UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
ESCOLA TÈCNICA SUPERIOR D'ENGINYERS
DE CAMINS, CANALS I PORTS

UN MODELO DE "DAÑO CONTINUO" PARA MATERIALES FRICCIONALES

TESIS DOCTORAL

Presentada por:
Sergio Horacio OLLER MARTÍNEZ

Dirigida por:
Eugenio OÑATE IBAÑEZ de NAVARRA
y
Javier OLIVER i OLIVELLA

Barcelona – Mayo de 1988.

CAPITULO IV

MODELO CONSTITUTIVO DE DAÑO PLASTICO:
–PARTICULARIZADO PARA HORMIGONES–

IV.1.- MODELO CONSTITUTIVO DE DAÑO PLASTICO PARA MATERIALES FRICCIONALES PARTICULARIZADO PARA HORMIGONES — INTRODUCCION.

En este capítulo se presenta un modelo constitutivo, objeto fundamental de este trabajo, que puede ser denominado **modelo de daño plástico** [78] . Su nombre se debe a la *hipótesis* que considera que el *comportamiento no-lineal inelástico que sufre un sólido cohesivo-friccional*, como consecuencia de la formación y desarrollo de micro-fisuras debido al deslizamiento entre las partículas de su masa, *es asimilable a un fenómeno elasto-plástico* [46] .

La posibilidad de la aplicación de la **teoría matemática de la plasticidad** a un material friccional, parte de suponer que la deformación no recuperable, o *deformación por micro-fisuración* [34] , puede ser entendida en forma análoga que en los materiales plásticos [29] .

La teoría matemática de la plasticidad clásica está basada en una formulación tenso-deformacional isotrópica para cada punto del sólido (***Ap-I***), lo que significa que la *función de fluencia plástica* se ve sometida a un movimiento homotético **fig.(IV.1,a)** que es gobernado por la evolución de la variable de endurecimiento plástico κ (***Ap-I***). La interpretación física de este daño isotrópico [29] , puede ser entendida a partir del fenómeno de *daño adireccional* que sufre *cada punto del sólido real* [85] .

Así , en un primer análisis, el concepto de *daño adireccional* resulta contrapuesto al de *daño macroscópico* (fractura), debido a que este último constituye un *fenómeno direccional* **fig.(IV.1,b)**.

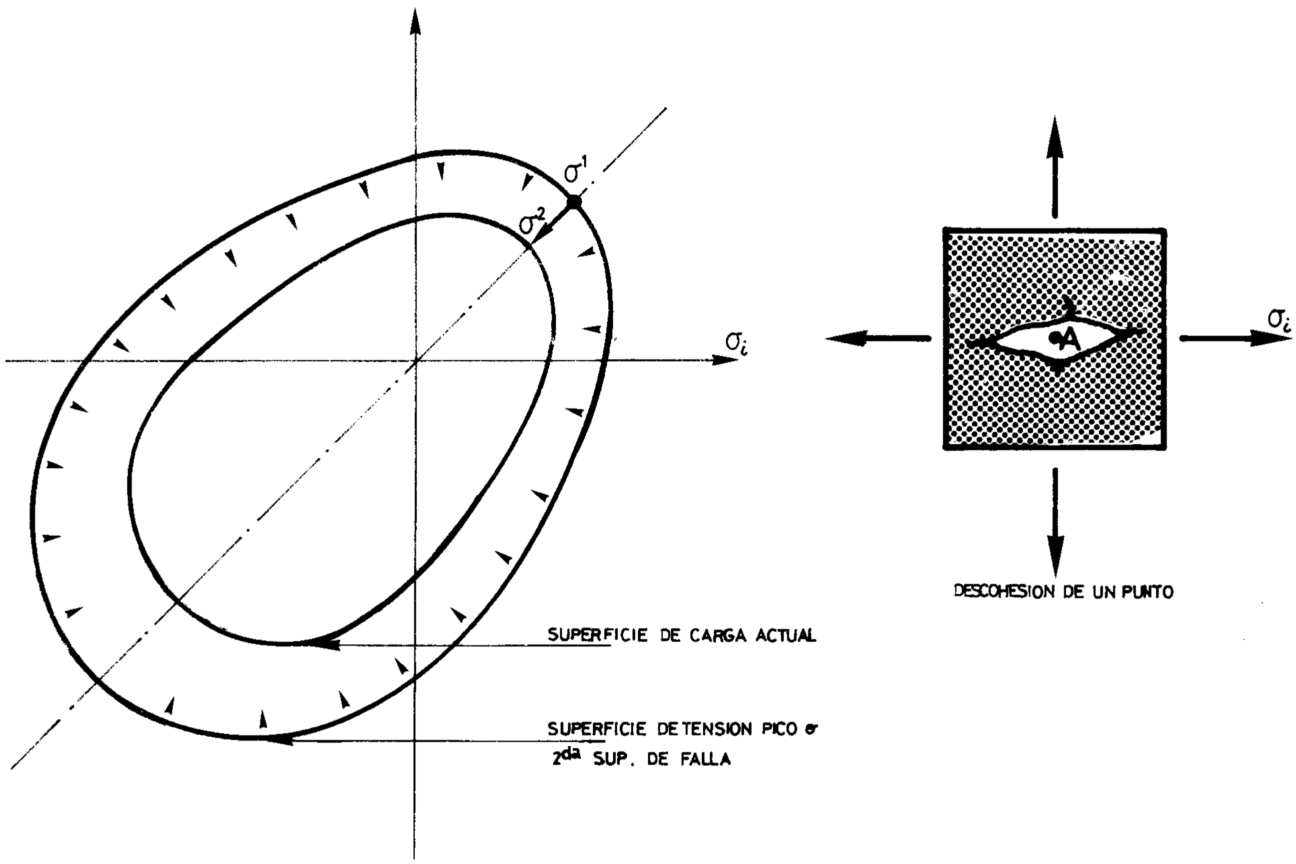

fig.(IV.1,a): Comportamiento isotrópico de un punto del sólido

Del análisis realizado en el ***cap. II***, sobre el comportamiento del hormigón, se puede admitir como hipótesis que el *daño macroscópico direccional* (fisura), proviene de un comportamiento *microscópico adireccional* de los puntos situados en una cierta zona del sólido, que se denominará *zona de daño*. con base en esto, una fisura quedará definida por el lugar geométrico de los puntos que han sufrido un daño adireccional **fig.(IV.1,b)**.

La concentración del daño en una determinada zona del sólido, se debe a un fenómeno denominado **localización** o **concentración de deformaciones fig.(IV.2)** (***Anexo-D***) que se desarrolla en una zona del sólido de dimensiones reducidas [100] , donde una cierta cantidad de puntos se encuentran sometidos a un proceso de endurecimiento negativo o ablandamiento.

De acuerdo con este razonamiento, el sólido se encuentra constituído por puntos situados dentro de la zona de daño, que siguen un proceso

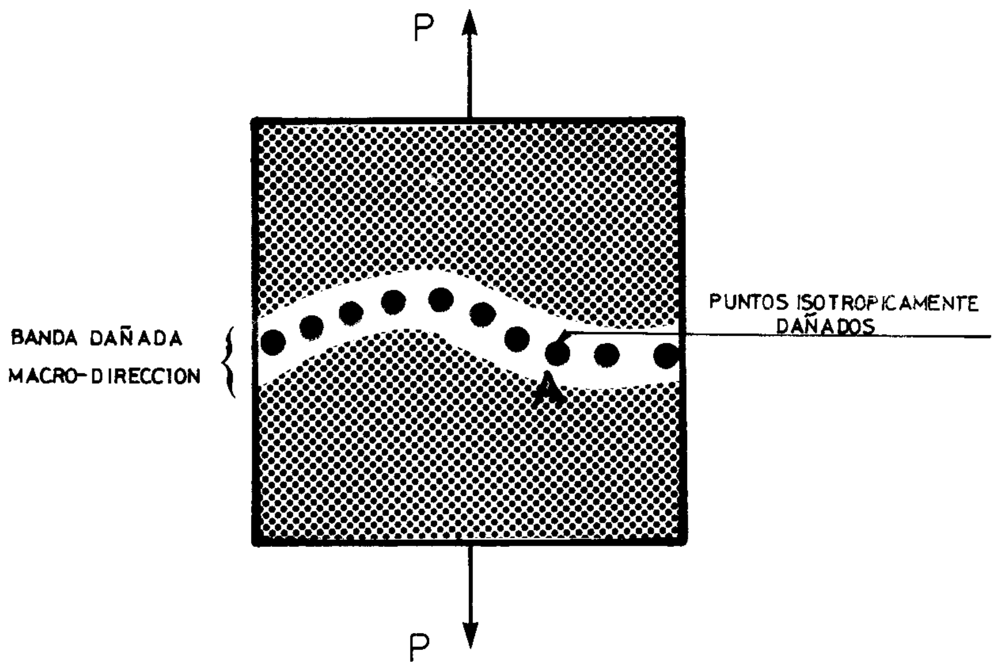

fig.(IV.1,b): Aspecto macroscópico de los infinitos puntos istrópicamente dañados

tenso-deformacional con pérdida de tensión y crecimiento de la deformación (ablandamiento), así como por puntos que están fuera de la zona de localización del daño y que experimentan un proceso de descarga manteniendo el nivel de daño ya alcanzado **fig.(IV.2)**.

El modelo constitutivo que se presenta es capaz de memorizar la *macro-direccionalidad del daño* producido durante todo el proceso de carga, admitiendo condiciones de *carga no-radial* * o *no-proporcional* (***cap. V***).

En virtud de lo antes dicho, *se considera que el fenómeno de localización del daño posibilita el uso de la teoría de la plasticidad como base de un "modelo constitutivo de daño total, para materiales friccionales",* ofreciendo así una herramienta que satisface en buen modo los mecanismos de daño descritos para el hormigón en el ***cap. II***, y que cumple rigurosamente con los principios básicos de la mecánica de medios continuos [35][79][81] .

* *Nota: Se dice que un proceso de carga es "radial" o "proporcional" cuando se cumple durante toda la aplicación de la misma la siguiente relación* $\frac{\sigma_{11}}{{\sigma_{11}}^0} = \frac{\tau_{12}}{{\tau_{12}}^0} = \cdots = \frac{\sigma_{33}}{{\sigma_{33}}^0}$ *entre las componentes del tensor de tensiones en el estado actual y el estado inicial, respectivamente*

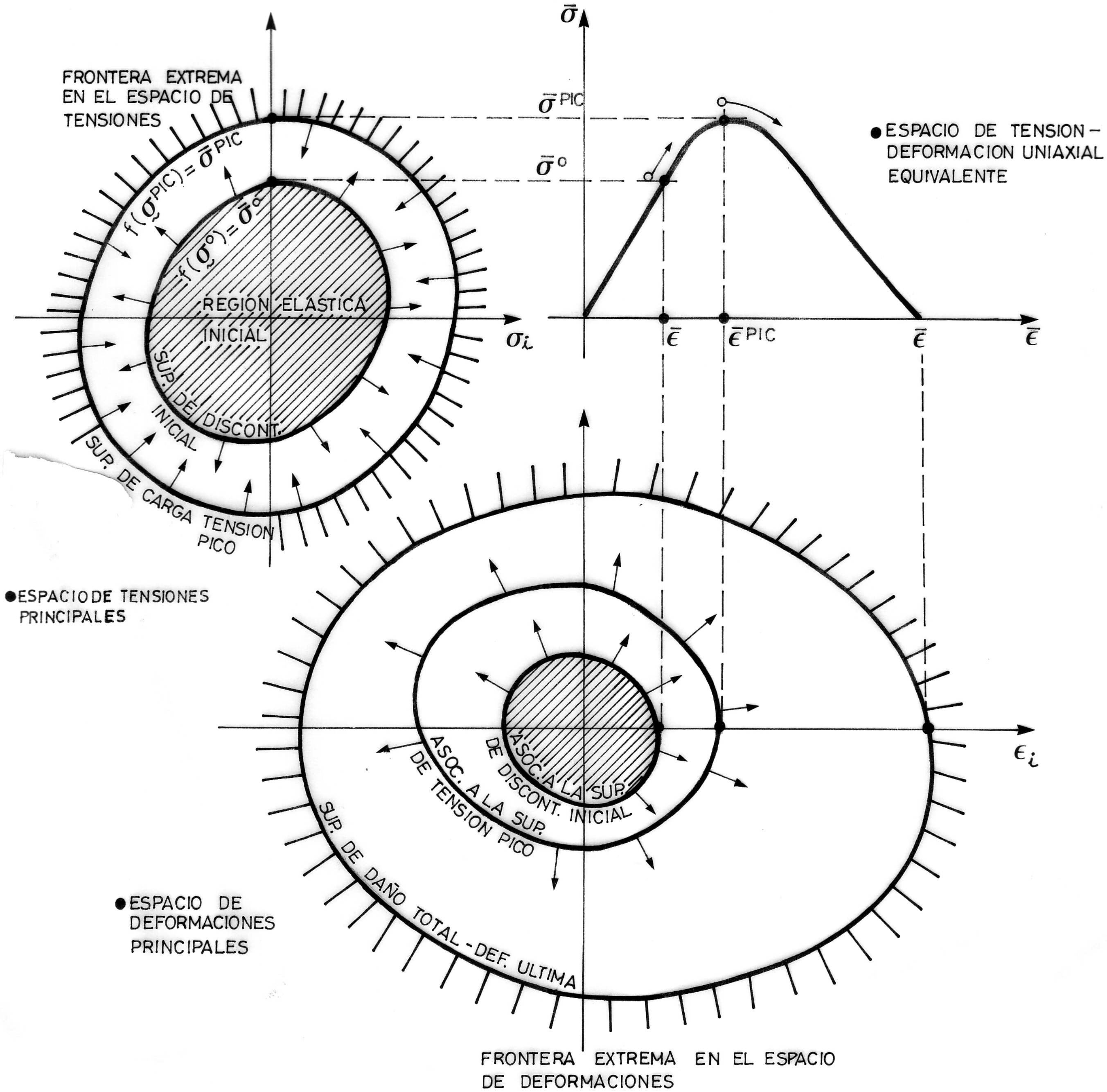

fig.(IV.2): Estado del daño en distintos puntos del sólido:

b) Comportamiento de un punto del sólido en la zona no-dañada.

c) Localización del daño en un zona del sólido.

IV.2.- CARACTERISTICAS GENERALES DEL MODELO CONSTITUTIVO DE DAÑO PLASTICO.

La teoría de la plasticidad proporciona una adecuada estructura físico-matemática, que permite formular el comportamiento de los materiales friccionales sometidos a estados de carga. De la extensión de sus principios básicos y de la reinterpretación de sus variables fundamentales, ha surgido este **modelo de daño plástico** . Así , a partir de la *variable de endurecimiento plástico* κ , definida en el ***Ap-I***, se ha formulado una **variable de daño plástico** κ^p , que crece *si y solo si* hay deformaciones plásticas no llegando nunca a decrecer. Esta variable interna está tratada como una magnitud adimensional, normalizada a la unidad, que varía entre $0 \leq \kappa^p \leq 1$, tal que para $\kappa^p = 0$ no hay daño plástico, y para $\kappa^p = 1$ se define el límite de *daño total de un punto del sólido*. Este *estado último* puede ser interpretado desde el punto de vista de la mecánica de los medios continuos, como una *pérdida total de tensión*, y desde un punto de vista físico, como un desmembramiento de la masa del sólido en el punto de análisis (discontinuidad física).

El criterio de *fluencia plástica* presentado en la *ec.(Ap-I.7)*, es tratado en este modelo a través de una expresión matemática que puede ser escrita en la siguiente forma general:

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma}, c) = f(\boldsymbol{\sigma}) - c = 0 \qquad (IV.1)$$

donde $f(\boldsymbol{\sigma})$ es una función escalar homogénea de primer grado en las componentes del tensor de tensiones, que permite definir la cohesión c , o una tensión uniaxial escalada, como una *función de endurecimiento plástico*. Los criterios de plasticidad de Mohr-Coulomb y Drucker-Prager (***Ap-I***) también pueden representarse por una expresión similar a la *ec.(IV.1)*, pero no aproximan adecuadamente el comportamiento real de los hormigones [33] , ni de los geomateriales en general [43] . Numerosos criterios de fluencia plástica han tratado de mejorar esta aproximación para los materiales cohesivos-friccionales [33][34][47][50][73][102][113] , pero solo se ha logrado una mejora formulando funciones $f(\boldsymbol{\sigma})$ *no-homogéneas* en las componentes del tensor de tensiones, característica que impide definir una *función de endurecimiento plástico* con una interpretación física directa. Para el modelo constitutivo que se propone, se han definido dos criterios de fluencia: Una simple modificación del de Mohr-Coulomb (***anexo-C***), que permite obtener una relación inicial de resistencia uniaxial $|\sigma_C^0|/|\sigma_T^0|$ adecuada para el hormigón, a partir de un ángulo de rozamiento interno ϕ apropiado (***apart. Ap-I.3.f***); y otro más general (***apart. IV.5***), definido como una función homogénea de primer grado en las tensiones, que concuerda bastante bien con el comportamiento experimental del hormigón excepto en el dominio de altas presiones hidrostáticas.

La **cohesión** c , es tratada como una magnitud escalada con la resistencia inicial a compresión uniaxial del hormigón σ_C^0 (*umbral de discontinuidad tensional*), que es el nivel de tensiones para el cual la deformación volumétrica ϵ_v es máxima. Consecuentemente se define: La *cohesión inicial*, o cohesión del material virgen, como $c = c^0 \propto \sigma_C^0$ para $\kappa^p = \kappa^{p0} = 0$, situación que establece la posición inicial del criterio de fluencia o criterio de discontinuidad inicial, y la *cohesión final*, o cohesión del material totalmente dañado, como $c = c^u = 0$ para $\kappa^p = \kappa^{pu} = 1$ situación que define la posición final del criterio de fluencia o discontinuidad. A diferencia de la plasticidad clásica con endurecimiento isotrópico, la cohesión no es una simple función de la *variable de endurecimiento plástico* $c(\kappa)$ (***apart. Ap-I.3.c.***), sino que es una *variable interna* que depende del proceso elasto-plástico, gobernada por una ecuación de evolución.

A pesar de que **el ángulo de rozamiento interno** ϕ también podría definirse como una variable interna, a partir de una ley de evolución que dependa del proceso elasto-plástico, se plantea simplemente una función explícita de la variable de daño plástico $\phi(\kappa^p)$. Con esta hipótesis se ha obtenido una buena aproximación al comportamiento real del hormigón. Este ángulo vale $\phi = \phi^0 = 0$ al iniciar el proceso plástico, para $\kappa^p = 0$, y $\phi = \phi^{max}$ al finalizar el proceso para $\kappa^p = 1$.

El **ángulo de dilatancia** ψ , que al igual que el ángulo de rozamiento interno podría definirse como una variable interna, también en este caso se obtiene explicitamente como una función de la variable de daño plástico $\psi(\kappa^p)$, dado que con esta hipótesis también se ha obtenido una buena aproximación al comportamiento real del hormigón. Este ángulo vale $\psi = \psi^0 = 0$ al iniciar el proceso plástico, para $\kappa^p = 0$, y $\psi = \psi^{max}$ al finalizar el proceso para $\kappa^p = 1$.

En definitiva, para un proceso plástico sin degradación de rigidez, el vector de variables internas $\boldsymbol{q}$ $(\boldsymbol{Ap\text{-}I.3.b})$, queda expresado por $\boldsymbol{q} = (\boldsymbol{\epsilon}^p; c; \kappa^p)$ [149], donde $\boldsymbol{\epsilon}^p$ es la deformación plástica, c la cohesión entre partículas, y κ^p la variable de daño plástico; cuyas reglas de evolución serán definidas seguidamente, como parte de las ecuaciones fundamentales que gobiernan el modelo. Estas son:

- Un **criterio de fluencia plástica** como el definido por la *ec.(IV.1)*.

- Una **descomposición de la deformación en una cuota elástica y otra plástica** *ec.(Ap-I.20)*:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{D}_S^{-1}\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\epsilon}^p = \boldsymbol{\epsilon}^e + \boldsymbol{\epsilon}^p \tag{IV.2}$$

  siendo $\boldsymbol{D}_S$ el tensor de rigidez elástico secante.

- Una **regla de flujo plástica no asociada**, definida como una variable interna mediante la siguiente ecuación de evolución *ec.(Ap-I.21)*:

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \dot{\lambda}\ \boldsymbol{H}_{\boldsymbol{\epsilon}^p}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{q}) \equiv \dot{\lambda}\ \left[\frac{\partial \mathcal{G}(\boldsymbol{\sigma}, c)}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right] = \dot{\lambda}\ \ \boldsymbol{g} \tag{IV.3}$$

  donde $\dot{\lambda}$ es un escalar no-negativo denominado parámetro de consistencia plástica.

- Una ecuación de evolución de la **variable de daño plástico**, definida mediante la siguiente hipótesis *ec.(Ap-I.37)*:

$$\dot{\kappa}^p = \dot{\lambda}\ \ H_\kappa(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{q}) \equiv \dot{\lambda}\ \left[\boldsymbol{h}_\kappa^T(\boldsymbol{\sigma}, \kappa^p, c)\ \frac{\partial \mathcal{G}(\boldsymbol{\sigma}, c)}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right] = \boldsymbol{h}_\kappa{}^T(\boldsymbol{\sigma}, \kappa^p, c)\ \ \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \tag{IV.4}$$

  donde $\boldsymbol{h}_\kappa(\boldsymbol{\sigma}, \kappa^p, c)$ es un tensor de segundo orden, función del estado actual de las variables $\boldsymbol{\sigma}, \kappa^p, c$.

- Y una ecuación de evolución de la **cohesión**, definida mediante la siguiente hipótesis:

$$\dot{c} = \dot{\lambda} \;\; H_c(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{q}) \equiv \dot{\lambda} \;\left[h_c(\boldsymbol{\sigma}, \kappa^p, c) \; \boldsymbol{h}_\kappa^T(\boldsymbol{\sigma}, \kappa^p, c) \; \frac{\partial \mathcal{G}(\boldsymbol{\sigma}, c)}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right] = h_c(\boldsymbol{\sigma}, \kappa^p, c) \;\; \dot{\kappa}^p \tag{IV.5}$$

donde $h_c(\boldsymbol{\sigma}, \kappa^p, c)$ es un función escalar del estado actual de las variables $\boldsymbol{\sigma}, \kappa^p, c$.

IV.3.- VENTAJAS MAS IMPORTANTES DEL MODELO DE DAÑO PLASTICO PROPUESTO

Los rasgos generales dados sobre el modelo en los apartados anteriores, permiten valorar algunas de sus ventajas y anticipar otras. Entre las características más importantes se pueden mencionar las siguientes:

- Formula una *ley constitutiva* que permite considerar satisfactoriamente procesos de carga dominados por estados de comportamiento volumétricos y distorsionales a la vez.

- *Trata en forma unificada los procesos multiaxiales a tracción y compresión*, mediante una formulación inelástica sólidamente fundada en la **teoría matemática de la plasticidad**.

- Define como *variables internas*, la **cohesión** y la **variable de daño plástico**, y como variables explícitas el **el ángulo de rozamiento interno** y el ángulo de dilatancia; pudiendo condicionar la *evolución* de éstas, durante el proceso elasto-plástico, mediante funciones que deben ajustarse a partir de resultados experimentales uniaxiales.

