

**APORTACION A LA AUTOMATIZACION EN LA TOMA
DE MEDIDAS Y PROCESADO DE DATOS SOBRE
MODELOS FOTOELASTICOS Y OPTOMECAVICOS.**



18 Juliol 1988

TESI DOCTORAL

PRESENTADA A

L'ESC. TEC. SUPERIOR D'ENGINYERS INDUSTRIALS

DE BARCELONA

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

PER L'OBTENCIO DEL

GRAU DE DOCTOR ENGINEER

PER

Frederic Marimón Carvajal
PROF. ASSOCIAT U.P.C.

DIRECTOR DE TESI

Dr. Francesc Roure Fernández
PROF. TITULAR U.P.C.

Barcelona, Maig 1988.

R.47752

3.4 RETARDO ABSOLUTO

Es conocido que las extinciones de intensidad luminosa en un Polariscopio pueden ser causadas por un cierto valor del retardo óptico ó múltiplo del mismo. Así, con P⊥A : (Ver Anexo II)

$$I = I_0 \operatorname{sen}^2 \frac{\delta}{L} \operatorname{sen}^2 2\beta = \text{Cte} \operatorname{sen}^2 \frac{\delta}{L} = \text{Cte} \operatorname{sen}^2 N\pi \quad (\text{AII-18})$$

Donde el factor N, denominado orden de extinción, anula la intensidad emergente para múltiplos enteros de la longitud de onda :

$$\delta = NL \quad ; \quad N = 0, 1, 2, 3, \dots \longrightarrow I = 0$$

La utilización de luz blanca implica la aparición del color complementario al de extinción. El inicial colorido de las franjas motiva la denominación usual de isocromáticas. Al crecer el retardo óptico va amortiguándose su efecto cromático como consecuencia de la superposición de extinciones.

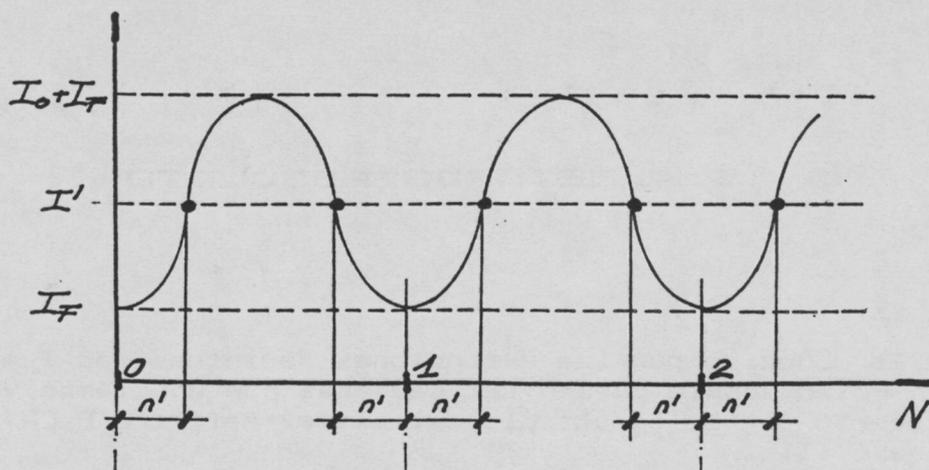
La Ley de Maxwell, válida para el régimen ópticamente lineal, relaciona el retardo δ con el estado tensional :

$$\delta = C_\sigma (\sigma_p - \sigma_q) e \quad (\text{AII-8})$$

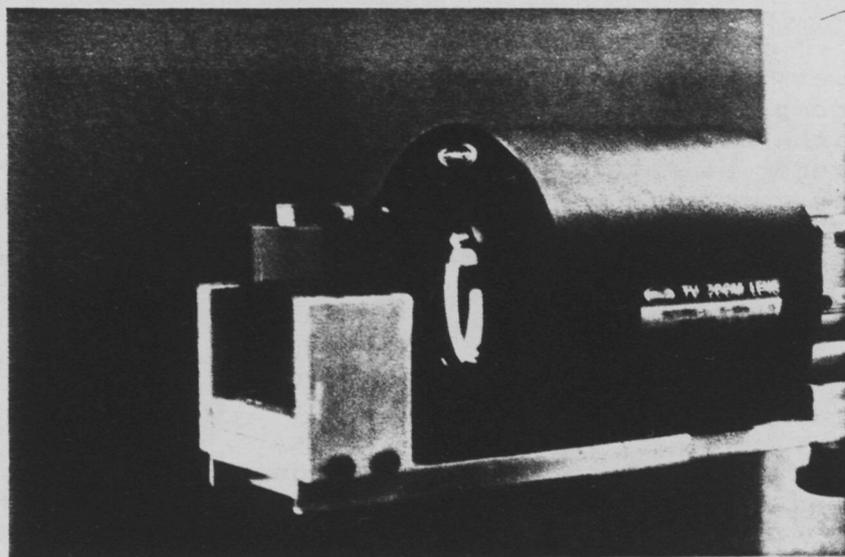
y por tanto las isocromáticas pueden definirse como las líneas de tensión tangencial máxima constante. En efecto :

$$(\sigma_p - \sigma_q) = \frac{\delta}{C_\sigma e} = N \frac{L}{C_\sigma e} = N F_\sigma \quad (\text{AII-19})$$

$$\tau_{xy \text{ max.}} = \frac{\sigma_p - \sigma_q}{2} \quad (\text{AI-29})$$



3-30 Doble ambigüedad en la obtención del orden absoluto de isocromática.



3-31 Soporte porta-filtros incorporando al conjunto zoom + cámara CCD.

MEDICION CLASICA DEL RETARDO ABSOLUTO

En el modelo se aprecian exclusivamente franjas de extinción $N = 0, 1, 2, \text{etc.}$, y una variación de intensidad gradual entre las mismas. Para la evaluación del retardo se procede a una separación del orden total N en dos componentes :

$$N = M + n$$

M orden entero $0, 1, 2, 3, \dots$

n orden fraccionario $0 \leq n < 1$

Clasicamente el orden entero M es deducido manualmente de la observación detallada del registro fotoelástico. Los puntos isotrópicos y singulares, los contornos exentos de tensión, e incluso la intuición y experiencia, son útiles para su determinación práctica.

Con luz blanca se recurre a la denominada tinta sensible como color de paso ó transición (extinción de 589 nm.).

Al amortiguarse su colorido puede dar una referencia del orden entero M existente, con las imprecisiones subjetivas que esto comporta.

El orden fraccionario es medido con compensación (Tardy, Babinet-Soleil, pag. A2-14) u otro sistema (Fotometría fotográfica, medida automatizada, Apart. 1.2).

Eliminada la modulación del ángulo de isocлина mediante la inserción de láminas $L/4$, la medida simple de intensidad luminosa en el pixel no proporciona directamente el orden absoluto, N , al existir una multiple indeterminación (Fig. 3-30). Ni tan solo el orden fraccionario, n , debido a la ambigüedad adicional de la función sinusoidal.

A nuestro entender un sistema de medida automatizado debería proporcionar el retardo óptico absoluto δ en todos los los puntos discretos del modelo.

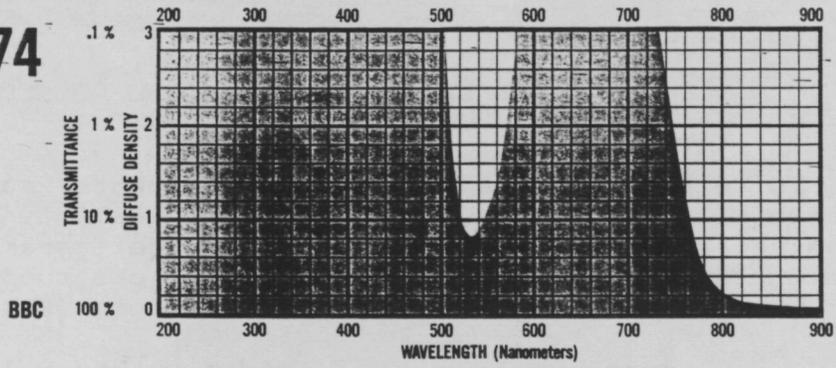
$$\delta = (M \pm n') L$$

$M = 0, 1, 2, 3, \dots$

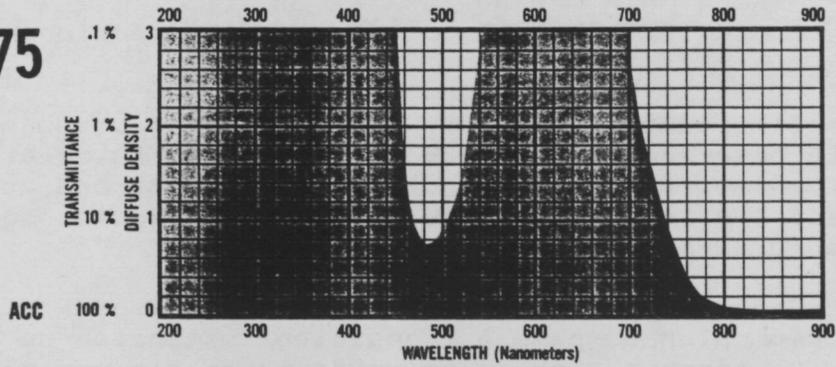
$n' = \text{retardo medido } 0 \leq n' < 0,5$

Aplicando las técnicas de tratamiento de imagen en el análisis de registros obtenidos con diferente longitud de onda hemos conseguido un principio de medida capaz de determinar el retardo absoluto, eliminando adicionalmente las isoclinas sin necesidad de láminas $L/4$.

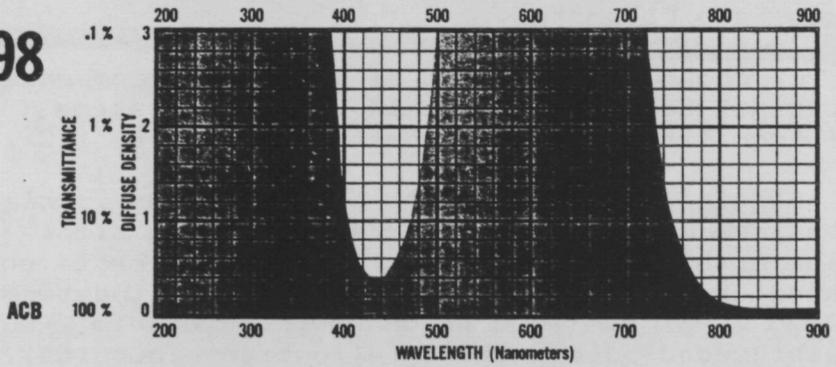
74



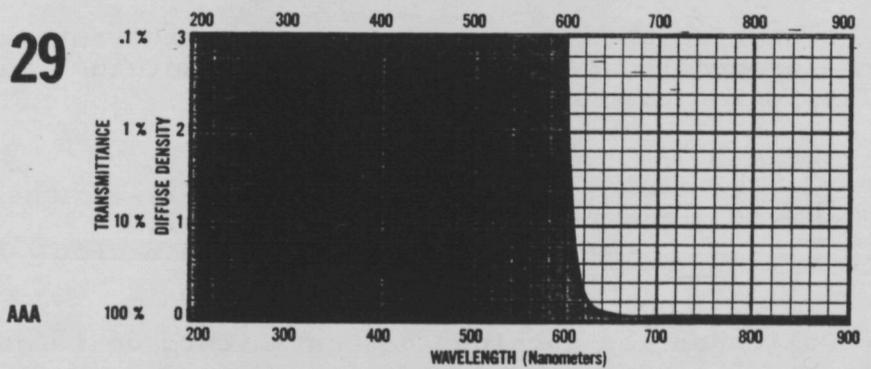
75



98



29



3-32 Transmisión espectral para los filtros monocromáticos WRATTEN de KODAK.

3.4.1 Filtros monocromáticos

La fuente de luz blanca difusa (descrita en el Apartado 2.2.4) proporciona un amplio espectro de emisión y por tanto permite seleccionar las longitudes de onda precisas mediante la utilización de filtros monocromáticos. Por razones de economía y calidad, el filtro es intercalado antes de la óptica zoom sobre un soporte porta-filtros diseñado exprofeso (Fig.3-31).

En el mercado existe una amplia oferta de filtros selectivos. En principio interesa un ancho de banda espectral restringido, no obstante, la intensidad luminosa emergente queda practicamente muy reducida.

Los filtros WRATTEN de la empresa KODAK constituyen una opción de compromiso calidad-coste al problema. El soporte endeble de los mismos obliga a montarlos en un marco portante universal de 70 x 70 mm autotensados para evitar su contacto con las caras del cristal y la consecuente aparición de anillos de Newton.

En el siguiente apartado se llega a la conclusión que cuatro longitudes de onda suficientemente distanciadas permiten calcular ordenes de extinción hasta $N \leq 10$.

Se han seleccionado los filtros WRATTEN :

L1	nº 98	L3	nº 74
L2	nº 75	L4	nº 29

Sus curvas de transmisión espectral (Fig.3-32) proporcionan las longitudes de onda nominales :

L1 = 450 nm	L3 = 538 nm
L2 = 489 nm	L4 = 632 nm

Los niveles reales de intensidad luminosa para cada L_i dependen de :

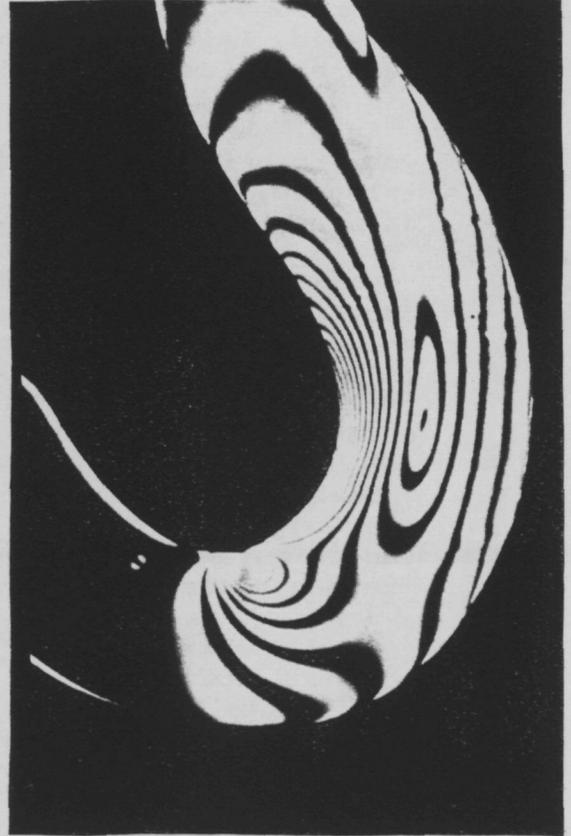
- Nivel de emisión de la fuente para L_i
- Curva de transmisión del filtro
- Respuesta espectral de la cámara

Así, cada L_i tiene un nivel de intensidad final diferente.

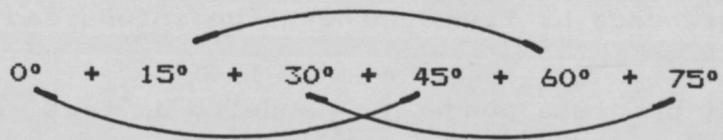
El problema puede ser resuelto de tres formas alternativas :

- Intercalando filtros atenuadores (ver 2.2.2) hasta que :

$$I^{\circ 1} = I^{\circ 2} = I^{\circ 3} = I^{\circ 4} \quad (I \text{ Intensidad luminosa})$$



3-33 Eliminación de la isóclina \emptyset_i mediante el método de la exposición múltiple.



2º) Regulando el preamplificador del conversor A/D para cada Li :

$$V^{\circ 1} = V^{\circ 2} = V^{\circ 3} = V^{\circ 4} \quad (V \text{ Tensión entrada })$$

3º) Mediante programa :

$$Z^{\circ 1} = Z^{\circ 2} = Z^{\circ 3} = Z^{\circ 4} \quad (Z \text{ nivel , } 0 \leq Z \leq 250)$$

Hemos utilizado las tres soluciones simultaneamente corrigiendo los errores implícitos a cada sistema.

Finalmente, cabe señalar que los filtros WRATTEN no son suficientemente perfectos para su aplicación fotoelástica. La atenuación de la isocromática ya es detectable para $N \geq 3$ como consecuencia de la superposición de extinciones. Sería preciso incorporar un filtro de infrarrojos cercanos o utilizar filtros más selectivos espectralmente.

3.4.2 Principios de medida

El proceso total consta de dos fases bien diferenciadas :

- 1º) Eliminación isóclinas
- 2º) Cálculo del retardo total

ELIMINACION DE ISOCLINAS

Se ha desechado la clásica utilización de las láminas L/4 para anular la modulación del ángulo de isoclina en la expresión P_{IA} :

$$I = I_0 \sin^2 \frac{\delta}{L} \pi \cdot \sin^2 2\beta \xrightarrow{\text{laminas L/4}} I_0 \sin^2 \frac{\delta}{L} \pi$$

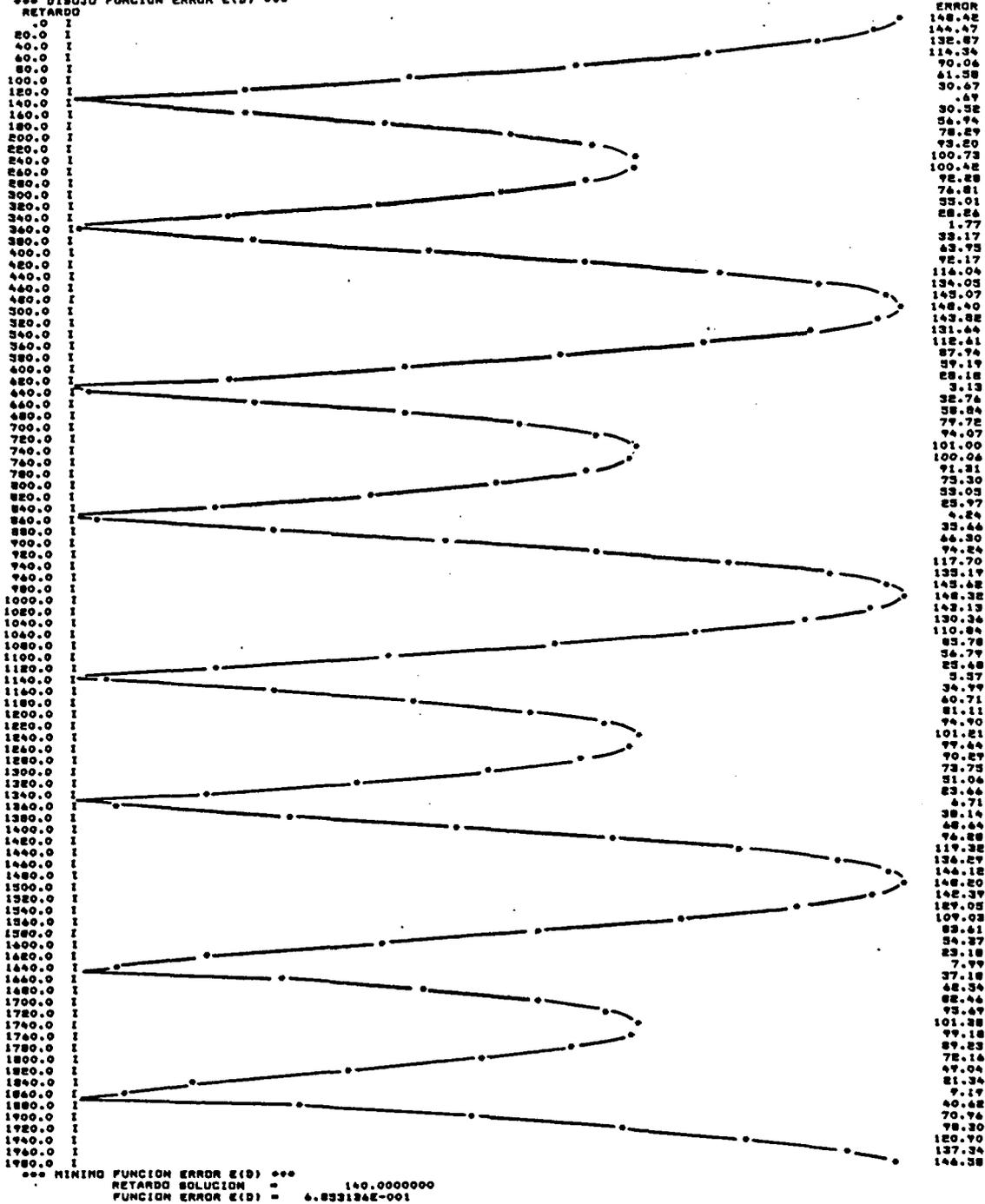
Las razones son consecuencia del caracter específico del metodo. En efecto :

- Las láminas retardadoras L/4 no son acromáticas. Ello implica la sustitución repetitiva de las mismas para cada longitud de onda Li empleada.

```

PROGRAMA SIMULACION RESPUESTA ALGORITMO
LONGITUDES DE ONDA
L(1)= 500.00
RETARDO EXISTENTE = 1360.0000000
INCREMENTO DE RETARDO= 10.0000000
*** EVALUACION SIMULADA DE Z(I) ***
L(1)= 500.00 Z(1)= 148.42
*** EVALUACION ERROR E(D) ***
*** DIBUJO FUNCION ERROR E(D) ***

```



3-34a Evolución simulada del algoritmo :
DATOS : $\delta = 1360$ nm
 $L_1 = 500$ nm
RESULTADO : δ solución = 140 nm (erronea)

Con una sola longitud de onda existe una múltiple indeterminación.

- En la práctica, persiste la influencia de β y las extinciones totales quedan amortiguadas.
- La manufactura de láminas L/4 de gran diámetro y suficientemente homogéneas es difícil y de alto coste.

Hemos resuelto satisfactoriamente el problema adaptando el método fotográfico de la doble exposición a la técnica de tratamiento de imagen.

