucionalizó el teorema y les pidió demostrarlo.

> Teorema: Si dos rectas l y m están cortadas por una secante t y un par de ángulos alternos internos ($\angle 1$ y $\angle 2$) son congruentes, entonces la recta l es paralela a la recta m.

Julián hizo una propuesta de demostración basada en el hecho de que uno de los ángulos internos $\angle 2$ era opuesto por el vértice, y por lo tanto congruente, a un ángulo ($\angle 3$) que era correspondiente con el otro ángulo interno $\angle 1$ (Figura 74). La profesora preguntó si sería posible pensar la demostración sin apoyarse en el teorema que se refería a ángulos correspondientes.

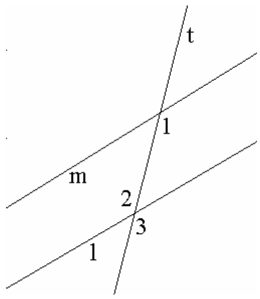


Figura 75

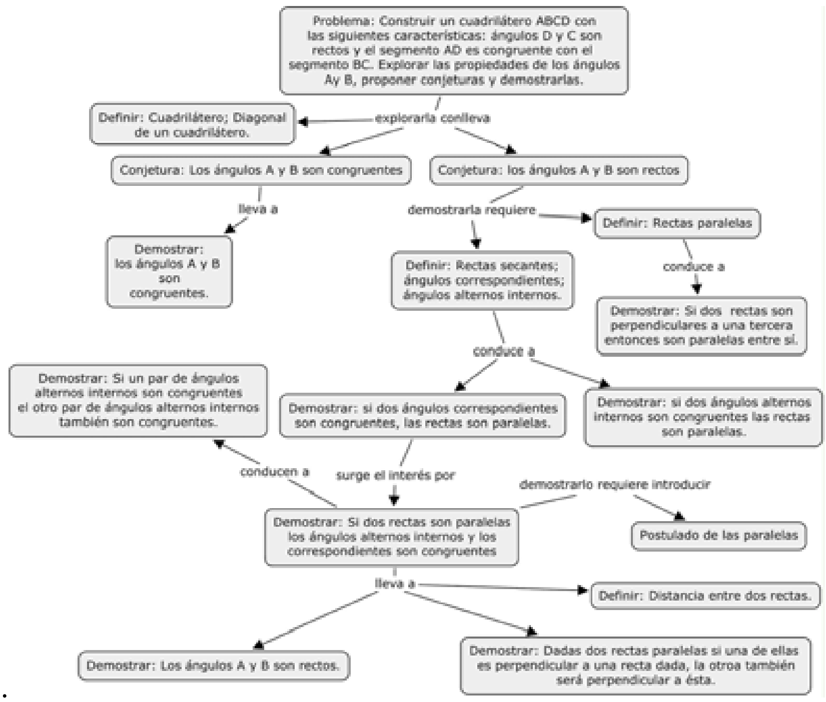
Para enfrentar la tarea, Leopoldo elaboró un argumento pero usó el teorema que dice que si dos ángulos correspondientes son congruentes las rectas son paralelas. Orlando hizo otra propuesta en la que intentó, sin éxito, emplear el teorema del ángulo externo a un triángulo. Después, nuevamente Leopoldo elaboró un argumento deductivo pero lo que concluyó fue que si dos ángulos alternos internos eran congruentes, el otro par de ángulos alternos internos también lo serían. Pese a que esa afirmación no era la que se quería demostrar y que todos se rieron de la idea de Leopoldo, la profesora comentó que Leopoldo había propuesto una demostración de un teorema muy importante y lo institucionalizó.

> Teorema: Si dos ángulos alternos internos son congruentes, el otro par de ángulos alternos internos también son congruentes.

Luego continuaron pensando cómo demostrar que si dos ángulos alternos internos eran congruentes, las rectas eran paralelas. Germán propuso otro argumento fallido, basado en la idea de tener dos rectas perpendiculares a la misma recta para poder garantizar que eran paralelas. Finalmente la profesora les sugirió pensar en que las rectas *m* y *l* no eran paralelas. Con esta idea, Aníbal elaboró un argumento en el que supuso que se formaba un triángulo y utilizó el teorema del ángulo externo para contradecir la hipótesis. A continuación Germán hizo una síntesis de las cuatro formas, que se tenían hasta el momento, para demostrar que dos rectas eran paralelas. Entre ellas incluyeron la definición de rectas paralelas, aunque la profesora dijo que la definición era poco útil en las demostraciones.

A continuación, la profesora sugirió que intentaran demostrar si el teorema recíproco era cierto, es decir, si dos rectas eran paralelas, los ángulos alternos internos eran congruentes. Ignacio hizo una propuesta de demostración que no fue aceptada porque suponía que ya se había demostrado que si dos rectas son paralelas los ángulos correspondientes eran congruentes. La profesora les dijo que si pensaban la demostración por contradicción, había que presuponer que los ángulos alternos internos no eran congruentes. Germán, María, Ignacio y Darío dieron algunas ideas hasta que se fue prefigurando una demostración en la que se presuponía que uno de los ángulos eran mayor que el otro, se construía un ángulo que fuera congruente al considerado menor y entonces resultaban dos rectas paralelas a una tercera que se intersecaban en un punto, lo cual significaba una contradicción. Esta argumentación colectiva condujo a la introducción del postulado de las paralelas, último postulado que se introdujo en el curso.

Una vez demostrado que si dos rectas son paralelas los ángulos internos son congruentes, la profesora dijo que era muy sencillo mostrar que si las rectas son paralelas los ángulos correspondientes eran congruentes. Preguntó qué otro enunciado podría derivarse de tener dos rectas paralelas y Germán propuso demostrar que dos rectas paralelas equidistan. Este interés condujo a definir distancia entre dos rectas. En el Esquema 14 ilustramos las relaciones entre las actividades realizadas y el contenido desarrollado



Esquema 14

EPISODIO 15: TIPO DE CUADRILÁTERO Y DIAGONAL BISECA A LA OTRA

El episodio 15, Tipo de cuadrilátero y diagonal biseca a la otra, tuvo lugar en las clases 42, 44, 45, 46 y 47 (mayo 24, mayo 28, mayo 29 y mayo 31)[47] del curso de Geometría Plana. En este episodio se realizó el estudio de propiedades básicas de los cuadriláteros y se culminó el trabajo registrado en el semestre. En la primera sesión[48] del episodio, la profesora, propuso el problema que dio pie a todo el trabajo sobre cuadriláteros:

> Problema: Determinar la relación entre el tipo de cuadrilátero y la propiedad: una diagonal biseca a la otra.

Después de escribir el problema en el tablero, la profesora se refirió a los términos del enunciado que correspondían a conceptos no incluidos en el sistema: “cuadrilátero” y “diagonal”. Introdujo la definición de cuadrilátero:

> Definición de cuadrilátero: Sean A, B, C, D puntos coplanares. Si tres cualesquiera de ellos no son colineales y los segmentos AB, BC, CD y DA se intersecan sólo en los extremos, la unión de los cuatro segmentos se llama cuadrilátero.

Propuso establecer diferencias con la forma como se definió triángulo y además contrastar la definición con posibles imágenes visuales que los estudiantes pudieran asociar o no a la definición; se contrastaron ejemplos y contraejemplos revisando las propiedades establecidas en la definición. A continuación acordaron la forma como iban a nombrar un cuadrilátero y recordaron la definición de diagonal.

> Definición de diagonal de un cuadrilátero: segmento que une dos vértices no consecutivos de un cuadrilátero.

Después, la profesora les pidió a los estudiantes trabajar el problema en grupos, con ayuda del programa Cabri instalado en las calculadoras, proponer conjeturas y escribir el proceso de construcción de las figuras usadas en las exploraciones. A continuación resumimos el trabajo de dos grupos.

María y Efraín[49] comenzaron haciendo una representación en papel de dos segmentos que se bisecaban y uniendo los extremos para formar un cuadrilátero. María anticipó que los cuadriláteros resultantes serían rombos o cuadrados. Después, decidieron construir en Cabri dos segmentos AC y BD que se bisecaban entre sí en un punto que llamaron X, construyeron el cuadrilátero, tomaron la medida de todos los lados y conjeturaron que los lados opuestos eran congruentes. Luz les preguntó si sólo era necesario que una diagonal bisecara a la otra, lo que

[47] Documentos primarios P106, P110, P111,P112, P113, P114 del archivo CicloCabri del programa AtlasTi.

[48] CD 55 video 1.

[49] CD 55 video 1

motivó que María preguntara lo mismo a la profesora; ella les dijo que el enunciado se refería a una sola diagonal, pero que ellos podían considerar otras condiciones. Luego, arrastraron los vértices en busca de nuevas propiedades. Efraín identificó que había lados paralelos y María le dijo que para poder afirmarlo debían construir una recta perpendicular a uno de ellos y analizar si era perpendicular a la otra; Trazaron una recta perpendicular a un lado y midieron los ángulos formados con ambos lados para verificar que eran rectos, en los dos casos. Después de esa exploración, tomaron la medida de los ángulos y se dieron cuenta que los ángulos opuestos eran congruentes. Adicionalmente Efraín decidió explorar si las diagonales eran bisectrices de los ángulos correspondientes a los vértices de donde salían y lo confirmó a través de la toma de medidas. Después, decidieron mirar el caso en que sólo una diagonal bisecaba a la otra. Hicieron una construcción de un cuadrilátero partiendo de los dos segmentos y arrastraron los vértices en buscar de propiedades. Se dieron cuenta que en algunos casos las diagonales no se cortaban. María insinuó que dos lados eran congruentes y justificó su observación con el teorema de la mediatriz, pero luego descartó esa propiedad.

Darío y Leopoldo[50] comenzaron dibujando un cuadrilátero, en Cabri, sin propiedades especiales. Después, Darío trazó sus diagonales y midió los cuatro segmentos que se formaban a partir del punto de intersección. Mientras Darío hacía la construcción Leopoldo le hacía preguntas, y entre ambos discutían las respuestas, relacionadas con los cuadriláteros; por ejemplo, si los paralelogramos eran cuadriláteros, si los cuadrados eran rombos, si los rectángulos eran cuadrados. Después de calcular las medidas Darío arrastró los extremos del cuadrilátero y, en un momento dado, cuando el cuadrilátero era rectángulo, obtuvo la congruencia de los cuatro segmentos. Decidieron escribir, como primera conjetura, que en un rectángulo las diagonales se bisecaban. Sin embargo, Darío manifestó preocupación por la forma como debían redactar la conjetura pues en la clase no se había definido qué era un rectángulo. Después, continuó arrastrando los extremos del cuadrilátero hasta obtener una figura en donde sólo una diagonal bisecaba a la otra. Como no encontraron propiedades llamativas, Darío cambió de estrategia y comenzó una nueva construcción a partir de dos segmentos, uno de los cuales bisecaba al otro. Luego formaron el cuadrilátero y Leopoldo dijo que lo único que se podía conjeturar era que los ángulos internos eran agudos, aunque no estaba muy seguro de ello. Hasta allí quedó registrado el trabajo de estos estudiantes.

