ESCOLA TÈCNICA SUPERIOR
D'ENGINYERS DE TELECOMUNICACIÓ (UPC)

PROPAGACION DE ONDAS MONOCROMATICAS EN GUIAONDAS DIELECTRICAS PLANAS FORMADAS POR MEDIOS NO LINEALES TIPO KERR: APLICACION AL DISEÑO DE DISPOSITIVOS LOGICOS

Autor: V. Federico Dios Otín
Director: Fernando Canal Bienzobas

Barcelona, enero 1992

Anexo A: Resolución de la ecuación diferencial del NLDC (ec. 4.7)

La ecuación que se obtuvo es:

$$\frac{dU}{dz} = \left\{ \left(C_2 K \left(P^2 - U^2 \right) \right)^2 - \left(G - \left(\frac{C_0 + C_1}{2} - 2C_2 \right) K U^2 - \right.\right.$$

$$\left.\left. - 2\left(\Delta\beta + \frac{(C_0 - C_1)}{2} KP \right) U \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \qquad (A.1)$$

donde se tiene un polinomio de cuarto orden en U bajo la raiz.

Conviene expresarla en la forma:

$$\frac{dU}{dz} = \sqrt{P(U)} = \sqrt{Q_1(U)\, Q_2(U)} \qquad (A.2)$$

donde $Q_1(U)$ y $Q_2(U)$ son polinomios de segundo orden:

$$Q_1(U) = b_1 U^2 + b_2 U + b_3$$
$$Q_2(U) = e_1 U^2 + e_2 U + e_3 \qquad (A.3)$$

Atendiendo a que P(U) viene expresado como la diferencia de dos cuadrados en la ecuación (A.1) se comprueba que los coeficientes en (A.3) resultan:

$$b_1 = -A - C_2 K \qquad e_1 = A - C_2 K$$

$$b_2 = -B \qquad e_2 = B \qquad (A.4)$$

$$b_3 = G + C_2 K P^2 \qquad e_3 = -G + C_2 K P^2$$

donde hemos escrito por brevedad:

$$A = K\left(\frac{C_0 + C_1}{2} - 2C_2\right)$$

$$B = 2\Delta\,\beta + KP(C_0 - C_1) \qquad (A.5)$$

De la ecuación diferencial (A.1) pasamos entonces a la integral:

$$z = \int_{U_0}^{U(z)} \frac{dU}{\sqrt{Q_1(U)\,Q_2(U)}} \qquad (A.6)$$

que admitirá solución en forma de funciones elípticas.

Deben realizarse algunas transformaciones previas para alcanzar la forma canónica de la integral. Los polinomios $Q_1(U)$ y $Q_2(U)$ han de transformarse en polinomios de segundo orden sin término en U. El proceso consiste en obtener los valores λ_1 y λ_2 tales que permitan escribir $Q_1(U) - \lambda_i\, Q_2(U)$ como cuadrados perfectos, esto es:

$$Q_1(U) - \lambda_1\, Q_2(U) = k_1(U - U_1)^2$$

$$Q_1(U) - \lambda_2\, Q_2(U) = k_2(U - U_2)^2 \qquad (A.7)$$

lo que en nuestro caso puede satisfacerse con λ_1 y λ_2 reales. Estos valores son las soluciones de la ecuación:

$$(b_2 - \lambda e_2)^2 - 4(b_1 - \lambda e_1)(b_3 - \lambda e_3) = 0 \qquad (A.8)$$

donde por convenio elegimos $\lambda_1 > \lambda_2$, y se obtienen los demás parámetros como:

$$k_1 = b_1 - \lambda_1 e_1 \qquad U_1 = \frac{1}{2}\,\frac{\lambda_1 e_2 - b_2}{\lambda_1 e_1 - b_1}$$

$$k_2 = b_1 - \lambda_2 e_1 \qquad U_2 = \frac{1}{2}\,\frac{\lambda_2 e_2 - b_2}{\lambda_2 e_1 - b_1} \qquad (A.9)$$

Puede escribirse finalmente:

$$Q_1(U)=\frac{\lambda_2 k_1}{\lambda_2-\lambda_1}(U-U_1)^2-\frac{\lambda_1 k_2}{\lambda_2-\lambda_1}(U-U_2)^2$$
$$Q_2(U)=\frac{k_1}{\lambda_2-\lambda_1}(U-U_1)^2-\frac{k_2}{\lambda_2-\lambda_1}(U-U_2)^2 \qquad (A.10)$$