Así, para un pixel determinado, la intensidad luminosa de dos imágenes diferenciadas por una rotación relativa del conjunto P_LA de 45°, verifica :

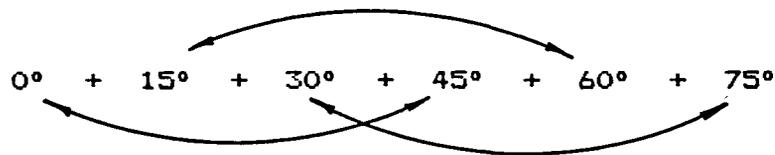
$$\begin{cases} I_1 = I_0 \operatorname{sen}^2 N\pi \operatorname{sen}^2 2\beta \\ I_2 = I_0 \operatorname{sen}^2 N\pi \operatorname{sen}^2 2(\beta + 45^\circ) \end{cases}$$

y la suma simple de ambas :

$$I_1 + I_2 = I_0 \operatorname{sen}^2 N\pi$$

Consecuentemente desaparece la influencia del ángulo β .

En nuestro caso, realizamos adicionalmente una exposición múltiple mediante una rotación completa del sector :



De esta forma se compensan los inevitables errores experimentales.

En la Fig 3.33 se aprecia la aplicación del método para un modelo 2D en técnica de retención de tensiones.

CALCULO DEL RETARDO TOTAL

Se ha utilizado un algoritmo de comparación entre imágenes tomadas con diferentes longitudes de onda.

En efecto, para una determinada L_1 , con eliminación previa de isóclinas según el método anterior :

$$I_1 = I_{1F} + I_{10} \operatorname{sen}^2 \frac{\delta}{L_1} \pi$$

```

* PROGRAMA SIMULACION RESPUESTA ALGORITMO *
LONGITUDES DE ONDA
L(1)= 450.00
L(2)= 550.00
RETARDO EXISTENTE = 1360.0000000
INCREMENTO DE RETARDO= 10.0000000
*** EVALUACION SIMULADA DE Z(I) ***
L(1)= 450.00 Z(1)= 1.22
L(2)= 550.00 Z(2)= 248.17
*** EVALUACION ERROR E(D) ***
*** DIBUJO FUNCION ERROR E(D) ***
RETARDO
.0 I
20.0 I
40.0 I
60.0 I
80.0 I
100.0 I
120.0 I
140.0 I
160.0 I
180.0 I
200.0 I
220.0 I
240.0 I
260.0 I
280.0 I
300.0 I
320.0 I
340.0 I
360.0 I
380.0 I
400.0 I
420.0 I
440.0 I
460.0 I
480.0 I
500.0 I
520.0 I
540.0 I
560.0 I
580.0 I
600.0 I
620.0 I
640.0 I
660.0 I
680.0 I
700.0 I
720.0 I
740.0 I
760.0 I
780.0 I
800.0 I
820.0 I
840.0 I
860.0 I
880.0 I
900.0 I
920.0 I
940.0 I
960.0 I
980.0 I
1000.0 I
1020.0 I
1040.0 I
1060.0 I
1080.0 I
1100.0 I
1120.0 I
1140.0 I
1160.0 I
1180.0 I
1200.0 I
1220.0 I
1240.0 I
1260.0 I
1280.0 I
1300.0 I
1320.0 I
1340.0 I
1360.0 I
1380.0 I
1400.0 I
1420.0 I
1440.0 I
1460.0 I
1480.0 I
1500.0 I
1520.0 I
1540.0 I
1560.0 I
1580.0 I
1600.0 I
1620.0 I
1640.0 I
1660.0 I
1680.0 I
1700.0 I
1720.0 I
1740.0 I
1760.0 I
1780.0 I
1800.0 I
1820.0 I
1840.0 I
1860.0 I
1880.0 I
1900.0 I
1920.0 I
1940.0 I
1960.0 I
1980.0 I
*** FINIMO FUNCION ERROR E(D) ***
RETARDO SOLUCION = 1360.0000000
FUNCION ERROR E(D) = 2.1800470

```

```

ERROR
249.39
248.56
238.16
260.15
268.40
277.31
284.97
290.29
292.13
289.91
282.23
270.02
253.38
233.66
214.16
188.66
167.36
149.66
137.23
131.58
133.80
144.43
164.01
189.89
222.34
259.37
297.97
335.63
369.37
397.13
413.97
424.30
420.99
403.69
378.94
342.10
297.29
247.33
193.43
143.16
99.98
64.72
37.44
24.93
24.81
43.36
73.70
114.18
168.14
224.27
284.76
345.39
399.77
448.68
474.26
491.24
492.43
477.54
447.30
404.21
350.31
289.74
224.32
164.45
107.86
60.49
23.44
6.61
2.18
14.03
38.39
78.20
128.44
183.72
244.08
303.30
360.08
404.29
441.24
442.23
449.97
442.33
441.35
408.21
343.44
314.20
265.08
214.04
167.04
127.07
92.14
77.02
69.42
73.67
88.93
113.62
149.22
182.22
220.80
258.36

```

3-34b Evolución simulada del algoritmo :
 DATOS : $\delta = 1360$ nm
 $L1 = 450$ nm
 $L2 = 550$ nm
 RESULTADO : δ solución = 1360 nm

El nivel Z_i para un pixel, después de normalizar la imagen y anulada la intensidad de fondo IF :

$$Z_i = 250 \operatorname{sen}^2 \frac{\delta}{L_i} \pi \quad 0 \leq Z_i < 250$$

El valor Z_i corresponde al nivel teórico producido por un retardo absoluto δ con una determinada L_i . En general, el nivel experimental Z_i'' no coincide exactamente con el teórico Z_i .

$$Z_i'' = \operatorname{aprox.} Z_i \quad \begin{cases} Z_i'' & \text{medida experimental} \\ Z_i & \text{nivel teórico} \end{cases}$$

Así, puede definirse una función error E , tal que para m longitudes de onda L_i :

$$E = \sum \left| \text{Teórico} - \text{Experimental} \right|$$

$$E = \sum_{i=1}^m \left| 250 \operatorname{sen}^2 \frac{\delta}{L_i} \pi - Z_i'' \right| \quad L_1 \dots L_m$$

El retardo solución será el valor que minimice la función E

$$\delta_{\text{solucion}} \longleftrightarrow E_{\min}$$

Puede razonarse que cuando más longitudes de onda L_i , mayor precisión experimental estará disponible en la evaluación del retardo.

No obstante, la necesidad de utilizar diferentes L_i no reside en los errores experimentales sino en la doble ambigüedad presente en la función senoidal intensidad I , tal como se comentó adecuadamente en el anterior apartado.

De forma simulada hemos estudiado el correcto comportamiento del sistema :

Se han variado las L_i , tanto en número como en separación relativa. En las Fig 3.34 a,b y c puede observarse la evolución de función error E y la obtención numérica del retardo solución mediante un simple algoritmo incremental. (Programa SIMUL.FOR).

Se llega a las siguientes importantes conclusiones para la implementación práctica del método :

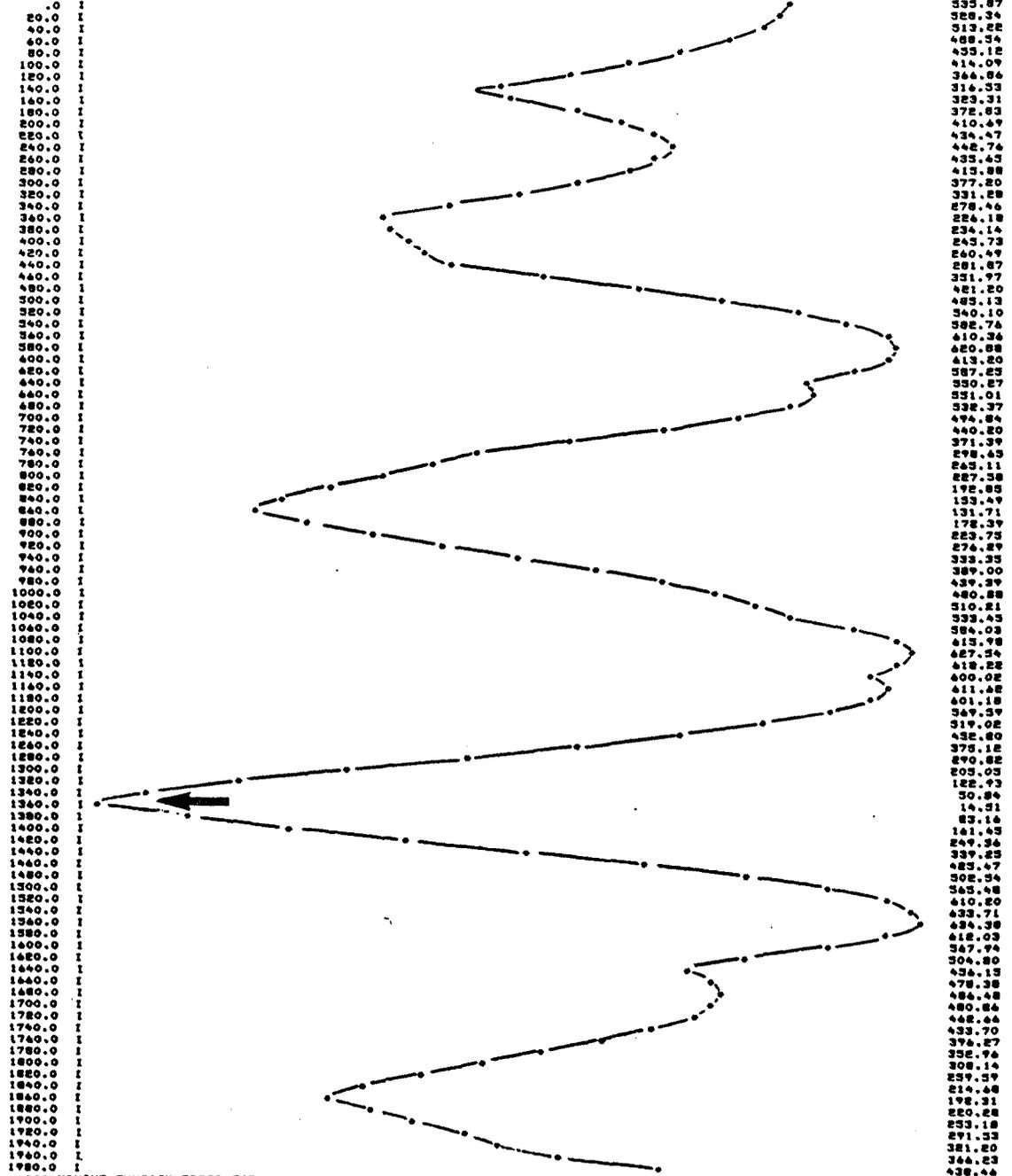
* PROGRAMA SIMULACION RESPUESTA ALGORITMO *

LONGITUDES DE ONDA
 L(1)= 450.00
 L(2)= 500.00
 L(3)= 550.00
 L(4)= 600.00

RETARDO EXISTENTE = 1360.0000000
 INCREMENTO DE RETARDO= 10.0000000

*** EVALUACION SIMULADA DE Z(1) ***
 L(1)= 450.00 Z(1)= 1.2E
 L(2)= 500.00 Z(2)= 148.4E
 L(3)= 550.00 Z(3)= 248.17
 L(4)= 600.00 Z(4)= 138.0E

*** EVALUACION ERROR E(D) ***
 *** DIBUJO FUNCION ERROR E(D) ***



*** MINIMO FUNCION ERROR E(D) ***
 RETARDO SOLUCION 1360.0000000
 FUNCION ERROR E(D) = 14.5111800

3-34c Evolucion simulada del algoritmo :
 DATOS : δ = 1360 nm
 L1 = 450 nm
 L2 = 500 nm
 L3 = 550 nm
 L4 = 600 nm
 RESULTADO : δ solucion = 1360 nm

- Cuatro longitudes de onda L1 L2 L3 L4 es un valor de compromiso precisión-complejidad. Permite obtener retardos absolutos hasta orden total $N \leq 10$, suficientemente altos para la práctica fotoelástica usual.
- El cálculo del valor mínimo de E no puede realizarse mediante métodos numericos estandar tales como Newton, Newton-Raphson, etc... Todos ellos se basan en la existencia de un único mínimo en el dominio de estudio. En nuestro caso existen multiples mínimos relativos. La aplicación sistemática del metodo implicaría su obtención y la comparación final de resultados parciales.

Este último apartado es un aspecto que aunque pueda parecer trivial, es básico para una rapidez computacional aceptable. En efecto, la evaluación de la función error $E(X)$ de forma incremental en 500 valores, requiere un tiempo de proceso de aprox. 1 seg.

Para una imagen completa de $256 \times 256 \approx 65000$ pixels, la duración total podría abarcar varias horas. Es evidente la necesidad de optimizar adecuadamente el proceso.

IMPLEMENTACION DEL ALGORITMO

Una solución directa consiste simplemente en evaluar puntos de la función error $E(X)$, desde un retardo :

$$\delta = 0 \quad \text{a} \quad \delta \text{ max} = N L = 10 \times 400 \text{ nm} = 4000 \text{ nm}$$

con incrementos de 10 nm, lo cual implica el cálculo de 400 ecuaciones. Simultaneamente se va registrando el valor de E mínimo parcial y finalmente el retardo δ solución.

Pero existe un enfoque más eficiente al problema :

Puede razonarse que para una determinada L_i y su medida experimental Z_i'' , solo existe un grupo de retardos solución tal que :

$$\delta = (M \pm n) L_i \quad M = 0, 1, 2, \dots, M \text{ máx}$$

Donde :

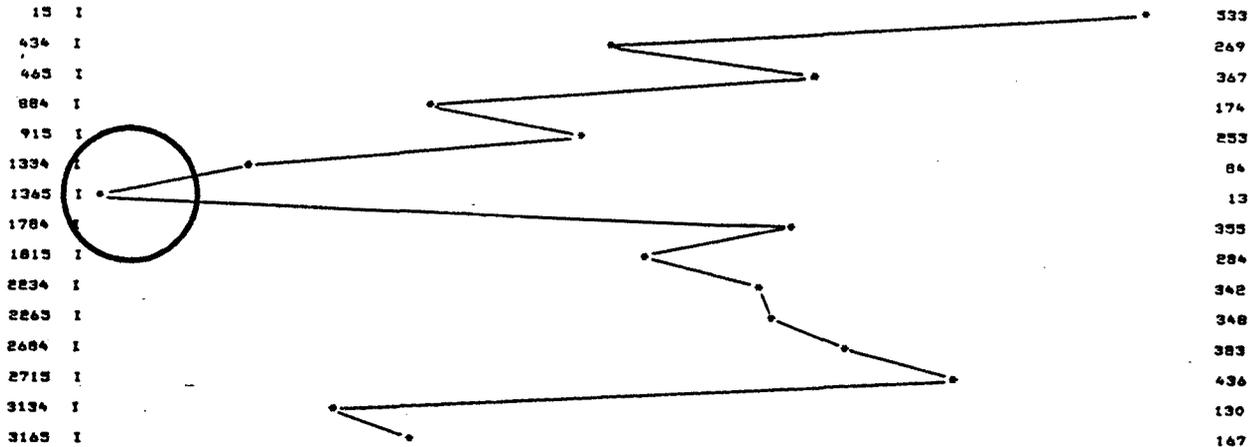
$$n = \frac{1}{\pi} \text{sen}^{-1} \sqrt{\frac{Z_i''}{250}} \quad 0 \leq n < 0.5$$

PROGRAMA SIMULACION ISORAPID

*** DATOS / L(1)-Longitud maestra ***
 L(1)= 450 Z(1)= 3
 L(2)= 500 Z(2)= 150
 L(3)= 550 Z(3)= 250
 L(4)= 600 Z(4)= 140
 ORDEN FRACCIONARIO L(1) = .034939

FASE I

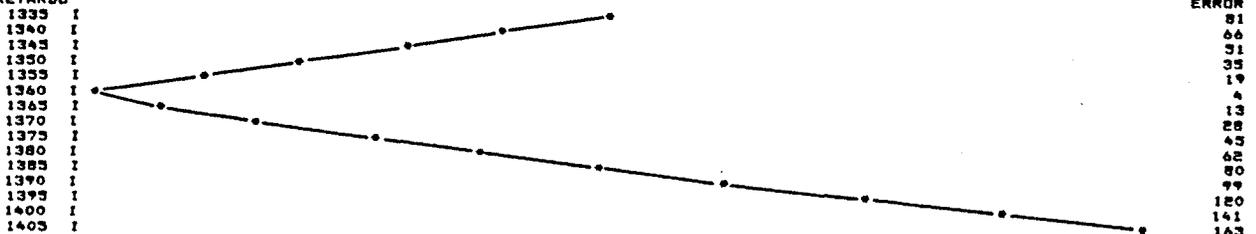
*** DIBUJO FUNCION ERROR E(D) ***
 RETARDO



*** MINIMO FUNCION ERROR E(D) ***
 RETARDO SOLUCION = 1365.0000000
 FUNCION ERROR E(D) = 13

FASE II

*** BARRIDO LOCAL RETARDO SOLUCION ***
 *** DIBUJO FUNCION ERROR E(D) ***
 RETARDO



*** MINIMO FUNCION ERROR E(D) ***
 RETARDO SOLUCION = 1360.0000000
 FUNCION ERROR E(D) = 4

3-35

Evolución simulada del algoritmo optimizado ISORAPID :

DATOS : $\delta = 1360$ nm
 L1* = 450 nm (Longitud maestra)
 L2 = 500 nm
 L3 = 550 nm
 L4 = 600 nm

RESULTADOS : δ solución = 1365 nm (FASE I)
 δ' solución = 1360 nm (FASE II).

NOTA : Se han modificado ligeramente los niveles teóricos de entrada para comprobar la bondad de ajuste del sistema.

Limitando el estudio a $M \text{ máx} = 10$, los valores posibles son para una "longitud maestra" L^* :

$$\begin{array}{ll} \delta (1) = n L^* & \delta (5) = (2+n) L^* \\ \delta (2) = (1-n) L^* & \delta (6) = (3-n) L^* \\ \delta (3) = (1+n) L^* & \dots\dots\dots \\ \delta (4) = (2-n) L^* & \delta (20) = (9+n) L^* \end{array}$$

La función error $E(X)$ solo es evaluada en estos 20 valores para las restantes L_i :

$$E (1), E (2), \dots\dots\dots E (20)$$

Obteniendo el retardo solución :

$$\text{FASE (I)} \quad E_{\min} \longrightarrow \delta_{\text{solucion}}$$

Para conseguir una mayor precisión se procede a un segundo rastreo en el entorno de la primera solución con 10 valores más :

$$\delta_{\text{inferior}} \leq \delta_{\text{solucion}} \leq \delta_{\text{superior}}$$

$$\Delta \delta = 10 \text{ nm.} \longrightarrow \begin{cases} \delta_{\text{inf.}} = \delta_{\text{solucion}} - 40 \text{ nm.} \\ \delta_{\text{sup.}} = \delta_{\text{solucion}} + 50 \text{ nm.} \end{cases}$$

Se vuelve a evaluar la función $E(X)$ en estos 10 puntos, obteniendo un segundo retardo solución con previsible error inferior a 10 nm :

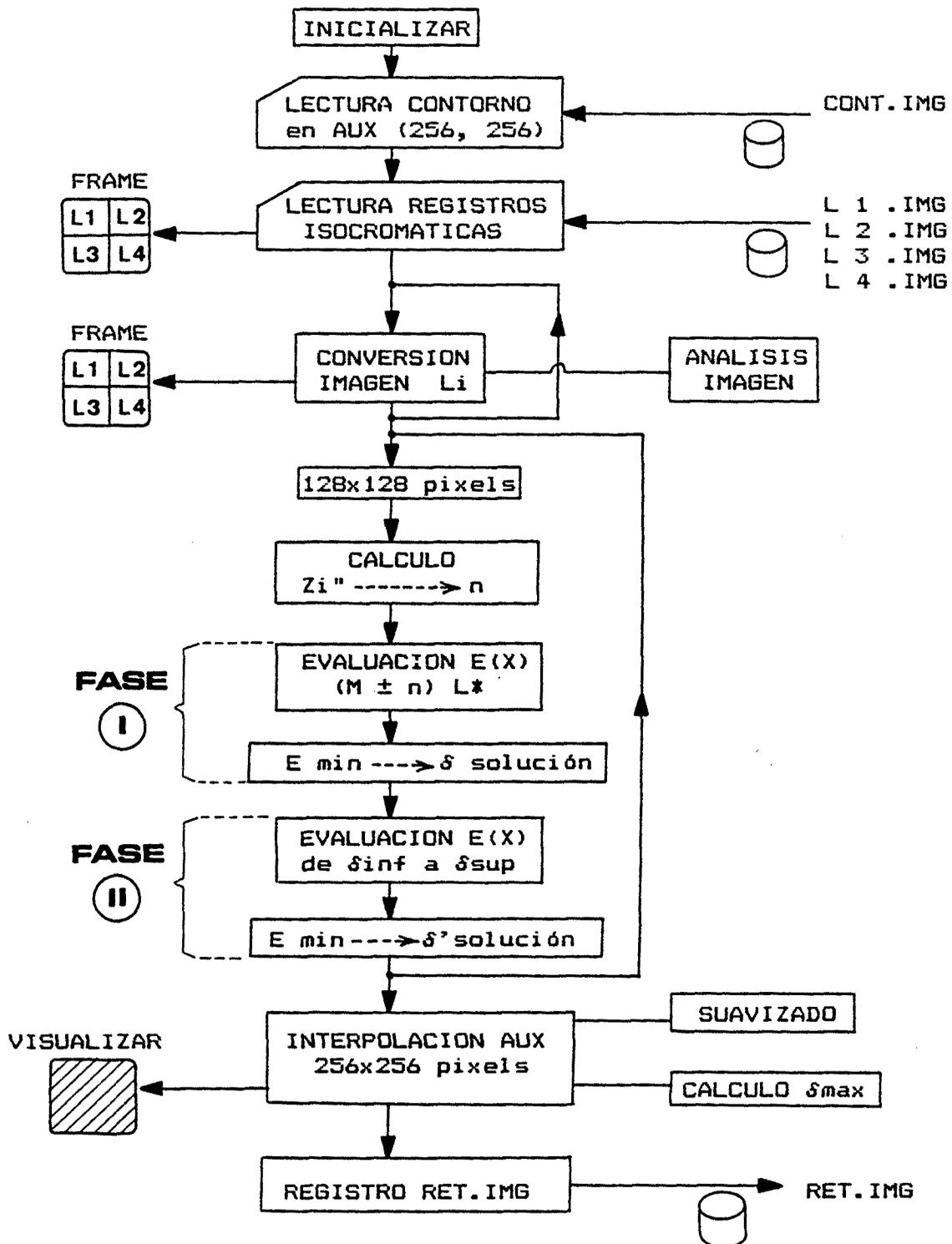
$$\text{FASE (II)} \quad E_{\min} \longrightarrow \delta'_{\text{solucion}}$$

El funcionamiento simulado del proceso es comprobado por el programa ISORAPID.FOR (Fig 3.35) con idénticos resultados que el largo método incremental anterior.