En la segunda sesión del episodio, la profesora propuso comenzar a estudiar las conjeturas sugeridas por los estudiantes, en un orden preestablecido por ella, para ir explotándolas en el desarrollo del contenido, de tal forma que aquellas ya demostradas se pudieran usar en las siguientes demostraciones. Comenzaron proyectando en el tablero la conjetura del grupo F. La profesora pidió a todos leer la conjetura, decidir si estaban de acuerdo con ella y, en caso afirmativo, sugerir su demostración.

> Grupo F: si una diagonal de un cuadrilátero biseca a la otra, entonces ningún lado de un cuadrilátero es congruente con otro.

[50] CD 80 video 3

Luz proyectó en el tablero la construcción que había servido de base para formular la conjetura y ésta se aceptó gracias a la figura sugerida (Figura 76).

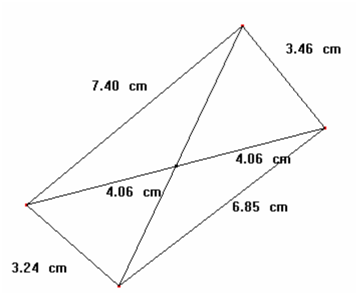


Figura 76

Sin embargo, Jaime dijo que tenía un contraejemplo y proyectó una representación como la de la Figura 77, en la que se apreciaba que una diagonal bisecaba a la otra y todos los lados eran congruentes. La profesora advirtió que posiblemente la figura propuesta por Jaime tenía más condiciones que las sugeridas en el enunciado del problema, pero que ésta no invalidaba la conjetura del grupo F, pues efectivamente se podía encontrar un cuadrilátero en el que una diagonal bisecaba a la otra y los lados no tenían propiedades especiales.

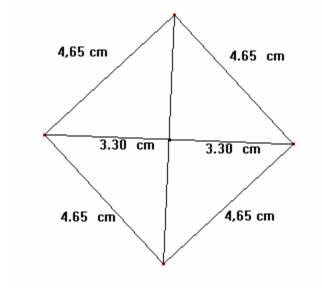


Figura 77

Después, decidieron analizar la conjetura del grupo B. Para ello, la profesora la proyectó en el tablero y comentó que el grupo G habían formulado una conjetura similar, aunque sin incluir la definición de cuadrilátero convexo.

> Grupo B: Si el cuadrilátero ABCD es tal que una diagonal biseca a la otra entonces el cuadrilátero es convexo puesto que su interior es un conjunto convexo.

La profesora pidió al grupo B mostrar la figura que había dado lugar a la conjetura. Efraín pasó al tablero y proyectó una representación hecha en Cabri, como la de la Figura 78. Desde su puesto, María le sugirió que arrastrara los vértices para comparar con el caso en que el cuadrilátero no fuera convexo.

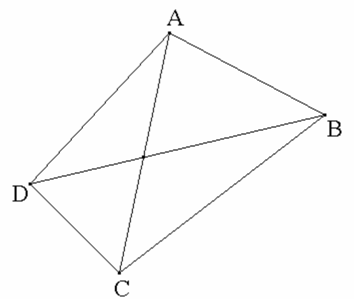


Figura 78

Efraín arrastró los vértices hasta obtener un cuadrilátero no convexo (Figura 79). La profesora resaltó con un color, sobre la figura proyectada, los lados del cuadrilátero y, con otro color, sus diagonales. Se dieron cuenta que en ese caso las diagonales no se bisecaban porque ni siquiera se cortaban.

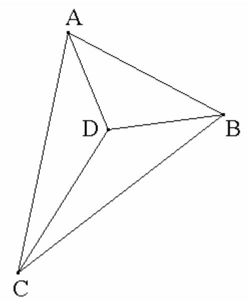


Figura 79

La conjetura de María y Efraín fue aceptada pero la profesora sugirió definir de otra manera cuadrilátero convexo, pues la definición dada por María y Efraín requería definir "interior de cuadrilátero". Ella propuso la siguiente definición:

> Definición cuadrilátero convexo: un cuadrilátero es convexo si dos cualquiera de sus vértices no están en lados opuestos de una recta que contiene a un lado del cuadrilátero.

Germán sugirió definir interior de cuadrilátero de la misma manera que habían definido interior de triángulo, mediante la intersección de los interiores de los ángulos del cuadrilátero, pero su idea fue descartada porque no podría aplicarse a los cuadriláteros no convexos. Él y Henry hicieron otras propuestas de definición de interior de cuadrilátero que también fueron descartadas, una por errada y otra porque, en el caso de los cuadriláteros no convexos, su certeza dependía de qué nombre se asignaba a cada vértice. Quedó pendiente una mejor forma de definir cuadrilátero convexo.

A continuación, la profesora proyectó una segunda conjetura del grupo B, pidió analizar su certeza y pensar cómo demostrarla si estaban de acuerdo con ella.

Grupo B: Si en el cuadrilátero ABCD sus diagonales se bisecan entre sí, los lados no consecutivos son paralelos.

Efraín proyectó la imagen construida en Cabri y explicó que para verificar la conjetura habían trazado una recta perpendicular al lado AD y habían comprobado que también era perpendicular al lado BC (Figura 80). Ellos habían usado el único teorema que tenían en el sistema, hasta ese momento, para verificar, haciendo uso de la teoría, el paralelismo:

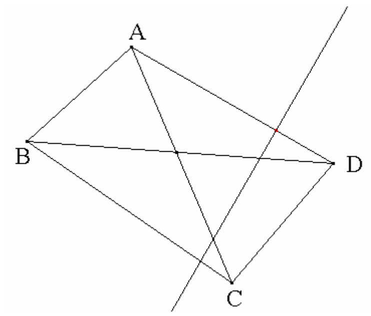


Figura 80

La profesora comentó que María y Efraín habían hecho la verificación únicamente para los lados AD y BC del cuadrilátero, pero no para los lados AB y DC, por lo que su conjetura debía haberse referido sólo a un par de lados. Una vez admitieron que la conjetura era cierta, la profesora invitó a los estudiantes a demostrar que si las diagonales se bisecaban un par de lados no consecutivos eran paralelos. Ignacio se ofreció a liderar el trabajo y pasó al tablero. A medida que hablaba iba haciendo marcas sobre una figura representando la información que decía y escribía algunas afirmaciones usando lenguaje geométrico (Figura 81).

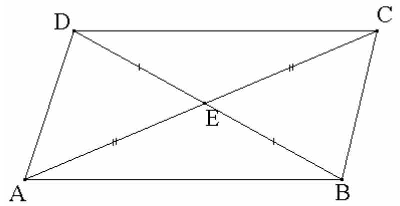


Figura 81

Ignacio utilizó el criterio de congruencia lado-ángulo-lado para demostrar que los triángulos ADE y CBE eran congruentes y por lo tanto los ángulos DAE y BCE, que eran alternos internos eran congruentes. Por un teorema demostrado en una sesión anterior, las rectas AD y CB eran paralelas y por lo tanto los segmentos AD y CB también lo eran.

A continuación, la profesora proyectó una conjetura formulada por el grupo G y pidió a Aníbal y Germán definir qué era para ellos un paralelogramo y presentar su construcción.

> Grupo G: Si en cuadrilátero las diagonales se bisecan, entonces es un paralelogramo.

Aníbal explicó que ellos habían definido paralelogramo como un cuadrilátero con lados opuestos paralelos. Leopoldo propuso escribir “ambos” pares de lados paralelos y mostró la figura de un trapecio a manera de contraejemplo de la definición propuesta por Aníbal y Germán. Finalmente se adoptó la siguiente definición de paralelogramo.

> Definición de paralelogramo: cuadrilátero con ambos pares de lados opuestos paralelos.

Germán proyectó una construcción en el tablero en la que se veía un paralelogramo ABCD y sus diagonales, pero no se apreciaba la toma de medidas o el chequeo de propiedades. La profesora preguntó, extrañada, cómo habían llegado a la conjetura y Aníbal explicó que la construcción que estaban mostrando se había hecho garantizando el paralelismo de los lados, desde un comienzo. María opinó que, en ese caso, la conjetura no correspondía a la construcción, pero Germán le explicó que previamente habían hecho otra construcción en la que partieron de un cuadrilátero y sus diagonales y mediante el arrastre habían logrado que las diagonales se bisecaran y habían visto que se obtenía un paralelogramo.

La profesora propuso revisar la construcción hecha por el grupo C cuya conjetura era igual a la del grupo G. Al leer el procedimiento de construcción se pudo apreciar que Darío y Leopoldo habían construido un paralelogramo y luego se habían fijado en que las diagonales se bisecaban; por lo tanto, tanto parecía como que el grupo G y el grupo C habían reportado una conjetura contraria al procedimiento de construcción. La conjetura debería haber sido: si un cuadrilátero es un paralelogramo, las diagonales se bisecan. Se evaluó que esta última conjetura era cierta y la profesora pidió hacer su demostración. Nancy pasó al tablero a presentar sus avances en la demostración, pero no pudo establecer una correspondencia apropiada entre dos triángulos pues no sabía cómo garantizar que algún par de lados fuera congruente; según explicó, podía garantizar la congruencia de tres pares de ángulos (dos pares de alternos internos y un par de ángulos opuestos por el vértice), pero no de un par de lados[51]. Leopoldo pasó al tablero y, con apoyo de la profesora, elaboró la demostración que se resume en la Tabla 7, tomando como referencia la Figura 82. En el proceso de producción de la demostración, la profesora admitió que Leopoldo se saltará algunos pasos en la escritura, aunque los dijera oralmente. Por ejemplo, una vez establecido que el cuadrilátero ABCD estaba dado, Leopoldo quiso referirse al postulado de la recta para mencionar la existencia de las rectas BD y AC y luego los segmentos BD y AC, pero la profesora le dijo que podía saltarse esa parte.

[51] Ella no se dio cuenta que podía haber usado una de las diagonales como lado común.

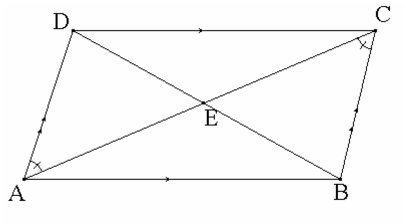


Figura 82

1. $\square$ ABCD es paralelogramo.	1. Dado.
2. Sean $\overline{AC}$ y $\overline{DB}$ las diagonales.	2. Definición de diagonal.
3. $\overline{AB} // \overline{CD}$ y $\overline{BC} // \overline{AD}$	3. Definición de paralelogramo.
4. $\angle CAD \cong \angle BCA$	4. Alternos internos entre paralelas.
5. $\angle ACD \cong \angle BAC$	5. Alternos internos entre paralelas.
6. $\overline{AC} \cong \overline{AC}$	6. Propiedad reflexiva
7. $\Delta DAC \cong \Delta BCA$	7. Criterio ángulo-lado-ángulo
8. $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ y $\overline{BC} \cong \overline{AD}$	8. Partes correspondientes congruentes.
9. $\angle ABD \cong \angle BDC$	9. Alternos internos entre paralelas.
10. $\Delta ABE \cong \Delta CDE$	10. Criterio ángulo-lado-ángulo.
11. $\overline{AE} \cong \overline{EC}$	11. Partes correspondientes congruentes.
12. AE = EC	

Tabla 7

En medio de la producción de la demostración, Leopoldo preguntó cómo se podría justificar que las diagonales del paralelogramo se intersecaban. Ignacio y Henry sugirieron algunas vías pero finalmente se desistió de ello, dejando la demostración pendiente y la propuesta de Leopoldo incompleta. La profesora hizo notar al grupo que, al hacer su demostración, Leopoldo había demostrado también que si un cuadrilátero es paralelogramo, sus lados opuestos son congruentes. Después, la profesora proyectó otra conjetura del grupo C y pidió analizarla:

> Grupo C: Si en un cuadrilátero ningún lado es congruente, entonces las diagonales no se bisecan.