Realizamos ahora el cambio de variable en (A.6) según:

$$t=\frac{U-U_1}{U-U_2} \qquad (A.11)$$

y resulta finalmente:

$$z=C\int_{t_0}^{t(z)}\frac{dt}{\sqrt{(t^2-a^2)(t^2-b^2)}} \qquad (A.12)$$

donde se ha escrito:

$$a^2=\left|\frac{k_2}{k_1}\right| \qquad b^2=\left|\frac{\lambda_1 k_2}{\lambda_2 k_1}\right| \qquad C=\frac{1}{(U_1-U_2)}\frac{\lambda_2-\lambda_1}{k_1\sqrt{|\lambda_2|}} \qquad (A.13)$$

La integral de (A.12) es una de las formas canónicas tabuladas, cuya solución se expresa en forma de funciones elípticas de Jacobi. La función U(z) que mide el intercambio de potencia entre los super-modos del acoplador resulta en este caso:

$$U(z)=\frac{U_2\,a-U_1\,sn\left(\frac{-a\,z}{C}+ns^{-1}\left(\frac{t_0}{a}\right)\right)}{a-sn\left(\frac{-a\,z}{C}+ns^{-1}\left(\frac{t_0}{a}\right)\right)} \qquad (A.14)$$

donde el parámetro de las funciones elípticas que aparecen es $m = \dfrac{b^2}{a^2} = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}$.

Para la mayor parte de los casos de interés se llega a la solución mostrada, sin embargo existe la posibilidad de obtener otras integrales canónicas diferentes a la que aparece en la ecuación (A.12). Por ello la expresión (A.14) no es completamente general. Para más detalles consúltese M.Abramowitz & I.A.Stegun, "Handbook of Mathematical Functions", Dover, New York (1970), cap. 16 y 17.

ANEXO B: Potencia confinada en cada rama del acoplador

El campo eléctrico asociado a la onda que viaja por la guía podemos escribirlo, en función de los super-modos (lineales) de la estructura, en la forma:

$$E(x,z) = A_0(z)\, E_0(x)\, e^{-j\beta_0 z} + A_1(z)\, E_1(x)\, e^{-j\beta_1 z} \qquad (B.1)$$

Por otra parte, si consideramos los modos fundamentales de las guías individuales, e_1 y e_2, es posible escribir, para un punto arbitrario z_0, la igualdad:

$$A_0(z_0)\, E_0(x)\, e^{-j\beta_0 z_0} + A_1(z_0)\, E_1(x)\, e^{-j\beta_1 z_0} =$$
$$= a_1 e_1(x) + a_2 e_2(x) \qquad (B.2)$$

donde, al tratar con dispositivos simétricos, estamos considerando de hecho que se satisface:

$$e_1(x) = e_2(x - (d + w)) \qquad (B.3)$$

siendo w la separación entre las guías y d el grosor de cada una de ellas.

Si tomamos todos las expresiones de los modos normalizadas para potencia unidad se comprueba que se cumple:

$$\begin{aligned} |A_0|\, I_0 \exp(-j(\beta_0 z + \varphi_0)) + |A_1|\, I_1 \exp(-j(\beta_1 z + \varphi_1)) &= a_1 \frac{2 k_0 \eta_0}{\beta} \\ |A_0|\, I_0 \exp(-j(\beta_0 z + \varphi_0)) - |A_1|\, I_1 \exp(-j(\beta_1 z + \varphi_1)) &= a_2 \frac{2 k_0 \eta_0}{\beta} \end{aligned} \qquad (B.4)$$

siendo β la constante de propagación correspondiente al modo fundamental (e_1 o e_2) de cada rama, y donde se incluyen las integrales de solapamiento:

$$I_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} E_0(x)\, e_1(x)\, dx$$
$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} E_1(x)\, e_1(x)\, dx \qquad (B.5)$$

De (B.4) se obtiene:

$$|a_1|^2 - |a_2|^2 = \left(\frac{\beta}{2\, k_0 \eta_0}\right)^2 4\, I_0 I_1 |A_0||A_1| \cos\theta(z)$$
$$|a_1|^2 + |a_2|^2 = \left(\frac{\beta}{2\, k_0 \eta_0}\right)^2 2\left(I_0^2 |A_0|^2 + I_1^2 |A_1|^2\right) \qquad (B.6)$$

Finalmente puede comprobarse que, con la aproximación $I_0 \approx I_1$, que se cumple si ambas ramas del acoplador están suficientemente separadas, se llega a que la potencia en cada rama puede escribirse como:

$$P_{b1,2}(z) = \frac{P}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{U^2(z)}{P^2}}\cos\theta(z)\right) \qquad (B.7)$$

Para el caso en que tomemos la teoría de modos acoplados con los super-modos no lineales la expresión resultante es:

$$P_{b1,2}(z) = \frac{P}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 - U^2(z)}\cos\theta(z)\right) \qquad (B.7bis)$$