Adicionalmente, solo se plantea la resolución en $128 \times 128 \approx 16000$ pixels y mediante algoritmos de interpolación se amplía el resultado al registro completo de 256×256 .

Todas estas mejoras de cálculo provocan que el tiempo de proceso quede reducido a pocos minutos, sin pérdida apreciable de precisión.

El esquema simplificado de operación para el programa general RETARDO.FOR es el siguiente :



3.5.1 Ecuación de Laplace

La obtención del necesario Tercer Dato mediante la integración de la ecuación de Laplace constituye una solución simple y rápida, al menos inicialmente.

La relación, demostrada en el Anexo I mediante las ecuaciones de Equilibrio y Compatibilidad (AI-32a y 33), nos rige el comportamiento del primer Invariante de Tensiones en el caso de Fuerzas de volumen nulas, ctes. o que deriven de un potencial Ω :

$$\text{Si: } S = \sigma_x + \sigma_y = \sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_p + \sigma_q$$

$$\Delta S = 0 \quad \text{o} \quad \frac{\delta^2 S}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 S}{\delta y^2} = 0 \quad (\text{AI-39})$$

Se demuestra matemáticamente la unicidad de la solución conocidos los valores en el contorno.

En general, es precisa una integración numérica de la ecuación diferencial.

Se ha elegido el método de las Diferencias Finitas, que en forma de iteración manual, es utilizado clásicamente en Fotoelasticidad [Ref.4 y 7]. También el Método de los Elementos Finitos es apto en su modo variacional o método Garlenkin, [Ref.13,32 y 38] donde el corrimiento nodal viene identificado con S_i (Ver Apart.1.2).

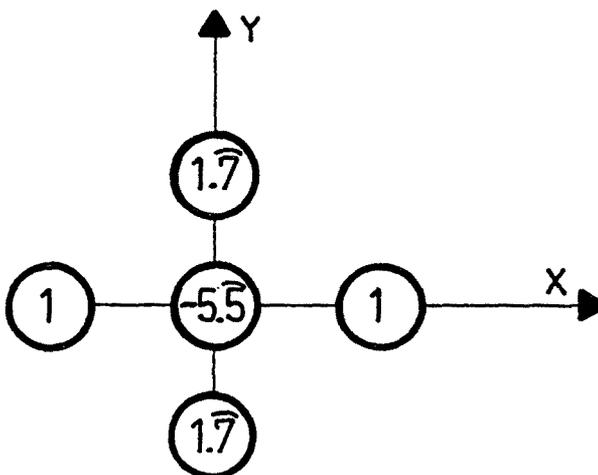
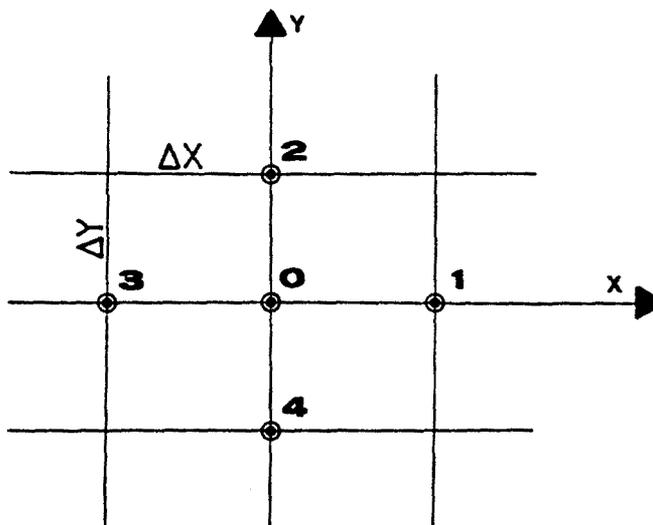
No obstante, al estar almacenada la información en un registro tipo matricial, es superfluo realizar un mallado del modelo y es más eficiente utilizar la discretización marcada por la misma retícula cartesiana.

Los nodos son coincidentes con puntos donde se conoce el valor experimental y por tanto no se comete pérdida de precisión mediante interpolaciones.

La velocidad de convergencia es muy alta en este caso, y no es necesaria la formulación ni almacenamiento de la Matriz de Rigidez [K].

Ello permite trabajar con una malla regular de $128 \times 128 \approx 16000$ pixels, lo cual proporciona una gran precisión.

En la técnica de digitización de imagen por ordenador el ratio entre pixels es aproximadamente 4:3. La formulación



3-36 Operador laplaciano para el ratio usual en tratamiento de imagen 4:3.

del operador Laplaciano debe contemplar este aspecto. Así, con diferencias centrales, la primera derivada parcial puede aproximarse :

$$\left. \frac{\delta S}{\delta x} \right|_0 \doteq \frac{S(1) - S(3)}{2 \Delta x} \qquad \left. \frac{\delta S}{\delta y} \right|_0 \doteq \frac{S(2) - S(4)}{2 \Delta y}$$

La derivada segunda:

$$\left. \frac{\delta^2 S}{\delta x^2} \right|_0 \doteq \frac{S(1) - 2 S(0) + S(3)}{\Delta x^2} \qquad \left. \frac{\delta^2 S}{\delta y^2} \right|_0 \doteq \frac{S(2) - 2 S(0) + S(4)}{\Delta y^2}$$

Denominando r el ratio entre pixels :

$$r = \frac{\Delta x}{\Delta y} \qquad \text{(usualmente 4:3)}$$

La ecuación de Laplace :

$$\frac{S(1) - 2 S(0) + S(3)}{\Delta x^2} + \frac{r^2 S(2) - 2 r^2 S(0) + r^2 S(4)}{\frac{r^2 \Delta y^2}{\Delta x^2}} = 0$$

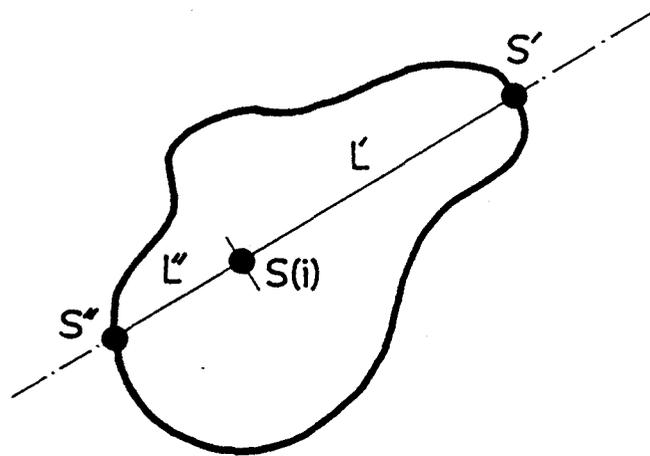
y el operador final:

$$S(1) + r^2 S(2) + S(3) + r^2 S(4) - 2 (1+r^2) S(0) = 0$$

Que en forma nodal aparece en la Fig.3-36 para $r = 4/3$.

La implementación del método sigue el esquema siguiente :

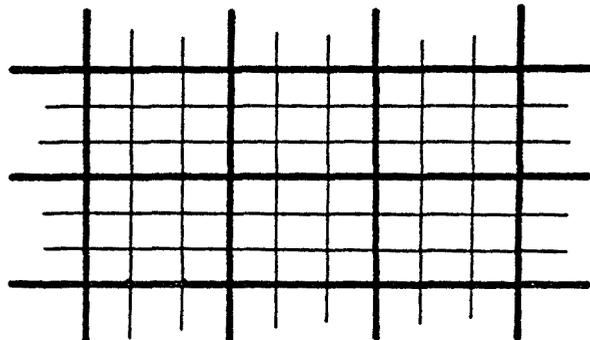
- 1- Se define el valor de S_i en el contorno de modelo, conocido mediante el registro de isocromáticas y las condiciones de carga externa.
- 2- Se procede a la aplicación sistemática del operador Laplaciano en todos los puntos interiores del modelo.



$$d' = 1/L'$$

$$d'' = 1/L''$$

3-37a Asignación de valores iniciales para $S(i)$ mediante interpolación auxiliar.



3-37b Macroretículas.

Pueden darse valores iniciales arbitrarios y el final de la iteración es controlado mediante una precisión ξ definida previamente, tal que para un punto significativo i y una iteración k :

$$\left| \frac{S_k(i) - S_{k-1}(i)}{S_k(i)} \right| \leq \xi$$

Se incrementa la convergencia de la solución :

- a) Utilizando valores iniciales obtenidos por una simple proporción lineal respecto al contorno (Fig. 3-37a).

$$S(i) = \frac{S' d' + S'' d''}{d' + d''} \quad \text{con } d = 1/L$$

- b) Realizando iteraciones previas con una macroretícula (Fig. 3-37b).

OBTENCION DE LOS VALORES DE CONTORNO

Se analizan los casos más usuales:

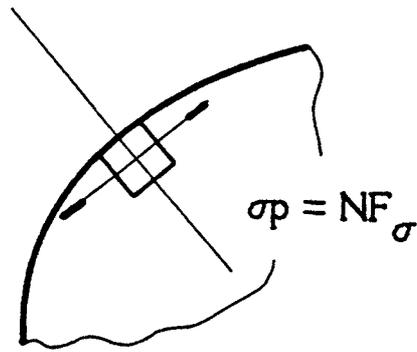
En el caso de borde libre, el orden de isocromática N proporciona el valor de S_i , siendo necesario conocer el signo de la tensión de contorno.

En efecto, (Fig. 3-38), puede presentarse dos casos:

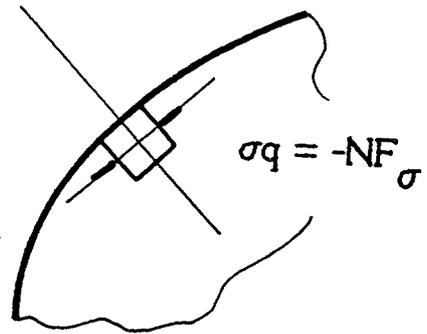
$$1) \text{ Contorno traccionado } \left\{ \begin{array}{l} \sigma_p = NF_\sigma \\ \sigma_q = 0 \end{array} \right\} S = (\sigma_p + \sigma_q) = NF_\sigma$$

$$2) \text{ Contorno comprimido } \left\{ \begin{array}{l} \sigma_p = 0 \\ \sigma_q = -NF_\sigma \end{array} \right\} S = (\sigma_p + \sigma_q) = -NF_\sigma$$

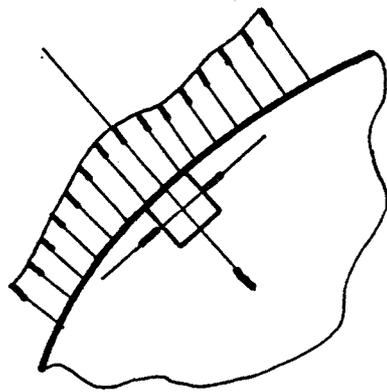
En conclusión, el valor de S_i se obtiene mediante NF_σ con su signo correspondiente.



Contorno traccionado



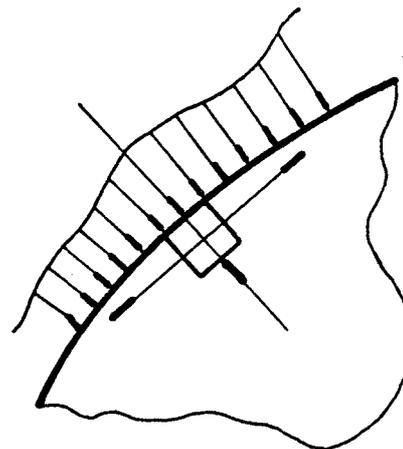
Contorno comprimido



$$\sigma_{\text{exterior}} > \sigma_{\text{contorno}}$$

$$\sigma_{\text{exterior}} = \sigma_p$$

$$\sigma_{\text{contorno}} = \sigma_q$$



$$\sigma_{\text{exterior}} < \sigma_{\text{contorno}}$$

$$\sigma_{\text{contorno}} = \sigma_p$$

$$\sigma_{\text{exterior}} = \sigma_q$$

3-38 Determinación de S en el contorno de la pieza.

En el caso de borde con carga conocida normal al contorno de la pieza (Fig. 3-38) y por tanto sin esfuerzo tangencial externo :

$$\begin{cases} (\sigma_p - \sigma_q) = NF_{\sigma} \\ (\sigma_p + \sigma_q) = S \end{cases}$$

Pueden presentarse también dos casos:

$$1) \quad \sigma_{\text{exterior}} > \sigma_{\text{contorno}} \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{\text{exterior}} = \sigma_p \\ \sigma_{\text{contorno}} = \sigma_q \end{array} \right\} \quad NF_{\sigma} = \sigma_p - \sigma_q$$

$$S = 2 \sigma_{\text{exterior}} - NF_{\sigma}$$

$$2) \quad \sigma_{\text{exterior}} < \sigma_{\text{contorno}} \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{\text{contorno}} = \sigma_p \\ \sigma_{\text{exterior}} = \sigma_q \end{array} \right\} \quad NF_{\sigma} = \sigma_p - \sigma_q$$

$$S = 2 \sigma_{\text{exterior}} + NF_{\sigma}$$

CONCLUSIONES

La utilización de la ecuación de Laplace para obtener el necesario Tercer Dato tiene el grave inconveniente de precisar el conocimiento de las cargas externas y la necesidad de corregir manualmente el signo de la tensión en el contor no libre.

La automatización del proceso fotoelástico debería recurrir a una formulación más potente del problema.

3.5.2 Metodo Equilibrio-Compatibilidad

Las ecuaciones de equilibrio para un estado plano de tensión (A-32a), en caso de ser nulas o despreciables las Fuerzas de Volumen ($F = 0$), adoptan la expresión :

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

Las relaciones (A-27) y (A-28) proporcionan el estado de tensión para una referencia ortogonal (x, y) en función de las tensiones principales ordenadas (σ_p, σ_q) y el ángulo θ que forma σ_p con el eje x :

$$\sigma_x = \frac{\sigma_p + \sigma_q}{2} + \frac{\sigma_p - \sigma_q}{2} \cos 2\theta$$

$$\tau_{xy} = \frac{\sigma_p - \sigma_q}{2} \sin 2\theta$$

$$\sigma_y = \frac{\sigma_p + \sigma_q}{2} - \frac{\sigma_p - \sigma_q}{2} \cos 2\theta$$

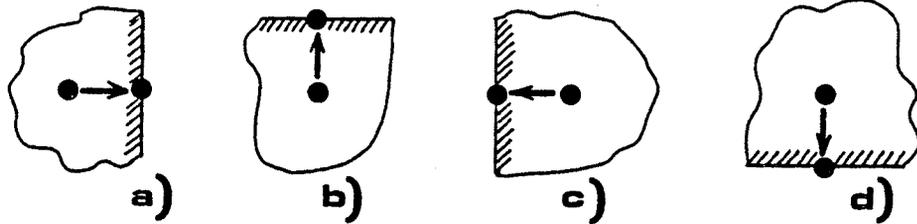
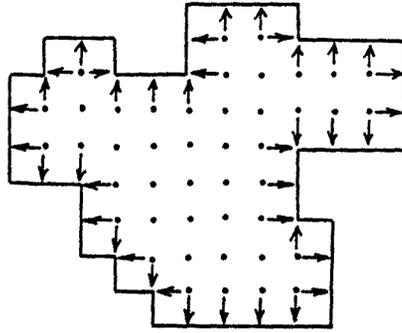
Si utilizamos la notación usual :

$$S = (\sigma_p + \sigma_q)$$

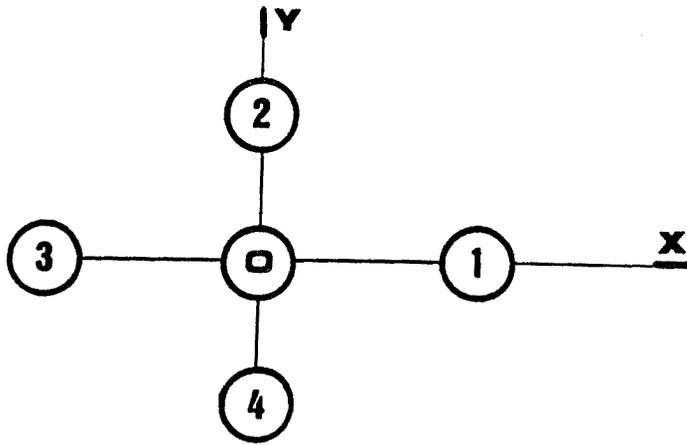
$$R = (\sigma_p - \sigma_q)$$

S = Suma de tensiones principales ordenadas.
Primer invariante $[\tau]$.

R = Diferencia de tensiones principales ordenadas.



3-39 Método Equilibrio-Compatibilidad.



$$\frac{S_1 - 2S_o + S_3}{\Delta x^2} + \frac{S_2 - 2S_o + S_4}{\Delta y^2} = 0$$

3-40 Ecuación de Compatibilidad.
Aproximación en Diferencias Finitas.

Y sustituimos en la ecuación de equilibrio (1), queda :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{S}{2} + \frac{R}{2} \cos 2\theta \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{R}{2} \operatorname{sen} 2\theta \right] = 0$$

Operando con las reglas habituales de diferenciación :

$$\frac{1}{2} \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial R}{\partial x} \cos 2\theta - R \frac{\partial \theta}{\partial x} \operatorname{sen} 2\theta + \frac{1}{2} \frac{\partial R}{\partial y} \operatorname{sen} 2\theta + R \frac{\partial \theta}{\partial y} \cos 2\theta$$

El resultado final proporciona la variación de S respecto del eje cartesiano x en función de los datos fotoelásticos. En efecto :

$$\frac{\partial S}{\partial x} = 2R \frac{\partial \theta}{\partial x} \operatorname{sen} 2\theta - 2R \frac{\partial \theta}{\partial y} \cos 2\theta - \frac{\partial R}{\partial x} \cos 2\theta - \frac{\partial R}{\partial y} \operatorname{sen} 2\theta$$

(3)

Realizando idéntico proceso sobre la segunda ecuación de equilibrio (2) :

$$\frac{\partial S}{\partial y} = -2R \frac{\partial \theta}{\partial y} \operatorname{sen} 2\theta - 2R \frac{\partial \theta}{\partial x} \cos 2\theta + \frac{\partial R}{\partial y} \cos 2\theta - \frac{\partial R}{\partial x} \operatorname{sen} 2\theta$$

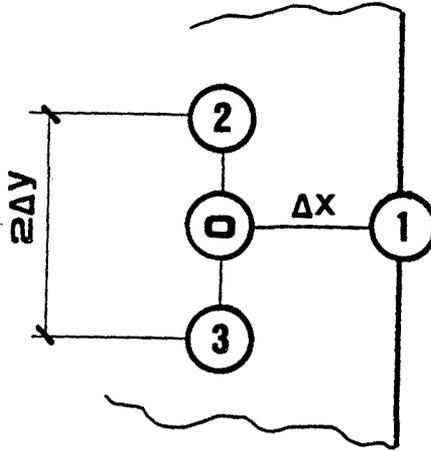
(4)

METODO EQUILIBRIO-COMPATIBILIDAD

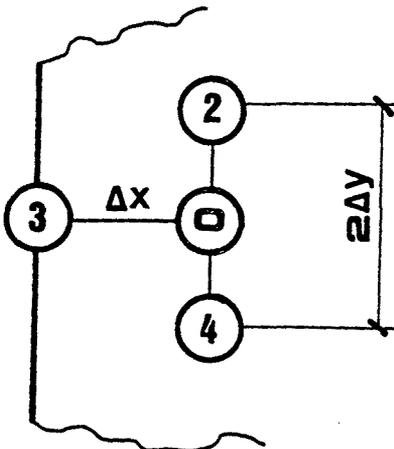
Se basa en la aplicación numérica de la ecuación de compatibilidad o de Laplace :

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} = 0$$

en todos los puntos interiores del modelo.



$$\left[\frac{S_1 - S_0}{\Delta x} \right]_0 = 2 R_0 \frac{\theta_1 - \theta_0}{\Delta x} \sin 2\theta_0 - 2 R_0 \frac{\theta_2 - \theta_4}{2 \Delta y} \cos 2\theta_0 - \frac{R_1 - R_0}{\Delta x} \cos 2\theta_0 - \frac{R_2 - R_4}{2 \Delta y} \sin 2\theta_0$$



$$\left[\frac{S_0 - S_3}{\Delta x} \right]_0 = 2 R_0 \frac{\theta_0 - \theta_3}{\Delta x} \sin 2\theta_0 - 2 R_0 \frac{\theta_2 - \theta_4}{2 \Delta y} \cos 2\theta_0 - \frac{R_0 - R_3}{\Delta x} \cos 2\theta_0 - \frac{R_2 - R_4}{2 \Delta y} \sin 2\theta_0$$

3-41 Ecuación de Equilibrio en eje x.
Aproximación en Diferencias Finitas.

