

**ESCOLA TÈCNICA SUPERIOR
D'ENGINYERS DE TELECOMUNICACIÓ (UPC)**

**PROPAGACION DE ONDAS
MONOCROMATICAS EN GUIAONDAS
DIELECTRICAS PLANAS FORMADAS POR
MEDIOS NO LINEALES TIPO KERR:
APLICACION AL DISEÑO DE
DISPOSITIVOS LOGICOS**

Autor: V. Federico Dios Otín
Director: Fernando Canal Bienzobas

Barcelona, enero 1992

Capítulo 3: Modos propios en guías dieléctricas no lineales

En el capítulo anterior examinamos el método de propagación del haz aplicado a estructuras dieléctricas planas en las que aparecen medios con variación no lineal del índice de refracción. A pesar de la potencia real de análisis de guías y de la versatilidad del método propuesto es cierto que no nos permite obtener resultados generales para un cierto tipo de dispositivos de forma inmediata, ni nos ayuda a comprender los parámetros de los que depende el comportamiento de la onda en el medio no lineal, salvo que para cada caso particular se realice un elevado número de simulaciones. Un proceso de diseño de un dispositivo sólo puede ser eficiente si podemos explicitar la dependencia de las variables de salida en función de las de entrada y de algunos parámetros típicos que lo caracterizen. El BPM, como método puramente numérico, tendrá mayor utilidad una vez que, con la ayuda de algún modelo teórico suficientemente aproximado, se hayan conseguido curvas de comportamiento generales en función de los parámetros representativos. El método numérico permite entonces validar el modelo, y, quizá, acotar su margen de validez.

En este capítulo se estudiarán las soluciones más sencillas que pueden obtenerse de la resolución de la ecuación de onda a estructuras planas en las que el medio no lineal está acotado por medios lineales. En general tendrá interés estudiar el comportamiento de las guías en las que la mayor parte de la radiación está confinada en el medio no lineal, porque los efectos debidos a la variación del índice de refracción serán cuantitativamente mayores.

3.1 Permitividad dieléctrica no lineal

Clásicamente el efecto Kerr, de variación del índice de refracción con la potencia luminosa, se ha caracterizado mediante el parámetro n_2 (m^2/W) propio del

medio no lineal. Da la variación del índice del medio en función de la densidad local de potencia, o intensidad luminosa, I . Se escribe entonces:

$$n = n_0 + n_2 I \quad (3.1)$$

En la práctica el parámetro n_2 se ha medido a través del desfase $\Delta\phi$ que sufre la onda al atravesar una longitud conocida en el medio no lineal. Para potencias no muy altas ese desfase es proporcional a la densidad local de potencia transportada por el haz [1].

El estudio analítico del comportamiento del medio no lineal obliga sin embargo a un conocimiento más preciso de la relación entre esas variaciones del índice de refracción y las componentes de campo eléctrico implicadas en la propagación. En este apartado deduciremos la expresión de la permitividad dieléctrica no lineal del medio a partir de la expresión genérica del vector polarización [2,3].

Vimos que cada una de las componentes de ese vector podemos escribirla en la forma:

$$P_i = \epsilon_0 \left(\chi_{ij}^{(1)} E_j + \chi_{ijk}^{(2)} E_j E_k^* + \chi_{ijkl}^{(3)} E_j E_k E_l^* + \dots \right) \quad (3.2)$$

en el dominio frecuencial, donde consideraremos ondas monocromáticas, y con el convenio de índices de Einstein. Si trabajamos con medios isótropos, y con simetría de inversión ($\chi_{ijk}^{(2)} = 0$) la expresión anterior se convierte en:

$$P_i = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) E_i + \epsilon_0 \chi_{ijkl}^{(3)} E_j E_k E_l^* \quad (3.3)$$

donde ϵ_r es la constante dieléctrica lineal del medio. Además, en medios isótropos, las simetrías de la red cristalina permiten la existencia de tan sólo tres elementos independientes en el tensor de susceptibilidad no lineal. Este hecho puede expresarse de forma compacta mediante la relación:

$$\chi_{ijkl} = \chi_{1122} \delta_{ij} \delta_{kl} + \chi_{1212} \delta_{ik} \delta_{jl} + \chi_{1221} \delta_{il} \delta_{jk} \quad (3.4)$$

De esta forma la ecuación de onda (1.25) más la expresión de las componentes del vector polarización, junto con los términos no nulos del tensor de susceptibilidad no lineal nos permitirán plantear el problema de la propagación en cada caso particular.

En adelante nos centraremos en la propagación luminosa en guías planas dieléctricas, en las que la capa guiante es un medio no lineal. La estructura típica responde a la representada en la figura 3.1, donde el substrato y la cubierta de la guía son medios lineales, de índices de refracción n_s y n_c respectivamente. El eje Z será la dirección de propagación a lo largo de la guía, y consideraremos que no hay variación en la estructura a lo largo de la dirección Y.

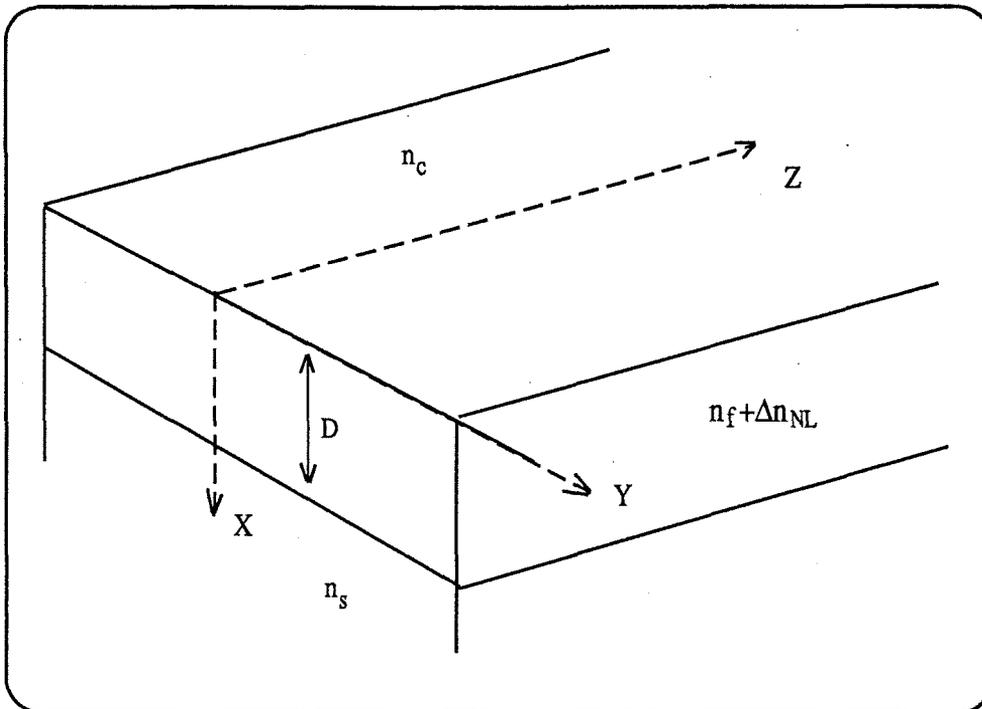


Figura 3.1: *Guía tricapas plana no lineal.*

Realizaremos el estudio por separado para los dos tipos habituales de modos electromagnéticos de esa estructura: transversal eléctrico y transversal magnético.

3.1.1 Modos TE

Particularizando la expresión de la polarización (3.3) para los modos TE (E_y , H_x , H_z) resulta:

$$\begin{cases} P_x^{NL} = P_z^{NL} = 0 \\ P_y^{NL} = \epsilon_0 \chi_{2222} |E_y|^2 E_y \end{cases} \quad (3.5)$$

de donde

$$\vec{P} = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1 + \chi_{2222} |E_y|^2) \vec{E} \quad (3.6)$$

y la permitividad dieléctrica se escribe entonces, tal como aparece frecuentemente en la literatura:

$$\epsilon = \epsilon_r + \alpha |E_y|^2 \quad (3.7)$$

con $\alpha = \chi_{2222}$. Comparando la expresión (3.7) con (3.1), y asumiendo que la parte lineal de la permitividad es mucho mayor en general que el término de variación no lineal, se encuentra la relación:

$$\alpha \approx c \epsilon_0 n_2 n_0^2 \quad (3.8)$$

(donde c es la velocidad de la luz y ϵ_0 la permitividad dieléctrica en el vacío), que permite obtener de forma aproximada la constante α en función del parámetro n_2 .

