UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
ESCOLA TÈCNICA SUPERIOR D'ENGINYERS
DE CAMINS, CANALS I PORTS

UN MODELO DE "DAÑO CONTINUO" PARA MATERIALES FRICCIONALES

TESIS DOCTORAL

Presentada por:
Sergio Horacio OLLER MARTÍNEZ

Dirigida por:
Eugenio OÑATE IBAÑEZ de NAVARRA
y
Javier OLIVER i OLIVELLA

Barcelona – Mayo de 1988.

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
ESCOLA TÈCNICA SUPERIOR D'ENGINYERS
DE CAMINS, CANALS I PORTS

UN MODELO DE "DAÑO CONTINUO" PARA MATERIALES FRICCIONALES

Sergio Horacio OLLER MARTÍNEZ

Trabajo realizado como parte de los requisitos exigidos, para optar al grado de Doctor.

Dirigido por:

Eugenio OÑATE IBAÑEZ de NAVARRA

y

Javier OLIVER i OLIVELLA

Barcelona – Mayo de 1988.

Dedico todo el trabajo de esta tesis, a quienes supieron tolerarme, comprenderme, apoyarme y esperarme:

Alejandra y Sergio Alejandro

AGRADECIMIENTOS

Quisiera que estas palabras no sean consideradas como una simple formalidad para cubrir un requisito exigido por las "costumbres", sino por el contrario como mis más sincero sentimiento de gratitud a toda la gente que me ha rodeado durante mi permanencia en la Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos Canales y Puertos *; pero especialmente quiero agradecer a los profesores* Eugenio Oñate *y* Javier Oliver*, quienes han dirigido los pasos que han conducido al desarrollo de esta tesis. Ellos, que han sabido insentivarme y ayudarme, no sólo han actuado en la solución de problemas de índole académica, sino que se han brindado siempre como amigos, con la mayor voluntad de atender situaciones extra-académicas.*

Quisiera también expresar mi más sincera gratitud al profesor Jacob Lubliner*, quien, durante sus dos estancias como profesor visitante en esta escuela, ha colaborado decisivamente en la solución de muchos problemas, y me ha auxiliado en momentos difíciles del desarrollo de esta tesis.*

También quiero expresar mi gratitud a mis compañeros y amigos Jose Ramón Fernandez Roure*, con quien he trabajado y discutido gran parte de los temas de investigación que han dado lugar a este trabajo, y a* Alfredo Balmaceda*, que ha dedicado parte de su tiempo a la lectura de los manuscritos de esta tesis, para que se hiciera más legible su texto.*

Agradezco a todas las personas relacionadas con el centro de cálculo, por el apoyo desinteresado, que me han brindado durante todo el desarrollo de este trabajo.

Por último quiero agradecer a todas las instituciones que hicieron posibles el desarrollo de estos estudios: –*A la* Universidad Nacional de Salta (Argentina)*, de donde* *provengo, que me ha dado la oportunidad de iniciarme en el camino de la investigación.* – *Al* CONSEJO NACIONAL DE INVESTIGACIONES CIENTIFICAS Y TECNOLÓGICAS DE ARGENTINA (CONICET), *que juntamente con el* CONSEJO SUPERIOR DE INVESTIGACIÓN CIENTIFICA DE ESPAÑA (CSIC), *han financiado mi estadía en Barcelona, durante dos años y medio.* –*A la* ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS DE CAMINOS CANALES Y PUERTOS, *que me ha brindado su hospitalidad e infraestructura, durante todo el desarrollo de mis estudios.*

Sergio H. Oller

Barcelona – Mayo de 1988

FE DE ERRATAS

• En la página 27, donde dice....... , se recurre a la *formulación total hipoelástica*

debe decir....... , se recurre a la *formulación total hiperelástica*

• En la página 210, donde dice.......

$$W^f \;=\; G^f \; A^f \;\equiv\; W_T^p \;=\; \int_V g_T^p \, \frac{V^p}{V} \, dV \qquad \text{(An-D.22)}$$

debe decir.......

$$W^f \;=\; G^f \; A^f \;\equiv\; W_T^p \;=\; \int_{V^p} g_T^p \, dV^p \qquad \text{(An-D.22)}$$

• En la página 210, donde dice.......

$$G^f \;=\; \int_V g_T^p \, \frac{L^p}{V} \, dV \qquad \text{(An-D.23)}$$

debe decir.......

$$G^f \;=\; \int_{L^p} g_T^p \, dL^p \qquad \text{(An-D.23)}$$

• En la página 212, donde dice.......

$$W^c = W^{c0} + W^{c1} = W^{c0} + G^{c1} \; A^f \;\equiv\; W_C^p = \int_V g_C^{p\,0} \, dV + \int_V g_C^{p\,1} \, \frac{V^p}{V} \, dV \quad , \qquad \text{(An-D.26)}$$

debe decir.......

$$W^c = W^{c0} + W^{c1} = W^{c0} + G^{c1} \; A^f \;\equiv\; W_C^p = \int_{V^p} g_C^{p\,0} \, dV^p + \int_{V^p} g_C^{p\,1} \, dV^p \quad , \qquad \text{(An-D.26)}$$

• En la página 212, donde dice.......

$$G^{c1} \;=\; \int_V g_C^{p\,1} \, \frac{L^p}{V} \, dV \qquad \text{(An-D.27)}$$

debe decir.......

$$G^{c1} \;=\; \int_{V^p} g_C^{p\,1}\; dL^p \tag{An-D.27}$$

• En la página 226, donde dice.......

$$W^p = \int_{V^p} \left[\int_{t=0}^{t} \boldsymbol{\sigma}^T\; \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \right]\; dV^p \tag{An-D.47}$$

debe decir.......

$$W^p = \int_{V^p} \left[\int_{t=0}^{t} \boldsymbol{\sigma}^T\; \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p dt \right]\; dV^p \tag{An-D.47}$$

• En la página 241, donde dice.......

$$W^p \;=\; \int_{V} g_T^p\; \frac{V^p}{V}\; dV$$

debe decir.......

$$W^p \;=\; \int_{V^p} g_T^p\; dV^p$$

• En la página 456, donde dice....... *ecs.(Ap-II.39)*

debe decir....... *ecs.(Ap-II.29)*

• En la página 462, donde dice.......

$$\Delta l_{i,m}^2 \;=\; \Delta \boldsymbol{U}_{i,m} \;=\; \left[\Delta \boldsymbol{U}_{i-1,m} \;+\; r_\Delta \delta \hat{\boldsymbol{U}}_{i,m} \right]^T \Delta \boldsymbol{U}_{i-1,m} \tag{Ap-II.49}$$

debe decir.......

$$\Delta l_{i,m}^2 \;=\; \left[\Delta \boldsymbol{U}_{i-1,m} \;+\; r_\Delta \delta \hat{\boldsymbol{U}}_{i,m} \right]^T \Delta \boldsymbol{U}_{i-1,m} \tag{Ap-II.49}$$

NOTACION

α	: Parámetro de la función de fluencia propuesta, que define la relación entre la resistencia uniaxial, y equis-biaxial.
α_R	: Parámetro de la función de fluencia de Mohr-Coulomb modificada, que define la relación entre resistencias uniaxiales.
β	: Parámetro de la función de fluencia propuesta, que define la relación entre la resistencia uniaxial a compresión y a tracción.
β_G	: Factor de retención de tensiones cortantes.
γ	: Parámetro de la función de fluencia propuesta, que define la relación entre radios octaédricos máximos.
γ_{oct}	: Deformación octaédrica de corte.
δ_{ij}	: Función de Kronecker.
δ^{max}	: Desplazamiento máximo.
$\epsilon_{ij} \equiv \underline{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}}$	: Tensor de segundo orden de deformaciones, expresado en notación indicial y tensorial.
$\boldsymbol{\epsilon}$	: Parte simétrica del tensor de segundo orden de deformaciones, expresado como matriz columna.
$\boldsymbol{\epsilon}^e \equiv \boldsymbol{\epsilon}^{co}$	: Deformación desarrollada durante un proceso elástico.
$\boldsymbol{\epsilon}^d$	: Deformación desarrollada durante un proceso de degradación.
$\boldsymbol{\epsilon}^p$	: Deformación desarrollada durante un proceso de plástico.
$\boldsymbol{\epsilon}^{cr}$	: Deformación desarrollada durante un proceso de fisuración.
ϵ_i	: Componente de deformación principal i-ésima, del tensor de deformaciones.
$\epsilon_1\ ,\ \epsilon_2\ ,\ \epsilon_3$	: Deformación principal mayor, intermedia y menor en un punto.
$\overline{\epsilon}\ ,\ \overline{\epsilon}_C\ ,\ \overline{\epsilon}_T$	: Deformación uniaxial equivalente, de Compresión, de tracción.
$\overline{\epsilon}^p$	: Deformación plástica uniaxial equivalente.
ϵ_{oct}	: Deformación octaédrica normal.
$\vartheta_\sigma\ ,\ \vartheta_\epsilon$	: Angulo entre la tensión principal mayor, o la deformación principal mayor, con el eje de referencia global x_1 .
κ	: Variable de endurecimiento plástico.

κ^p	: Variable de daño plástico.
κ^L	: Valor de la variable de daño plástico, a partir de la cual, la cohesión se hace cero.
$\aleph$	: Factor de escala de la función de endurecimiento plástico.
$\lambda \equiv \lambda^p$	: Factor de consistencia plástica.
$\lambda^d \equiv \mu$	: Factor de consistencia de degradación.
$\nu\ ,\ \nu_0\ ,\ \nu^*$	: Módulo de Poisson, valor inicial, y módulo ficticio.
Ξ	: Disipación total de energía.
$\xi\ ,\ \rho\ ,\ \theta$	: Invariantes definidos en el espacio de Westergard. Dependen de I_1 , J_2 y J_2, J_3 respectivamente.
$\sigma_{ij} \equiv \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}$	: Tensor de segundo orden de tensiones, expresado en notación indicial y tensorial.
$\boldsymbol{\sigma}$	: Parte simétrica del tensor de segundo orden de tensiones, expresado como matriz columna.
$\boldsymbol{\sigma}^e$	: Tensión desarrollada durante un proceso elástico.
$\boldsymbol{\sigma}^d$	: Tensión relajada durante un proceso de degradación.
$\boldsymbol{\sigma}^p$	: Tensión relajada durante un proceso de plástico.
σ_i	: Componente de tensión principal i-ésima del tensor de tensiones.
$\sigma_1\ ,\ \sigma_2\ ,\ \sigma_3$	: Tensión principal mayor, intermedia y menor en un punto.
$\sigma_C\ ,\ \sigma_C^0\ ,\ \sigma_C^{max}\ ,\ \sigma_C^{pic}$	: Tensión uniaxial de compresión, resistencia a compresión en el primer límite de discontinuidad, resistencia máxima o de pico.
$\sigma_T\ ,\ \sigma_T^0\ ,\ \sigma_T^{max}\ ,\ \sigma_T^{pic}$	: Tensión uniaxial de tracción, resistencia a tracción en el primer límite de discontinuidad, resistencia máxima o de pico.
$\sigma_{cb}\ ,\ \sigma_{cb}^0$	: Tensión equis-biaxial a compreción, y resistencia a en el primer límite de discontinuidad.
$\overline{\sigma}\ ,\ \overline{\sigma}_C\ ,\ \overline{\sigma}_T$	: Tensión uniaxial equivalente, de Compresión, de tracción.
σ_{oct}	: Tensión octaédrica normal.
τ_{oct}	: Tensión octaédrica de corte.
Φ^d	: Función de degradación definida en el espacio de deformaciones.
$\boldsymbol{\Phi}^d$	: Función potencial de degradación, definida en el espacio de deformaciones.
$\phi\ ,\ \phi^{max}$	: Angulo de rozamiento interno, y su valor máximo.
ϕ_{cv}	: Angulo de rozamiento interno a volumen constante.
$\hat{\phi}_i\ ,\ \hat{\phi}_K\ ,\ \hat{\phi}_G$	: Escalares de degradación elástica.
$\psi\ ,\ \psi^{max}$	: Angulo de dilatancia interno, y su valor máximo.
Ψ	: Energía potencial libre.
$\Psi^e\ ,\ \Psi^p$	: Parte elástica y parte plástica de la energía potencial libre.

Ω	: *Energía específica complementaria.*
$\Im$	: *Parámetro que considera la influencia de la tensión principal máxima en las componentes del vector* $\boldsymbol{f}$.
A	: *Parámetro de endurecimiento plástico.*
A^f	: *Superficie de la cara de una fisura.*
c_κ	: *Constante que interviene en la determinación de las deformaciones efectivas – depende de la función* $\mathcal{G}$.
c	: *Cohesión entre partículas – función de endurecimiento plástico, expresada a partir de una ley de evolución interna del proceso.*
c^0	: *Valor inicial de la cohesión – corresponde al límite de discontinuidad inicial.*
$c_C(\kappa^p)$	: *Función de evolución explícita de la cohesión para un proceso de compresión uniaxial.*
$c_T(\kappa^p)$	: *Función de evolución explícita de la cohesión para un proceso de tracción uniaxial.*
$\boldsymbol{C}_T^e$	: *Tensor de cuarto orden de rigidez elástica degradado, expresado como una matriz de* 6×6 .
$\boldsymbol{C}_T^p$	: *Tensor de cuarto orden de rigidez elástica degradado durante un proceso plástico, expresado como una matriz de* 6×6 .
$\boldsymbol{C}_T^{ep}$	: *Tensor de cuarto orden de rigidez elasto-plástica degradado, expresado como una matriz de* 6×6 .
$[D_{ijkl}]_S \equiv , \underline{\underline{\underline{\underline{\boldsymbol{D}}}}}_S$	: *Tensor de cuarto orden de rigidez elástica secante, expresado en notación indicial y tensorial.*
$[D_{ijkl}]_T^{ep} \equiv , \underline{\underline{\underline{\underline{\boldsymbol{D}}}}}_T^{ep}$	: *Tensor de cuarto orden de rigidez elasto-plástica tangente, expresado en notación indicial y tensorial.*
$\boldsymbol{D}_S$	: *Tensor de cuarto orden de rigidez elástica secante, expresado como una matriz de* 6×6 .
$\boldsymbol{D}_T^{ep}$	: *Tensor de cuarto orden de rigidez elasto-plástica tangente, expresado como una matriz de* 6×6 .
$\boldsymbol{D}^{co}$	: *Matriz de rigidez del material virgen.*
$\boldsymbol{D}^{cr}$	: *Matriz de rigidez del material fisurado.*
$\mathcal{D}$	: *Función de degradación definida en el espacio de tensiones.*
$\boldsymbol{dev}$	: *Operador desviador.*
$\hat{d}$	: *Variable escalar de degradación.*
$\hat{\boldsymbol{d}}^e$	: *Variable tensorial de degradación elástica.*
$\hat{\boldsymbol{d}}^p$	: *Variable tensorial de degradación elástica.*

$e_{ij} \equiv \underline{\underline{\boldsymbol{e}}}$	: *Tensor de segundo orden desviador de deformaciones, expresado en notación indicial y tensorial.*
$\boldsymbol{e}^{cr}$	: *Deformación de una fisura en ejes locales.*
$E\ ,\ E^0\ ,\ E_S$	: *Módulo elástico o de Young, en el instante inicial, y secante.*
$f(\boldsymbol{\sigma})$	: *Función escalar de tensiones.*
$\mathcal{F}$	: *Función de fluencia plástica, definida en el espacio de tensiones.*
$G\ ,\ G^0\ ,\ G_S$	: *Módulo de rigidez a cizalladura, inicial, y secante.*
$\boldsymbol{f}$	: *Vector normal a la superficie de fluencia plástica.*
$\boldsymbol{g}$	: *Vector normal a la superficie de potencial plástico.*
g	: *Función de degradación definida en el espacio de deformaciones.*
g^f	: *Energía específica de fractura.*
g^p	: *Energía específica plástica disipada.*
g^p_C	: *Energía específica plástica disipada al finalizar un proceso uniaxial inelástico de compresión.*
g^p_T	: *Energía específica plástica disipada al finalizar un proceso uniaxial inelástico de tracción.*
$\mathcal{G}$	: *Función de potencial plástico, definida en el espacio de tensiones.*
$G^f\ ,\ G^c$	: *Energía de fractura por unidad de área fracturada, y energía de aplastamiento.*
$\boldsymbol{h}_\kappa$	: *Tensor de segundo orden, función del estado actual del proceso elasto-plástico.*
h_c	: *Escalar, función del estado actual del proceso elasto-plástico.*
$\boldsymbol{H}_{\epsilon^p}$	: *Función tensorial de evolución interna de la deformación plástica.*
H_κ	: *Función escalar de evolución interna, de la variable de daño plástico.*
H_c	: *Función escalar de evolución interna, de la variable de cohesión.*
$\hat{H}_j$	: *Función escalar de evolución interna de la variable* j *de degradación plástica.*
H^d	: *Función de endurecimiento de degradación.*
$H_{ijkl} \equiv\ ,\ \underline{\underline{\underline{\underline{\boldsymbol{H}}}}}$	: *Tensor de cuarto orden de flexibilidad elástica, expresado en notación indicial y tensorial.*
$\boldsymbol{I}$	: *Matriz unidad o identidad.*
$I_1\ ,\ I_2\ ,\ I_3$	: *Primer, segundo y tercer invariante del tensor de tensiones* σ_{ij} .
$I'_1\ ,\ I'_2\ ,\ I'_3$	: *Primer, segundo y tercer invariante del tensor de deformaciones* ϵ_{ij} .
$J_1 = 0\ ,\ J_2\ ,\ J_3$	: *Primer, segundo y tercer invariante del tensor desviador de tensiones* s_{ij} .
$J'_1 = 0\ ,\ J'_2\ ,\ J'_3$	: *Primer, segundo y tercer invariante del tensor desviador de deforma-*

	ciones e_{ij} .
$\hat{\boldsymbol{k}}_i \, , \, \hat{\boldsymbol{k}}_K \, , \, \hat{\boldsymbol{k}}_G$	: *Vectores que dan la dirección de la degradación elástica.*
$k_C \, , \, k_T$	: *Coeficiente de escala entre la cohesión y la tensión uniaxial de compresión y tracción respectivamente – dependen del criterio de fluencia.*
$\mathcal{K}$	: *Función de endurecimiento plástico.*
$K \, , \, K^0 \, , \, K_S$	: *Módulo de rigidez volumétrico, en el instante inicial, y secante.*
$K_I \, , \, K_{II} \, , \, K_{III}$	: *Factores de intensidad de tensión.*
K_{Ic}	: *Tenacidad del material.*
$\mathbb{K}_1 \, , \, \mathbb{K}_2 \, , \, \mathbb{K}_3$	: *Constantes de ajuste entre resistencias uniaxiales, para la la función de Mohr-Coulomb modificada.*
$\hat{\boldsymbol{\ell}}_j$	: *Vector definido en el espacio de tensiones.*
L^f	: *Ancho de una fisura distribuída.*
L^p	: *Ancho de la zona dañada plásticamente.*
$\mathbb{N}$	: *Matriz de transformación de un sistema de referencia local a uno global.*
$\boldsymbol{q}_\beta$	: *Variables internas elásticas.*
$\boldsymbol{q}_\alpha$	: *Variables internas plásticas.*
$R(\kappa^p)$	: *Función de la relación de resistencias uniaxiales.*
r_d^0	: *Límite inicial de degradación.*
r_ξ	: *Factor de peso correspondiente al volumen del material inerte.*
$\boldsymbol{S}$	: *Tensión en una fisura en ejes locales.*
$s_{ij} \equiv \underline{\underline{\boldsymbol{s}}}$	: *Tensor de segundo orden desviador de tensiones, expresado en notación indicial y tensorial.*
w	: *Energía específica primal.*
$x_1 \, , \, x_2 \, , \, x_3$	: *Sistema de referencia global.*

INDICE

PARTE PRINCIPAL

CAPITULO IV – ANEXO D :
ABLANDAMIENTO POR DEFORMACION COMO PROPIEDAD DEL MATERIAL – DIRECCIONALIDAD DEL DAÑO PLASTICO – POST-PROCESO DE RESULTADOS.

CAPITULO V :
EJEMPLOS DE APLICACION del "MODELO DE DAÑO PLASTICO".

PARTE AUXILIAR

APENDICE I : **FUNDAMENTOS BASICOS DE LOS MODELOS CONSTITUTIVOS ELASTO-PLASTICOS.**

– *PARTE PRINCIPAL* –

CAPITULO I

INTRODUCCION Y OBJETIVOS

I.1.- INTRODUCCION

El comportamiento de las estructuras sometidas a solicitaciones externas, ha sido objeto de intenso estudio desde principios de este siglo. Debido a la gran complejidad que involucraba su análisis mediante la **"mecánica-teórica"** [79] [81] , se recurría frecuentemente, a procedimientos basados en hipótesis que simplificaban drásticamente los principios de esta ciencia, combinados con formulaciones empíricas elaboradas a partir de una gran cantidad de resultados experimentales. Así, en un pasado reciente (primera mitad de este siglo), mediante estos procedimientos simplificativos, solo se podían resolver algunos de los innumerables problemas del diseño estructural. Estas técnicas, aún hoy siguen teniendo vigencia en la resolución de problemas triviales, donde las hipótesis simplificativas no son tan severas y el bagaje de conocimientos experimentales, sobre el tema de análisis, es muy amplio.

Pero en la actualidad existe, entre otras, una técnica basada en procedimientos numéricos de aproximación de funciones, que se conoce con el nombre de **"método de los elementos finitos"** [25] [144] y que es, para algunos casos de diseño y verificación estructural, una necesidad de uso antes que una alternativa. Esta potente técnica numérica permite desarrollar estudios más realistas sobre el comportamiento de las estructuras, que los llevados a cabo en el pasado por medio de simplificaciones necesarias debido a razones prácticas.

La investigación basada en cualquier técnica numérica, se nutre necesariamente de análisis experimentales que corroboran su fiabilidad. De esta forma, los estudios numéricos tratan de reproducir los resultados experimentales desarrollados en pequeña escala (muestras de laboratorio), y los *"extrapola"* a una escala mayor (nivel estructural). Esta posibilidad de extender el concepto de un *comportamiento físico simple a uno complejo*, se logra gracias al uso de una formulación matemática, capaz de describir el *funcionamiento físico macroscópico de los sólidos*, que recibe el nombre de **"modelo constitutivo de un material"**. Los fundamentos de la aplicación práctica de estos modelos de simulación de comportamiento, se encuentran en la concurrencia de la **"mecánica-teórica"** junto a las **"técnicas numéricas"**; conjunción de conocimientos teórico- numéricos que en la actualidad ya se conoce con el nombre de **"mecánica- computacional"**.

Los modelos constitutivos destinados a simular el comportamiento de los materiales friccionales, han tenido un marcado desarrollo en los últimos años. La razón de ser de estas formulaciones matemáticas y de su constante evolución, se encuentra en la insuficiencia que presentan las teorías constitutivas más simples (como la **ley elástica-lineal**) para reproducir el comportamiento físico de los materiales friccionales dentro de todo su rango de trabajo. En general, se han formulado diversos tipos de modelos constitutivos que van desde reproducir *procesos elásticos lineales o no-lineales*, a *inelásticos dependientes (o no), del tiempo*. Además, estos modelos también han sido formulados considerando *leyes de compatibilidad* en pequeñas y/o grandes deformaciones, y en *configuraciones de equilibrio* para pequeños y/o grandes desplazamientos.

Para el caso particular del material estructural llamado **"hormigón-armado"**, existen *distintas alternativas* que permiten simular su respuesta [33] . Entre éstas, es posible definir dos modelos constitutivos , uno para el acero y otro para el hormigón; siendo el método de los elementos finitos el encargado de obtener el comportamiento compuesto de ambos a la vez. En el caso que la unión *acero-hormigón* no sea *perfecta*, el mismo método, mediante elementos finitos especialmente definidos (elementos de juntas), puede contemplar una adherencia *cuasi-perfecta* entre los dos materiales, permitiendo así emular el comportamiento del material compuesto. Con esta técnica no es necesario afectar a las leyes constitutivas de cada material simple, ni definir un modelo constitutivo especial para el hormigón-armado.

El trabajo desarrollado en esta tesis, formula un **"modelo constitutivo que permite simular el comportamiento de un material cohesivo-friccional"**, con especial énfasis en el hormigón (***cap. IV***). Las bases del modelo se encuentran en la **"mecánica de los medios continuos"**, la que permite presentar una formulación consistente sobre el comportamiento físico de los sólidos en general, y en particular de aquellos que resisten gracias a la acción conjunta de la *cohesión* y la *fricción* entre sus partículas granulares.

Para aplicar la formulación teórica del modelo, y poder resolver los ejemplos de comprobación (***cap. V***), ha sido necesario recurrir a soluciones numéricas, que en algunos casos presentan ligeros cambios respecto a las ya existentes (***Ap-II***). Este trabajo teórico-numérico, ha sido introducido en un programa de elementos finitos, desarrollado para este fin exclusivo (***Ap-II***).

Para poder establecer una comparación más objetiva entre este modelo, formulado para describir el comportamiento del hormigón, y otros ya existentes destinados al mismo fin, se presenta una relación de modelos constitutivos que incluye las más recientes investigaciones sobre el tema (***cap. III***).

I.2.- OBJETIVOS

Con el ánimo de aumentar el conocimiento sobre el comportamiento *físico, mecánico y numérico* de los hormigones, se han desarrollado en el mundo diversas corrientes investigadoras que han profundizado en estas *tres disciplinas básicas*, dejando un apreciable cúmulo de experiencias aprovechables. En este trabajo se pretende hacer un aporte al conocimiento ya existente, analizando el comportamiento del hormigón desde el punto de vista **"mecánico-numérico"**.

Las motivaciones que impulsaron a este estudio se encuentran en los innumerables interrogantes que, a pesar de todo lo que se ha investigado en los últimos años, aún subsisten sobre el conocimiento del hormigón, dentro de su rango total de comportamiento.

Hasta la escritura de esta tesis, el continuado trabajo de investigación ha producido diversos modelos constitutivos, unos más potentes que otros (***cap. III***); pero por norma general, cada modelo ha tratado de solucionar uno o más problemas, según sea la exigencia y la motivación que haya conducido a su desarrollo. El modelo constitutivo que aquí se presenta, como todos los ya formulados, tiene una estructura matemática limitada; pero está orientado a solucionar algunos aspectos que otros no han considerado : *El comportamiento total y unificado de procesos a compresión y/o tracción, considerando los respectivos fenómenos de aplastamiento y fisuración, a través de una única* *formulación teórica* . Los resultados obtenidos son bastante buenos comparados con los que proporcionan los estudios experimentales (***cap. V***).