- Considera que los materiales no solo tienen *distintos límites tensionales de fallo a tracción y a compresión*, sino que también distingue para cada uno de estos procesos, *deformaciones últimas diferentes*. Esto se consigue mediante una generalización de la **variable de endurecimiento plástico**, que en este modelo se la denomina **variable de daño plástico**.

- Permite definir distintos **criterios de discontinuidad inicial** (fluencia inicial para los metales) y subsecuentes **superficies de carga plástica**, controladas por una **función de endurecimiento** con un sentido físico directo, estableciendo así distintos **estados elasto-plásticos consistentes**.

- Trata el **flujo plástico** a través de una **regla de normalidad**, asociada a una **superficie de potencial plástico**, que puede o no coincidir con **las de carga plástica**. Esta **función potencial** es la que garantiza el control del fenómeno de la **dilatancia**.

- Permite simular el *comportamiento multiaxial*, a partir de *datos que surgen de ensayos experimentales uniaxiales*.

- Adopta la *variable de daño plástico* como medida relativa del daño en un punto.

- Determina el *daño local* (daño en un punto), y su *dirección*, mediante un *post-procesamiento de resultados*, una vez que se converge al estado de equilibrio.

IV.4.- VARIABLES FUNDAMENTALES DEL MODELO DE DAÑO PLASTICO.

IV.4.a- Definición de la variable de daño plástico: κ^p.

Como una primera posibilidad, la teoría de la plasticidad clásica define la variable interna de *endurecimiento plástico isotrópico* (***apart. Ap-I.3.c.***), como una *deformación plástica efectiva* que tiene la siguiente ley de evolución $\dot{\kappa} = \dot{\overline{\epsilon}}^p$ *ec.(Ap-I.41)*, o también en forma más general como un *trabajo plástico específico* que evoluciona durante el proceso plástico con la siguiente ley $\dot{\kappa} = \dot{w}^p = \boldsymbol{\sigma}^T \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p$ *ec.(Ap-I.39)*. **En el primer caso** se asocia el daño plástico a la *deformación plástica efectiva* $\overline{\epsilon}^p$ y se supone que el estado último sobreviene cuando se alcanza el valor último de ésta $\overline{\epsilon}^{pu}$. Esto es *ec.(Ap-I.41)*:

$$\overline{\epsilon}^p \equiv \overline{\epsilon}^{pu} = \int_{t=0}^{\infty} \dot{\kappa}\; dt = \int_{t=0}^{\infty} \dot{\overline{\epsilon}}^p\; dt = \int_{t=0}^{\infty} \sqrt{c_\kappa}\; \sqrt{(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{pT} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p)}\; dt \qquad \textit{(IV.6)}$$

siendo:

$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p$: *Incremento temporal del tensor de deformaciones plásticas.*

$\sqrt{c_\kappa}$: *Constante a determinar para cada criterio de potencial plástico* $\mathcal{G}$.

Esta definición de la variable de endurecimiento plástico, supone que el *daño total* ocurre siempre para una deformación plástica efectiva $\overline{\epsilon}^{pu}$, ya sea que se desarrollen procesos mecánicos uniaxiales, de tracción o compresión, o procesos multiaxiales en general. Esto hace muy limitativo su utilización en los materiales cohesivo-friccionales, que para cada proceso mecánico, tienen una deformación última distinta [33][136] , por ej.: los hormigones tienen deformaciones últimas entre 10 y 15 veces mayores a compresión uniaxial que a tracción uniaxial : $10 \leq |\epsilon^{pu}_{C}|/|\epsilon^{pu}_{T}| \leq 15$.

En el segundo caso, cuando se adopta el *trabajo plástico específico* como variable de endurecimiento, se asocia el daño de un punto del sólido a la energía específica disipada durante el proceso de carga w^p , y se supone que se ha alcanzado el nivel de daño total cuando el punto alcanza a disipar una energía específica igual a la *energía específica de daño plástico* g^p , (área encerrada por la curva tensión-deformación para un proceso de carga uniaxial que ha alcanzado el estado último).

$$g^p \equiv w^{pu} = \int_{t=0}^{\infty} \dot{\kappa}^p \; dt = \int_{t=0}^{\infty} \boldsymbol{\sigma}^T \; \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \; dt \tag{IV.7}$$

Al igual que la *variable de endurecimiento* anterior, ésta constituye una magnitud única independiente del proceso de carga desarrollado, lo que no cumple con el comportamiento de los materiales friccionales que disipan distinta energía específica según sea el proceso mecánico desarrollado. Así , por ej.: en hormigones se disipa entre 100 y 150 veces más energía en un proceso a compresión uniaxial que a tracción uniaxial.

Debido a estos inconvenientes, ha surgido como una necesidad definir una nueva la **variable de daño plástico**, que constituye una “medida relativa” de la energía disipada durante el proceso plástico. Por simplicidad y orden en la presentación, es conveniente definir esta variable para procesos uniaxiales simples, y luego generalizarla a procesos multiaxiales.

Definición de la variable de daño plástico para estados de tensión uniaxial.

De un ensayo experimental uniaxial a tracción y otro a compresión, se obtienen los diagramas tensión-deformación, y a partir de ellos se pueden deducir las curvas $\sigma - \epsilon^p$ **fig.(IV.3)** que encierran las áreas g_T^p y g_C^p (***anexo-D***), respectivamente.

La *energía específica* disipada al final de un proceso elasto-plástico, cuasi-estático, de tracción uniaxial vale:

$$g_T^p = \int_{t=0}^{\infty} \sigma_T \, \dot{\epsilon}_T^p \, dt \quad , \qquad \text{(IV.8)}$$

siendo

σ_T : *Tensión uniaxial de tracción*

ϵ_T^p : *Deformación plástica uniaxial de tracción*

y a partir de ésta se define la **variable de daño plástico** para un proceso cuasi-estático, de tracción uniaxial, como:

$$\kappa^p = \frac{1}{g_T^p} \int_{t=0}^{t} \sigma_T \, \dot{\epsilon}_T^p \, dt \quad , \qquad \text{(IV.9)}$$

resultando así una variable relativa con respecto a la energía específica máxima a tracción, que tomará valores comprendido entre $0 \leq \kappa^p \leq 1$ para el inicio y fin del proceso plástico, respectivamente. Con κ^p como variable independiente se puede transformar el diagrama uniaxial de tensión-deformación plástica en otro que dependa del daño plástico: $\sigma_T - \kappa^p$ (***anexo-B***). Esto es : $\sigma_T = \sigma_T(\kappa^p)$ en el intervalo $[0, 1]$, tal que en los extremos vale:

$$\begin{cases} \sigma_T(0) = \sigma_T^0 \\ \sigma_T(1) = 0 \end{cases} \tag{IV.10}$$

Similarmente, la *energía específica* disipada al final de un proceso elasto-plástico, cuasi-estático, de compresión uniaxial vale:

$$g_C^p = \int_{t=0}^{\infty} \sigma_C \ \dot{\epsilon}_C^p \ dt \quad , \tag{IV.11}$$

σ_C : *Tensión uniaxial de compresión*

ϵ_C^p : *Deformación plástica uniaxial de compresión*

y a partir de ésta se define la **variable de daño plástico** para un proceso de compresión uniaxial, cuasi-estático, como:

$$\kappa^p = \frac{1}{g_C^p} \int_{t=0}^{t} \sigma_C \ \dot{\epsilon}_C^p \ dt \quad , \tag{IV.12}$$

resultando así una variable relativa con respecto a la energía específica máxima a compresión, que tomará valores comprendido entre $0 \leq \kappa^p \leq 1$ para el inicio y fin del proceso plástico, respectivamente. Con κ^p como variable independiente se puede transformar el diagrama uniaxial de tensión-deformación plástica en otro que dependa del daño plástico: $\sigma_C - \kappa^p$ (***anexo-B***). Esto es : $\sigma_C = \sigma_C(\kappa^p)$ en el intervalo $[0, 1]$, tal que en los extremos vale:

$$\begin{cases} \sigma_C(0) = \sigma_C^0 \\ \sigma_C(1) = 0 \end{cases} \tag{IV.13}$$

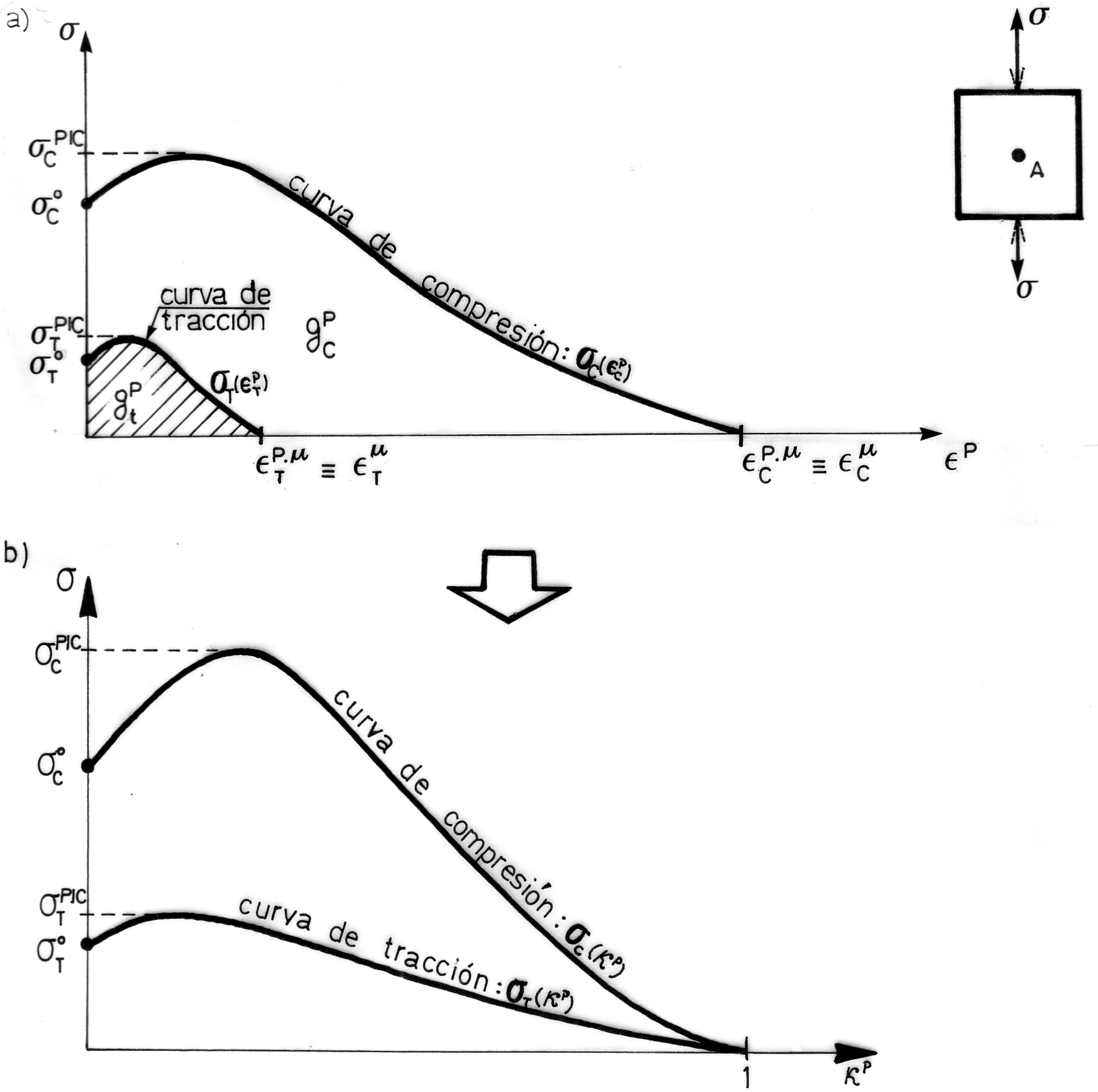

fig.(IV.3): Ensayo uniaxial de tracción y compresión: a)Diagramas tensión-deformación plástica. b)Diagramas tensión-daño plástico.

De las ec.(IV.9) y ec.(IV.12) resulta una *variable de endurecimiento plástico isotrópico* objetiva respecto a los dos procesos uniaxiales desarrollados, debido a que en cualquiera de los dos casos varía dentro de los mismos límites. De esta forma, el daño total en un punto se alcanza cuando $\kappa^p = 1$, pero la energía disipada a tracción es g_T y a compresión g_C .

Definición de la variable de daño plástico para estados de tensión multiaxial.

De modo general, para un proceso de carga genérico, se define la *variable de daño plástico* como ec.(IV.4):

$$\dot{\kappa}^p = \boldsymbol{h}_\kappa{}^T(\boldsymbol{\sigma}, \kappa^p, c) \;\; \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \tag{IV.14}$$

donde $\boldsymbol{h}_\kappa(\boldsymbol{\sigma}, \kappa^p, c)$ es un tensor de segundo orden que, para los casos particulares de tracción y compresión uniaxial, da lugar a una variable de daño plástico κ^p que cumple con la ec.(IV.9) y ec.(IV.12), respectivamente, y para los restantes casos es capaz de desarrollar una magnitud de daño consecuente con el proceso de carga. En su forma más simple resulta igual al tensor de tensiones $\boldsymbol{h}_\kappa(\boldsymbol{\sigma}, \kappa) \equiv \boldsymbol{\sigma}$, y para materiales isótropos puede ser definido a partir de sus magnitudes principales, quedando la ec.(IV.14) expresada como:

$$\dot{\kappa}^p = \sum_{i=1}^{3} (h_{\kappa i} \; \dot{\epsilon}_i^p) \tag{IV.15}$$

A partir de esta forma general de la variable de daño plástico, se podrían formular distintas leyes de evolución con el fin de evaluar correcta y objetivamente la magnitud del daño en un punto del sólido, para cualquier proceso de carga cuasi-estático [78]. Con el presente modelo, se propone una generalización de las definiciones uniaxiales ec.(IV.9) ec.(IV.12) , considerando como hipótesis básica, que la energía total disipada durante un proceso multiaxial puede ser tratada como la suma de una energía a tracción más otra a compresión, disipadas por procesos uniaxiales equivalentes. En otras palabras, esta hipótesis admite que todo proceso multiaxial es suceptible de ser descompuesto en procesos uniaxiales desarrollados en las direcciones principales. Esto es:

$$\dot{\kappa}^p = \dot{\kappa}^p_T + \dot{\kappa}^p_C = \sum_{i=1}^{3} \left[(h_{\kappa i})_T + (h_{\kappa i})_C \right] \ \dot{\epsilon}^p_i$$

$$\dot{\kappa}^p = \sum_{i=1}^{3} \left[(h_{\kappa i})_T \ \dot{\epsilon}^p_i + (h_{\kappa i})_C \ \dot{\epsilon}^p_i \right] \qquad \text{(IV.16)}$$

siendo:

$$(h_{\kappa i})_T = \frac{1}{g_T^{p\,*}} \ \langle \ \sigma_i \rangle \qquad ; \qquad (h_{\kappa i})_C = \frac{1}{g_C^{p\,*}} \ \langle -\sigma_i \rangle$$

$$\left.\begin{array}{ll} \langle x \rangle = x & ; \ \forall \ \ x > 0 \\ \langle x \rangle = 0 & ; \ \forall \ \ x \leq 0 \end{array}\right\} \ : \textit{Función rampa}\ ^{[79][131]}.$$

las magnitudes $g_T^{p\,*}$ y $g_C^{p\,*}$ son las energías específicas a tracción *ec.(IV.8)* y compresión *ec.(IV.11)*, ajustadas de acuerdo al criterio de fluencia adoptado, respectivamente. Esto es:

$$g_T^{p\,*} = g_T^p \ \frac{\sum_{i=1}^{3} \langle \ \sigma_i \rangle}{\sigma_T}$$

$$g_C^{p\,*} = g_C^p \ \frac{\sum_{i=1}^{3} \langle -\sigma_i \rangle}{\sigma_C} \qquad \text{(IV.17)}$$

siendo:

σ_T : *Tensión uniaxial de tracción correspondiente al estado multiaxial actuante.*

σ_C : *Tensión uniaxial de compresión correspondiente al estado multiaxial actuante.*

Sustituyendo en la *ec.(IV.16)* $(h_{\kappa i})_T$ y $(h_{\kappa i})_C$, por sus respectivas expresiones, resulta la variable de daño plástico según una forma *uniaxial equivalente*:

$$\dot{\kappa}^p = \boldsymbol{h}_\kappa{}^T \; \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \; = \; \frac{1}{g_T^p}\,\sigma_T\;\dot{\epsilon}_T^p \; + \; \frac{1}{g_C^p}\,\sigma_C\;\dot{\epsilon}_C^p \tag{IV.18}$$

donde: $\dot{\epsilon}_T^p = \dfrac{\sum_{i=1}^{3}\langle\, \sigma_i\rangle \dot{\epsilon}_i^p}{\sum_{i=1}^{3}\langle\, \sigma_i\rangle}$, y $\dot{\epsilon}_C^p = \dfrac{\sum_{i=1}^{3}\langle -\sigma_i\rangle \dot{\epsilon}_i^p}{\sum_{i=1}^{3}\langle -\sigma_i\rangle}$ pueden tratarse como definiciones particulares de la *deformación uniaxial equivalente* a tracción y compresión, respectivamente. En el ***anexo-A*** se realiza una evaluación de esta variable de daño plástico, para algunos casos particulares.

IV.4.b- Definición de la ley de evolución de la cohesión – Relación: $c - \kappa^p$.

El modelo que se propone supone que la *micro-fisuración* y posterior *fisuración*, de los materiales friccionales, se debe a una pérdida de cohesión intergranular instantánea [11] , producida por el deslizamiento entre granos, o partículas, de la masa del sólido [23][44][46][95][97][129] . Esta pérdida de cohesión intergranular se inicia, en los puntos más solicitados, inmediatamente después de superar el umbral de la *cohesión límite* o *cohesión inicial* c^0 [34][41][136] , y a medida que evoluciona el proceso de carga crece la cantidad de partículas descohesionadas hasta llegar a conformar un volumen de dimensiones considerables que conduce a la ruptura de todo el sólido (fractura). Debido a este mecanismo de fallo, el *ablandamiento* por deformación es un *fenómeno inexistente a nivel intergranular* [11] , manifestándose solamente como un efecto macroscópico provocado por el *comportamiento promedio de un conjunto de partículas*.

Debido a que el modelo constitutivo de daño plástico realiza un análisis numérico en el *espacio discreto* mediante la técnica de aproximación funcional de los elementos finitos, cada *punto de análisis* representa *infinitos puntos materiales* contenidos en su área de influencia. Por ello, a nivel discreto, sí tiene sentido considerar al fenómeno de ablandamiento por deformación como una *propiedad* *del material* * contenido dentro de la zona de influencia del punto discreto [18] y en tal caso es necesario definir una *función de endurecimiento plástico* que tenga en cuenta este *fenómeno de conjunto*, que para este modelo constitutivo no es más que la cohesión entre partículas.

La ecuación de evolución de la cohesión c debe considerar, para cualquier proceso de carga cuasi-estático, que $c \rightarrow 0$ *cuando* $\kappa^p \rightarrow 1$, y $c = c^0$ *cuando* $\kappa^p = 0$. En general, se puede escribir la ley de evolución de esta variable, como *ec.(IV.5)*:

$$\dot{c} = h_c(\boldsymbol{\sigma}, \kappa^p, c) \ \ \dot{\kappa}^p \qquad \textit{(IV.19)}$$

La cohesión, definida de esta forma, se convierte en una *variable interna dependiente del proceso plástico* **fig.(IV.4)**, donde $h_c(\boldsymbol{\sigma}, \kappa^p, c)$ es una función escalar del estado actual de las variables $\boldsymbol{\sigma}, \kappa^p, c$. La forma adoptada para la función $h_c(\boldsymbol{\sigma}, \kappa^p, c)$, es la siguiente:

$$h_c(\boldsymbol{\sigma}, \kappa^p, c) = c \left[\frac{r(\boldsymbol{\sigma})}{c_T(\kappa^p)} \frac{dc_T(\kappa^p)}{d\kappa^p} + \frac{1 - r(\boldsymbol{\sigma})}{c_C(\kappa^p)} \frac{dc_C(\kappa^p)}{d\kappa^p} \right] \qquad \textit{(IV.20)}$$

donde $r(\boldsymbol{\sigma})$ es una *función de peso* que define el tipo de proceso de carga que se desarrolla a cada instante (tracción o compresión o tracción-compresión), y que varía entre $0 \leq r(\boldsymbol{\sigma}) \leq 1$, dependiendo del estado actual de las tensiones en el punto. Así se tendrá $r(\boldsymbol{\sigma}) = 1$ *si* $\sigma_i \geq 0$ *para todo* $i = 1, 2, 3$ (estados de tracción), y $r(\boldsymbol{\sigma}) = 0$ *si* $\sigma_i \leq 0$ *para todo* $i = 1, 2, 3$ (estados de compresión). Una forma particular de $r(\boldsymbol{\sigma})$ para procesos de *carga no radial* * es:

---

* *Nota: Read and Hegemier [116] consideran que el fenómeno de ablandamiento es una "propiedad estructural"; (Anexo-D).*

* *Nota: En particular, para procesos de "carga radial"* $r(\boldsymbol{\sigma})$ *se mantiene constante, no siendo necesario su actualización durante el desarrollo del proceso elasto-plástico.*

$$r(\boldsymbol{\sigma}) \;=\; \frac{\sum_{i=1}^{3} \langle\, \sigma_i \rangle}{\sum_{i=1}^{3} \mid \sigma_i \mid} \tag{IV.21}$$

La función $c_C(\kappa^p)$ puede obtenerse en forma explícita y representa la evolución de la cohesión durante un ensayo uniaxial de *compresión* simple **fig.(IV.4)**. Su relación con la tensión uniaxial de compresión viene dada por la siguiente expresión:

$$c_C(\kappa^p) \;=\; \frac{1}{\aleph}\, \sigma_C(\kappa^p) \tag{IV.22}$$

siendo:

> $\aleph$: *Un coeficiente que depende del criterio de fluencia, y representa el factor de escala entre la cohesión y la tensión uniaxial de compresión. Para los criterios clásicos de Mohr-Coulomb y drucker-Prager vale:*
>
> - *para Mohr-Coulomb:*
>
>   *de la ec.(Ap-I.90)* $\rightarrow \quad \dfrac{1}{\aleph} = \dfrac{1}{2\,\sqrt{R_{Mohr}}}$
>
> - *para Drucker-Prager:*
>
>   *de la ec.(Ap-I.102), y ec.(Ap-I.106)* $\rightarrow \quad \dfrac{1}{\aleph} = \left[\dfrac{sin\,\phi - 3}{6\,cos\,\phi}\right]_{ins}$
>
>   *de la ec.(Ap-I.102), y ec.(Ap-I.108)* $\rightarrow \quad \dfrac{1}{\aleph} = \left[\dfrac{3\,sin\,\phi - 3}{6\,cos\,\phi}\right]_{cir}$

La función $c_T(\kappa^p)$ también está formulada explicitamente y representa la evolución de la cohesión durante un ensayo uniaxial de *tracción* simple **fig.(IV.4)**. Su relación con la tensión uniaxial de tracción viene dada por la siguiente expresión:

$$c_T(\kappa^p) \;=\; \frac{1}{\aleph}\; [R^0\; \sigma_T(\kappa^p)] \tag{IV.23}$$

donde:

$R^0 = \frac{\sigma_C(\kappa^p=0)}{\sigma_T(\kappa^p=0)}$: *Es la relación entre resistencias uniaxiales iniciales; tal que* $\frac{R^0}{\aleph}$ *vale para los criterios clásicos de Mohr-Coulomb y Drucker-Prager:*

- *para Mohr-Coulomb:*

  de la ec.(Ap-I.90) $\longrightarrow \quad \dfrac{R^0}{\aleph} = \dfrac{\sqrt{R_{Mohr}}}{2}$

- *para Drucker-Prager:*

  de la ec.(Ap-I.102), y ec.(Ap-I.106) $\longrightarrow \quad \dfrac{R^0}{\aleph} = \left[\dfrac{3+3\,sin\,\phi}{6\,cos\,\phi}\right]_{ins}$

  de la ec.(Ap-I.102), y ec.(Ap-I.108) $\longrightarrow \quad \dfrac{R^0}{\aleph} = \left[\dfrac{3+sin\,\phi}{6\,cos\,\phi}\right]_{cir}$

En el ***anexo-B*** se formulan algunas de las funciones de *cohesión-variable* de daño plástico que utiliza el modelo.