3.1.2 Modos TM

La búsqueda de la permitividad no lineal que rige el comportamiento del medio es ahora más laboriosa que en el caso anterior. Ello es debido a la existencia de dos

componentes de campo eléctrico en este tipo de modos: (E_x, H_y, E_z) . Desarrollando cada componente del vector polarización obtenemos:

$$\left\{ \begin{array}{l} P_x^{NL} = \epsilon_0 \left(\chi_{1122} |E_x|^2 E_x + \chi_{1122} |E_z|^2 E_x + \chi_{1212} |E_z|^2 E_x + \right. \\ \left. + \chi_{1212} |E_x|^2 E_x + \chi_{1221} |E_x|^2 E_x + \chi_{1221} E_z E_z E_x^* \right) \\ P_y^{NL} = 0 \\ P_z^{NL} = \epsilon_0 \left(\chi_{1122} |E_z|^2 E_z + \chi_{1122} |E_x|^2 E_z + \chi_{1212} |E_x|^2 E_z + \right. \\ \left. + \chi_{1212} |E_z|^2 E_z + \chi_{1221} |E_z|^2 E_z + \chi_{1221} E_x E_x E_z^* \right) \end{array} \right. \quad (3.9)$$

Aparentemente resulta difícil obtener de forma sencilla la permitividad, que será además tensorial, sin embargo del planteo de las ecuaciones de Maxwell a nuestro problema se deducen relaciones entre las dos componentes de campo eléctrico, E_x y E_z , que permiten una ulterior elaboración. Si buscamos soluciones en la forma:

$$E_{x,(z)}(x, z) = E_{x,(z)}(x) e^{-j\beta z} \quad (3.10)$$

donde además no hay variación según el eje Y, se cumplen las relaciones (Maxwell):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dE_z}{dx} = -j\beta E_x + j\omega\mu H_y \\ j\beta H_y = j\omega(\epsilon \vec{E})_x \\ \frac{dH_y}{dx} = j\omega(\epsilon \vec{E})_z \end{array} \right. \quad (3.11)$$

Entonces las dos componentes de campo eléctrico están desfasadas entre sí $\frac{\pi}{2}$: si tomamos E_x como real entonces E_z debe ser imaginario puro, y podemos escribir:

$$\left\{ \begin{array}{l} P_x^{NL} = \epsilon_0 \left((\chi_{1122} + \chi_{1212}) |E_x|^2 E_x + \chi_{1221} |E_x|^2 E_x + \right. \\ \left. + (\chi_{1122} + \chi_{1212}) |E_z|^2 E_x - \chi_{1221} |E_z|^2 E_x \right) \\ P_z^{NL} = \epsilon_0 \left((\chi_{1122} + \chi_{1212}) |E_z|^2 E_z + \chi_{1221} |E_z|^2 E_z + \right. \\ \left. + (\chi_{1122} + \chi_{1212}) |E_x|^2 E_z - \chi_{1221} |E_x|^2 E_z \right) \end{array} \right. \quad (3.12)$$

Además se observa que los elementos del tensor de susceptibilidad no lineal χ_{1122} y χ_{1212} aparecen siempre sumados. Asumiremos $\chi_{1122} = \chi_{1212}$. La expresión final del tensor de permitividad para los modos TM resulta:

$$\epsilon^{TM} = \begin{pmatrix} \epsilon_r + \alpha |E_x|^2 + \Gamma \alpha |E_z|^2 & 0 \\ 0 & \epsilon_r + \Gamma \alpha |E_x|^2 + \alpha |E_z|^2 \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

donde

$$\alpha = 2\chi_{1122} \left(1 + \frac{\chi_{1221}}{2\chi_{1122}} \right) \quad \Gamma = \frac{\left(1 - \frac{\chi_{1221}}{2\chi_{1122}} \right)}{\left(1 + \frac{\chi_{1221}}{2\chi_{1122}} \right)} \quad (3.14)$$

α es el coeficiente que da la magnitud de la no linealidad del medio y Γ un parámetro adimensional que depende en la práctica del tipo de mecanismo físico que causa el comportamiento no lineal. Sus valores habituales son: 1/3 (distorsión electrónica); -1/2 (reorientación molecular o efecto Kerr) y 1 (electrostricción y efectos térmicos).

3.2 Modos propios en guías dieléctricas lineales

Los modos propios de una determinada estructura dieléctrica susceptible de guiar la radiación óptica, como la que se representó en la figura 3.1, son aquellas soluciones más sencillas que satisfacen la ecuación de onda con las condiciones de contorno requeridas, y que se escriben en la forma (para el tipo TE):

$$E_y^i(x, z) = E_i(x) e^{-j\beta_i z} \quad (3.15)$$

donde β_i es la constante de propagación del modo de orden i . La ecuación de onda que satisface $E_i(x)$ es:

$$\frac{d^2 E_i(x)}{dx^2} + (k_0^2 n_v^2 - \beta_i^2) E_i(x) = 0 \quad (3.16)$$

para cada uno de los medios que forman la guía ($v = c, f, s$).

Cada modo responde físicamente a una peculiar distribución, en la dimensión transversal, del campo eléctrico asociado a la onda, y se propaga con una velocidad de fase propia. Las expresiones (3.15) y (3.16), en la forma en que se han escrito, son aplicables a los *modos guiados*, que concentran la mayor parte de la potencia (transmitida en la dirección del eje Z) en la capa de mayor índice de refracción (capa guiante), y para los que los valores de la constante de propagación β están discretizados. En estos modos la distribución transversal del campo, $E_i(x)$, decae exponencialmente al alejarnos de la capa guiante. Los valores de la constante de propagación de los modos guiados están comprendidos en el intervalo $k_0 n_c, k_0 n_s < \beta < k_0 n_f$, donde k_0 es la constante de propagación en el espacio libre.

Resolviendo la ecuación (3.16) y aplicando las condiciones de continuidad, a los campos tangenciales en las superficies de separación de los medios que componen la guía, se obtienen los valores permitidos para β , como las soluciones de la ecuación de dispersión:

$$\operatorname{tg}(bd) = \frac{b(p_s + p_c)}{b^2 - p_c p_s} \quad (3.17)$$

siendo d el grosor de la capa guiante y donde b , p_c y p_s son el módulo de las componentes del vector de onda en la dirección transversal a la guía (X) para cada uno de los medios:

$$\begin{cases} b = (k_0^2 n_f^2 - \beta^2)^{\frac{1}{2}} \\ p_s = (\beta^2 - k_0^2 n_s^2)^{\frac{1}{2}} \\ p_c = (\beta^2 - k_0^2 n_c^2)^{\frac{1}{2}} \end{cases} \quad (3.18)$$

La potencia que transmite el modo guiado se escribe en la forma:

$$P = \frac{\beta_i}{2 k_0 \eta_0} \int_{-\infty}^{+\infty} |E_y(x)|^2 dx \quad (3.19)$$

donde η_0 es la impedancia intrínseca del vacío.

En guías planas P representa en realidad una densidad lineal de potencia (W/m) por unidad de longitud en la restante dirección transversal a la propagación (Y , en nuestro sistema de referencia).

Los modos guiados no son las únicas distribuciones de campo que satisfacen la ecuación de onda - aunque sí las más importantes dentro del estudio de dispositivos ópticos integrados, realizados sobre la base de guías dieléctricas. Existen además posibles soluciones que representan ondas no acotadas espacialmente en la guía. Estos son los *modos de radiación*. Formalmente se escriben también como en la ecuación (3.15), pero con la importante característica de formar un espectro continuo: la constante β no está discretizada, y puede tomar cualquier valor en el intervalo $0 < \beta < k_0 \max(n_s, n_c)$.

El estudio de los modos propios en guías lineales tiene gran importancia, al menos formalmente, puesto que una onda arbitraria presente en la guía puede ser expresada como combinación de dichos modos (guiados y de radiación), que forman un conjunto ortogonal y completo. La representación habitual es [4]:

$$E(x, z) = \sum_0^N a_i E_i(x) e^{-j\beta_i z} + \int_0^{k_0 n_s} q(p) E(x, p) e^{-j\beta z} dp \quad (3.20)$$

donde N es el número de modos guiados de la estructura, a_i el coeficiente del modo guiado de orden i y $q(p)$ el espectro de radiación (p es la componente del vector de onda en la dirección transversal; se ha supuesto que $n_s > n_c$).

Algunos problemas, como el estudio de discontinuidades en guías, requieren forzosamente el empleo de todo el conjunto de modos para obtener soluciones exactas [5].

3.3 Modos propios no lineales

3.3.1 Modos guiados

Las guías dieléctricas en las que hay presentes materiales no lineales del tipo que se han descrito hasta ahora (nosotros consideraremos que la capa guiente es no lineal), presentan características muy peculiares en comparación a las guías lineales. En primer lugar la misma denominación de modo, si bien conserva en parte su significado (una distribución transversal de campo que se propaga sin variaciones en el módulo a lo largo de la guía, y con una velocidad de fase propia), no puede entenderse en la forma en que es habitual: al tratar ahora con un problema no lineal los modos no serán sumables.

La ecuación de onda toma la forma, para modos TE, en cada uno de los medios:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 E_y(x)}{dx^2} + (k_0^2 n_c^2 - \beta^2) E_y(x) &= 0 \\ \frac{d^2 E_y(x)}{dx^2} + (k_0^2 n_f^2 + k_0^2 \alpha |E_y(x)|^2 - \beta^2) E_y(x) &= 0 \\ \frac{d^2 E_y(x)}{dx^2} + (k_0^2 n_s^2 - \beta^2) E_y(x) &= 0 \end{aligned} \quad (3.21)$$

donde el índice de refracción para la capa guiante se ha tomado según la expresión de Kerr:

$$n^2 = n_f^2 + \alpha |E_y|^2 \quad (3.22)$$

Este conjunto de ecuaciones, junto con las condiciones de contorno en las superficies de separación, tiene solución analítica. Los campos y la ecuación de dispersión, que da los posibles valores de la constante de propagación β , aparecen expresados en forma de funciones elípticas.