Luz manifestó tener un contraejemplo que era precisamente la construcción que ella y Marina habían usado para formular su conjetura (Figura 76). La proyectó en el tablero, pero Darío la rechazó porque, según él, la conjetura que proponían se refería a que las diagonales no se bisecaban mutuamente. La profesora sugirió que para comprender mejor la conjetura, podían reformularla sin usar negaciones, aprovechando la proposición contrarecíproca; es decir, en lugar de escribir p→q se podría escribir ¬q → ¬p. Así, la conjetura del grupo C reformulada por Darío quedó: si las diagonales de un cuadrilátero se bisecan [mutuamente] entonces al menos un par de lados es congruente. Varios grupos, E, B, C y E comentaron que habían propuesto una conjetura similar, salvo que referida a ambos lados opuestos congruentes. Ignacio propuso usar las conjeturas ya demostradas: como él había demostrado que si las diagonales de un cuadrilátero se bisecan entonces los lados opuestos son paralelos y Leopoldo mostró que si los lados opuestos son paralelos los lados opuestos son congruentes, se podía concluir, mediante un silogismo, que si las diagonales se bisecan entonces los lados opuestos son congruentes.

Con relación a propiedades referidas a lados opuestos congruentes, lados opuestos paralelos y diagonales que se bisecan mutuamente, faltaba por analizar la conjetura del grupo J:

> Grupo J: Si en un cuadrilátero los lados opuestos son congruentes, entonces las diagonales se bisecan.

La profesora explicó que el procedimiento de construcción descrito por William y Gonzalo no correspondía a la conjetura pues ellos habían partido de dos segmentos que se bisecaban, habían unido sus extremos y habían analizado propiedades del cuadrilátero resultante. Su conjetura debía corresponder a la que se había analizado anteriormente. Sin embargo, la profesora consideró importante analizar si la conjetura era cierta y cómo podría demostrarse. Aníbal pasó al tablero y elaboró un argumento deductivo con base en la Figura 83. Comenzó afirmando que los triángulos ADB y CBD eran congruentes por el criterio lado-lado-lado. Esto le permitía afirmar que los ángulos 1 y $\angle 2$ eran congruentes, así como los ángulos 3 y $\angle 4$ y por lo tanto los lados opuestos eran paralelos; y ya habían demostrado que si los lados opuestos eran paralelos entonces las diagonales se bisecaban.

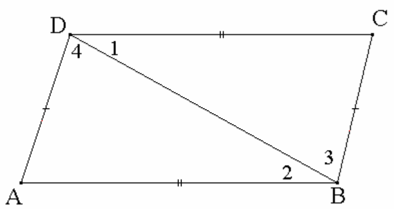


Figura 83

Al terminar la segunda sesión del episodio 15, la profesora hizo un recuento de los teoremas demostrado en la clase. Estos se recogen en la Tabla 8.

<table>
<tr><td colspan="5">Cuadrilátero</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Lados opuestos</td><td rowspan="2">paralelos</td><td rowspan="2">entonces</td><td>lados opuestos</td><td>congruentes</td></tr>
<tr><td>diagonales</td><td>se bisecan</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Diagonales</td><td rowspan="2">se bisecan</td><td rowspan="2">entonces</td><td rowspan="2">lados opuestos</td><td>paralelos</td></tr>
<tr><td>congruentes</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Lados opuestos</td><td rowspan="2">congruentes</td><td rowspan="2">entonces</td><td>lados opuestos</td><td>paralelos</td></tr>
<tr><td>diagonales</td><td>se bisecan</td></tr>
</table>

Tabla 8

En la sesión número 3 del episodio 15 la profesora comenzó repasando la lista de teoremas sobre propiedades de cuadriláteros demostrados en la clase anterior. Después, les propuso analizar algunas definiciones de polígono convexo para ver si podían escoger una definición que se ajustara mejor al sistema axiomático que estaban construyendo. Después de revisarlas y darse cuenta que la mayoría requerían de la definición de interior de cuadrilátero, Germán pidió la palabra para comentar sus avances en la definición de interior de cuadrilátero, aunque él mismo no estaba del todo satisfecho con su última propuesta. Acordaron seguir provisionalmente con la definición de polígono convexo sugerida por la profesora en la segunda sesión del episodio.

A continuación, la profesora mencionó que iban a estudiar un nuevo grupo de conjeturas formuladas por ellos, esta vez relacionadas con los ángulos de los cuadriláteros. Comenzó con una conjetura formulada por el grupo B:

> Grupo B: Si en un cuadrilátero ABCD sus diagonales se bisecan los ángulos no consecutivos son congruentes.

Inicialmente algunos estudiantes consideraron que la conjetura no era correcta, pero no pudieron mostrar un contraejemplo adecuado. En cambio, Ignacio comentó que él y Nancy tenían la misma conjetura y que el podía describir la construcción hecha y demostrar la conjetura. Proyectó su construcción (Figura 84) y explicó que ellos habían partido de dos segmentos que se bisecaban, después habían construido el cuadrilátero y luego habían medido los lados y los ángulos. Arrastró los vértices para mostrar que las congruencias se mantenían.

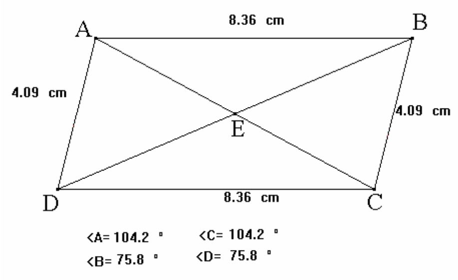
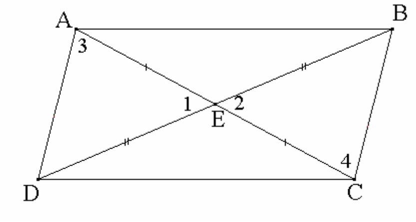


Figura 84

A continuación, Ignacio elaboró un argumento deductivo para justificar la conjetura, apoyándose en una representación como la de la Figura 85, ayudado por Nancy y escribiendo algunas afirmaciones en el tablero a medida que las decía.

 **Figura 85**	$\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ se bisecan en E E es punto medio de $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ $DE = EB, AE = EC$ $\overline{DE} \cong \overline{EB}, \overline{AE} \cong \overline{EC}$ $\angle 1 \cong \angle 2$ $\Delta AED \cong \Delta CEB.$ $\angle 3 \cong \angle 4$ $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ $\overline{AC} \cong \overline{AC}$ ΔACD $\cong$ ΔCAB $\angle ADC \cong \angle ABC$

Antes de comenzar a elaborar el argumento, Ignacio le preguntó a la profesora si debía ser exhaustivo al justificar, por ejemplo, que los ángulos 1 y $\angle 2$ eran opuestos por el vértice. Ella le dijo que lo mencionara verbalmente, pero que no lo escribiera, por falta de tiempo. El argumento de Ignacio se basó en la congruencia de los triángulos AED y CEB (lado-ángulo-lado), con lo cual pudo afirmar que los ángulos 3 y $\angle 4$ eran congruentes, así como los lados AD y CB. Esto le permitió afirmar que los triángulos ACD y CAB (lado-ángulo-lado) eran congruentes y de esta manera concluyó que los ángulos ADC y $\angle$ABC eran congruentes. De la misma manera, dijo Ignacio, se podía demostrar la congruencia de los ángulos DAB y $\angle$BCD.

La profesora propuso buscar otra vía para la demostración del teorema impulsando a los estudiantes a usar los teoremas ya demostrados sobre cuadriláteros. Ignacio, Jaime, Leopoldo y Germán sugirieron algunos caminos que se fueron evaluando según si usaban las mismas afirmaciones que había empleado Ignacio o no. Finalmente cómo Ignacio dijo que hacía falta garantizar que los lados opuestos eran congruentes Germán usó el teorema según el cual si las diagonales se bisecan el cuadrilátero es paralelogramo y después aquel que demuestra que si un cuadrilátero es paralelogramo los lados opuestos son congruentes. La profesora valoró el hecho de comenzar a usar los teoremas sobre cuadriláteros en las demostraciones puesto que así ellas quedaban más cortas.

Al intentar demostrar la conjetura del grupo B surgió nuevamente la pregunta de si las diagonales se cortan en el interior del cuadrilátero y otra pregunta sobre si cada vértice de un paralelogramo queda en el interior del ángulo formado por los tres vértices restantes. Estas inquietudes generaron una discusión en la que participaron Nancy y Germán. Primero demostraron, por contradicción, que el vértice C estaba en el interior del ángulo ABD; usando ese hecho y el teorema de la semirrecta, pudieron demostrar que las diagonales del paralelogramo se intersecaban en el interior de éste, resolviendo una inquietud formulada en la sesión anterior.

La profesora propuso a continuación estudiar la conjetura del grupo A.

Grupo A: Dado un cuadrilátero ABCD, si el ángulo A es congruente con el ángulo C, entonces las diagonales se bisecan.

Nancy representó en el tablero un contraejemplo (Figura 86).

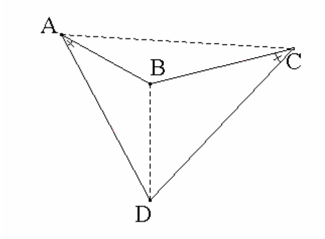


Figura 86

La profesora explicó que posiblemente Jaime y Julián, al formular la conjetura, no se habían fijado en otras propiedades de la figura, como pares de lados congruentes. Les propuso como ejercicio suponer que la conjetura era cierta y emplear el enunciado en un silogismo en el cual se afirmara también que si las diagonales se bisecan el cuadrilátero es un paralelogramo. Esto querría decir que si dos ángulos opuestos eran congruentes, inmediatamente se podía afirmar que el cuadrilátero era paralelogramo y ya habían visto que esto no era siempre cierto. Nancy explicó que ella e Ignacio tenían una conjetura parecida. Explicó que en la construcción ellos habían partido de un cuadrilátero, trazaron sus diagonales y determinaron sus puntos medios; luego, arrastraron los vértices hasta lograr que los puntos medios coincidieran; en ese momento se dieron cuenta que los lados y los ángulos eran congruentes. Al oír la explicación del procedimiento de construcción María mencionó el grupo E también habían establecido una conjetura contraria a la construcción pues ellos habían "obligado" a que las diagonales se bisecaran y habían "descubierto" que los lados y los ángulos opuestos eran congruentes. A pesar de haber formulado la conjetura contraria a la construcción hecha, la profesora pidió analizar la conjetura del grupo E, que redactó de la siguiente manera: si un cuadrilátero tiene ambos pares de lados y ángulos congruentes, las diagonales se bisecan. Como ya se había demostrado que si los lados opuestos eran congruentes el cuadrilátero era un paralelogramo la propiedad de los ángulos congruentes era innecesaria. Pero surgió el interés por demostrar si al tener los ángulos opuestos congruentes el cuadrilátero era paralelogramo, asunto que quedó pendiente para la siguiente clase.