Adicionalmente se plantea la expresión :

$$\frac{\partial S}{\partial n}$$

en todos los nodos próximos al contorno, mediante las ecuaciones de equilibrio (3) ó (4).

Para dar estabilidad a la solución es preciso conocer, como mínimo, el valor de S para un punto concreto :

$$S_{ij} \quad \text{para } x_i, y_j$$

Punto auxiliar de referencia , que tanto puede pertenecer al interior ó al contorno del dominio en estudio.

La Fig.3-39 aclara la metodología operativa :



● Nodos interiores donde se aplica la ecuación de Laplace.

● Nodos pertenecientes al contorno, que interviniendo en la ecuación de Laplace es preciso plantear la ecuación de equilibrio entre el mismo y el interior adyacente.

Se encuentran esquematizadas las cuatro posibilidades for males que puedan aparecer en esta segunda etapa.

APROXIMACION EN DIFERENCIAS FINITAS

En el apartado anterior (3.5.1) se ha desarrollado la ecuación armónica de Laplace en Diferencias Finitas.

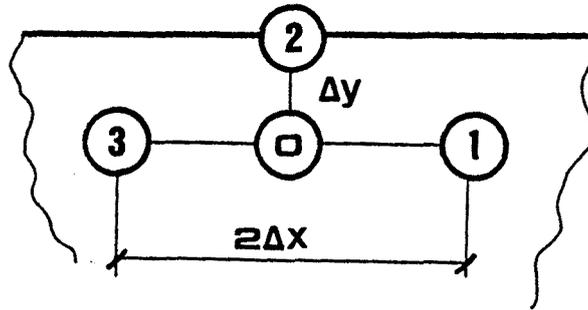
Así (Fig.3-40) :

$$\frac{S_1 - 2S_0 + S_3}{\Delta x^2} + \frac{S_2 - 2S_0 + S_4}{\Delta y^2} = 0$$

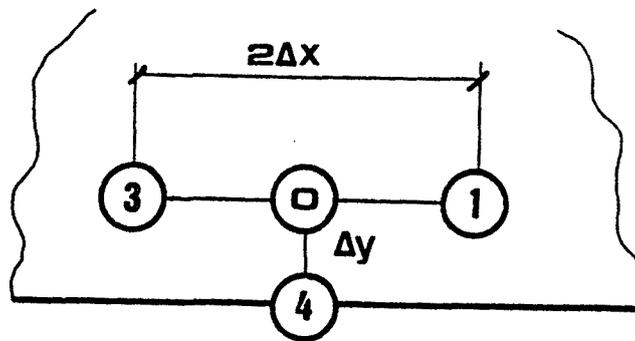
De forma similar puede aproximarse la ecuación de equilibrio (3), para las dos variantes correspondientes. (Fig. 3-41) :

$$\left[\frac{\partial S}{\partial x} \right]_0 = \left[\frac{S_1 - S_0}{\Delta x} \right]_0$$

$$\left[\frac{S_1 - S_0}{\Delta x} \right]_0 = 2R_0 \frac{\theta_1 - \theta_0}{\Delta x} \text{sen } 2\theta_0 - 2R_0 \frac{\theta_2 - \theta_4}{2\Delta y} \text{cos } 2\theta_0 - \frac{R_1 - R_0}{\Delta x} \text{cos } 2\theta_0 - \frac{R_2 - R_4}{2\Delta y} \text{sen } 2\theta_0$$



$$\left[\frac{S_2 - S_0}{\Delta y} \right]_0 = -2 R_0 \frac{\theta_2 - \theta_0}{\Delta y} \sin 2\theta_0 - 2 R_0 \frac{\theta_1 - \theta_3}{2 \Delta x} \cos 2\theta_0 + \frac{R_2 - R_0}{\Delta y} \cos 2\theta_0 - \frac{R_1 - R_3}{2 \Delta x} \sin 2\theta_0$$



$$\left[\frac{S_0 - S_4}{\Delta y} \right]_0 = -2 R_0 \frac{\theta_0 - \theta_4}{\Delta y} \sin 2\theta_0 - 2 R_0 \frac{\theta_1 - \theta_3}{2 \Delta x} \cos 2\theta_0 + \frac{R_0 - R_4}{\Delta y} \cos 2\theta_0 - \frac{R_1 - R_3}{2 \Delta x} \sin 2\theta_0$$

3-42 Ecuación de Equilibrio en eje y.
Aproximación en Diferencias Finitas.

$$\left[\frac{\partial S}{\partial x} \right]_o \approx \left[\frac{S_o - S_3}{\Delta x} \right]_o$$

$$\left[\frac{S_o - S_3}{\Delta x} \right]_o = 2 R_o \frac{\theta_o - \theta_3}{\Delta x} \text{sen } 2\theta_o - 2 R_o \frac{\theta_2 - \theta_4}{2 \Delta y} \text{cos } 2\theta_o$$

$$- \frac{R_o - R_3}{\Delta x} \text{cos } 2\theta_o - \frac{R_2 - R_4}{2 \Delta y} \text{sen } 2\theta_o$$

Es idénticamente para la segunda ecuación de equilibrio (4), (Fig.3-42) :

$$\left[\frac{\partial S}{\partial y} \right]_o \approx \left[\frac{S_2 - S_o}{\Delta y} \right]_o$$

$$\left[\frac{S_2 - S_o}{\Delta y} \right]_o = -2 R_o \frac{\theta_2 - \theta_o}{\Delta y} \text{sen } 2\theta_o - 2 R_o \frac{\theta_1 - \theta_3}{2 \Delta x} \text{cos } 2\theta_o$$

$$+ \frac{R_2 - R_o}{\Delta y} \text{cos } 2\theta_o - \frac{R_1 - R_3}{2 \Delta x} \text{sen } 2\theta_o$$

$$\left[\frac{\partial S}{\partial y} \right]_o \approx \left[\frac{S_o - S_4}{\Delta y} \right]_o$$

$$\left[\frac{S_o - S_4}{\Delta y} \right]_o = -2 R_o \frac{\theta_o - \theta_4}{\Delta y} \text{sen } 2\theta_o - 2 R_o \frac{\theta_1 - \theta_3}{2 \Delta x} \text{cos } 2\theta_o$$

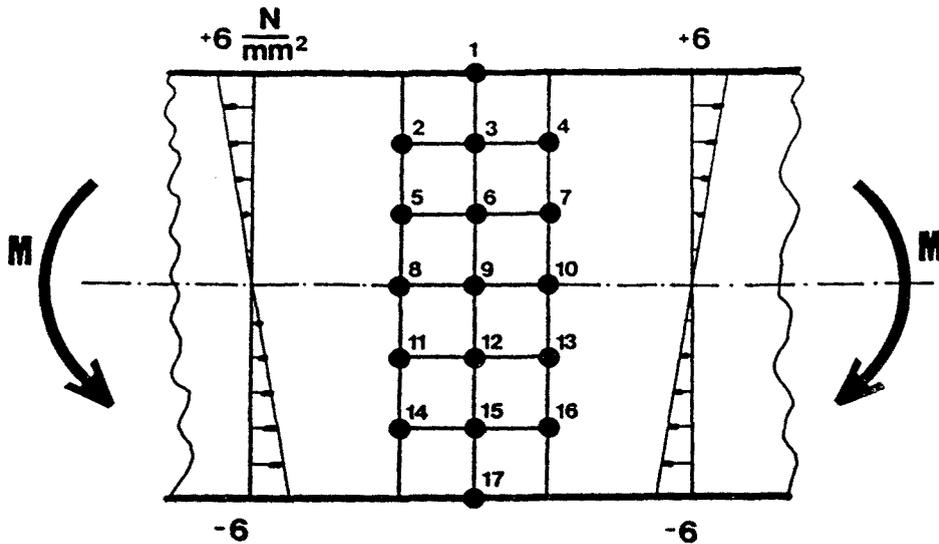
$$+ \frac{R_o - R_4}{\Delta y} \text{cos } 2\theta_o - \frac{R_1 - R_3}{2 \Delta x} \text{sen } 2\theta_o$$

El segundo miembro de las expresiones a,b,c y d no es más que un cierto escalar obtenido numericamente de los valores experimentales fotoelásticos.

Es importante constatar que el borde del dominio no debe coincidir necesariamente con el contorno físico de la pieza. Por tanto puede trabajarse con una zona aislada del modelo limitada por contornos reales y/o pseudocontornos.

Esta característica adquiere gran interés en el estudio de concentración de tensiones, Fotoelasticidad por reflexión, etc...

NODO	θ	$R = (\sigma_p - \sigma_q)$	$S = (\sigma_p - \sigma_q)$
1	0	$6 = (6 - 0)$	6
2	0	4	4
3	0	4	4
4	0	4	4
5	0	4	2
6	0	2	2
7	0	2	0
8	0	0	0
9	0	0	0
10	0	0	0
11	90	$2 = (0 - (-2))$	-2
12	90	2	-2
13	90	2	-2
14	90	4	-4
15	90	4	-4
16	90	4	-4
17	90	6	-6



; Ecuacion de Laplace

$$\begin{aligned} S_4 + S_1 + S_2 + S_6 - 4S_3 &= 0 \\ S_7 + S_3 + S_5 + S_9 - 4S_6 &= 0 \\ S_{10} + S_6 + S_8 + S_{12} - 4S_9 &= 0 \\ S_{13} + S_9 + S_{11} + S_{15} - 4S_{12} &= 0 \\ S_{16} + S_{12} + S_{14} + S_{17} - 4S_{15} &= 0 \end{aligned}$$

; Ecuaciones de equilibrio

$$\begin{aligned} S_1 - S_3 &= 2 \\ S_4 - S_3 &= 0 \\ S_3 - S_2 &= 0 \\ S_7 - S_6 &= 0 \\ S_6 - S_5 &= 0 \\ S_{10} - S_9 &= 0 \\ S_9 - S_8 &= 0 \\ S_{13} - S_{12} &= 0 \\ S_{12} - S_{11} &= 0 \\ S_{16} - S_{15} &= 0 \\ S_{15} - S_{14} &= 0 \\ S_{15} - S_{17} &= 2 \end{aligned}$$

; Puntos auxiliares

$$S_1 = 6$$

$$\begin{aligned} S_1 &= 6.0000000 \\ S_{10} &= 2.5207148e-16 \\ S_{11} &= -2.0000000 \\ S_{12} &= -2.0000000 \\ S_{13} &= -2.0000000 \\ S_{14} &= -4.0000000 \\ S_{15} &= -4.0000000 \\ S_{16} &= -4.0000000 \\ S_{17} &= -6.0000000 \\ S_2 &= 4.0000000 \\ S_3 &= 4.0000000 \\ S_4 &= 4.0000000 \\ S_5 &= 2.0000000 \\ S_6 &= 2.0000000 \\ S_7 &= 2.0000000 \\ S_8 &= 2.5207148e-16 \\ S_9 &= 2.5207148e-16 \end{aligned}$$

Maximum error is 1.7763368e-15

3-43 Aplicación simulada del Mét. Equilibrio-Compatibilidad a un caso de Flexión Pura.

El imprescindible valor S auxiliar, puede obtenerse por :

- Incidencia oblicua en el punto.
- Galga extensométrica usual ó del tipo ($\sigma_x + \sigma_y$).
- Conocimiento de un punto singular $\sigma_p = \sigma_q = 0$.

Y más simplemente, si existe en el dominio un contorno real:

- Lectura directa del retardo absoluto en el archivo RET. IMG. con el razonamiento expuesto en el apart. 3.5.1.

Como ejemplo operativo del Método equilibrio-Compatibilidad se desarrollan dos casos simulados , con discretización muy simples, comprobándose la bondad y estabilidad del sistema.

CASO FLEXION PURA

La distribución lineal de tensiones permite simular el registro fotoelástico sobre una malla cuadrada. (Fig.3-43).

Sobre los cinco puntos interiores se aplica la ecuación de Laplace.

Adicionalmente, se formulan las moléculas representantes de las ecuaciones de equilibrio en los doce puntos de pseudocontorno. En total son 17 ecuaciones con 17 incógnitas S_i .

Como punto auxiliar se elige $S_1 = 6 \text{ N/mm}$ (ó el singular $S_9 = 0$).

La solución numérica del sistema mediante mínimos cuadrados coincide exactamente con los valores S_i teóricos.

CASO FLEXION SIMPLE

Mediante la solución exacta de la Elasticidad a través de la función Airy, se simulan los datos experimentales fotoelásticos. (Fig.3-44) :

$$R = (\sigma_p - \sigma_q) \quad y \quad \theta$$

Se adopta una discretización rectangular con el ratio :

$$r = \Delta x / \Delta y = 0,5$$

La aplicación de la ecuación de Laplace en los tres puntos interiores y las de equilibrio en el pseudocontorno, proporcionan un sistema de 11 ecuaciones con 11 incógnitas

Se resuelve el sistema tomando como puntos auxiliares :

- a) $S4 = 0$
- b) $S8 = 3$
- c) $S4 = 0$ y $S8 = 3$

Con algunas diferencias en el resultado final, a consecuencia de la pobre discretización y alto gradiente.

CONCLUSIONES

El Método Equilibrio-Compatibilidad constituye una excelente herramienta para la obtención del necesario Tercer Dato.

En el apartado 4-3 son utilizados directamente los valores experimentales proporcionando resultados satisfactorios.

No obstante, es conveniente la contrastación del método con registros más extensos . Aparecerá una problemática operativa de interesante resolución.

**4.0 CALIBRACION DEL SISTEMA
Y APLICACIONES**

4.0 CALIBRACION DEL SISTEMA Y APLICACIONES

Como ejemplo operativo de los algoritmos y métodos descritos en el anterior apartado, se hace aplicación de los mismos a :

FLEXION PURA

Tiene como objetivo primordial la calibración de las longitudes de onda reales, obteniéndose :

L1 = 405 nm	L3 = 530 nm
L2 = 470 nm	L4 = 640 nm

Se comprueba el correcto funcionamiento del programa RETARDO.FOR.

FOTOELASTICIDAD POR REFLEXION

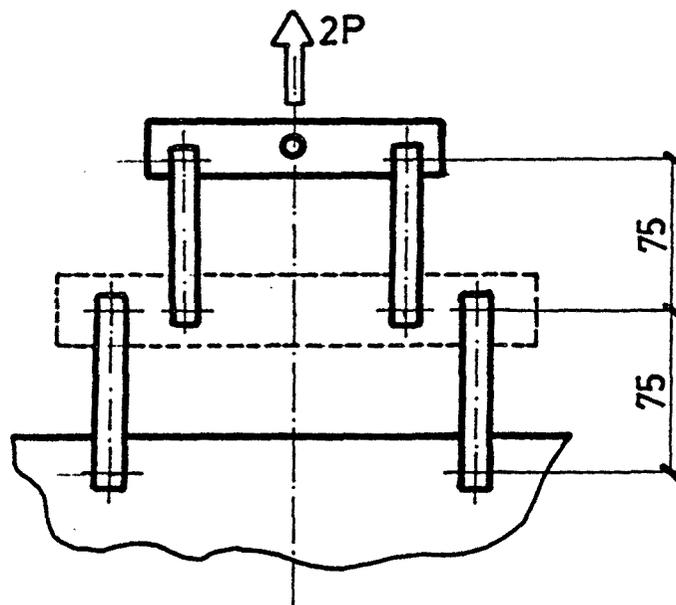
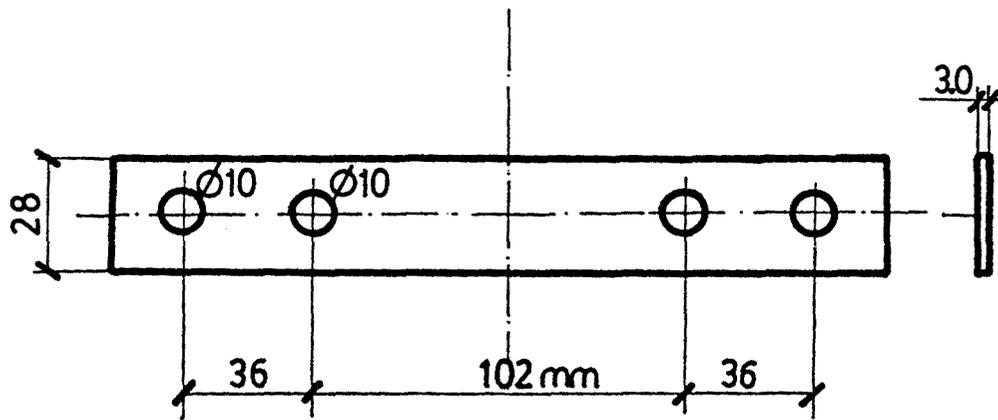
El sistema de adquisición de imagen permite trabajar cómodamente con esta técnica. Se desarrolla un método específico de obtención del contorno.

DISCO SOMETIDO A COMPRESION DIAMETRAL

En este caso se sigue la secuencia definitiva de trabajo :

- 1- Obtención del contorno.
- 2- Angulo de isóclina corregido θ^* . Programa ISOCLIN.FOR.
- 3- Pseudoisostáticas y líneas de máxima cizalladura. Programa ISOSTAT.FOR y CIZAMAX.FOR.
- 4- Retardo absoluto δ , hasta orden $N \leq 4$ corrigiendo el amortiguamiento en la extinción. Programa RETARDO.FOR.
- 5- Método Equilibrio-Compatibilidad. Aplicación sobre una zona significativa del modelo.

Finalmente se analiza la distribución de tensiones sobre el diámetro horizontal : σ_q y σ Von Misses.



4-1 Montaje experimental Flexión Pura.

4.1 CASO FLEXION PURA

Como ejemplo operativo para la obtención automatizada del retardo absoluto δ , se resuelve un caso de Flexión Pura sobre el modelo fotoelástico esquematizado en la Fig.4-1.

En la zona central, existe un momento flector constante :

$$M = \text{Cte.} = P \times 36 \text{ mm.}$$

y un esfuerzo cortante nulo : $T = 0$

Así, sobre una sección recta normal a la directriz aparecen exclusivamente tensiones normales :

$$\sigma(y) = \frac{M y}{I \text{ e} h^3} \begin{cases} 0 \leq y \leq h/2 & \sigma_p = \sigma(y) & \sigma_q = 0 \\ 0 \geq y \geq -h/2 & \sigma_p = 0 & \sigma_q = \sigma(y) \end{cases}$$

siguiendo la conocida distribución lineal de Navier.

El retardo absoluto obedece a idéntico crecimiento lineal,

$$\delta = (\sigma_p - \sigma_q) C_\sigma e = \frac{M y}{I \text{ e} h^3} C_\sigma e$$

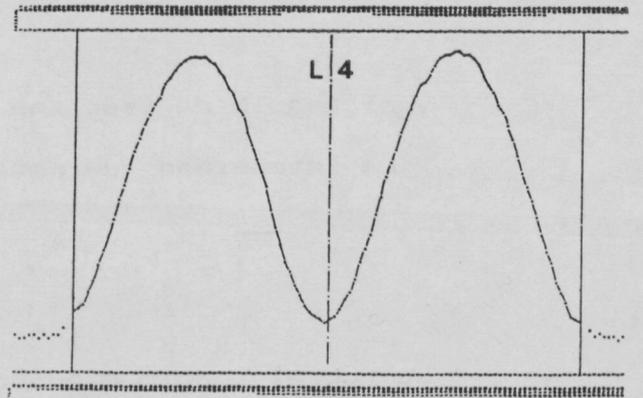
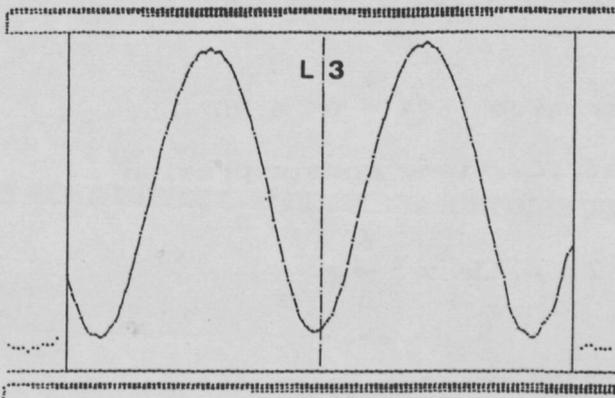
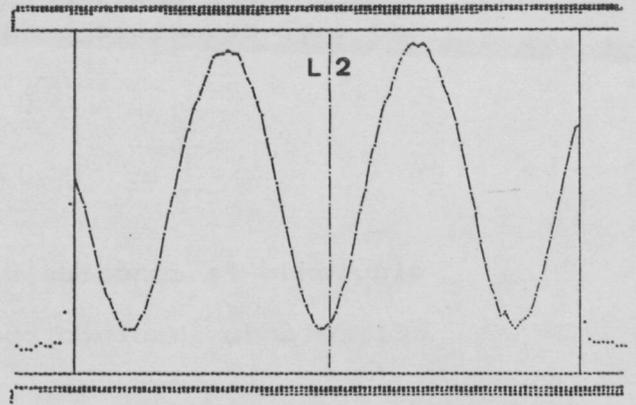
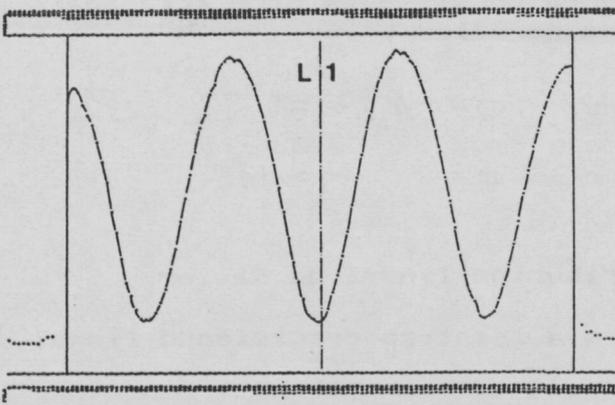
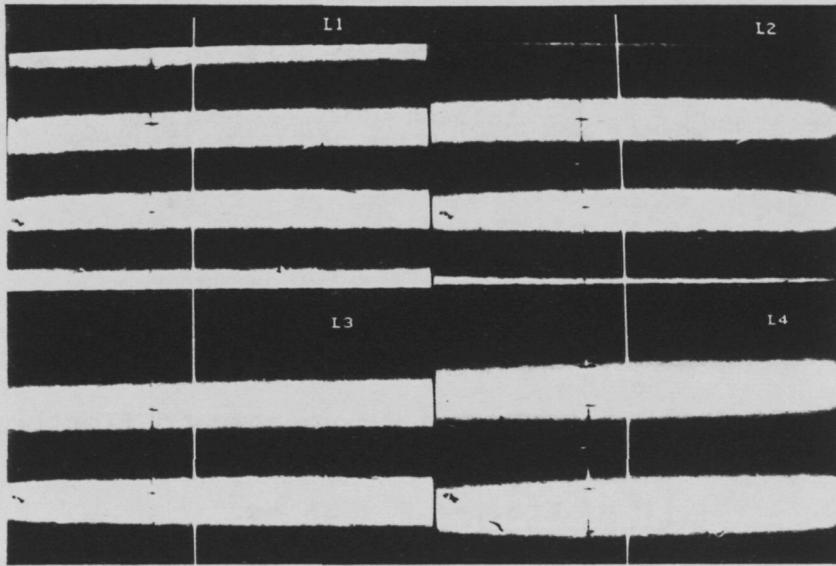
y el ángulo de isóclina corregido : $\theta^* = 0^\circ$ ó 90° .