Para el caso más sencillo de guía tricapa simétrica ($n_c = n_s$), tomando el origen de coordenadas en el centro de la capa guiante, y $\alpha > 0$ (medio autofocalizante) los campos se escriben en la forma [6]:

$$E_y = \begin{cases} A \operatorname{cn}(b'x | m) & \frac{d}{2} \geq |x| \geq 0 \\ A \operatorname{cn}\left(b' \frac{d}{2} | m\right) e^{-p\left(x - \frac{d}{2}\right)} & |x| \geq \frac{d}{2} \end{cases} \quad (3.23)$$

para modos de orden par, y

$$E_y = \begin{cases} A(1-m)^{\frac{1}{2}} \operatorname{sd}(b'x | m) & \frac{d}{2} \geq |x| \geq 0 \\ A(1-m)^{\frac{1}{2}} \operatorname{sd}\left(b' \frac{d}{2} | m\right) e^{-p\left(x - \frac{d}{2}\right)} & |x| \geq \frac{d}{2} \end{cases} \quad (3.24)$$

para modos de orden impar. Los diferentes parámetros que intervienen se definen:

$$\left\{ \begin{array}{l} p = (\beta^2 - k_0^2 n_s^2)^{\frac{1}{2}} \\ b = (k_0^2 n_f^2 - \beta^2)^{\frac{1}{2}} \\ b' = (b^2 + \alpha k_0^2 A^2)^{\frac{1}{2}} \\ m = \frac{\alpha k_0^2 A^2}{2(b^2 + \alpha k_0^2 A^2)} \end{array} \right. \quad (3.25)$$

Las ecuaciones de dispersión que permiten obtener los valores de la constante β son:

$$\frac{\operatorname{sn}\left(b' \frac{d}{2} | m\right) \operatorname{dn}\left(b' \frac{d}{2} | m\right)}{\operatorname{cn}\left(b' \frac{d}{2} | m\right)} = \frac{p}{b'} \quad (3.26)$$

$$\frac{\operatorname{cn}\left(b' \frac{d}{2} | m\right)}{\operatorname{sn}\left(b' \frac{d}{2} | m\right) \operatorname{dn}\left(b' \frac{d}{2} | m\right)} = -\frac{p}{b'}$$

para los modos de orden par e impar respectivamente.

Debe advertirse sin embargo que las expresiones anteriores son válidas mientras la constante de propagación β se mantenga en el intervalo $(k_0 n_s)^2 < \beta^2 < k_0^2 (n_f^2 + \alpha A^2/2)$.

Por encima de él los modos pares todavía pueden existir (en medios autofocalizantes). En la expresión de los campos para esos modos (3.23) aparece entonces la función elíptica dn en lugar de la función cn , y la ecuación de dispersión para este caso pasa a ser:

$$\frac{m \operatorname{sn}\left(b' \frac{d}{2} | m\right) \operatorname{cn}\left(b' \frac{d}{2} | m\right)}{\operatorname{dn}\left(b' \frac{d}{2} | m\right)} = \frac{p}{b'} \quad (3.27)$$

El rango para la existencia de soluciones de este tipo es $k_0^2 (n_f^2 + \alpha A^2/2) < \beta^2 < k_0^2 (n_f^2 + \alpha A^2)$.

Las diferencias entre los modos guiados de una guía no lineal como la que se ha descrito (el hecho de ser simétrica no resta generalidad a lo que sigue) respecto a una puramente lineal se ponen fácilmente de manifiesto. En primer lugar las ecuaciones que rigen el comportamiento de los modos dependen intrínsecamente del valor de la amplitud A del campo, o, más exactamente de αA^2 , proporcional a la potencia transportada por la onda, y a la variación no lineal de la permitividad. La primera consecuencia de este hecho es que las curvas de dispersión, que dan el valor de β en función del grosor d de la guía, se convierten, para cada modo, en una familia de curvas dependientes de la potencia transportada, tal como se muestra en la figura 3.2.

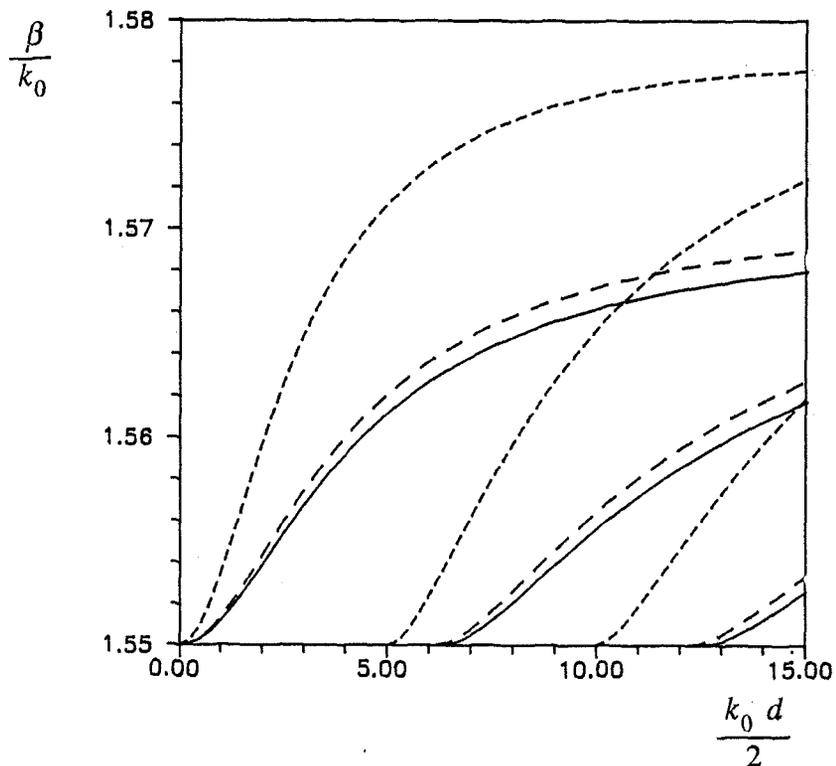


Figura 3.2: Curvas de dispersión de una guía tricapa simétrica, en la que la capa guiante está formada por un medio no lineal tipo Kerr autofocalizante, para diferentes valores de potencia transportada por cada modo individual: $\alpha A^2 = 0.0005$, línea continua; $\alpha A^2 = 0.005$, línea a trazos; $\alpha A^2 = 0.05$, línea punteada.

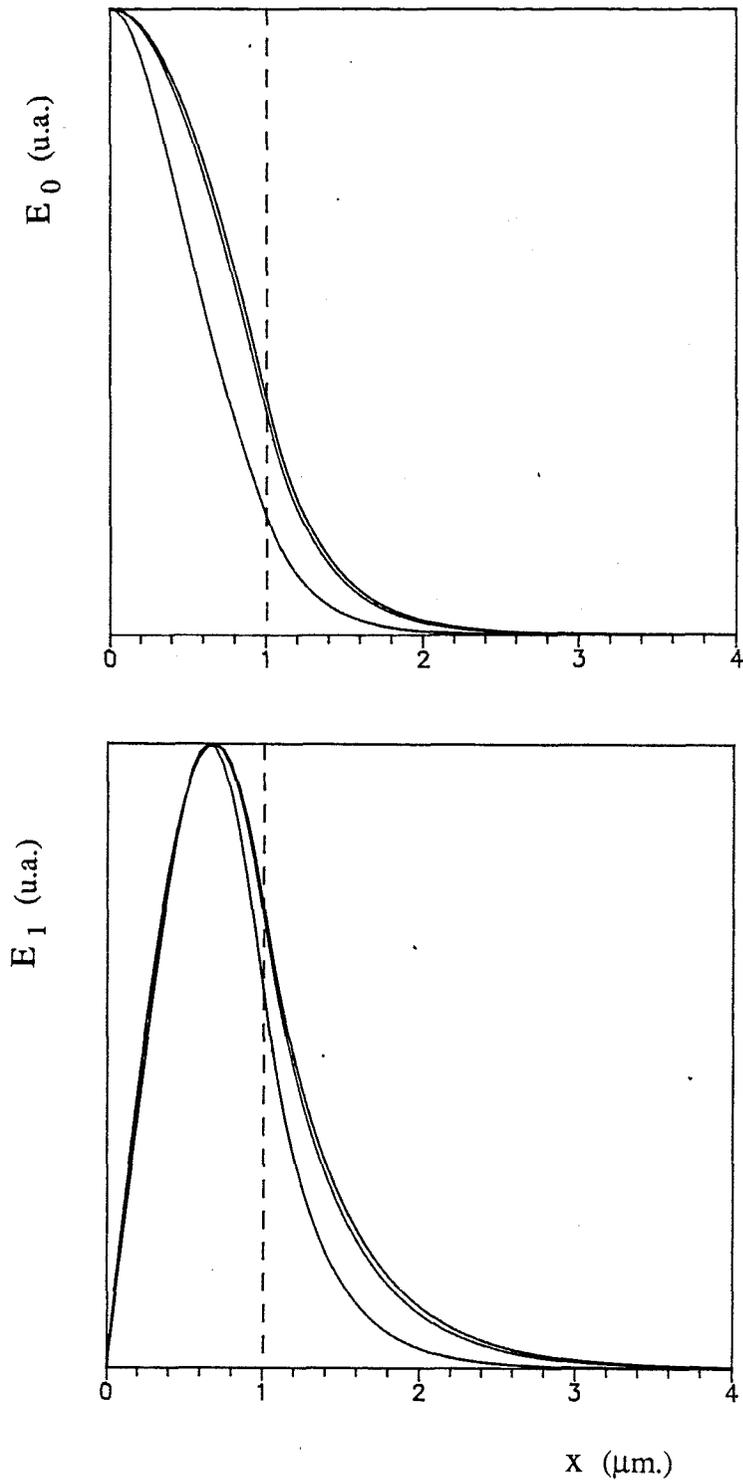


Figura 3.3 : a) y b) Distribución normalizada del campo eléctrico en la guía para los modos TE de orden 0 y 1, representados para diferentes valores de potencia total. Los perfiles de mayor confinamiento corresponden a valores más altos de potencia.