Algunos investigadores sostienen que las curvas de resistencia a tracción y compresión simple del hormigón, que resultan de ensayos experimentales uniaxiales, tienen formas análogas [33][134][136] , lo que equivale a afirmar que la relación de escalas entre ellas es una constante durante todo el proceso de carga cuasi-estático, y viene dado por:

$$R(\kappa^p) = \frac{\sigma_C(\kappa^p)}{\sigma_T(\kappa^p)} = \text{cte.} \;=\; R^0\,\frac{c_C(\kappa^p)}{c_T(\kappa^p)} \;=\; R^0 \qquad ;\forall\;\; 0 \leq \kappa^p \leq 1 \qquad \text{(IV.24)}$$

en tal caso las funciones explícitas de la cohesión a tracción uniaxial (*ec.(IV.22)*) y a compresión uniaxial (*ec.(IV.23)*) coinciden. Esto es:

$$c(\kappa^p) \;=\; c_T(\kappa^p) \;=\; c_C(\kappa^p) \;=\; \frac{1}{\aleph}\,\sigma_C(\kappa^p) \qquad \text{(IV.25)}$$

Esta definición única de la cohesión, permite formular una función de estado $h_c(\boldsymbol{\sigma}, \kappa^p, c)$, más simple que la expresada en la *ec.(IV.20)*:

$$h_c(\boldsymbol{\sigma}, \kappa^p, c) \;=\; \left[\; \frac{dc(\kappa^p)}{d\kappa^p} \;\right] \qquad , \tag{IV.26}$$

por lo tanto, para este caso particular, la ley de evolución de la cohesión $\dot{c}$ *ec.(IV.19)*, se reduce a una función explícita, no siendo necesario tratarla como variable interna:

$$\dot{c} = h_c(\boldsymbol{\sigma}, \kappa^p, c)\; \dot{\kappa}^p = \left[\frac{dc(\kappa^p)}{d\kappa^p}\right]\; \dot{\kappa}^p \;\; \overset{integrando}{\longrightarrow} \;\; c = \frac{1}{\aleph}\sigma_C(\kappa^p) = \frac{R^0}{\aleph}\sigma_T(\kappa^p) \tag{IV.27}$$

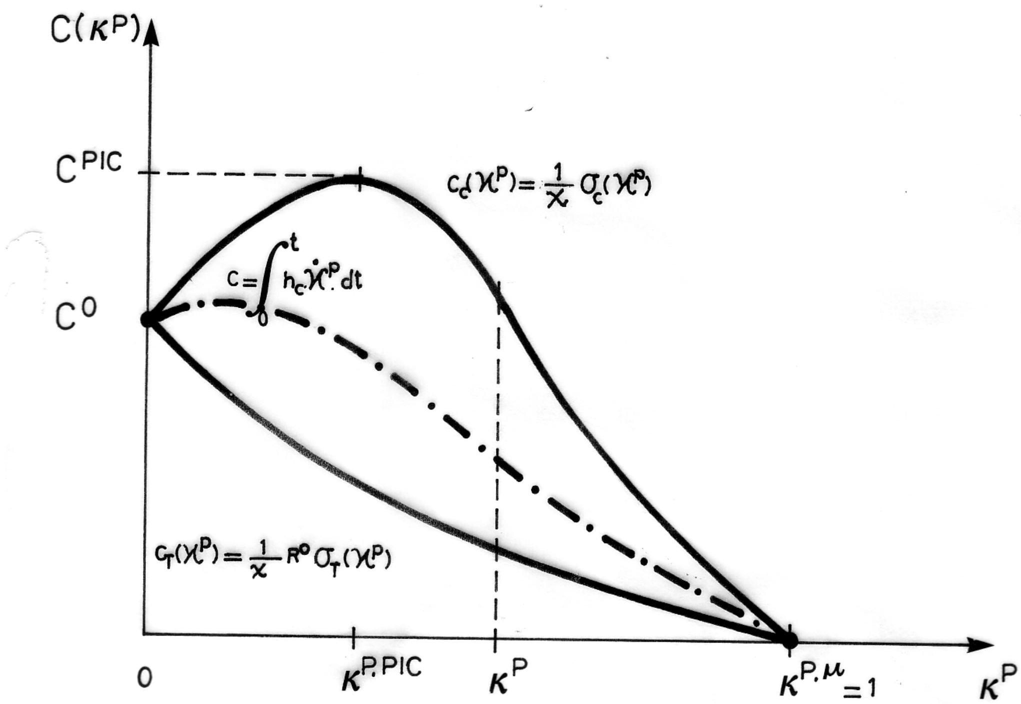

fig.(IV.4): Función de cohesión a tracción y compresión uniaxial,y su evolución para un caso general de tensiones.

Tanto la *ec.(IV.19)* como la *ec.(IV.27)*, gobiernan el movimiento isotrópico de la función de fluencia plástica. Durante esta evolución, la *función de endurecimiento*

c definirá *tres límites de discontinuidad* o *límites de cambio de comportamiento mecánico* **fig.(IV.4)**:

- **Límite de discontinuidad inicial o primer límite de fallo** [34][35]**:** Delimita una frontera dentro del espacio de tensiones, a partir de la cual un punto del sólido abandona su comportamiento elástico, para iniciar un comportamiento elasto-plástico con endurecimiento. En este modelo, se conoce a esta frontera como *límite convencional de inicio del mecanismo de micro-fisuración en* el punto [1][27][34][35][41][46][136] , y quedará definido por:

$$[\ c = c^0\ ] \quad \textit{para :} \quad \kappa^p = 0 \qquad \textit{(IV.28)}$$

- **Límite de tensión máxima o segundo límite de fallo** [34][35]**:** Marca una frontera dentro del espacio de tensiones, a partir de la cual cesa el crecimiento de las tensiones en el punto, iniciándose un proceso de ablandamiento inelástico. En este modelo, se conoce a esta frontera como *límite convencional de inicio del mecanismo de macro-fisuración* del punto [72][123][133] , y queda definido por:

$$[\ c = c^{pic}\ ] \quad \textit{para :} \quad \kappa^p = \kappa^{p^{pic}} \qquad \textit{(IV.29)}$$

- **Límite de tensión última o tercer límite de fallo:** Define una frontera dentro del espacio de tensiones, a partir de la cual el estado tensional se mantiene constante e igual a cero. En este modelo, se conoce a esta frontera como *límite convencional de daño total* del punto, y queda definido por:

$$[\ c = c^u = 0\ ] \quad \textit{para :} \quad \kappa^p = \kappa^{pu} = 1 \qquad \textit{(IV.29)}$$

IV.4.c- Definición de la variable ϕ , ángulo de rozamiento interno – Relación: $\phi - \kappa^p$.

A medida que se aumenta la carga sobre un sólido cohesivo-friccional, en su interior ocurre un deslizamiento entre partículas (micro-fisuración), que conduce a una pérdida de cohesión intergranular, haciendo que el sólido tienda a comportarse, cada vez más, como un simple material friccional no-cohesivo. Así , la pérdida de cohesión implica una ganancia de rozamiento interno, provocando un comportamiento más dúctil a compresión [18][23] debido al incremento de la fuerza de rozamiento entre partículas, y una disminución de la resistencia a tracción por la pérdida de las fuerzas cohesivas **fig.(IV.6,b)**. Esto inducirá a un crecimiento de la relación entre resistencias uniaxiales $R(\kappa^p) = \sigma_C(\kappa^p)/\sigma_T(\kappa^p)$ a medida que evolucione el proceso plástico.

En una primera instancia, se podría formular una *variable interna* de fricción, con una ley de evolución del tipo $\dot{\phi} = \dot{\lambda}\ H_\phi(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{q})$, que reprodujera el mecanismo antes mencionado durante todo el desarrollo del proceso de carga cuasi-estático. Sin embargo, los estudios realizados por R. Borst y P. Vermeer [23] sobre la propiedad cohesivo-friccional del hormigón *, demuestran que es suficiente plantear la evolución del ángulo de rozamiento interno ϕ como una función explícita del daño plástico κ^p que afecte la movilidad de la función de fluencia, provocando el efecto deseado de aumento de ductilidad a compresión y disminución de la resistencia a tracción. Por esta razón, se ha adoptado una función explícita del siguiente tipo [23] **fig.(IV.5)**:

$$sin\,\phi = \begin{cases} 2\ \dfrac{\sqrt{\kappa^p\ \kappa^L}}{\kappa^p + \kappa^L}\ sin\,\phi^{max} & ;\forall\ \ \kappa^p \le \kappa^L \\ \\ sin\,\phi^{max} & ;\forall\ \ \kappa^p > \kappa^L \end{cases} \qquad \textit{(IV.30)}$$

donde κ^p es la variable de endurecimiento, denominada *variable de daño plástico* *ec.(IV.14)*), y κ^L es el límite de daño, a partir del cual la cohesión se anula y el rozamiento interno se mantiene constante e igual a su valor máximo ϕ^{max} , por lo tanto este límite coincide con el de daño total: $\kappa^L = \kappa^p = 1$.

* *Nota: Estudios realizados por Borst y Vermeer* [23] *sobre la propiedad cohesivo-friccional del hormigón, confirman que la pérdida de cohesión, producida por el incremento del daño plástico* κ^p *(en la referencia citada se utiliza como medida del daño la deformación plástica efectiva* $\bar{\epsilon}^p$ *ec.(Ap-I.35)), provoca la movilización del ángulo de rozamiento interno, desde* $\phi^0 = 0$ *para* c^0 *, hasta* $\phi = \phi^{max}$ *para* $c^u \rightarrow 0$ *.*

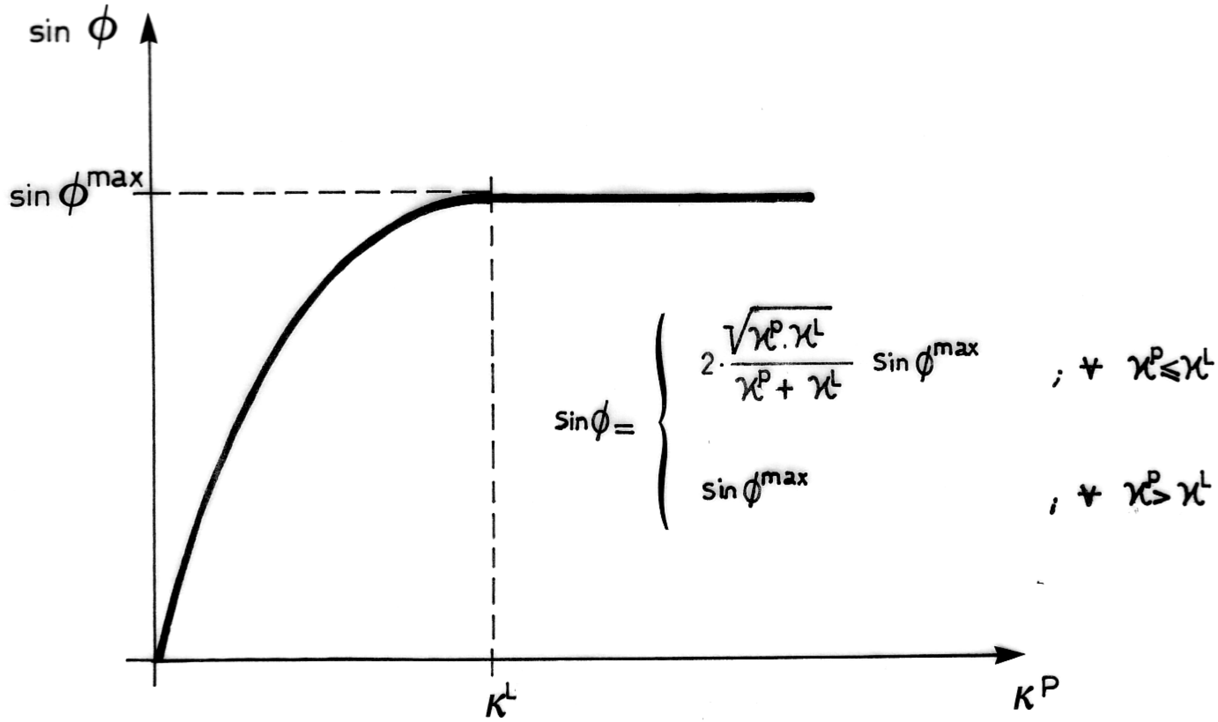

fig.(IV.5): Función cuasi-empírica [23] que define la evolución del ángulo de rozamiento interno en función de la variable de daño plástico.

Utilizando la función de rozamiento interno expresada por la *ec.(IV.30)*), y suponiendo en un primer momento la hipótesis de que la cohesión $c = cte.$, se puede observar que se desarrolla un proceso elasto-plástico que pasa de un estado inicial $\phi = \phi^0 = 0$ donde la presión hidrostática es despreciable, a otro final $\phi = \phi^{max}$ donde es muy importante su influencia **fig.(IV.6,b)**. De esta forma, y pensando en una superficie de fluencia del tipo de la de Mohr-Coulomb además de la *movilidad isotrópica* que adquiría la superficie de fluencia por efecto de la evolución de la cohesión (***apart. IV.4.b***), aparece una *movilidad anisotrópica* provocada por el incremento del rozamiento interno **fig.(IV.6)**. Este movimiento consiste en un acercamiento de la cúspide de la superficie hacia el origen, acompañada de un crecimiento de su base. Presentándose como un fenómeno de *endurecimiento* para procesos de compresión y como un *ablandamiento* para procesos de tracción **fig.(IV.7)**. Así pues, bajo estados de compresión triaxial con presión de confinamiento, se obtiene un comportamiento dúctil para altas presiones hidrostáticas [18] , prevaleciendo inicialmente el efecto de endurecimiento por rozamiento interno sobre el ablandamiento por cohesión, y posteriormente crece la influencia del segundo fenómeno sobre el primero logrando un ligero ablandamiento **fig.(IV.8)**.

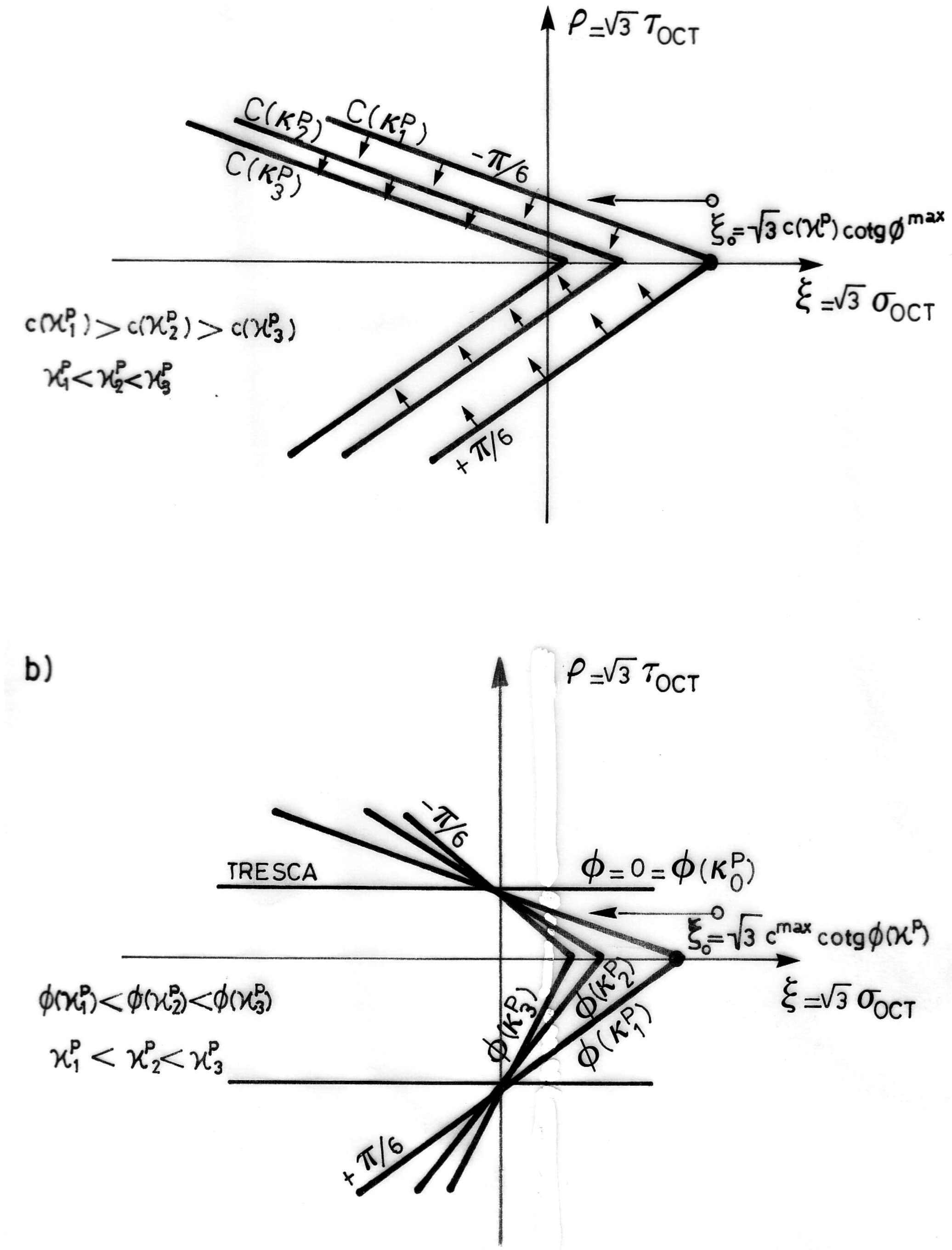

fig.(IV.6): Movilidad del criterio de fluencia de Mohr-Coulomb según sus planos meridianos: a) Movilidad isotrópica debido a la cohesión $c(\kappa^p)$; b) Movilidad anisotrópica debido al rozamiento interno $\phi(\kappa^P)$.

En materiales frágiles con alta cohesión inicial, como los hormigones, es posible utilizar durante todo el proceso plástico un ángulo de rozamiento interno constante y máximo, sin que esto induzca a resultados insatisfactorios en la

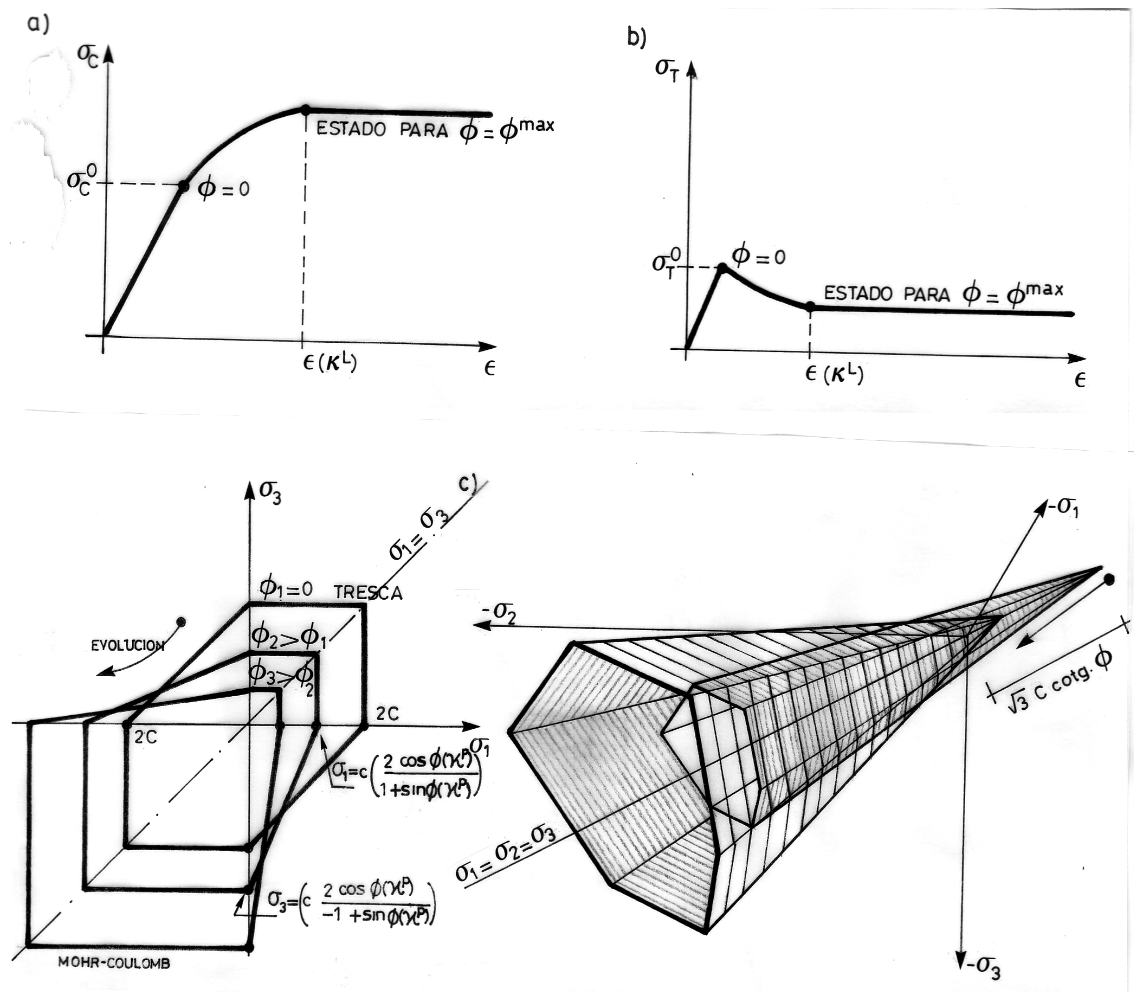

fig.(IV.7): Movilidad del criterio de fluencia de Mohr-Coulomb para una hipotética situación de cohesión constante: a) Caso de compresión simple; b) Caso de tracción simple; c) Movilidad anisotrópica debido al rozamiento interno $\phi(\kappa^P)$.

resolución de problemas biaxiales (***cap. V***). Esto es, en sustitución de la *ec.(IV.30)* se utiliza la siguiente particularización:

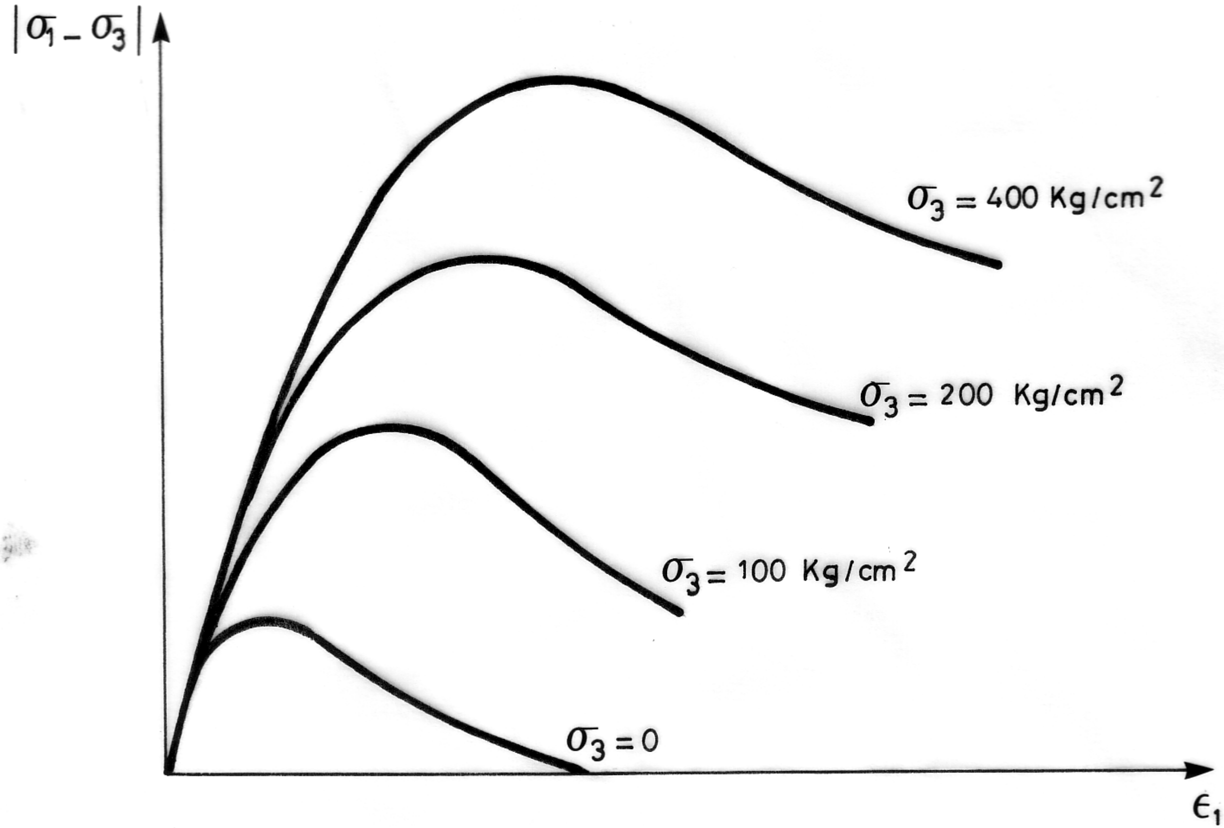

fig.(IV.8): **Simulación del comportamiento a compresión de un sólido confinado, considerando endurecimiento por rozamiento interno y ablandamiento por cohesión** [23] .

$$sin\,\phi = sin\,\phi^{max} = cte. \qquad ;\forall \;\; \kappa^p \qquad (IV.31)$$

IV.4.d- Definición de la variable ψ , ángulo de dilatancia – Relación: $\psi - \kappa^p$.

Introducción:

Un fenómeno que caracteriza a los materiales friccionales, es el cambio de volumen inelástico que experimentan por efecto de la distorsión plástica [23][35] . Este fenómeno, denominado dilatancia, puede ser atribuído al crecimiento de los mecanismos de micro-fisuración que sufre el hormigón durante el período inelástico [35] **fig.(IV.9)**. Una forma apropiada de ponderar este fenómeno, es mediante el *ángulo de dilatancia* ψ **fig.(IV.9)**, que fue inicialmente introducido por B. Hansen [57] y que representa la relación que hay entre el incremento de volumen plástico y la distorsión plástica.

Este fenómeno no puede controlarse dentro de la teoría de la plasticidad asociada, donde $\mathcal{G} \equiv \mathcal{F}$, ya que en tal caso la regla de flujo depende del criterio de fluencia *ec.(Ap-I.22)*, que normalmente se encuentra muy afectado por la influencia de la presión hidrostática $\sigma_m = \frac{\sigma_{ii}}{3}$. Por ello, el control de la dilatancia necesariamente debe ser tratado a partir de una función de potencial plástico $\mathcal{G}$ que produzca un flujo plástico con una componente de dilatancia **fig.(IV.11)** concordante con los estudios experimentales [1][75] .

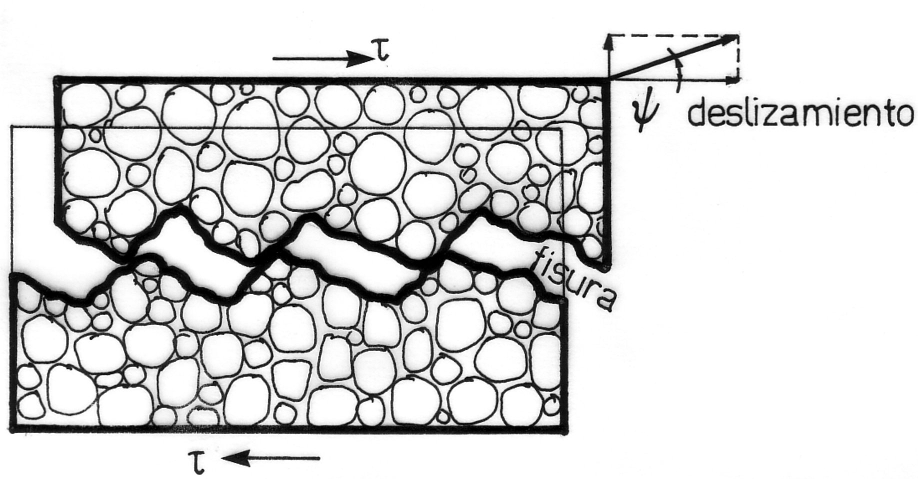

fig.(IV.9): Fenómeno de dilatancia provocado por la distorsión plástica.

La explicación física de este fenómeno, se puede conseguir a través de la relación que hay entre el incremento temporal de deformación plástica $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p$ y el ángulo de dilatancia ψ . Para ello, partiendo de la regla de flujo generalizada *ec.(Ap-I.21)*:

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \dot{\lambda}\ H_{\boldsymbol{\epsilon}^p}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{q}) = \dot{\lambda}\ \frac{\partial \mathcal{G}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{q})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \dot{\lambda}\ \boldsymbol{g} \quad , \tag{IV.32}$$

y del incremento de volumen plástico:

$$\dot{\epsilon}_v^p = \dot{\epsilon}_1^p + \dot{\epsilon}_2^p + \dot{\epsilon}_3^p = \dot{\lambda}\ \left[\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \sigma_1} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \sigma_2} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \sigma_3}\right] \quad , \tag{IV.33}$$

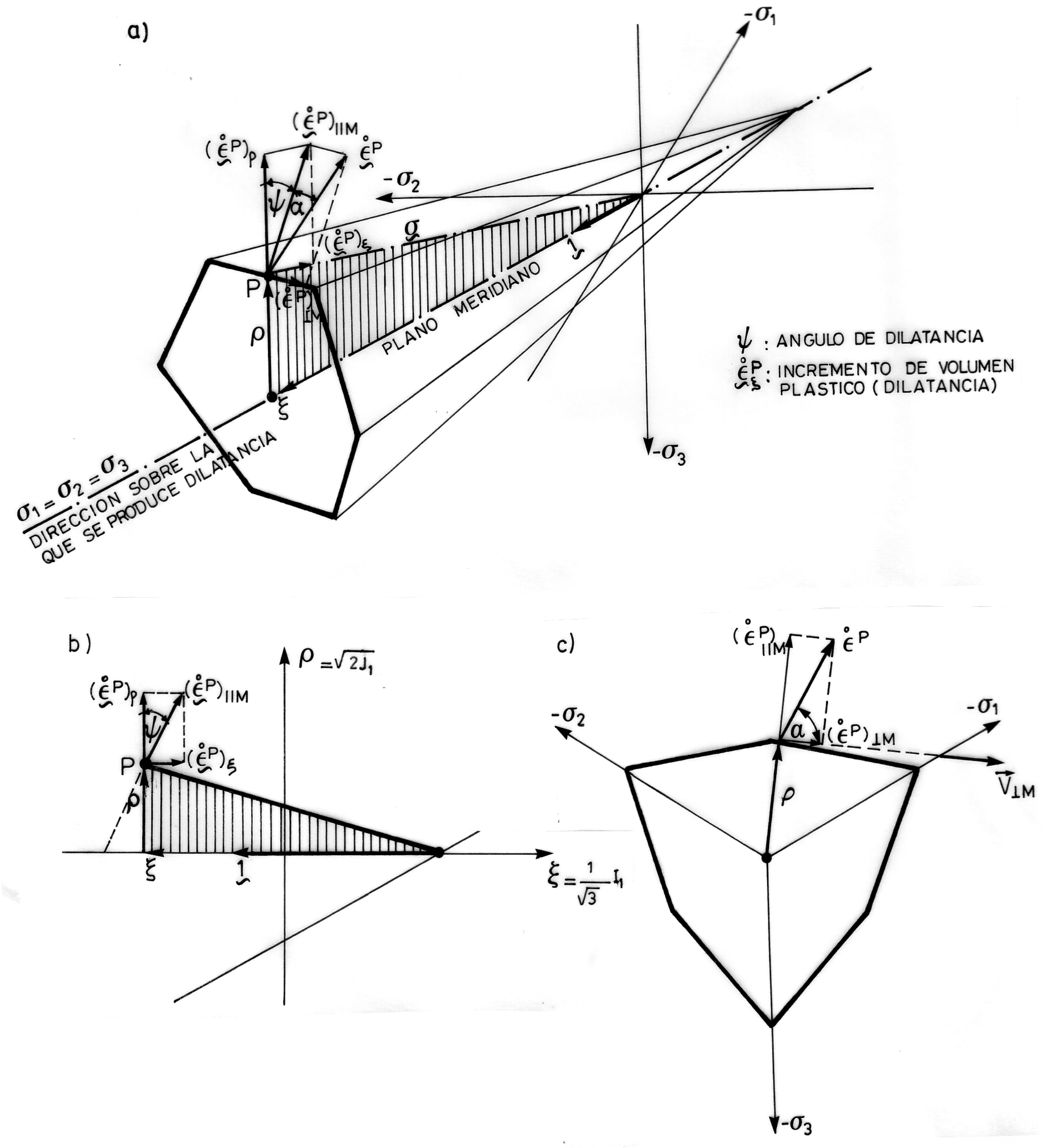

fig.(IV.10): a)Componentes de la deformación plástica en el espacio de tensiones principales; b)Deformación plástica y sus componentes en un plano meridiano; c)Deformación plástica y sus componentes en un plano octaédrico.

y que sustituyendo el parámetro de consistencia plástica obtenido de la *ec.(IV.33)* en la *ec.(IV.32)*, resulta el siguiente incremento temporal de deformación plástica:

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \;=\; \frac{\dot{\epsilon}_v^p}{\left[\dfrac{\partial \mathcal{G}}{\partial \sigma_1} \;+\; \dfrac{\partial \mathcal{G}}{\partial \sigma_2} \;+\; \dfrac{\partial \mathcal{G}}{\partial \sigma_3}\right]} \;\frac{\partial \mathcal{G}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{q})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \tag{IV.34}$$

Este vector, definido en el espacio de tensiones principales, tiene dos componentes **fig.(IV.10)**: –una *normal al plano meridiano* $(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p)_{\perp M}$, y –otra *contenida en el plano meridiano* $(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p)_{\parallel M}$. A su vez, esta última tiene dos componentes: –una de distorsión plástica, *contenida en el plano octaédrico* $(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p)_{\rho}$, y –otra *normal al plano octaédrico*, o paralela a la dirección volumétrica, $(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p)_{\xi}$ que representa la componente de cambio de volumen plástico **fig.(IV.10)**. Las expresiones matemáticas de estos vectores componentes de la deformación plástica son:

$$\begin{aligned}
(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p)_{\parallel M} &= \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \;\; sin\,\alpha \\
(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p)_{\rho} &= (\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p)_{\parallel M}\;\; cos\,\psi = \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \;\; sin\,\alpha \;\; cos\,\psi \\
(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p)_{\xi} &= (\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p)_{\parallel M}\;\; sin\,\psi = \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \;\; sin\,\alpha \;\; sin\,\psi
\end{aligned} \tag{IV.35}$$

donde:

- α : *ángulo que forma:* $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p$ *, con la normal al plano meridiano:* $\vec{\boldsymbol{v}}_{\perp M}$ *:*

$$cos\,\alpha \;=\; \frac{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{pT}\vec{\boldsymbol{v}}_{\perp M}}{\|\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p\|\|\vec{\boldsymbol{v}}_{\perp M}\|} \;=\; \frac{(\sigma_{jj}-\sigma_{kk})\;\dot{\epsilon}_{ii}^p}{\tau_{oct}\sqrt{3J_2'+I_2'}}$$

- $\vec{\boldsymbol{v}}_{\perp M}$: *versor normal al plano meridiano :*

$$\vec{\boldsymbol{v}}_{\perp M} \;=\; \boldsymbol{\sigma} \times \vec{\mathbf{1}} \;=\; \begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \sigma_3\end{Bmatrix} \times \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{Bmatrix}1\\1\\1\end{Bmatrix} \;=\; \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{Bmatrix}(\sigma_2-\sigma_3)\\(\sigma_3-\sigma_1)\\(\sigma_1-\sigma_2)\end{Bmatrix}$$

- ψ : *ángulo de dilatancia. De la fig.(IV.10) y de la ec.(IV.34) se obtiene:*

$$(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p)^T_{\| M}\ \vec{\mathbf{1}} \ = \ \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{pT}\ \vec{\mathbf{1}}\ sin\,\alpha \ = \ \|\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p\|\ sin\,\alpha\ \ sin\,\psi$$

$$\frac{\dot{\epsilon}^p_v}{\left[\dfrac{\partial \mathcal{G}}{\partial \sigma_1} + \dfrac{\partial \mathcal{G}}{\partial \sigma_2} + \dfrac{\partial \mathcal{G}}{\partial \sigma_3}\right]} \left[\left\{\frac{\partial \mathcal{G}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{q})}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right\}^T \vec{\mathbf{1}}\right] sin\,\alpha = \|\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p\|\ \ sin\,\alpha\, sin\,\psi$$

$$sin\,\psi \ = \ \frac{\dot{\epsilon}^p_v}{\|\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p\|} \ = \ \frac{\|(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p)_\xi\|}{\|\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p\|}$$

o también:

$$tan\,\psi \ = \ \frac{\|(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p)_\xi\|}{\|(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p)_\rho\|}$$

Conocido el fundamento físico de la dilatancia, y las expresiones matemáticas que relacionan el ángulo de dilatancia ψ con las componentes del vector incremento de deformaciones plásticas, definido en el espacio de tensiones principales, se estudiará la movilidad de este ángulo y el efecto que produce durante el desarrollo de un proceso plástico.

Angulo de dilatancia y su movilidad:

Debido a que los sólidos friccionales no exhiben un ángulo de dilatancia constante durante todo el proceso elasto- plástico, es necesario formular una función de evolución de esta magnitud. Este parámetro también podría ser definido como una *variable interna* del proceso inelástico, pero dado que su variación puede ser descrita en forma simple y satisfactoria mediante una función explícita, cuasi-empírica de la variable de daño plástico $\psi = \psi(\kappa^p)$, se ha abandonado la idea de una formulación más compleja.

Entre las posibles formas de definir la evolución de la dilatancia a lo largo del proceso elasto-plástico, se ha utilizado en este modelo una modificación de la ecuación de P.Rowe [125] , desarrollada por P. Vermeer y R. Borst [23] , que se adapta muy bien al comportamiento de los hormigones. También se ha formulado en esta tesis, a partir de esta última, otra función más simple que presenta una buena aproximación. La modificación de Vermeer y Borst es la siguiente:

$$\psi(\kappa^p) = arcsin\left[\frac{sin\,\phi(\kappa^p) - sin\,\phi_{cv}}{1 - sin\,\phi(\kappa^p)\,sin\,\phi_{cv}}\right] \tag{IV.35}$$

siendo:

$\phi(\kappa^p)$: *función de rozamiento interno apart. IV.4.c*;

ϕ_{cv} : *constante denominada "ángulo de rozamiento interno a volumen constante"*.

Su expresión surge a partir de ϕ^{max}, *y* ψ^{max} :

$$sin\,\phi_{cv} = \left[\frac{sin\,\phi^{max} - sin\,\psi^{max}}{1 - sin\,\phi^{max}\,sin\,\psi^{max}}\right]$$

Como dato orientativo, para hormigones: $\begin{cases} \phi^{max} \sim 35^o \\ \psi^{max} \sim 13^o \end{cases}$

La *ec.(IV.35)* describe una evolución tal, que al iniciar el proceso plástico se produce una disminución de la dilatancia con un ángulo $\psi(\kappa^p)$ negativo, creciendo luego con el incremento de κ^p hasta alcanzar el valor de dilatancia nula $\psi(\kappa^p) = 0$ para $\phi = \phi_{cv}$ (ángulo de rozamiento interno que permite un proceso inelástico a volumen constante), a partir de este estado, la dilatancia crece hasta alcanzar su valor máximo $\psi(\kappa^p) = \psi^{max}$, finalmente sigue un proceso con dilatancia máxima constante **fig.(IV.11)**. Para los hormigones no deben utilizarse ángulos de dilatancia negativos, situación que exige considerar la siguiente limitación sobre la *ec.(IV.35)*:

$$\psi(\kappa^p) = \begin{cases} 0 & ; \ \forall\ \phi(\kappa^p) \leq \phi_{cv} \\ arcsin\left[\dfrac{sin\,\phi(\kappa^p) - sin\,\phi_{cv}}{1 - sin\,\phi(\kappa^p)\,sin\,\phi_{cv}}\right] & ; \ \forall\ \phi(\kappa^p) > \phi_{cv} \end{cases} \tag{IV.36}$$

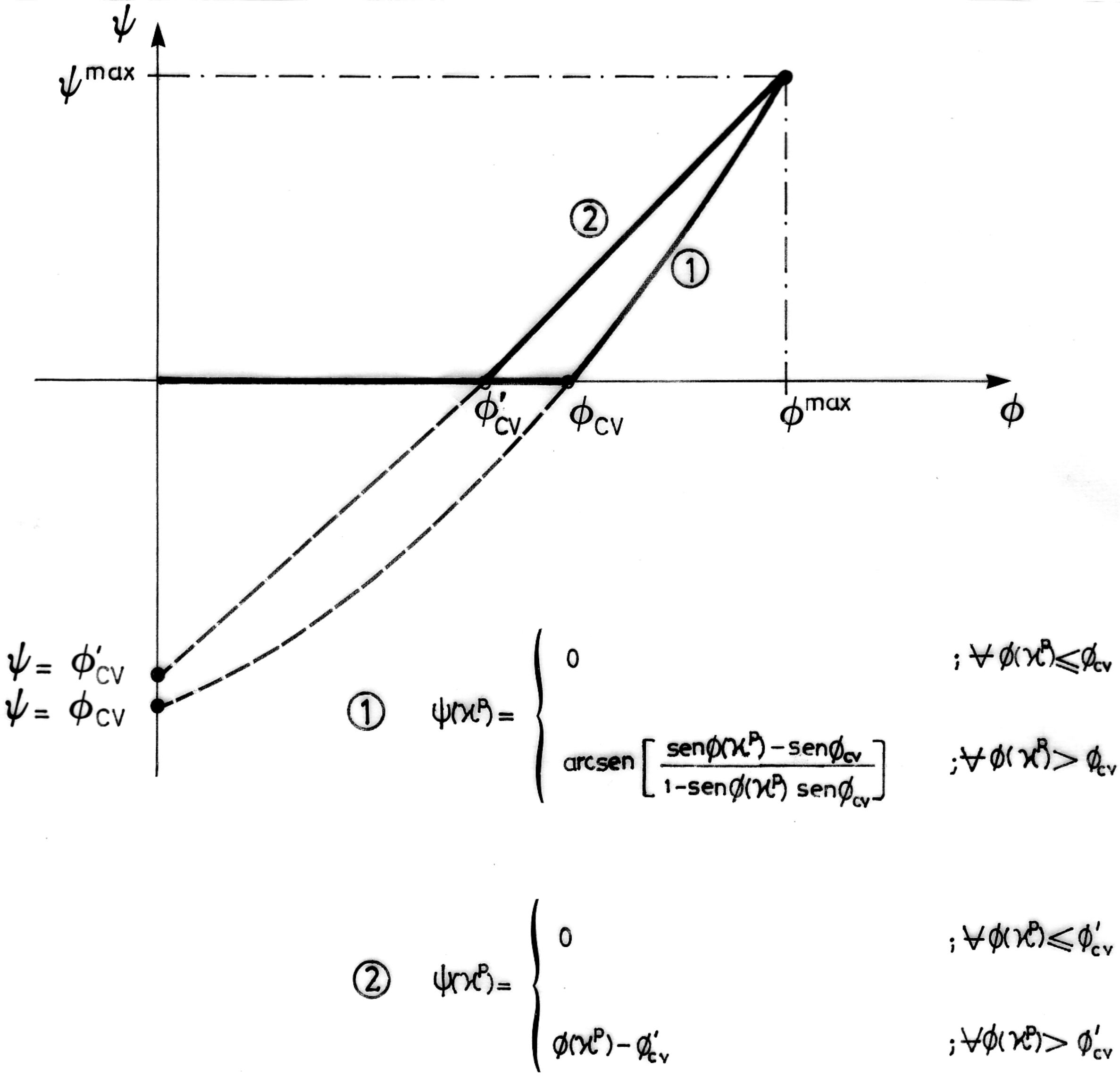

fig.(IV.11): Evolución del ángulo de dilatancia ψ en función del ángulo de rozamiento interno ϕ .

Una altenativa sencilla a esta función de dilatancia, viene dada por una relación lineal entre ψ y ϕ **fig.(IV.11)**. Esto es:

$$\psi(\kappa^p) \;=\; \begin{cases} 0 & ; \;\; \forall\; \phi(\kappa^p) \leq \phi'_{cv} \\ \phi(\kappa^p) - \phi'_{cv} & ; \;\; \forall\; \phi(\kappa^p) > \phi'_{cv} \end{cases} \qquad \textit{(IV.37)}$$

siendo:

$\phi(\kappa^p)$: *función de rozamiento interno apart. IV.4.c*;

ϕ'_{cv} : *constante denominada "ángulo de rozamiento interno a volumen constante".*

Su expresión surge a partir de ϕ^{max}, *y* ψ^{max} :

$$\phi'_{cv} = \phi^{max} - \psi^{max}$$

Tanto la *ec.(IV.36)* como la *ec.(IV.37)* son similares en el hormigón, para el rango que interesa $\phi_{cv} \leq \phi \leq \phi^{max}$ **fig.(IV.11)**.