La intensidad luminosa teórica tiene como expresión :

$$I = I_0 \text{ sen}^2 \frac{\delta}{L_1} \pi \text{ sen}^2 2\beta = \text{Cte.} \text{ sen}^2 \frac{\delta}{L_1} \pi$$

ya que el ángulo β es constante en toda la sección.

A efectos de obtener la máxima luminosidad, el conjunto PIA se orienta a $\beta = 45^\circ$ del eje horizontal ó vertical indiferentemente.



4-2 Distribución de intensidad luminosa en un corte vertical según L_i .

En la Fig.4-2 se representan los perfiles de intensidad luminosa real para las correspondientes cuatro longitudes de onda λ_i .

Nótese el movimiento de las franjas de extinción según λ_i y la intensidad de fondo IF.

Por razones experimentales no fue posible conseguir una flexión pura perfecta. El orden $N = 0$ aparece ligeramente desplazado de la línea central.

A continuación, se aplica el programa RETARDO.FOR descrito en el Apart. 3.4 :

Mediante la comparación adecuada de los registros de isocromáticas :

L1.IMG	405 nm
L2.IMG	470 nm
L3.IMG	530 nm
L4.IMG	640 nm

Se obtiene el retardo absoluto en todos los puntos interiores del modelo, discriminados por el archivo del contorno CONT.IMG.

Sobre el resultado final RET.IMG podemos realizar un corte vertical sobre la misma línea y comprobar el buen funcionamiento del programa (Fig.4-3).

En efecto, el crecimiento lineal de δ es aceptablemente seguido y la asimetría experimental correctamente detectada.

Conocida la constante fotoelástica $F\sigma$, la obtención de las tensiones es inmediata.

Cabe comentar que la determinación de la longitud de onda preferente ha sido realizada sobre otro montaje equivalente en Flexión Pura. Así, se incorporan de forma global las correcciones debidas a :

- Emisión espectral de la fluorescencia.
- Transmisión real de los filtros monocromáticos.
- Respuesta cámara CCD.
- Variación de $C\sigma$ según λ_i .

Evidentemente, carece de rigor físico realizar en estudio de errores, ya que incluso la cte. fotoelástica $F\sigma$ del modelo es obtenida usualmente de un ensayo a Flexión Pura.

4.2 FOTOELASTICIDAD POR REFLEXION

Las características de la adquisición de imagen mediante cámara CCD hacen posible la utilización de la misma en la técnica de recubrimientos fotoelásticos. (Ver A-II)

Es necesario adaptar el polariscopio por reflexión para alojar el conjunto formado por :

- a) Porta-filtros monocromáticos
- b) Optica Zoom
- c) Cámara CCD

La Fig.4-4 muestra la disposición experimental utilizada.

La fuente de luz constituye un factor primordial, ya que :

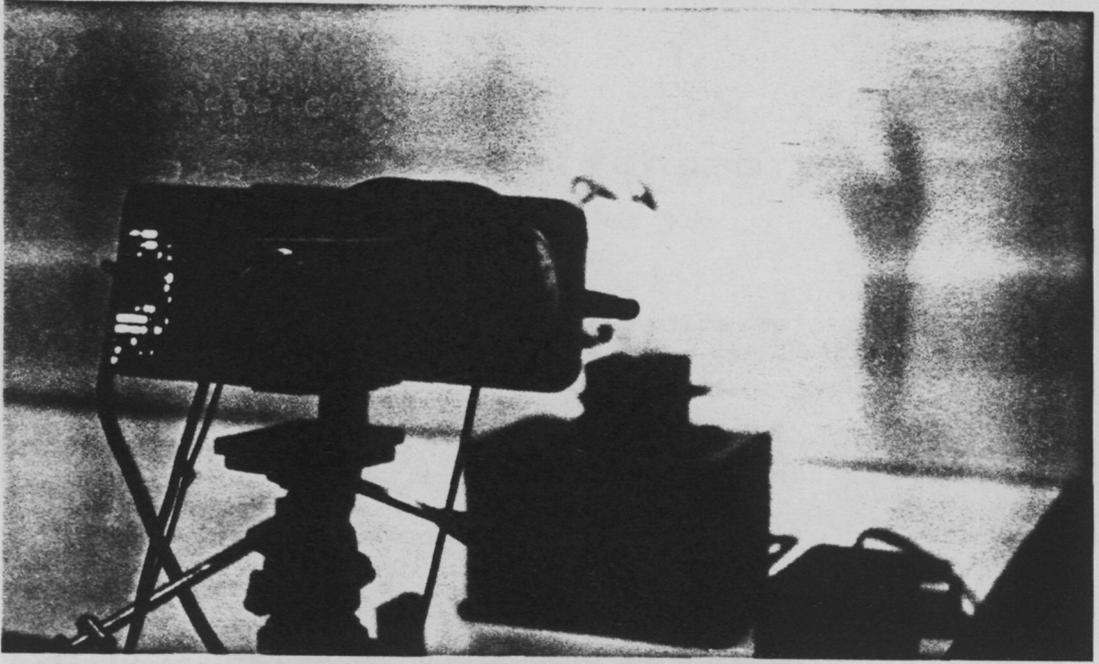
- Debe iluminar uniformemente el recubrimiento con incidencia normal al mismo.
- En un ensayo con entorno industrial la luz ambiental obliga a una intensa iluminación incidente del polariscopio.

No obstante, estos problemas quedan parcialmente reducidos:

- La óptica Zoom permite alejar convenientemente el polariscopio, de forma que las lentes de Fresnel proporcionan en la práctica :
 - a) Incidencia normal
 - b) Iluminación zonal uniforme
- Dicho alejamiento disminuye el nivel de intensidad. Sin embargo, la alta sensibilidad de la cámara CCD permite trabajar con bajos niveles de luminosidad (hasta 3 lux)

Mayor complejidad presenta la elección de un foco de luz, con suficiente emisión espectral para poder utilizar los algoritmos desarrollados en los apartados 3.2 y 3.4. No son válidas las lámparas de incandescencia por carecer de emisión en bajas longitudes de onda.

La puesta en marcha del dispositivo experimental y contrastación de resultados, desborda el contenido de la presente Tesis y constituye una vía abierta de trabajo.



4-4 Fotoelasticidad por Reflexión.

OBTENCION ESPECIAL DEL CONTORNO

La existencia de un fondo constante y no reflejante en la escena, permite formular un algoritmo original de obtención del contorno.

El cuadro resumen del Anexo II (pag A2-7) nos muestra para todas las configuraciones posibles del Polariscopio, las expresiones de :

- Intensidad de salida.
- Intensidad de fondo. En nuestro caso cte.

Puede observarse que la adición simple de imagenes con :

$$\left. \begin{array}{l} P \perp A \longrightarrow I_1 \\ P \parallel A \longrightarrow I_2 \end{array} \right\} I_{total} = I_1 \oplus I_2$$

permite discriminar los pixels pertenecientes al recubrimiento y los exteriores al mismo, siendo el fondo de bajo nivel.

$$\begin{array}{l} \text{Pixel interior} \longrightarrow I_{total} = I_0 \\ \text{Pixel exterior} \longrightarrow I_{total} = \text{Fondo cte.} \end{array}$$

En efecto, para el caso de no utilizar láminas L/4 :

$$\left. \begin{array}{l} P \perp A \quad I_1 = I_0 \text{ sen}^2 2\beta \text{ sen}^2 N\pi \\ P \parallel A \quad I_2 = I_0 (1 - \text{sen}^2 2\beta \text{ sen}^2 N\pi) \end{array} \right\} I_{total} = I_0$$

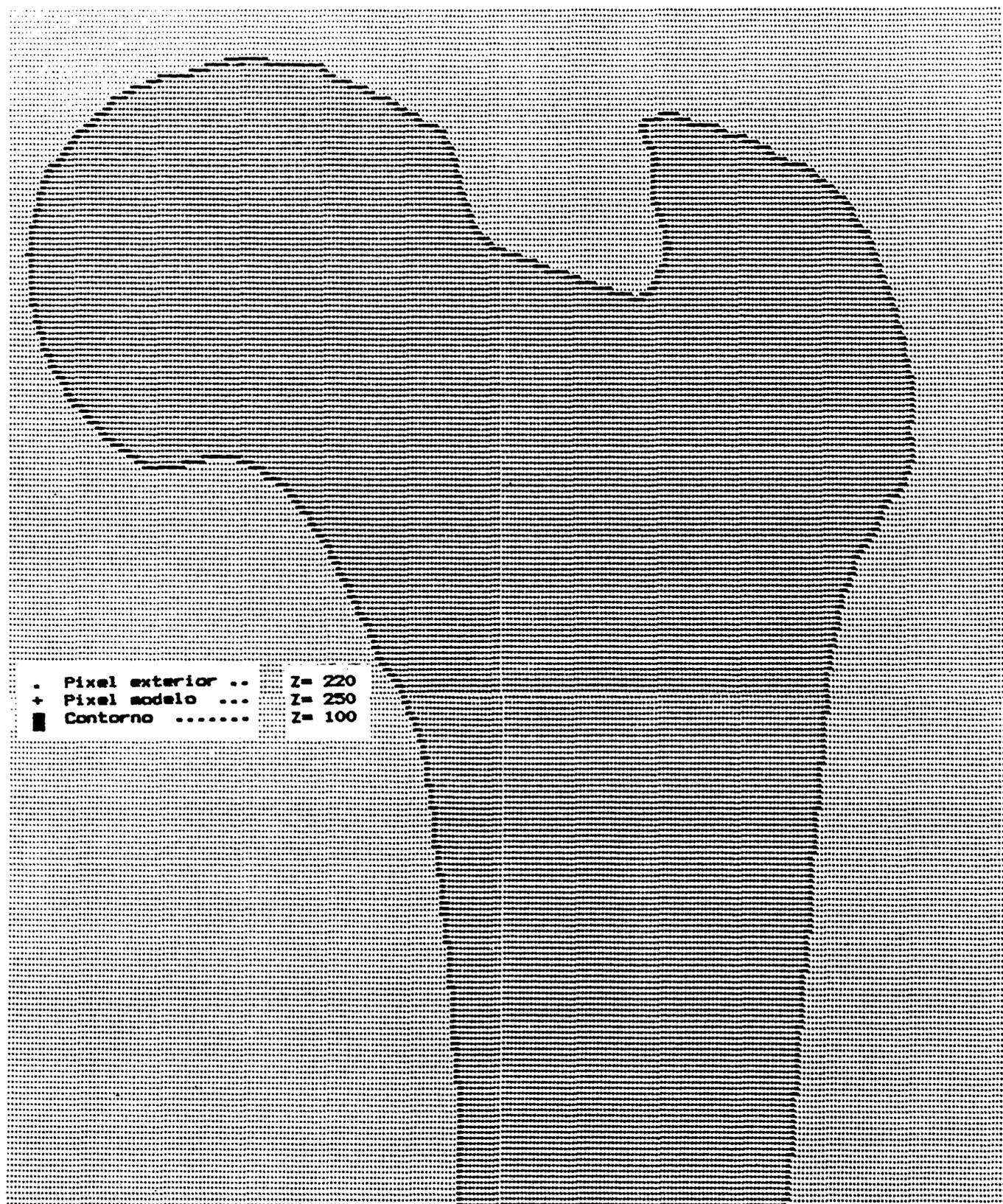
y con láminas L/4 :

$$\left. \begin{array}{l} P \perp A \quad I_1 = I_0 \text{ sen}^2 N\pi \\ P \parallel A \quad I_2 = I_0 (1 - \text{sen}^2 N\pi) \end{array} \right\} I_{total} = I_0$$

Así, ambas configuraciones conducen a idéntico resultado.

Finalmente, el Binarizado Selectivo descrito en el Apartado 3.1 permite obtener el contorno del recubrimiento.

La gran ventaja del método reside en ser insensible a las extinciones de puntos singulares, isotrópicos o zonas cuasi sin tensión donde :



. Pixel exterior .. Z= 220
+ Pixel modelo ... Z= 250
■ Contorno Z= 100

4-5 Obtención del contorno sobre recubrimientos fotoelásticos.

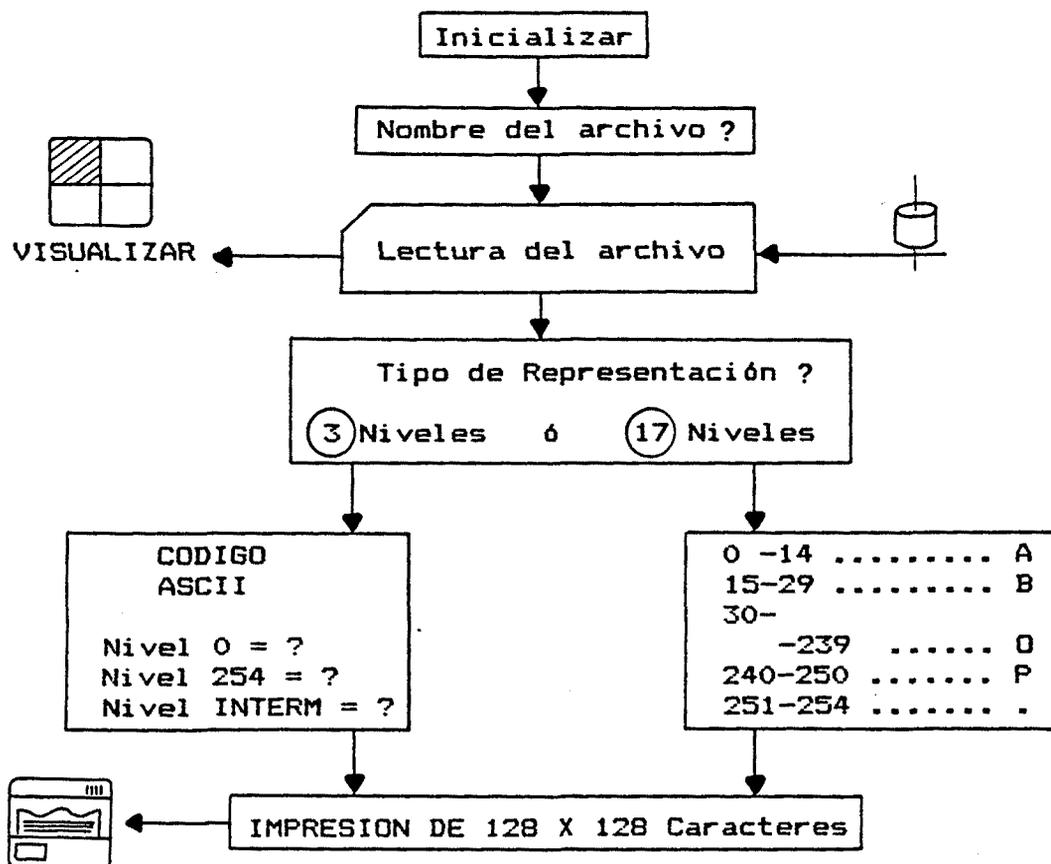
$$(\sigma_p - \sigma_q) \div 0 \longrightarrow N \div 0 \quad \begin{cases} P \perp A & I_1 \div 0 \\ P \parallel A & I_2 \div I_0 \end{cases}$$

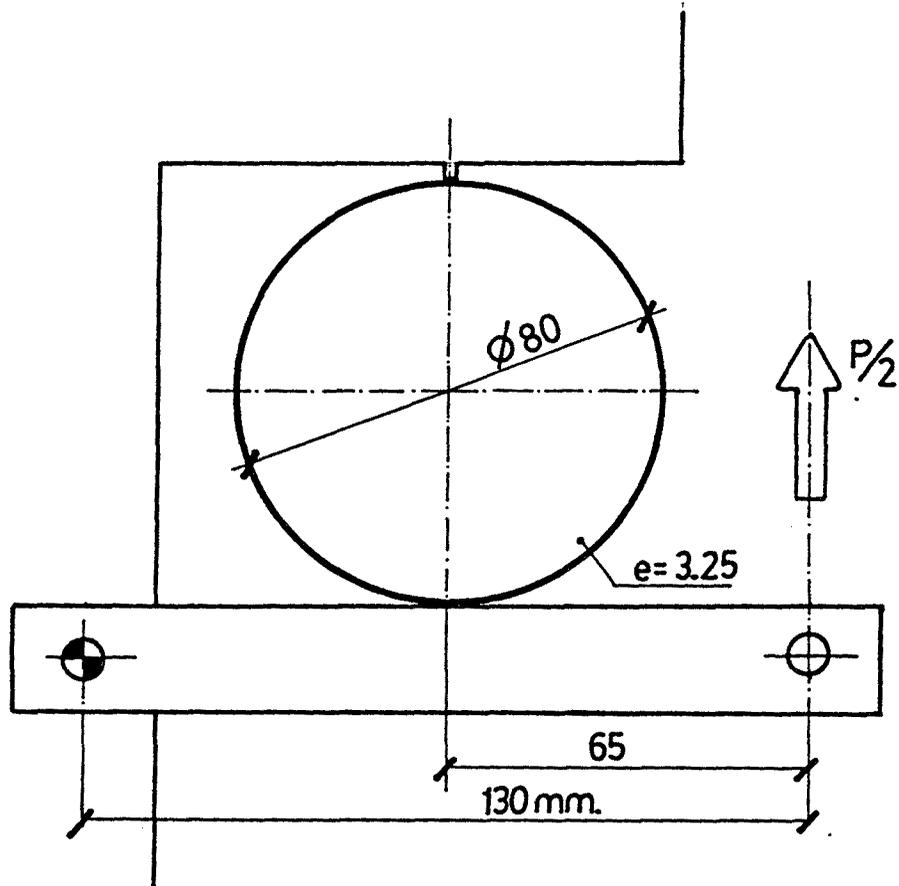
También existe la solución alternativa de obtener el contorno con la pieza sin cargar y P||A. No obstante, los movimientos posteriores de puesta en carga hacen desaconsejable esta variante.

En la Fig.4-5 puede observarse un modelo fotoelástico 2D con una cola reflejante posterior. Es un estudio biomecánico simulando el comportamiento tensional de una pieza ósea reducida a un plano.

El contorno resultante puede visualizarse en la impresora del ordenador, con los defectos inherentes a su baja resolución, mediante el programa IMAGEIMP.FOR.

El algoritmo de operación de este programa auxiliar es, en forma simplificada :





4-6 Montaje experimental.

4.3 DISCO COMPRIMIDO DIAMETRALMENTE

Constituye un excelente caso para contrastar los algoritmos operativos descritos en el Apartado 3.

Se dispone de la solución exacta y además :

- El borde es línea singular, $N = 0$, por tanto la obtención del contorno es dificultosa (Ver 3-1).
- Aparece un completo registro de franjas isóclinas, desde 0° a 179° , evolucionando sobre todo el modelo.
- Simultáneamente coexiste una densa red de isocromáticas, con zonas de alta concentración de las mismas.