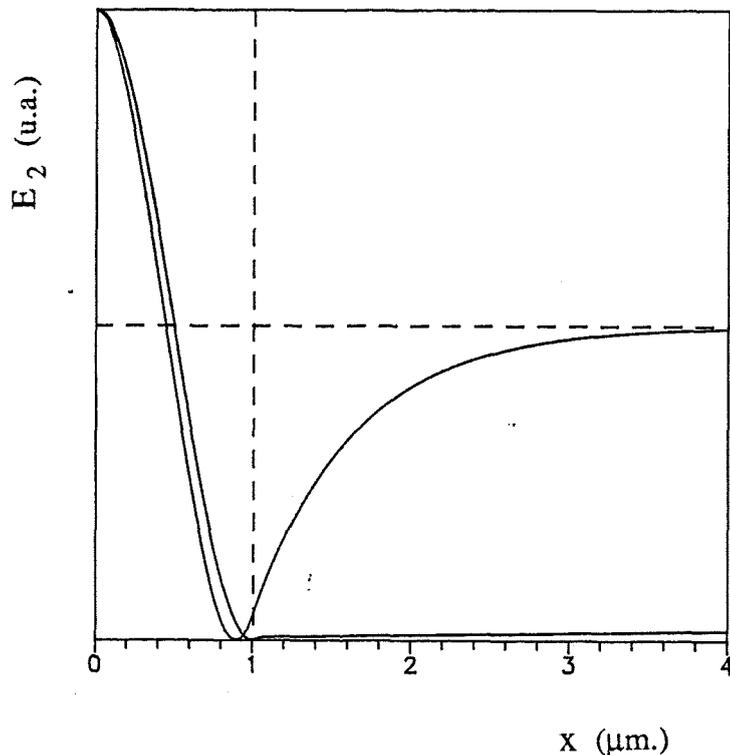


Figura 3.3 : c) Perfil de campo para el modo TE de orden 2. Se observa que en la guía lineal está en corte. A partir de un cierto valor de potencia pasa a ser un modo guiado.

De igual forma la distribución de campo es variable en función de la potencia. En la figura 3.3 se representa la componente de campo eléctrico a lo largo de la dirección transversal a la propagación (X) para los modos de orden 0, 1 y 2 con diferentes valores del parámetro αA^2 , para una guía con $d=2 \mu\text{m}$. La amplitud de los campos se ha normalizado a la unidad. Se observa que la potencia tiende a concentrarse en las zonas donde hay un mayor incremento del índice de refracción (autofocalización). El comportamiento del modo TE_2 revela que éste sólo existe para valores suficientemente altos de potencia: en la guía lineal y para el grosor elegido está en corte; por encima de $\alpha A^2=0.005$ se convierte en un nuevo modo guiado.

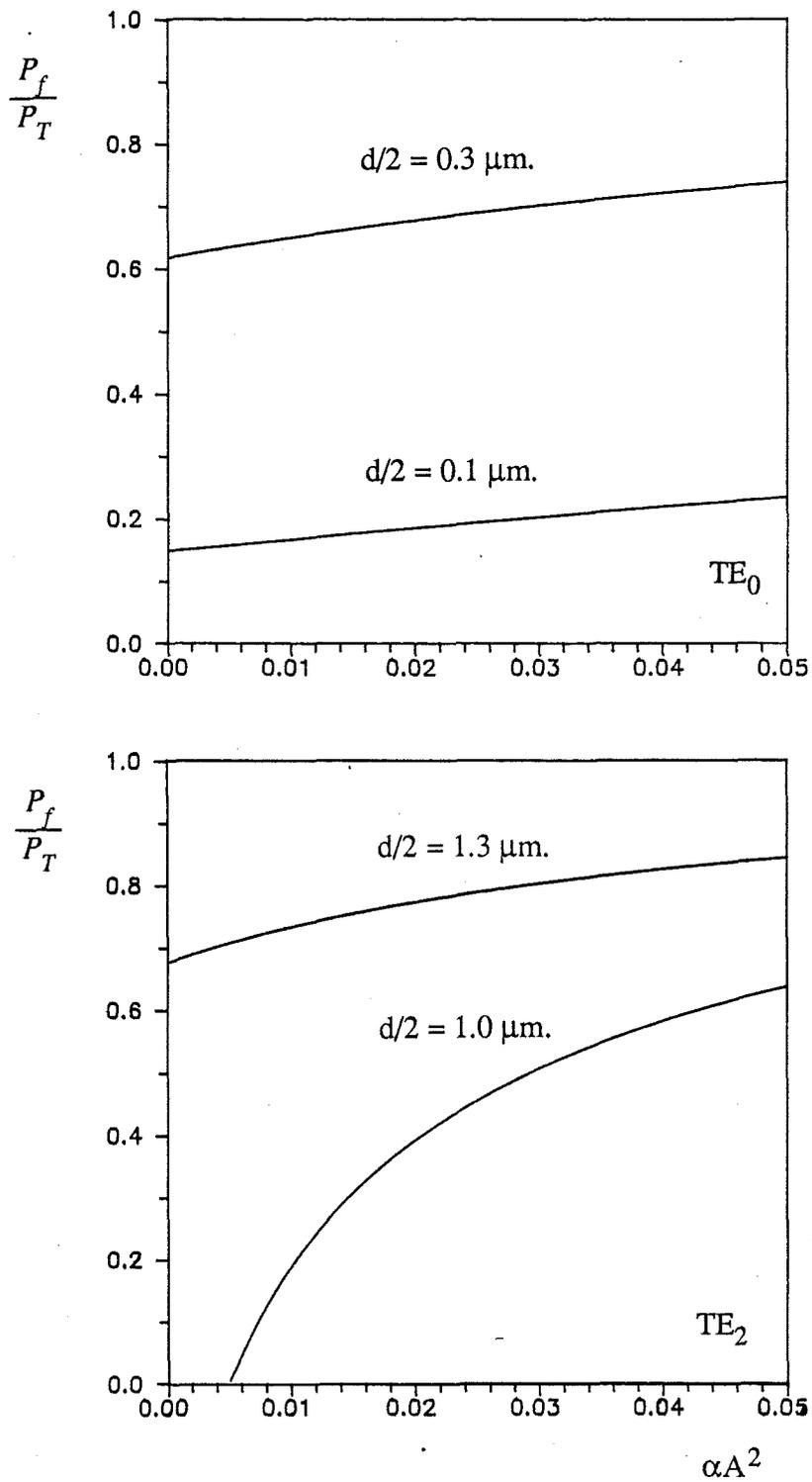


Figura 3.4: Grado de confinamiento de los modos TE_0 y TE_2 en función del parámetro de no linealidad (αA^2) para dos grosores diferentes de la capa guiante.

La figura 3.4 muestra la relación entre la potencia confinada en la capa guiante y el valor total de potencia transportada por la onda, para los modos de orden 0 y 2, en función de la magnitud de la no-linealidad. En cada caso se ha representado para dos grosores diferentes de la guía. Por último en la figura 3.5 se muestra la evolución del grosor de corte del modo TE_1 en función de la no-linealidad, y para diferentes valores del índice de refracción del sustrato. La diferente evolución de las curvas indica que una guía poco guiante ($n_f - n_s$ pequeño) será más sensible al efecto no lineal que una guía en la que de por sí la diferencia de índices lineales es mayor.

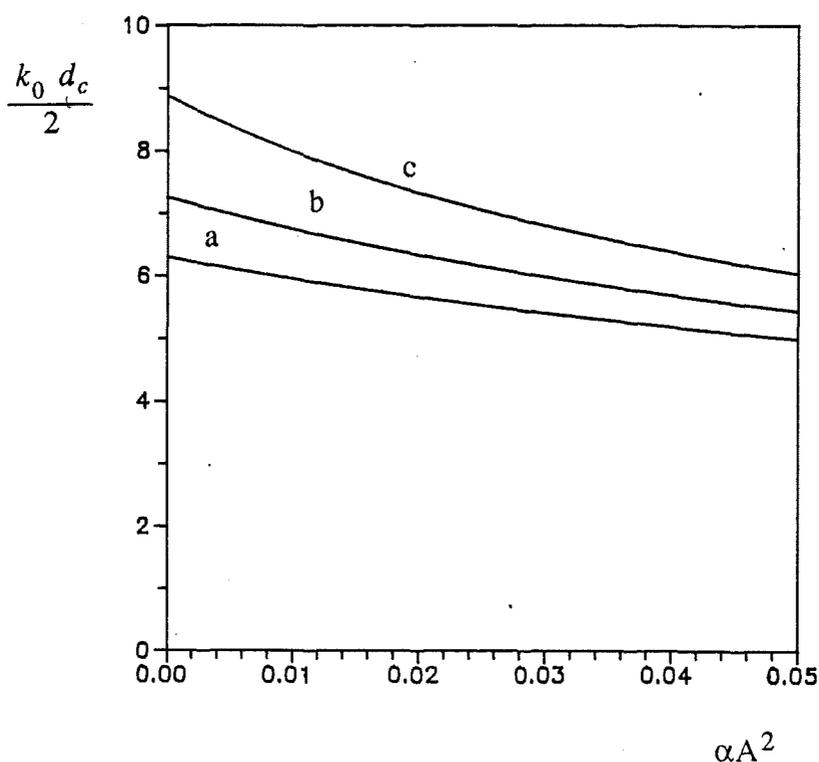


Figura 3.5: Evolución del grosor de corte del modo TE_1 en función del parámetro de no linealidad. Las diferentes curvas corresponden a diferentes valores del índice n_s : a) $n_s = 1.550$; b) $n_s = 1.555$ y c) $n_s = 1.560$.

El fenómeno de la autofocalización del haz es conocido desde hace décadas dentro de la Óptica no lineal [7]. En el campo de la Óptica Integrada permite utilizar una clase de estructuras atípicas capaces también de confinar potencia y transportarla en una

única dirección: son las guías huecas o *hollow waveguides* [8]. En estas guías la constante dieléctrica lineal de la capa guiante es inferior a las de los medios que la rodean, y el fenómeno de confinamiento del haz se produce únicamente para valores de potencia elevados, tales que provocan un incremento suficiente del índice de refracción en aquella capa.