Entre las características más destacadas del modelo que se presenta, se pueden citar las siguientes:

- *Trata en forma unificada los procesos multiaxiales a tracción y compresión*, mediante una formulación inelástica sólidamente fundada en la **teoría matemática de la plasticidad**.

- Define entre sus *variables internas*, la **variable de daño plástico** y la **cohesión**, y permite, si fuese necesario, definir también como variables internas el **rozamiento entre partículas**, y la **dilatancia**. Estas variables internas, siguen una ley de *evolución* que depende del proceso elasto-plástico mismo, y de unas funciones que son ajustadas a partir de resultados experimentales uniaxiales.

- Permite definir distintos tipos de **criterios de discontinuidad inicial** (fluencia inicial para los metales) y subsecuentes **superficies de carga plástica**, controladas por una **regla de endurecimiento** que tiene un sentido físico directo, estableciendo así los distintos **estados elasto-plásticos consistentes**.

- Trata el **flujo plástico** a través de una **regla de normalidad**, asociada a una **superficie de potencial plástico**, que puede o no coincidir con **las de carga plástica**. Esta **función potencial** es la que garantiza el control del fenómeno de **dilatancia**.

- Considera que los materiales no solo tienen *distintos limites tensionales de falla a tracción y a compresión*, sino también distingue para cada uno de estos procesos, *deformaciones últimas diferentes*. Esto se consigue mediante una generalización de la **variable de endurecimiento plástico**, a la que en este modelo se le ha dado el nombre de **variable de daño plástico**.

- Permite simular el *comportamiento multiaxial*, a partir de *datos que surgen de ensayos experimentales uniaxiales*.

- Trata el concepto de **daño** y su *macro-direccionalidad*, a partir del fenómeno de **localización de deformaciones**.

- A modo informativo, obtiene el *daño local* (daño en un punto), y su *dirección*, mediante un *post-procesamiento de resultados*, una vez que se converge al estado de equilibrio.

- La inclusión de una formulación constitutiva de este tipo en un *programa de elementos finitos de propósito general*, capacitado para el cálculo no-lineal no es excesivamente costoso, más bien relativamente simple.

I.3.- CONTENIDO DE LA TESIS

La tesis *formula* un *modelo constitutivo para simular el comportamiento de un material cohesivo-friccional, con una especial orientación hacia los hormigones*. Está dividida en cinco capítulos, de los cuales esta introducción es el primero.

En el *capítulo segundo*, se hace una breve descripción de las *propiedades básicas del hormigón*. Estas permiten comprobar el *grado de aproximación*, al comportamiento real, que se logra con el modelo constitutivo formulado.

En el *capítulo tercero*, se presentan, en forma sintética los *modelos constitutivos más usuales*, incluyendo los de reciente aparición. Se da especial importancia al tratamiento de aquellos que hacen uso de la **teoría de la plasticidad**.

En el *capítulo cuarto*, **tema central de la tesis**, se describe *in-extenso* la formulación del modelo, comenzando por la presentación de sus *variables internas*, hasta llegar a *establecer su forma más general*, incluyendo el fenómeno de **degradación de rigidez durante el proceso elástico y/o plástico**. En este mismo capítulo, se presenta un nuevo **criterio de fluencia** desarrollado para mejorar las aplicaciones del modelo. También en los anexos de éste, se desarrollan temas que complementan la formulación del modelo, y que fueron separados del cuerpo principal del capítulo para ofrecer una presentación más clara. Entre los temas tratados en dichos anexos, se encuentra una *modificación de la función de Mohr-Coulomb*, con la que se han resuelto gran parte de los ejemplos de verificación.

En el *capítulo quinto*, se describen algunos *ejemplos de verificación*, que dan muestra de la bondad de los resultados obtenidos para distintos problemas seleccionados. Especialmente, a partir de éstos se puede controlar el funcionamiento del modelo numérico frente a cada comportamiento mecánico.

Por último, al final de la tesis se presentan *apéndices* que desarrollan todos aquellos conceptos ya conocidos y que sirven de apoyo al tema central desarrollado en el ***capítulo IV***. No obstante, en éstos se describen también algunos *enfoques particulares de gran importancia sobre la teoría de la plasticidad clásica.* Además, se propone una *modificación simple y original* sobre la técnica numérica de *control de desplazamientos, a través de un camino plano*, que mejora la convergencia hacia la solución durante la resolución del sistema de ecuaciones no-lineales; y se desarrolla una *variante sobre el algoritmo de retroceso radial de* **Euler**, que mejora la integración numérica de la *ecuación constitutiva elasto-plástica* para procesos que incluyen *ablandamiento por deformación*, y por último, se propone también un algoritmo de *control de plastificación* para ser tratado dentro de los métodos de control de desplazamiento antes mencionados.

La estructura con que se ha redactado la tesis, *permite consultar directamente* **la formulación del modelo constitutivo** que se propone, mediante una lectura del ***capítulo IV*** y sus respectivos ***anexos (An-A, An-B, An-C*** y ***An-D***); y *verificar sus cualidades* a través de los ejemplos presentados en el ***capítulo V***. Debido a que durante la lectura de estos dos capítulos pueden presentarse algunos conceptos que requieren mayor o explicación, se desarrolla una **parte auxiliar** compuesta de dos ***apendices***. El primero de ellos ***(Ap-I)***, junto con sus dos ***anexos (An-E y An-F)*** , tratan algunos conceptos de la teoría de la plasticidad clásica que sirven de base para la interpretación del modelo constitutivo; y el segundo, ***Ap-II***, está orientado al tratamiento numérico de los temas que han requierido mayor atención en la implementación de este modelo constitutivo.

En los ***capítulos II*** y ***III*** se hace un estudio sobre el **conocimiento actual del comportamiento del hormigón** y las distintas **formas de modelar matemáticamente dicho comportamiento**, respectivamente, permitiendo cotejar el concepto básico de los distintos modelos existentes con el que se propone en esta tesis.

CAPITULO II

PROPIEDADES BASICAS DEL HORMIGON

II.1.- INTRODUCCION.

En este capítulo, se hace una breve presentación, de algunas de las características y propiedades básicas del hormigón sometido a estados de tensión uniaxial, biaxial y triaxial.

Es evidente que un mejor conocimiento del material que se pretende modelar matemáticamente, asegura una mejor concordancia del modelo constitutivo que se formula, con la realidad que se desea simular. Así , este capítulo puede servir como una guía breve de las propiedades básicas más importantes que deben considerarse en la formulación de un modelo constitutivo para hormigones, y también como información sobre los valores y rangos de validez de las magnitudes más significativas que condicionan la respuesta mecánica de este material.

El comportamiento del hormigón es altamente complicado e influenciado por distintos fenómenos, intrínsecos y extrínsecos, que hacen necesario recurrir a hipótesis simplificativas que conduzcan a drásticas *idealizaciones* sobre su comportamiento, con el fin de poder modelarlos matemáticamente [34] . Es bien sabido, que éste resulta muy influenciado por la formación y desarrollo de *micro-fisuras* en el mortero y en la interfase entre mortero y agregado pétreo [44] . Estos defectos se inician en la etapa de *curado*, y crecen en función del estado tensional al que se somete el cuerpo del sólido [46] durante su vida útil. El fenómeno de micro-fisuración y deslizamiento entre partículas granulares, conduce a un comportamiento altamente no-lineal e inelástico, tal que la ley constitutiva tensión-deformación, está caracterizada por un período elástico inicial, seguido de un comportamiento inelástico con *endurecimiento* y gradual pérdida de rigidez, que conduce a una etapa posterior dominada por *ablandamiento*. Esta micro-fisuración es la responsable del fenómeno de expansión de volumen inelástico, conocido con el nombre de *dilatancia* [33][35] .

Debido a que la resistencia a tracción es sensiblemente más baja en la interfase *mortero-agregado pétreo*, se produce una pérdida de tensión en el material compuesto (hormigón), que se refleja en una resistencia a tracción sensiblemente menor que a compresión [33] .

II.2.- MECANISMOS DE FALLO EN EL HORMIGON.

Existe una gran cantidad de investigadores que en los últimos años han trabajado en el estudio experimental del comportamiento del hormigón. Entre el cúmulo de conclusiones que han alcanzado, se puede encontrar la descripción de los mecanismos de iniciación y avance progresivo del daño por fractura. Es posible observar que las micro-fisuras existen en la masa del hormigón, aún antes de iniciar cualquier proceso de carga [27][41][44][46] . Esta micro-fisuración previa, se encuentra normalmente localizada en la zona de transición entre el agregado pétreo y el mortero de cemento o matriz, y algunas veces alcanza a penetrar dentro de esta última [33][44] .

De la observación realizada en hormigones sometidos a efectos de carga, resultan identificables cuatro mecanismos de daño, que pueden ser clasificados según su orden cronológico de aparición **fig.(II.1)** [44] , en:

– Microfisuras en la interfase entre agregado pétreo y la pasta de cemento, debido al desprendimiento del árido.

– Incursiones en la pasta de cemento, de las micro-fisuras originadas en la interfase con el agregado pétreo.

– Fisuras originadas en el mortero o pasta de cemento, con una orientación dominante, normal a la deformación principal de tracción [35][129][136] . También aparecen en esta etapa, nuevas fisuras que interconectan las oquedades o espacios vacíos que existen en la matriz.

– Conexiones entre las distintas fisuras, lo que conduce al fallo total del sólido. En este límite último, el árido provoca un efecto de *cuña o engranamiento* entre las caras de las fisuras, contrarrestando la pérdida de resitencia que se ha producido en la dirección normal a ella.

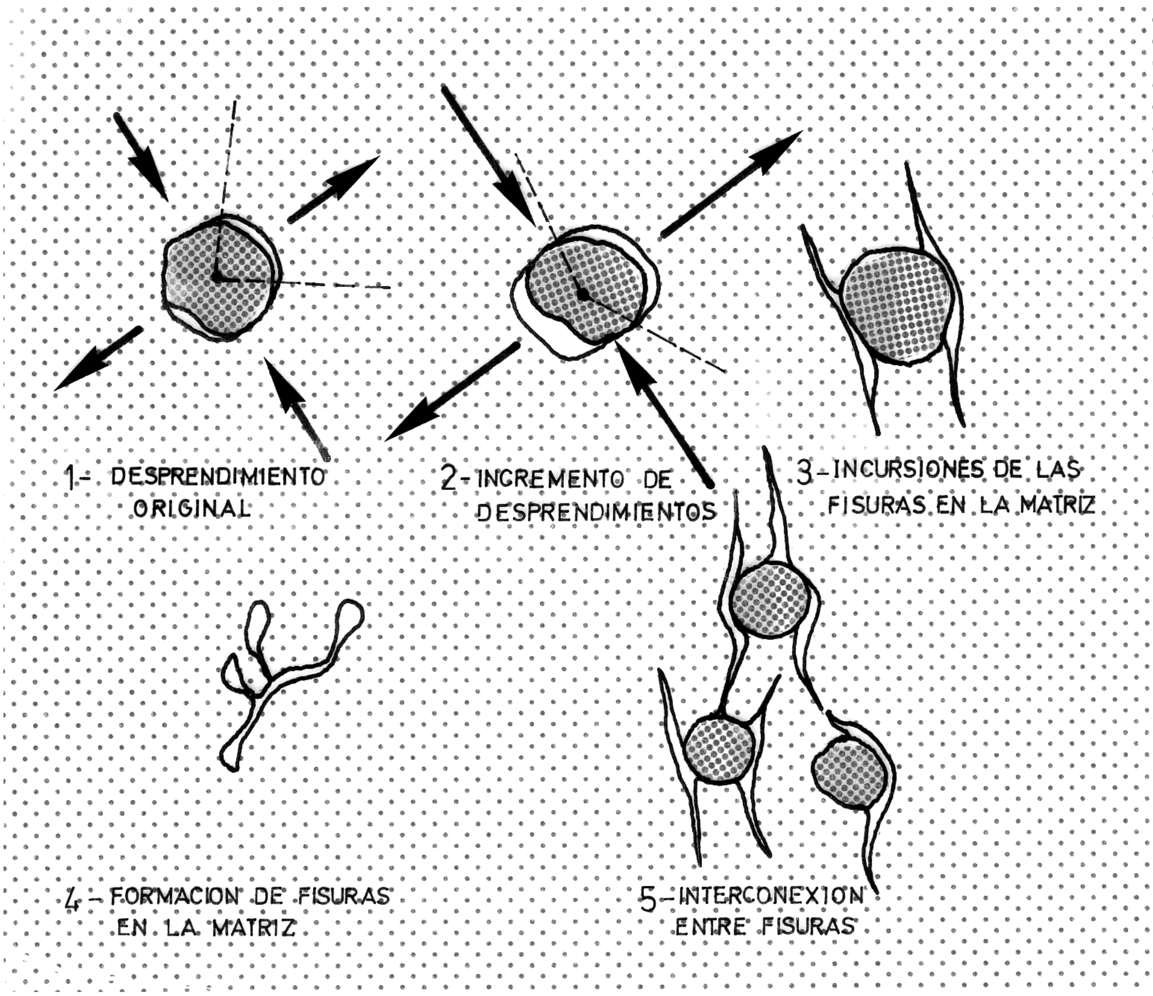

fig.(II.1): Mecanismos de daño en el hormigón [44] .

A esta descripción, se pueden agregar estudios realizados por Mindess and Diamond [11][85] , sobre fisuración de morteros de cemento, donde se puede ver que en lugar de fisuras continuas, existe una gran cantidad de *fisuras discontinuas no orientadas*. De todo esto, se deduce que la micro-fisuración sigue una distribución microscópica errática.

Esta descripción cronólogica, de los mecanismos de fallo que sufre el hormigón, es actualmente sostenida en sus aspectos generales por un gran número de investigadores [11][14][28][33][34][42][46][85][116][121][129][136] , y muestra que la fisuración a nivel microscópico (en un punto de la masa del sólido) no es un fenómeno direccional, sino adireccional, que a su vez se *propaga en determinadas direcciones* dentro del sólido, llegando a concentrase en determinadas zonas del mismo (zona de daño).

Superando el nivel microscópico, se puede observar una dirección predominante de las fisuras. Así pues, la orientación de éstas queda marcada por el lugar geométrico que describen los puntos dañados (fenómeno *macro-direccional o no-local*) y no por cada simple punto dañado (fenómeno *micro-direccional o local*).

II.3.- COMPORTAMIENTO DEL HORMIGON SOMETIDO A CARGAS, Y SU RELACION CON LOS MECANISMOS DE FALLO.

II.3.a- Comportamiento uniaxial a compresión.

El proceso por el cual el hormigón sufre deformaciones en estado de compresión uniaxial y llega al fallo como consecuencia del desarrollo e interconexión de micro-fisuras, ha sido muy estudiado por diversos investigadores [1][34][35][44][46][72][74][136]... . En este apartado, se tratarán las características fundamentales del comportamiento tensión-deformación del hormigón **fig.(II.2)**, que surge de estudios uniaxiales a compresión simple. Los resultados que se comentan, se obtienen normalmente a través de una medición de la deformación, referida a una longitud menor que tres veces el tamaño máximo del árido grueso [44] . En este contexto las fisuras no son evaluadas como una discontinuidad del material [44] .

Mediante el tipo de comportamiento volumétrico que exhibe el sólido, se pueden distinguir durante un proceso de carga cinco estados de respuesta bien definidos:

Estado I : *período de acomodamiento*, donde los poros tienden a cerrarse, tramo (*O-E'*) **fig.(II.2)**. Este período se caracteriza por una disminución de la deformación volumétrica (***apart. IV.4.d***), manteniendo constante su rigidez.

Estado II : *período elástico lineal*, que se inicia a una tensión aproximada del $10^o/_o$ de la máxima, tramo (*E'-E*) **fig.(II.2)**, y su característica fundamental es el mantenimiento constante de la rigidez y del módulo de Poisson.

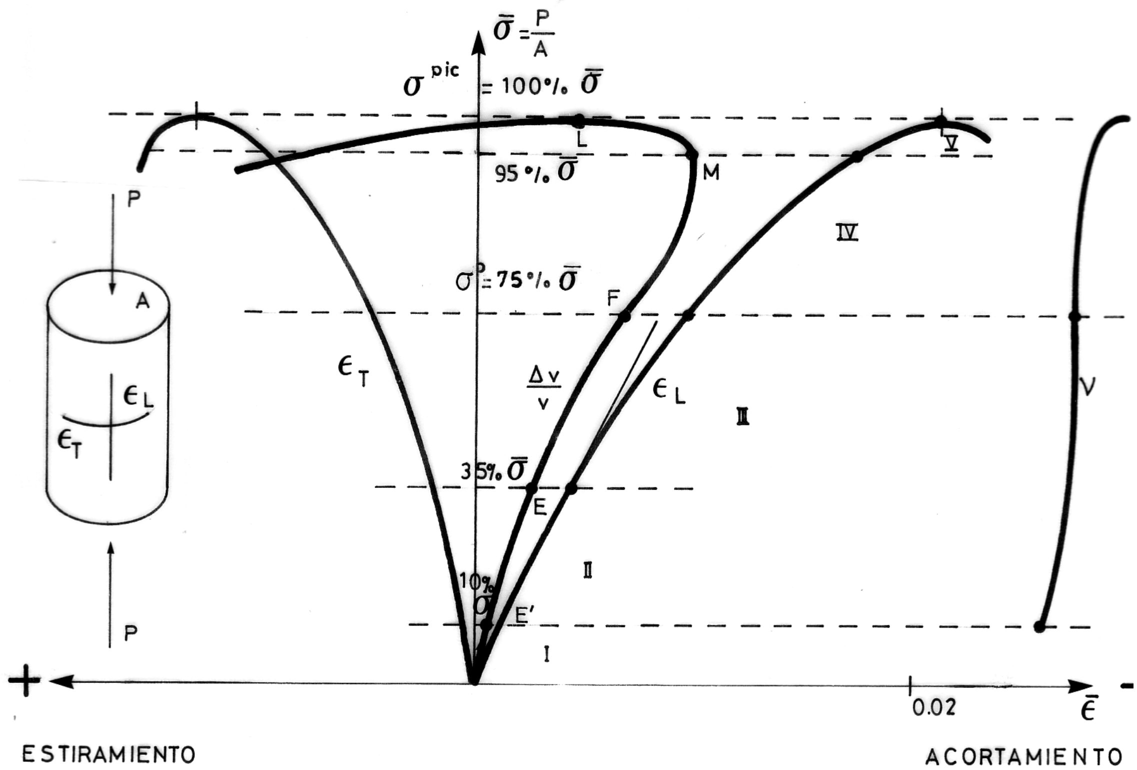

fig.(II.2): Respuesta esquemática a compresión uniaxial, estados de tensión en el hormigón [44] .

Estado III : *período elástico no-lineal*, que se inicia a una tensión de alrededor del $35^o/_o$ de la máxima, tramo (*E-F*) fig.(II.2), y su característica fundamental está marcada por un proceso donde las deformaciones, que son totalmente recuperables, crecen más que las tensiones. Esto se debe a la presencia de un fenómeno de *degradación de rigidez* [56] .

Estado IV : *período inelástico acompañado por un hinchamiento*, que se inicia a una tensión del orden del $75^o/_o$ de la máxima (límite de discontinuidad de Newman [136]), tramo (*F-M*) fig.(II.2). Se caracteriza por el aumento de las deformaciones inelásticas, mayor pérdida de rigidez, incremento del coeficiente de Poisson (hinchamiento) y crecimiento de las micro-fisuras, en la pasta de cemento, cuyo plano se orienta generalmente en forma normal a la deformación máxima positiva (estiramiento) [35][136] . En compresión uniaxial, estos planos se orientan paralelamente a la máxima tensión de compresión [72][129] , situación que coincide con el criterio antes mencionado. Este estado de comportamiento, puede asociarse con un proceso plástico, siempre que se relacione el desarrollo de deformaciones permanentes con el fenómeno de micro-fisuración [29][34] .

Estado V : *período inelástico acompañado por un importante incremento de deformación y pérdida de la estabilidad bajo carga sostenida.* Se inicia a una tensión del orden del $95^o/_o$ de la máxima, tramo (M-L) **fig.(II.2)**. Se caracteriza por que en algunos puntos, comienza un proceso de propagación inestable de fisuras. Para el estudio experimental del comportamiento más allá del pico de tensiones, es necesario realizar un ensayo con control de desplazamiento; situación que conduce a observar un ablandamiento en el material (pérdida de tensión con incrementos de deformación). Inmediatamente después de superar la tensión de pico, ocurre un fenómeno de disminución brusca del incremento de volumen, llegando rápidamente a producirse fuertes incrementos negativos de volumen **fig.(II.2)**. Con el inicio de este quinto estado, concluye el fenómeno de micro-fisuración para dar lugar a un fenómeno de fisuración macroscópica [33][34][46][129] (macro-fisuración).

Estos cinco estados, se encuentran en general para cualquier hormigón, independientemente de su resistencia. Se encuentra además, que el pico de tensiones máximas ocurre siempre para deformaciones del orden del $-2.5^o/_{oo}$, y que el aumento de la resistencia máxima, hace que el material tenga un comportamiento más frágil [33] .

En lo que respecta al módulo de elasticidad inicial E^0 , se puede decir que depende de la resistencia máxima a compresión. Es habitual estimar su magnitud, a través de expresiones formuladas empíricamente [65][134] .

Para hormigones, la relación de Poisson ν oscila entre $0.15 \leq \nu \leq 0.22$, siendo un valor razonable 0.19 *o* 0.20 . Esta relación, para procesos uniaxiales, se mantiene constante hasta el $75 - 80^o/_o$ de la tensión pico, incrementándose después de este límite hasta valores próximos a $\nu \simeq 0.5$ [33] .

II.3.b- Comportamiento uniaxial a tracción.

La forma de las curvas tensión-deformación a tracción, muestra mucha similitud con la de compresión uniaxial descrita en el apartado anterior [33][134][136] , sólo que el rango de comportamiento lineal se mantiene hasta límites más cercanos al pico de tensiones (resistencia máxima a tracción) **fig.(II.3)**. Se pueden distinguir tres estados de comportamiento:

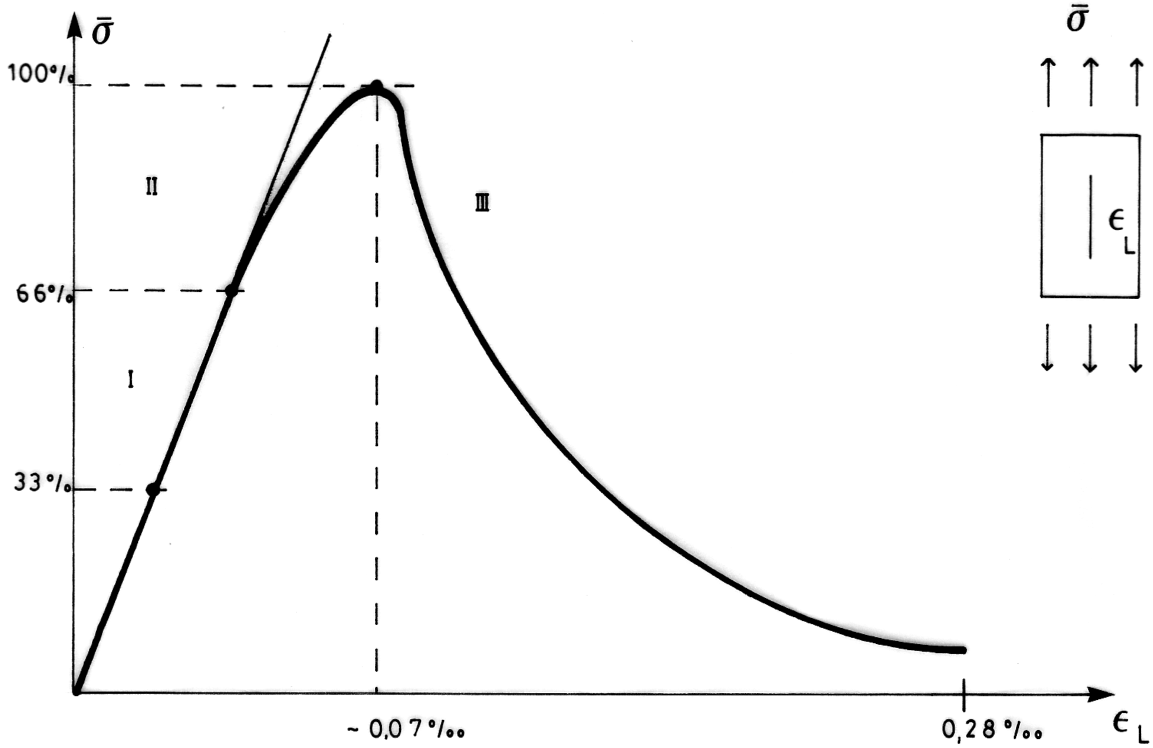

fig.(II.3): Respuesta esquemática a tracción uniaxial, estados de tensión en el hormigón [44] .

Estado I : Hasta tensiones menores al $60^o/_o$ de la máxima resistencia a tracción, se puede despreciar el fenómeno de formación de nuevas fisuras, manteniendo un comportamiento elástico-lineal. El final de este período marca el límite elástico **fig.(II.3)**.

Estado II : Por encima del límite elástico se inicia un crecimiento de las micro-fisuras (mayor desprendimiento del agregado pétreo), bajo un proceso de carga estable [44] , que se mantiene hasta alcanzar el $75^o/_o$ de la tensión pico, donde la propagación de algunas micro-fisuras se hace inestable, exhibiendo en la curva tensión deformación un comportamiento ligeramente no-lineal hasta alcanzar el pico de tensiones.

Estado III : El desarrollo de las fisuras se localiza en una zona pequeña del sólido [44] y se inicia un proceso inestable con rápida propagación de las fisuras, que sólo puede ser capturado por máquinas de ensayo muy rígidas [5][33][44] . En caso contrario sólo se registra una caída brusca de tensión, que hace pensar que se trata de un material mucho más frágil de lo que es.

Es importante remarcar que Hughes and Chapman [33] han registrado, durante ensayos de tracción uniaxial, deformaciones últimas treinta veces mayores que las correspondientes al pico de tensiones. En cambio DiTommaso [44] mantiene que la deformación máxima de tracción es del orden de cuatro veces más alta que la registrada en el momento de alcanzar el pico de tensiones. Es probable que esta seria discrepancia surja de la forma en que ambos investigadores han realizado los ensayos.