En la sesión 4 del episodio 15, hizo una recapitulación de las conjeturas estudiadas y comentó que ella las había organizado de tal forma que se pudiera seguir un proceso lógico para ir organizando enunciados en el sistema axiomático. Por eso había comenzado con aquellas en donde los estudiantes se habían ceñido a las condiciones dadas en el problema, es decir, aquellas en las que se hizo referencia a que sólo una diagonal bisecara a la otra. Allí no habían encontrado cuadriláteros especiales, por lo que continuó con aquellas conjeturas que hacían referencia a que las dos diagonales se bisecaran. Al hacerlo, habían surgido términos no conocidos como cuadrilátero convexo e interior de cuadrilátero. Los dos primeros teoremas que habían demostrado fueron: si las diagonales de un cuadrilátero de bisecan mutuamente, el cuadrilátero es un paralelogramo y si el cuadrilátero es paralelogramo, las diagonales se bisecan. Al intentar demostrar el segundo teorema, habían visto la necesidad de asegurar que las diagonales de un paralelogramo se cortaban en el interior del mismo, asunto que habían logrado demostrar después de varios intentos de Henry y Germán.

Al continuar con su recapitulación, la profesora recordó que habían demostrado: si las diagonales se bisecan entonces los lados opuestos son congruentes, lo cual quería decir, según ella, que si el cuadrilátero era un paralelogramo los lados opuestos eran congruentes[52] También dice que demostraron: si los lados opuestos son congruentes entonces las diagonales se bisecan con lo cual habían podido concluir que si los lados opuestos eran congruentes el cuadrilátero era paralelogramo[53]. Finalmente habían demostrado que si las diagonales de un cuadrilátero se bisecaban, los ángulos opuestos eran congruentes. La profesora dijo que al tener ese teorema también se tenía que si el cuadrilátero era paralelogramo, los ángulos opuestos eran congruentes[54] (Ver Esquema 15). Quedó pendiente demostrar que si en un cuadrilátero los ángulos opuestos eran congruentes el cuadrilátero era paralelogramo.

Si paralelogramo → diagonales bisecan — si diagonales bisecan → paralelogramo

Si diagonales bisecan → lados op congru — si lados op congru → diagonales bisecan

Si paralelogramo → lados opu congru — si lados op congru → diagonales bisecan

Si diagonales bisecan → ángulos op congru

Si paralelogramo → ángulos op congru.

Esquema 15

---

[52] Como ya habían demostrado que si un cuadrilátero es paralelogramo las diagonales se bisecan y tenían ahora que si las diagonales se bisecan entonces los lados opuestos son congruentes, se podía concluir que si el cuadrilátero era paralelogramo los lados opuestos eran congruentes.

[53] En este caso el silogismo está bien armado porque si los lados opuestos son congruentes entonces las diagonales se bisecan; pero ya se tenía que si las diagonales se bisecan el cuadrilátero era paralelogramo; entonces se podía concluir: si los lados opuestos son congruentes, el cuadrilátero es paralelogramo.

[54] Como ya habían demostrado que si un cuadrilátero era paralelogramo las diagonales se bisecaban y ahora demostraban que si se bisecaban los ángulos opuestos eran congruentes, se podía concluir que si el cuadrilátero era paralelogramo entonces los ángulos opuestos eran congruentes.

Germán señaló que para demostrar que el cuadrilátero era un paralelogramo debían demostrar que los lados opuestos eran congruentes o los lados opuestos eran paralelos, pero que él no había podido hacerlo. La profesora dijo que también les serviría mostrar que las diagonales se bisecaban mutuamente. Después ella propuso una representación, como la de la Figura 87, señaló que podrían intentar buscar que los lados AD y BC fueran paralelos, basándose en la posible congruencia de los ángulos alternos internos $\angle 1$ y $\angle 2$ y pidió a todos trabajar en busca de la demostración del teorema.

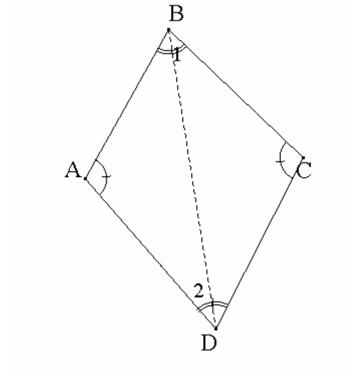


Figura 87

$\angle A \cong \angle C$; $\angle B \cong \angle D$

Una primera idea surgió de María quien sugirió suponer que la diagonal BD bisecaba los ángulos B y D. La profesora explicó que si eso fuera cierto, al menos para el caso en que la diagonal bisecara a uno de los ángulos, se tendría la congruencia de los triángulos ABD y CBD por el criterio ángulo-ángulo-lado, pero así podría asegurarse la congruencia de dos lados consecutivos y no de los lados opuestos. Nancy recordó que la propiedad de la diagonal de bisecar un vértice de un cuadrilátero era una propiedad de los cuadrados y no de cualquier cuadrilátero.

Después de un tiempo, Ignacio propuso intentar hacer una demostración por contradicción suponiendo que el cuadrilátero no era un paralelogramo, con lo cual los dos pares de ángulos alternos $\angle x$, $\angle w$ y $\angle y$, $\angle z$ no serían congruentes (Figura 88) y por lo tanto los ángulos A y $\angle C$ no serían congruentes; sin embargo, él mismo revisó su argumento analizando que si los ángulos $\angle x$ y $\angle y$ eran congruentes y $\angle z$ y $\angle w$ eran congruentes todavía era posible que los ángulos A y $\angle C$ lo fueran. La profesora preguntó por qué tendrían que ser congruentes los pares de ángulos mencionados por Ignacio para poder garantizar que los ángulos A y C eran congruentes.

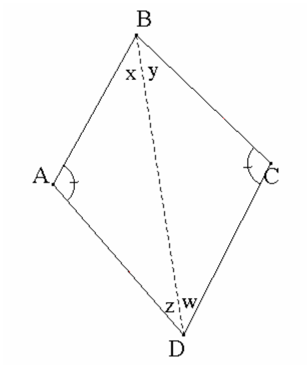


Figura 88

Después de un tiempo de trabajo por parejas sin que surgiera alguna idea fructífera, María sugirió proponer la conjetura como postulado e Ignacio dijo que mejor introdujeran un nuevo teorema al sistema según en cual la suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo es 180, pues así podrían demostrar que el cuadrilátero ABCD es un paralelogramo, cuando los ángulos A y $\angle C$ son congruentes, así como los ángulos B y $\angle D$. La profesora acogió la propuesta, pidió que dejaran de lado la conjetura y se dedicaran a estudiar cómo demostrar el teorema propuesto por Ignacio, con los elementos disponibles en el sistema teórico. Ella propuso el siguiente enunciado:

Teorema: En el triángulo ABC, $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180$

Mientras los estudiantes trabajaban en grupos, la profesora se desplazaba enterándose de lo que estaban haciendo. Después de un tiempo, pidió a Jaime y Julián explicar a sus compañeros las ideas que estaban desarrollando. Ellos habían hecho algunas construcciones auxiliares con base en perpendiculares: $AC \perp EC$, $EC \perp BE$, $FA \perp AC$ y $FA \perp FB$ (Figura 89):

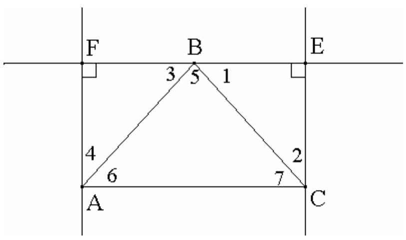


Figura 89

Jaime explicó que la suma de las medidas de los ángulos $\angle 1$, $\angle 3$ y $\angle 5$ era igual a 180 y que por lo tanto, bastaba saber que los ángulos $\angle 1$ y $\angle 7$ eran congruentes, así como los ángulos $\angle 3$ y $\angle 6$. Ignacio completó el argumento diciendo que los pares de ángulos eran alternos internos entre paralelas pues el grupo A había construido la recta EC perpendicular a la recta AC y a la recta BE perpendicular a la recta EC, por lo que las rectas BE y AC eran paralelas (tenían un teorema que así lo garantizaba). Henry intervino para decir que faltaba garantizar que se tuviera la interestancia F-B-E; según Henry, era mejor entonces construir directamente una recta paralela a la recta AC por el punto B, pues ya tenían el postulado de las paralelas. La profesora confirmó la idea diciendo que por esa razón no habían introducido el teorema de la suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo, hasta no tener dicho postulado.

A pesar de tener ya una vía para la demostración, la profesora pidió a María y Efraín pasar al tablero a mostrar su idea, que coincidía con lo que estaban intentando hacer Nancy e Ignacio. María explicó que como ellos sabían que el ángulo externo era mayor que los internos no adyacentes quisieron construir, en el interior de uno de los ángulos externos del triángulo, ángulos con medida igual a la de los internos y después usar el postulado del suplemento. Por eso construyeron el ángulo 3' congruente con el ángulo 3; lo que no sabían era cómo demostrar que el ángulo 2 era congruente con el ángulo 4 (Figura 90).

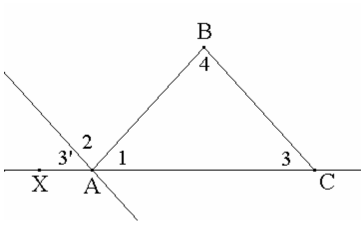


Figura 90

Nancy contribuyó al argumento que estaban elaborando María y Efraín diciendo que como los ángulos 3 y $\angle 3'$ eran congruentes, el rayo que habían construido al copiar el ángulo 3 era paralelo a la recta BC. De esta forma se garantizaba que los ángulos 2 y $\angle 4$ eran congruentes también. La profesora comentó que era propuesta de demostración dependía de poder construir el ángulo 3 en el interior del ángulo XAB, pero que eso ya lo habían demostrado en algún momento. Nancy comentó que María y Efraín habían demostrado, adicionalmente, que el ángulo externo a un triángulo mide igual a la suma de los ángulos internos no adyacentes. Este era otro teorema que podían institucionalizar. La profesora propuso de tarea, demostrar que si un cuadrilátero tiene dos pares de ángulos congruentes es un paralelogramo y también demostrar la conjetura relacionada con el cuadrilátero de Saccheri (Episodio 14), pues había quedado pendiente por no disponer del teorema de la suma de los ángulos interiores de un triángulo.

A continuación, pidió a todo el grupo analizar otra conjetura propuesta por el grupo A:

> Grupo A: Dado el cuadrilátero ABCD, si las diagonales se bisecan y AC = BC, el cuadrilátero tiene al menos dos lados congruentes.