A efectos de análisis y diseño de dispositivos ópticos la diferencia más significativa que introducen los medios no lineales, como ya se apuntó anteriormente, es la imposibilidad de caracterizar la propagación en estas guías a partir de los modos propios. Así, el problema de la interacción de dos o más modos a lo largo de la guía no lineal es diferente, y debe acudir de nuevo a la ecuación de onda para resolverla bajo condiciones más exigentes. En la práctica no se ha desarrollado ninguna técnica para atacar el problema genérico de la excitación de guías no lineales, y se han venido utilizando algunos de los métodos numéricos o analíticos aproximados que se emplean habitualmente en la caracterización de guías lineales. Los más importantes de entre éstos son el método de propagación del haz (Beam Propagation Method), que se analizó con detalle en el capítulo anterior, y la técnica de modos acoplados (Coupled Mode Theory).

3.3.2 Modos de radiación

Los modos de radiación en guías no lineales, tal como se definen habitualmente, no tienen especial interés, y no serán tratados. Efectivamente, aún en una guía lineal los modos radiados, considerados individualmente, no son entidades reales: un único modo radiado (o un conjunto discreto de ellos) con amplitud no nula, debe transportar una potencia infinita, al estar extendido espacialmente por todo el espacio. En problemas lineales cobran pleno sentido cuando se consideran globalmente, como un conjunto continuo de soluciones. El hecho de que no sea aplicable el principio de superposición en guías no lineales invalida el tratamiento clásico. De nuevo debe entonces plantearse la ecuación de onda con las condiciones de contorno y de excitación del problema particular que se trate, con el agravante de que la potencia confinada en la guía no será constante por lo general.

3.4 Método autoconsistente de búsqueda de los modos propios

3.4.1 Justificación del método numérico de autoconsistencia

Si bien, como se ha venido comentando, los modos propios no resuelven el problema más general de propagación en guías no lineales, sí tiene interés su estudio, puesto que proporcionan una primera información acerca del comportamiento de la radiación óptica en la guía. Por otra parte pueden servir de base para posteriores análisis más completos del problema.

La ley de variación de la permitividad dieléctrica con la densidad de potencia que hemos venido utilizando (3.7) procede de un desarrollo en serie del vector polarización (3.2) que, de hecho, sólo es suficientemente aproximado para valores no muy altos del campo eléctrico. En condiciones realistas es de esperar - como de hecho ocurre - que el incremento no lineal del índice de refracción alcance un valor de saturación. Una posible expresión matemática para un comportamiento de este tipo sería [9]:

$$\Delta\varepsilon = \Delta\varepsilon_{sat} \cdot \left(1 - \exp\left(\frac{-\alpha|E|^2}{\Delta\varepsilon_{sat}}\right) \right) \quad (3.28)$$

donde α y $\Delta\varepsilon_{sat}$ son característicos del material. O, simplemente tomando un término más en aquel desarrollo en serie [10,11]:

$$\Delta\varepsilon = \alpha|E|^2 - \beta|E|^4 \quad (3.29)$$

donde β representa un coeficiente relacionado con los términos no nulos del tensor de susceptibilidad de cuarto orden. La expresión (3.29) tiene un margen de utilización mayor que la ley de Kerr: con β positiva, y $\alpha \gg \beta$ simula en un cierto intervalo el efecto de saturación de la permitividad.

El desarrollo de la ecuación de onda, para la búsqueda de los modos propios de guías tricapa en estas situaciones realistas, no es posible analíticamente. Lo mismo ocurre cuando se considera algún tipo de inhomogeneidad lineal en los medios que

forman la guía, y en mayor grado si se trabaja con guías rectangulares, acotadas en las dos direcciones transversales. En todos estos problemas existe sin embargo la posibilidad de emplear una técnica numérica recurrente. La idea básica consiste en convertir el problema en una sucesión de problemas lineales donde al fin se obtiene un problema de modos propios en una estructura inhomogénea, que, numéricamente, es idéntico al problema original [12-14].

3.4.2 Descripción del procedimiento iterativo

Un esquema de realización práctica sería el siguiente: sea una ley de variación de la permitividad con el campo eléctrico dada por:

$$\epsilon(x, |E|^2) = \epsilon_f(x) + \Delta\epsilon(|E|^2) \quad (3.30)$$

donde la dependencia con x expresa inhomogeneidades propias de la guía, y la dependencia con el módulo del campo el comportamiento no lineal. El inicio de la búsqueda de la solución a la ecuación de onda no lineal (3.21) puede comenzar tomando el caso de potencia nula. El campo solución será entonces el correspondiente a la guía lineal ($\epsilon = \epsilon_f(x)$): $E_i^{(1)}(x)$ con constante de propagación $\beta_i^{(1)}$, para el modo de orden i . Normalizamos el campo para el valor de potencia P , para el que se esté resolviendo el problema no lineal, e introducimos el campo resultante en la ecuación (3.30). El perfil de permitividad obtenido puede tratarse como el correspondiente a una guía en un problema lineal e inhomogéneo. De la resolución de la ecuación de onda sobre la nueva guía así obtenida, junto con las condiciones de contorno, se obtiene ahora un campo $E_i^{(2)}(x)$ y otro valor para la constante de propagación $\beta_i^{(2)}$. Normalizando ese campo a la potencia P , sustituyendo de nuevo en la expresión de la permitividad y repitiendo el proceso un número suficiente de veces, llegaremos al fin a una distribución de campo $E_i^{(l)}(x)$ y a un valor $\beta_i^{(l)}$ tales que se cumple:

$$E_i^{(l)}(x) \approx E_i^{(l-1)}(x) \tag{3.31}$$

$$\beta_i^{(l)} \approx \beta_i^{(l-1)}$$

La convergencia de la serie de funciones de campo eléctrico a un valor final indica que la solución a la ecuación de onda:

$$\frac{d^2 E}{dx^2} + k_0^2 \left[\epsilon_f + \Delta\epsilon \left(|E_i^{(l-1)}|^2 \right) - \frac{\beta^2}{k_0^2} \right] E = 0 \tag{3.32}$$

es el campo $E_i^{(l)}(x)$ con la constante de propagación $\beta_i^{(l)}$.

El problema no lineal original coincide por tanto numéricamente con el que se ha resuelto (ec. 3.32), dada la relación expresada en (3.31), la cual puede hacerse tan precisa como se desee incrementando el número de iteraciones del proceso.

El procedimiento descrito puede representarse en forma de diagrama de flujo tal como se muestra en la figura 3.6.

En general se puede afirmar que es posible encontrar un método de resolución exacto del problema de los modos guiados en una guía lineal e inhomogénea, y un método de construcción del índice de refracción, según la ley de variación dada, a partir del módulo del campo normalizado, tales que el algoritmo llegue a converger a una distribución de campo final. En este trabajo se utilizó la técnica de la matriz característica junto a la aproximación multicapa para la resolución de la ecuación de onda en la guía inhomogénea [15].

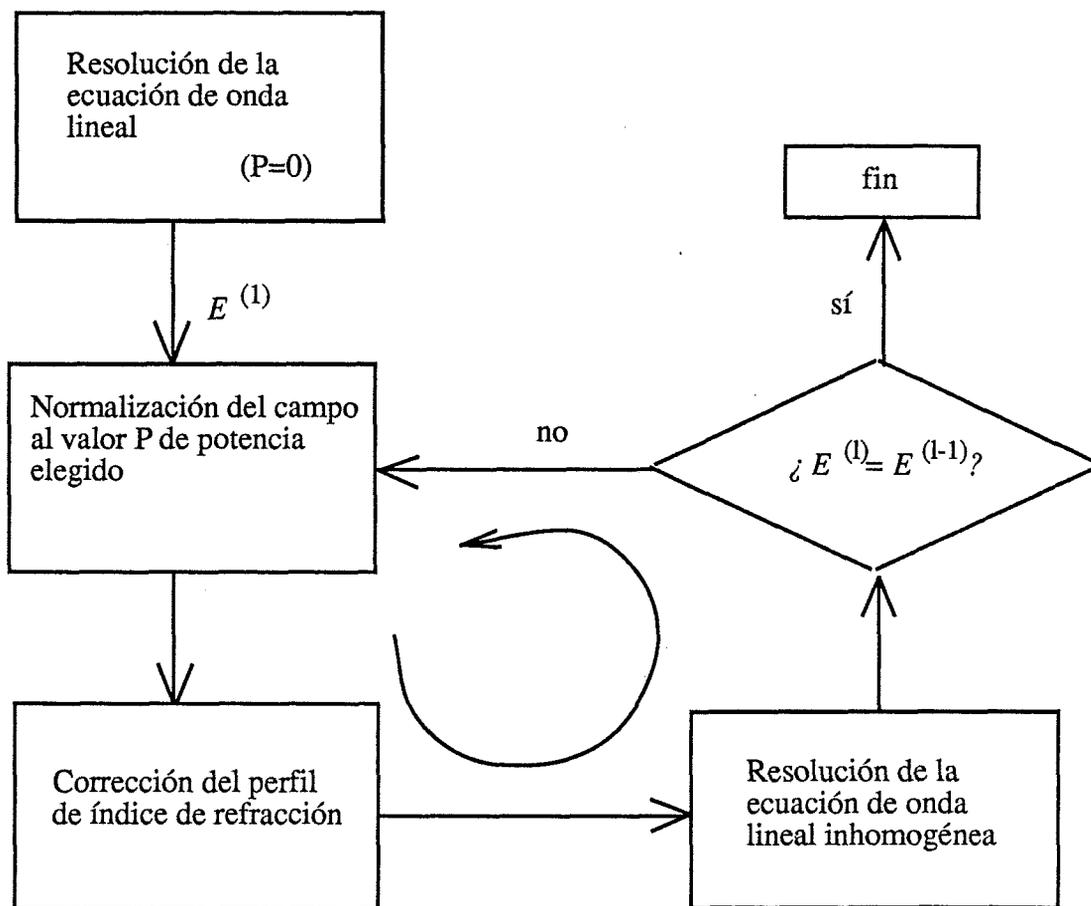


Figura 3.6 : Algoritmo de autoconsistencia para la búsqueda de modos propios en guías no lineales.