La relación entre la resistencia uniaxial inicial a compresión y tracción puede variar considerablemente entre los siguientes límites $10.0 \leq \sigma_C^0/\sigma_T^0 \leq 20.0$ [33][133] .

El módulo de elasticidad en tracción uniaxial es algo mayor que a compresión uniaxial, el coeficiente de Poisson algo más bajo, y la deformación en el pico de tensiones oscila entre $0.07^o/_{oo}$ y $0.15^o/_{oo}$.

II.3.c- Comportamiento biaxial.

El vasto espectro del comportamiento de las estructuras puede ser muchas veces aproximado mediante estados planos de tensión o deformación, resultando por lo tanto de gran interés el estudio de la respuesta del hormigón bajo estados de tensión biaxial. Para diferentes combinaciones biaxiales de tensiones, el hormigón exhibe propiedades distintas que las descritas para procesos uniaxiales de tracción o compresión. En lo que respecta a su resistencia máxima, se pueden observar incrementos del orden del $22.0 - 25.0^o/_o$ para estados de compresión biaxial con una relación entre tensiones principales máximas y mínimas de $(\sigma_3/\sigma_1) = 0.5$, y del $16.0^o/_o$ para estados de compresión biaxial con una relación entre tensiones principales máximas y mínimas de $(\sigma_3/\sigma_1) = 1.0$ [74][136] **fig.(II.4,a)**. Además, para estados de tracción-compresión, la resistencia decrece *casi* linealmente cuando la tensión de tracción crece. Para tracción biaxial, la resistencia es muy similar a la que se obtiene en tracción uniaxial [35][74][136] .

Para compresión biaxial, el hormigón sufre un incremento de rigidez inicial,

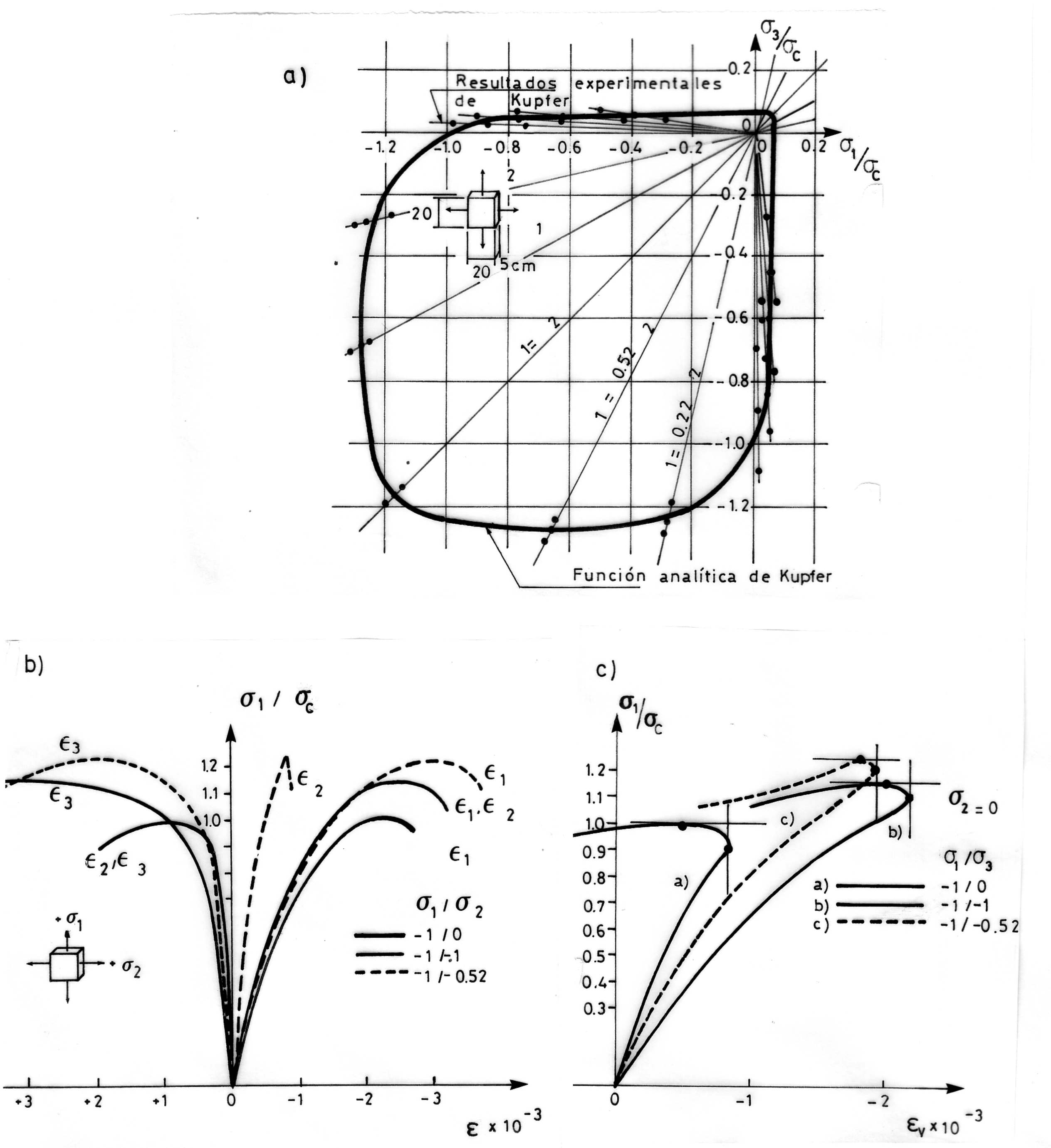

fig.(II.4): Resultados de un ensayo biaxial de compresión biaxial en una probeta de hormigón de $20 \times 20 \times 5cm$. (Kupfer et al. [74]): a) Superficie de resistencia máxima del hormigón. b) Relaciones tensión-deformación. c) Deformación volumétrica.

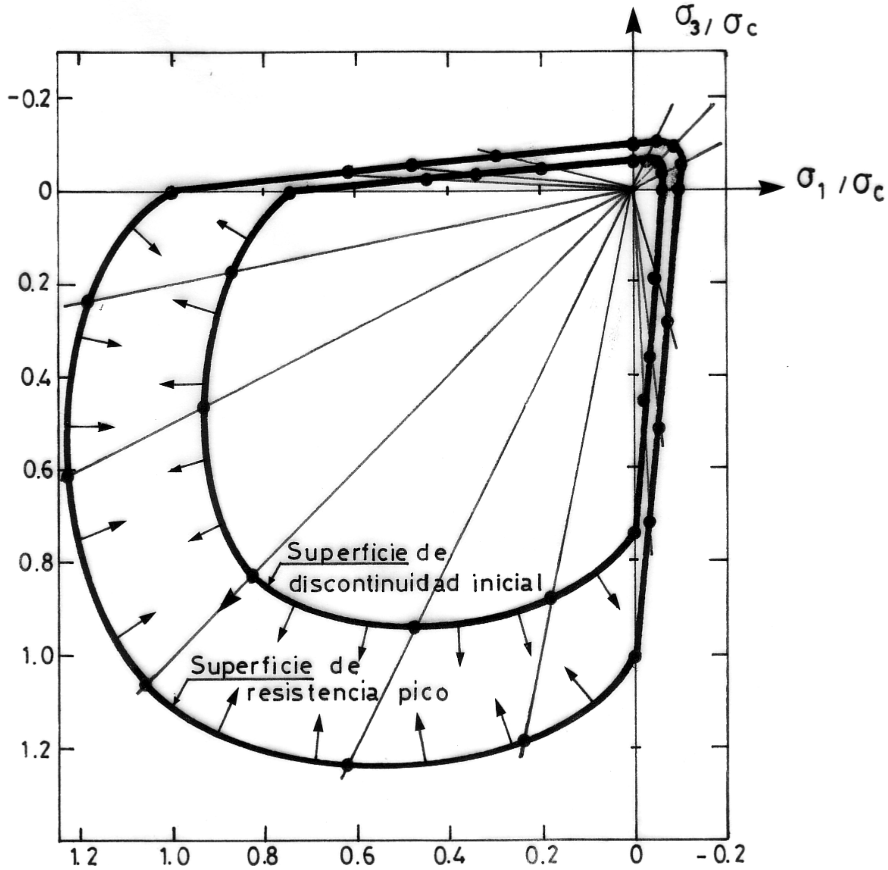

fig.(II.5): Superficie de discontinuidad inicial y de resistencia pico [136] .

respecto de la respuesta uniaxial, que puede ser atribuído al efecto Poisson [134] , y un incremento de ductlilidad en el pico de tensión **fig.(II.4,b)**, que indica que hay una reducción del daño interno [134] . Hay también una disminución de volumen más marcada que para el proceso uniaxial de compresión **fig.(II.4,c)**.

La formación de las fisuras ocurre aproximadamente en una *dirección perpendicular a la máxima deformación de tracción* [35][136] , situación que puede ser comprobada en los modos de fallo que da Nilssen [33] para las distintas combinaciones posibles de tensión biaxial **fig.(II.6)**.

Esta micro-fisuración, es una de las principales causas que producen un comportamiento no lineal en el hormigón, y que conducen a desarrollar el fenómeno denominado *dilatancia* [35] .

La *superficie de discontinuidad inicial* en hormigones (para los metales la primera superficie de fluencia), mantiene su forma a medida que evoluciona el proceso de carga [136] , de manera que el *endurecimiento* o el *ablandamiento* isotrópico producen, como es obvio, un *crecimiento* o *decrecimiento homotético* del dominio elástico, respectivamente **fig.(II.5)**.

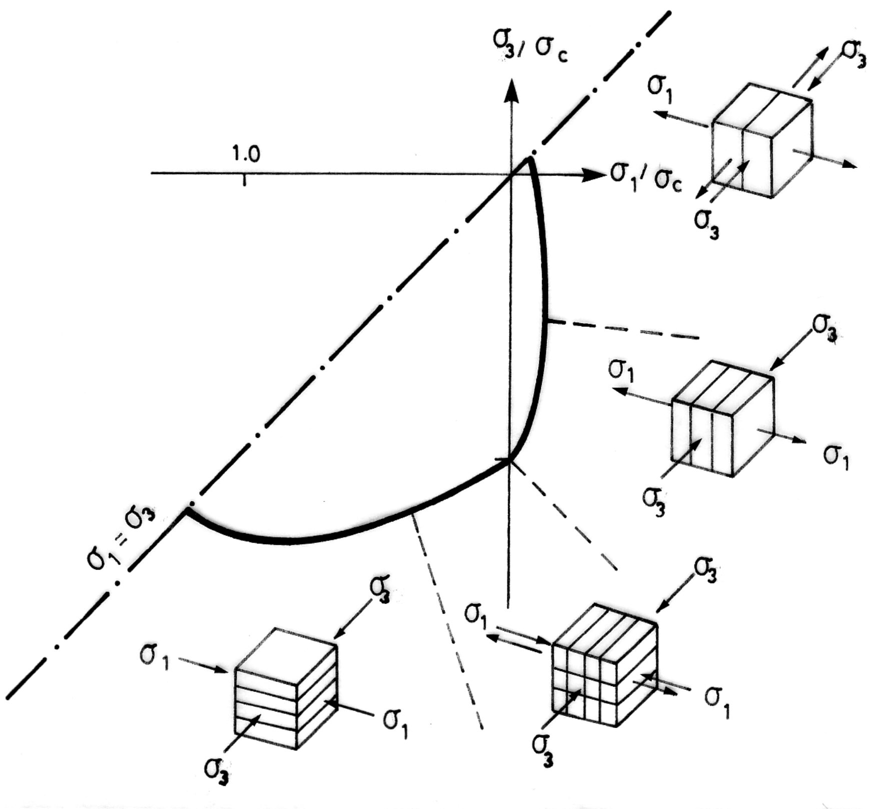

fig.(II.6): Modos de fallo para distintas combinaciones biaxiales de tensión [33] .

II.3.d- Comportamiento triaxial [134] **.**

Bajo comportamiento triaxial de tensiones, el hormigón exibe una superficie de discontinuidad como la que muestra la **fig.(II.7,a)**. Estudios experimentales realizados sobre hormigones, demuestran que estas superficies pueden ser definidas en función de tres invariantes ξ, ρ, θ (***anexo-E***), que se interpretan geométricamente como las coordenadas cilíndricas de la superficie de fluencia en el espacio de Haigh-Westergard (espacio de tensiones principales). Algunas propuestas indican que la condición de fluencia, bajo estados triaxiales de tensión, puede ser representada por sólo dos invariantes de tensión σ_{oct} y τ_{oct} , siendo éstas las tensiones octaédricas normal y de corte respectivamente, sin embargo las formulaciones más generales tienen en cuenta la influencia del tercer invariante, a través del ángulo de similaridad θ .

Algunos investigadores encuentran que la forma y posición de la superficie de fluencia, es independiente del proceso de carga, al tiempo que otros afirman lo contrario [134] .

Ensayos experimentales [72] , indican que el hormigón exhibe un comportamiento no-lineal en tensión deformación bajo estados hidrostáticos de tensión. Ensayos de este tipo, indican que para un punto que se encuentra sobre la superficie de fluencia, con una presión hidrostática constante $\sigma_{oct} = cte.$, si se incrementa la tensión octaédrica desviadora en $\Delta\tau_{oct}$ se produce, como es obvio, un incremento de la deformación tangencial octaédrica $\Delta\gamma_{oct}$, que viene acompañado por un incremento en la deformación normal octaédrica $\Delta\epsilon_{oct}$, situación que deriva de considerar un flujo plástico con una componente octaédrica distorsional y otra normal (característica de los materiales friccionales) (ver también el concepto de dilatancia ***apart. IV.4.d***). Este incremento de deformación octaédrica normal, marca una de las características más significativas del hormigón, que es su incremento de volumen (dilatancia). Otra característica digna de destacar, es el incremento de ductilidad que se produce con el incremento de la presión hidrostática **fig.(II.7,b)**.

II.3.e- Conclusiones generales sobre el comportamiento del hormigón sometido a cargas.

De los trabajos realizados por los distintos investigadores, que han sido mencionados a lo largo de este capítulo, pueden extraerse las siguientes conclusiones generales sobre el comportamiento del hormigón sometido a cargas:

- La relación entre las resistencias iniciales uniaxiales de compresión y tracción, oscila entre $10.0 \leq \sigma_C^0/\sigma_T^0 \leq 20.0$, dependiendo del grado de micro-fisuración previa al estado de carga.

- La resistencia última del hormigón bajo compresión biaxial, es mayor que la obtenida para compresión uniaxial, con incrementos de un $22.0^o/_o$ para relaciones de tensión $(\sigma_3/\sigma_1) = 0.5$. Para estados biaxiales de compresión-tracción, la resistencia a compresión decrece *casi* linealmente con el aumento

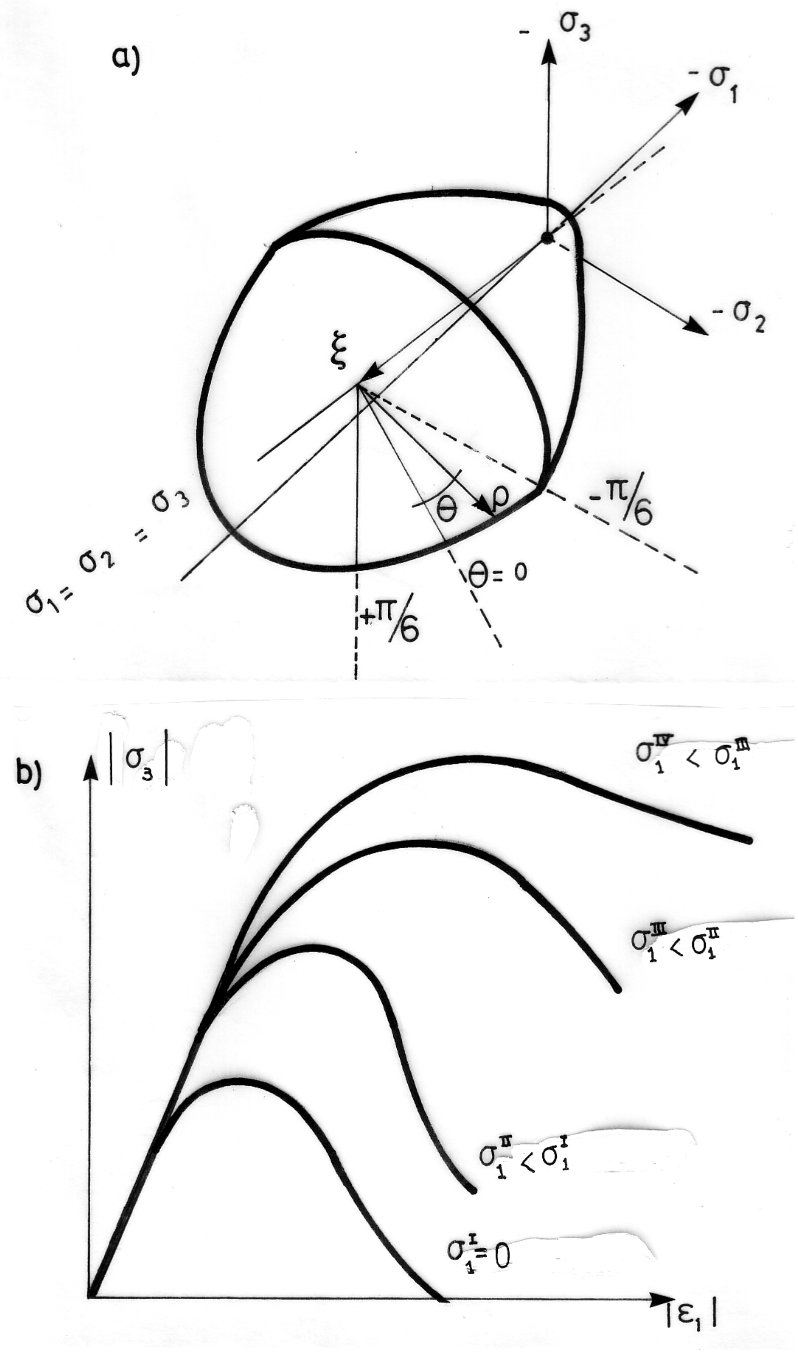

fig.(II.7): a) Superficie de discontinuidad genérica para el hormigón. b) Comportamiento triaxial $\sigma_3 \leq \sigma_2 = \sigma_1$ para distintos incrementos de σ_1 .

de la tracción aplicada. Bajo tracción biaxial la resistencia del hormigón crece un poco respecto a la correspondiente uniaxial.

– Las curvas de tensión-deformación uniaxial, poseen la misma forma a compresión que a tracción.

- En compresión uniaxial y biaxial, la deformación para el pico de tensiones oscila alrededor de $-2.5^o/_{oo}$, siendo ligeramente mayor para compresión biaxial. Para tracción uniaxial y biaxial, la deformación correspondiente al pico de tensiones oscila entre $0.07^o/_{oo}$ y $0.15^o/_{oo}$.

- El módulo elástico en tracción uniaxial es ligeramente mayor que en compresión uniaxial, al tiempo que el coeficiente de Poisson en tracción es algo más baja que en compresión.

- El módulo elástico inicial en compresión biaxial, es significantemente mayor que en compresión uniaxial.

- Por lo general, para todos los ensayos uniaxiales y biaxiales, el fallo ocurre como una rotura por estiramiento, cuya superficie es aproximadamente ortogonal a la deformación de tracción máxima.

- El inicio e incremento de la fisuración, configura una discontinuidad en la respuesta tensión-deformación del hormigón, tanto en compresión como en tracción uniaxial, cuando se alcanzan tensiones del orden del $75.0^o/_o$ de la resistencia máxima a compresión en el primer caso, y del $60.0^o/_o$ de la resistencia máxima a tracción en el segundo. Previo a alcanzar estos límites, durante el periodo elástico actúa preponderantemente el fenómeno de degradación de rigidez. Esta continúa durante el período inelástico, pero en este caso se torna menos importante mientras más crece el proceso irreversible.

II.4.- RELACIONES TENSION-DEFORMACION VOLUMETRICA y DISTORSIONAL.

Suponiendo que el hormigón tiene un comportamiento isotrópico [29] , es posible estudiar su respuesta en un punto, a partir de la combinación de un comportamiento volumétrico con otro de cizalladura [29][33] . De esta manera, se puede tratar al fenómeno de degradación de rigidez en forma diferenciada para los módulos volumétrico K^0 y de cizalladura G^0 , situación que se evidencia en los ensayos experimentales. Así , la ley tensión deformación puede ser expresada por una relación de componentes octaédricas [29][33] , del siguiente tipo:

$$\begin{aligned} \sigma_{oct} &= 3\ K_S\ \epsilon_{oct} = K_S\ \epsilon_v \\ \tau_{oct} &= G_S\ \gamma_{oct} \end{aligned} \qquad (II.1)$$

siendo $K_S = K_S(I'_1, I'_2, I'_3)$, y $G_S = G_S(I'_1, I'_2, I'_3)$, y I'_i el invariante *i-ésimo* del tensor de deformaciones $\boldsymbol{\epsilon}$. Debido a la limitada cantidad de información experimental que existe sobre este comportamiento diferenciado, el módulo de rigidez volumétrico secante y el de cizalladura, son expresados normalmente en función del primer invariante I'_1 del tensor de deformaciones y del segundo invariante J'_2 del tensor desviador de deformaciones, respectivamente. Existen varias expresiones cuasi-empíricas para definir estos módulos secantes [33] , y en el ***apart. IV.8.d***, se proponen expresiones simples, que se ajustan bastante bien a las experiencias de Cedolin et al. [29] y de Kotsovos-Newman [72] .

CAPITULO III

MODELOS CONSTITUTIVOS PARA HORMIGONES
– ESTADO DEL ARTE –

III.1.- INTRODUCCION.

Existe una gran cantidad de *modelos constitutivos* que permiten describir el comportamiento de los materiales friccionales, especialmente de los hormigones, sometidos a estados de cargas. Estos modelos intentan simular el comportamiento de un *material ideal* que resulta de considerar ciertas hipótesis simplificativas en el *sólido real*. Varios autores han dedicado una gran cantidad de trabajo para clasificar, ordenar y analizar gran parte de estos modelos constitutivos [13][26][33][35][134][149] , por lo que se considera innecesario realizar un "verdadero" *estado del arte* sobre el tema. Con el fin de *encuadrar el modelo que se presenta* en el contexto general existente, y sin caer en la repetición de las formas y temas ya tratados en los artículos previamente citados, se presentará una clasificación general de los modelos constitutivos desarrollados para el tratamiento del hormigón, citándose algunos de los más destacados.

Existen distintos puntos de vista para clasificar los modelos constitutivos aplicados al hormigón, sin embargo, parece adecuado presentarlos ordenados en cuatro grupos: **1)** Modelos basados en las teorías de elasticidad lineal y no lineal, **2)** Modelos basados en la teoría de la plasticidad, **3)** Modelos basados en la teoría endocrónica de la plasticidad y **4)** Modelos de fractura. Otras formas de realizar este ordenamiento, con ligeras diferencias, pueden ser consultadas en las referencias [13][26][33][35][134]. Cada uno de estos grupos incluye modelos constitutivos que reproducen, en forma numérica, el comportamiento del hormigón dentro de ciertos rangos más o menos limitados. En este momento existen investigaciones de vanguardia en casi todos estos grupos, sin que aún se pueda marcar, en forma objetiva, una mayor preponderancia de unos sobre otros.

A continuación se hará una breve presentación de algunos de los modelos ya existentes, formulados para tratar el comportamiento del hormigón.

III.2.- MODELOS ELASTICOS.

Muchos estudios se siguen realizando mediante el uso de modelos elásticos que suponen el comportamiento del hormigón como un sólido ideal de características **elásticas y lineales** . Esta hipótesis simplificativa, surge de la similitud que presenta el comportamiento del hormigón con el de un material *elástico-lineal e isótropo* para situaciones de cargas bajas (tensiones muy inferiores al límite elástico). No obstante esta limitación, es normal ver modelos constitutivos que mantienen el comportamiento elástico lineal hasta alcanzar la tensión límite de elasticidad, para luego proseguir con un comportamiento *elástico lineal ortótropo* [26] (ver también al final de este ***apart. III.2***). A pesar de las evidentes limitaciones que presenta el uso de las teorías elásticas para simular el comportamiento de materiales como el hormigón, estas corrientes de investigación se mantienen vigentes, debido a las dificultades encontradas en la evaluación de los diversos parámetros que intervienen en los modelos basados en teorías más complicadas.

Las leyes constitutivas **elásticas no-lineales**, dan respuestas muy concordantes con la realidad mientras se mantengan ciertas características tenso-deformacionales derivadas de estados de *carga radial* o *proporcional monotónica creciente*. Estos modelos elásticos, generalmente atribuyen el comportamiento no lineal del hormigón a la degradación que sufre la rigidez del material durante un proceso de carga sostenida.

Hay dos formas clásicas de presentar las leyes constitutivas formuladas para los modelos elásticos [43][134] : **1)** a través de una **formulación total** basada en una relación tensión-deformación secante [26][29] , incluyéndose aquí tanto las *formulaciones elásticas de Cauchy* [43] , como las *hiperelásticas o elásticas de Green* [33][43][134] ; y **2)** mediante una **formulación diferencial** basada en una relación tensión deformación tangente [3][43][127] , denominada *formulación hipoelástica*.

III.2.a- Formulación secante total.

En la **formulación secante total** o de Cauchy, el estado tensional actual $\boldsymbol{\sigma}$, viene definido por una función del estado de deformaciones actual $\boldsymbol{\epsilon}$, o viceversa:

$$\sigma_{ij} \;=\; f_{ij}(\epsilon_{kl}) \;=\; \left[D_{ijkl}(\epsilon_{kl})\right]_S \;\epsilon_{kl} \tag{III.1}$$

donde se puede ver que f_{ij} es una función tensorial de la respuesta del material. De ésta, resulta que se trata de un modelo donde el comportamiento del material es independiente del camino recorrido, situación que conduce a denominarlo *modelo de material sin memoria.* Debido a esto, se pueden violar las leyes de la termodinámica, razón que restringe el rango general de aplicación de estos modelos, se restringe a regímenes de carga monotónica creciente y radiales.