IV.5.- CRITERIO DE FLUENCIA PLASTICO PROPUESTO [78].

IV.5.a- Definición del criterio – Introducción.

Mientras en ensayos biaxiales de hormigones [74][136] es usual encontrar que la *superficie de discontinuidad inicial* es similar en su forma a las sucesivas *superficies de carga plástica*. En estados de compresión triaxial no se encuentran ensayos experimentales para altas presiones hidrostáticas que permitan afirmar lo mismo. No obstante, esta falta de conocimiento sobre el comportamiento del hormigón para estados de tensión triaxial afectados por altas presiones hidrostáticas, existen criterios como el denominado **cap model** [43][141] , que hacen la hipótesis de que la *superficie de discontinuidad inicial* se cierra sobre el eje de presiones hidrostáticas, mientras la *superficie de tensión máxima o segundo límite de fallo* así como las *sucesivas superficies de fluencia* (incluída la *superficie límite de tensión última*), se encuentran abiertas hacia el infinito sobre el mencionado eje de presiones hidrostáticas en la zona de compresión total. Esto implicaría, que para estos estados, donde $-\sigma_1 = -\sigma_2 = -\sigma_3$, se desarrollaría un proceso de endurecimiento indefinido, sin alcanzar la superficie de de fallo total. Por otro lado, debido a que el presente modelo está orientado hacia el estudio del daño total, no se ha intentado formular un criterio de fluencia que considere el comportamiento plástico en la *región diagonal* donde aparentemente no se puede alcanzar la situación de daño total; por lo tanto se propone una función de fluencia *ec.(IV.1)* que sólo será válida en la zona del espacio de tensiones en la cual se tiene la ceteza de que una carga radial conduce a alcanzar un estado de fallo total.

Es por lo tanto un rasgo caracterıstico de este modelo, que la misma función $\mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma}, c)$ describa el *límite de discontinuidad inicial*, y luego evolucione durante el proceso de carga, fijando los *sucesivos límites de fallo*.

En el (***apart. IV.2.***) se ha mencionado, que este modelo elasto-plástico adopta el uso de funciones de fluencia homogéneas de primer grado en las componentes del tensor de tensiones. Esta decisión permite definir una *función de endurecimiento plástico* simple y con un claro sentido físico, en este caso la cohesión c. No obstante esta aparente ventaja, los criterios de fluencia que gozan de esta característica no pueden simular el comportamiento de los sólidos friccionales a muy altas presiones hidrostáticas, donde se exige que los meridianos se curven hasta hacerse paralelos al eje de presión hidrostática [102]. Sin embargo, no hay evidencias experimentales de que esto ocurra en hormigones, pues los resultados experimentales aprovechables [33][113][102], que surgen de ensayos triaxiales a compresión, no alcanzan tan altas presiones hidrostáticas, evidenciando solamente una leve curvatura en los meridianos sin que lleguen a ser paralelos al eje de presión hidrostática **fig.(IV.12)**. Resultando de aquí que los meridianos rectos pueden ser una buena aproximación dentro del dominio de trabajo al que normalmente se somete al hormigón. Consecuente con la decisión de adoptar el uso de funciones de fluencia homogéneas de primer grado, se propone el siguiente criterio:

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma}, c) = \frac{1}{(1-\alpha)} \left[\sqrt{3\ J_2} \ + \ \alpha\ I_1 \ + \ \beta \langle \sigma^{max} \rangle \ - \ \gamma \langle -\sigma^{max} \rangle \right] \ - \ c = 0 \tag{IV.38}$$

donde α , β y γ son constantes adimensionales que modifican la forma de la función de fluencia, σ^{max} es la tensión principal mayor * $\sigma_3 \leq \sigma_2 \leq \sigma_1 = \sigma^{max}$ y

* *Nota: De la ec.(An-E.35), resulta:*

$$\sigma^{max} = \sigma_1 = \frac{2\sqrt{J_2}}{\sqrt{3}}\ sin(\theta + \frac{2\pi}{3}) + \frac{I_1}{3}$$

c es la función de cohesión o endurecimiento plástico * definida en el (***apart. IV.4.b***).

También se puede presentar la *ec.(IV.38)* a partir de las coordenadas cilíndricas definidas en el espacio de Westergard. Esto es:

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(\rho, \xi, c) = \frac{1}{(1-\alpha)} \left[\sqrt{\frac{3}{2}}\rho \ + \ \alpha\sqrt{3}\xi + \beta\langle\sigma^{max}\rangle - \gamma\langle -\sigma^{max}\rangle \right] \ - \ c = 0 \tag{IV.39}$$

Si en la *ec.(IV.38)* o en la *ec.(IV.39)* se hace $\sigma^{max} = 0$ (estado de compresión biaxial: $\sigma_3 \leq \sigma_2 \leq \sigma_1 = 0$), este criterio toma la forma del criterio de Drucker-Prager en la zona de compresión total, salvo el valor de sus constantes de ajuste [78] . Esto es:

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(\rho, \xi, c) = \rho \ + \ \alpha'\sqrt{6}\xi \ - \ \sqrt{2}\mathcal{K}' = 0 \tag{IV.40}$$

siendo:

$$\alpha' = \frac{\alpha}{\sqrt{3}}$$

$$\mathcal{K}' = \frac{(1-\alpha)}{\sqrt{3}} \ c$$

donde se advierte que α también puede ser considerada como una función del ángulo de rozamiento interno: $\alpha = f(\phi)$.

* *Nota: Para este criterio de fluencia, la relación entre las funciones de cohesión, a compresión simple y tracción simple, con las respectivas tensiones uniaxiales ecs.(IV.22) (IV.23), se obtienen a partir de las siguientes expresiones:*

$$c_C(\kappa^p) \ = \ \frac{1}{\aleph} \, \sigma_C(\kappa^p) \equiv \ \sigma_C(\kappa^p)$$

$$c_T(\kappa^p) \ = \ \frac{1}{\aleph} \, [R^0 \ \sigma_T(\kappa^p)] \equiv \ R^0 \ \sigma_T(\kappa^p)$$

IV.5.b- Determinación de los parámetros α, β, γ .

Parámetro α : Este parámetro, es el encargado de ajustar la función de discontinuidad inicial en la zona de compresión, con el fin de obtener la relación deseada entre la resistencia uniaxial y la resistencia equibiaxial **fig.(IV.12)**. Debido a que la *ec.(IV.40)* describe la función de fluencia en el plano $\sigma_2 - \sigma_3$, es posible deducir de ella la magnitud de α . Para ello, considerando un estado de compresión plano y simétrico $\sigma_{cb} = \sigma_3 = \sigma_2 \leq \sigma_1 = 0$ en la *ec.(IV.40)*, se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} \rho = \sqrt{2J_2} = \sqrt{\dfrac{2}{3}(\sigma_{cb})^2} = \sqrt{\dfrac{2}{3}}\;\sigma_{cb} \\[2ex] \xi = \dfrac{I_1}{\sqrt{3}} = -\;\dfrac{2}{\sqrt{3}}\;\sigma_{cb} \end{array}\right\} \Rightarrow\; \sigma_{cb}\frac{(1-2\alpha)}{(1-\alpha)} \;-\; c = 0 \qquad \textit{(IV.41)}$$

Por otro lado, puesto que es un proceso de compresión pura $(\sigma_i \leq 0)$, se tiene que la *función de peso* *ec.(IV.21)* es constante y nula $r(\boldsymbol{\sigma}) = 0$, resulta la siguiente ecuación de evolución para la cohesión *ec.(IV.20)*:

$$\dot{c} = h_c(\boldsymbol{\sigma}, \kappa^p, c)\;\dot{\kappa}^p = c\;\left[\frac{1}{c_C(\kappa^p)}\;\frac{dc_C(\kappa^p)}{d\kappa^p}\right]\;\dot{\kappa}^p \qquad \textit{(IV.42)}$$

integrando esta ecuación de evolución, resulta:

$$c \;=\; c_C(\kappa^p) \qquad \textit{(IV.43)}$$

y debido a que en este criterio de fluencia, la relación entre la función de cohesión a compresión simple y la respectiva tensión uniaxial viene dada por *ec.(IV.22)*:

$$c \;=\; c_C(\kappa^p) \;=\; \frac{1}{\aleph}\,\sigma_C(\kappa^p) \equiv\; \sigma_C(\kappa^p) \qquad \textit{(IV.44)}$$

se puede escribir la *ec.(IV.41)*, como:

$$\frac{\sigma_{cb}}{\sigma_C} = \frac{1-\alpha}{1-2\alpha} \qquad \textit{(IV.45)}$$

resultando de aquí la expresión del parámetro α :

$$\alpha = \frac{\frac{\sigma_{cb}}{\sigma_C} - 1}{2\frac{\sigma_{cb}}{\sigma_C} - 1} \qquad \textit{(IV.46)}$$

donde σ_C y σ_{cb} representan la resistencias de compresión uniaxial y equibiaxial para el *límite de discontinuidad inicial* $\kappa^p = 0$, respectivamente. Según estudios experimentales sobre el comportamiento de hormigones [74][136][102] , la relación $\frac{\sigma_{cb}}{\sigma_C}$ oscila entre 1.10 y 1.16, de donde se obtienen valores de α comprendidos entre 0.08 y 0.1212... .

Parámetro β : La relación que hay entre las resistencias uniaxiales de compresión y tracción $R(\kappa^p) = \sigma_C(\kappa^p)/\sigma_T(\kappa^p)$, cuando se alcanza el *primer límite de discontinuidad* , *para:* $\kappa^p = 0$, puede ser controlada a través del parámetro β .

Conocido α , y sustituyendo un estado de tracción simple $0 = \sigma_3 = \sigma_2 \leq \sigma_1 = \sigma_T$ en la *ec.(IV.38)*, se tiene:

$$\frac{1}{(1-\alpha)}\left[\sigma_T \;+\; \alpha\,\sigma_T \;+\; \beta\,\langle\sigma_T\rangle\right] \;=\; c \qquad \textit{(IV.47)}$$

y debido a que en este criterio de fluencia, la relación entre la función de cohesión a tracción simple y la respectiva tensión uniaxial viene dada por *ec.(IV.23)*:

$$c_T(\kappa^p) \;=\; \frac{1}{\aleph}\;[R^0\;\sigma_T(\kappa^p)] \equiv\; R^0\;\sigma_T(\kappa^p) \qquad \text{(IV.48)}$$

se puede escribir la *ec.(IV.47)*, como:

$$1\;+\;\alpha\;+\;\beta\;=\;(1-\alpha)\;R^0 \qquad \text{(IV.49)}$$

resultando de aquí la expresión del parámetro β

$$\beta\;=\;(1-\alpha)R^0-(1+\alpha) \qquad \text{(IV.50)}$$

donde R^0 representa la relación uniaxial que hay entre la resistencia uniaxial de compresión y tracción cuando se alcanza el *primer límite de discontinuidad*, (para $\kappa^p = 0$). Según estudios experimentales sobre el comportamiento de hormigones [74][136] , la relación $R(\kappa^p = 0)$ es del orden de 10.0, que junto a un $\alpha = 0.1212$, da valores de β del orden de 7.66 .

Parámetro γ : Este parámetro, función de la relación de radios octaédricos máximos a tracción y compresión r_{oct}^{max} , aparece solamente para estados de compresión triaxial, o sea cuando $\sigma_3 \leq \sigma_2 \leq \sigma_1 = \sigma^{max} \leq 0$. Designando con [T.M.] y [C.M.] los meridianos a tracción ($\sigma_3 = \sigma_2 < \sigma_1$; o $\theta = -\frac{\pi}{6}$) y compresión ($\sigma_3 < \sigma_2 = \sigma_1$; o $\theta = \frac{\pi}{6}$), de la superficie de fluencia plástica, respectivamente, y expresando las tensiones máximas a partir de la *ec.(An-E.35)*, como:

$$\text{para [T.M.]:}\quad \theta = -\frac{\pi}{6} \;\Rightarrow\; \sigma^{max} = \frac{1}{3}\left(I_1 + 2\sqrt{3\;J_2}\right) \qquad \text{(IV.51)}$$

$$\text{para [C.M.]:}\quad \theta = \frac{\pi}{6} \;\Rightarrow\; \sigma^{max} = \frac{1}{3}\left(I_1 + \sqrt{3\;J_2}\right)\;, \qquad \text{(IV.52)}$$

tal que, sustituyendo éstas en la *ec.(IV.38)* con $\sigma^{max} < 0$, resultan las siguientes ecuaciones que describen meridianos rectos de tracción y compresión:

$$\text{para [T.M.]:} \quad (2\gamma + 3)\ \sqrt{3J_2}\ +\ (\gamma + 3\alpha)\ I_1 = 3\ (1-\alpha)\ c \qquad \text{(IV.53)}$$
$$\text{para [C.M.]:} \quad (\ \gamma + 3)\ \sqrt{3J_2}\ +\ (\gamma + 3\alpha)\ I_1 = 3\ (1-\alpha)\ c \qquad \text{(IV.54)}$$

donde c es el valor actual de la cohesión, que viene descrita por la función de evolución presentada en la *ec.(IV.19)*. Considerando la relación de radios octaédricos máximos a tracción y compresión r_{oct}^{max} , en un plano octaédrico cualquiera $I_1 = cte.$, se tiene de las *ecs.(IV.53) y (IV.54)*:

$$r_{oct}^{max} = \frac{\rho_T}{\rho_C} = \frac{(\sqrt{2J_2})_T}{(\sqrt{2J_2})_C} = \frac{(\sqrt{J_2})_T}{(\sqrt{J_2})_C} = \frac{\dfrac{3(1-\alpha)c - (\gamma+3\alpha)}{(2\gamma+3)\sqrt{3}}}{\dfrac{3(1-\alpha)c - (\gamma+3\alpha)}{(\gamma+3)\sqrt{3}}} = \frac{\gamma+3}{2\gamma+3} = cte. \qquad \text{(IV.55)}$$

resultando de aquí la expresión del parámetro γ , que es constante debido a que los meridianos son rectos *ecs.(IV.53) y (IV.54)*:

$$\gamma\ =\ \frac{3\ (1 - r_{oct}^{max})}{2\ r_{oct}^{max}\ -\ 1} \qquad \text{(IV.56)}$$

Según N.S. Ottosen [33][102][103] , la *relación máxima entre radios octaédricos* r_{oct}^{max} , debe ser una función de la presión hidrostática I_1 , variando desde $r_{oct}^{max} = 0.5$ para: $I_1 \rightarrow 0$, hasta $r_{oct}^{max} = 1.0$ para: $I_1 \rightarrow \infty$, esto significa que la función de fluencia pasa de una sección octaédrica triangular, a una circular, respectivamente. No obstante esto, los ensayos experimentales no muestran tal incremento [113] , sino que tiende a una constante que oscila alrededor de $r_{oct}^{max} \sim 0.65$. De esto último, se obtiene un valor de $\gamma = 3.5$. El criterio de fluencia plástica de Willam-Warnke [33] , al igual que el que se propone, mantiene la *relación máxima entre radios octaédricos* constante durante todo el proceso inelástico, y comprendida entre $0.5 \leq r_{oct}^{max} \leq 1.0$ según sean las constantes de ajuste que se utilizan.

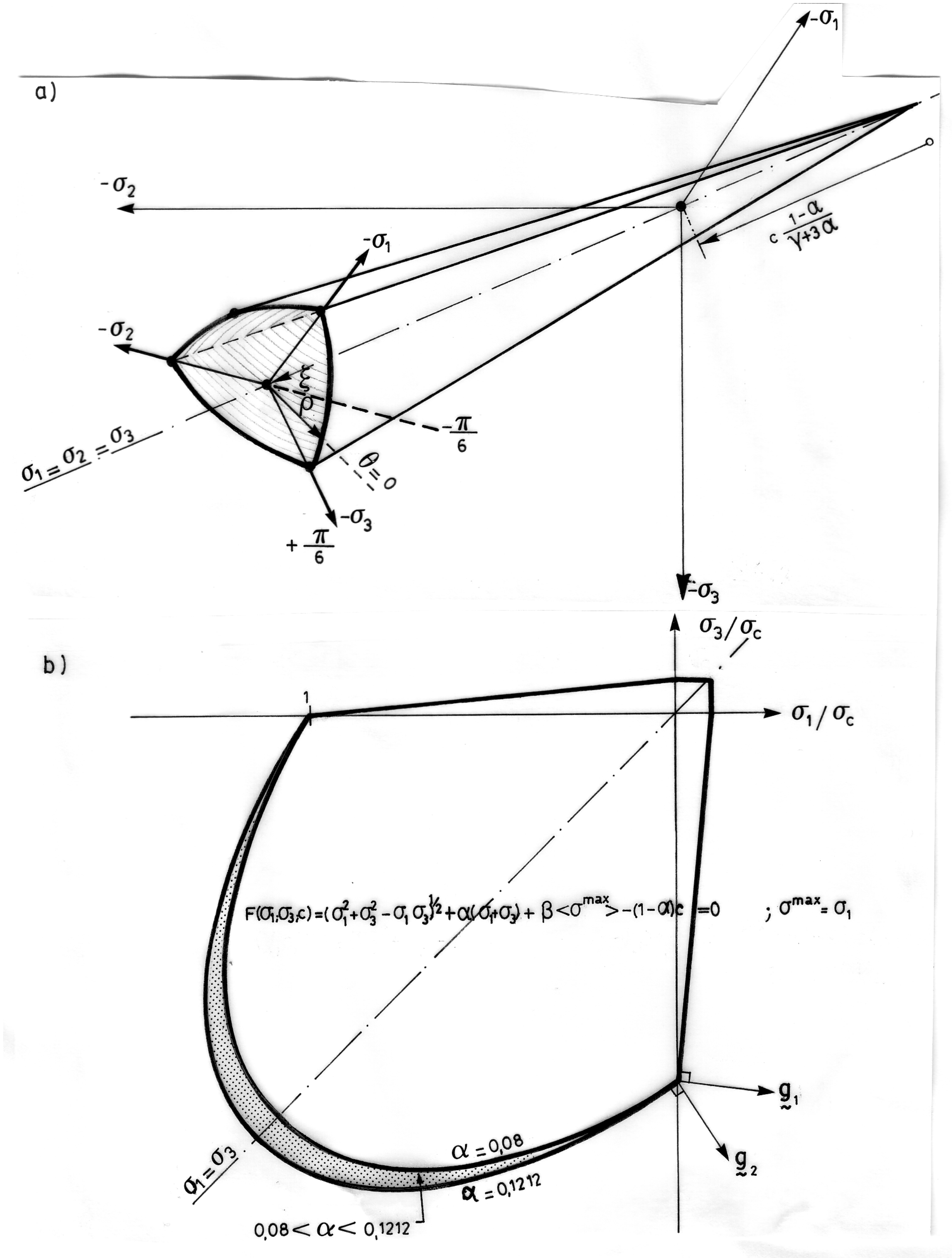

fig.(IV.12): Criterio de fluencia propuesto: a) En el espacio de tensiones principales o espacio de Westergard; b) Según el plano $\sigma_1 - \sigma_3, \sigma_2 = 0$.

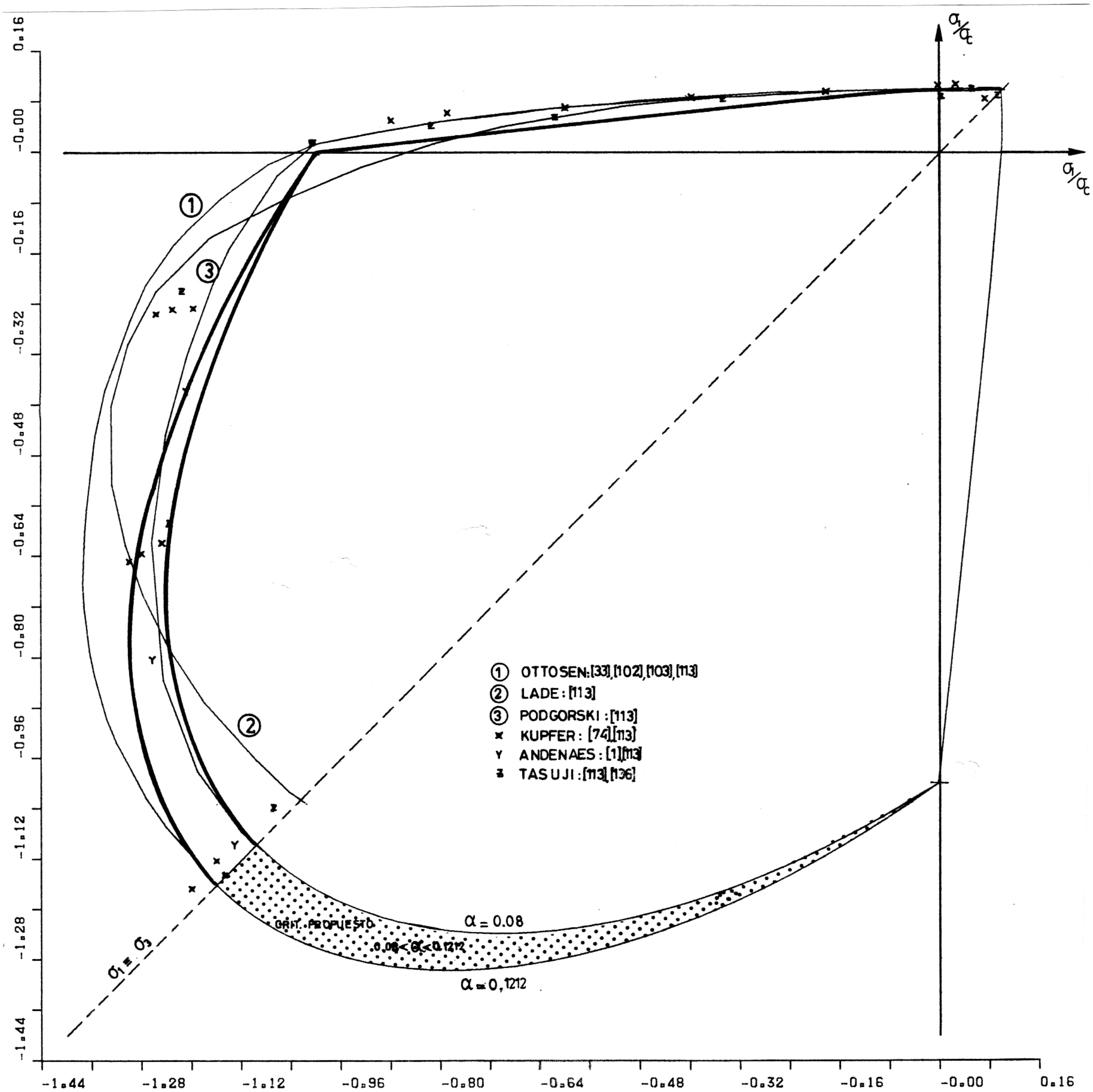

fig.(IV.12): Criterio de fluencia propuesto: c) Comparación con otros criterios de fluencia plástica según el plano $\sigma_1 - \sigma_3, \sigma_2 = 0$.