La técnica multicapa consiste en aproximar el perfil no homogéneo de la guía mediante una sucesión discreta de subcapas homogéneas, de un cierto grosor h y de índice de refracción n_i . La ecuación de valores propios que rige la propagación en la guía resulta ser:

$$U_{21} + jw_c U_{22} + jw_s U_{11} - w_c w_s U_{12} = 0 \quad (3.32)$$

siendo U es la matriz característica de la estructura, con:

$$w_{c,s} = \begin{cases} \frac{p_{c,s}}{k_0 \eta_0} & TE \\ \frac{n_{c,s}^2 k_0}{p_{c,s} \eta_0} & TM \end{cases} \quad (3.33)$$

y donde η_0 es la impedancia intrínseca del vacío, n_c y n_s el índice de refracción de la cubierta y del sustrato respectivamente, y:

$$p_{c,s} = \left(\beta^2 - k_0^2 n_{c,s}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.34)$$

En una guía formada por un cierto número de subcapas homogéneas la matriz U se obtiene como el producto de las matrices características de cada capa, y cada una de éstas se expresa como:

$$\begin{pmatrix} \cos b_i h & \pm j \frac{1}{w_i} \sin b_i h \\ \pm j w_i \sin b_i h & \cos b_i h \end{pmatrix} \quad (3.35)$$

donde:

$$b_i = \left(k_0^2 n_i^2 - \beta^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.36)$$

Los signos + y - corresponden a los modos TE y TM respectivamente.

La búsqueda de los modos propios de una guía inhomogénea consistirá entonces en construir la matriz característica de la estructura, a partir de una cierta partición en subcapas, y encontrar el valor de β para el que se satisface la ecuación (3.32). La exactitud del procedimiento viene determinada por el número de subcapas homogéneas con que se reproduce el perfil de la guía inhomogénea. La técnica multicapa presenta ventajas frente a otros procedimientos, como podría ser el de elementos finitos, porque trabaja con igual precisión en todos los casos (p.e. cuando se

están calculando modos cercanos al corte) y consume un menor tiempo de cálculo. Por otra parte la partición transversal de la guía es acorde con el funcionamiento del resto del algoritmo de autoconsistencia.

3.4.3 Convergencia del método

La convergencia del método es difícil de probar en general. Lo que sí es cierto es que si el procedimiento iterativo converge a unos valores finales de distribución de campo y de constante de propagación, entonces esos límites son necesariamente solución de la ecuación de onda no lineal, para el modo de orden i y para el valor de potencia P utilizado.

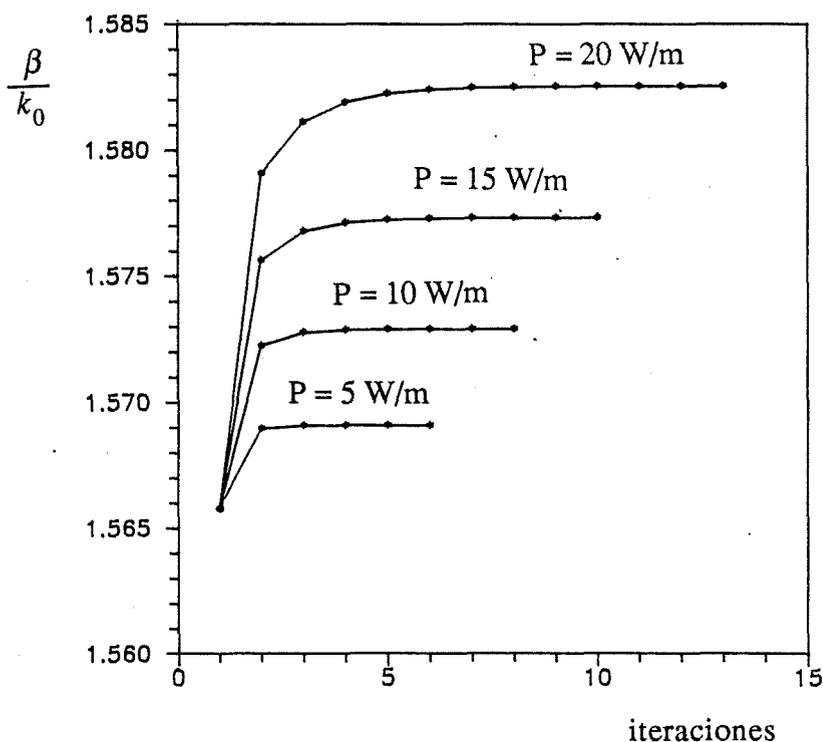


Figura 3.7: Evolución típica del índice efectivo del modo fundamental en una guía tricapa en las sucesivas iteraciones del procedimiento de búsqueda autoconsistente.

Intuitivamente puede observarse que el proceso simula mediante pasos discretos la interacción entre la onda y el medio no lineal, que modifica su índice de refracción en función del campo eléctrico presente en la guía en cada paso de cálculo. Cuando se produce la convergencia a una distribución de campo final, ese campo y el perfil de permitividad de la guía han de ser coherentes entre sí, de acuerdo con la ley que rige la variación de la permitividad y con la ecuación de onda. De cualquier forma es únicamente un algoritmo de cálculo de modos propios, y no una simulación del proceso físico real. Esto último requeriría obtener la distribución de campo en el periodo transitorio asumiendo una dependencia temporal para las amplitudes.

Para el modo fundamental el algoritmo converge en todos los casos analizados sobre guías tricapas. En la figura 3.7 se representa la evolución del índice efectivo de ese modo (β_0/k_0) en las sucesivas iteraciones, para un caso particular.

En la búsqueda de modos de orden superior la convergencia no se obtiene siempre de forma inmediata: en general deberá introducirse una mejora en el procedimiento de corrección del perfil de índice de refracción. La figura 3.8 representa la evolución del índice efectivo del modo de orden 1 (β_1/k_0) para la misma guía, y en donde se han utilizado dos procedimientos diferentes de corrección del índice de refracción. La curva punteada presenta un comportamiento alternante a partir de un máximo. En el límite tiende a un valor constante del índice efectivo, o a dos valores muy próximos, como en el caso de la figura , y, sin embargo, examinando las distribuciones de campo en dos iteraciones consecutivas cerca de ese límite (puntos A y B de la gráfica), que se han representado en la figura 3.9, se aprecia que la convergencia real a un campo eléctrico único no se ha conseguido (perfiles de campo A y B).

El método que se siguió en este caso para modificar el perfil de la guía correspondía simplemente a la aplicación directa de la ley de variación no lineal: en un paso i de cálculo el índice de refracción se obtiene, a partir del campo eléctrico de la iteración $i-1$, mediante la expresión:

$$n^{(i)}(x) = \left(\varepsilon_f + \Delta\varepsilon \left(|E^{(i-1)}(x)|^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.37)$$

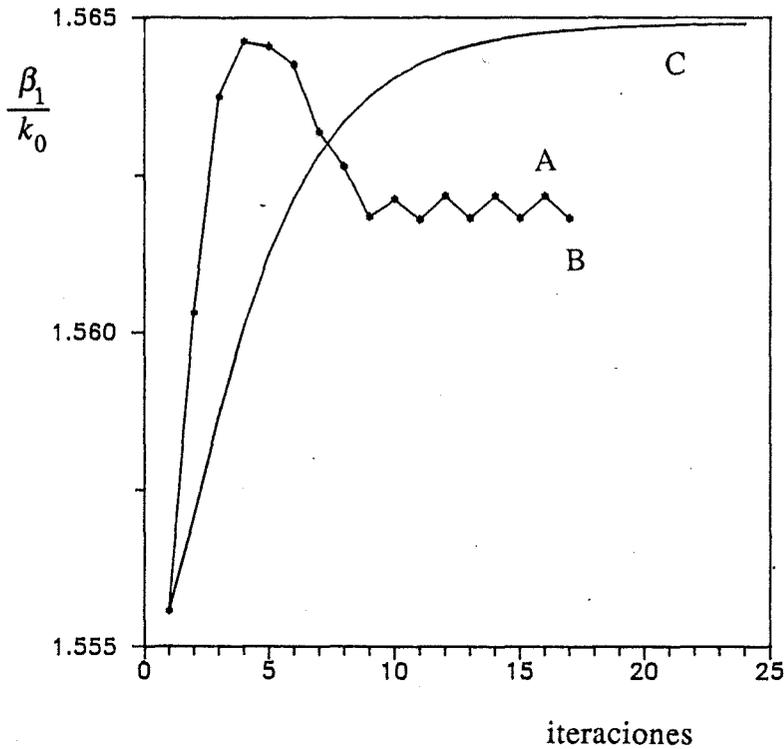


Figura 3.8: Evolución del índice efectivo del modo TE_1 . La curva punteada corresponde a una ejecución en la que no se obtuvo la convergencia del método. La curva monótona creciente corresponde a un procedimiento mejorado.