Para evitar las inconsistencias termodinámicas que podrían presentarse durante situaciones de cargas cíclicas, se recurre a la *formulación total hipoelástica* o de Green [43] . En ésta se admite que el campo de tensiones y deformaciones deriva de una función de energía específica w y de su complementaria Ω , respectivamente. Esto es:

$$\sigma_{ij} \;=\; \frac{\partial w}{\partial \epsilon_{ij}} \qquad ; \qquad \epsilon_{ij} \;=\; \frac{\partial \Omega}{\partial \sigma_{ij}} \tag{III.2}$$

donde $\dot{w} = \sigma_{ij}\,\dot{\epsilon}_{ij}$, y $\dot{\Omega} = \epsilon_{ij}\,\dot{\sigma}_{ij}$. Entre los modelos basados en esta formulación, está el de Evans and Pister (1966) y el de Ko and Masson (1976), que se tratan brevemente en la referencia [33] , y los de Cedolin, Crutzen and Dei Poli [26][29] , y Kotsovos and Newman [29][72] que se presentan a continuación en forma sintética.

- **Modelo de Cedolin et al.** [29] **.**

Este modelo, propone una relación tensión-deformación elástica no-lineal e isotrópica para el tratamiento del comportamiento triaxial del hormigón. Su formulación se basa en una ley secante-desacoplada, que permite el tratamiento del problema volumétrico y transversal en forma diferenciada (ver también ***apart. IV.8.d*** y ***apart. A-I.2.***). Esto es:

$$
\begin{aligned}
\sigma_{oct} &= 3\ K_S^D(\epsilon_{oct})\ \epsilon_{oct} \quad , \\
\tau_{oct} &= G_S^D(\gamma_{oct})\ \gamma_{oct} \quad ,
\end{aligned}
\tag{III.3}
$$

con:

$$
\begin{aligned}
K_S^D &= K^0\ \left[a\ b^{-\epsilon_{oct}/c}\ + d\right] \quad , \\
G_S^D &= G^0\ \left[p\ q^{-\gamma_{oct}/r}\ - s\ \gamma_{oct}\ + t\right] \quad , \\
&a = 0.85\ , \quad b = 2.50\ , \quad c = 0.0014\ , \quad d = 0.15\ , \quad p = 0.81\ , \\
&q = 2.00\ , \quad r = 0.002\ , \quad s = 2.00\ , \quad t = 0.19\ ,
\end{aligned}
$$

siendo las funciones $K_S^D(\epsilon_{oct})$ y $G_S^D(\gamma_{oct})$, una aproximación funcional de resultados experimentales [29] . En un modelo de este tipo, suponer que el módulo volumétrico $K_S^D(\epsilon_{oct})$ depende sólo de la deformación octaédrica normal ϵ_{oct} es bastante cuestionable, puesto que se ha encontrado en ensayos experimentales que la micro-fisuración y la dilatancia, se deben fundamentalmente al efecto que producen las tensiones desviadoras [73] . Los módulos iniciales, volumétrico y distorsional, pueden ser obtenidos a partir de su relación con el módulo de Young inicial E^0 , y la relación de Poisson inicial ν^0 [33] , y viceversa:

$$
\begin{aligned}
K^0 &= \frac{E^0}{3(1-2\nu^0)} \quad , \quad G^0 = \frac{E^0}{2(1+\nu^0)} \quad , \\
E^0 &= \frac{9K^0G^0}{3K^0+G^0} \quad , \quad \nu^0 = \frac{3K^0-2G^0}{2(3K^0+G^0)}
\end{aligned}
\tag{III.4}
$$

Las *ecs.(III.3)* han sido también presentadas en forma diferencial [29] . Esto es:

$$
\frac{d\sigma_{oct}}{d\epsilon_{oct}} = 3\ K_T^D \quad , \quad \frac{d\tau_{oct}}{d\gamma_{oct}} = G_T^D
\tag{III.5}
$$

con:

$$K_T^D = K^0 \left[a \left(1 - \frac{ln\, b\ \epsilon_{oct}}{c} \right) b^{-\gamma/c} + d \right] \quad ,$$

$$G_T^D = G^0 \left[p \left(1 - \frac{ln\, q\ \gamma_{oct}}{r} \right) q^{-\gamma/r} + t \right] \quad ,$$

- **Modelo de Kotsovos-Newman** [72] **.**

Este modelo, presenta una relación tensión-deformación *elástica no-lineal e isótropa*, que permite simular el comportamiento triaxial del hormigón. La diferencia con el modelo mencionado anteriormente (Cedolin et al. [29]), consiste en que incorpora en su relación constitutiva el acoplamiento entre la deformación normal y la tensión desviadora. Para ello, el modelo de Kotsovos-Newman propone la siguiente función de variación del módulo secante volumétrico y distorsional:

$$\begin{aligned} K_S^D &= K^0 \left[1 + 0.52 (\sigma_{oct}/\sigma_C^{pic})^{1.09} \right]^{-1} \quad , \\ G_S^D &= 2\, G^0 \left[1 + 3.57 (\tau_{oct}/\sigma_C^{pic})^{1.7} \right]^{-1} \quad , \end{aligned} \qquad \textit{(III.6)}$$

donde σ_C^{pic} es la resistencia uniaxial pico a compresión uniaxial. Para los módulos tangentes, han propuesto las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} K_T^D &= K^0 \left[1 + 1.08 (\sigma_{oct}/\sigma_C^{pic})^{1.09} \right]^{-1} \quad , \\ G_S^D &= 2\, G^0 \left[1 + 9.63 (\tau_{oct}/\sigma_C^{pic})^{1.7} \right]^{-1} \quad , \end{aligned} \qquad \textit{(III.7)}$$

Tanto el modelo de Cedolin et al., como el de Kotsovos-Newman, concuerdan bastante bien hasta un cierto límite, a partir del cual muestran grandes divergencias **fig.(III.1)**.

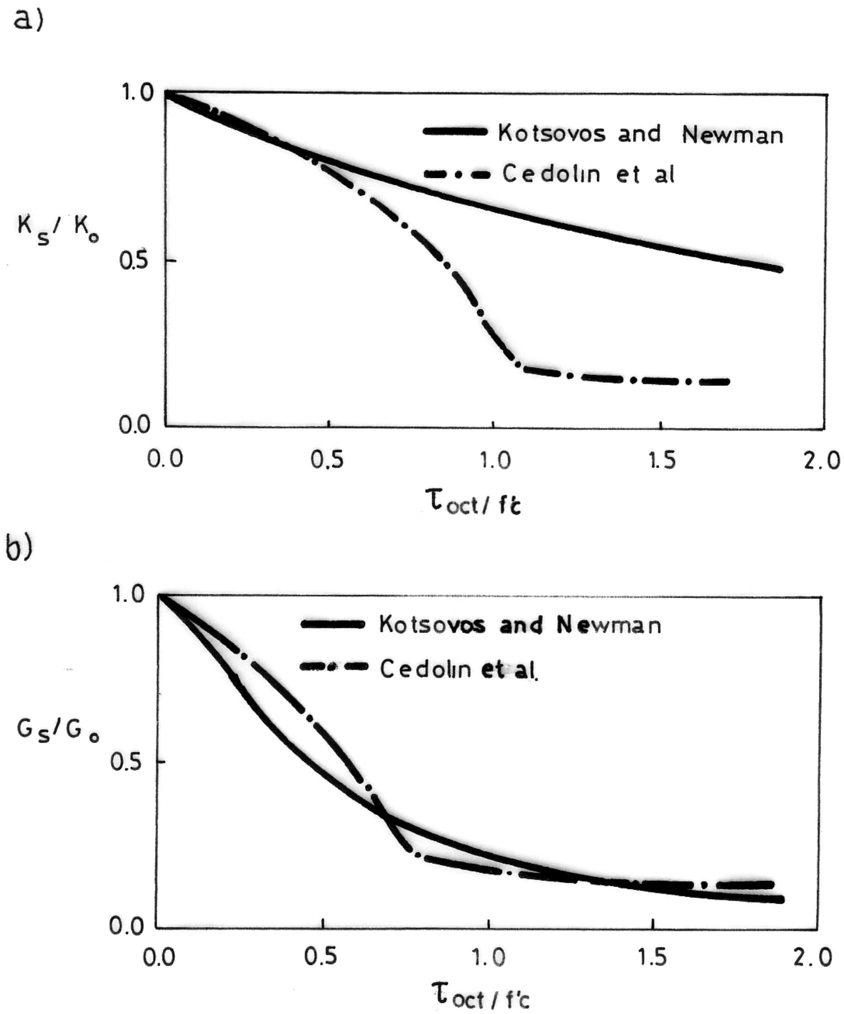

fig.(III.1): Comparación entre módulos elásticos correspondientes a las formulaciones de Cedolin et al. [29] y Kotsovos and Newman [72] . a) Módulo volumétrico secante, b) módulo de corte secante.

III.2.b- Formulación diferencial.

La **formulación diferencial** o tambien denominada elástica incremental, contiene a los modelos conocidos con el nombre de *hipoelásticos* [33][43] . Esta formulación, se utiliza a menudo para describir el comportamiento de materiales en los que el estado de tensión depende del estado de deformación actual y del camino de tensión que ha seguido el proceso. En general, la relación constitutiva incremental puede presentarse como:

$$\dot{\sigma}_{ij} = f_{ij}(\dot{\epsilon}_{kl}, \sigma_{mn}) \qquad \textit{(III.8)}$$

siendo f_{ij} una función tensorial de la respuesta del material.

En los casos particulares, donde el incremento de deformación $\dot{\epsilon}_{kl}$ es lineal respecto del incremento de tensión $\dot{\sigma}_{ij}$, se puede escribir la *ec.(III.8)* como:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{ij} &= [D_{ijkl}(\sigma_{mn})]_T \ \dot{\epsilon}_{kl} \\ &\text{o} \\ \dot{\sigma}_{ij} &= [D_{ijkl}(\epsilon_{mn})]_T \ \dot{\epsilon}_{kl} \end{aligned} \qquad (III.9)$$

siendo $[D_{ijkl}]_T$ el tensor de rigidez tangente del material, que puede estar en función de los tensores de tensión o deformación. Debido a que el comportamiento del material depende del camino recorrido, estos modelos ofrecen una estructura más realista del comportamiento del hormigón para estados general de carga (regímenes de carga creciente no-monotónica y no-radial). Sin embargo, estos modelos fallan en procesos que involucren descargas [134] . Por ello, se dice que los modelos hipoelásticos tienen memoria limitada para procesos de carga reversible. [26] .

Entre los modelos más destacados de este grupo, se encuentran: El modelo de Bathe and Ramaswamy y el de Saenz, que pueden ser consultados en las referencias [3] y [127] , respectivamente, y los de Shareef and Buyukozturk [26] , que juntamente con el de Dougill [46][56] serán presentados seguidamente, en forma sintética

- **Modelo de Shareef and Buyukozturk [26] .**

Este modelo, se basa en una formulación hipoelástica ortótropa, que permite simular el comportamiento tridimensional del hormigón. La relación constitutiva empleada, se basa en el concepto de una particular *deformación uniaxial equivalente*, similar a la formulación de Saenz [127] . En este modelo, la relación constitutiva tangente se formula en función del estado de tensión y deformación en cada dirección principal del tensor de tensiones actualizado, por separado. Las tres direcciones principales de tensión, definen tres direcciones de comportamiento ortotrópico. Así , la relación constitutiva puede ser escrita en forma incremental del siguiente modo:

$$\dot{\sigma}_{ij} \;=\; [D_{ijkl}]_T \;\dot{\epsilon}_{kl} \tag{III.10}$$

siendo la matriz de 6×6 correspondiente al tensor de rigidez tangente de cuarto orden:

$$\boldsymbol{D} \;=\; \frac{1}{\phi_\nu} \begin{bmatrix} (1-\nu^2)E_1 & \nu(1+\nu)\sqrt{E_1E_2} & \nu(1+\nu)\sqrt{E_1E_3} & & \mathbf{0} & \\ & (1-\nu^2)E_2 & \nu(1+\nu)\sqrt{E_1E_3} & & & \\ & & (1-\nu^2)E_3 & & & \\ & & & \phi_\nu G_{12} & & \\ & \textbf{\textit{sim.}} & & & \phi_\nu G_{23} & \\ & & & & & \phi_\nu G_{31} \end{bmatrix}$$

donde $E_1,\ E_2,\ y\ E_3$ son los módulos de Young en las direcciones principales $1,\ 2,\ y\ 3$, respecticamente; $\phi_\nu = 1 - 3\nu^2 - 2\nu^3$, donde ν es el coeficiente de Poisson. $G_{12},\ G_{23},\ y\ G_{31}$ son los módulos de corte para los planos formados por las direcciones principales $(1-2),\ (2-3),\ y\ (3-1)$ respectivamente, siendo $G_{ij} = \alpha_\nu \sqrt{E_iE_j}$, donde α_ν es un coeficiente de transferencia de corte, que para el hormigón no fisurado vale $\alpha_\nu = \frac{1}{2}(1+\nu)$ y oscila entre $0 \leq \alpha_\nu \leq 0.2$ una vez que ha fisurado, segun el grado de engranamiento que hay entre caras de fisura. El coeficiente de Poisson se mantiene constante hasta valores de 0.75-0,80 de la resistencia uniaxial pico σ_C^{pic} , y luego crece rápidamente.

La *deformación uniaxial equivalente* $\overline{\epsilon}_{i\ u}$, para cada dirección principal del tensor de tensiones $\boldsymbol{\sigma}$, viene dada por la siguiente expresión particular:

$$\overline{\epsilon}_{i\ u} \;=\; \frac{\epsilon_i}{1 - \nu\ \dfrac{\sigma_j + \sigma_k}{\sigma_i}} \tag{III.11}$$

La relación tensión-deformación equivalente, para cada dirección principal del tensor de tensiones, se expresa de la siguiente forma:

$$\sigma_i = \frac{\sigma_{i\ c}}{\epsilon_{i\ c}} \frac{n\ \epsilon_{i\ u}}{n - 1 + (\epsilon_{i\ u}/\epsilon_{i\ C})^n} \tag{III.12}$$

tal que en la *ec.(III.11)* y *ec.(III.12)*, i representa una de las direcciones principales de tensión, $\sigma_{i\ c}$ y $\epsilon_{i\ c}$ corresponden a la resistencia y deformación correspondientes al pico de tensiones, asociadas a la dirección i respectivamente, y $n = (E^0 \epsilon_{i\ c})/(E^0 \epsilon_{i\ c} - \sigma_{i\ c})$ es un factor de forma **fig.(III.2)**.

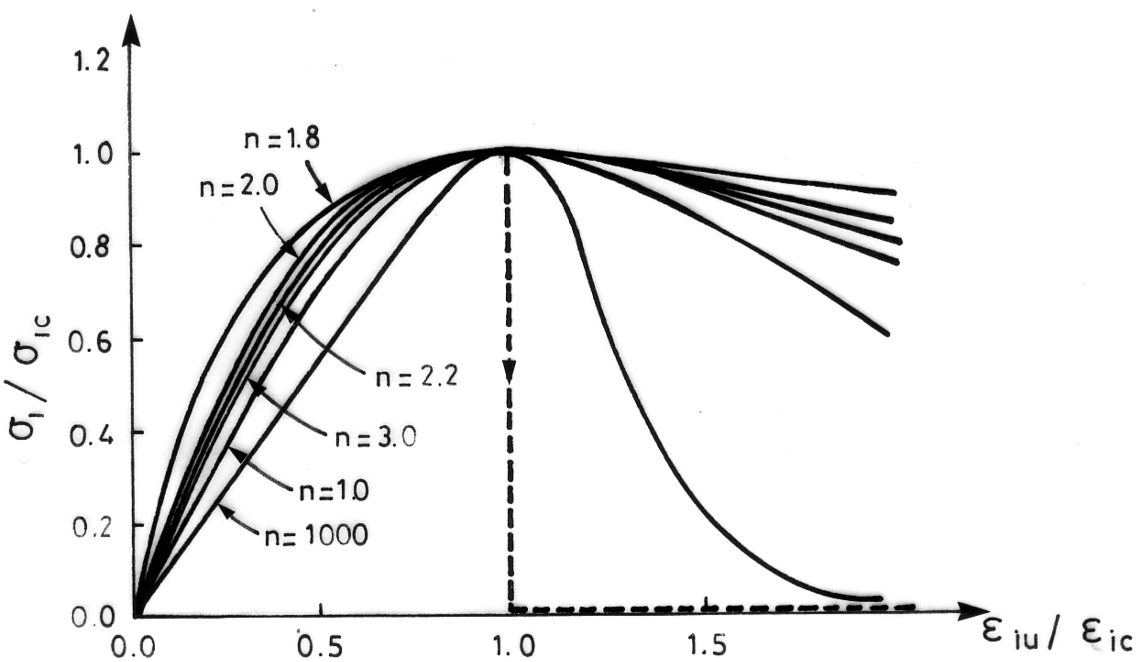

fig.(III.2): Relación tensión-deformación uniaxial equivalente en una dirección principal de tensión.

Estas relaciones de tensión-deformación uniaxial equivalente, se utilizan para la determinación de los módulos de Young tangentes que intervienen en la *ec.(III.10)*. Esto es:

$$E_i = \frac{d\sigma_i}{d\epsilon_{i\ u}} = \frac{[1 - (\epsilon_{i\ u}/\epsilon_{i\ c})^n]\ \ n(n-1)(\sigma_{i\ c}/\epsilon_{i\ c})}{[n - 1 + (\epsilon_{i\ u}/\epsilon_{i\ c})^n]^2} \tag{III.13}$$

Esta formulación puede también extenderse a cargas cíclicas, por lo que se recomienda consultar la referencia [26]

- **Modelo de fractura progresiva de Dougill [46][56] .**

Dentro de los modelos *elásticos no lineales*, se puede incluir también el **modelo de fractura progresiva de Dougill** [46][56] . Esta teoría pone énfasis en modelar la degradación de la rigidez elástica, ocurrida en un sólido durante un estado de *fractura progresiva*. Este modelo introduce una *superficie de fractura* o degradación, en el espacio de deformaciones, del siguiente tipo:

$$\Phi^d(\epsilon_{ij}, w^d) \; = \; \phi^d(\epsilon_{ij}) \; - \; H^d(w^d) \; = \; 0 \qquad \textit{(III.14)}$$

con:

$$\phi^d(\epsilon_{ij}) \; = \; \epsilon_{ij} \; c^d_{ij} \qquad ; c^d_{ij} = \textit{cte.}$$

donde ϵ_{ij} y w^d representan la deformación actual y el trabajo específico de degradación, respectivamente; $\phi^d(\epsilon_{ij})$ es una función que depende del estado actual de las deformaciones, y $H^d(w^d)$ es la función de endurecimiento por degradación. Durante un proceso de *fractura progresiva*, cuando se cumple que $\Phi^d(\epsilon_{ij}, w^d) = 0$, la superficie homónima *ec.(III.14)* se expande isotrópicamente en función del trabajo específico de degradación w^d , que conceptualmente tiene el sentido de una *variable de endurecimiendo por degradación*, permitiendo obtener en cada instante del proceso pseudo-estático, la deformación ϵ_{ij} que satisface la *ec.(III.14)*.

Este modelo, considera que el comportamiento es siempre elástico, y por ello durante la evolución del proceso no-lineal no se desarrollan mecanismos inelásticos. De esta forma, al suspender la carga el material retorna a su estado original, siguiendo una ley elástica lineal secante, sin que aparezcan deformaciones permanentes. O sea, en todo proceso de descarga se cumple la siguiente relación constitutiva secante total:

$$\sigma_{ij} \; = \; [D_{ijkl}] \; \epsilon_{kl} \qquad \textit{(III.15)}$$

Durante el proceso de *fractura progresiva*, se sigue una ley constitutiva tangente incremental, donde el incremento de tensiones $\dot{\sigma}_{ij}$ resulta de un *incremento elástico* $\dot{\sigma}^e_{ij}$, menos un *decremento por degradación de rigidez* $\dot{\sigma}^d_{ij}$ que se obtiene mediante una regla de normalidad a la *superficie de fractura* ec.(III.14) definida en el espacio de deformaciones. Esto es:

$$\dot{\sigma}_{ij} \;=\; \dot{\sigma}^e_{ij} \;-\; \dot{\sigma}^d_{ij} \tag{III.16}$$

con:

$$\dot{\sigma}^e_{ij} \;=\; \left[D_{ijkl}\right]_S \dot{\epsilon}_{kl}$$

$$-\dot{\sigma}^d_{ij} \;=\; \left\{\frac{d\left[D_{ijkl}\right]_S}{d\epsilon_{mn}}\;\dot{\epsilon}_{mn}\right\}\;\epsilon_{kl} = \left[\dot{D}_{ijkl}\right]_S\;\epsilon_{kl} = -\dot{\lambda}^d\;\frac{\partial\Phi^d(\epsilon_{ij},w^d)}{\partial\epsilon_{ij}} \tag{III.17}$$

siendo la ec.(III.17) la denominada *regla de flujo de fractura* propuesta por Dougill, y $\dot{\lambda}^d$ el *parámetro de consistencia de fractura* que se obtiene de una *condición de consistencia de degradación*, análoga a la que se define en plasticidad ecs.(A-I.3.d). Esto es:

$$\Phi^d(\epsilon_{ij},w^d) = \phi^d(\epsilon_{ij}) \;-\; H^d(w^d) = 0 \qquad , \tag{III.18,a}$$

$$\dot{\Phi}^d(\epsilon_{ij},\dot{\epsilon}_{ij},w^d,\dot{w}^d) = \frac{\partial\Phi^d(\epsilon_{ij},w^d)}{\partial\epsilon_{ij}}\;\dot{\epsilon}_{ij} - \frac{\partial\Phi^d(\epsilon_{ij},w^d)}{\partial w^d}\;\dot{w}^d = 0 \tag{III.18,b}$$

donde el incremento de trabajo específico de degradación es: $\dot{w}^d = \frac{1}{2}\;\dot{\sigma}^d_{ij}\;\epsilon_{ij} =$

$\frac{1}{2}\;\dot{\lambda}^d\;\frac{\partial\Phi^d(\epsilon_{ij},w^d)}{\partial\epsilon_{ij}}\;\epsilon_{ij}$, tal que sustituído en las ecs.(III.18), se obtiene:

$$\dot{\lambda}^d \;=\; 2\;\left[\frac{dH}{dw^d}\right]\;\frac{(\partial\Phi^d/\partial\epsilon_{kl})\dot{\epsilon}_{kl}}{(\partial\Phi^d/\partial\epsilon_{mn})\epsilon_{mn}} \tag{III.19}$$

Sustituyendo ésta en la *ec.(III.16)*, se llega a la ecuación constitutiva con rigidez tangente, del modelo de fractura progresiva:

$$\dot{\sigma}_{ij} \;=\; \left[D_{ijkl} \;-\; 2\; \left[\frac{dH}{dw^d} \right] \; \frac{(\partial \Phi^d / \partial \epsilon_{ij})\; (\partial \Phi^d / \partial \epsilon_{kl})}{(\partial \Phi^d / \partial \epsilon_{mn}) \epsilon_{mn}} \right] \; \dot{\epsilon}_{kl} \qquad \textit{(III.20)}$$

De esta forma, este modelo considera que durante un proceso de cargas no hay deformaciones inelásticas, y que todo el proceso elástico no-lineal se debe fundamentalmente a la degradación de la rigidez.

- Por último, antes de concluir con los modelos elásticos, es conveniente mencionar que cada una de estas teorías pueden ser combinadas con un *criterio de fractura definido en el espacio de tensiones*. Así , a partir de un cierto límite establecido en el espacio de tensiones, se puede considerar además un comportamiento no lineal-inelástico que puede ser atribuído al fenómeno de micro-fisuración desarrollado en la masa del sólido. Los modelos constitutivos que reciben este tratamiento adicional, se los puede denominar modelos *elasto-fracturables*, y a pesar de pertenecer al grupo **4)** citado en el ***apart. III.1.***, resulta interesante hacer una simple mención de los mismos en este apartado, ya que son modelos que basan parte de su comportamiento en la teoría de la elasticidad. Los orígenes de la combinación de teorías elásticas con teorías de fisuración, se encuentran en los modelos de **Ngo and Scordelis** [90] y de **Rashid** [115] , y se basan en admitir que el hormigón falla cuando se alcanza su resistencia máxima a tracción uniaxial σ_T^0 . Ambos modelos consideran un comportamiento elástico-isótropo-lineal hasta que el estado tensional satisface el *criterio de fractura*, situación que ocurre cuando la tensión principal mayor σ_1 alcanza la resistencia máxima a tracción del hormigón. A partir de este momento, ambos modelos se diferencian en la forma de tratar el comportamiento no lineal que es atribuído a la fisuración. El modelo de Ngo and Scordelis realiza una continua redefinición de la malla de elementos finitos, debido a que la fisura viene modelada a través de la desconexión de nodos entre elementos. En el modelo de Rashid, el material fisurado se trata como un sólido ortótropo que se comporta de modo diferente en la dirección normal y paralela a la fisura. Más adelante (***apart. III-5***), al tratar los *modelos de fractura*, se presentarán bajo otro enfoque estos *modelos de fisuración* *basados en la mecánica del sólido continuo*, juntamente con otros basados en la *mecánica de fractura*.

III.3.- MODELOS BASADOS EN LA TEORIA DE LA PLASTICIDAD.

En este apartado, sólo se mostrará un enfoque particular que permite clasificar los modelos constitutivos que han sido definidos para tratar el comportamiento del hormigón y que utilizan de alguna manera en su formulación la *teoría de la plasticidad*. Se distinguirán cuatro grupos: **1)** Modelos de plasticidad perfecta, **2)** Modelos de plasticidad con ablandamiento, con o sin degradación de rigidez, **3)** Modelos de plasticidad con endurecimiento, con o sin degradación de rigidez, **4)** Modelos de zona inerte, combinados con plasticidad con endurecimiento. Cada uno de estos grupos, incluye modelos constitutivos que permiten reproducir bastante bien, en forma numérica, el comportamiento del hormigón dentro de un cierto rango más o menos limitado, según del modelo que se trate.

Resultados experimentales, confirman que el comportamiento no-lineal del hormigón, se debe fundamentalmente a un fenómeno altamente inelástico donde sólo se puede recuperar una pequeña parte de la deformación total desarrollada (micro-fisuración). Por esto, el comportamiento tensión-deformación, puede ser desdoblado en una *componente recuperable y otra irrecuperable* [43] . Esta es una de las razones que indican que la teoría de la plasticidad puede proveer una estructura teórica para el estudio del comportamiento del hormigón.