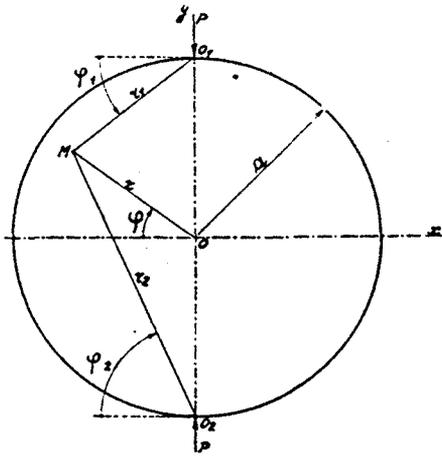
ESTUDIO DE LA SOLUCION TEORICA

Es un problema clásico de la Elasticidad Plana. La solución, debida a H. Hertz en 1883, parte del simple ensayo de una Función de Airy compuesta de tres terminos. Dos constituyen la solución conocida de una carga puntual sobre un plano semi-infinito y la restante introduce las correcciones del contorno circular. Así, con la notación de la Fig.4-7 :

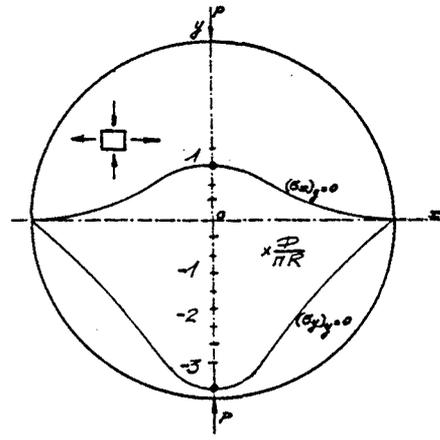
$$\begin{aligned} \Psi_{\text{total}} &= \Psi_1 + \Psi_2 + \Psi \\ &= -\frac{P}{\pi} r_1 \theta_1 \cos \theta_1 + -\frac{P}{\pi} r_2 \theta_2 \cos \theta_2 + \frac{P r^2}{2\pi R} \end{aligned}$$

Por definición de Función Tensión, cumple las ecuaciones de equilibrio. Las tensiones, en sus coordenadas locales respectivas, son :

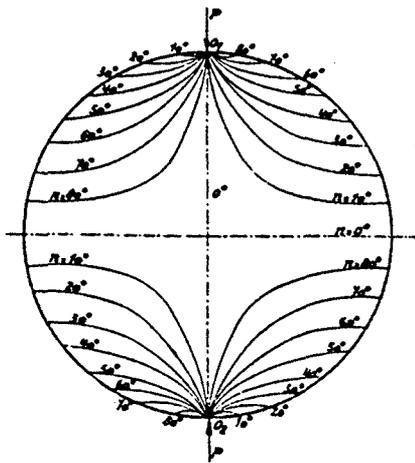
$$\begin{array}{lll} \sigma_{r_1} = \frac{-2P}{\pi r_1} \text{sen } \theta_1 & \sigma_{r_2} = \frac{-2P}{\pi r_2} \text{sen } \theta_2 & \sigma_r = \frac{P}{\pi R} \\ \sigma_{\theta_1} = 0 & \sigma_{\theta_2} = 0 & \sigma_\theta = \frac{P}{\pi R} \\ \tau_{r_1 \theta_1} = 0 & \tau_{r_2 \theta_2} = 0 & \tau_{r \theta} = 0 \end{array}$$



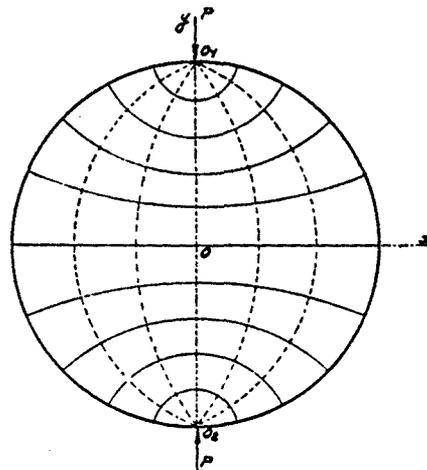
a) Coordenadas locales



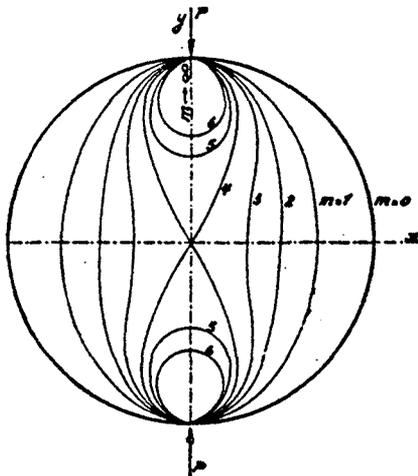
b) Distribución de tensiones diametrales



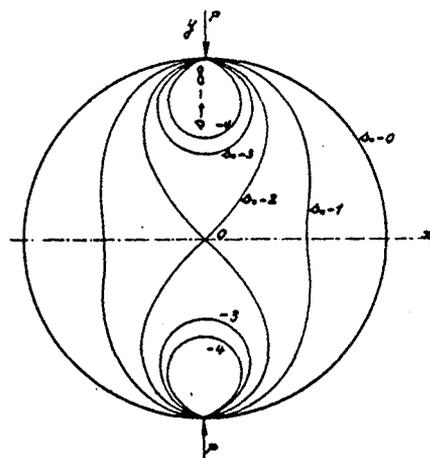
c) Isóclinas



d) Isostáticas



e) Isocromáticas



f) Isopacas

4-7 Solución teórica disco sometido a compresión diametral.

Evidentemente, se cumple la ecuación de compatibilidad :

$$\Delta \Delta \Psi = 0$$

En todo el modelo Ψ crea una tracción hidrostática σ , ya que :

$$\tau_{r\theta} = 0 \quad \sigma_r = \sigma_\theta = \frac{P}{\pi R} = \sigma$$

Sobre un punto M perteneciente al contorno pueden sumarse directamente las tensiones producidas por Ψ_1 y Ψ_2 al ser perpendiculares los rayos polares r_1 y r_2 :

$$\tau = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \sigma_{r_1} = \frac{-2P}{\pi r_1} \operatorname{sen} \theta_1 = \frac{-P}{\pi R} \\ \sigma_{r_2} = \frac{-2P}{\pi r_2} \operatorname{sen} \theta_2 = \frac{-P}{\pi R} \end{array} \right\} = -\sigma$$

provocando una tensión hidrostática $-\sigma$ y en consecuencia una tensión nula en el borde. Es claro el cumplimiento de las ecuaciones de contorno.

Homogeneizando las coordenadas locales a las usuales de referencia x, y :

$$\sigma_x = \frac{P}{\pi R} - \frac{4PRx^2}{\pi B} (x^4 + (R^2 - y^2)(R^2 + 3y^2 + 2x^2)) \quad \tau_{xy} = \frac{-8PRxy}{\pi B} (x^4 - (R^2 - y^2)^2)$$

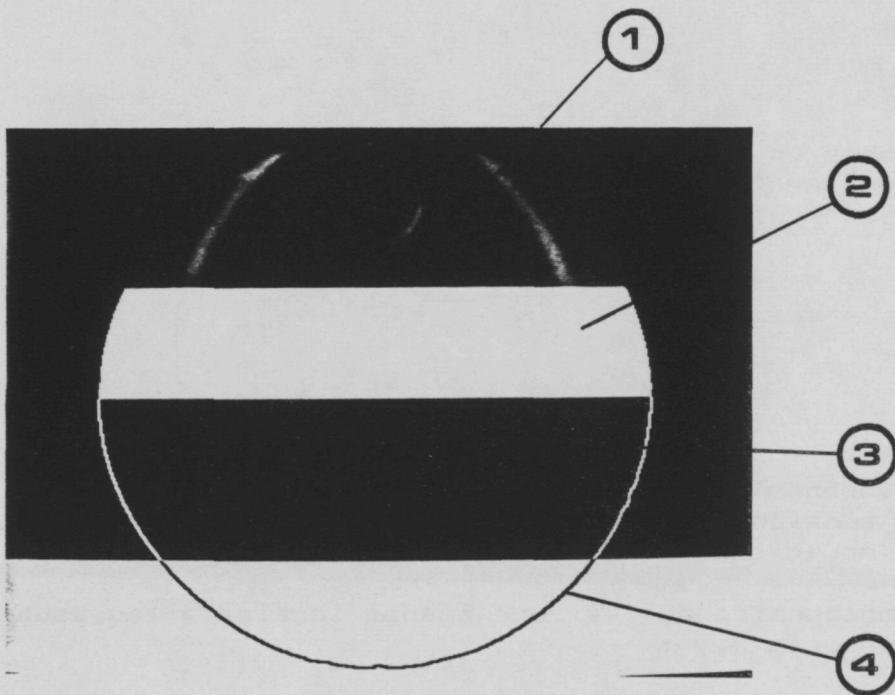
$$\sigma_y = \frac{P}{\pi R} - \frac{4PR}{\pi B} (x^4 (R^2 + 3y^2) + (R^2 - y^2)(R^2 - y^2 + 2x^2))$$

$$\text{donde : } B = (x^2 + (R^2 - y^2))^2 (x^2 + (R + y)^2)^2$$

De estas expresiones se obtiene la distribución de tensiones sobre el diámetro horizontal (Fig.4-7b).

Y aplicando sus definiciones ; las isóclinas (Fig.4-7c), isostáticas (Fig.4-7d), isocromáticas (Fig.4-7e) e isopacas (Fig.4-f), con la notación :

$$\left. \begin{array}{l} \text{Isocromáticas} \quad (\sigma_p - \sigma_q) = NF \\ \text{Isopacas} \quad (\sigma_x + \sigma_y) = SF \end{array} \right\} F = \frac{P}{\pi R}$$



- ① — Superposición de registros.
- ② — Binarizado selectivo
- ③ — Operador laplaciano.
- ④ — Asignación de niveles.

[exterior Z = 220 contorno Z = 0 a 200 interior Z = 250
---	---

4-8 Obtención del contorno. Archivo CONT.IMG

MONTAJE EXPERIMENTAL

Inicialmente se empezó a trabajar según el dispositivo esquematizado en la Fig.4-6. Después se ha creído más interesante analizar el estado tensional obtenido mediante la técnica de congelación de la birrefringencia. El modelo, puesto en carga por el Prof. J.M. Auli, permite una cómoda manipulación y añade la dificultad de una baja transparencia.

Se ha incorporado a la escena un punto luminoso testigo. En la Fig.2-2Da puede observarse que la respuesta del sensor CCD no depende del aspecto de la imagen (Z_{med}), en el supuesto que este presente un nivel elevado ($Z_{MAX} \approx 250$).

Valiendonos de dicho recurso hemos adquirido las imágenes sin requerir excesiva precaución en el control del iris y ganancia del preamplificador.

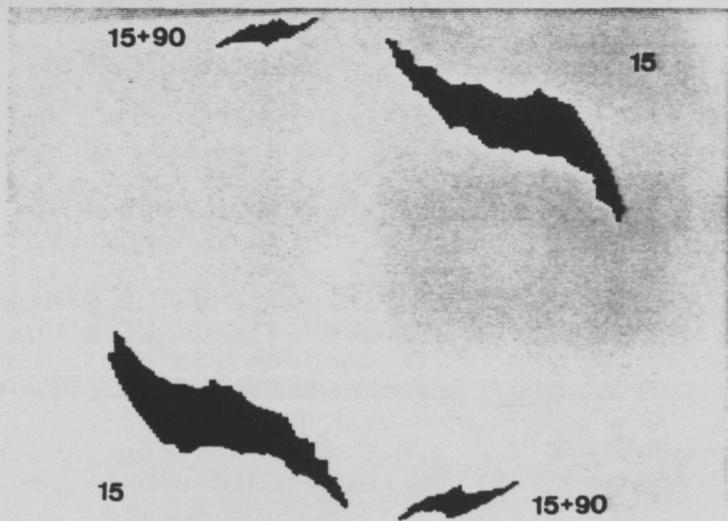
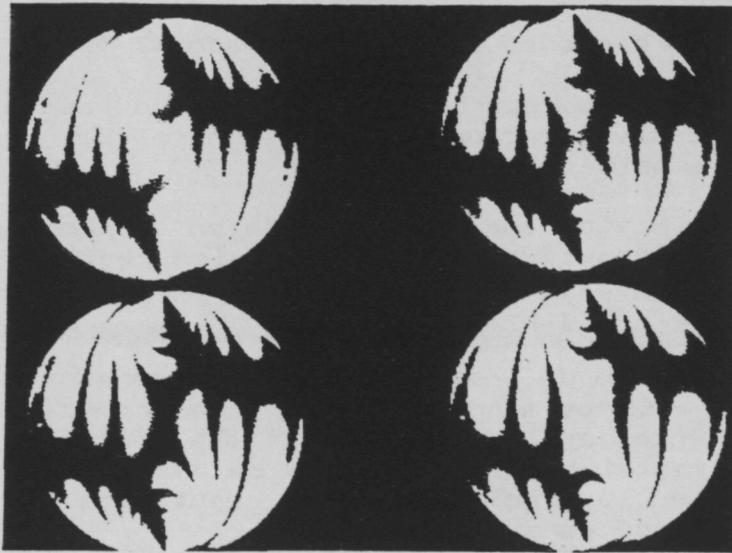
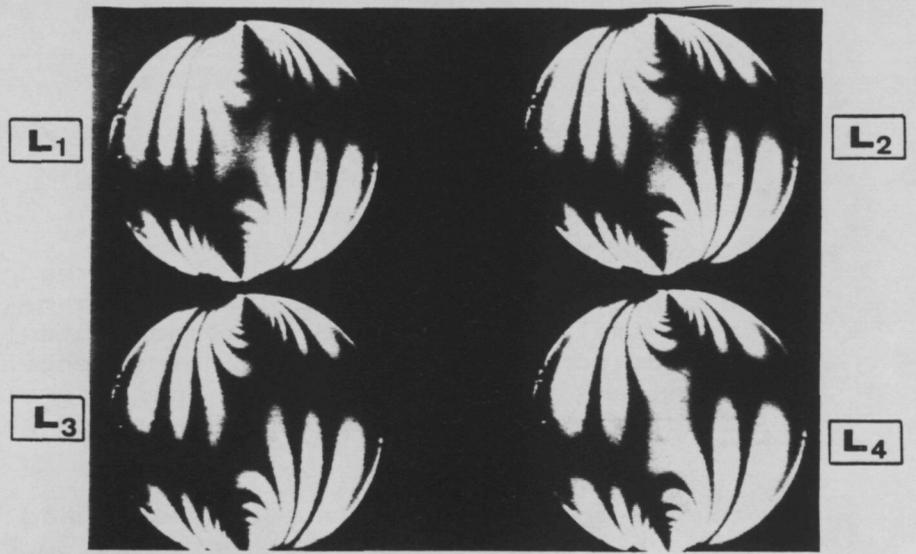
El estudio del Histograma, incorporado en el programa RETARDO.FOR, ya homogeniza automáticamente los registros. Además, con niveles bajos la curva de transferencia es sensiblemente lineal. (Fig.2-19).

El giro sistemático de los discos polarizadores y la sustitución de los filtros monocromáticos, ha provocado unos pequeños movimientos en la imagen. La falta de rigidez del montaje experimental ha sido la causa de este efecto, el cual repercute en la precisión de los resultados en zonas de alta variación de densidad. Evidentemente, el diseño de BFA eliminará estos inconvenientes.

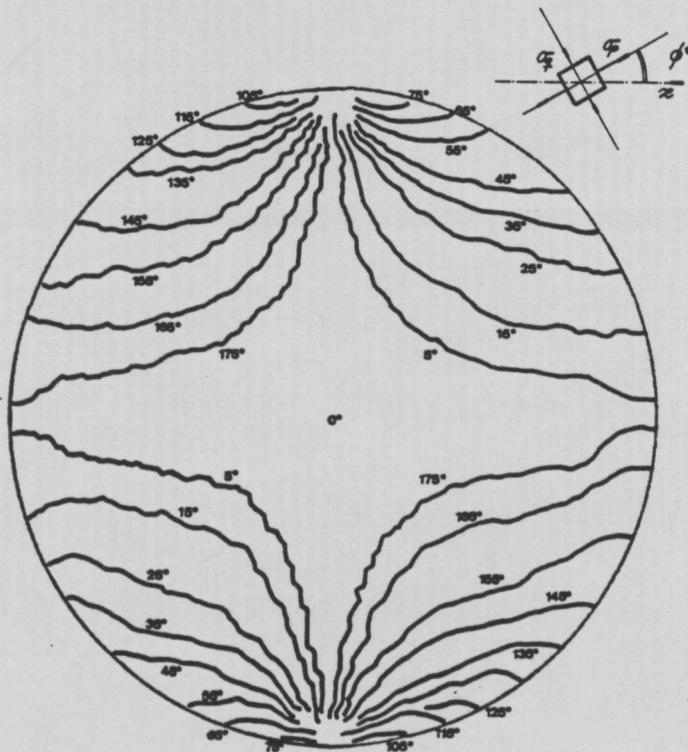
EXTRACCION DEL CONTORNO

Se sigue el proceso descrito en el apartado 3-1, denominado Binarizado Selectivo y compuesto de cuatro etapas :

- ETAPA 1 Toma simultanea de imágenes con diferentes longitudes de onda λ_i y rotación del conjunto PJA, atenuándose las extinciones provocadas por las isocromáticas e isóclinas respectivamente.
- ETAPA 2 Binarizado del registro resultante con una cierta intensidad umbral T_0 .
- ETAPA 3 Aplicación del operador gradiente Laplaciano.
- ETAPA 4 Asignación de niveles clave.



4-9 Aplicación del operador lógico Y.
Obtención del ángulo de isóclina corregido θ^* .



4-10a Resultado del programa ISOCLIN grabado en el registro ISO.IMG.

En la Fig.4-8 se encuentra visualizada la secuencia operativa. El resultado se graba en el archivo maestro CONT.IMG.

ANGULO DE ISOCLINA

Para cada longitud de onda λ_i se adquieren, con incrementos angulares de $\Delta\theta = 15^\circ$, las imagenes $I - \theta_j$ mediante un programa auxiliar.

Posteriormente, se sigue el método original propuesto en el Apartado 3-2.

Para la posición $\theta = 15^\circ$, la Fig.4-9 muestra la aplicación del operador lógico Y sobre los registros binarizados y la asignación del ángulo corregido $\theta^* = 15^\circ + 90^\circ$.

El programa ISOCLIN procesa los seis archivos :

IC - 0°	IC - 45°
IC - 15°	IC - 60°
IC - 30°	IC - 75°

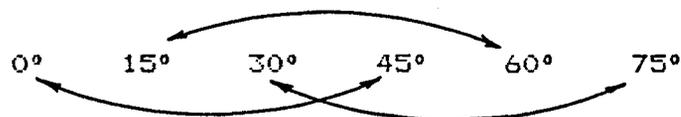
mediante la adición de valores en variable compleja de ángulo duplo e interpolando en pixels exentos de información.

Después de un suavizado , con reconocimiento inteligente del contorno , el resultado final ISO.IMG puede observarse en la Fig.4-10a y una salida por impresora del mismo en la Fig.4-10b.

Mediante los programas ISOSTAT y CIZAMAX se consigue el trazado experimental de pseudoisostaticas y líneas de máxima cizalladura (Fig.4-11).

RETARDO ABSOLUTO

La modulación provocada por el ángulo de isoclina θ es eliminada por el método de la exposición múltiple :

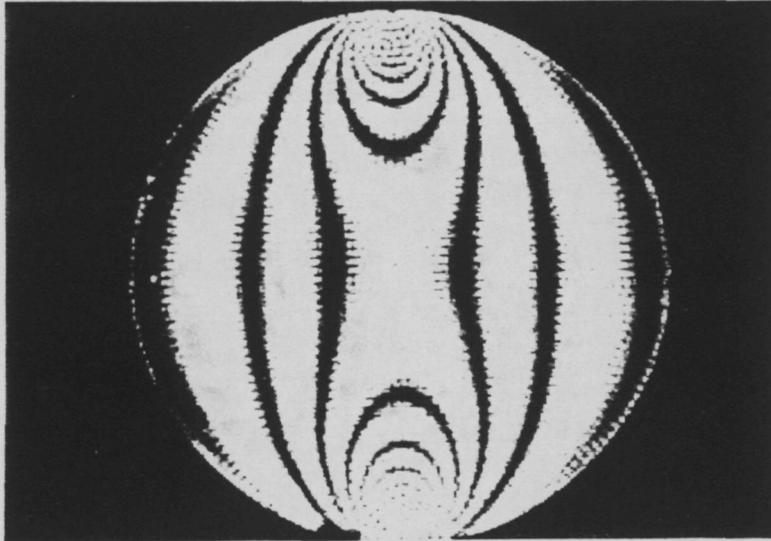


con resultados satisfactorios. (Fig.4-12).

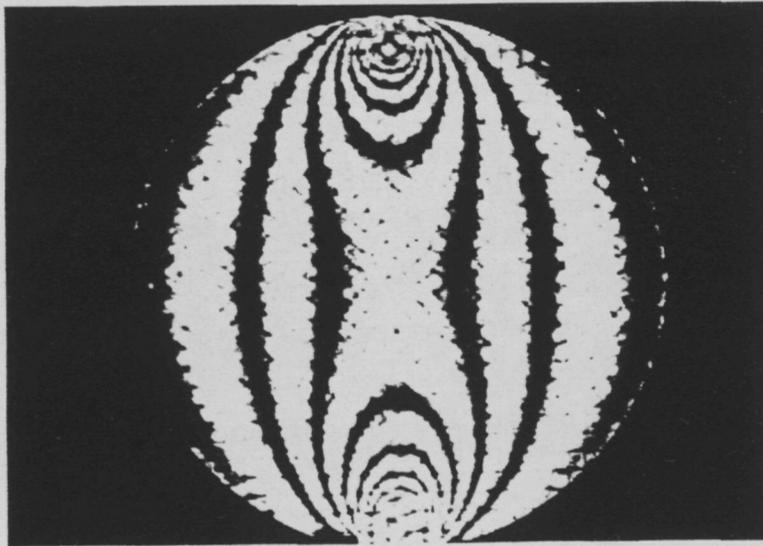
Sin embargo, el excesivo ancho de banda de los filtros monocromáticos WRATTEN provoca un amortiguamiento en las extinciones. (Fig.4-13).