Los saltos bruscos del campo eléctrico que se producen entre los dos estados finales (A y B en la figura 3.8) se corresponden con los que, según la expresión (3.37), ocurren también en el índice de refracción entre dos iteraciones consecutivas. Se pensó entonces en simular con un mayor realismo el proceso físico que ocurriría realmente en una guía no lineal, en la que esas variaciones bruscas del índice de refracción no son posibles por la propia inercia del medio. En los materiales tipo Kerr se sabe que el índice de refracción sigue al campo eléctrico (en el tiempo) según la expresión de relajación de Debye [16]:

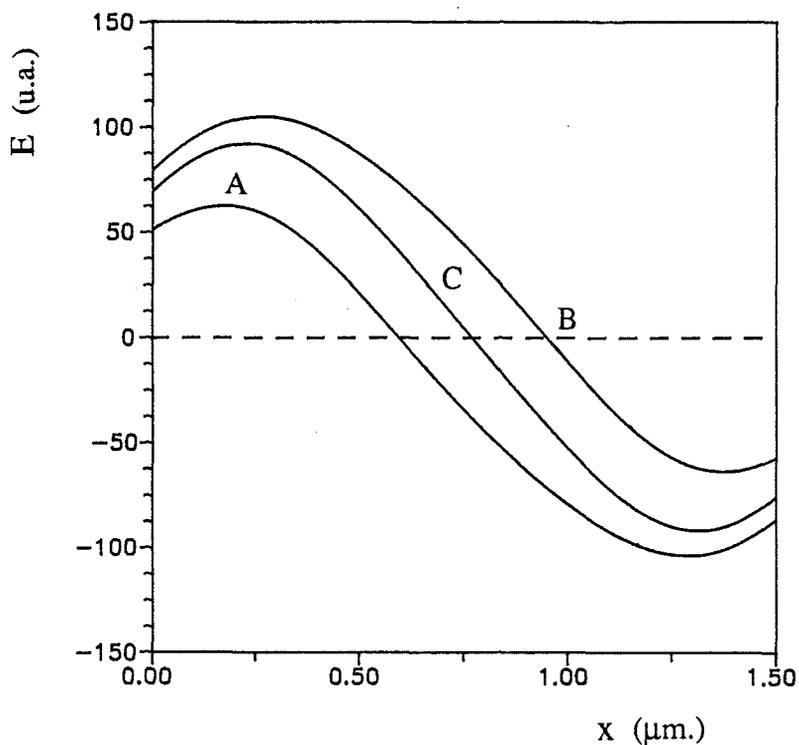


Figura 3.9: Perfiles de campo para el modo TE_1 correspondientes a las ejecuciones mostradas en la gráfica anterior. El perfil C es el que se obtuvo con el procedimiento mejorado.

$$\Delta n(t) = \frac{1}{\tau} \int_0^t \Delta n_0(|E(\eta)|^2) e^{\frac{\eta}{\tau}} d\eta e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (3.38)$$

siendo Δn_0 la variación no lineal estacionaria:

$$\Delta n_0(|E(t)|^2) = \tilde{n}_2 |E(t)|^2 \quad (3.39)$$

y donde τ y \tilde{n}_2 son constantes propias del medio. (\tilde{n}_2 se relaciona fácilmente con el parámetro α que hemos venido utilizando). Esas expresiones permiten construir un

algoritmo más elaborado para la obtención del incremento no lineal del índice de refracción.

Para un punto x_0 cualquiera de la sección transversal de la guía consideraremos una sucesión temporal discreta del valor del campo eléctrico:

$$\{E(x_0, i \Delta t)\} \quad i = 0, 1, \dots, l$$

A partir de esos valores obtendremos una sucesión de los valores que toma el incremento de índice de refracción:

$$\{\Delta n(x_0, i \Delta t)\} \quad i = 0, 1, \dots, l$$

donde la expresión general del término i -ésimo, en el supuesto de que el campo eléctrico es constante por intervalos, y con $\Delta t/\tau \ll 1$, resulta, de la ecuación 3.38:

$$\begin{aligned} \Delta n(x_0, i \Delta t) = \\ = \left[\sum_{n=0}^{i-1} \Delta n_0(|E(x_0, n \Delta t)|^2) e^{\frac{n \Delta t}{\tau}} \right] \left(e^{\frac{\Delta t}{\tau}} - 1 \right) e^{-\frac{i \Delta t}{\tau}} \end{aligned} \quad (3.40)$$

que es la expresión directamente aplicable para efectuar la corrección del índice en cada paso de cálculo. El cociente adimensional $\Delta t/\tau$ es el parámetro que determina la precisión numérica de la integral. Con $\Delta t/\tau = 0.1$ se obtuvo la convergencia en en todos los casos examinados. En muchos de ellos se puede tomar un valor más alto a fin de reducir el tiempo de cálculo.

En el ejemplo que estamos examinando la curva monótona creciente de la figura 3.8 muestra la evolución del índice efectivo del modo TE_1 cuando la corrección del índice de refracción se realiza mediante la integración numérica dada por la ecuación (3.40). Ahora la convergencia del índice efectivo viene acompañada de una distribución de campo final única (curva C en la figura 3.9). Ello indica que el proceso ha terminado en el modo (no lineal) buscado.

La filosofía del método de autoconsistencia se basa por tanto en la simulación numérica del proceso físico que tiene lugar en la guía. Para bajas potencias, donde la no linealidad es pequeña, el método converge con rapidez. Para potencias mayores los modos de orden superior han de buscarse mediante un proceso más cuidadoso, utilizando el procedimiento de corrección del índice descrito.

3.5 Ejemplo de aplicación del método de búsqueda autoconsistente. Tiempos de cálculo.

Como ejemplo de aplicación del procedimiento se ha estudiado el comportamiento de los modos propios de una guía no lineal tri-capa asimétrica, para algunos casos significativos. Los valores elegidos fueron: $n_f = 1.57$, $n_s = 1.55$, $n_c = 1.00$, con un grosor $d = 1.75 \mu\text{m.}$, y una longitud de onda $\lambda = 0.5145 \mu\text{m.}$ El coeficiente de no linealidad de la capa guiante se tomó $n_{2f} = 10^{-9} \text{ m}^2/\text{W}$.

En la figura 3.10 se ha representado la evolución del índice efectivo (β/k_0) para los modos de orden cero y uno, en función de la potencia total transportada por el modo. La línea continua corresponde a una no-linealidad tipo Kerr pura, autofocalizante, sin efecto de saturación del índice. Por el contrario las curvas a trazos corresponden a un medio saturable, donde se ha tomado un incremento máximo del índice de refracción $\Delta n_{\text{sat}} = 0.01$. La ley de saturación del índice de refracción con la potencia luminosa sigue la expresión (3.28).

La figura 3.11 muestra la evolución de la constante de propagación de ambos modos para un caso en el que el medio no lineal es autodesfocalizante, y, de nuevo, con efecto de saturación del índice de refracción, de valor $\Delta n_{\text{sat}} = -0.01$.

Por fin en la figura 3.12 se ha representado el tanto por ciento de potencia, transportada por cada modo individualmente, que permanece confinada en la capa guiante (no lineal) para el caso anterior.

Es interesante observar en este ejemplo el comportamiento del modo TE_1 : tratándose de un medio no lineal autodesfocalizante podría pensarse que entraría rápidamente en corte, y, sin embargo, esto no ocurre (fig. 3.11), debido a que la proporción de potencia que permanece de hecho confinada en el medio no lineal es cada vez menor (fig. 3.12).

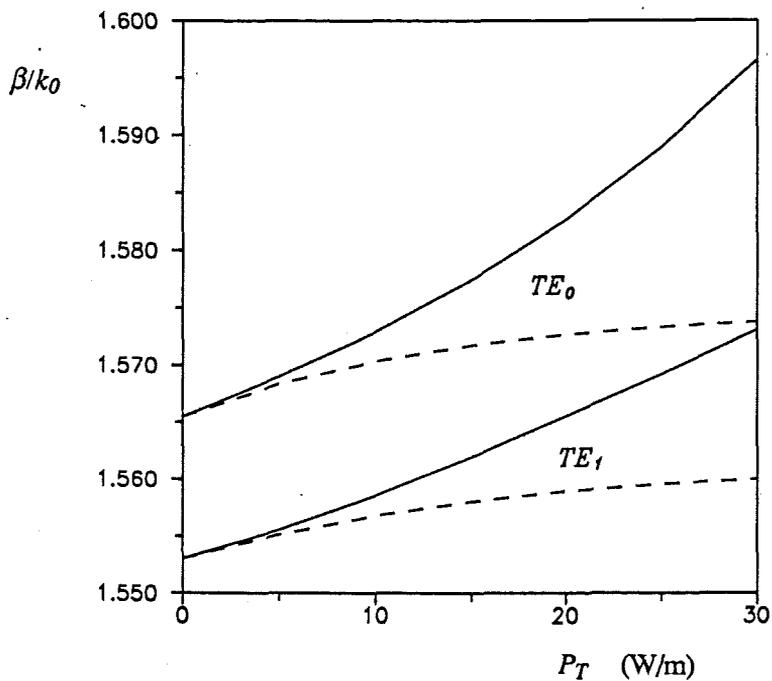


Figura 3.10: Índice efectivo para los modos TE_0 y TE_1 en una guía tricapa asimétrica no lineal autofocalizante. La línea continua corresponde al caso de no-linealidad tipo Kerr pura. Las curvas a trazos corresponden al caso en el que el medio no lineal presenta efecto de saturación, con $\Delta n_{\text{sat}} = 0.01$.