III.3.a.- Modelos de plasticidad perfecta o plasticidad sin endurecimiento.

Entre los modelos plásticos más simples, se encuentran aquellos basados en la **teoría de la plasticidad perfecta** [24] (***apart. A-I.3.c***). Estos modelos, consideran que bajo carga monótona creciente, después de que el estado de tensión alcanza la superficie de fluencia plástica, el material fluye indefinidamente. Para evitar esta inconsistencia física, se puede definir en el espacio de deformaciónes una *superficie de fallo* [35] , que ponga límite al crecimiento indefinido del campo de deformaciones, a partir de la cual se pueden proponer dos comportamientos hipotéticos alternativos: Uno, el más simple, que considera una pérdida total de la resistencia del punto en análisis (*límite de fallo total*); y el otro que consiste en modelar el comportamiento post-fallo mediante una teoría de fisuración como la de Rashid [115] , o bien a través de una teoría de degradación como la de

Dougill [46][56] . Así, se podría presentar la relación tensión-deformación, para un modelo de este tipo, resumida en tres etapas: a) estado elástico inicial, b) estado elasto-plástico perfecto que cumple en cada instante con la condición de fluencia de Prager ***apart. A-I.3.d***, y c) un estado alternativo de pérdida violenta de la resistencia, o bien de fisuración, o bién de degradación de la rigidez elástica.

Entre los modelos clásicos basados en la teoría de la plasticidad perfecta, se encuentran los de: Mohr-Coulomb, Drucker-Prager, y Willam-Warnke, que pueden ser consultados en forma sintética en la referencia [33] .

III.3.b.- Modelos de plasticidad con ablandamiento con o sin degradación de rigidez.

Debido a que la *plasticidad perfecta* considera una regla de endurecimiento plástico constante, constituye una estructura teórica incompleta para tratar el rango total del comportamiento de los hormigónes, siendo necesario considerar una formulación más general de esta misma teoría. Dentro de esta generalización se encuentra la **teoría de la plasticidad con ablandamiento**, que marca una diferencia fundamental en la forma de tratar el concepto de la *evolución del criterio de fluencia plástico.* Así , para cada *punto del sólido*, se define en el espacio de tensiones un *límite*, a partir del cual se inicia un proceso de *ablandamiento* que concluye con el agotamiento total de la resistencia de ese punto. Esta generalización, sumada a la posibilidad de considerar el fenómeno de degradación de rigidez elástica y o plástica, permite formular modelos muy potentes. En el ***cap. IV.***, se presenta el modelo constitutivo desarrollado en esta tesis, que se ha denominado **modelo de daño plástico** y que cumple con estas características básicas, además de otras que no son propias de este grupo.

- **Modelo elasto-plástico con ablandamiento ortotrópico de Murray et al.** [33][87] **.**

Dentro de los modelos de plasticidad con ablandamiento, se tiene **el modelo elasto-plástico con ablandamiento ortotrópico de Murray et al.** [33][87] , el cual sólo cuenta con la definición de un flujo plástico asociado para sólidos sin degradación de rigidez elástica. Una de las características más destacada de este modelo es la de utilizar una superficie de fluencia plástica ortótropa con movimientos independientes según los ejes de tensiones principales en la zona de tracción del espacio de Westergard **fig.(III.3)**. La forma matemática de esta superficie es la siguiente:

$$\mathcal{F}(\sigma_1, \sigma_3, \sigma_C, \sigma_{T1}, \sigma_{T3}) \; = \; 0 \qquad \textit{(III.21)}$$

donde σ_1 y σ_3 son las componentes principales máximas y mínimas del tensor de tensión $\boldsymbol{\sigma}$ en el estado actual; σ_C es el valor actual de la tensión de fluencia en compresión; y σ_{T1}, σ_{T3} son los valores actuales de la tensión de fluencia a tracción para cada dirección principal del tensor de tensión.

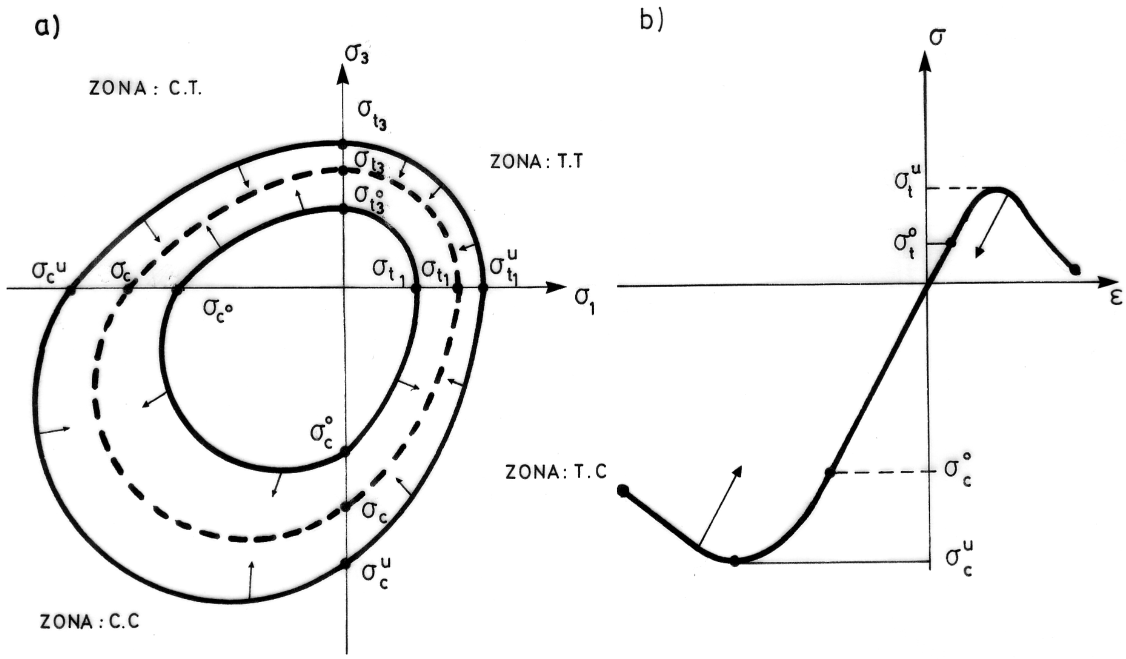

fig.(III.3): Función de fluencia genérica, propuesta por Murray et al. [33][87] **: a) Función de fluencia inicial y subsiguientes funciones de carga plástica en el espacio** $(\sigma_1 - \sigma_3)$ **. b) Idealización de la respuesta uniaxial.**

Este modelo considera como hipótesis básica, que el aplastamiento ocurrido durante un estado de compresión produce un daño local adireccional, en tanto admite que a tracción se produce un daño local (en un punto) orientado que provoca un movimiento no-simétrico de la superficie de fluencia *ec.(III.21)*. Este movimiento está gobernado por una *regla de endurecimiento* en función de unas *variables de endurecimiento* definidas de una manera muy particular, como deformaciónes plásticas efectivas. Así , la regla de endurecimiento se formula a través de las tres funciones de endurecimiento explícitas que se presentan a continuación:

$$\begin{cases} \textit{Proc. de compresión} \quad : & \sigma_C \; = \; \sigma_C^0 + \mathcal{K}_C \; (\bar{\epsilon}_C^p) \\ \textit{Proc. de tracción dir.-1} : & \sigma_{T1} \; = \; \sigma_{T1}^0 + \mathcal{K}_{T1}(\bar{\epsilon}_{T1}^p) \\ \textit{Proc. de tracción dir.-3} : & \sigma_{T3} \; = \; \sigma_{T3}^0 + \mathcal{K}_{T3}(\bar{\epsilon}_{T3}^p) \end{cases} \qquad \textit{(III.22)}$$

siendo: $\dot{\bar{\epsilon}}_C^p = \zeta_C \dot{\bar{\epsilon}}^p$, $\dot{\bar{\epsilon}}_{T1}^p = \zeta_{T1} \dot{\bar{\epsilon}}^p$, $\dot{\bar{\epsilon}}_{T3}^p = \zeta_{T3} \dot{\bar{\epsilon}}^p$, las reglas de evolución de las variables de endurecimiento (deformaciónes plásticas efectivas) para un proceso de compresión pura, tracción segun la dirección de la tensión principal mayor y tracción según la dirección de la tensión principal menor, respectivamente. $\dot{\bar{\epsilon}}^p = \sqrt{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{pT} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p}$ es la norma del vector incremento de deformación plástica; $\mathcal{K}_C, \; \mathcal{K}_{T1}, \; \mathcal{K}_{T3}$ son funciones de endurecimiento explícitas definidas en el espacio uniaxial $\sigma - \epsilon^p$ a partir de ensayos físicos; y $\zeta_C, \zeta_{T1}, \zeta_{T3}$ son constantes que definen la zona del espacio de tensiones principales (espacio de Haigh-Westergard) donde se encuentra el estado actual de tensión, sus magnitudes pueden ser consultadas en la referencia [87] , cumpliendo siempre, para cada instante t del proceso de carga cuasi estático, la siguiente relación $\zeta_C + \zeta_{T1} + \zeta_{T3} = 1$.

La ley constitutiva incremental, resulta de considerar una regla de flujo asociada a la superficie de fluencia plástica. Esto es:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} \; = \; \boldsymbol{D}_S \; (\dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p) \qquad \textit{(III.23)}$$

donde el incremento de deformación plástica queda definido por la siguiente ecuación de evolución $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \dot{\lambda} \, \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{C} \; \dot{\boldsymbol{\epsilon}}$, siendo $\boldsymbol{C} = \dfrac{1}{A \left\{ \dfrac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\} \left\{ \dfrac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\}^T \boldsymbol{D}_S}$ la matriz de transformación de incrementos de deformación total en incrementos de deformación plástica, obtenida a partir de la condición de consistencia plástica de Prager (***apart. A-I.3.d***), de donde surge también, para este caso particular, el parámetro de endurecimiento plástico: $A = \left\{\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right\}^T \boldsymbol{D}_S \left\{\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right\} - \sqrt{\left\{\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right\}^T \left\{\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right\}} \left[\zeta_C \mathcal{K}_C(\bar{\epsilon}^p_C) \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \zeta_{T1} \mathcal{K}_{T1}(\bar{\epsilon}^p_{T1}) + \zeta_{T3} \mathcal{K}_{T3}(\bar{\epsilon}^p_{T3})\right]$. Obteniendose la siguiente ley constitutiva tangente:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{D}^{ep}_T \, \dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \boldsymbol{D}_S \, [\, \boldsymbol{I} - \boldsymbol{C} \,] \tag{III.24}$$

Para mayores detalles sobre este modelo, se recomienda recurrir a la referencia original [87] .

La formulación que se ha presentado, permite ver que se trata de un modelo constitutivo que considera un enfoque muy particular de la teoría matemática de la plasticidad con ablandamiento. El problema más serio que muestra esta formulación, es la definición casi arbitraria de la variable de endurecimiento plástico. Las tres *deformaciones efectivas* $\dot{\bar{\epsilon}}^p_C, \dot{\bar{\epsilon}}^p_{T1}, \dot{\bar{\epsilon}}^p_{T3}$ surgen de una descomposición arbitraria de la norma del vector incremento de deformación plástica $\dot{\bar{\epsilon}}^p$ (denominado por algunos autores como deformación plástica efectiva [34]), dependiendo del valor de las constantes $\zeta_C, \zeta_{T1}, \zeta_{T3}$. Además de este inconveniente, se puede decir que la direccionalidad del daño local, forzada por una formulación como la que se acaba de presentar, es innecesaria en los modelos que consideran el *ablandamiento como una propiedad del material* (***anexo-D***), ya que la orientación del daño se manifiesta en forma espontánea sin que sea necesario recurrir a una formulación ortótropa para representar el comportamiento del hormigón [29] . Por último, se puede decir que la aproximación que tienen los resultados con los ensayos experimentales no es del todo satisfactoria [87] .

III.3.c.- Modelos de plasticidad con endurecimiento con o sin degradación de rigidez.

Existen otros modelos constitutivos basados en la teoría de la plasticidad, que establecen una *condición de fluencia con endurecimiento*, hasta que se alcanza un cierto *límite* en el espacio de tensiones, que se denomina normalmente *límite de fractura*. A partir de este límite se pueden seguir dos caminos alternativos que permiten formular dos modelos constitutivos diferentes: Uno que considera a este límite como una *superficie de daño total* definida en el espacio de tensiones, a partir de la cual se produce una caída violenta de tensión en el punto **fig.(III.4)**, y otro que añade a la formulación elasto-plástica con endurecimiento una formulación de *micro-fisuración*, que cada modelo tratará en una forma particular.

- **Modelo elasto-plástico con endurecimiento de A. Chen and W. F. Chen** [33][34][35] **.**

Un modelo que adopta en su formulación la *superficie de daño total* es el de **A. Chen and W. F. Chen** [33][34][35] . Este modelo admite que en cada punto del sólido que plastifica, la función de fluencia cumple con la condición de consistencia plástica de Prager (***apart. A-I.3.d***) durante el proceso de endurecimiento a medida que evoluciona la *variable de endurecimiento plástico*. Esta teoría plástica con endurecimiento se mantiene hasta alcanzar el *límite de fractura* o *superficie de daño total* (definida en el espacio de tensiones), donde se produce una caída violenta de tensión. El modelo constitutivo considera una función de fluencia con movimiento isotrópico, que tiene la siguiente forma genérica:

$$\mathcal{F}(I_1, J_2, \alpha_1, \beta_1, \tau_{\mathcal{K}}) \; = \; 0 \qquad \textit{(III.25)}$$

donde I_1 es el primer invariante del tensor de tensiones, J_2 es el segundo invariante del tensor desviador de tensiones, α_1, β_1 son parámetros del material que se definen en función de la resistencia del hormigón bajo condiciones de carga uniaxial y biaxial, y τ_κ es una función de endurecimiento formulada en forma explícita que vale: $\tau_\kappa = \tau_\kappa^0$ al inicio del proceso plástico (define la posición de la *superficie de discontinuidad inicial*), $\tau_\kappa = \tau_\kappa^u$ al final del proceso plástico (define la posición de la *superficie de daño total*), y $\tau_\kappa^0 \leq \tau_\kappa \leq \tau_\kappa^u$ durante el desarrollo del proceso plástico (define la posición de la *superficie las distintas superficies de carga intermedia*). El modelo considera también que el incremento de deformación total está compuesto de una parte elástica y una plástica $\dot{\epsilon_{ij}} = \dot{\epsilon_{ij}}^e + \dot{\epsilon_{ij}}^p$, donde el incremento de deformación plástica se obtiene a partir de una regla de flujo plástico asociada, que queda expresada del siguiente modo:

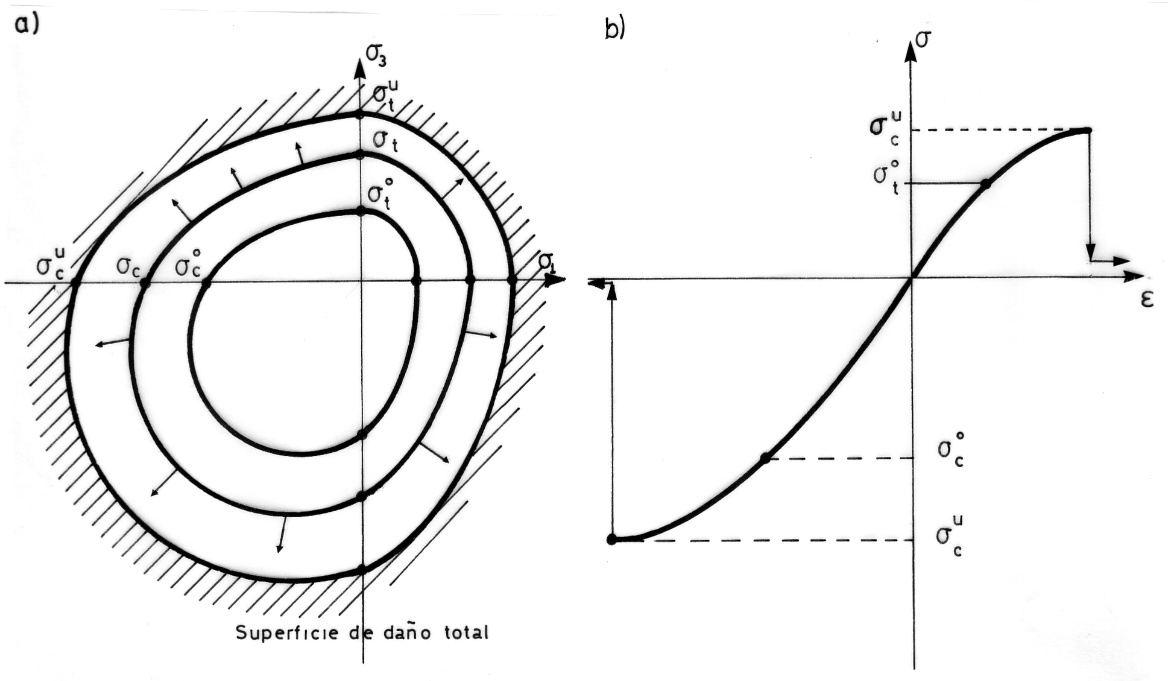

fig.(III.4): Función de fluencia genérica, propuesta por Chen and Chen [33][34][35] : a) Función de fluencia inicial y subsiguientes funciones de carga plástica en el espacio $(\sigma_1 - \sigma_3)$. b) Idealización de la respuesta uniaxial.

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{p} = \frac{1}{A} \frac{\dfrac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma_{kl}} \dot{\sigma}_{kl}}{\left(\dfrac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma_{mn}} \dfrac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma_{nm}} \right)^{1/2}} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma_{ij}} \qquad \text{(III.26)}$$

donde A es el parámetro de endurecimiento plástico, definido en una forma particular [34] .

Para este modelo, la ley constitutiva elasto-plástica incremental queda expresada por la siguiente formulación:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \left[H_{ijkl} \; + \; \frac{\dfrac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma_{ij}} \dfrac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma_{kl}}}{A \, \left(\dfrac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma_{rs}} \; \dfrac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma_{sr}} \right)^{1/2}} \right] \; \dot{\sigma}_{kl} \quad ; \quad \forall \;\; \mathcal{F} < \tau^{u}_{\mathcal{K}} \qquad \textit{(III.27)}$$

donde H_{ijkl} es el tensor de flexibilidad elástica. Para mayores detalles sobre este modelo, se recomienda ver las referencias [33][34][35] .

Este modelo de material ideal, logra obtener buena concordancia con los resultados experimentales, hasta el instante en que alcanza la *superficie de daño total*, límite que produce una simplificación muy grosera del comportamiento, y por lo tanto los resultados no son tan buenos. En menor grado se pueden notar también los siguientes problemas: Trabaja con una regla de flujo asociada a la superficie de fluencia, por lo que no puede controlar el fenómeno de dilatancia, y por último, no puede adoptar cualquier superficie de fluencia plástica, ya que todo el modelo está formulado en *forma cerrada* a partir de esta función no-homogénea.

- **Modelo elasto-plástico con endurecimiento de Z. Bažant and S. Kim** [13] **.**

Los modelos alternativos al de Chen-Chen, son aquellos que utilizan plasticidad con endurecimiento hasta alcanzar el el límite de fractura, y luego agregan a esta formulación básica, una que considere la *micro-fisuración.* A estos se los podrían denominar *modelos plásticos con endurecimiento-fracturable.* El **modelo de Bažant-Kim** [13] , fué uno de los primeros en considerar la teoría de la plasticidad rigidizable junto a un concepto de fractura; entendida como *degradación de la rigidez del material.* Para modelizar la degradación de rigidez ha utilizado como base el *modelo de fractura progresiva de Dougill* [46][56] , tratado en el ***apart. III.2.***. De esta manera, una vez alcanzada la superficie de fractura en el espacio de tensiones, se tiene que el incremento de tensión resulta de la contribución de tres componentes: *un incremento elástico* debido al comportamiento del material no dañado $\dot{\sigma}^{e}_{ij}$, menos un *incremento plástico* $\dot{\sigma}^{p}_{ij}$ debido a la relajación que producen las deformaciones irrecuperables, y menos un *incremento de fractura* (o degradación en este caso), $\dot{\sigma}^{d}_{ij}$ provocado por deformaciones de degradación que son recuperables **fig.(III.5)**. Esto es:

$$\dot{\sigma}_{ij} = \dot{\sigma}^e_{ij} - \dot{\sigma}^p_{ij} - \dot{\sigma}^d_{ij} \tag{III.28}$$

con:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}^e_{ij} &= [D_{ijkl}]_S \ \dot{\epsilon}_{kl} \\ \dot{\sigma}^p_{ij} &= [D_{ijkl}]_S \ \dot{\epsilon}^p_{kl} \\ \dot{\sigma}^d_{ij} &= [D_{ijkl}]_S \ \dot{\epsilon}^d_{kl} \end{aligned}$$

donde $[D_{ijkl}]_S$ es el tensor de rigidez secante y ϵ_{ij}, ϵ^p_{ij}, y ϵ^d_{ij} , son los incrementos de deformación total, plástica, y de degradación, respectivamente, que quedan relacionados entre si a través de **fig.(III.5)**:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}^e_{ij} + \dot{\epsilon}^p_{ij} + \dot{\epsilon}^d_{ij} \quad , \quad \textit{con :} \ \dot{\epsilon}^e_{ij} = [D_{ijkl}]^{-1}_S \, \dot{\sigma}_{kl} \tag{III.29}$$

Este modelo, define una *superficie de fluencia* en el espacio de tensiones $\mathcal{F}(\sigma_{ij}, \overline{\mathcal{K}})$ del tipo de la de Drucker-Prager y una *superficie de fractura o degradación* en el espacio de deformaciones $\Phi^d(\epsilon_{ij}, \overline{\mathcal{K}}')$ análoga a la Drucker-Prager. Esto es:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\sigma_{ij}, \overline{\mathcal{K}}) &= \overline{\alpha} I_1 + \sqrt{J_2} - \overline{\mathcal{K}}(w^p) \\ \Phi^d(\epsilon_{ij}, \overline{\mathcal{K}}') &= \overline{\alpha}' I'_1 + \sqrt{J'_2} - \overline{\mathcal{K}}'(w^d) \end{aligned} \tag{III.30}$$

donde I_1 , J_2 y I'_1 , J'_2 representan el primer y segundo invariante del tensor de tensiones y deformaciones respectivamente; $\overline{\alpha}$, $\overline{\mathcal{K}}$ y $\overline{\alpha}'$, $\overline{\mathcal{K}}'$ representan los coeficientes de ajuste de la superficie definida en el espacio de tensiones y deformaciones respectivamente (***apart. A-I.3.e***)

De acuerdo con esta teoría de material ideal, los incrementos de deformación plástica $\dot{\epsilon}^p_{ij}$ y de tensión de degradación $\dot{\sigma}^d_{ij}$, se determinan respectivamente, a partir de *dos reglas de flujo*: **1)** una regla de *flujo asociada a la superficie de fluencia plástica* definida en el espacio de tensiones, la cual está basada en el *segundo postulado de Drucker* (***apart. A-I.3.d***), (que requiere que *el trabajo*

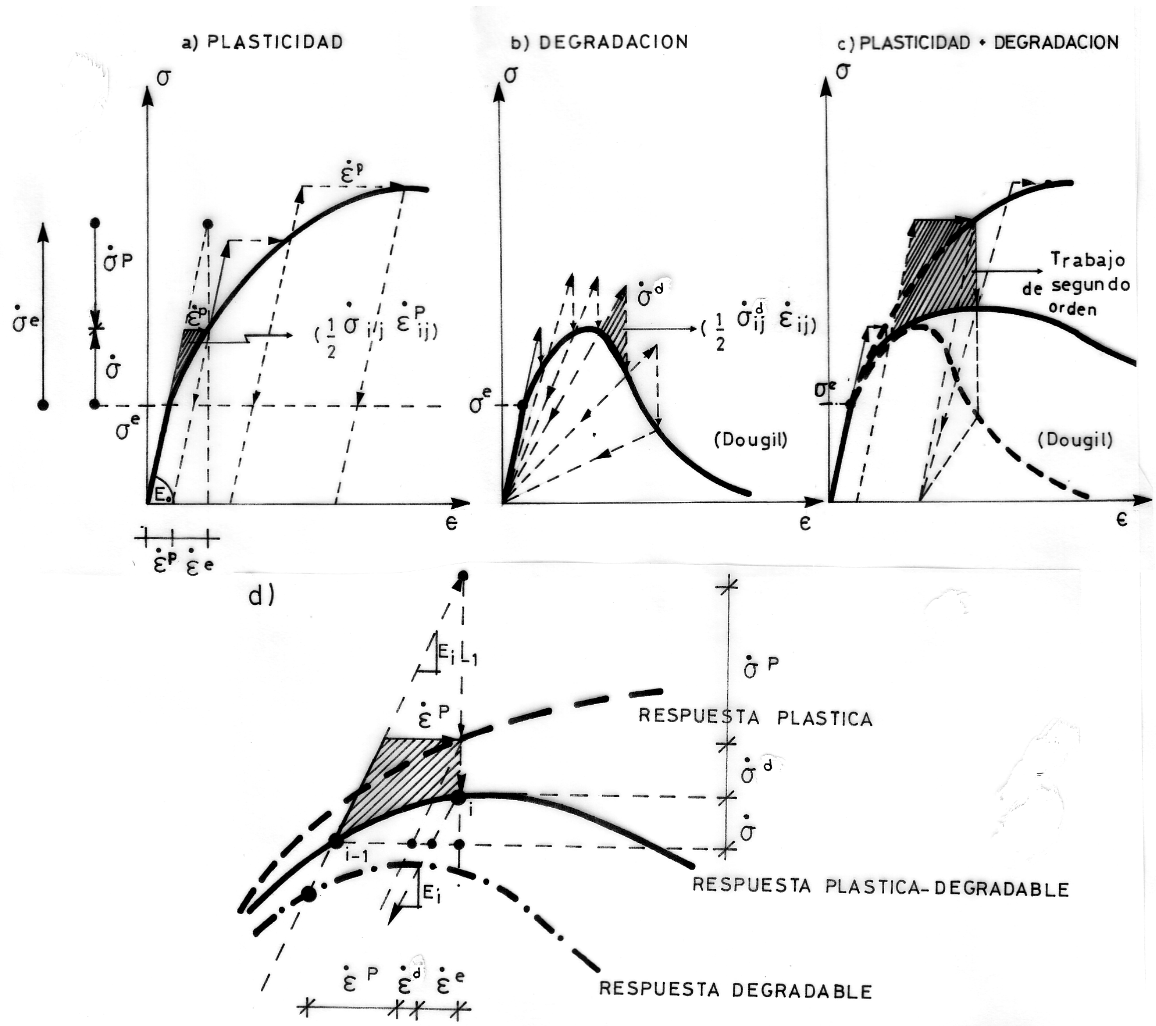

fig.(III.5): Relación esquemática entre: a) un genérico modelo plástico con endurecimiento, b) el modelo de fractura progresiva de Dougill (*apart. III.2.*), c) el modelo plástico con endurecimiento-fracturable, d) detalle del comportamiento del modelo plástico con degradación.

plástico de segundo orden realizado en un punto durante un ciclo de aplicación y remoción del incremento de tensión $\dot{\sigma}_{ij}$ sea no-negativo $\dot{w}^p = \dot{\sigma}_{ij}\dot{\epsilon}^p_{ij} \geq 0$ – conocido como postulado de estabilidad local de Drucker) – (forma particular de presentar el axioma de la Máxima Disipación Plástica para procesos sin degradación rigidez (***apart. IV.8.f***)); **2)** una regla de *flujo asociada a la superficie de fractura o degradación* definida en el espacio de deformaciones, la cual está basada en el *postulado de Il'yushin* [13] (análogo al segundo postulado de Drucker), (que requiere que *el trabajo de degradación de segundo orden realizado en un punto durante la aplicación y remoción del incremento de deformación* $\dot{\epsilon}_{ij}$ sea no-negativo $\dot{w}^d = \dot{\epsilon}_{ij}\dot{\sigma}^d_{ij} \geq 0$) . Esto es:

$$\dot{\epsilon}^p_{ij} = \dot{\lambda}\,\frac{\partial \mathcal{F}(\sigma_{ij}, \overline{\mathcal{K}})}{\partial \sigma_{ij}}$$

$$\dot{\sigma}^d_{ij} = \dot{\lambda}^d\,\frac{\Phi^d(\epsilon_{ij}, \overline{\mathcal{K}}^{'})}{\partial \epsilon_{ij}} \qquad (III.31)$$

tal que la primera de las *ec.(III.31)* es la regla de flujo plástica asociada *ec.(A-I.22)*, y la segunda de las *ec.(III.31)* es la regla de flujo de fractura propuesta por Dougill *ec.(III.17)*.