Puede corregirse parcialmente este efecto adoptando un modelo matemático de comportamiento, del tipo :

$$Z_{teorica} = 250 \left(1 - \cos^2 \frac{\delta}{\lambda_i} \pi e^{-\mu\delta} \right)$$



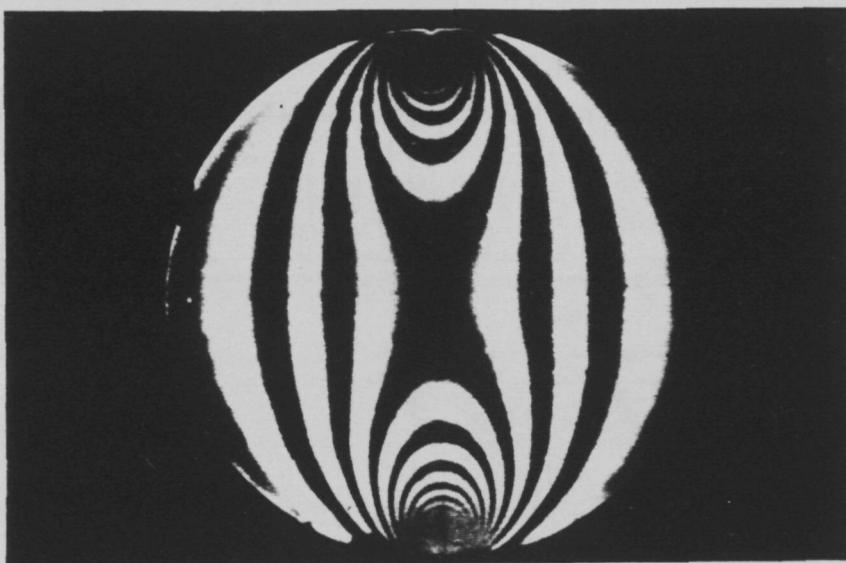
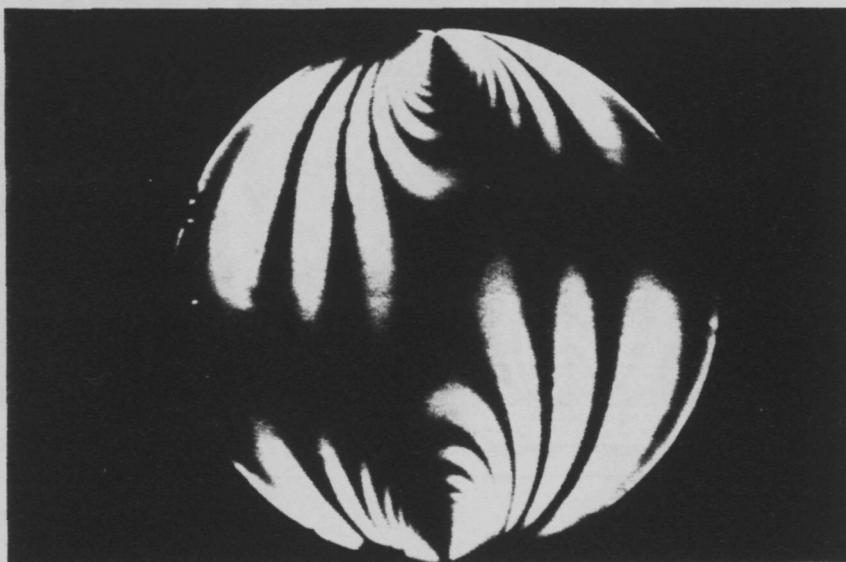
Pseudoisostaticas.



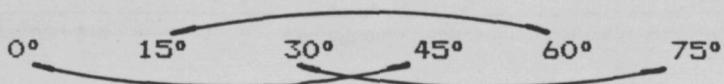
Lineas de máxima cizalladura.

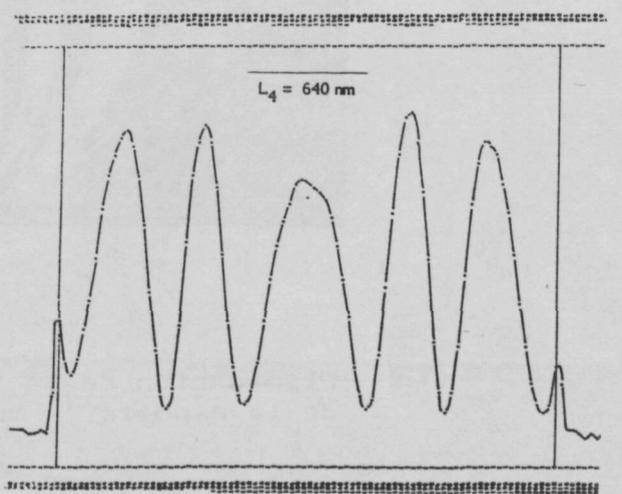
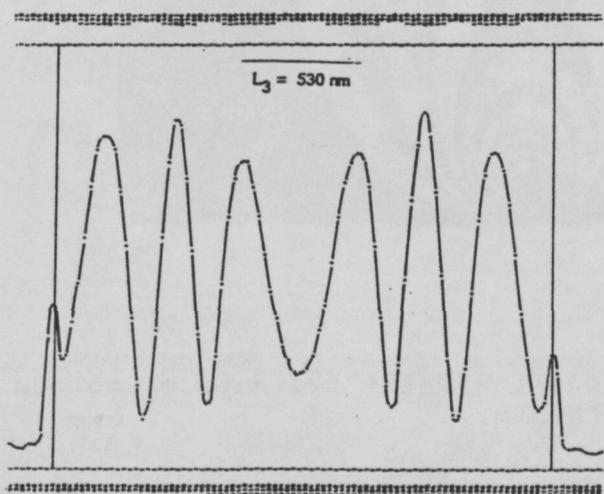
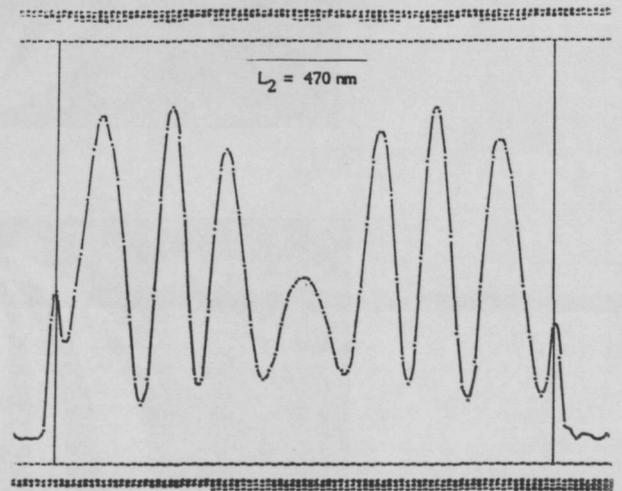
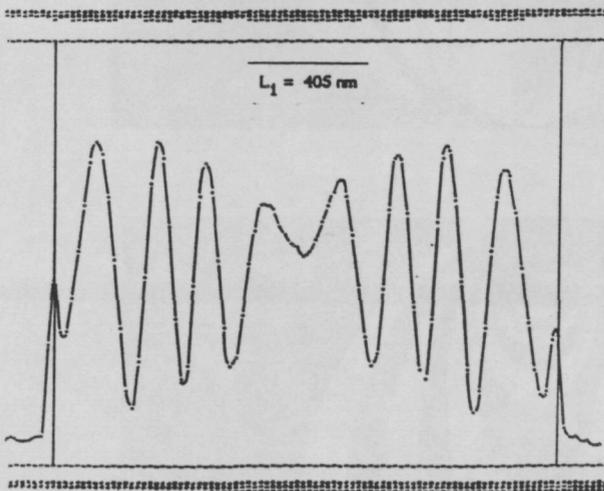
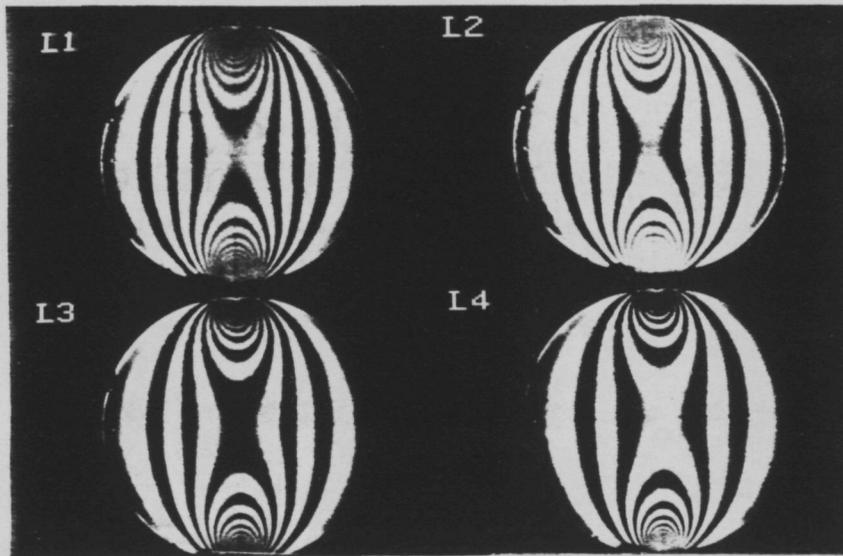
4-11 Aplicación de los programas :

ISOSTAT	Opción :	Malla fina.
CIZAMAX	Opción :	Malla normal.



4-12 Eliminación de la isóclina $\theta=15^\circ$ mediante el método de la exposición múltiple.





4-13 Eliminación de la modulación de isóclinas para cada L_i . Distribución diametral de intensidades.

donde las constantes μ para cada Li, han sido obtenidas experimentalmente de un ensayo a flexión pura con alta densidad de isocromáticas. (Fig.4-14).

Esta sofisticación es incorporada al programa RETARDO, que mediante la comparación de niveles para cada Li, descrita en el Apart.3-4, calcula el retardo absoluto δ .

Limitando el análisis a una orden de isocromática $N \leq 4$, el resultado RET.IMG es visualizado en el monitor. Puede obtenerse un perfil de la distribución de δ sobre el diámetro horizontal (Fig.4-15), con una baja dispersión respecto a la teórica.

METODO EQUILIBRIO-COMPATIBILIDAD

Sobre una zona significativa del modelo, (Fig.4-16), se aplica el método desarrollado en el Apart.3-5.

Es adoptada una simple discretización en 11 puntos (Fig.4-17) :

(1), (2), (3)	Puntos interiores
(4).....,(11)	Puntos pseudocontorno

provocando la aplicación de las siguientes ecuaciones en diferencias finitas :

3	Ecuaciones de Laplace
8	Ecuaciones de Equilibrio.

La necesidad del punto auxiliar, es solventada por el conocimiento del estado tensional completo para el punto de contorno (4), así :

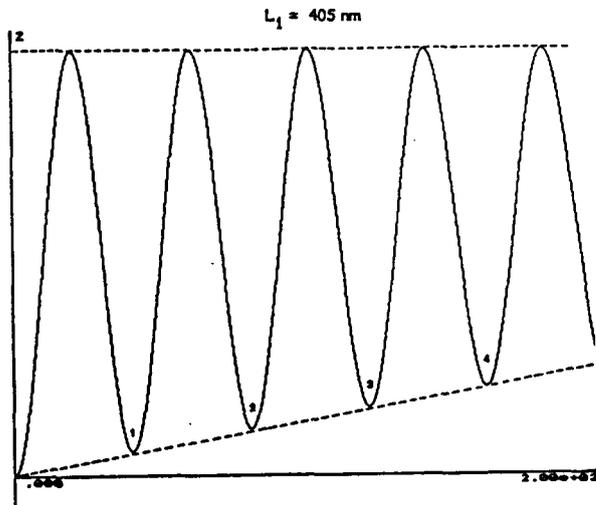
$$\text{Punto (4)} \left\{ \begin{array}{l} (\sigma_p - \sigma_q) = \delta / C_\sigma e = 0 \\ \sigma_p = 0 \end{array} \right\} S(4) = \sigma_p + \sigma_q = 0 + 0 = 0$$

O también, mediante incidencia oblicua, galga extensométrica, etc.. con cualquier otro punto de la discretización. (Ver 3-5).

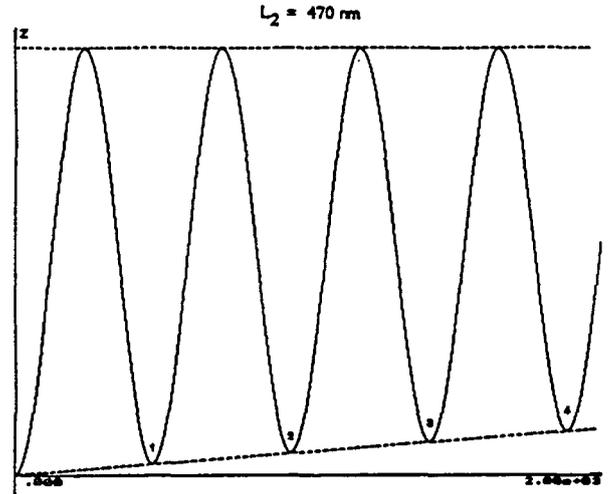
En la Fig.4-18 se encuentran tabulados los resultados :

$$S(i) = (\sigma_p + \sigma_q) \xrightarrow[\phi^*]{(\sigma_p - \sigma_q)} \left\{ \begin{array}{l} \sigma_p, \sigma_q \\ \sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy} \\ \sigma_{\text{equiv.}}, \text{etc...} \end{array} \right.$$

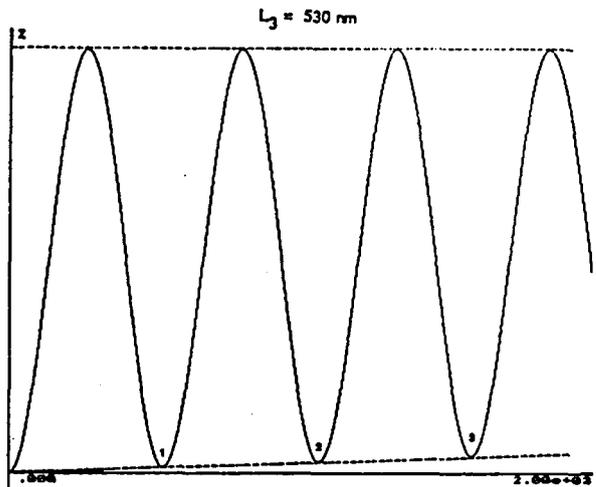
$$Z \text{ teorica} = 250 \left(1 - \cos^2 \frac{\delta}{L_1} \pi e^{-\mu \delta} \right)$$



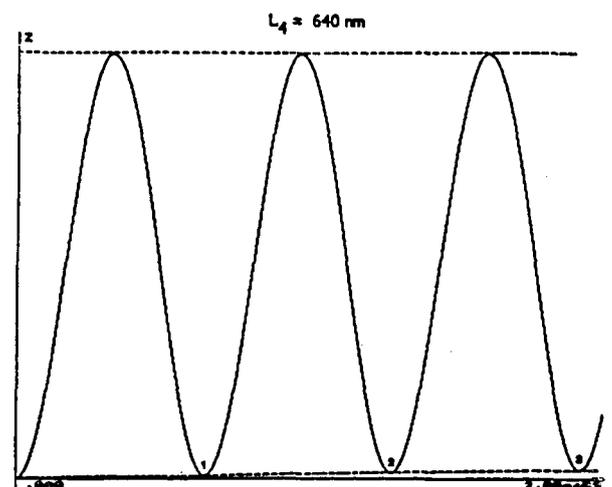
$$\mu = 1.435 \cdot 10^{-4}$$



$$\mu = 0.591 \cdot 10^{-4}$$

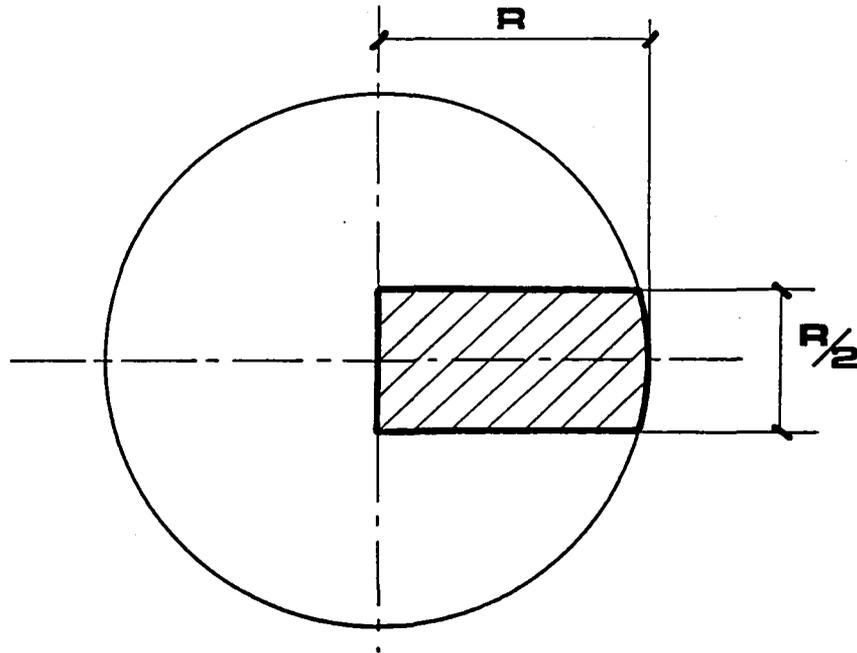


$$\mu = 0.257 \cdot 10^{-4}$$

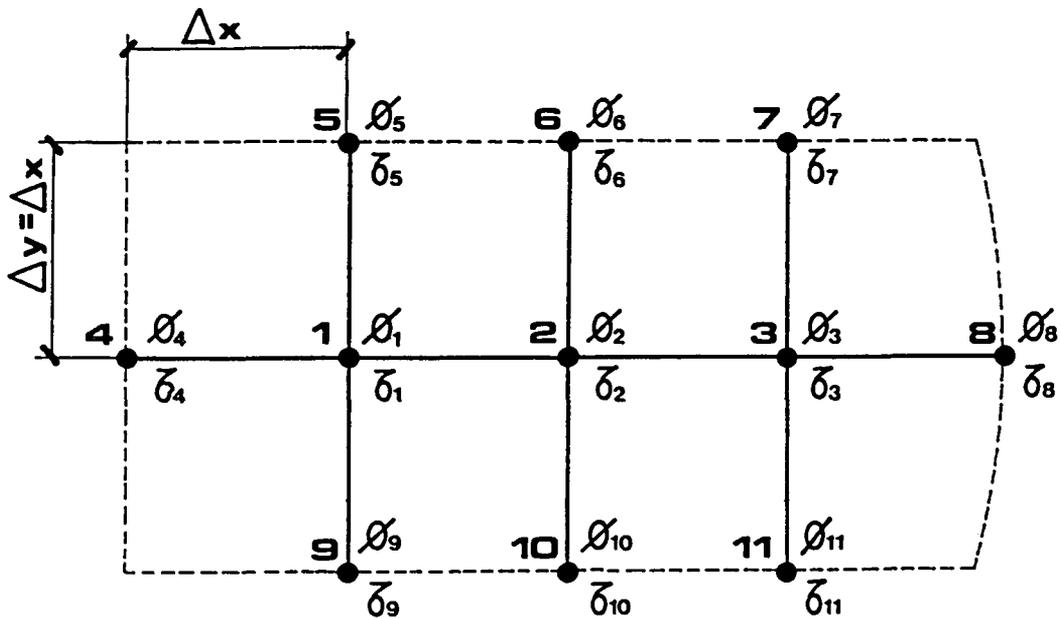


$$\mu = 0.105 \cdot 10^{-4}$$

4-14 Simulación con modelo matemático del amortiguamiento en la extinción. Incorporado al programa RETARDO.



4-16 Aplicación del método Equilibrio-Compatibilidad sobre una zona significativa del modelo.



4-17 Discretización adoptada. Valores experimentales obtenidos de δ y ϕ^* .

Y en la Fig. 4-19, la distribución diametral de los mismos con interpolación parabólica.

Para evaluar el error cometido, puede utilizarse como parámetro indicativo el cociente entre las tensiones principales en el punto central :

$$r = \frac{\sigma_p}{\sigma_q} \equiv \frac{\sigma_x}{\sigma_y}$$

Con solución teórica :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_p &= \frac{P}{\pi R} \\ \sigma_q &= -\frac{3P}{\pi R} \end{aligned} \right\} r = \frac{\frac{P}{\pi R}}{-\frac{3P}{\pi R}} = -0.3$$

Y experimental :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_p &= 371 / C_\sigma e \\ \sigma_q &= -1141 / C_\sigma e \end{aligned} \right\} r = \frac{371}{-1141} = -0.325$$

Dando un error inferior al 5% .Resultado, que dadas las características experimentales acumulativas del proceso, no debe conducirnos a ninguna conclusión taxativa.