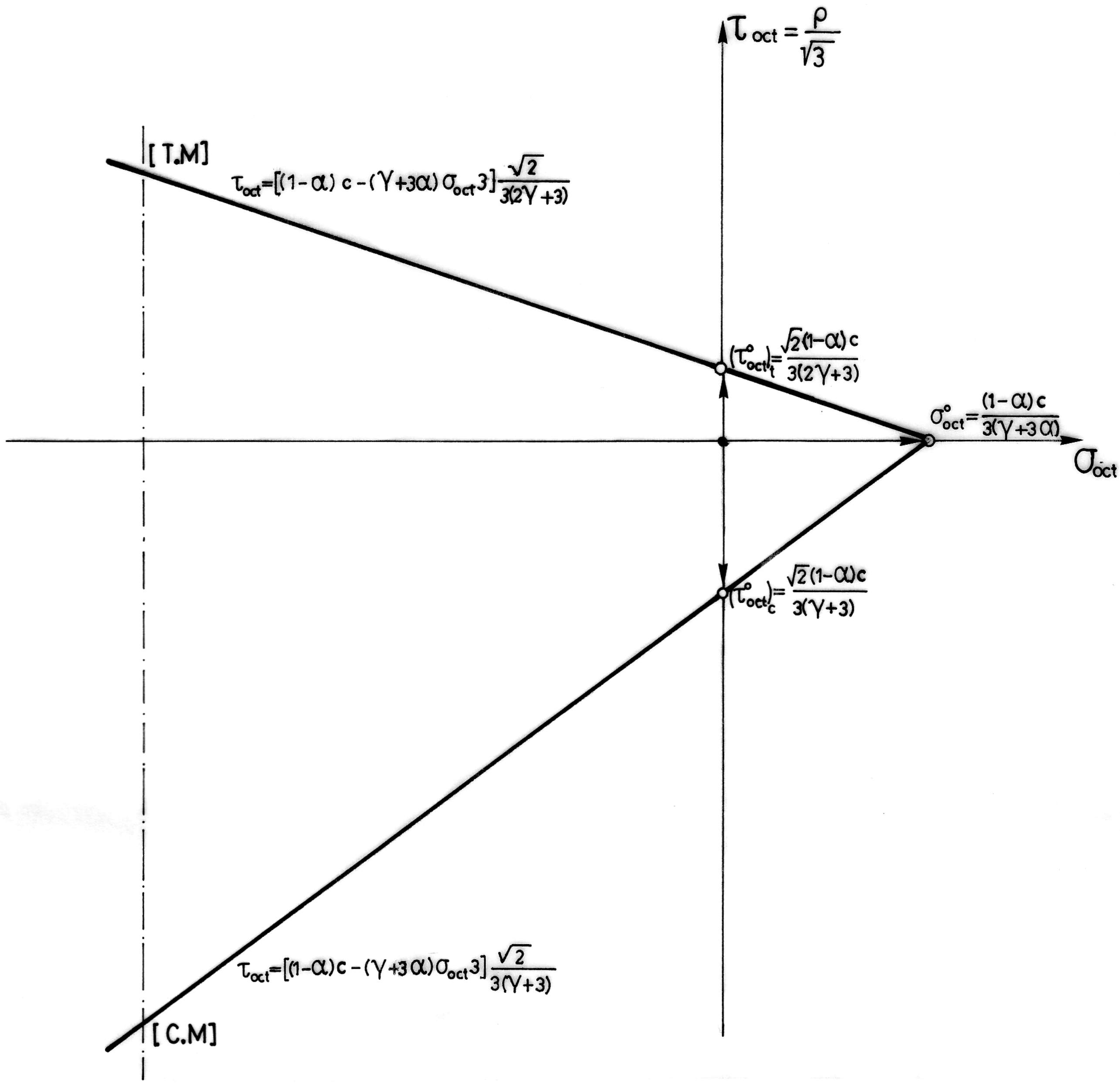

fig.(IV.12): Criterio de fluencia propuesto: d) Según los meridianos de tracción y compresión máxima.

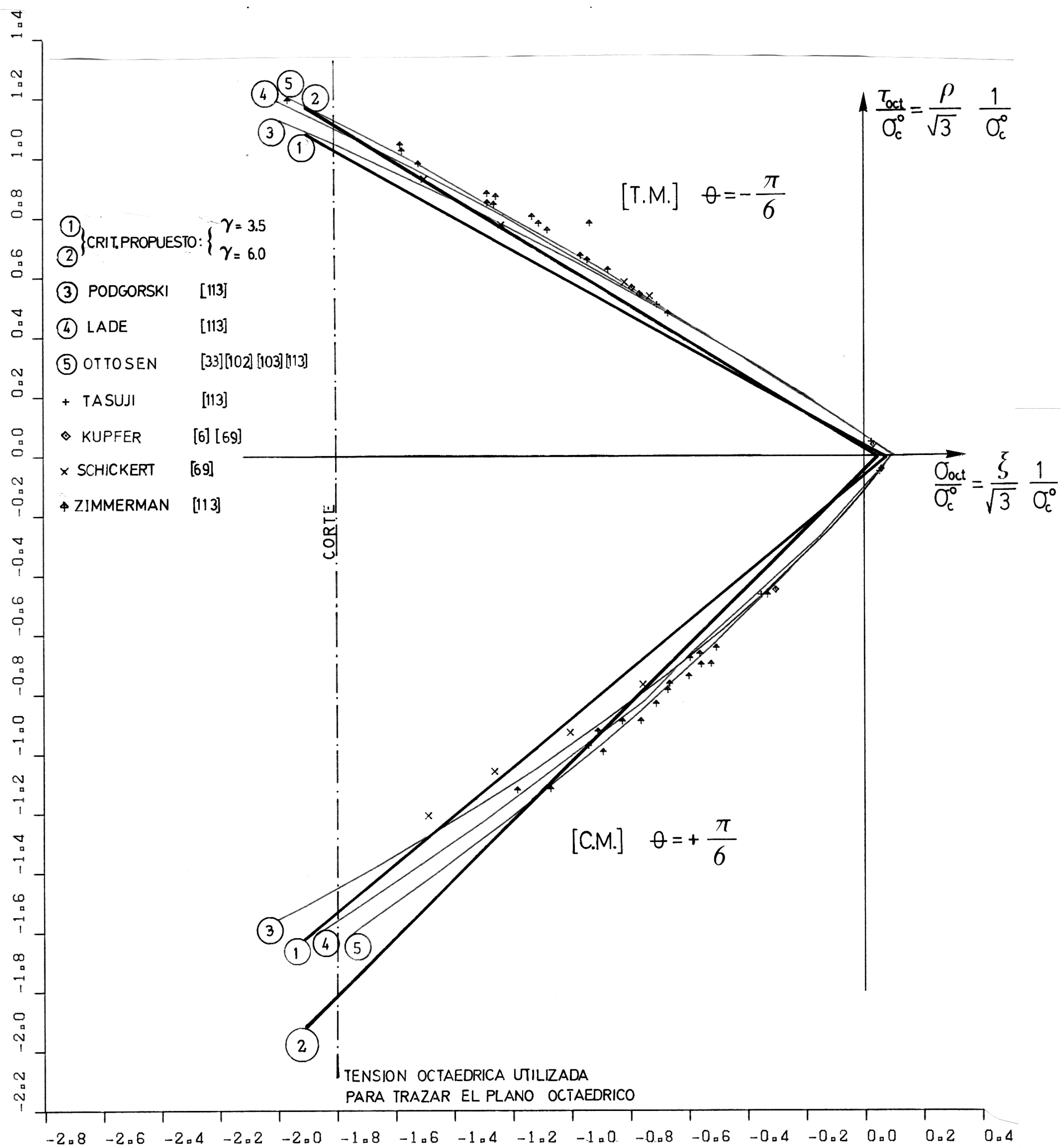

fig.(IV.12): Criterio de fluencia propuesto: e) Comparación con otros criterios de fluencia plástica según los meridianos de tracción y compresión máxima.

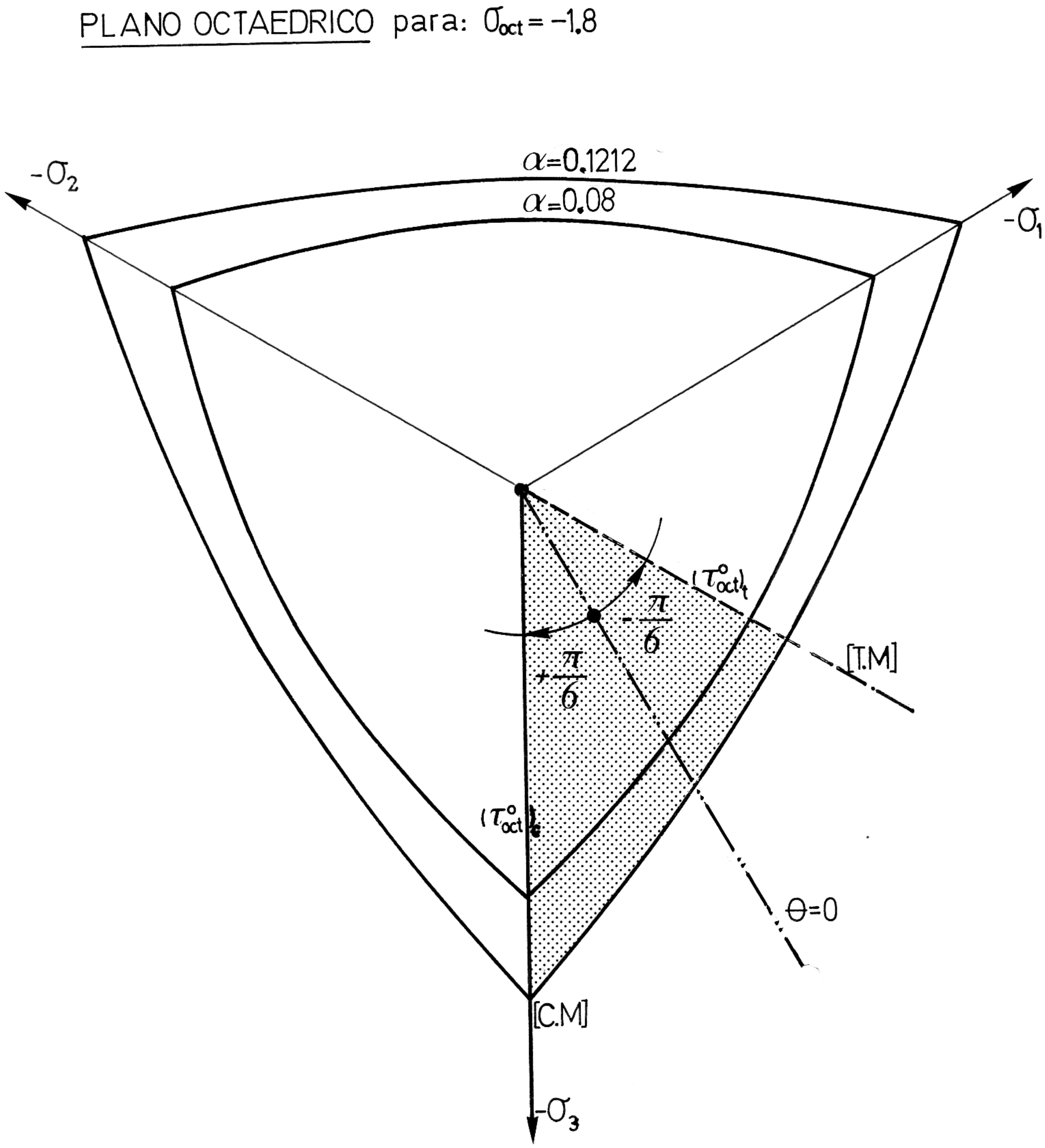

fig.(IV.12): Criterio de fluencia propuesto: f) Según el plano octaédrico $\sigma_{oct} = -1.8$.

IV.5.c- Forma de la función de fluencia.

La función de fluencia propuesta, describe en el *espacio de tensiones principales*, o espacio de Westergard, una pirámide como la que muestra la **fig.(IV.12,a)**. En los *planos meridianos de tracción máxima y compresión máxima* **fig.(IV.12,d)**, debido a que depende en forma lineal de ρ y de ξ, describe dos rectas con una relación máxima de radios octaédricos como la expresada en la *ec.(IV.55)*. En el

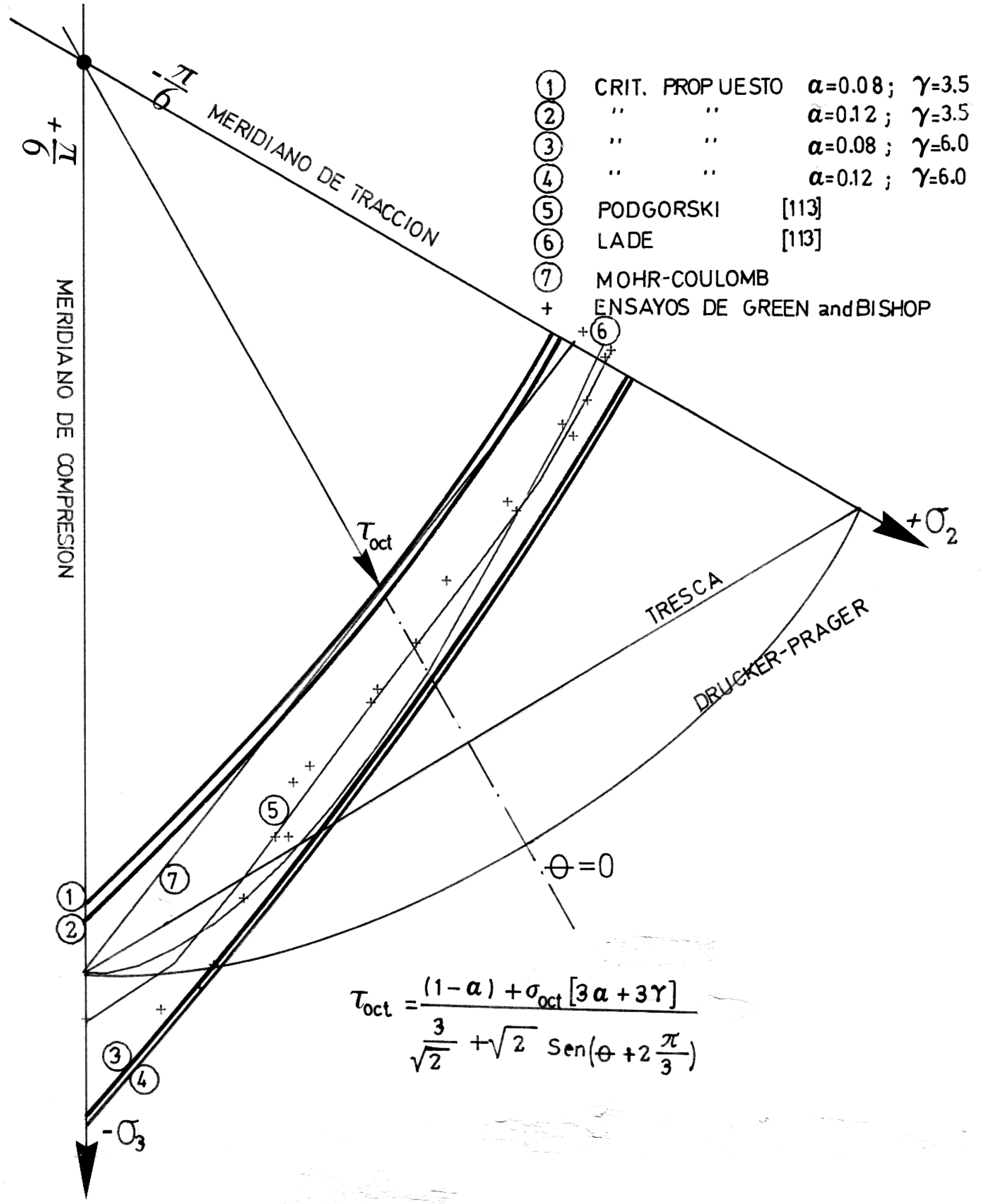

fig.(IV.12): Criterio de fluencia propuesto: g) Comparación con otros criterios de fluencia plástica según el plano octaédrico $\sigma_{oct} = -1.8$.

plano octaédrico fig.(IV.12,f) describe una curva con tres vértices, por donde pasan los tres meridianos de compresión máxima y donde presenta uno de los tipos de singularidad que produce una definición múltiple del vector normal a la superficie $\boldsymbol{f}$ (*IV.7.*). Por último, en el *plano principal* fig.(IV.12,b) $[\sigma_1 - \sigma_3 \ , \ \sigma_2 = 0]$, en la zona de compresión total, presenta una función similar a la de Drucker-Prager *ec.(IV.40)*, y en la intersección con el octante de compresión total, presenta el otro tipo de singularidad que también produce definición múltiple del vector normal a la superficie (***IV.7.***).

Del análisis de las **figs.(IV.12)** se puede deducir que, tanto en el *plano octaédrico* como en los *planos meridianos* y en el *plano principal* $[\sigma_1 - \sigma_3 \ , \ \sigma_2 = 0]$ el criterio propuesto aproxima bien los resultados experimentales [1][74][113][134] . Además, se puede observar que para los valores de tensión octaédrica comprendidos entre:

$$\sim \quad -2.0 \ \leq \ \frac{\sigma_{oct}}{|\sigma_C(\kappa^p = 0)|} \ \leq \ \frac{\sigma^0_{oct}}{|\sigma_C(\kappa^p = 0)|} \ ,$$ (dominio donde se encuentran numerosos ensayos experimentales para los hormigones), las funciones meridianas rectas aproximan bastante bien el comportamiento real de este material.

IV.6.- CRITERIO DE POTENCIAL PLASTICO.

De la regla de flujo expresada mediante la *ec.(Ap-I.21)*, resulta obvio que el incremento de deformación plástica $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p$ queda definido a partir del criterio de potencial plástico $\mathcal{G}$, quedando así establecida la cuota de dilatancia admitida en el *material ideal propuesto*, durante el desarrollo de un proceso de carga elasto-plástico. En otras palabras, la definición de la función de potencial plástico establece indirectamente la magnitud del efecto de la dilatancia que se producirá en el sólido ideal que se modela. La variación de este ángulo de dilatancia, a lo largo del proceso de carga inelástico, ha sido presentada en el (***apart. IV.4.d***), y mediante esta función se puede dar movilidad al criterio de potencial plástico con el fin de lograr una mejor simulación del fenómeno de dilatancia.

Existe una gran cantidad de funciones de potencial plástico $\mathcal{G}$, definidas para lograr la dilatancia deseada para cada material friccional ideal [53][75] . En este modelo constitutivo se ha utilizado una *extensión* de la propuesta realizada por D. Radenkovic [23][114] , consistiendo en adoptar el *criterio de fluencia de Mohr-Coulomb* , que en este caso se considera su modificación (***anexo-C***) como criterio de potencial plástico. Sustituyendo el ángulo de rozamiento interno por el de dilatancia (***apart. IV.4.d***): $\psi = \phi$. Esto es:

$$\mathcal{G}(I_1, J_2, \theta, \psi, \alpha_R) = \frac{I_1}{3}\mathbb{K}_3 + \sqrt{J_2}\left(\mathbb{K}_1 \cos\theta - \mathbb{K}_2 \frac{\sin\theta \sin\psi}{\sqrt{3}}\right) - \ cte. = 0$$

(IV.57)

o bien:

$$\mathcal{G}(\xi, \rho, \theta, \psi, \alpha_R) = \sqrt{2}\xi\mathbb{K}_3 + \sqrt{3}\rho\left(\mathbb{K}_1 \cos\theta - \mathbb{K}_2 \frac{\sin\theta \ \sin\psi}{\sqrt{3}}\right) - \ cte. = 0$$

(IV.58)

donde $\mathbb{K}_i$ son constantes que dependen de la relación inicial entre las resistencias uniaxiales a compresión y a tracción (***Anexo-C***). Esta modificación de la función de Mohr-Coulomb, provee un vector de flujo plástico que se acerca a los resultados experimentales obtenidos, sobre morteros de cemento y hormigones, por E. Andenaes y otros [1] **fig.(IV.13)**. En esta misma figura se puede observar el error cometido en considerar un flujo asociado a la función de fluencia propuesta (***IV.7.***), y la ventaja que proporciona el uso de la propuesta de Radenkovic aplicada a la función de Mohr-Coulomb modificada (***anexo-C***). Esta última, puede presentar una discrepancia con los resultados experimentales obtenidos por Andenaes [1] para la relación de tensión $\frac{\sigma_3}{\sigma_1} = \frac{0}{3}$ (punto singular), pudiendose solucionar mediante la definición del flujo plástico de Köiter *ec.(Ap-I.126)*, con una selección apropiada del factor de peso $p^{(i)}$.

IV.7.- RIGIDEZ TANGENTE – CALCULO DEL VECTOR NORMAL A LA SUPERFICIE DE FLUENCIA PLASTICA (*apart. IV.5.*) – .