Finalmente, a través de un largo tratamiento algebraico que puede ser consultado en la referencia [13] , se obtiene la ecuación constitutiva incremental como:

$$\dot{\sigma}_{ij} \;=\; \left[D_{ijkl}\right]_T\;\dot{\epsilon}_{kl} \qquad (III.32)$$

con:

$$\left[D_{ijkl}\right]_T = \left[D_{ijkl}\right]_S - \left[D^p_{ijkl}\right] - \left[D^d_{ijkl}\right]$$

$\left[D_{ijkl}\right]_T$: *rigidez tangente*

$\left[D_{ijkl}\right]_S$: *rigidez secante*

$\left[D^p_{ijkl}\right]$, $\left[D^d_{ijkl}\right]$: *pérdida de rigidez debido a la acción de la plasticidad y la degradación.*

Para mayores detalles sobre este modelo, se recomienda recurrir a la referencia original [13] .

Entre los inconvenientes que presenta este modelo, se encuentra su difícil implementación, y el complicado manejo de los criterios de fluencia y degradación, que son totalmente independientes entre sí. Resultando por lo tanto, algo confuso para determinar durante un proceso de carga con ablandamiento, la situación del punto del sólido en los espacios de tensión y deformación a la vez [56]. Para cumplir durante un proceso de carga con ablandamiento, con la condición de consistencia plástica *ec.(A-I.58)* y con su análoga condición de consistencia de degradación, y que a la vez sea posible definir un estado de tensión-deformación único para el punto, es necesario proceder por aproximaciones sucesivas, anidadas dentro de las iteraciones que conducen a la convergencia en la solución [22]. Por último, conviene observar que este modelo no considera la posibilidad de trabajar con una regla de flujo no-asociada a la superficie de fluencia plástica.

- **Modelo elasto-plástico con endurecimiento de D. Han and W. Chen [56].**

Este modelo, presenta una versión más evolucionada de los *modelos plásticos degradables*. Su reciente formulación considera como variable de endurecimiento el *trabajo específico plástico degradable* (o plástico fracturable) w^{pd} **fig.(III.6)**. Este modelo, a diferencia del de Bažant-Kim, propone una *única superficie de carga*, formulada en el espacio de deformaciones. Esta superficie cumple la función de una superficie de fluencia plástica, más una superficie de degradación de rigidez. Su forma matemática es la siguiente:

$$\Phi^{pd}(\epsilon_{ij}, w^{pd}) \;=\; \epsilon_{ij}\;\delta_{ij} - \mathcal{K}^{pd}(w^{pd}) \;=\; 0 \qquad \textit{(III.33)}$$

Además, se considera un único decremento de tensión, debido a la acción conjunta de los fenomenos de plasticidad y degradación de rigidez. Esto es:

$$\dot{\sigma}^{pd}_{ij} = \dot{\sigma}^{p}_{ij} + \dot{\sigma}^{d}_{ij} = \dot{\lambda}^{pd}\;\frac{\partial\Phi^{pd}(\epsilon_{ij}, w^{pd})}{\partial\epsilon_{ij}} \qquad \textit{(III.34)}$$

donde $\dot{\lambda}^{pd}$ es el factor de consistencia plástica-fracturable único, que puede ser obtenido de la *condición de consistencia* en la manera usual: $\dot{\lambda}^{pd} = \dfrac{1}{h}\dfrac{\partial\Phi^{pd}}{\partial\epsilon_{ij}}\dot{\epsilon}_{ij}$, y que satisface a la vez ambos estados (el plástico y el de degradación de rigidez). h es el parámetro de endurecimiento plástico, definido en forma muy particular [56] .

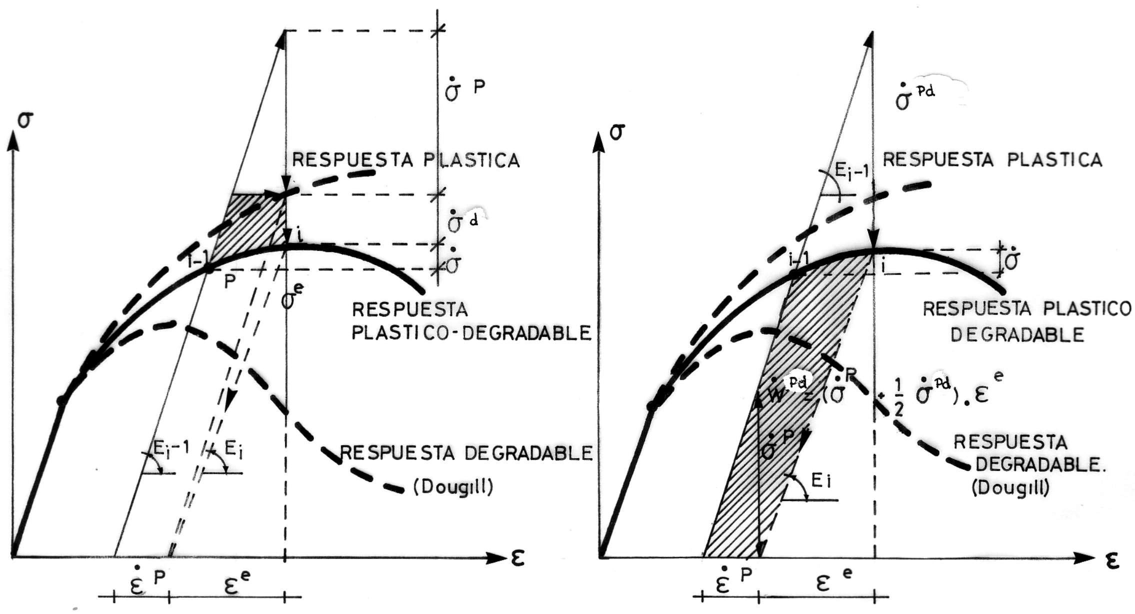

fig.(III.6): Descripción esquemática de las formulaciones que combinan plasticidad con degradación de rigidez: a) formulación incremental tensión-deformación b) formulación en función del trabajo plástico fracturable w^{pd} .

El modelo, permite también adoptar una regla de flujo no-asociada, en el espacio de deformaciones, del tipo de la de Dougill *ec.(III.17)*:

$$\dot{\sigma}_{ij}^{pd} = \dot{\lambda}^{pd} \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}^{pd}(\epsilon_{ij}, w^{pd})}{\partial \epsilon_{ij}} \qquad (III.35)$$

con $\boldsymbol{\Phi}^{pd}(\epsilon_{ij}, w^{pd}) \neq \Phi^{pd}(\epsilon_{ij}, w^{pd})$. Teniendo en cuenta la *ec.(III.35)*, resulta el incremento de tensión igual a:

$$\dot{\sigma}_{ij} = \dot{\sigma}^{e}_{ij} - \dot{\sigma}^{pd}_{ij} \tag{III.36}$$

donde $\dot{\sigma}^{pd}_{ij} = [D_{ijkl}]_S \, \dot{\epsilon}_{ij}$. A través de un largo trabajo algebraico, que puede ser consultado en la ref. [56] , se llega a formular la siguiente relación constitutiva tangente para este modelo plástico-fracturable:

$$\dot{\sigma}_{ij} \;=\; \left[[D_{ijkl}]_S \;-\; \frac{1}{h} \, \frac{\partial \Phi^{pd}}{\partial \epsilon_{ij}} \frac{\partial \Phi^{pd}}{\partial \epsilon_{kl}} \right] \, \dot{\epsilon}_{kl} \tag{III.37}$$

Este modelo marca dos diferencias fundamentales respecto del de Bažant-Kim: La primera, consiste en el uso de la teoría de la plasticidad definida en el espacio de deformaciones, que permite también formular el fenómeno de fisuración, eliminando así el criterio de fluencia en el espacio de tensiones; y la segunda, consiste en el uso de una variable de endurecimiento basada en el trabajo específico *plástico-degradable*.

La mayor dificultad que presenta, consiste en encontrar un criterio de fluencia y degradación único, definido en el espacio de deformaciones, que emule un comportamiento realista del hormigón. Otro problema que presenta este modelo, es la inapropiada simulación del comportamiento del hormigón para altos niveles de tensión [56] .

- **Modelo elasto-plástico con endurecimiento de M. Klisinski and Z. Mroz[70] .**

Este modelo, al igual que los dos anteriores, presenta una formulación *plástica-degradable*. Sus fundamentos se encuentran en una extensión de la formulación del modelo de Bažant-Kim [13] , y por lo tanto supone que el daño interno (denominado aquí degradación de rigidez [70]), es acompañado de un fenómeno inelástico irreversible (proceso plástico). La deformación total está compuesta por tres partes: una elástica totalmente recuperable, otra de degradación también recuperable, y una inelástica o plástica irrecuperable **fig.(III.6,a)**:

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{e} + \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{d} + \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{p} \qquad (III.38)$$

y el incremento de tensión en un punto del sólido viene definido por la siguiente expresión **fig.(III.6,a)**:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{D}_S \, \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{e} = \boldsymbol{D}_S \left(\dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{d} - \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{p} \right) = \dot{\boldsymbol{\sigma}}^{e} - \dot{\boldsymbol{\sigma}}^{d} - \dot{\boldsymbol{\sigma}}^{p} \qquad (III.39)$$

donde la rigidez $\boldsymbol{D}_S$, depende del estado actual del tensor de tensiones $\boldsymbol{\sigma}$, deformaciones $\boldsymbol{\epsilon}$ y de las variables vectoriales de endurecimiento $\boldsymbol{\kappa}$ y de degradación $\boldsymbol{w}^{d}$. Esto es:

$$\boldsymbol{D}_S = \boldsymbol{D}_S \left(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{w}^{d} \right) \qquad (III.40)$$

El efecto acoplado que existe entre la degradación y la plasticidad, es tenido en cuenta a través de las variables internas $\boldsymbol{w}^{d}$ y $\boldsymbol{\kappa}$, y sus reglas de evolución respectivamente, pueden ser formuladas mediante la introducción de la superficie de fluencia y degradación, expresadas en el espacio de tensiones o deformaciones:

$$\begin{array}{lcl} \mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\kappa}) = 0 & o & \Phi(\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\kappa}) = 0 \\ \mathcal{D}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{w}^{d}) = 0 & o & \Delta(\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{w}^{d}) = 0 \end{array} \qquad (III.41)$$

donde $\mathcal{F} = 0$ y $\mathcal{D} = 0$ son las condiciones de fluencia y degradación en el espacio de tensiones; y en forma alternativa, se tiene $\Phi = 0$ y $\Delta = 0$ que son también las condiciones de fluencia y degradación en el espacio de deformaciones. Si se trabaja en el espacio de tensiones, el modelo admite como condición suficiente para considerar su comportamiento plástico, que se cumpla la *condición de consistencia plástica de Prager*: $\mathcal{F} = 0 \;\; y \;\; \dot{\mathcal{F}} = 0$, y admite como condición suficiente de degradación, el cumplimiento de $\mathcal{D} = 0 \;\; y \;\; \dot{\mathcal{D}} = 0$. Estas dos funciones dividen el espacio de tensiones en cuatro regiones **fig.(III.7)**:

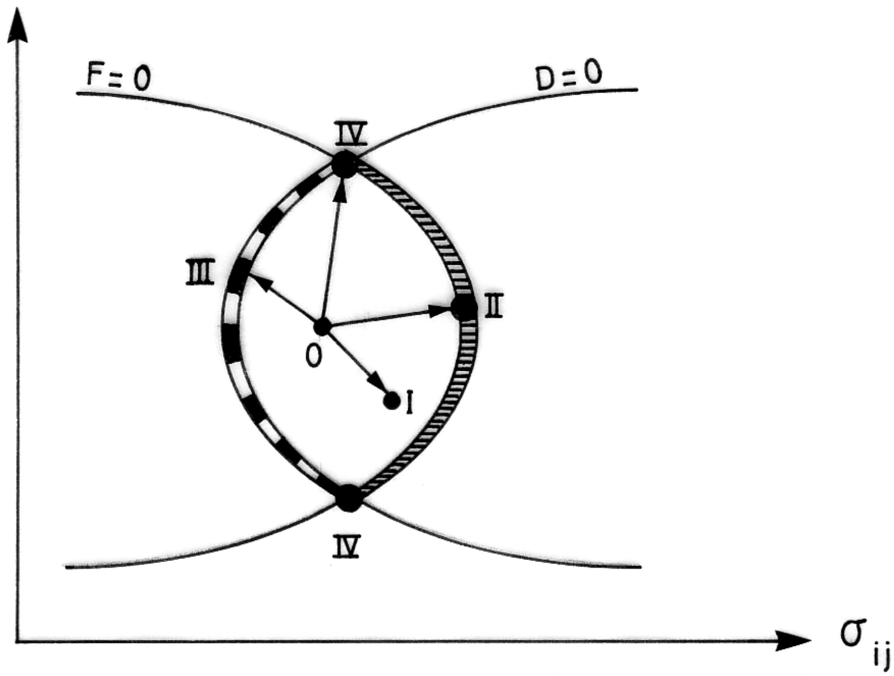

fig.(III.7): Delimitación de las regiones de comportamiento plástico-degradable en el espacio de tensiones.

(I)–*Comportamiento puramente elástico* : $\mathcal{F} < 0 \;\; y \;\; \mathcal{D} < 0$

(II) –*Comportamiento puramente plástico* : $\mathcal{F} = 0 \; ; \;\; \dot{\mathcal{F}} = 0 \;\; y \;\; \mathcal{D} < 0$

(III)–*Comportamiento puramente degradable* : $\mathcal{F} < 0 \;\; y \;\; \mathcal{D} = 0 \; ; \;\; \dot{\mathcal{D}} = 0$

(IV)–*Comportamiento plástico degradable* : $\mathcal{F} = 0 \; ; \;\; \dot{\mathcal{F}} = 0 \;\; y \;\; \mathcal{D} = 0 \; ; \;\; \dot{\mathcal{D}} = 0$

Para el comportamiento plástico, se define una regla de flujo no asociada del mismo tipo que la teoría de la plasticidad clásica *ec.(A-I.21)*:

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \;=\; \dot{\lambda}\,\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \qquad \textit{(III.42)}$$

donde $\dot{\lambda}$ es el factor de consistencia plástica no-negativo, y $\mathcal{G} \neq \mathcal{F}$ es la función de potencial plástico, definida en el espacio de tensiones.

Durante un proceso degradable, se obtiene el incremento de deformación $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^d$ o el decremento de tensión de degradación $\dot{\boldsymbol{\sigma}}^d$, según se trabaje en uno u otro espacio, a través de dos reglas de flujo:

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^d = \dot{\lambda}^d \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^d = \dot{\Lambda}^d \frac{\partial \Delta}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} \qquad \textit{(III.43)}$$

con: $\dfrac{\partial \Delta}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} = \dfrac{\partial \mathcal{D}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \dfrac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} = \dfrac{\partial \mathcal{D}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \boldsymbol{D}_T$, de donde se duduce la relación que hay entre $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^d$ y $\dot{\boldsymbol{\sigma}}^d$. A través de varios pasos algebraicos, que pueden ser consultados en la referencia original [70] , se obtiene la ecuación constitutiva tangente incremental como:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{D}_T \, \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \qquad \textit{(III.44)}$$

con:

$$\boldsymbol{D}_T = \boldsymbol{D}_S - \boldsymbol{D}^p - \boldsymbol{D}^d \quad ;$$

$\boldsymbol{D}_S$: *Rigidez secante definida en la ec.(III.40)* ,

$\boldsymbol{D}^p$: *Decremento de rigidez debido al fenómeno plástico, obtenido a partir de la condición de consistencia plástica* ,

$\boldsymbol{D}^d$: *Decremento de rigidez debido al fenómeno de degradación*

Por último, la influencia del cambio de rigidez por efecto de la degradación, surge de la siguiente relación (ver también *ec.(IV.92)*):

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{D}_S \, \boldsymbol{\epsilon}^e = \boldsymbol{D}_S \, (\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}^p) \qquad \textit{(III.45)}$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{D}_S \, \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \boldsymbol{D}_S \, \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p + \dot{\boldsymbol{D}}_S \, (\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}^p) \qquad \textit{(III.46)}$$

Comparando la *ec.(III.46)* con la *ec.(III.44)*, se deduce que:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^d = \boldsymbol{D}^d \, \dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \dot{\boldsymbol{D}}_S \, (\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}^p) \qquad \text{(III.47)}$$

Para mayores detalles sobre este modelo, se recomienda recurrir a la referencia original [70] .

Entre las desventajas que presenta este modelo, se encuentra su complicada forma de formular el comportamiento acoplado del fenómeno de degradación con el de plasticidad. Además, se observa en los ejemplos de comprobación [70] , que el modelo necesita definir una superficie $\mathcal{F}$ y $\mathcal{D}$, para cada caso particular, con el fin de alcanzar una mejor coincidencia con los resultados experimentales, no llegando a ser totalmente satisfactoria.

- **Modelo elasto-plástico con endurecimiento de J.C Simo and J.M Ju [131] .**

Este modelo, denominado por sus autores *modelo de tensión-deformación basado en la mecanica del continuo dañado* * , es otra formulación del tipo *plástico-degradable.* Ha sido desarrollado a partir de dos estructuras teóricas alternativas, duales: Una *formulación en el campo primal* donde las variables independientes son las deformaciones, y otra *formulación en el campo dual* donde las variables independientes son las tensiones. En esta breve presentación, sólo se verá la formulación primal.

La *mecánica del continuo dañado*, basada en procesos termodinámicos irreversibles y dependiente del estado de las variables internas, ha sido introducida y empleada extensivamente para describir el mecanismo de *degradación progresiva* que se desarrolla antes de la formación de macro-fisuras. Fué Kachanov [131] , el primero en introducir el concepto de *tensión efectiva*, para describir el comportamiento de un sólido con degradación de rigidez. El modelo supone que la degradación física del material, es el resultado de la iniciación, crecimiento e interconexión de micro-fisuras y micro-poros. Según la *mecánica del continuo dañado*, se puede modelizar este proceso a través de la introducción de una variable de daño que puede estar representada por una magnitud escalar o tensorial.

* *Nota: Entiendase el concepto de "Daño" como equivalente al de "degradación de rigidez".*

En el caso de una degradación anisotrópica (orientada), se tiene que la *tensión efectiva* $\overline{\boldsymbol{\sigma}}$, en el *sólido equivalente no-degradado*, está relacionada con la tensión $\boldsymbol{\sigma}$, en el *sólido real degradado* **fig.(III.8)**, mediante la siguiente expresión:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{M}\,\overline{\boldsymbol{\sigma}} \qquad \text{(III.48)}$$

donde $\boldsymbol{M}$ es la matriz de transformación de tensiones de un espacio equivalente y el real.

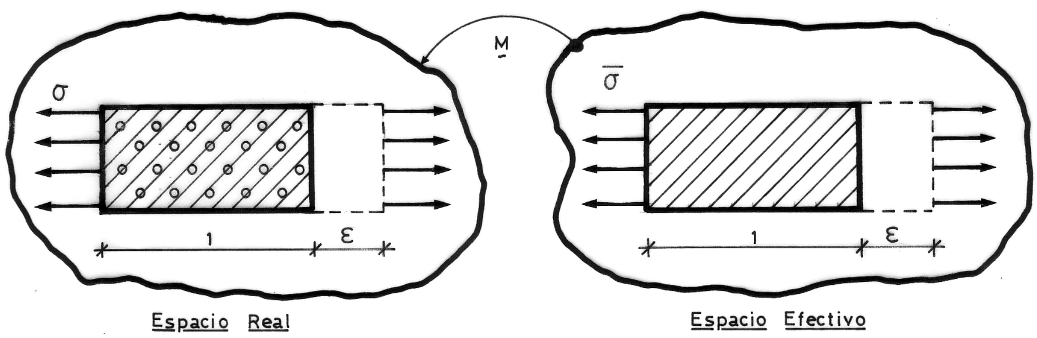

fig.(III.8): Representación esquemática de la hipótesis de "tensión efectiva".

Los autores del modelo, han considerado suficiente establecer un proceso degradable isotrópico, para simular el comportamiento de un sólido frágil, considerando que el comportamiento mecánico de las micro-fisuras es independiente de su orientación [130] , dependiendo sólo de una variable de degradación escalar $\hat{d}$. Así , la matriz de transformación $\boldsymbol{M}$ se reduce a;

$$\boldsymbol{M} = \left(1 - \hat{d}\right)\,\boldsymbol{I} \qquad \text{(III.49)}$$

quedando la *ec.(III.48)* como:

$$\boldsymbol{\sigma} = \left(1 - \hat{d}\right) \overline{\boldsymbol{\sigma}}$$

o bien: *(III.50)*

$$\boldsymbol{D}_S = \left(1 - \hat{d}\right) \overline{\boldsymbol{D}}_S$$

donde $\overline{\boldsymbol{D}}_S$ es la rigidez secante del sólido equivalente, $\boldsymbol{D}_S$ es la rigidez secante del sólido degradado (sólido real), $\hat{d} = 0$ si el punto del sólido no ha sufrido daño alguno, y $\hat{d} = 1$ cuando se ha alcanzado el daño total en el punto. La ley de evolución de esta variable de degradación de rigidez, para un caso isotrópico simple, viene dada a partir de la regla de normalidad al criterio de *degradación*, formulado en el espacio de deformaciones. Esto es:

$$\dot{\hat{d}} = \dot{\mu} \, \frac{\partial g(\overline{\tau}, r_d)}{\partial \overline{\tau}} \qquad \text{(III.51)}$$

donde $\overline{\tau} = \sqrt{\boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{D}_S \boldsymbol{\epsilon}}$ es la *norma de energía del material no dañado*, $g(\overline{\tau}, r_d) = \overline{\tau} - r_d \leq 0$ es el criterio de degradación formulado en el espacio de deformaciones, r_d es el umbral de degradación, tal que r_d^0 denota el límite inicial de degradación, y $\dot{\mu}$ es el parámetro de consistencia del daño.

La condición de carga/descarga en degradación, se define de acuerdo a las condiciones de Kuhn-Tucker [131] (principio de la máxima disipación por degradación):

$$\dot{\mu} \geq 0 \quad ; \quad g(\overline{\tau}, r_d) \leq 0 \quad ; \quad \dot{\mu} \, g(\overline{\tau}, r_d) = 0 \qquad \text{(III.52)}$$

que establece que: **1)** si $g(\overline{\tau}, r_d) < 0$ el criterio de daño no se satisface, y por la tercera condición de Kuhn-Tucker debe ocurrir que $\dot{\mu} = 0$, por lo tanto resulta que la regla de degradación ec.(III.51) queda $\dot{\hat{d}} = 0$; **2)** si $\dot{\mu} > 0$, se tiene por la tercera condición de Kuhn-Tucker que $g(\overline{\tau}, r_d) = 0$, por lo tanto implica que se trata de un proceso de carga con degradación. En esta situación, $\dot{\mu}$ puede ser determinado por la *condición de consistencia de degradación* (análoga a la condición de consistencia plástica de Prager). Esto es:

$$g(\overline{\tau}, r_d) = 0 \qquad y \qquad \dot{g}(\overline{\tau}, r_d) = 0 \tag{III.53}$$

de donde resulta que $\dot{\mu} = \dot{\overline{\tau}} = \frac{1}{\overline{\tau}} \boldsymbol{\sigma}^{0^T} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}$, siendo $\boldsymbol{\sigma}^0 = \overline{\boldsymbol{D}}_S \dot{\boldsymbol{\epsilon}}$.

La ley constitutiva incremental para un proceso elástico-degradable, denominado proceso de daño dúctil, resulta a partir de la ley de Clasius-Duhem (disipación reducida) (ver ***apart. IV.8.b***), de la regla de flujo ec.(III.51) y de la condición de consistencia de degradación ec.(III.53). Esto es:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\epsilon}, \hat{d}) = \left[(1-\hat{d})\overline{\boldsymbol{D}}_S \ \dot{\boldsymbol{\epsilon}}\right] - \left[\left(\frac{1}{\overline{\tau}} \ \boldsymbol{\sigma}^{0^T} \ \dot{\boldsymbol{\epsilon}}\right)\left(\frac{\partial g}{\partial \overline{\tau}}\right) \boldsymbol{\sigma}^0\right] \tag{III.54}$$

de donde resulta:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\epsilon}, \hat{d}) = \boldsymbol{C}_T^e \ \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \tag{III.55}$$

donde $\boldsymbol{C}_T^e = \left[(1-\hat{d})\overline{\boldsymbol{D}}_S - \frac{1}{\overline{\tau}} \frac{\partial g}{\partial \overline{\tau}} \left(\boldsymbol{\sigma}^0 \boldsymbol{\sigma}^{0^T}\right)\right]$ (obsérvese la similitud que guarda con la ec.(IV.108)).