Antes de pedir opinión de los estudiantes la profesora comentó que con los teoremas disponibles podían transformar la conjetura refiriéndose a un paralelogramo, es decir, Jaime y Julián estarían proponiendo: si un paralelogramo tiene las diagonales congruentes entonces tiene al menos dos lados congruentes. María comentó que al ser paralelogramo ya se garantizaba que los lados opuestos eran congruentes. La profesora pidió a Jaime explicar la construcción hecha. Él proyectó la figura en el tablero y dijo que ellos habían partido de dos diagonales congruentes que se bisecaban, para lo cual habían usado una circunferencia (Figura 91a) que después habían ocultado (Figura 91b). Julián explicó que ellos habían anticipado que los cuatro lados iban a resultar congruentes, pero que sólo les habían resultado sólo dos y por eso habían escrito la conjetura de esa manera, sin fijarse en más propiedades.

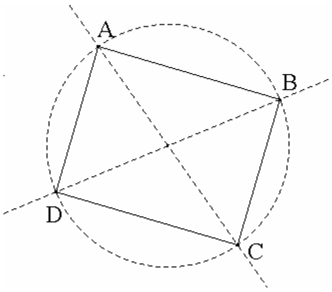


Figura 91a

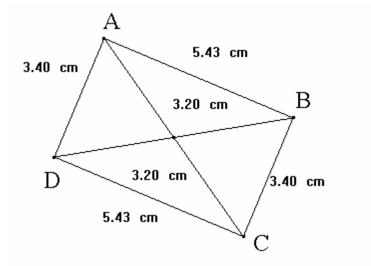


Figura 91b

Marina sugirió que podía conjeturarse que eran un rectángulo. Entonces la profesora invitó a escribir la definición de rectángulo. Cuatro estudiantes propusieron definiciones que se fueron analizando una por una de acuerdo con las condiciones propuestas en cada una de ellas. Primero miraron cuáles podrían ser equivalentes en el sentido en que se podía llegar de una a la otra usando teoremas del sistema axiomático. Después revisaron cuál sería la más adaptada al sistema axiomático que estaban construyendo y en dónde habría que demostrar menos propiedades en el caso de tener que garantizar que se tenía un rectángulo. Adoptaron finalmente la definición de Darío:

> Definición de rectángulo: paralelogramo con al menos un ángulo recto.

La profesora pidió demostrar, de tarea para fuera de clase, que en un rectángulo todos los lados son congruentes.

Después de acordada la definición de rectángulo, la profesora modificó la conjetura del grupo A proponiendo el enunciado: si en un paralelogramo las diagonales son congruentes, entonces es rectángulo. Germán se ofreció voluntariamente a hacer la demostración, aprovechando la definición de rectángulo que habían establecido. A medida que escribía las afirmaciones, decía las justificaciones en voz alta, e iba completando una figura en la que se apoyaba (Figura 92). Nancy, Ignacio, Darío y la profesora contribuyeron con ideas para completar la argumentación de Germán. En la Tabla 9 se encuentran las afirmaciones escritas por Germán, con ayuda de sus compañeros, y las afirmaciones que se hicieron en voz alta.

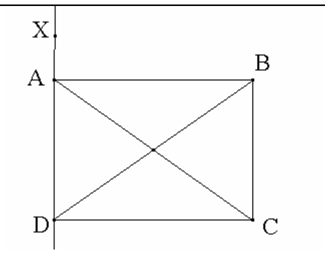


Figura 92

Afirmaciones	Justificaciones
1. $\square ABCD$ es un paralelogramo	1. Dado
2. $\overline{AC} \cong \overline{DB}$	2. Dado
3. $\overline{AD} \cong \overline{BC}; \overline{AB} \cong \overline{DC}$	3. Definición de paralelogramo.
4. $\overline{DC} \cong \overline{DC}$	4. Propiedad reflexiva
5. $\Delta ADC \cong \Delta BCD$	5. lado-lado-lado.
6. $\angle ADC \cong \angle BCD$	6. Partes correspondientes de triángulos congruentes.
7. $\angle ADC \cong \angle ABC; \angle BCD \cong \angle BAD$	7. Teorema ángulos opuestos del paralelogramo son congruentes.
8. Sea $\overleftrightarrow{AD}$	8. Postulado de la recta
9. Sea $X \in \overleftrightarrow{AD}$ tal que X – A – D	9. Teorema de interestancia
10. $AB//DC$	10. Definición de paralelogramo
11. $\angle XAB \cong \angle ADC$	11. Teorema ángulos correspondientes entre paralelas.
12. $\angle XAB \cong \angle DAB$	12. Propiedad transitiva.
13. $\angle XAB$ y $\angle DAB$ forman par lineal	13. Definición de par lineal.
14. $\angle DAB$ es recto	14. Definición de ángulo recto.

Tabla 9

A continuación, la profesora preguntó qué pasaría si en la conjetura se suprimía la condición de paralelogramo dejando sólo la propiedad de ser cuadrilátero, es decir, afirmando que si un cuadrilátero tiene diagonales congruentes entonces es un rectángulo. Germán y Luz presentaron contraejemplos para refutar la conjetura (Figura 93).

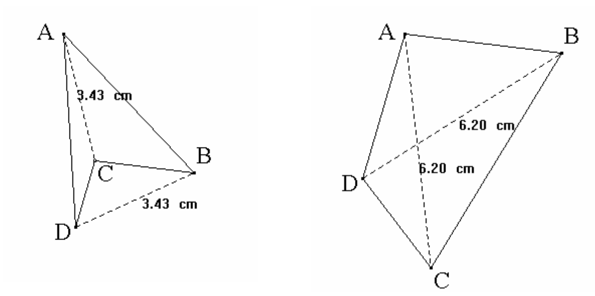


Figura 93

Al ver uno de los contraejemplos, Ignacio mencionó que éste parecía un trapecio, lo que indujo a la profesora a definir qué era un trapecio y con esa definición se terminó la sesión.

> Definición de trapecio: cuadrilátero con exactamente un par de lados paralelos.

La sesión cinco del episodio comenzó con la búsqueda de una vía para demostrar la conjetura: si ambos pares de ángulos opuestos son congruentes entonces el cuadrilátero es un paralelogramo. Ésta había quedado pendiente debido a que no se había demostrado que la suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo es 180. La profesora pidió a los estudiantes buscar cómo usar éste teorema ya demostrado para demostrar la conjetura, aprovechando los avances logrados en una sesión anterior, es decir, el uso de una de las diagonales y la definición de paralelas. Representó en el tablero una figura y pidió basarse en ella para proponer cómo hacer la demostración (Figura 94). Ella explicó que las letras *a, b, c* y *d* no eran los nombres de los ángulos, sino los valores de sus medidas.[55]

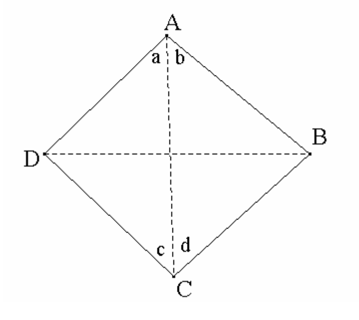


Figura 94

Entre Ignacio y Daniel produjeron un esbozo de la demostración. Primero, Ignacio escribió una serie de afirmaciones, sin dar las correspondientes justificaciones:

---

[55] Al hacer esto, ella estaba violando la norma de escribir las medidas de los ángulos por fuera de la figura, pero ningún estudiante objeto este hecho.

$a + b = m\ \angle A$

$c + d = m\ \angle C$

$a + m\angle D + c = 180$

$b + d + m\angle B = 180$

$a + c = b + d$

La profesora explicó que Ignacio estaba haciendo uso del teorema de la suma de las medidas de ángulos interiores de un triángulo para establecer algunas relaciones algebraicas entre las medidas de los ángulos y, aprovechando que los ángulos $\angle$D y $\angle$B eran congruentes establecer la igualdad $a + c = b + d$. Con base en esas ideas iniciales Daniel continuó el proceso algebraico, escribiendo las siguientes afirmaciones, algunas con ayuda de la profesora:

$a + b = m\ \angle A \rightarrow b = m\ \angle A - a$

$c + d = m\ \angle C \rightarrow c = m\angle C - d$

$a + c = b + d$

$a + m\angle C - d = m\angle A - a + d$

$a - d = -a + d$

$2a = 2d$

$a = d$

La profesora dijo que mediante un proceso similar (sustituyendo a a y a d en la ecuación a + c = b + d se obtenía que b era igual a C; con estas igualdades de medidas se podía afirmar que los triángulos ADC y CBA eran congruentes (criterio ángulo-lado-ángulo) y de allí obtener que los lados opuestos del cuadrilátero eran congruentes, por lo que era paralelogramo.

Una vez demostrado el teorema, la profesora propuso mirar nuevas conjeturas formuladas por los grupos, a raíz de añadir nuevas propiedades a los lados o a las diagonales. Sugirió estudiar una de las conjeturas propuestas por el grupo H:

> Grupo H: Si las diagonales de un cuadrilátero son perpendiculares y una diagonal biseca a la otra, entonces el cuadrilátero tiene dos pares de lados congruentes.

Para explicar de dónde había surgido la conjetura Daniel proyectó una figura en el tablero y explicó la construcción: él y sus compañeros Melisa y Orlando habían partido del segmento AC y su punto medio X (Figura 95a). Luego habían construido una recta cualquiera que pasara por X y en ella habían determinado dos puntos B y D, para construir el cuadrilátero ABCD. Por arrastre, movieron la recta BD hasta que el ángulo BXC fuera de 90 y se dieron cuenta que el cuadrilátero resultante tenía dos pares de lados congruentes.

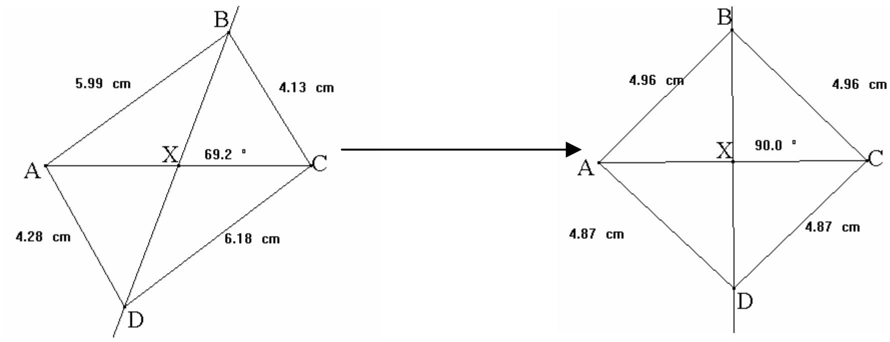


Figura 95a

Figura 95b

Según la profesora, la conjetura correspondía al proceso construido, salvo que no habían reportado la información completa, pues no habían explicado cuáles eran los pares de lados congruentes. En la figura podía verse que eran pares de lados consecutivos. Melisa pasó al tablero y, sobre la figura proyectada, elaboró un argumento para hacer la demostración. Explicó que: los segmentos AX y XC eran congruentes por ser X punto medio del segmento AC, el segmento BD es perpendicular al segmento AC, pues era una condición dada, y los ángulos BXC y $\angle$BXA eran rectos por definición de ángulo recto y por un teorema que habían demostrado; entonces, por el criterio lado-ángulo-lado los triángulos AXB y CXB son congruentes y se tiene la congruencia de los lados AB y CB. Al terminar su argumento Germán sugirió que se hubiera podido usar el teorema de la mediatriz y decir que el punto B equidistaba de los puntos A y C. Efraín preguntó si al añadir la condición de que los segmentos AC y BD fueran congruentes los cuatro lados resultarían ser también congruentes. La profesora escribió en el tablero las condiciones sugeridas por Efraín: el segmento BD biseca al segmento AC, el segmento BD es perpendicular al segmento AC y el segmento BD es congruente al segmento AC. Según Julián la conjetura era falsa y sólo se cumplía si los segmentos AC y BD se bisecan. Para justificar su afirmación, presentó un contraejemplo (Figura 96).