;Punto Auxiliar

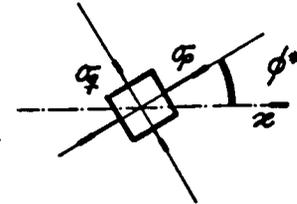
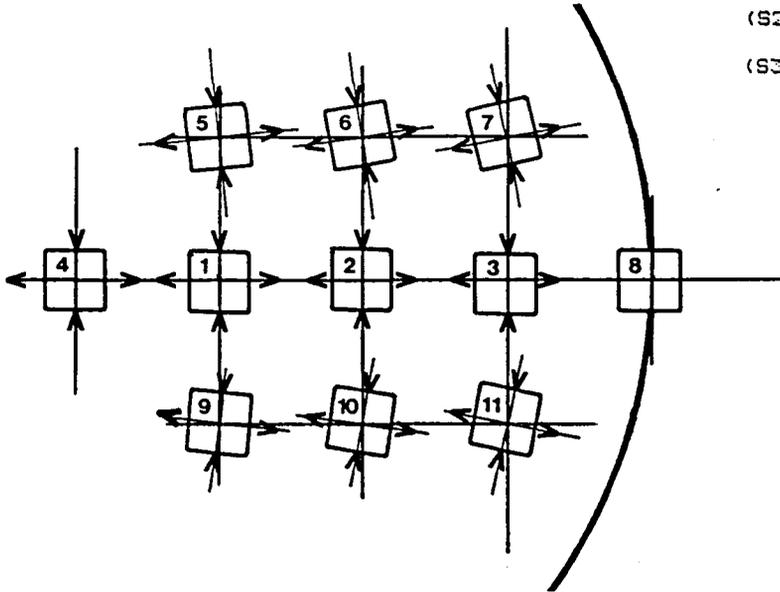
$$S_8 = 0.0$$

;Ecuacion de Laplace

$$\begin{aligned} S_8 + S_7 + S_2 + S_{11} - 4*S_3 &= 0 \\ S_3 + S_6 + S_1 + S_{10} - 4*S_2 &= 0 \\ S_2 + S_5 + S_4 + S_9 - 4*S_1 &= 0 \end{aligned}$$

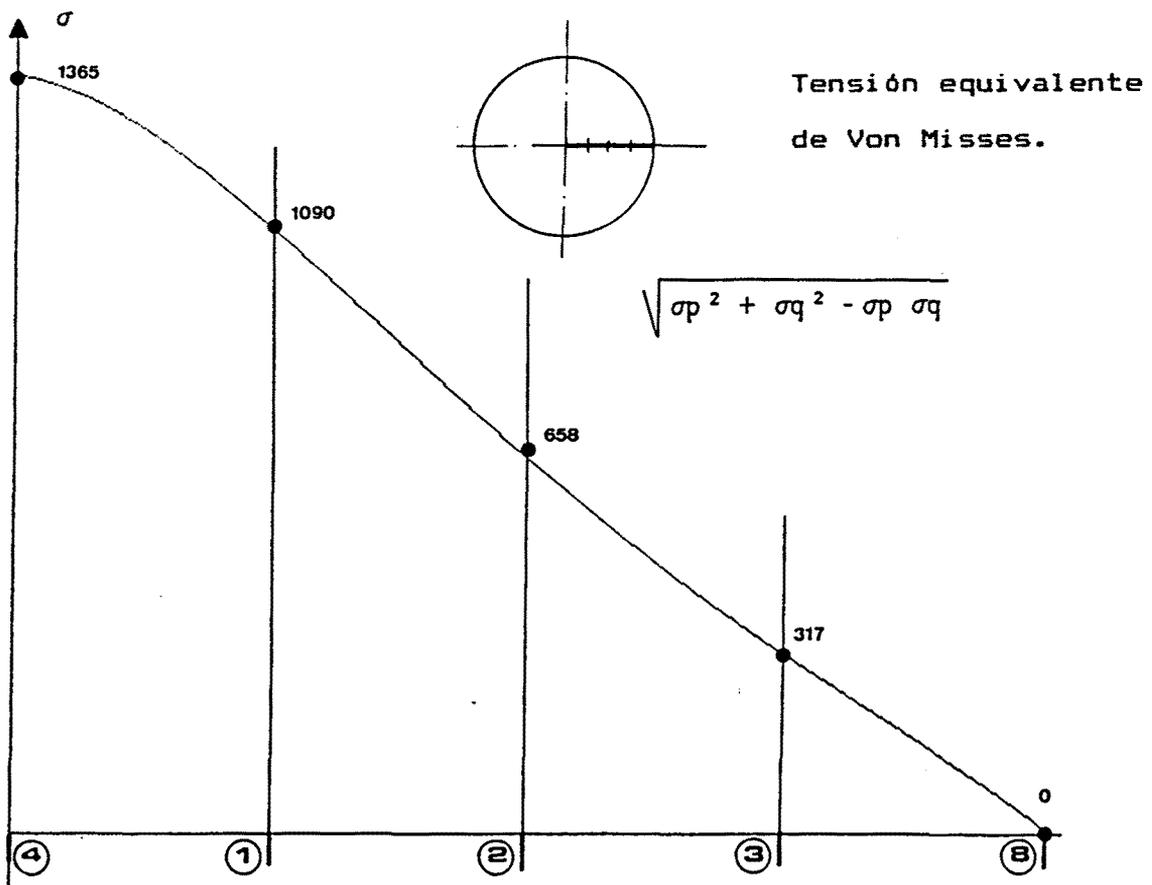
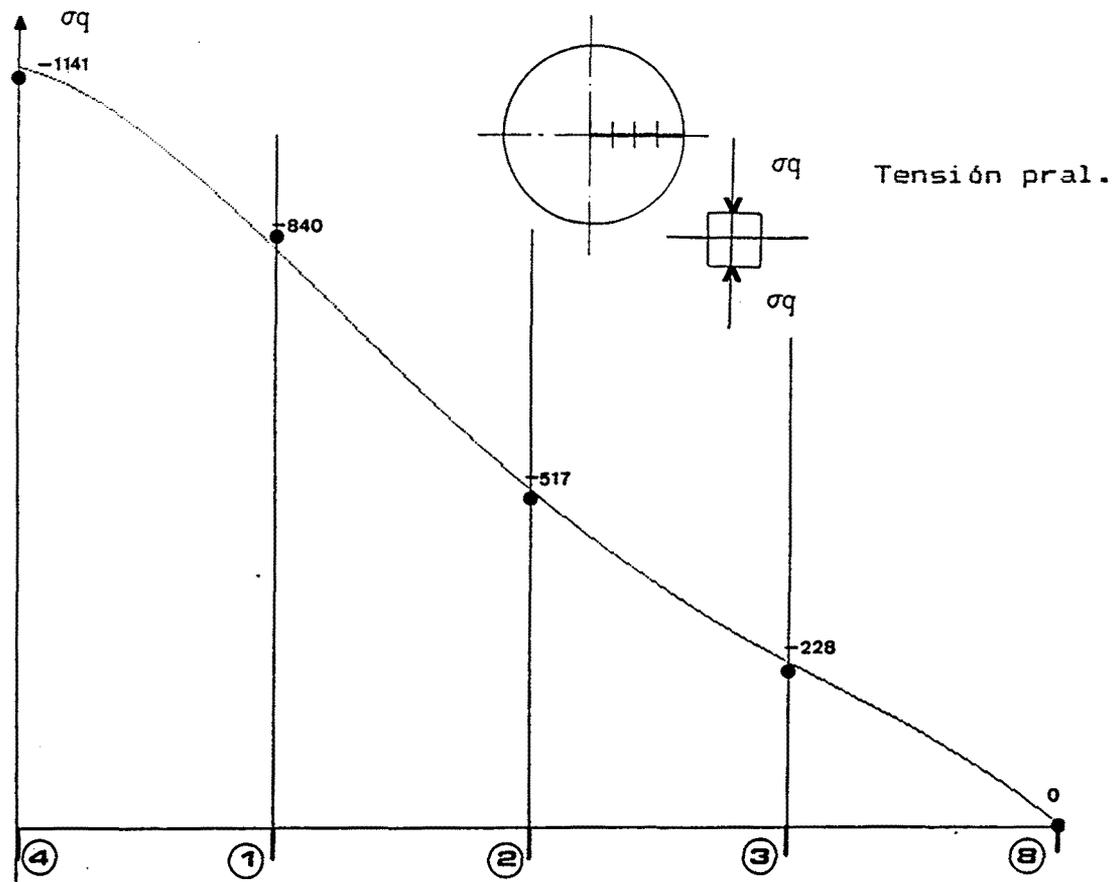
;Ecuaciones de Equilibrio

$$\begin{aligned} (S_8 - S_3) / 1 - S_4 &= 161 - S_4 \\ (S_7 - S_3) / 1 - S_4 &= -49.00 - S_4 \\ (S_6 - S_2) / 1 - S_4 &= -16.00 - S_4 \\ (S_5 - S_1) / 1 - S_4 &= 49.00 - S_4 \\ (S_1 - S_4) / 1 - S_8 &= 322 - S_8 \\ (S_1 - S_9) / 1 - S_8 &= -49.00 - S_8 \\ (S_2 - S_{10}) / 1 - S_8 &= 33.00 - S_8 \\ (S_3 - S_{11}) / 1 - S_8 &= 49.00 - S_8 \end{aligned}$$



PTO	RET	ISO	SUM	σ_p	σ_q
1	1233	0°	- 448	392	- 840
2	739	0°	- 294	223	- 517
3	295	0°	- 161	134	- 228
4	1512	0°	- 770	371	- 1141
5	1282	2°	- 339	472	- 810
6	723	12°	- 310	206	- 516
7	246	12°	- 210	18	- 228
8	0	0°	0	0	- 0
9	1282	177°	- 339	442	- 840
10	706	165°	- 327	190	- 517
11	246	165°	- 210	18	- 228
	δ nm	θ	/Cre	/Cre	/Cre

4-18 Solución completa del estado tensional.



4-19 Distribución experimental sobre el diámetro horizontal

5.0 CONCLUSIONES

5.0 CONCLUSIONES

OBJETIVOS CUMPLIDOS

Un completo Estado de la Cuestión, (1.2) , confirmado por el reciente artículo de E.A. Patterson (1988) [Ref.44] nos puso de manifiesto dos posibles opciones para el Banco Fotoelástico Automatizado (BFA) :

- a) Barrido puntual mediante haz Laser del modelo y lectura sobre un sensor fotoeléctrico.
- b) Adquisición de la imagen fotoelástica mediante cámara TRC ó CCD y posterior digitización de la misma.

Un estudio experimental y tecnológico de ambas variantes (2.1 y 2.2) nos decantó por esta última.

Sus principales ventajas son :

- Menor coste económico y mayor versatilidad.
- Permite reconstruir el ensayo en soporte magnético y utilizar las potentes operaciones estándar de tratamiento de imagen.
- Puede trabajarse en técnicas de transparencia y reflexión.

El equipo experimental fue elegido tras un detallado estudio de prestaciones (2.2.4) :

- Cámara de estado sólido CCD y óptica zoom. (2.2.1).
- Fuente de luz difusa con amplia emisión espectral (2.2.4)
- Filtros monocromáticos (3.4.1).
- Tarjeta digitizadora de 512 x 512 pixels y 256 niveles , inserta en un ordenador IBM/ AT.

No obstante, existen importantes lagunas teóricas y prácticas en el análisis de registros fotoelásticos mediante adquisición y tratamiento de imagen. (1.2).

Ha sido objeto de la presente Tesis la aportación de métodos y algoritmos originales de trabajo.

Se ha diseñado una secuencia operativa compuesta de cuatro etapas :

- 1º) Obtención del contorno del modelo en carga.
- 2º) Angulo de Isóclina corregido. Isostáticas.
- 3º) Retardo Absoluto.
- 4º) Tercer Dato. Resolución del estado tensional y post-proceso.



OBTENCION DEL CONTORNO (3.1)

No son válidos los sistemas usuales de detección del contorno, ya que puntos o pixels de bajo nivel se ubican en el interior del modelo, producto de extinciones parciales en franjas isóclinas e isocromáticas.

Sin embargo, si realizamos una adición simple de imágenes obtenidas por rotación de las láminas polarizadoras y cambio de longitud de onda L_i , resulta que pixels de baja intensidad son exclusivos de zonas externas.

Una binarización de la imagen y la aplicación del operador gradiente laplaciano, permite asignar directamente los niveles clave del archivo CONT.IMG, maestro de todo el proceso.

ANGULO DE ISOCLINA θ^* (3.2)

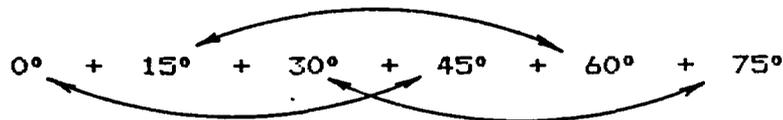
Con coexistencia simultanea de isóclinas e isocromáticas, se determina el ángulo θ^* mediante el operador lógico \odot , aplicado a imágenes binarizadas L_i :

$$L_1 \odot L_2 \odot L_3 \odot L_4$$

Se corrige manualmente θ , obteniéndose θ^* .
El programa ISOCLIN procesa los resultados, almacenando θ^* en el archivo ISO.IMG para todos los puntos del modelo.
La superposición modulada de una trama reticular virtual proporciona pseudoisostáticas y líneas de máx. cizalladura.
(3.3).

RETARDO ABSOLUTO δ (3.4)

Las isóclinas son eliminadas, para cada una de las longitudes de onda L_i , mediante la superposición de imágenes :



sin necesidad de láminas retardadoras $L/4$.

Se ha formulado un algoritmo de comparación entre niveles que proporciona directamente el retardo absoluto δ . Debe minimizarse una función Error, tal que :

$$E = \sum_{i=1}^n Z_{teorico} - Z_{experimental} \quad L_1, L_2, L_3, L_4$$

E min \longrightarrow δ solución

Así, queda eliminada la problemática de asignación manual del orden entero de isocromática.

Posteriormente, conocido C_σ y e :

$$R = (\sigma_p - \sigma_q) = \frac{\delta}{C_\sigma e}$$

METODO EQUILIBRIO-COMPATIBILIDAD (3.5)

La obtención del invariante S, suma de tensiones normales se realiza con la ecuación de compatibilidad :

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} = 0$$

y las de equilibrio en función de los datos fotoelásticos :

$$\frac{\partial S}{\partial x} = 2R \frac{\partial \theta}{\partial x} \sin 2\theta - 2R \frac{\partial \theta}{\partial y} \cos 2\theta - \frac{\partial R}{\partial x} \cos 2\theta - \frac{\partial R}{\partial y} \sin 2\theta$$

$$\frac{\partial S}{\partial y} = -2R \frac{\partial \theta}{\partial y} \sin 2\theta - 2R \frac{\partial \theta}{\partial x} \cos 2\theta + \frac{\partial R}{\partial y} \cos 2\theta - \frac{\partial R}{\partial x} \sin 2\theta$$

mediante el Método de las Diferencias Finitas , planteando como problema de Newman en contornos reales o pseudocontornos.

Así, queda resuelto el estado tensional y se entra en una fase de postproceso :

$$\begin{array}{l} \phi^* \\ R = (\sigma_p - \sigma_q) \\ S = (\sigma_p + \sigma_q) \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} \sigma_p, \sigma_q \\ \sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy} \\ \sigma \text{ equiv. , etc...} \end{array}$$

APORTACION ORIGINAL

En resúmen, la aportación original de la Tesis se centra en tres aspectos :

- Determinación del ángulo de isóclina θ^* con presencia simultanea de isocromáticas.
- Obtención automatizada del retardo absoluto δ mediante la comparación de niveles espectrales.
- Método Equilibrio-Compatibilidad para la resolución completa del estado tensional.

y en menor medida, la utilización de la adquisición y tratamiento de imagen a :

- Obtención del contorno del modelo en carga.
- Eliminación de franjas isóclinas sin láminas L/4, con independencia de la longitud de onda utilizada.

Todas estas aportaciones tienen su principal aplicación a :

- Análisis de modelos en técnica de "retención de tensiones".
- Fotoelasticidad por reflexión.

LINEAS ABIERTAS DE TRABAJO

A corto plazo :

- Corrección automática de θ^* a partir de θ , mediante una medida experimental adicional ó por análisis inteligente de su evolución en el modelo.

- Implementación del Método Equilibrio-Compatibilidad a registros extensos. Comprobación formal de los criterios matemáticos de consistencia, estabilidad y convergencia en su formulación.
- Adquisición de filtros monocromáticos más selectivos y prueba del algoritmo RETARDO a ordenes N superiores.

A medio plazo :

- Construcción de una fuente de luz con amplia emisión espectral incorporada al Polariscopio por reflexión. Aplicación de los algoritmos a dicha técnica.
- El Prof. X.Gutiérrez ETSEIT / UPC centra su Tesis Doctoral en la obtención experimental de pseudoisostáticas. Sus conclusiones serán recogidas en este proceso.
- Y evidentemente, puesta en marcha del BFA actualmente en fase de montaje.

Finalmente, debemos remitirnos a la introducción de la Tesis para recordar el papel que representa la Fotoelasticidad en nuestros días. Dicha idea, en todo momento, ha presidido el desarrollo de la investigación.

A nuestro entender, las Técnicas Híbridas constituyen la forma óptima de abordar un problema tensional.

Bajo esta perspectiva, la automatización del proceso fotoelástico permite aliviar al investigador de la rutinaria tarea de toma de datos y extracción de resultados, pudiendo concentrar sus esfuerzos en el análisis y comparación de los mismos.

BIBLIOGRAFIA

BIBLIOGRAFIA

LIBROS - PUBLICACIONES - TESIS DOCTORALES

- [1] FILON L.N.G. : "A Manual of Photo-Elasticity for Engineers". Cambridge University Press. London (1936)
- [2] VILLENA, Leonardo : "Fotoelasticidad". Trabajo de Licenciatura en Ciencias Físicas. Universidad Central de Madrid. (1941).
- [3] RAS OLIVA G. : "Bases Elásticas y Ópticas de la Fotoelasticidad". Publicación de Autor. Barcelona. (1944)
- [4] FROCHT, Max M. : "Photoelasticity". Volumen I y II. John Wiley & Sons, Inc. New York. (1950).
- [5] FROCHT, Max M. : "Fotoelasticidad". Volumen I. Ediar S.A. Editores. Buenos Aires. (1950).
- [6] AVRIL J. y otros : "Encyclopedie Vishay d'Analyse des Contraintes". Vishay-Micromesures. Paris (1974).
- [7] KUSKE A. ROBERTSON G. : "Photoelastic Stress Analysis". John Wiley & Sons. New York. (1974).
- [8] ORTIZ BERROCAL L. : "Elasticidad". ETS Ing. Ind. Valencia. Valencia. (1977).
- [9] RAS SIRERA J. : "Introducción a la Fotoelasticidad". CPDA / ETS. Eng. Ind. Barcelona. (1977).
- [10] BONNIN A.J. : "Elasticidad". CPDA / ETS Eng. Ind. Barcelona. (1980).
- [11] ROURE F. : "Aplicació Quantitativa de la Fotografia a l'Anàlisi Fotoelàstica". Tesis Doctoral. UPC. Barcelona. (1980).
- [12] AULI VILA J.M. : "Análisis Experimental de los Métodos y Parámetros que se requieren para la Aplicación del Araldit en la Fotoelasticimetría Tridimensional" Tesis Doctoral. UPC. Terrasa. (1986).

- [13] ROS FELIP A. : "Resolución de Problemas de Elasticidad en Tensión Plana mediante la Aplicación de Técnicas Fotoelásticas auxiliadas por Ordenador". Tesis Doctoral. UPM. Madrid. (1987).
- [14] KOBAYASHI A. : "Handbook on Experimental Mechanics". SEM. Prentice-Hall, Inc. New Jersey. (1987).
- [15] ANGULO J.M y IÑIGO R. : "Visión Artificial por Computador". Paraninfo S.A. Madrid. (1985).
- [16] IMAGING TECHNOLOGY INC. : "The Image Action User's Guide". Massachusetts, USA. (1985).
- [17] BAXES G.A. : "Digital Image Processing". Prentice-Hall Inc. New Jersey, USA. (1984).

BIBLIOGRAFIA DE ARTICULOS

- [24] ROBERT A. : "Principes et Description d'un Photoelasticimetre Bidimensionnel Automatique". Revue Française de Mecanique n° 29. (1969).
- [25] RILEY W.F. Y DALLY J.W. : "Recording Dynamic Fringe Patterns with a Cranz-Schardin Camera". Experimental Mechanics, 9. (1969).
- [26] NURSE P. y ALLISON I.M. : "Automatic Acquisition of Photoelastic Data". Comunicación presentada en la Conferencia del Joint British Committee for Stress Analysis. (1972).
- [27] LAGARDE A. y OHEIX P. : "Sur une Conception des Mesures en Photoelasticimetric Bidimensionnelle. Congres MESUCORA (1973).
- [28] REDNER S. : "New Automatic Polariscope System". Experimental Mechanics, vol 14, n° 12 pag 486 - 491. Diciembre (1974).
- [29] LAGARDE A. y OHEIX P. : "Sur des adaptations de la Methode de Senarmont". C. R. Acad. Sciencies. Paris. Julio (1975).
- [30] GUINET J. : "La Photoelasticimetric en Mecanique. L'Optimoscopie". CETIM. Informations n° 68. (1980)

- [31] MULLER R.K y SAACKEL L.R : " Complete Automatic Analysis of Photoelastic Fringes", Experimental Mechanics, pag. 245-251. Julio (1979).
- [32] SEGUCHI Y., TOMITA Y y WATANARE M. : "Computer-Aided Fringe-Pattern Analyzer. A Case of Photoelastic Fringe", Experimental Mechanics, pag. 362-370. Octubre (1979).
- [33] VOLOSHIN A.S y BURGUER C.P : "Half-Fringe Photoelasticity : A New Approach to Whole-field Stress Analysis". Experimental Mechanics, Septiembre (1983).
- [34] DANIEL ISAAC M. : "Behavoir of Grafhite / Epoxy Plates wiht Holes under Biaxial Loading". Experimental Mechanics, n° 20, pag. 188-195. (1980).
- [35] DANIEL ISAAC M. : "Biaxial Testing of [0 /+45] Grafite / Epoxy Plates with Holes". Experimental Mechanics ,n° 22, pag. 1-8. (1982).
- [36] SHIVE K. CHATURVEDI : "A Rational Theory of Oblique Incidence and Its Extension to Stress-Separation in Birefringent Composites". Experimental Mechanics. Marzo. (1983).
- [37] REDNER A.S y NICKOLA W.E. : "Measurement of Residual Strains and Stress in Transparent Materials". Experimental Techniques. Febrero. (1984).
- [38] UMEZAKI E, TAMAKI T, TAKAHASHI S.: "Automatic Stress Analysis from Photoelastic Fringes du to Image Proce ssing using Personal Computer", SPIE vol n° 504 pag. 127-134. Applications Digital Image Processing VII. (1984).
- [39] REDNER ALEX S. : "Photoelastic Measurements by Means of Computer-Assisted Spectral-Contents Analysis". Experimental Mechanics, Vol.25 n° 2, pag. 148-153. Junio (1985).
- [40] REDNER ALEX S. : Comunicación personal sobre avances del prototipo . Carta con fecha 25 Junio 1987.
- [41] REDNER ALEX y VOLOSHIN A. : "Development and Experimental Evaluation of the Techiques for Automated Measurement of Birefringence". Spring Conference SEM 1987. Houston, (1987).
- [42] MOJTAHED M. y ZACHARY L.W : "Use of Photoelasticity to Determine Orthotropic KI Stress-Intensity Factor" Experimental Mechanics. Pag. 184-189, Junio (1987).

[43] BERGHAUS D.G. "Stress Analysis Using Elastic-Field Equations, Photoelasticity and Least-Squares". Spring Conference on Experimental Mechanics SEM. Junio 1987. Houston, USA.

[44] PATTERSON E.A "Automated Photoelastic Analysis". Strain. Journal of the British Society for Strain Measurement. Vol.24 N°1 Febrero 1988.