Para este modelo constitutivo, en ausencia de degradación de rigidez, el tensor tangente elasto-plástico se expresa de la misma manera que en la teoría de la plasticidad clásica *ec.(Ap-I.54)*. Esto es:

$$\boldsymbol{D}_T^{ep} \ = \ \boldsymbol{D}_S - \frac{\left[\boldsymbol{D}_S \ \left\{\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\right\}\right] \ \left[\left\{\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\right\}^T \ \boldsymbol{D}_S\right]}{\left[h_c \ \left(\boldsymbol{h}_\kappa^{pT} \ \frac{\partial\mathcal{G}}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\right)\right] \ + \ \left[\left\{\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\right\}^T \ \boldsymbol{D}_S \ \frac{\partial\mathcal{G}}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\right]} \qquad \text{(IV.59)}$$

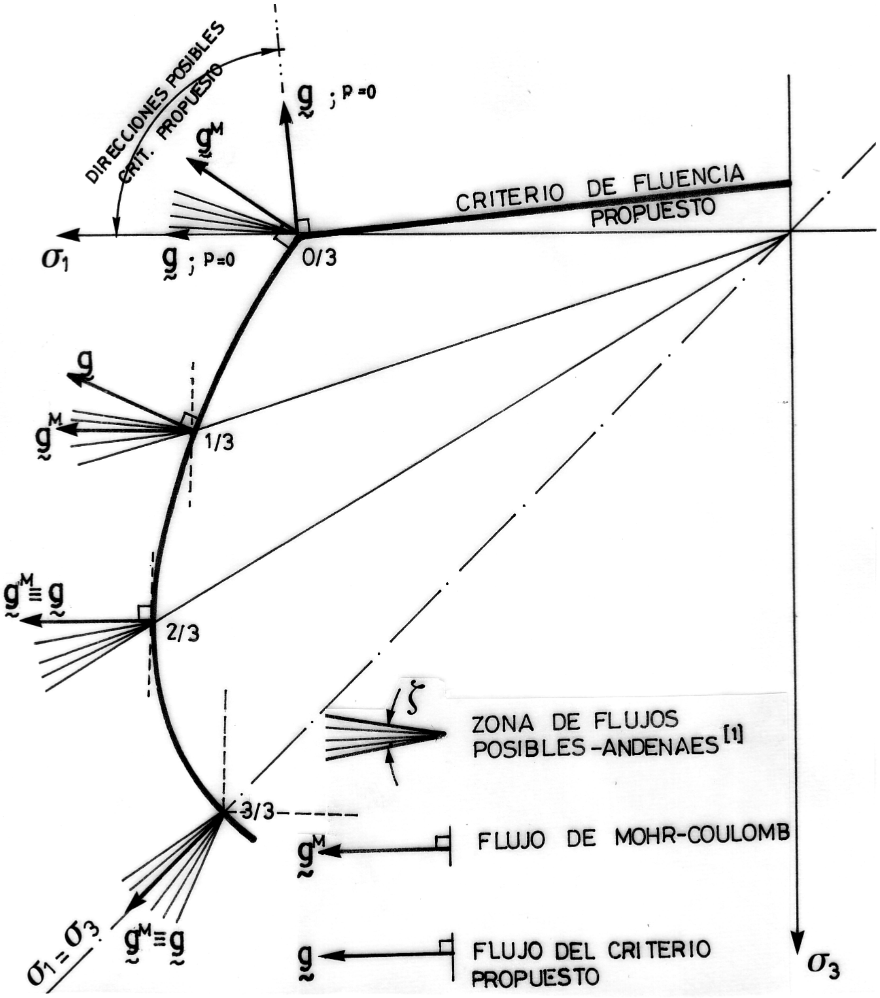

fig.(IV.13): Flujo plástico producido por la superficie de fluencia presentada en el (*apart. IV.5*); flujo plástico obtenido por E. Andenaes y otros [1] , y flujo según la propuesta de D. Radenkovic [23][114] .

donde $\dfrac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$ representa al vector normal a la superficie de fluencia plástica definida en el ***apart. IV.5***; y $\dfrac{\partial \mathcal{G}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$ representa al vector normal a la superficie de potencial plástico *. $\boldsymbol{D}_S$ es el tensor de rigidez secante de cuarto orden, representado por una matriz de treinta y seis elementos; $h_c(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{q})$ es una función del estado del proceso plástico que describe la evolución de la variable interna de cohesión

* *Nota: La función de fluencia plástica propuesta en el apart. IV.5 provee un flujo plástico que no cumple plenamente con los resultados experimentales obtenidos por Andenaes y otros [1] (ver fig. IV.13). Sin embargo, en el capítulo V se muestran algunos ejemplos tratados con la regla de flujo asociada a este criterio de fluencia dando resultados satisfactorios. La modificación del criterio de Mohr-Coulomb propuesto en el anexo-C, junto a un ángulo de rozamiento interno igual al de dilatancia $\phi = \psi$ (función de Radencovich modificada apart. IV-6) da una superficie de potencial plástico que se ajusta bastante bien a los resultados experimentales [1] .*

c *ec.(IV.20)*, y $\boldsymbol{h}^p_\kappa(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{q})$ es otra función del estado del proceso plástico que describe la evolución de la variable interna de daño plástico κ^p *ec.(IV.16)*.

A continuación se definirá ,en el espacio de tensiones principales, el vector normal a la superficie de fluencia plástica propuesta (***apart. IV.5***), y se tratará también el problema de definición múltiple de este vector en los puntos singulares que presenta esta función.

IV.7.a- Vector normal a la superficie de fluencia plástica.

El vector normal al criterio de fluencia plástico $\boldsymbol{f} = \dfrac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$, expresado en el espacio de tensiones principales, queda definido como:

$$\boldsymbol{f} = \frac{\partial \mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{q})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma_1} \\ \dfrac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma_2} \\ \dfrac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma_3} \end{Bmatrix} \qquad \textit{(IV.61)}$$

siendo una componente genérica de este vector:

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma_i} = \frac{2\sigma_i - \sigma_j - \sigma_k}{2\,\sqrt{3J_2}} \;+\; \alpha \;+\; \beta \frac{\partial \langle \sigma^{max} \rangle}{\partial \sigma_i} \;-\; \gamma \frac{\partial \langle -\sigma^{max} \rangle}{\partial \sigma_i} \qquad \textit{(IV.62)}$$

tal que sustituyendo en ésta: $2\sigma_i - \sigma_j - \sigma_k = 3\left[\sigma_i - (\frac{\sigma_i + \sigma_j + \sigma_k}{3})\right] = 3\ s_i$, resulta:

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma_i} = \frac{3\ s_i}{2\,\sqrt{3J_2}} \;+\; \alpha \;+\; \Im_i \qquad \textit{(IV.63)}$$

donde $\Im_i$ es un *parámetro que considera la de influencia de la tensión principal* *máxima* en la componente de flujo $f_i = \dfrac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma_i}$ ec.(IV.61), y vale:

$$\Im_i = \beta \frac{\partial \langle \sigma^{max} \rangle}{\partial \sigma_i} - \gamma \frac{\partial \langle -\sigma^{max} \rangle}{\partial \sigma_i} = \left[\beta \frac{\partial \langle \sigma^{max} \rangle}{\partial \sigma^{max}} - \gamma \frac{\partial \langle -\sigma^{max} \rangle}{\partial \sigma^{max}} \right] \frac{\partial \sigma^{max}}{\partial \sigma_i}$$

$$\Im_i = \left[\beta \frac{\langle \sigma^{max} \rangle}{|\sigma^{max}|} - \gamma \frac{\langle -\sigma^{max} \rangle}{|\sigma^{max}|} \right] \frac{\partial \sigma^{max}}{\partial \sigma_i} = \delta \frac{\partial \sigma^{max}}{\partial \sigma_i} \qquad \text{(IV.64)}$$

donde *:

$$\langle \pm \sigma^{max} \rangle = \frac{1}{2} \left(\sigma^{max} \pm |\sigma^{max}| \right)$$

$$\sigma^{max} = \frac{I_1}{3} + \frac{2\sqrt{J_2}}{\sqrt{3}} sin \left(\theta + \frac{2\pi}{3} \right)$$

$$\frac{\partial \sigma^{max}}{\partial \sigma_i} = \frac{I_1}{3} + \frac{s_i}{\sqrt{3J_2}} sin \left(\theta + \frac{2\pi}{3} \right) + \frac{cos(\theta + \frac{2\pi}{3})}{cos(3\theta)} \left[\frac{1}{3} + \frac{s_j s_k}{J_2} - \frac{3}{2} \frac{s_i J_3}{(J_2)^2} \right] \quad (*)$$

IV.7.b- Puntos singulares de la superficie de fluencia – definición del vector normal.

La superficie de fluencia que se propone en el (***apart. IV.5***) tiene puntos no alisados donde el vector normal no es único en el sentido dado por Köiter

* *Nota: La derivada de la tensión máxima respecto de las componentes de tensión principal es:*

$$\frac{\partial \sigma^{max}}{\partial \sigma_i} = \frac{\partial \sigma^{max}}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \sigma_i} + \frac{\partial \sigma^{max}}{\partial (J_2)^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial (J_2)^{\frac{1}{2}}}{\partial \sigma_i} + \frac{\partial \sigma^{max}}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \sigma_i}$$

$$\frac{\partial \sigma^{max}}{\partial \sigma_i} = \frac{I_1}{3} \frac{\partial I_1}{\partial \sigma_i} + \frac{2}{\sqrt{3}} sin \left(\theta + \frac{2\pi}{3} \right) \frac{\partial (J_2)^{\frac{1}{2}}}{\partial \sigma_i} + \frac{2\sqrt{J_2}}{\sqrt{3}} cos \left(\theta + \frac{2\pi}{3} \right) \frac{\partial \theta}{\partial \sigma_i}$$

$$\text{con}: \quad \frac{\partial I_1}{\partial \sigma_i} = 1 \quad ; \quad \frac{\partial (J_2)^{\frac{1}{2}}}{\partial \sigma_i} = \frac{s_i}{2\sqrt{J_2}} \quad ; \quad \frac{\partial (J_3)}{\partial \sigma_i} = s_j s_k + \frac{J_2}{3}$$

[71] (***apart. Ap-I.3.h***). Estos puntos singulares se encuentran **fig.(IV.14)**: **a)** donde la tensión normal máxima cambia de dirección, en los tres meridianos de compresión máxima, y en los meridianos de tracción máxima y **b)** donde la tensión normal máxima cambia de signo, en la intersección de la superficie de fluencia con los tres planos que definen el octante de compresión triaxial en el espacio de tensiones principales: $[\sigma_1 = 0, \sigma_2 < 0, \sigma_3 < 0]$, $[\sigma_1 < 0, \sigma_2 = 0, \sigma_3 < 0]$ y $[\sigma_1 < 0, \sigma_2 < 0, \sigma_3 = 0]$.

• Primer caso de singularidad.

En la intersección de cada uno de los tres planos meridanos de compresión máxima y de tracción máxima, con la superficie de fluencia, se presenta una definición múltiple de su vector normal, configurando un típico caso de simetría respecto de cada plano meridiano. Esta situación se resuelve definiendo un *vector normal intermedio*, comprendido entre los dos simétricos, que tenga dos de las tres componentes iguales **fig.(IV.14,a)**. Por ejemplo, en el meridiano de compresión $[\sigma_3 < \sigma_2 = \sigma_1 \ \ o \ \ \theta = \frac{\pi}{6}]$, se presentan dos vectores simétricos y normales a la superficie de fluencia **fig.(IV.14,a)**:

$$\begin{aligned} &\textit{para la sup. (1)}: \quad \frac{\partial \mathcal{F}^{(1)}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\bigg|_{+\frac{\pi}{6}} = \left\{ \frac{\partial \mathcal{F}^{(1)}}{\partial \sigma_1} \quad \frac{\partial \mathcal{F}^{(1)}}{\partial \sigma_2} \quad \frac{\partial \mathcal{F}^{(1)}}{\partial \sigma_3} \right\}^T \bigg|_{+\frac{\pi}{6}} \\ &\textit{para la sup. (2)}: \quad \frac{\partial \mathcal{F}^{(2)}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\bigg|_{+\frac{\pi}{6}} = \left\{ \frac{\partial \mathcal{F}^{(2)}}{\partial \sigma_1} \quad \frac{\partial \mathcal{F}^{(2)}}{\partial \sigma_2} \quad \frac{\partial \mathcal{F}^{(2)}}{\partial \sigma_3} \right\}^T \bigg|_{+\frac{\pi}{6}} \end{aligned} \qquad \textit{(IV.65)}$$

donde sus componentes tienen la siguiente característica:

$$\frac{\partial \mathcal{F}^{(1)}}{\partial \sigma_3}\bigg|_{+\frac{\pi}{6}} \equiv \frac{\partial \mathcal{F}^{(2)}}{\partial \sigma_3}\bigg|_{+\frac{\pi}{6}}$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}^{(1)}}{\partial \sigma_1}\bigg|_{+\frac{\pi}{6}} \equiv \frac{\partial \mathcal{F}^{(2)}}{\partial \sigma_2}\bigg|_{+\frac{\pi}{6}}$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}^{(1)}}{\partial \sigma_2}\bigg|_{+\frac{\pi}{6}} \equiv \frac{\partial \mathcal{F}^{(2)}}{\partial \sigma_1}\bigg|_{+\frac{\pi}{6}}$$

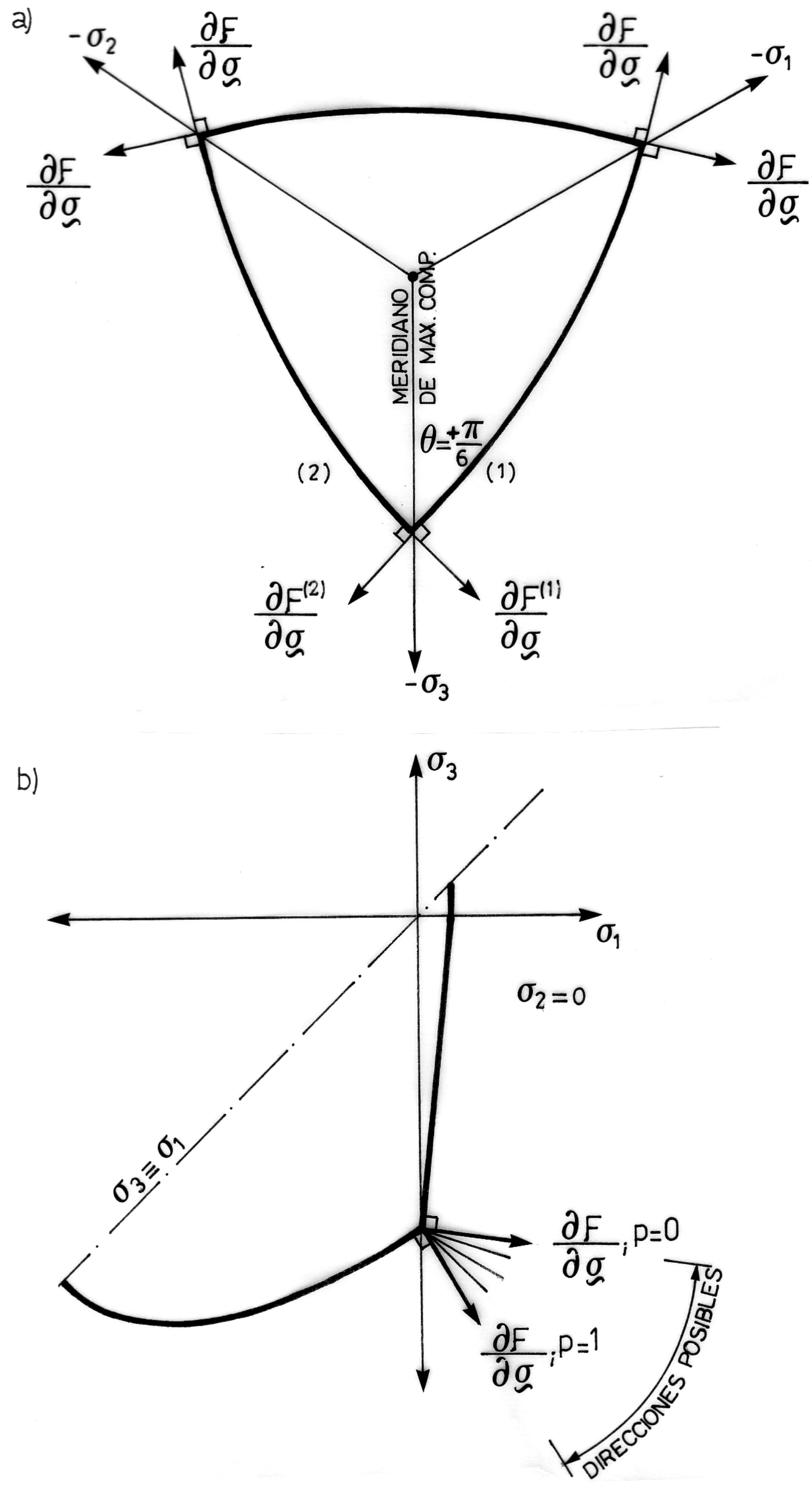

fig.(IV.14): Tipos de singularidades que presenta la función de fluencia plástica (*apart. IV.5*): a) Plano octaédrico: singularidades en los tres meridianos de compresión; b) Plano $(\sigma_1 - \sigma_3)$, $\sigma_2 = 0$: singularidades en la intersección con el octante de compresión.

permitiendo definir un nuevo vector normal único, comprendido entre los dos vectores antes citados es decir:

$$\left.\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right|_{+\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{2}\left.\left[\frac{\partial \mathcal{F}^{(1)}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial \mathcal{F}^{(2)}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right]\right|_{+\frac{\pi}{6}} \tag{IV.66}$$

donde:

$$\left.\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma_1}\right|_{+\frac{\pi}{6}} \equiv \left.\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma_2}\right|_{+\frac{\pi}{6}}$$

Se puede extender este criterio a todos los casos de singularidad que se presentan en los tres meridianos de compresión máxima y tracción máxima.

• **Segundo caso de singularidad**.

En la intersección de la superficie de fluencia con el octante de compresión total, se presenta otra situación de discontinuidad en las derivadas. Esta singularidad afecta a los estados de tensión biaxial que coinciden con los planos del octante de compresión total, como así también a los problemas uniaxiales de compresión. Para un estado tensional del tipo $[\sigma_3 \leq \sigma_2 < \sigma_1]$, se tiene un vector normal a la superficie de fluencia, cuyas componentes principales están definidas por la *ec.(IV.63)*:

$$f_i = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma_i} = \frac{1}{1-\alpha}\left[\frac{3\ s_i}{2\ \sqrt{3J_2}} + \alpha + \Im_i\right] \tag{IV.67}$$

donde $\Im_i = \beta$ si $\sigma_1 > 0$ *ec.(IV.64)*, $\Im_i = \gamma$ si $\sigma_1 < 0$ *ec.(IV.64)* y $\Im_i$ está indeterminado entre β y γ para $\sigma_1 = 0$ **fig.(IV.14,b)**. La indeterminación de este *parámetro de influencia* provoca la indeterminación de las componentes f_i del vector normal a la superficie. En estos casos de indeterminación, se puede recurrir a estudios experimentales para decidir su dirección más apropiada. Para ello, en este modelo constitutivo se ha considerado una formulación cuasi-empírica que decide la magnitud del parámetro $\Im_i$:

$$\text{Si: } \sigma_1 = 0 \;\Rightarrow\; \Im_i = \delta \;\frac{\partial \sigma^{max}}{\partial \sigma_i} = [\beta\;(1-p) + \gamma\;p]\;\frac{\partial \sigma^{max}}{\partial \sigma_i}\;; \quad \forall \;\; 0 \leq p \leq 1 \qquad \textit{(IV.68)}$$

En el caso de trabajar con plasticidad asociada, este criterio permite seleccionar, para estados de *compresión uniaxial*, un flujo normal a la superficie de fluencia definida en el cuadrante de compresión $(p = 1 \;\rightarrow\; \Im_i = \gamma)$ **fig.(IV.14,b)**, situación que coincide con los resultados experimentales de Andenaes [1]. De aquí , para un estado tensional del tipo $[\sigma_3 < \sigma_2 = \sigma_1 = 0]$, resulta a partir de las *ecs.(IV.67) y (IV.68)* el siguiente vector normal:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma_1} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma_2} = \frac{1}{1-\alpha}\left[\frac{1}{2} \;+\; \alpha \;+\; \gamma\right] \quad , \quad \text{con: } \; p = 1 \\ &\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma_3} = \frac{1}{1-\alpha}\,[-1 \;+\; \alpha] \;=\; -1 \end{aligned} \qquad \textit{(IV.69)}$$

Aprovechando esta expresión del vector normal a la superficie de fluencia, resulta de particular interés conocer la relación que hay entre las deformaciones longitudinal-transversal, para un problema de compresión uniaxial. En el caso de trabajar con plasticidad asociada $\mathcal{G} = \mathcal{F}$, el vector normal a la superficie de fluencia *ec.(IV.69)* pasa a trabajar como vector de flujo plástico, y a partir de él se obtiene el incremento temporal de deformación plástica $\dot{\epsilon}_3^p$, en la dirección de la carga, y $\dot{\epsilon}_1^p$ en la dirección normal al incremento anterior. Así se tiene:

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_1^p \;&=\; \dot{\epsilon}_1 \;-\; \dot{\epsilon}_1^e \\ \dot{\epsilon}_3^p \;&=\; \dot{\epsilon}_3 \;-\; \dot{\epsilon}_3^e \end{aligned} \qquad \textit{(IV.70)}$$

donde:

$$\dot{\epsilon}_i^e = \frac{1}{E_S}\left[\dot{\sigma}_i - \nu(\dot{\sigma}_j + \dot{\sigma}_k)\right] \;\rightarrow\; \begin{cases} \dot{\epsilon}_1^e = -\dfrac{\nu}{E_S}\dot{\sigma}_3 = -\nu\dfrac{E_T}{E_S}\dot{\epsilon}_3 \\ \\ \dot{\epsilon}_3^e = \dfrac{\dot{\sigma}_3}{E_S} = \dfrac{E_T}{E_S}\dot{\epsilon}_3 \end{cases}$$

$$\dot{\epsilon}_1^p = \dot{\lambda}\;\frac{1}{1-\alpha}\left[\frac{1}{2} \;+\; \alpha \;+\; \gamma\right]$$

$$\dot{\epsilon}_3^p = \dot{\lambda}\;\frac{1}{1-\alpha}\left[-1 \;+\; \alpha\right] \;=\; \dot{\lambda}$$

de donde resulta:

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}\;\frac{1}{1-\alpha}\left[\frac{1}{2} \;+\; \alpha \;+\; \gamma\right] \;&=\; \dot{\epsilon}_1 \;+\; \nu\frac{E_T}{E_S}\dot{\epsilon}_3 \\ -\;\dot{\lambda} \;&=\; \dot{\epsilon}_3\left(1 - \frac{E_T}{E_S}\right) \end{aligned} \qquad \textit{(IV.71)}$$

dividiendo m.a.m estas dos expresiones, se tiene:

$$-\frac{1+2\alpha+2\gamma}{2(1-\alpha)} \;=\; \frac{\dot{\epsilon}_1 \;+\; \nu\frac{E_T}{E_S}\dot{\epsilon}_3}{\dot{\epsilon}_3\left(1 - \frac{E_T}{E_S}\right)} \qquad \textit{(IV.72)}$$

de donde surge la relación de incrementos de deformaciones buscada:

$$-\frac{\dot{\epsilon}_1}{\dot{\epsilon}_3} = -\frac{\dot{\epsilon}_2}{\dot{\epsilon}_3} = \left[\frac{1+2\alpha+2\gamma}{2(1-\alpha)}\right]\left(1 - \frac{E_T}{E_S}\right) + \nu\left(\frac{E_T}{E_S}\right) = \nu^* \qquad \textit{(IV.73)}$$

donde ν^* recibe le nombre de *módulo de Poisson ficticio* que depende el proceso elasto-plástico que se desarrolla.

IV.7.c- Vector normal a la superficie de fluencia plástica expresado según la forma de Nayak-Zienkiewicz (*anexo-F*).