Dentro de la estructura teórica formulada, la respuesta plástica viene caracterizada en el espacio de tensiones por medio de las ecuaciones constitutivas clásicas:

–Una regla de flujo plástica: $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \dot{\lambda}\ \dfrac{\partial \mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{q}, \hat{d})}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$

(III.56)

–Una regla de endurecimiento plástica: $\dot{\boldsymbol{q}} = \dot{\lambda}\ \boldsymbol{H}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{q}, \hat{d})$

–Y la condición de fluencia plástica: $\mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{q}, \hat{d}) \leq 0.$

además, es necesario considerar una condición de carga/descarga en plasticidad, que puede ser formulada mediante las condiciones de Kuhn-Tucker (***apart. A-I.3.e***):

$$\dot{\lambda} \geq 0 \quad ; \quad \mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{q}, \hat{d}) \leq 0 \quad ; \quad \dot{\lambda}\ \mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{q}, \hat{d}) = 0 \quad ; \tag{III.57}$$

siendo en la *ec.(III.56)* y en la *ec.(III.57)*, $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p$ el incremento de deformación plástica en un punto, $\dot{\lambda}$ el parámetro de consistencia plástica, $\boldsymbol{H}$ las funciones de evolución de las variables internas $\boldsymbol{q}$, y F la función de fluencia plástica, definida en el espacio de tensiones, en función de $\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{q}$, y $\hat{d}$ (este modelo utiliza la conocida función de fluencia : *cap-damage* [131][43]).

Finalmente, la ley constitutiva incremental para un proceso *elasto-plástico degradable*, se obtiene considerando que $\dot{\lambda} > 0$ y $\dot{\mu} > 0$ en las condiciones de consistencia plástica y de degradación, $\dot{\mathcal{F}} = 0$ y $\dot{g} = 0$, respectivamente. Resultando luego de desarrollos algebraicos [31] , de la siguiente forma:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\epsilon}^p, \hat{d}) = \boldsymbol{C}_T^{ep}\ \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \tag{III.58}$$

donde:

$$\boldsymbol{C}_T^{ep} = \left[(1-\hat{d})\overline{\boldsymbol{D}}_T^{ep} - \frac{1}{\mp} \frac{\partial g}{\partial \mp} \left(\boldsymbol{\sigma}^0 \boldsymbol{\sigma}^{0\,T} \right) \right]$$

$$\overline{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{(1-\hat{d})} \, \boldsymbol{\sigma} \qquad ; \textit{siendo } \boldsymbol{\sigma} \textit{ la tensión actual}$$

$$\boldsymbol{\sigma}^0 = \overline{\boldsymbol{D}}_S \, \dot{\boldsymbol{\epsilon}}$$

$$\overline{\boldsymbol{D}}_T^{ep} = \overline{\boldsymbol{D}}_S - \frac{\overline{\boldsymbol{D}}_S \left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \overline{\boldsymbol{\sigma}}} \right\} \left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \overline{\boldsymbol{\sigma}}} \right\}^T \overline{\boldsymbol{D}}_S}{-\boldsymbol{H}^T \left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{q}} \right\} + \left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \overline{\boldsymbol{\sigma}}} \right\}^T \overline{\boldsymbol{D}}_S \left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \overline{\boldsymbol{\sigma}}} \right\}}$$

El modelo ha sido generalizado para problemas con degradación anisotrópica, y reformulado para problemas con grandes deformaciones. Mayores detalles sobre este modelo se pueden consultar en las referencias de origen [130][131] .

Este modelo ha sido presentado al final de este grupo de *modelos plásticos con endurecimiento y degradación*, por que se considera una de las formulaciones mejor fundada en la mecánica de los sólidos continuos.

El problema más serio que presenta este modelo, es que considera una única cuota de degradación que se aplica por igual a la parte volumétrica y distorsional del tensor de rigidez. Trabajos realizados por Cedolin et al. [29] , y por Kotsovos-Newman [72] , demuestran que es necesario considerar una degradación diferenciada para la parte volumétrica y distorsional del tensor de rigidez. Otro concepto importante que omite este modelo, es la consideración de un flujo no-asociado, que impide controlar los efectos de la dilatancia.

Una importante ventaja de los modelos plásticos degradables, respecto de los plásticos con ablandamiento como propiedad del material, es que para incrementos de tensión tangente a la superficie de fluencia (estado de carga neutra en plasticidad asociada), pueden simular un comportamiento inelástico, en vez de la respuesta elástica que producen aquellos con ablandamiento [134] . Esto se puede corregir en estos últimos, modificando la regla de flujo asociada cuando se considera el fenómeno de degradación de rigidez, situación que ha sido tenida en cuenta en el *modelo de daño plástico* que se presenta en esta tesis (***apart. IV.8.f***).

III.3.d.- Modelo de zona inerte, combinado con plasticidad con endurecimiento.

Dentro de este grupo existen varios modelos que han sido utilizados en materiales metálicos [68][69] , sin embargo sólo hay uno formulado para materiales friccionales. Se trata del modelo presentado por **G. Frantziskonis and G. Desai** [51][52] . Este modelo marca una sustancial diferencia con todos aquellos citados hasta el momento. Se fundamenta en considerar un *proceso elasto-plástico con endurecimiento*, combinado con un criterio capaz de considerar, mediante la participación de un factor de peso r_ξ , la influencia del tamaño de la zona *inerte* * en la respuesta total del sólido. De esta combinación de respuestas (endurecimiento plástico más respuesta nula), resulta un comportamiento en tensión-deformación con ablandamiento **fig.(III.9)**.

Al iniciar el proceso plástico, el peso de la respuesta del material inerte es nula ($r_\xi = 0$) y a medida que evoluciona el proceso inelástico, el factor de peso r_ξ crece hasta alcanzar un valor próximo a ($r_\xi \simeq 1$) situación que indica que la zona inerte cubre el volumen total del sólido. Este crecimiento, viene condicionado por una ley de evolución explicita, que se ha supuesto de la siguiente forma **fig.(III.10)**:

$$r_\xi(\xi_D) = r_\xi^u - r_\xi^u \; e^{-\chi_D \xi_D^R} = \frac{V^0}{V} \qquad \textit{(III.59)}$$

siendo:

$r_\xi^u, \;\; \chi_D$ *y* R : *constantes relacionadas con el material.*

$\dot{\xi}_D = \left(\dot{e}_{ij}^p \dot{e}_{ij}^p\right)^{1/2}$

V^0 : *volumen de la zona inerte.*

V : *volumen total.*

---

* *Nota: Zona donde el material no tiene capacidad de responder a las acciones externas, con una ley tensión-deformación constante e igual a cero durante todo el proceso de carga.*

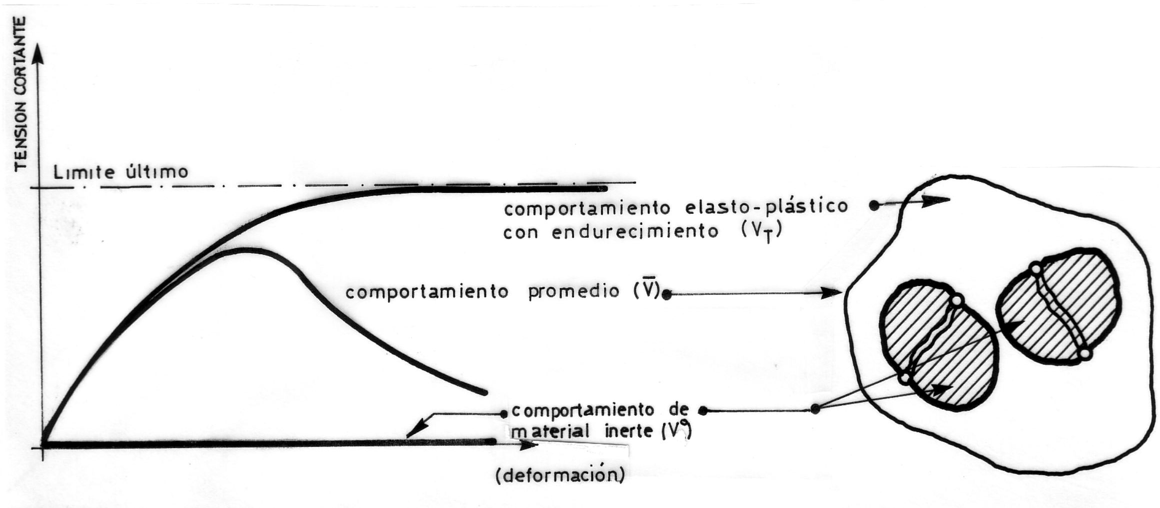

fig.(III.9): Concepto de descomposición del comportamiento del material, según el modelo de G. Frantziskonis and G. Desai [51][52] .

De esta manera, el modelo descompone el comportamiento del sólido en dos partes: – **La primera parte**, de volumen $\overline{V} = V - V^0$, simula una respuesta de *sólido continuo equivalente*, y está gobernada por un proceso irreversible representado por medio de la teoría de la plasticidad con endurecimiento; y – **La segunda parte**, referida a la zona *inerte* de volumen V^0 , tiene un comportamiento tensión-deformación con rigidez nula. Estos dos comportamientos, combinados conducen a simular bastante bien la respuesta del hormigón [51] .

Los autores del modelo, relacionan este comportamiento mecánico con la degradación de rigidez que sufre el material durante un proceso de carga, y en tal sentido, consideran que se trata de una extensión multiaxial de la teoría de Kachanov [51] ya mencionada en el modelo que se ha presentado anteriormente. De aceptar esta hipótesis de degradación*, resulta necesario resaltar que la diferencia entre este tratamiento y el anterior radican en considerar una formulación *no-local* y *local*, respectivamente. Así , se obtiene una tensión en

* *Nota: En este caso, es importante notar la similitud entre la variable escalar de degradación* $\hat{d}$ *propuesta por Simo and Ju* [131] *, y el factor de peso* r_ξ *propuesto en este modelo.*

el *sólido real degradado* σ_{ij} , que está relacionada con la *tensión efectiva* $\overline{\sigma}_{ij}$, en el *sólido equivalente no-degradado*, a través de la siguiente expresión:

$$\dot{\sigma}_{ij} = (1 - r_\xi) \left[\overline{D}^{ep}_{ijkl} \right]_T \dot{\epsilon}_{kl} + \frac{r_\xi}{3} \delta_{ij} \left[\overline{D}^{ep}_{ppkl} \right]_T \dot{\epsilon}_{kl} - \overline{s}_{ij} \dot{r}_\xi \qquad \textit{(III.60)}$$

siendo:

$\left[\overline{D}^{ep}_{ijkl} \right]_T$: *tensor de rigidez elasto-plástico equivalente.*

$\overline{s}_{ij} = \overline{\sigma}_{ij} - \frac{1}{3} \overline{\sigma}_{pp} \delta_{ij}$: *tensor desviador de tensiones, para el sólido equivalente.*

fig.(III.10): Regla de evolución del tamaño de la zona “inerte”.

Dentro de esta estructura teórica, la respuesta plástica viene caracterizada en el espacio de tensiones, por medio de las siguientes ecuaciones:

–Una regla de flujo plástica: $\dot{\epsilon}^p_{ij} = \dot{\lambda} \; \frac{\partial \mathcal{F}(\sigma_{ij}, \alpha_\xi)}{\partial \overline{\sigma}_{ij}}$

–Una regla de endurecimiento plástica: $\dot{q}_i = \dot{\lambda} \; H_i \equiv \dot{\alpha}_\xi = \frac{\alpha_{\xi 1}}{\dot{\xi}^{\eta_{\xi 1}}}$ (III.61)

–Y la condición de fluencia plástica: $\mathcal{F}(\sigma_{ij}, \alpha_\xi) \leq 0.$

donde $\mathcal{F}(\sigma_{ij}, \alpha_\xi)$ es una función de fluencia no-homogénea definida en el espacio de tensiones, que puede consultarse en las referencias [51][53] , α_ξ es la variable de endurecimiento plástico, $\alpha_{\xi 1}$ y $\eta_{\xi 1}$ son unas constantes de endurecimiento, y por último $\dot{\xi} = \left(\dot{\epsilon}^p_{ij} \dot{\epsilon}^p_{ij}\right)^{1/2}$.

De acuerdo a esto, y a la condición de consistencia plástica, resulta una relación constitutiva elasto-plástica equivalente, igual a:

$$\dot{\overline{\sigma}}_{ij} \;\; = \;\; \left[\overline{D}^{ep}_{ijkl}\right]_T \; \dot{\epsilon}_{kl} \qquad \text{(III.62)}$$

donde:

$$\left[\overline{D}^{ep}_{ijkl}\right]_T = \left[\overline{D}_{ijkl}\right]_S - \frac{\left[\overline{D}_{ijpq}\right]_S \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \overline{\sigma}_{pq}} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \overline{\sigma}_{mn}} \left[\overline{D}_{mnkl}\right]_S}{-\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \overline{\sigma}_{kl}} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \overline{\sigma}_{kl}}\right)^{1/2} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \overline{\sigma}_{uv}} \left[\overline{D}_{uvrs}\right]_S \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \overline{\sigma}_{rs}}}$$

$$\dot{\epsilon}_{ij} \;\; = \;\; \dot{\epsilon}^e_{ij} \; + \; \dot{\epsilon}^p_{ij}$$

$$\dot{\epsilon}^e_{ij} \;\; = \;\; \left[\overline{D}_{ijkl}\right]^{-1}_S \; \dot{\sigma}_{kl}$$

Para más detalle, se puede consultar las referencias de origen [51][52] .

Este modelo, puede ser considerado como una formulación no-local, ya que el comportamiento tensión-deformación de un punto *ec.(III.60)*, depende del volumen de la zona inerte, a través del factor de peso r_ξ .

III.4.- MODELOS BASADOS EN LA TEORIA ENDOCRONICA DE LA PLASTICIDAD.

Todas las teorías mencionadas en las secciones precedentes, son por lo general *incrementalmente linelales.* Los modelos constitutivos basados en la teoría endocrónica de la plasticidad, constituyen el más importante ejemplo donde esto no ocurre [134] .

Las teorías de flujo incremental, como la teoría de la plasticidad, suponen la existencia de un *criterio de fluencia* y una *regla de endurecimiento* para definir la evolución de la superficie de fluencia durante el proceso de carga cuasi-estático. De esta forma, el modelo elasto-plástico puede ser visto como un material ideal con distintos comportamientos mecánicos: inicialmente elástico hasta alcanzar la superficie de discontinuidad inicial, luego plástico con endurecimiento hasta alcanzar la superficie de tensión máxima o pico, y por último plástico con ablandamiento hasta alcanzar la superficie de tensión última. Sin embargo, el material real tiene una respuesta única y condicionada por muchos fenómenos [35] que inducen a comportamientos no tan claros como los que idealiza la teoría elasto-plástica. Por ejemplo, es usual que en los materiales existan deformaciones permanentes antes de iniciar el proceso de cargas. Si se agrega a esto el desconocimiento sobre estas deformaciones y el tipo de comportamiento previo, se presenta la dificultad de no poder establecer con precisión la posición de la superficie de discontinuidad inicial.

Motivado por las razones mencionadas, entre otras, se han realizado considerables esfuerzos dentro de la mecánica de los medios continuos, con el fin de formular una teoría de material ideal, que permita describir el comportamiento inelástico de los sólidos, y que no requiera de la existencia de un criterio de fluencia, evitando así la definición de su función, la posición inicial y las complicadas reglas de endurecimiento que marcan la evolución de este criterio durante el período post-elástico. Con estas características generales, Valanis en 1971 [138][139] , dió origen a la llamada *teoría endocrónica* aplicada a materiales metálicos. Para ello formuló un modelo que puede ser considerado como un caso general de la *visco-plasticidad* [35] , en el que no sólo se incluye una descripción de la *historia de su comportamiento en la variable pseudo-tiempo*, sino también una *historia de su comportamiento en la variable de deformación* , que permite reproducir satisfactoriamente los fenómenos de endurecimiento, carga y recarga. Todo esto, sin la necesidad de que exista una función de fluencia ni reglas de endurecimiento.

Usando los conceptos de Valanis, Bazănt y un grupo de colaboradores, han extendido la formulación de la teoría endocrónica con el fin de describir el comportamiento de materiales friccionales (suelos, rocas, hormigones, etc.) [6] .

Aunque algunos aspectos de esta teoría parecen necesitar futuros estudios, se presenta como un procedimiento potente para las aplicaciones prácticas [35] .

A continuación se describe brevemente algunos conceptos fundamentales del modelo endocrónico de Bazănt [6] .

La relación entre el tensor de tensiones σ_{ij} y el de deformaciones ϵ_{ij} , viene dada por la siguiente integral, modificada por Bazănt, donde se introduce un *pseudo-tiempo* ξ . Esto es:

$$\sigma_{ij} = \int_0^{\xi} E_{ijkl}\,(\xi - \xi')\,\frac{\partial \epsilon_{kl}}{\partial \xi'}\,d\xi' \tag{III.63}$$

donde:

$\xi = \int_0^{\zeta} \frac{d\zeta}{f(\zeta)}$: *pseudo tiempo*

$d\zeta^2 = k_1 d\epsilon_{ii} d\epsilon_{jj} + k_2 d\epsilon_{ij} d\epsilon_{ij} + b dt^2$

k_1 , k_2 , b : *constantes del material*

$f(\zeta) > 0$: *función que depende de la historia del material*

E_{ijkl} : *constante del material*

Esta última ecuación, representa una típica ecuación constitutiva de la teoría endocrónica lineal.

En las referencias [138] y [139] , Valanis propone una función de relajación simple, del tipo : $E_{ijkl} = E^0 \, e^{-\alpha(\xi-\xi')}$, que permite analizar el comportamiento uniaxial de los metales. Sustituyendo esta función de relajación en la *ec.(III.63)*, el modelo endocrónico se reduce a un simple modelo de Maxwell.

Para profundizar el estudio de este modelo, se recomienda consultar las referencias [6][138][139] .

III.5.- MODELOS DE FRACTURA.

Estos modelos, hacen la hipótesis de que el comportamiento no lineal del hormigón se debe fundamentalmente al fenómeno de fisuración que se origina debido a la baja resistencia a tracción que tiene este material. Normalmente consideran una simplificación de su comportamiento, suponiendo que se trata de un material *elasto-frágil*, y por lo tanto sólo reconocen dos estados mecánicos: – uno puramente elástico, y – otro fracturable.

Dentro del contexto del método de los elementos finitos, se pueden clasificar estos modelos en tres grupos [33] : **1)** Modelos de fisura-distribuída, **2)** Modelos de fisura-discreta, **3)** Modelos de la mecánica de fractura clásica.

Si bien los modelos de fisura-distribuída han cobrado mucho auge en este último tiempo, se puede decir que esto no va en perjuicio de los modelos de fisura-discreta, ni de los de mecánica de fractura, ya que cada grupo tiene un campo de aplicación propio. En general, si sólo se quiere obtener un comportamiento carga desplazamiento y un camino aproximado de la evolución de las fisuras, resulta adecuado un modelo de fisura-distribuída. Si lo que importa es una detallada descripción de una zona muy localizada del hormigón, y conocer con más precisión el desarrollo de las fisuras, resulta más adecuado un modelo de fisura discreta. Para problemas especiales de fractura localizada, donde el tamaño del especimen es muy grande respecto de la zona fracturada, es más apropiado escoger como herramienta de trabajo la mecánica de fractura.

III.5.a.- Modelos de fisura-distribuída.

Esta técnica, introducida por Y. Rashid [115] , admite un comportamiento elástico lineal hasta alcanzar el *límite de fallo* que viene establecido por la máxima resistencia a tracción σ_T^{max} (que en estos casos coincide con la tensión de elasticidad a tracción σ_T^0). Este límite queda definido a través de una función que describe una superficie en el espacio de tensiones principales. Luego de alcanzar esta frontera, se considera que el material adopta la forma de un sólido ortótropo con respuesta diferenciada según cada dirección principal de tensión. Esta respuesta se debe a que el modelo supone, por hipótesis, que se desarrollan planos de fisuras normales a la tensión principal mayor luego de alcanzar la máxima resistencia de tracción. Estos planos paralelos de fisura, tratan de representar la formación de una fisura discreta real **fig.(III.11)**.

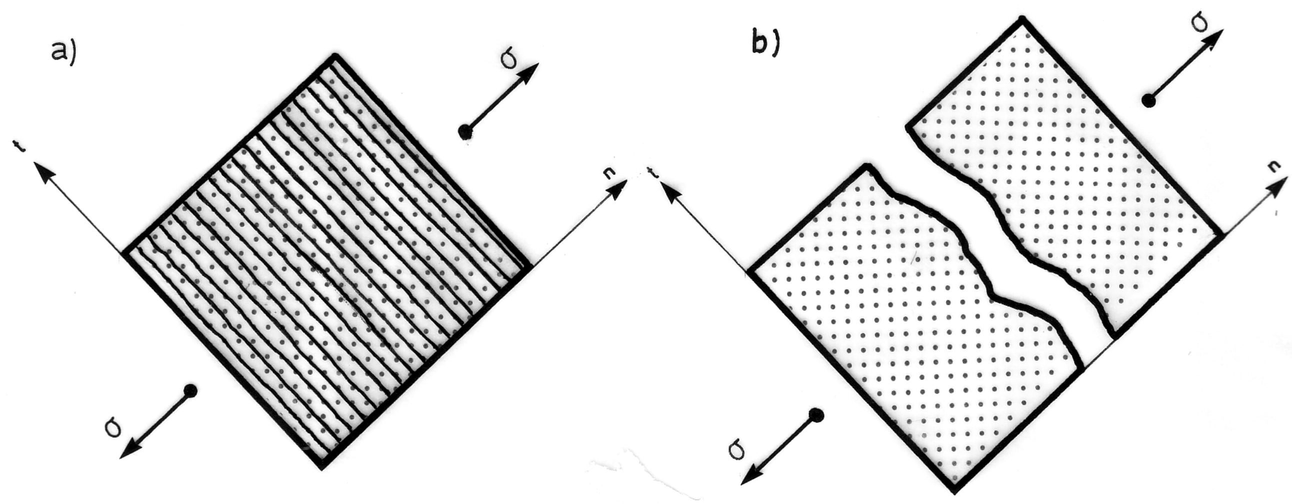

fig.(III.11): Idealización de una fractura real por medio de planos paralelos de fisura-distribuída. a) Fisura-distribuída. b) Fisura real.

Los primeros modelos de este grupo sostienen que una vez producida la primera fisura, después de alcanzar la resistencia máxima a tracción, el módulo de elasticidad en la dirección normal a la misma se hace nulo (**modelo de Rashid** [115]);

de manera que se produce una pérdida violenta se su resistencia a tracción $\sigma_T \rightarrow 0$. Posteriormente **A. Hillerborg et al.** [60] , basados en resultados experimentales, propusieron un modelo que considera al hormigón como un sólido no tan frágil, caracterizado por una respuesta tensión-desplazamiento, entre caras de fisura, donde la pérdida de tensión se produce gradualmente a medida que crece el desplazamiento entre ellas (material con ablandamiento). Este modelo, denominado de *fisura ficticia*, considera que la microfisuración resulta de una pérdida gradual de cohesión en una cierta región de tamaño finito. Asimismo, formula dos ecuaciones constitutivas distintas, una para la zona dañada provista por una relación tensión-desplazamiento, y otra para la zona no dañada provista por una relación tensión deformación [60] **fig.(III.12)**.

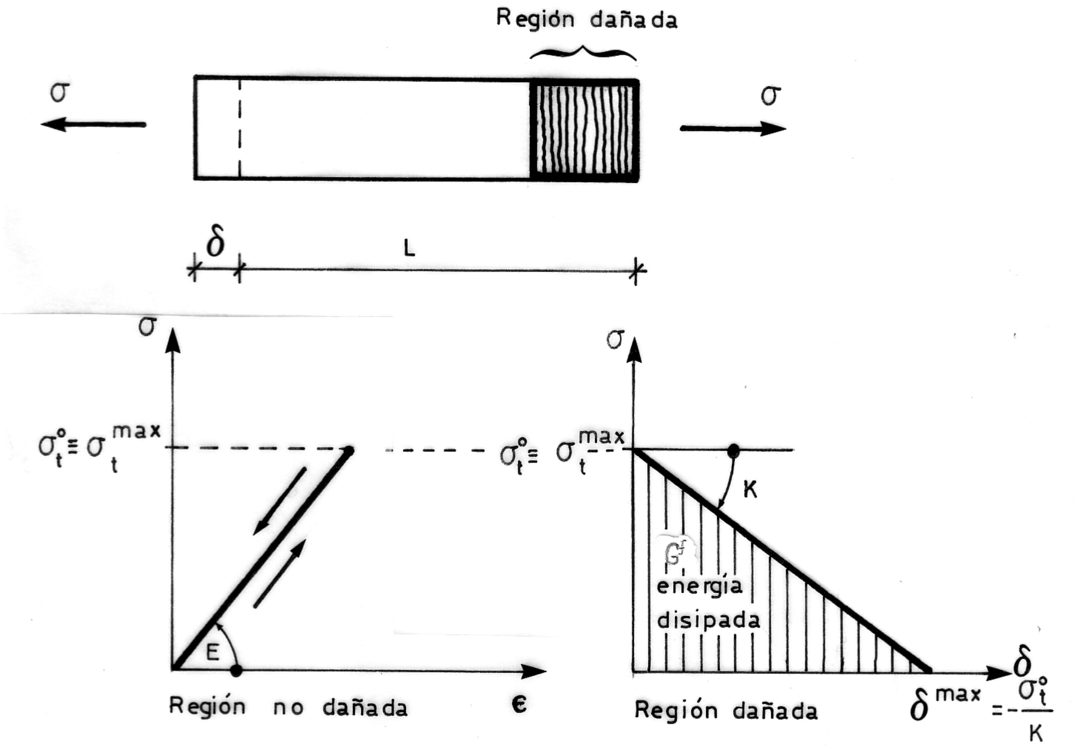

fig.(III.12): Modelo de A. Hillerborg. Esquema de comportamiento para la zona dañada y no-dañada.