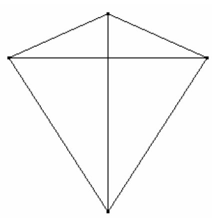


Figura 96

La profesora sugirió entonces analizar una nueva conjetura del grupo A que, según ella, se parecía a la conjetura del grupo H:

> Grupo A: En el cuadrilátero ABCD, si las diagonales se bisecan en P y $m\angle$BPC = 90, entonces AB, BC, CD y AD son iguales.

Mientras Jaime buscaba la figura correspondiente a la conjetura, para proyectarla, Germán dijo que esta conjetura llevaba a las definiciones de cuadrado o de rombo. Jaime mostró una figura parecida a la Figura 95a, pero con la diferencia de que los segmentos AC y BD se bisecaban. Al arrastrar la recta BD para obtener el ángulo BXC recto, se dieron cuenta que todos los lados resultaban congruentes. Como la mayoría conceptúo que la figura del grupo A era cuadrado, la profesora pidió escribir su definición. Henry propuso que un cuadrado era un cuadrilátero con exactamente cuatro pares de lados congruentes. Algunos estudiantes se rieron considerando que no podían ser cuatro pares de ángulos adyacentes, pero la profesora dijo que si Henry se refería a ángulos adyacentes, si se podía hablar de cuatro pares. De todas maneras, Germán mostró un contraejemplo, en donde los cuatro lados eran congruentes, pero no era un cuadrado, sino un rombo. Esto condujo a introducir la definición de rombo.

> Definición de rombo: cuadrilátero con cuatro lados congruentes.

Después se analizó la definición de cuadrado sugerida por Germán: rectángulo con los lados congruentes. Según ella, al proponer que fuera rectángulo se garantizaban los ángulos congruentes y bastaba sólo mencionar los lados; en ese sentido estaba correcta. A continuación analizaron la definición de Efraín: un cuadrado es un paralelogramo cuyas diagonales se bisecan, son perpendiculares y son congruentes. Ignacio consideró que era innecesario afirmar que las diagonales se bisecaban si se decía que era un paralelogramo, por lo que suprimieron esa condición. Entonces la profesora pidió a los estudiantes pensar con cuál definición convendría quedarse por ser la más económica y la menos exigente para usarla en las demostraciones. Según Leopoldo, convenía escoger aquella con más propiedades pues en caso de tener que hacer una demostración en la que estuviera dado un cuadrado se tendrían muchas propiedades. Pero la profesora opinó que era lo contrario, pues generalmente las demostraciones buscaban era llegar a concluir la existencia de un cuadrado. Por eso, además de considerar más apropiada la definición sugerida por Germán, le hizo una adaptación para que quedara aún más económica:

> Definición de cuadrado: rectángulo con un par de lados adyacentes congruentes.

Con esa definición, y la definición de rectángulo que habían adoptado, para demostrar que una figura era un cuadrado sólo se requería mostrar que el cuadrilátero era paralelogramo, que tenía un ángulo recto y que dos lados adyacentes eran congruentes. La definición sugerida por Efraín fue adoptada como teorema. Con base en una representación como la de la Figura 97, Efraín explicó que, usando lado-ángulo-lado, aprovechando que las diagonales se bisecaban y eran perpendiculares se formaban cuatro triángulos congruentes y así se podía concluir que los cuatro lados eran congruentes. La congruencia de los cuatro ángulos se tenía garantizada por ser paralelogramo y tener las diagonales congruentes.

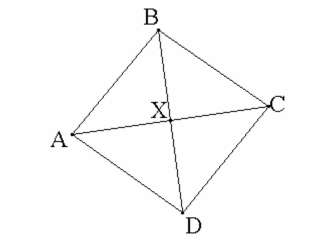


Figura 97

Una vez demostrada la conjetura propuesta por Efraín, a manera de definición de cuadrado, la profesora sugirió demostrar la conjetura recíproca, es decir: si un cuadrilátero era cuadrado entonces sus diagonales eran congruentes y perpendiculares.

> Teorema: Si un cuadrilátero es cuadrado entonces sus diagonales son congruentes y perpendiculares.

Aníbal propuso una vía para hacer la demostración que la profesora fue escribiendo a medida que el estudiante proponía las afirmaciones y las justificaciones. En su argumentación fue ayudado por Ignacio, Germán y la profesora. En la Tabla 10 se encuentra una síntesis de la propuesta.

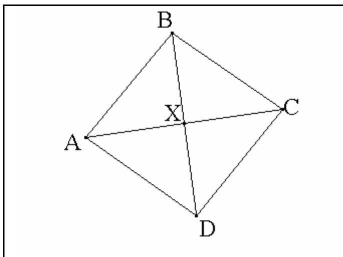
	1. ABCD es cuadrado 2. $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD} \cong \overline{DA}$ 3. CD = CB; AD = AB. 4. C pertenece a la mediatriz del segmento DB; A pertenece a la mediatriz de DB. 5. ABCD es rectángulo. 6. $\angle ADC \cong \angle BCD$ 7. $\triangle ADC \cong \triangle BCD$

Tabla 10

El argumento de Aníbal sirvió también para demostrar que un rectángulo tiene diagonales congruentes, por lo que se instituyó un nuevo teorema:

> Teorema: si un paralelogramo es rectángulo, sus diagonales son congruentes.

A continuación, la profesora proyecto una conjetura propuesta por el grupo C:

> Grupo C: Si todos los lados de un cuadrilátero son congruentes entonces las diagonales se bisecan mutuamente y forman un ángulo recto.

Según la profesora, la conjetura se refiere a un rombo, según como habían establecido la definición. Entonces la pregunta hace referencia a si en un rombo las diagonales se bisecan mutuamente y son perpendiculares. Darío dijo que efectivamente ellos habían construido un rombo a partir de circunferencias congruentes (Figura 98). Al hacer la construcción se dieron cuenta que las diagonales se bisecaban. Además, usaron la opción 'Chequear propiedades' del menú de Cabri para comprobar si eran perpendiculares. La profesora le pidió a Darío usar la misma opción para verificar la equidistancia del punto de corte de las diagonales, a los extremos de cada segmento.

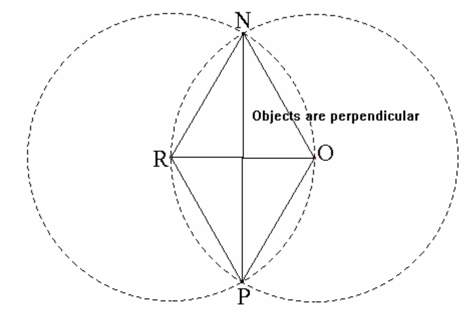


Figura 98

Para demostrar la conjetura utilizaron el hecho de ser paralelogramo y así pueden afirmar que las diagonales se bisecan. Para demostrar que son perpendiculares Ignacio sugirió usar el teorema de la mediatriz.

Para terminar la sesión, la profesora proyectó la conjetura del grupo I:

> Grupo I: Si un cuadrilátero tiene todos sus segmentos congruentes y sus diagonales se bisecan entonces: (a) tiene al menos dos pares de ángulos congruentes, (b) los triángulos formados por la intersección de las diagonales y dos puntos consecutivos del cuadrilátero son congruentes, (c) la intersección de las diagonales forma cuatro ángulos rectos, (d) las diagonales están contenidas en las bisectrices de los ángulos cuyo extremo es el vértice del cuadrilátero.

Para analizar la conjetura, la profesora propuso ir evaluando cada uno de los ítems. La profesora mencionó que al tener que las diagonales se bisecan, el cuadrilátero es paralelogramo, por lo que sus lados opuestos son congruentes (afirmación (a)); la afirmación (b) había sido propuesta por William y ya se había demostrado, así como la afirmación (c). Faltaba por demostrar la afirmación (d), es decir, que en un rombo, las diagonales eran bisectrices de los ángulos correspondientes. Germán propuso usar el criterio lado-ángulo-lado en los triángulos DFA y BFA (Figura 99) para mostrar que la recta AF era bisectriz. Después, según la profesora había que ver que la recta AF era la misma recta AC; Ignacio justificó la afirmación mostrando que A, F y C eran colineales.

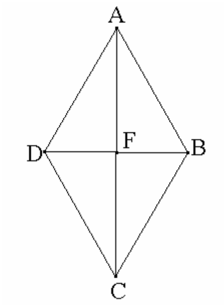


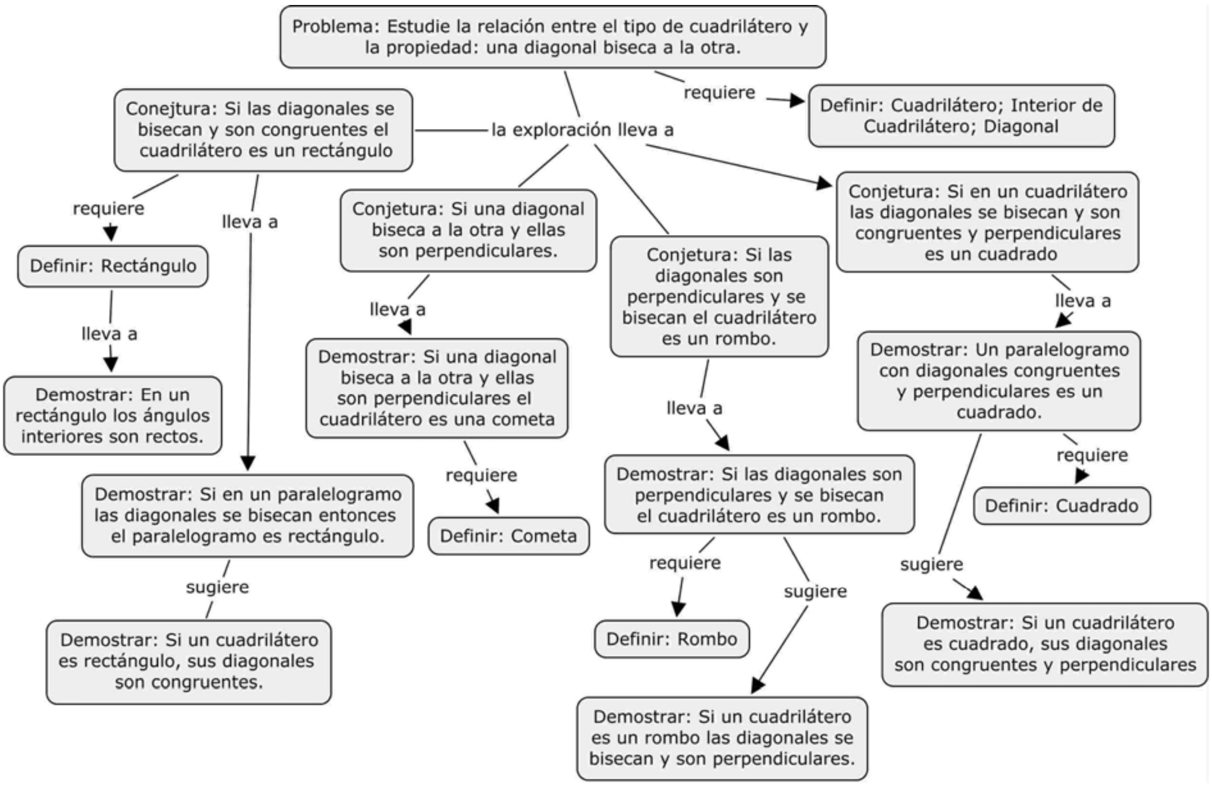
Figura 99

Finalmente se instituyó un último teorema:

Teorema: En un rombo las diagonales bisecan a los ángulos opuestos.