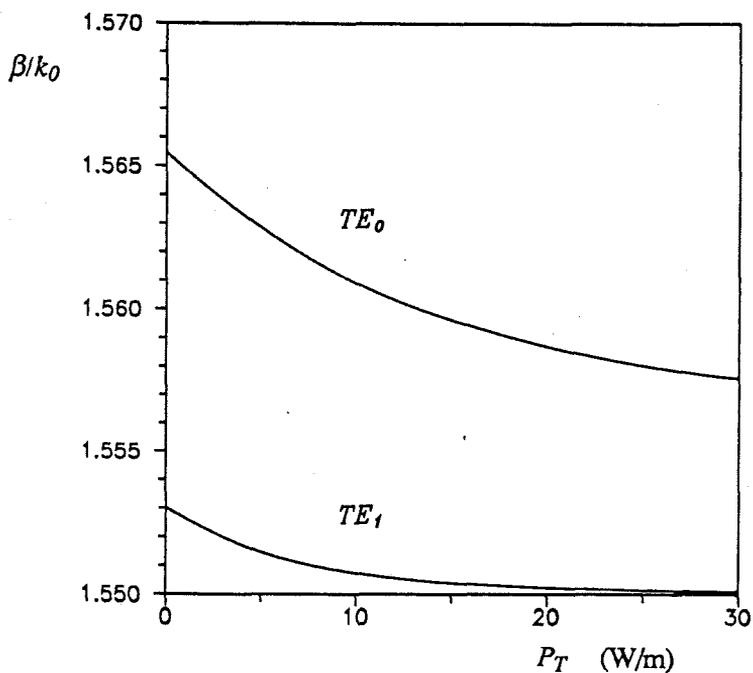


Figura 3.11: Índice efectivo para los modos TE_0 y TE_1 en una guía tricapa asimétrica no lineal autodesfocalizante. El medio no lineal presenta efecto de saturación, con $\Delta n_{\text{sat}} = -0.01$.

En la tabla siguiente se muestra algunos datos para la valoración del método numérico. Se realizaron diversas ejecuciones para el cálculo de los modos TE_0 y TE_1 sobre el ejemplo anterior. El número de cada casilla corresponde al número de iteraciones que fueron necesarias para obtener el índice efectivo de los modos con una precisión mayor de 1×10^{-5} . El densidad de subcapas homogéneas en que se subdividió el medio no lineal (en la aproximación multicapa) fue de 250 subcapas/ μm ., que es más que suficiente para la mayor parte de las aplicaciones.

	TE_0	TE_1	TE_1	TE_1
Método de corrección del índice de refracción	básico	básico	int. 3.40 $\Delta t/\tau = 0.5$	int. 3.40 $\Delta t/\tau = 0.3$
Potencia (W/m)				
1	2	3	9	15
5		4		
10	5	6	18	28
20	10	no conv.		
30	16	no conv.	21	33

Tabla 3.1: *Número de iteraciones necesarias para obtener el índice efectivo con una exactitud mayor de 1×10^{-5} , en una guía tricapa asimétrica. La capa guiante presenta no linealidad tipo Kerr autofocalizante. No se consideraron efectos de saturación.*

Normalmente el número de iteraciones necesarias está directamente relacionado con la variación neta del índice de refracción. A su vez la variación máxima del índice en el medio no lineal es una función de la potencia total que transporta cada modo. En el caso que estamos considerando el incremento de índice de refracción es

aproximadamente de 0.0015 por unidad de potencia para el modo TE_0 y de 0.0009 por unidad de potencia para el modo TE_1 .

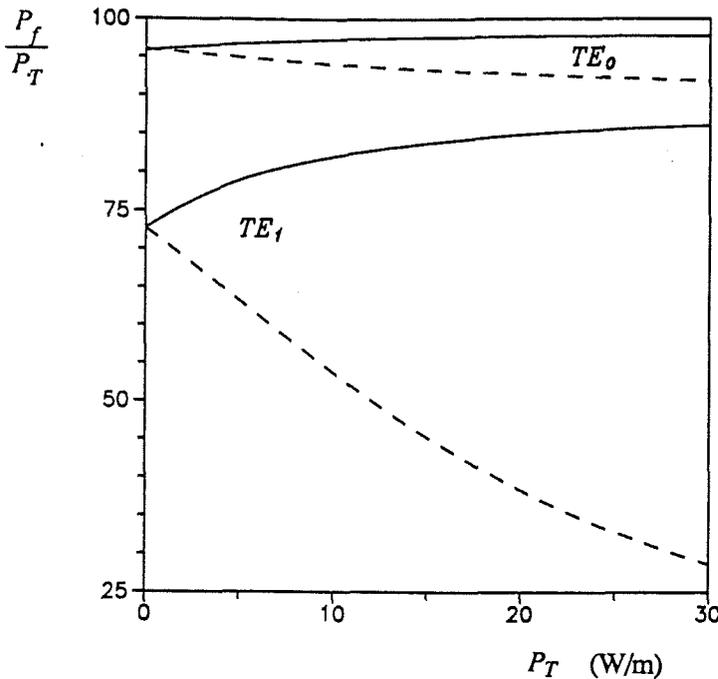


Figura 3.12: Porcentaje de potencia confinada en el medio no lineal para los modos TE_0 y TE_1 en una guía tricapa asimétrica no lineal. La curva continua corresponde al caso de medio no lineal autofocalizante, y la línea a trazos al de medio autodesfocalizante. El medio no lineal presenta efecto de saturación en ambos casos, con $|\Delta n_{sat}| = 0.01$.

El ejemplo precedente pone de manifiesto la versatilidad del método numérico propuesto, por las posibilidades que ofrece de tratar diferentes tipos de no linealidad. En el capítulo siguiente se utilizará de nuevo para el cálculo de modos propios no lineales en guías de cinco capas. Su interés radica por tanto en que puede tratar muy diversos tipos de problemas de guiado en estructuras no lineales, realizando pocas modificaciones, y manteniendo en cualquier caso intacto el núcleo del procedimiento. En aquellos problemas en que las variaciones del índice de refracción son considerables los tiempos de cálculo se alargan, aunque existirían procedimientos para

su optimización. Por otro lado, y aunque aquí no se ha realizado, es igualmente aplicable al cálculo de los modos TM, en medios isótropos o anisótropos [13] [17].

Es claro que existirán otros métodos para resolver el problema de la propagación modal en guías no lineales. Se ha probado la posibilidad de integrar numéricamente la ecuación de onda no lineal, mediante procedimientos más generales, tales como el método de Runge-Kutta o el método de Numerov [18], sin embargo deben plantearse igualmente de forma iterativa, (debido a que es necesario partir de un valor inicial, arbitrario, de campo eléctrico para modos TE, o magnético, para modos TM), y con la desventaja de que no es posible buscar directamente la solución de la ecuación no lineal para un valor de potencia total transportada por el modo, pues éste es un valor que se obtiene únicamente al final del proceso. Por otro lado un método para cálculo de modos propios en guías lineales inhomogéneas como el que aquí se utiliza, u otro similar, es normalmente accesible a quienes trabajan en este área.

REFERENCIAS

- [1] T.Y.Chang. "Fast self-induced refractive index changes in optical media". *Opt. Eng.* **20**, 2 (1981) 220.
- [2] P.D.Maker, R.Terhune. "Study of optical effects due to an induced polarization third order in the electric field strength". *Phys. Rev.* **137**, 3A (1964) A801.
- [3] A.D.Boardman, A.A.Maradudin, G.I.Stegeman, T.Twardowski, E.M.Wright. "Exact theory of nonlinear p -polarized optical waves". *Phys. Rev. A* **35**, 3 (1987) 1159.
- [4] D.Marcuse. "Light Transmission Optics". Bell Laboratories Series. Van Nostrand Reinhold Co. New York 1972.
- [5] P.G.Suchowski Jr., V.Ramaswamy. "Exact numerical technique for the analysis of step discontinuities and tapers in optical dielectric waveguides". *J. Opt. Soc. Am. A* **3**, 2 (1986) 194.
- [6] K.Ogusu. "TE waves in a symmetric dielectric slab waveguide with a Kerr-like nonlinear permittivity". *Opt. Quantum Electron.* **19** (1987) 65.
- [7] S.A.Akhmanov, A.P.Suckhorukov, R.V.Khokhlov. "Development of an optical waveguide in the propagation of light in a nonlinear medium". *Soviet Phys. JETP* **24**, 1 (1967) 198.
- [8] K.Ogusu. "Self-switching in hollow waveguides with a Kerrlike nonlinear permittivity". *J. Lightwave Technol.* **8**, 10 (1990) 1541.
- [9] M.Romagnoli, G.I.Stegeman. "Saturation of guided wave index with power in nonlinear planar waveguide". *Optics Comm.* **64**, 4 (1987) 343.

- [10] V.E.Wood, E.D.Evans, R.P.Kenan. "Soluble saturable refractive-index non-linearity model". *Optics Comm.* **69**, 2 (1988) 156.
- [11] D.Mihalache, D.Mazilu, M.Bertolotti, C.Sibilia. "Exact solution for nonlinear thin-film guided waves in higher-order nonlinear media". *J. Opt. Soc. Am. B* **5**, 2 (1988) 565.
- [12] W.R.Holland. "Nonlinear guided waves in low-index, self-focusing thin films: transverse electric case". *J. Opt. Soc. Am. B* **3**, 11 (1986) 1529.
- [13] K.Hayata, M.Nagai, M.Koshiha. "Finite-element formalism for nonlinear slab-guided waves". *IEEE Trans.Microwave Theory Tech.* **36**, 7 (1988) 1207.
- [14] F.Dios, L.Torner, F.Canal. "Self-consistent solution for general non-linear slab waveguide". *Optics Comm.* **72**, 1-2 (1989) 54.
- [15] D.W.Berreman. "Optics in stratified and anisotropic Media: 4x4-Matrix formulation". *J. Opt. Soc. Am.* **62**, 4 (1972) 502.
- [16] Y.R.Shen. "The Principles of Nonlinear Optics". Wiley Interscience. John Wiley and sons. New York 1984.
- [17] S.J.Al-Bader. "TM waves in nonlinear saturable thin films: a multilayered approach". *IEEE J. Lightwave Technol.* **7**, 4 (1989) 717.
- [18] K.Ogusu. "Computer analysis of general nonlinear planar waveguides". *Optics Comm.* **64**, 5 (1987) 425.