Para explicar en forma sintética el funcionamiento de este modelo clásico, se considera, a modo de ejemplo, la barra de la **fig.(III.12)**. En ella el desplazamiento en el extremo vale:

$$\delta \;=\; L\,\frac{\sigma}{E^0} \;+\; \frac{1}{K}\;(\sigma - \sigma_T^{max}) \qquad \textit{(III.64)}$$

donde E^0 es el módulo de Young inicial, σ_T^{max} es la resistencia máxima a tracción, y K la pendiente de la curva $(\sigma - \delta)$.

La energía que se disipa durante el proceso de fractura será :

$$W^f \;=\; \frac{1}{2}\,\sigma_T^{max}\,\delta^{max}\,A^f \;=\; G^f\,A^f \qquad \textit{(III.65)}$$

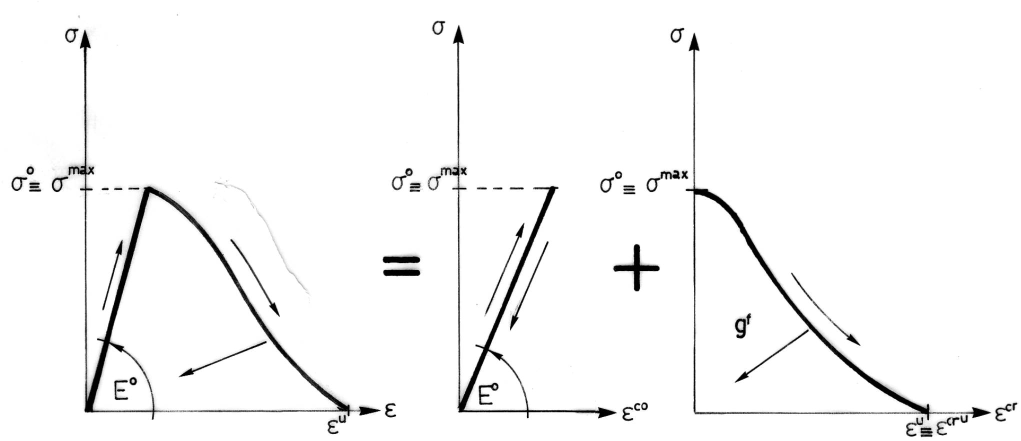

fig.(III.13): Comportamiento esquemático uniaxial del hormigón, en la zona dañada.

donde A^f es la superficie de la cara de la fisura, que para el ejemplo de la **fig.(III.12)** coincide con la sección transveral de la barra, y G^f es la *energía de fractura por unidad de área fracturada* *ec.(An-D.21)*. Esta energía es considerada como una propiedad del material [10][11][14][48][60][123] , y permite encontrar a partir de la *ec.(III.65)*, el valor del desplazamiento máximo δ^{max} para el cual la fisura pierde totalmente su capacidad de resister tensiones, y con ello se puede definir la pendiente de la curva $(\sigma - \delta)$:

$$\delta^{max} = \frac{2\ G^f}{\sigma_T^{max}} \implies K = -\frac{(\sigma_T^{max})}{2\ G^f} \tag{III.66}$$

Entre los modelos de fisuración distribuída más recientes, se encuentran los formulados por Z. Bažant et al. [10][14] , J. Rots et al. [123] , R. De Borst [18] , E. Hinton and M. Cervera [30] , R. Glemberg [54] , que consideran una ecuación constitutiva elástica en tensión-deformación para la zona no-dañada, y otra con ablandamiento para la zona dañada **fig.(III.13)**.

- **Modelo de fisuración distribuída de Rots et al.** [123] **.**

A continuación, por ser uno de los modelos de fisuración distribuída más significativos, se presenta en forma breve el **Modelo de J. Rots et al.** [123] , que resulta ser un caso particular del propuesto por Bažant and Ho [14][22] .

El rasgo fundamental de este modelo, es la descomposición aditiva que aplica sobre el incremento total de deformación $\Delta\boldsymbol{\epsilon}$, en un incremento de deformación correspondiente al hormigón sin fisurar $\Delta\boldsymbol{\epsilon}^{co}$, más otro incremento de deformación correspondiente al hormigón fisurado $\Delta\boldsymbol{\epsilon}^{cr}$ **fig.(III.14)**:

$$\Delta\boldsymbol{\epsilon} = \Delta\boldsymbol{\epsilon}^{co} + \Delta\boldsymbol{\epsilon}^{cr} \tag{III.67}$$

aparentemente, la teoría de la plasticidad utiliza una descomposición similar, sin embargo es necesario establecer una diferencia fundamental entre ambas formas de considerar esta descomposición aditiva. La deformación $\boldsymbol{\epsilon}^{cr}$ se recupera totalmente si se descarga el sólido, por lo tanto se puede interpretar como un comportamiento de degradación de la rigidez secante durante el período post-elástico; en cambio en plasticidad, la deformación plástica es irrecuperable, por que resulta de la acción de un proceso inelástico **fig.(III.14)**.

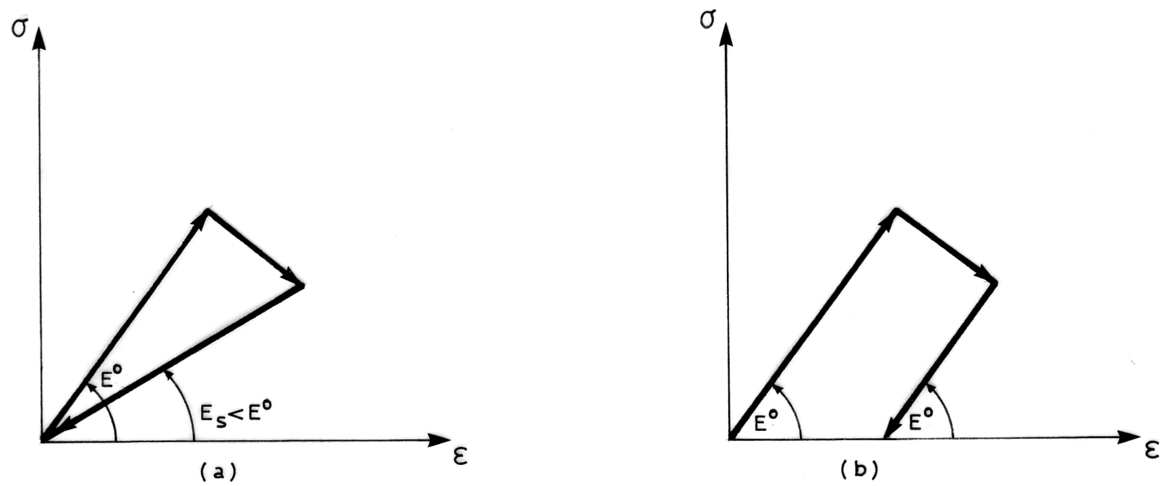

fig.(III.14): Diferencias esquemáticas, entre: a) el comportamiento del modelo de fisura distribuída, y b) el modelo de plasticidad clásica con ablandamiento.

El incremento de deformación $\Delta\boldsymbol{\epsilon}^{cr}$, puede ser descompuesto en varias contribuciones que dependen del número de fisuras ficticias que se desarrollen en un punto. Esto es:

$$\Delta\boldsymbol{\epsilon}^{cr} = \Delta\boldsymbol{\epsilon}_I^{cr} + \Delta\boldsymbol{\epsilon}_{II}^{cr} + \ldots + \Delta\boldsymbol{\epsilon}_n^{cr} \qquad (III.68)$$

donde $\Delta\boldsymbol{\epsilon}_I^{cr}$ es el incremento de deformación correspondiente a la fisura primaria, $\Delta\boldsymbol{\epsilon}_{II}^{cr}$ es el incremento de deformación correspondiente a la fisura secundaria, etc. La relación entre cada incremento de deformación en la fisura, y el respectivo incremento de tensión, se define en un sistema de referencia local a la fisura, y luego es transformado al sistema global de referencia. El modelo supone que el incremento de deformación $\Delta\boldsymbol{e}_n^{cr}$, definido en el sitema de referencia local de la fisura *n-ésima* que se desarrolla en un punto, sólo tiene dos componentes: Una normal a la fisura Δe_n^{cr} (Modo-I de fractura), y otro tangencial a la misma $\Delta\gamma_n^{cr}$ (Modo-II de fractura) **fig.(III.15)**. Esto es:

$$\Delta\boldsymbol{\epsilon}_n^{cr} \;=\; \mathbb{N}_n\, \Delta\boldsymbol{e}_n^{cr}$$

$$\begin{Bmatrix} \Delta\epsilon_{11}^{cr} \\ \Delta\epsilon_{22}^{cr} \\ \Delta\gamma_{12}^{cr} \end{Bmatrix}_n = \begin{bmatrix} cos^2\,\vartheta_\sigma & -\,sin\,\vartheta_\sigma\;\,cos\,\vartheta_\sigma \\ sin^2\,\vartheta_\sigma & sin\,\vartheta_\sigma\;\,cos\,\vartheta_\sigma \\ 2\,sin\,\vartheta_\sigma\;\,cos\,\vartheta_\sigma & cos^2\,\vartheta_\sigma - sin^2\,\vartheta_\sigma \end{bmatrix}_n \begin{Bmatrix} \Delta e_n^{cr} \\ \Delta\gamma_n^{cr} \end{Bmatrix}_n \qquad \text{(III.69)}$$

donde $\vartheta_\sigma|_n$ es el ángulo que hace la normal al plano de la fisura *n-ésima* con el eje de referencia global x_1 . Esta dirección, por hipótesis, coincide con la de la tensión principal mayor de tracción *ec.(An-D.2.b.)*.

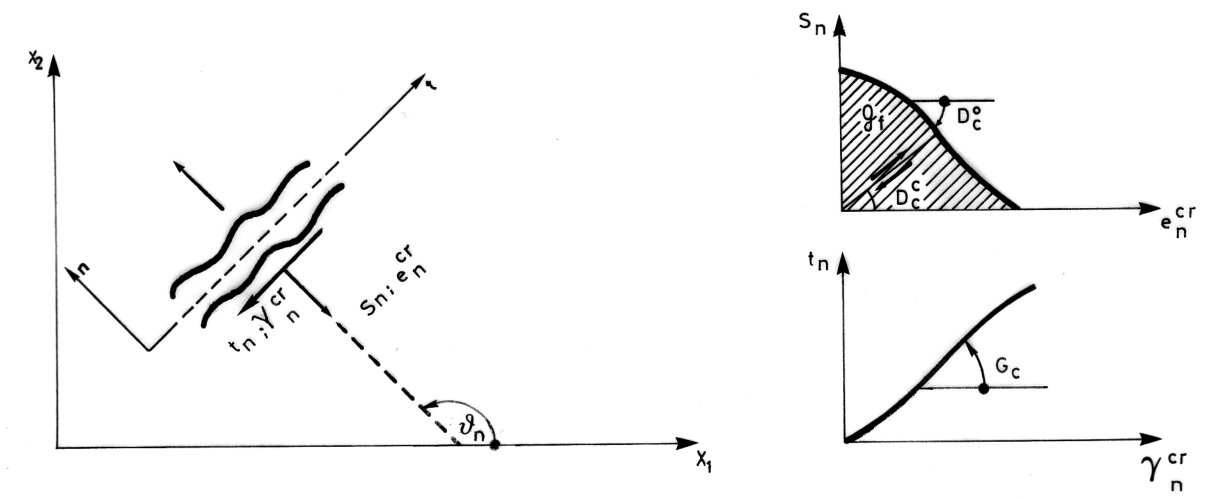

fig.(III.15): Deformaciones y tensiones desarrolladas en una fisura según un sistema de referencia local.

Sustituyendo la *ec.(III.69)* en la *ec.(III.68)*, queda expresada la deformación de fisuración total, en un punto, como:

$$\Delta\boldsymbol{\epsilon}^{cr} \;=\; \mathbb{N}\; \Delta\boldsymbol{e}^{cr} \qquad \text{(III.70)}$$

con:

$$\mathbb{N} = [\, \mathbb{N}_I \quad \mathbb{N}_{II} \quad \cdots \quad \mathbb{N}_n \,]$$

$$\Delta \boldsymbol{e}^{cr} = \begin{Bmatrix} \Delta \boldsymbol{e}_I^{cr} \\ \Delta \boldsymbol{e}_{II}^{cr} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \Delta \boldsymbol{e}_n^{cr} \end{Bmatrix}$$

En forma análoga, se define el vector $\Delta \boldsymbol{S}_n$, que representa el estado tensional en la fisura *n-ésima* según el sistema de referencia local **fig.(III.15)**, y que tiene dos componentes: –Una normal al plano de la fisura ΔS_n , y –Otra tangencial a dicho plano Δt_n . La transformación del sistema de referencia global al local, se realiza a través de la siguiente expresión:

$$\Delta \boldsymbol{S} = \mathbb{N}^T \, \Delta \boldsymbol{\sigma} \qquad \textit{(III.71)}$$

con:

$$\Delta \boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad ; \quad \Delta \boldsymbol{S} = \begin{Bmatrix} \Delta \boldsymbol{S}_I \\ \Delta \boldsymbol{S}_{II} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \Delta \boldsymbol{S}_n \end{Bmatrix} \quad ; \quad \Delta \boldsymbol{S}_n = \begin{Bmatrix} \Delta S_n \\ \Delta t_n \end{Bmatrix}$$

Conocido el concepto básico del modelo y sus variables fundamentales, se presenta a continuación la relación tensión-deformación para los puntos no dañados, y otra para los puntos fisurados. Para el hormigón no fisurado, se acepta una relación elástica lineal del tipo:

$$\Delta \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{D}^{co} \, \Delta \boldsymbol{\epsilon}^{co} \qquad \textit{(III.72)}$$

donde $\boldsymbol{D}^{co}$ es el tensor de rigidez elástico del material, expresado como matriz para un sistema plano (***apart. A-I.2.***). La relación tensión-deformación para el material fisurado, se formula en el sistema de referencia local de la fisura **fig.(III.15)**. Esto es:

$$\Delta \boldsymbol{S} \;=\; \boldsymbol{D}^{cr} \; \Delta \boldsymbol{e}^{cr} \qquad \textit{(III.73)}$$

con:

$$\boldsymbol{D}^{cr} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{D}_I^{cr} & & & \\ & \boldsymbol{D}_{II}^{cr} & & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{D}_n^{cr} \end{bmatrix} \quad ; \quad \boldsymbol{D}_n^{cr} = \begin{bmatrix} D_c & \\ & G_c \end{bmatrix}_n$$

$D_c \;=\; D_c^0$ *para fisuras activas*

$D_c \;=\; D_c^c$ *para fisuras en descarga o recarga*

A partir de las *ecs.(III.67),(III.70),(III.71),(III.72) y (III.73)* se puede formular la relación constitutiva tangente incremental para el hormigón:

$$\Delta \boldsymbol{\sigma} = \left\{ \boldsymbol{D}^{co} - \boldsymbol{D}^{co} \mathbb{N} \left[\boldsymbol{D}^{cr} + \mathbb{N}^T \boldsymbol{D}^{co} \mathbb{N} \right]^{-1} \mathbb{N}^T \boldsymbol{D}^{co} \right\} \; \Delta \boldsymbol{\epsilon} \qquad \textit{(III.74)}$$

Para definir el módulo de rigidez extensional D_c^0 , que interviene en cada $\boldsymbol{D}_n^{cr}$, es necesario suponer, al igual que en el modelo de Hillerborg, que la energía de fractura por unidad de superficie fracturada G^f es una constante del material. Así , para una fractura real se tiene :

$$G^f \;=\; \int_0^{\delta^{max}} S \; d\delta \qquad \textit{y además} \qquad W^f \;=\; \frac{G^f}{A^f} \qquad \textit{(III.75)}$$

pero la energía total disipada por este modelo, durante un proceso de fisuración, vale:

$$W^f \;=\; \int_{V^{cr}} g^f \; dV \;=\; \int_{V^{cr}} \left[\sum_{i=I}^{n} \left(\int_0^{e^{cr}} S_n \; de_n^{cr} \right) \right] \; dV \qquad \text{(III.76)}$$

de las ecs.(III.75) y (III.76) resulta la relación entre G^f y g^f :

$$g^f \;=\; \frac{G^f}{L^f} \qquad \text{(III.77)}$$

donde L^f es el ancho de la zona de influencia de una fisura distribuída. Con g^f y la función $S(e^{cr})$ queda perfectamente definida la curva $(S - e^{cr})$.

El módulo de rigidez de corte G_c , se toma constante e igual a:

$$G_c|_n \;=\; [\beta_G \; G^0]_n \qquad \text{(III.78)}$$

siendo $G^0 = \dfrac{E^0}{2(1+\nu)}$, $\beta_G = cte. = \dfrac{t_n}{t_n^e}$ el factor de retención de tensiones cortantes para cada fisura, t_n y t_n^e son la tensiones tangenciales actual y elástica de la fisura *n-ésima*, expresadas en el sistema de referencia local, respectivamente.

Este modelo a sido actualizado por sus autores, con el objeto de considerar además, un comportamiento elasto-plástico con endurecimiento [20][22] , lo que supuso que la deformación incremental definida en la ec.(III.67), quede formulada ahora de la siguiente manera:

$$\Delta\boldsymbol{\epsilon} \;=\; \Delta\boldsymbol{\epsilon}^{co} \;+\; \Delta\boldsymbol{\epsilon}^{cr} \;=\; (\Delta\boldsymbol{\epsilon}^{e} \;+\; \Delta\boldsymbol{\epsilon}^{p}) \;+\; \Delta\boldsymbol{\epsilon}^{cr} \qquad \text{(III.79)}$$

donde el comportamiento inelástico, es gobernado por la la teoría de la plasticidad clásica (***apen. A-I***). Recientes cambios que se han practicado sobre esta última modificación del modelo, permite trabajar en problemas dominados por el comportamientos en modo-II de fractura [122] y en fluencia diferida [20] .

III.5.b.- Modelos de fisura-discreta.

El primer modelo para el análisis, por el método de los elementos finitos, de la fisuración del hormigón fué desarrollado por **Ngo and Scordelis** en el año 1967 [90] . Este modelo ha sido propuesto para realizar un análisis elástico lineal en problemas de tensión plana, con una *trayectoria pre-definida para las fisuras.* Cada *fisura pre-definida*, debe ser modelada mediante la desconexión de los nodos de la malla de elementos finitos, marcando así la trayectoria que se ha previsto para dicha fisura **fig.(III.16)**. En trabajos posteriores de dichos autores, se incluyeron efectos como el de *clavija*, producido por el acero y el rozamiento entre las caras de una fisura.

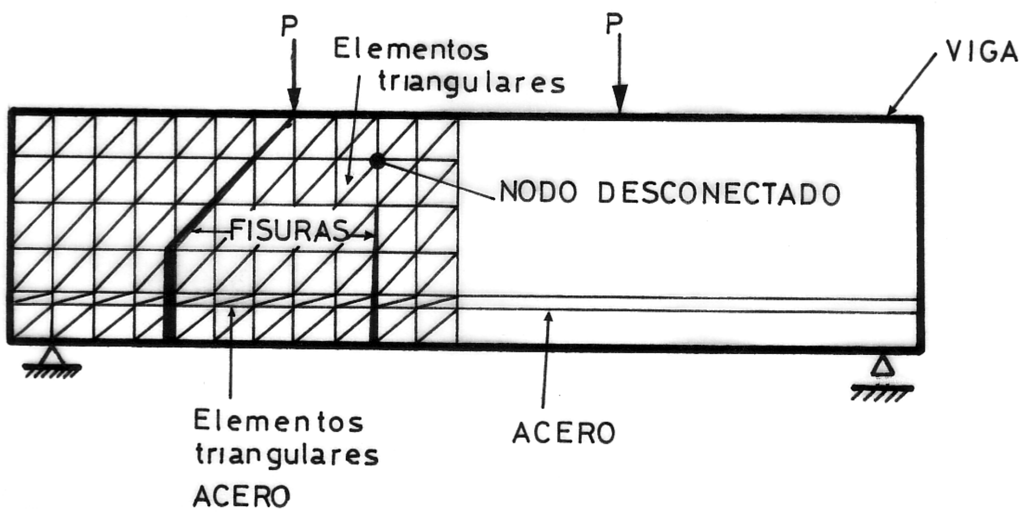

fig.(III.16): Modelo de fractura-discreta de Ngo and Scordelis [90] .

El problema que se encontró en este modelo, además de la arbitraria elección del camino de fisuración, fué la dependencia de la respuesta del sólido, de la forma y tamaño de la malla de elementos finitos.

A. Nilson [91] presentó una modificación de este procedimiento, que permite que las fisuras se propaguen inter-elementalmente a través de una desconexión automática de los nodos, la que ocurre cuando el promedio de tensión en un lado de un elemento finito supera la máxima resistencia a tracción del hormigón. Esto permitió prescindir de la definición arbitraria del camino de las fisuras, ya que esto depende del proceso mismo.

Sucedieron a estos trabajos, otros que mejoraron el procedimiento, no obstante siempre se presenta el inconveniente del elevado costo de *re-definición* de la malla de elementos finitos [48][134] .

III.5.c.- Modelos basados en la mecánica de fractura clásica – Elástica lineal.

Los parámetros que gobiernan la iniciación y propagación de las fisuras en la *mecánica de fractura elástica lineal* son los factores de intensidad de tensiones K_I , K_{II} , K_{III} y la tenacidad del material a la fractura K_{IC} [48][134] . En esta aproximación se supone que el tamaño de la zona de fractura es despreciable frente a su longitud. De esta forma, se pueden obtener las tensiones en el fondo de una fisura, con el sólo conocimiento del los factores K_i . La tenacidad del material a fractura, es una propiedad de éste y permite estudiar la estabilidad de una fisura, así pues, si el factor de intensidad de tensiones alcanza el valor crítico, la fisura se propaga en forma inestable. Este comportamiento parece razonable para fisuras muy grandes, en caso contrario pueden aparecer errores importantes [48] (efecto medida [11][28][59]).

El proceso operativo (de la ref. [48]), consiste en los siguientes pasos generales:

– Cálculo de los factores de intensidad de tensiones, a través de las expresiones de Ingraffea **fig.(III.17)**:

$$
\begin{aligned}
K_I &= \sqrt{2\frac{\pi}{L}}\frac{G}{(\kappa_k+1)}\left[4(v_B-v_D)+v_e-v_C\right] \\
K_{II} &= \sqrt{2\frac{\pi}{L}}\frac{G}{(\kappa_k+1)}\left[4(u_B-u_D)+u_e-u_C\right]
\end{aligned}
\qquad (III.80)
$$

donde u y v son los desplazamientos en un sistema de referencia local a la fisura, G es el módulo de rigidez a corte, $\kappa_k = 3-4\nu$ para problemas de tensión plana y $\kappa_k = 3-\nu/1+\nu$ para problemas de deformación plana, y ν el coeficiente de Poissson.

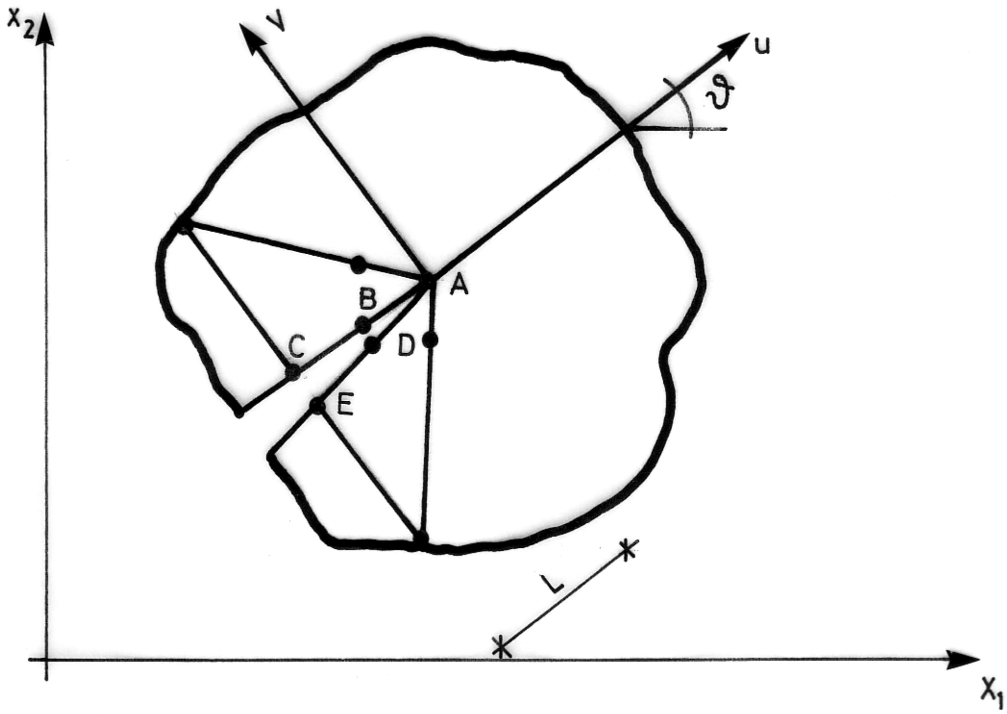

fig.(III.17): Elementos singulares que rodean una fisura [48] (los más usados son los isoparamétricos con nodos en los cuartos de lado).

– Estudio de la estabilidad de la fisura, para ver la magnitud y dirección de crecimiento. Existen distintos criterios de inestabilidad que predicen la carga crítica y la dirección de propagación de la fisura [48] .

– El estudio de la propagación, el cual se debe realizar cuando se detecta la inestabilidad en la fisura. De esta forma se establece un nuevo punto, que requiere calcular los K_i , y nuevamente su estabilidad.

Este tema puede consultarse en las referencias [28][33][48][134] .

III.6.- NECESIDAD DE UN NUEVO MODELO CONSTITUTIVO.

De los dintintos modelos constitutivos presentados en este capítulo, se advierte que existen algunos problemas en simular el comportamiento del hormigón a partir de soluciones aisladas. Ciertos modelos ofrecen formulaciones más o menos generales, sin embargo es necesario dar un tratamiento amplio basado en una teoría única. Es por ello que en el capítulo siguiente se presentan los fundamentos de un modelo constitutivo, que trata los fenómenos más importante del hormigón, basado en una única estructura teórica (la teoría de la plasticidad).