En el Esquema 16 ilustramos las relaciones entre las actividades realizadas y el contenido desarrollado

.



Esquema 16

ANEXO 5

SISTEMA AXIOMÁTICO

Términos no definidos

Punto

Recta

Plano

Postulados

Relación punto – recta - plano	Las rectas y los planos son conjuntos de puntos.
Correspondencia puntos en recta - números	Existe una correspondencia entre los puntos de una recta y los números reales tal que: (i) a cada punto corresponde un único real, (ii) a cada número real corresponde un único punto
De la recta	Dados dos puntos cualesquiera, existe exactamente una recta que los contiene.
Correspondencia puntos - números	A cada par de puntos corresponde un único número positivo.
De la distancia	La distancia *AB* entre dos puntos *A* y *B* de una recta, es el valor absoluto de la diferencia de las coordenadas.
De colocación de la regla	Dados dos puntos *P* y *Q* de una recta, se puede escoger el sistema de coordenadas de manera que la coordenada de *P* sea 0 y la coordenada de *Q* sea positiva.
Amplitud del plano	Todo plano contiene al menos tres puntos que no están alineados.
Llaneza del plano	Si dos puntos de una recta están en un plano, entonces la recta está en el mismo plano.
Del plano	Tres puntos cualesquiera están al menos en un plano y tres puntos cualesquiera no alineados están exactamente en un plano.
Separación del plano	Se da una recta y un plano que la contiene. Los puntos del plano que no están en la recta forman dos conjuntos tales que: (i) cada uno de los conjuntos es convexo, (ii) si *P* está en uno de los conjuntos y *Q* en otro, entonces $\overline{PQ}$ interseca la recta
Medida de ángulos	A cada ángulo *BAC* le corresponde un número real entre 0 y 180.
Construcción de ángulo	Sea $\overrightarrow{AB}$ un rayo de la arista del semiplano *H*. Para cada número *r* entre 0 y 180, hay exactamente un $\overrightarrow{AP}$ con *P* en *H*, tal que $m\angle PAB = r$.
Adición de medida de ángulos	Si *D* está en el interior del ángulo $\angle BAC$, entonces $m\angle BAC = m\angle BAD + m\angle DAC$, y de allí que $m\angle CAD = m\angle CAB - m\angle DAB$.

Par lineal (1)	Si dos ángulos forman par lineal, entonces la suma de sus medidas es 180.
Par lineal (2)	Si dos ángulos forman par lineal, entonces son suplementarios.
Correspondencia lado-ángulo-lado	Toda correspondencia entre triángulos lado – ángulo – lado es una congruencia.
Correspondencia ángulo-lado-ángulo	Toda correspondencia entre triángulos ángulo – lado – ángulo es una congruencia.
Correspondencia lado-lado-lado	Toda correspondencia entre triángulos lado – lado – lado es una congruencia.
Bisectriz – lado opuesto de triángulo	La bisectriz de un ángulo de un triángulo corta el lado opuesto.
Paralelas	Por un punto externo a una recta hay solamente una recta paralela a una recta dada.

Definiciones

Distancia entre dos puntos	El número obtenido mediante el postulado correspondencia puntos - números para ese par de puntos.
Coordenada de un punto	Número que corresponde a cada punto en una recta.
Distancia de un punto a sí mismo	La distancia de un punto a si mismo es cero.
Puntos colineales	Tres o más puntos están alineados o son colineales si hay una recta que los contiene a todos.
Interestancia	*B* está entre *A* y *C* si *A, B* y *C* son puntos distintos de una misma recta y $AB + BC = AC$.
Segmento	Dados dos puntos *A* y *B* del plano, el segmento *AB* es el conjunto de los puntos *A, B* y todos los puntos entre *A* y *B*.
Longitud de segmento	La distancia *AB* se llama la longitud de $\overline{AB}$.
Congruencia de segmentos	Dos segmentos son congruentes si tienen la misma longitud.
Rayo	El rayo *AB* es el conjunto de puntos que es la unión de $\overline{AB}$ y el conjunto de puntos *C*, para los cuales *B* está entre *A* y *C*.
Rayos opuestos	Si A está entre B y C entonces $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ se llaman opuestos.
Punto medio	Un punto *B* se llama punto medio de $\overline{AC}$, si *B* está entre *A* y *C* y $AB = BC$.
Bisecar	Un punto, segmento, rayo o recta biseca a un segmento si pasa por el punto medio del segmento.

Equidistancia	Dos puntos A y C son equidistantes a un punto B si $AB= BC$.
Puntos coplanarios	Los puntos de un conjunto son coplanarios si hay un plano que los contiene a todos.
Conjunto convexo	Un conjunto A de puntos del plano se llama convexo si, para cada par de puntos P y Q del conjunto, $\overline{PQ}$ está en A.
Semiplano	Dada una recta m y un plano α que la contiene, los dos conjuntos determinados por el postulado de separación del plano se llaman semiplanos o lados de m y m se llama borde o arista de cada uno de ellos.
Ángulo	Reunión de dos rayos que tienen el mismo origen pero que no están en la misma recta.
Interior de Ángulo	Sea $\angle BAC$ un ángulo en el plano β. Un punto P está en el interior de $\angle BAC$ si, (i) P y B están en el mismo lado de $\overleftrightarrow{AC}$ y (ii) P y C están del mismo lado de la recta $\overleftrightarrow{AB}$.
Medida de ángulo	El número dado por el postulado de la medida de ángulo se llama medida del ángulo.
Par lineal	Si $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AD}$ son rayos opuestos y $\overrightarrow{AC}$ es otro rayo cualquiera, entonces $\angle BAC$ y $\angle CAD$ forman un par lineal.
Ángulos opuestos por el vértice	Dos ángulos son opuestos por el vértice si sus lados forman dos pares de rayos opuestos.
Ángulos adyacentes	Dos ángulos son adyacentes si son coplanares, comparten el vértice, tienen un lado común y no tienen puntos interiores en común.
Ángulos suplementarios	Si la suma de las medidas de dos ángulos es 180, los ángulos son suplementarios.
Ángulos complementarios	Si la suma de las medidas de dos ángulos es de 90º, se llaman complementarios.
Ángulos congruentes	Dos ángulos son congruentes si tienen la misma medida.
Ángulo recto (1)	Un ángulo recto es aquel cuya medida es de 90.
Ángulo recto (2)	Un ángulo es recto si existe otro ángulo que forma par lineal con el ángulo dado y que es congruente al ángulo dado.
Rayos, rectas y segmentos perpendiculares	Si los rayos AB y AC o las rectas AB y AC o los segmentos AB y AC forman un ángulo recto, entonces se llaman perpendiculares.
Bisectriz de un ángulo	Si D está en el interior del $\angle BAC$, y $\angle BAD \cong \angle DAC$, entonces $\overrightarrow{AD}$ biseca al $\angle BAC$, y $\overrightarrow{AD}$ se llama *bisectriz* del $\angle BAC$.
Ángulo agudo, ángulo obtuso	Son ángulos cuya medida es menor o mayor de 90, respectivamente.

Triángulo	Si *A, B* y *C* son tres puntos cualesquiera no alineados, entonces la reunión de los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ se llama triángulo.
Interior de triángulo	$int\ \Delta ABC = int \angle A \cap int \angle B.$
Congruencia de triángulos	Sea una correspondencia entre los vértices de los triángulos *ABC* y *DEF*. Si los pares de lados correspondientes son congruentes, y los pares de ángulos correspondientes son congruentes, entonces la correspondencia se llama una *congruencia* entre los triángulos *ABC* y *CDE.*
Triángulo isósceles	Es el triángulo que tiene dos lados congruentes.
Altura de triángulo	Es el segmento perpendicular a la recta que contiene uno de los lados de un triángulo, uno de cuyos extremos está en esa recta, y el otro es el vértice del lado opuesto.
Mediana de triángulo	Es el segmento cuyos extremos son un vértice de un triángulo y el punto medio del lado opuesto.
Mediatriz de triángulo	En un plano, es la recta perpendicular al segmento en su punto medio.
Ángulo externo	Si *C* está entre *A* y *D*, entonces $\angle BCD$ es externo del $\Delta ABC.$
Ángulo interno no contiguo a un ángulo externo	Aquel que no forma par lineal con el ángulo externo.
Distancia punto - recta	La distancia entre una recta y un punto fuera de ella es la longitud del segmento perpendicular desde el punto a la recta.
Rectas paralelas	Dos rectas son paralelas si (i) están en el mismo plano y (ii) no se intersecan.
Recta secante	Una recta es secante a otras dos rectas, si las interseca en puntos distintos.
Ángulos alternos internos	Se dan dos rectas *l1* y *l2* cortadas por una secante *T* en los puntos *P* y *Q*; Si *A* es un punto de *l1* y *B* un punto de *l2* tal que *A* y *B* están en lados opuestos de *T*, entonces el $\angle APQ$ y el $\angle PQB$ son ángulos alternos internos.
Ángulos correspondientes	Si dos rectas son cortadas por una secante de modo que el $\angle x$ y el $\angle y$ son ángulos alternos internos, y los ángulos $\angle y$ y $\angle z$ son opuestos por el vértice, entonces el $\angle x$ y el $\angle z$ son ángulos correspondientes.
Cuadrilátero	Se dan *A, B, C, D* cuatro puntos en un mismo plano. Si tres de ellos no están alineados y los segmentos *AB, BC, CD* y *DA* se intersecan sólo en sus extremos, entonces su reunión es un cuadrilátero.
Cuadrilátero convexo	Un cuadrilátero es convexo si dos cualesquiera de sus vértices no están en lados opuestos de una recta que contiene a un lado del cuadrilátero.
Diagonal de cuadrilátero	Dado el cuadrilátero ABCD, la diagonal del mismo es el segmento cuyos extremos son dos vértices no consecutivos del paralelogramo.

Paralelogramo	Dado el cuadrilátero ABCD, si ambos pares de segmentos no consecutivos son paralelos, entonces el cuadrilátero ABCD es un paralelogramo.
Rectángulo	Paralelogramo con un ángulo recto.
Trapecio	Cuadrilátero con exactamente un par de lados opuestos paralelos.
Rombo	Paralelogramo con un par de lados adyacentes congruentes.
Cuadrado	Rectángulo con un par de lados adyacentes congruentes.

Teoremas

Recta	Toda recta tiene al menos dos puntos.
Relación de interestancia - orden	Sean *A, B* y *C* tres puntos de una recta, con coordenadas *x, y* y *z*. Si $x < y < z$ entonces *B* está entre *A* y *C*.
Segundo teorema de interestancia	Dados dos puntos de una recta, existe un punto entre ellos.
Tercer teorema de interestancia	Dados dos puntos *A* y *B* en una recta, existe un punto *C* tal que *B* está entre *A* y *C*.
Orden entre puntos	Si *A, B* y *C* son tres puntos distintos de una misma recta, entonces exactamente uno de ellos está entre los otros dos.
Localización de puntos	Sean $\overrightarrow{AB}$ y x un número positivo. Entonces existe exactamente un punto *P* de $\overrightarrow{AB}$ tal que *AP* es *x*.
Existencia y unicidad del punto medio	Todo segmento tiene exactamente un punto medio.
Punto medio	La distancia del punto medio a los extremos de un segmento es igual a la mitad de la longitud del segmento.
Intersección entre rectas	Si dos rectas diferentes se intersecan, su intersección contiene un punto solamente.
Existencia y unicidad del rayo opuesto	Todo rayo tiene exactamente un rayo opuesto.
Una recta y un punto determinan un plano	Dada una recta y un punto fuera de ella, hay exactamente un plano que contiene a ambos.
Dos rectas intersecantes determinan un plano	Dadas dos rectas que se intersecan hay exactamente un plano que las contiene.
Separación del plano (1)	Si $\overline{AB} \cap m = \varnothing$ entonces $A \in S_{m,B}$.

Separación del plano (2)	Si $A \in S_{m,B}$ entonces $\overline{AB} \cap m = \varnothing$.
Interestancia mismo lado de la recta	Si A-B-C y si m es una recta que contiene a C diferente de $\overleftrightarrow{AB}$ entonces $A \in S_{m,B}$.
Interestancia lados opuestos de la recta	Si A-B-C y si m es una recta que contiene a B diferente de $\overleftrightarrow{AB}$ entonces $A \notin S_{m,C}$.
Semirrecta	Sea m una recta del plano α. Sea P un punto de m y Q un punto de α que no está en m. La semirrecta PQ está contenida en el semiplano determinado por m en que está Q.
Ángulos opuestos por el vértice	Los ángulos opuestos por el vértice son congruentes.
Existencia y unicidad de la bisectriz	Todo ángulo tiene exactamente una bisectriz.
Ángulos complementarios son agudos	Si dos ángulos son complementarios, entonces ambos son agudos.
Ángulos congruentes y suplementarios	Si dos ángulos son a la vez congruentes y suplementarios, entonces cada uno de ellos es un ángulo recto.
Suplemento de ángulos congruentes	Suplemento de ángulos congruentes, son congruentes.
Complemento de ángulos congruentes	Complemento de ángulos congruentes son congruentes.
Cuatro ángulos rectos	Si dos rectas que se cortan forman un ángulo recto, entonces forman cuatro ángulos rectos.
Interior de ángulo	Dado el $\angle A$. Si B es un punto en un lado del $\angle A$, $A \neq B$, y C es un punto en el otro lado del ángulo, $C \neq A$, entonces todo punto entre B y C está en el interior del $\angle A$.
Existencia de perpendicular por punto en recta	Por un punto dado, de una recta dada en un plano, existe una y solo una recta perpendicular a la recta dada.
Existencia de perpendicular por punto externo a recta	Por un punto dado, externo a una recta dada en un plano, existe una y solo una recta perpendicular a la recta dada.

Coplanariedad del ángulo	El ángulo es una figura coplanar.
Congruencia de ángulos rectos	Todos lo ángulos rectos son congruentes.
Medida de ángulos- medida del ángulo que forma la bisectriz	La medida de cualquiera de los ángulos conformados por la bisectriz de un ángulo A y un lado de dicho ángulo, es igual a la mitad de la medida del ángulo original.
Coplanariedad del triángulo	El triángulo es una figura coplanar.
Triángulo isósceles	Si dos lados de un triángulo son congruentes, entonces los ángulos opuestos a esos lados son congruentes.
Recíproco triángulo isósceles	Si un triángulo tiene dos ángulos congruentes, los lados opuestos a esos ángulos son congruentes.
Ángulo externo	Un ángulo externo de un triángulo es mayor que cada uno de sus ángulos internos no contiguos.
Ángulos de la base de un triángulo isósceles	Si un triángulo es isósceles, los ángulos de la base son agudos.
Congruencia lado-ángulo-ángulo	Toda correspondencia lado – ángulo – ángulo es una congruencia.
Hipotenusa – cateto	Si la hipotenusa y un cateto de un triángulo rectángulo son congruentes con las partes correspondientes de otro triángulo rectángulo, entonces la correspondencia es una congruencia.
Ángulo mayor – lado mayor	El ángulo mayor de un triángulo es opuesto al lado mayor de éste.
Lado mayor – ángulo mayor	El lado mayor de un triángulo es el opuesto al ángulo mayor de éste.
Alturas interiores	Si un triángulo es isósceles y acutángulo, el pie de las alturas a los lados congruentes está en los lados congruentes del triángulo.
Triángulo isósceles – alturas congruentes	En un triángulo isósceles dos de sus alturas son congruentes.
Recíproco triángulo isósceles – alturas congruentes	Si un triángulo tiene dos de sus alturas congruentes, entonces es isósceles.
Congruencia triángulos isósceles.	Si dos de los lados de un triángulo isósceles son respectivamente congruentes a dos lados de otro triángulo isósceles y los dos triángulos tienen un ángulo congruente, entonces los triángulos son congruentes.

Alturas exteriores	Si un triángulo es obtusángulo, el pie de las alturas correspondientes a los lados del ángulo obtuso no está en los lados del triángulo sino en las rectas que son sus prolongaciones.
Altura y mediana del triángulo isósceles.	Si en un triángulo, una altura es también mediana, entonces el triángulo es isósceles.
Triángulo – ángulos rectos.	Ningún triángulo tiene dos ángulos rectos.
Distancia mínima	El segmento más corto que une un punto a una recta es el segmento perpendicular a la recta.
Desigualdad triangular	La suma de las longitudes de los lados de un triángulo es mayor que la longitud del tercer lado.
Charnela	Si dos lados de un triángulo son congruentes con los respectivos lados de otro triángulo y el ángulo comprendido en el primero es mayor que el ángulo comprendido en el segundo, entonces el tercer lado del primero triángulo es mayor que el tercer lado del segundo triángulo.
Recíproco de la Charnela.	Si dos lados de un triángulo son congruentes con los dos lados respectivos de un segundo triángulo y el tercer lado del primero es mayor que el tercer lado del segundo, entonces el ángulo comprendido del primer triángulo es mayor que el ángulo comprendido del segundo.
Mediatriz	En un plano si un punto está en la mediatriz de un segmento equidista de los extremos de éste.
Recíproco de la mediatriz	En un plano, si un punto equidista de los extremos de un segmento, está en la mediatriz de éste.
Rectas perpendiculares a la misma recta	Dos rectas son paralelas si ambas son perpendiculares a la misma recta.
Ángulos alternos internos congruentes – rectas paralelas	Se dan dos rectas cortadas por una secante. Si dos ángulos alternos internos son congruentes, entonces las rectas son paralelas
Ángulos correspondientes congruentes – rectas paralelas	Se dan dos rectas cortadas por una secante. Si dos ángulos correspondientes son congruentes, entonces las rectas son paralelas.
Ángulos alternos internos congruentes	Si dos rectas son cortadas por una secante, y si los ángulos alternos internos son congruentes, entonces los otros dos ángulos alternos internos también son congruentes
Existencia de recta paralela por punto externo	Sea l una recta y P un punto que no está en l. Entonces hay al menos una recta que pasa por P y es paralela a l.

Rectas paralelas – ángulos correspondientes congruentes	Si las rectas *l* y *m* son paralelas y están cortadas por una secante *t*, entonces los ángulos correspondientes que se forman son congruentes.
Rectas paralelas – ángulos alternos internos congruentes	Si las rectas *l* y *m* son paralelas, y están cortadas por una secante *t*, entonces los ángulos alternos internos que se forman son congruentes.
Cuadrilátero cuyas diagonales se bisecan	Si las diagonales de un cuadrilátero se bisecan, entonces el cuadrilátero es paralelogramo.
Paralelogramo – diagonales se bisecan	Si un cuadrilátero es paralelogramo, sus diagonales se bisecan
Paralelogramo cuyas diagonales se bisecan	Si las diagonales de un paralelogramo se bisecan entonces los lados opuestos congruentes.
Cuadrilátero con pares de lados opuestos congruentes	Si en un cuadrilátero ambos pares de lados opuestos son congruentes, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo.
Ángulos opuestos del paralelogramo	Los ángulos opuestos de un paralelogramo son congruentes.
Paralelogramo – vértices en el interior de ángulos	Si el cuadrilátero ABCD es paralelogramo entonces $D \in \text{int} \angle ABC$.
Diagonales de paralelogramo se intersecan	Las diagonales de un paralelogramo se intersecan.
Suma de medidas de ángulos interiores	La suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo es 180.
Medida de ángulo externo	La medida de un ángulo externo de un triángulo es igual a la suma de las medidas de los dos ángulos internos no adyacentes.
Paralelogramo con diagonales congruentes	Si las diagonales de un paralelogramo son congruentes entonces es un rectángulo.
Ángulos del rectángulo	Los ángulos de un rectángulo son congruentes.

Cuadrilátero con diagonales perpendiculares que se bisecan	Si las diagonales del cuadrilátero *ABCD* son perpendiculares y además una biseca a la otra entonces el cuadrilátero tiene dos pares de lados adyacentes congruentes.
Paralelogramo con diagonales perpendiculares y congruentes	Si un paralelogramo tiene diagonales perpendiculares y congruentes entonces es cuadrado.
Cuadrado – diagonales congruentes y perpendiculares	Si un paralelogramo es cuadrado entonces las diagonales son congruentes y perpendiculares
Diagonales del rectángulo	Si un paralelogramo es rectángulo entonces las diagonales son congruentes.
Diagonales de rombo bisecan ángulos	En un rombo las diagonales bisecan a los ángulos opuestos.
Cuadrilátero con lados opuestos paralelos y congruentes	Si un cuadrilátero tiene lados opuestos paralelos y congruentes entonces es paralelogramo.
Segmento por puntos medios	El segmento que une los puntos medio de dos lados de un triángulo es paralelo al tercer lado y su longitud es igual a la mitad de la longitud del tercer lado.
Ángulos alternos internos suplementarios	Si dos rectas paralelas están cortadas por una secante, entonces los ángulos internos no alternos son suplementarios.
Rectas paralelas a una misma recta	Si dos rectas son paralelas a una misma recta, entonces son paralelas entre sí.