Resulta de particular interés, para el cálculo numérico, la expresión del vector normal a la superficie de fluencia dada por Nayak-Zienkiewicz (***anexo-F***). Para ello, a partir de la *ec.(IV.63)* y la *ec.(IV.64)*, se tiene:

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{J_2}} \begin{Bmatrix} s_{11} \\ s_{22} \\ s_{33} \\ 2\tau_{23} \\ 2\tau_{31} \\ 2\tau_{12} \end{Bmatrix} + \alpha \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \delta \frac{\partial \sigma^{max}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \qquad \text{(IV.74)}$$

comparando ésta, con la *ec.(An-F.4)*, resulta:

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \sqrt{3}\, \boldsymbol{f}_2 + \alpha\, \boldsymbol{f}_1 + \delta \frac{\partial \sigma^{max}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \qquad \text{(IV.75)}$$

sustituyendo en ésta, la derivada $\frac{\partial \sigma^{max}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$ por su expresión *ec.(IV.64 *)*, resulta:

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \sqrt{3}\, \boldsymbol{f}_2 + \alpha\, \boldsymbol{f}_1 + $$
$$+\delta \left[\frac{1}{3}\boldsymbol{f}_1 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}} sin(\theta + \frac{2\pi}{3}) + \frac{3J_3}{(J_2)^{\frac{3}{2}}} \frac{cos(\theta + \frac{2\pi}{3})}{cos(3\theta)} \right) \boldsymbol{f}_2 - \frac{1}{J_2} \frac{cos(\theta + \frac{2\pi}{3})}{cos(3\theta)}\, \boldsymbol{f}_3 \right] \qquad \text{(IV.76)}$$

reordenando ésta, resulta una expresión análoga a la *ec.(An-F.4)*. Esto es:

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{f} = C_1\, \boldsymbol{f}_1 + C_2\, \boldsymbol{f}_2 + C_3\, \boldsymbol{f}_3 \quad ; \quad \forall -\tfrac{\pi}{6} < \theta < \tfrac{\pi}{6} \qquad \text{(IV.77)}$$

siendo los vectores $\boldsymbol{f}_i$ los mismos que los expresados en la *ec.(An-F.4)*, y las constantes C_i iguales a:

$$C_1 = \left(\alpha + \frac{\delta}{3}\right)$$

$$C_2 = \sqrt{3} + \frac{2\delta}{\sqrt{3}}\left[sin(\theta + \frac{2\pi}{3}) - tan(3\theta)\ \ cos(\theta + \frac{2\pi}{3})\right]$$

$$C_3 = -\frac{\delta}{(J_2)}\frac{cos(\theta + \frac{2\pi}{3})}{cos(3\theta)}$$

$$\textit{con :}\ \ \delta = \begin{cases} \gamma & ;\ \textit{sí}\quad \sigma_1 < 0 \\ \beta & ;\ \textit{sí}\quad \sigma_1 > 0 \\ [(1-p)\beta + p\gamma] & ;\ \textit{sí}\quad \sigma_1 = 0 \end{cases}$$

Como era de esperar, las constantes C_2 y C_3 , se indeterminan sobre los meridianos de compresión y tracción, para $\theta = \frac{\pi}{6}$ y para $\theta = -\frac{\pi}{6}$ respectivamente.

• **Indeterminación de la constante** C_2 .

Para solucionar la indeterminación de la constante C_2 , es necesario obtener su valor límite en el meridiano de compresión $\theta \rightarrow +\frac{\pi}{6}$, y en el meridiano de tracción $\theta \rightarrow -\frac{\pi}{6}$. Esto es:

$$C_2 = \sqrt{3} + \frac{2\delta}{\sqrt{3}}\ L \tag{IV.78}$$

siendo:

$$L = \left[sin(\theta + \frac{2\pi}{3}) - tan(3\theta)\ \ cos(\theta + \frac{2\pi}{3})\right]$$

$$L = \frac{sin(\theta + \frac{2\pi}{3})\ \ cos(3\theta)\ \ -\ \ sin(3\theta)\, cos(\theta + \frac{2\pi}{3})}{cos(3\theta)}$$

aplicando a L la regla de L'Hospital, y tomando el límite para cuando: $\theta \rightarrow +\frac{\pi}{6}$, y cuando: $\theta \rightarrow -\frac{\pi}{6}$. Resulta

$$L^{\frac{\pi}{6}} = \lim_{\theta \rightarrow +\frac{\pi}{6}} \left[\frac{2}{3} \; \frac{cos(3\theta) \;\; cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) \; + \; sin(3\theta) \;\; sin(\theta + \frac{2\pi}{3})}{sin(3\theta)} \right] = \frac{1}{3}$$

$$L^{-\frac{\pi}{6}} = \lim_{\theta \rightarrow -\frac{\pi}{6}} \left[\frac{2}{3} \; \frac{cos(3\theta) \;\; cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) \; + \; sin(3\theta) \;\; sin(\theta + \frac{2\pi}{3})}{sin(3\theta)} \right] = \frac{2}{3}$$

de donde surgen las expresiones de C_2 para los dos casos particulares de discontinuidad:

$$\text{para:} \quad \theta = +\tfrac{\pi}{6} \;\Rightarrow\; C_2^{+\frac{\pi}{6}} = \lim_{\theta \rightarrow +\frac{\pi}{6}} \; C_2 = \sqrt{3} + \frac{2\delta}{3\sqrt{3}}$$

$$\text{para:} \quad \theta = -\tfrac{\pi}{6} \;\Rightarrow\; C_2^{-\frac{\pi}{6}} = \lim_{\theta \rightarrow -\frac{\pi}{6}} \; C_2 = \sqrt{3} + \frac{4\delta}{3\sqrt{3}} \qquad \text{(IV.79)}$$

• **Indeterminación de la constante** C_3 .

Para solucionar la indeterminación de la constante C_3 , es necesario obtener su valor límite en el meridiano de compresión $\theta \rightarrow +\frac{\pi}{6}$, y en el meridiano de tracción $\theta \rightarrow -\frac{\pi}{6}$. Esto es:

$$C_3 = -\frac{\delta}{(J_2)} \frac{cos(\theta + \frac{2\pi}{3})}{cos(3\theta)} \qquad \text{(IV.80)}$$

aplicando la regla de L'Hospital, y tomando el límite para cuando: $\theta \rightarrow +\frac{\pi}{6}$, y cuando: $\theta \rightarrow -\frac{\pi}{6}$, surgen las expresiones de C_3 para los dos casos particulares de discontinuidad:

$$
\begin{aligned}
&\textit{para:}\quad \theta=+\tfrac{\pi}{6}\ \Rightarrow\ C_3^{+\frac{\pi}{6}}=\lim_{\theta\to+\frac{\pi}{6}}\left[-\frac{\delta}{(J_2)}\frac{-\,sin(\theta+\frac{2\pi}{3})}{3\ \ sin(3\theta)}\right]=-\ \frac{\delta}{6\ J_2}\\
&\textit{para:}\quad \theta=-\tfrac{\pi}{6}\ \Rightarrow\ C_3^{-\frac{\pi}{6}}=\lim_{\theta\to-\frac{\pi}{6}}\left[-\frac{\delta}{(J_2)}\frac{-\,sin(\theta+\frac{2\pi}{3})}{3\ \ sin(3\theta)}\right]=-\ \frac{\delta}{3\ J_2}
\end{aligned}
\qquad (IV.81)
$$

IV.8.- GENERALIZACION DEL MODELO DE DAÑO PLASTICO PARA PROCESOS CON DEGRADACION DE RIGIDEZ [78].

IV.8.a- Consideraciones generales.

Los resultados experimentales muestran que para procesos de carga, mientras el sólido se encuentra en período elástico, se produce a medida que crece la deformación total un cambio en la rigidez secante que se denomina *degradación elástica de la rigidez*. Este cambio de rigidez secante se manifiesta también durante los procesos plásticos, en función del incremento de deformación plástica, sólo que en esta situación *la degradación plástica* viene acompañada de fenómenos de cambio de cohesión, rozamiento interno y dilatancia.

Físicamente la degradación de la rigidez se inicia con el crecimiento y posterior conexión entre micro-fisuras [130][131] o entre micro-poros existentes en la masa del hormigón. Dentro del contexto de la *mecánica de los medios continuos*, se puede considerar este fenómeno mediante una actualización del tensor de rigidez $\boldsymbol{D}_S$, en función de la evolución de dos variables internas (escalares o tensoriales): **1)** La **variable de degradación elástica** $\hat{\boldsymbol{d}}^e$, y **2)** La **variable de degradación plástica** $\hat{\boldsymbol{d}}^p$. Estas variables tienen una forma similar a la descrita por Simo and Ju [131][131] y por otros investigadores [46][70] pero, a diferencia de éstas, en el caso que se presenta no es necesario definir una *superficie de degradación de rigidez* para formular su regla de evolución.

Se supone una regla de evolución de la *variable de degradación elástica*, a través de la siguiente expresión, en función del incremento de deformación total:

$$\dot{\hat{d}}_i^{\,e} = \hat{\Phi}_i \, \langle \hat{\boldsymbol{k}}_i^T \, \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \rangle \tag{IV.82}$$

donde $\hat{\boldsymbol{k}}_i^T$ es un vector definido en el espacio de tensiones que proporciona la *dirección de degradación* $\dot{\hat{d}}_i^{\,e}$, y $\hat{\Phi}_i$ es un escalar positivo.

La variable de *degradación plástica* está asociada a la deformación plástica, y tiene una regla de evolución general de la siguiente forma:

$$\dot{\hat{d}}_j^{\,p} = \dot{\lambda} \, \hat{H}_j \tag{IV.83}$$

donde $\dot{\lambda}$ es el parámetro de consistencia plástica que interviene en la regla de flujo *ec.(Ap-I.21)*. Haciendo $\hat{H}_j = \hat{\boldsymbol{\ell}}_j^T \dfrac{\partial \mathcal{G}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$ en la *ec.(IV.83)*, se tiene una ecuación de evolución del tipo:

$$\dot{\hat{d}}_j^{\,p} = \hat{\boldsymbol{\ell}}_j^T \, \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \tag{IV.84}$$

donde $\hat{\boldsymbol{\ell}}_j$, es un vector definido en el espacio de tensiones que da la *dirección de degradación* plástica. Este, al igual que $\hat{\boldsymbol{k}}_i$ puede obtenerse a través del gradiente de dos funciones definidas respectivamente en el espacio de tensiones principales. *Estas superficies de degradación*, fueron introducidas inicialmente en el espacio de deformaciones principales por Dougill [46][56] (***cap. 3***) y posteriormente fueron utilizadas en el espacio de tensiones principales, o en ambos espacios a la vez, por distintos investigadores (Bažant and Kim [13][134]), Han and Chen [56] , Simo and Ju [130][131] , Klisinski and Mroz [70] . En el modelo que se presenta, estas superficies quedan implícitamente definidas, adoptando formas muy particulares, que serán tratadas en los siguientes apartados.

IV.8.b- Ecuación constitutiva y rigidez tangente para procesos con degradación.

El fenómeno de degradación de rigidez modifica la ecuación constitutiva elasto-plástica tangente presentada para plasticidad con pequeñas deformaciones en el ***apart. Ap-I.3.c*** *ec.(Ap-I.53)*. Esta debe ser formulada nuevamente, y para ello se partirá definiendo una *energía potencial libre* (a una temperatura dada) compuesta de una parte elástica y otra plástica [79] , de la forma:

$$\Psi(\boldsymbol{\epsilon}^e, \boldsymbol{q}_\alpha, \boldsymbol{q}_\beta) \;=\; \Psi^e(\boldsymbol{\epsilon}^e, \hat{\boldsymbol{d}}^p, \boldsymbol{q}_\beta) \;+\; \Psi^p(\boldsymbol{q}_\alpha) \qquad \text{(IV.85)}$$

Donde, $\Psi^p(\boldsymbol{q}_\alpha)$ es una *función de potencial plástico* y $\Psi^e(\boldsymbol{\epsilon}^e, \hat{\boldsymbol{d}}^p, \boldsymbol{q}_\beta)$ una *función de energía elástica*, siendo: $\boldsymbol{\epsilon}^e$ una *variable libre* del proceso, que representa la deformación elástica en un cierto instante t del proceso cuasi-estático; $\boldsymbol{q}_\alpha$ las *variables internas plásticas* que siguen una ley de evolución del tipo $\dot{\boldsymbol{q}}_\alpha = \dot{\lambda}\, \boldsymbol{H}_\alpha(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{q}_\alpha)$, y que incluyen, entre otras, la deformación plástica $\boldsymbol{\epsilon}^p$ y la degradación plástica $\hat{\boldsymbol{d}}^p$; $\boldsymbol{q}_\beta$ otras *variables internas* entre las que se encuentra la degradación elástica $\hat{\boldsymbol{d}}^e$.

A partir de los principios de la mecánica clásica, se puede escribir la disipación total de energía Ξ mediante la siguiente expresión simplificada de la desigualdad de Clasius-Duhem [79] (disipación reducida):

$$\Xi \;=\; \boldsymbol{\sigma}^T\, \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \;-\; \dot{\Psi} \;\geq\; 0 \qquad \text{(IV.86)}$$

Esta desigualdad expresa el balance de entropía para un continuo de Cauchy, y es válida para cualquier proceso de carga admisible. Haciendo la derivada temporal de la energía libre *ec.(IV.85)*, se tiene:

$$\dot{\Psi} \;=\; \left\{\frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\epsilon}^e}\right\}^T \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e \;+\; \left\{\frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{q}_\alpha}\right\}^T \dot{\boldsymbol{q}}_\alpha \;+\; \left\{\frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{q}_\beta}\right\}^T \dot{\boldsymbol{q}}_\beta$$

$$\dot{\Psi} \;=\; \left\{\frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\epsilon}^e}\right\}^T \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \;-\; \left\{\frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\epsilon}^e}\right\}^T \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \;+\; \left\{\frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{q}_\alpha}\right\}^T \dot{\boldsymbol{q}}_\alpha \;+\; \left\{\frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{q}_\beta}\right\}^T \dot{\boldsymbol{q}}_\beta$$

y sustituyendo esta última en la *ec.(IV.86)*, resulta la siguiente expresión para la disipación:

$$\Xi = \left[\boldsymbol{\sigma}^T - \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\epsilon}^e} \right\}^T \right] \dot{\boldsymbol{\epsilon}} + \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\epsilon}^e} \right\}^T \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p - \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{q}_\alpha} \right\}^T \dot{\boldsymbol{q}}_\alpha - \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{q}_\beta} \right\}^T \dot{\boldsymbol{q}}_\beta \geq 0 \tag{IV.87}$$

Para garantizar el cumplimiento de la desigualdad de Clasius-Duhem *ec.(IV.87)*, cualquiera sea el incremento temporal de deformación $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ durante el proceso de carga, y siempre que el proceso de descarga sea elástico no-degradable, debe ocurrir necesariamente que:

$$\left[\boldsymbol{\sigma}^T - \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\epsilon}^e} \right\}^T \right] = 0 \qquad ; \quad \forall \quad \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \tag{IV.88}$$

de donde se deduce que la tensión vale:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\epsilon}^e} \tag{IV.89}$$

En particular, para un sólido elasto-plástico que exhibe un comportamiento elástico lineal con degradación de rigidez, la *energía libre* *ec.(IV.85)* puede ser escrita como:

$$\Psi(\boldsymbol{\epsilon}^e, \boldsymbol{q}_\alpha, \boldsymbol{q}_\beta) = \frac{1}{2} \, (\dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p)^T \, \boldsymbol{D}_S(\hat{\boldsymbol{d}}^e, \hat{\boldsymbol{d}}^p) \; (\dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p) + \Psi^p(\boldsymbol{q}_\alpha) \tag{IV.90}$$

donde $\boldsymbol{D}_S(\hat{\boldsymbol{d}}^e, \hat{\boldsymbol{d}}^p)$ es el tensor de rigidez secante, de cuarto orden, que depende de las variables de degradación elástica y plástica.

Sustituyendo la *ec.(IV.90)* en la *ec.(IV.89)*, queda expresada la ecuación constitutiva para un sólido elasto-plástico, a partir de la rigidez secante:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{D}_S(\hat{\boldsymbol{d}}^e, \hat{\boldsymbol{d}}^p) \; (\dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p) \tag{IV.91}$$

resultando de aquí una ley constitutiva incremental, tangente, para un proceso de carga elasto-plástico:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \left[\frac{\partial \boldsymbol{D}_S}{\partial \hat{\boldsymbol{d}}^e} \dot{\hat{\boldsymbol{d}}}^e + \frac{\partial \boldsymbol{D}_S}{\partial \hat{\boldsymbol{d}}^p} \dot{\hat{\boldsymbol{d}}}^p \right] (\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}^p) + \boldsymbol{D}_S \; (\dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p) \tag{IV.92}$$

reagrupando los sumandos, se puede escribir la relación incremental tangente *ec.(IV.92)* en forma análoga a la *ec.(Ap-I.49)*:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{C}_T^e(\hat{\boldsymbol{d}}^e, \hat{\boldsymbol{d}}^p) \; \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \boldsymbol{C}_T^p(\hat{\boldsymbol{d}}^e, \hat{\boldsymbol{d}}^p) \; \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \dot{\boldsymbol{\sigma}}^e - \dot{\boldsymbol{\sigma}}^p \tag{IV.93}$$

siendo:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^e = \boldsymbol{C}_T^e \; \dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \boldsymbol{D}_S \; \dot{\boldsymbol{\epsilon}} + \frac{\partial \boldsymbol{D}_S}{\partial \hat{\boldsymbol{d}}^e} \dot{\hat{\boldsymbol{d}}}^e \; (\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}^p) = \boldsymbol{D}_S \; \dot{\boldsymbol{\epsilon}} + \left[\sum_i \frac{\partial \boldsymbol{D}_S}{\partial \hat{d}_i^e} \; \dot{\hat{d}}_i^e \right] \boldsymbol{D}_S^{-1} \boldsymbol{\sigma} \tag{IV.94}$$

donde $\dot{\boldsymbol{\sigma}}^e$ es el *incremento de tensión elástico degradado*, que es igual al *incremento de tensión total* más el *incremento de tensión provocado por la degradación elástica*; y siendo:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^p = \boldsymbol{C}_T^p \; \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \boldsymbol{D}_S \; \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p - \frac{\partial \boldsymbol{D}_S}{\partial \hat{\boldsymbol{d}}^p} \dot{\hat{\boldsymbol{d}}}^p \; (\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}^p) = \boldsymbol{D}_S \; \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p - \left[\sum_j \frac{\partial \boldsymbol{D}_S}{\partial \hat{d}_j^p} \; \dot{\hat{d}}_j^p \right] \boldsymbol{D}_S^{-1} \boldsymbol{\sigma} \tag{IV.95}$$

donde $\dot{\boldsymbol{\sigma}}^p$ es el *incremento de tensión plástico degradado*, que es igual al *incremento de tensión plástico total* más el *incremento de tensión provocado por la degradación plástica*.

Conviene observar, que para un proceso de carga sin degradación elástica ni plástica $\boldsymbol{C}_T^e \equiv \boldsymbol{C}_T^p \equiv \boldsymbol{D}_S = cte.$, la *ec.(IV.93)* se reduce al caso simple formulado en la *ec.(Ap-I.49)*.

Al igual que en plasticidad clásica ***(apart. Ap-I.3.c)***, para expresar la *ecuación constitutiva elasto-plástica tangente*, es necesario partir de la **condición de consistencia plástica de Prager** ***(apart. Ap-I.3.d)***; esto es:

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma}, c) = f(\boldsymbol{\sigma}) - c = 0 \quad , \tag{IV.96,a}$$

$$\dot{\mathcal{F}}(\boldsymbol{\sigma}, \dot{\boldsymbol{\sigma}}, c, \dot{c}) = \left\{\frac{\partial \mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma}, c)}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right\}^T \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial \mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma}, c)}{\partial c} \dot{c} = 0 \tag{IV.96,b}$$

Sustituyendo la *ec.(IV.96,a)* en la *ec.(IV.96,b)*, se tiene:

$$\left\{\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right\}^T \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \dot{c} \tag{IV.97}$$

y sustituyendo en esta última la *ec.(IV.19)*, resulta:

$$\left\{\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right\}^T \dot{\boldsymbol{\sigma}} = h_c(\boldsymbol{\sigma}, \kappa^p, c) \;\; \dot{\kappa}^p = h_c(\boldsymbol{\sigma}, \kappa^p, c) \left(\boldsymbol{h}_\kappa{}^T(\boldsymbol{\sigma}, \kappa^p, c) \;\; \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p\right) \tag{IV.98}$$

y sustituyendo a su vez en esta última, el incremento de deformación plástica $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p$ por la expresión de su regla de evolución *ec.(IV.3)*, se tiene:

$$\left\{\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right\}^T \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \dot{\lambda} \;\; h_c \quad \left(\boldsymbol{h}_\kappa{}^T \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right) \quad , \tag{IV.99}$$

donde el incremento temporal de tensión, durante un proceso de carga plástica, queda definido por la *ec.(IV.93)*. Así , la *ec.(IV.99)* resulta:

$$\left\{\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right\}^T \boldsymbol{C}_T^e \, \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \dot{\lambda} \left\{\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right\}^T \boldsymbol{C}_T^p \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \dot{\lambda} \, h_c \quad \left(\boldsymbol{h}_\kappa{}^T \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right) \tag{IV.100}$$

agrupando términos se obtiene el *parámetro de consistencia plástica*; esto es:

$$\dot{\lambda}\ \left\{ \left[\left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\}^T \ \boldsymbol{C}_T^p \ \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right] + \left[h_c \ \left(\boldsymbol{h}_\kappa{}^T \ \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) \right] \right\} \ = \ \left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\}^T \ \boldsymbol{C}_T^e \ \dot{\boldsymbol{\epsilon}}$$

$$\dot{\lambda} \ = \ \frac{\left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\}^T \ \boldsymbol{C}_T^e \dot{\boldsymbol{\epsilon}}}{\left[h_c \ \left(\boldsymbol{h}_\kappa{}^T \ \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) \right] + \left[\left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\}^T \ \boldsymbol{C}_T^p \ \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right]} \quad ; \text{con :} \ \dot{\lambda} \geq 0 \qquad \text{(IV.101)}$$

y sustituyendo esta última en la ec.(IV.93), resulta la siguiente relación incremental de tensión-deformación:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} \ = \ \boldsymbol{C}_T^e \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \ - \ \frac{\left[\boldsymbol{C}_T^p \ \left\{ \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\} \right] \ \left[\left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\}^T \ \boldsymbol{C}_T^e \right]}{\left[h_c \ \left(\boldsymbol{h}_\kappa{}^T \ \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) \right] + \left[\left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\}^T \ \boldsymbol{C}_T^p \ \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right]} \ \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \qquad \text{(IV.102)}$$

Pudiéndose escribir finalmente, a partir de esta última, la *ley constitutiva incremental tangente* para un proceso elasto-plástico no-asociado con degradación de rigidez elástica y plástica, como:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} \ = \ \boldsymbol{C}_T^{ep}(\hat{\boldsymbol{d}}^e, \hat{\boldsymbol{d}}^p) \ \ \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \qquad \text{(IV.103)}$$

siendo $\boldsymbol{C}_T^{ep}$ el *tensor de rigidez elasto-plástico tangente del material*, que contempla los fenómenos de degradación elástica y plástica a la vez.

$$\boldsymbol{C}_T^{ep} \ = \ \boldsymbol{C}_T^e - \frac{\left[\boldsymbol{C}_T^p \ \left\{ \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\} \right] \ \left[\left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\}^T \ \boldsymbol{C}_T^e \right]}{\left[h_c \ \left(\boldsymbol{h}_\kappa{}^T \ \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) \right] + \left[\left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\}^T \ \boldsymbol{C}_T^p \ \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right]} \qquad \text{(IV.104)}$$

La rigidez tangente *ec.(IV.104)* será simétrica, si $\boldsymbol{C}_T^e$ es simétrica y si $\boldsymbol{C}_T^p \left\{\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right\}$ es proporcional a $\boldsymbol{C}_T^e \left\{\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right\}$. Se demostrará (en el ***apart. IV.8.f***), que esta proporcionalidad es una forma más general de definir la regla de flujo asociada para procesos con degradación elástica y plástica.

A continuación, se presentan dos formas particulares para formular la degradación de rigidez elástica para obtener $\boldsymbol{C}_T^e$, y una para formular la degradación de rigidez plástica para obtener $\boldsymbol{C}_T^p$.

IV.8.c- Degradación elástica simple.

La hipótesis más simple para considerar la degradación de rigidez que ocurre durante un proceso de carga elástico, ha sido introducida por Kachanov [130] y se basa en utilizar una única *variable de degradación elástica* $\hat{d}^e$, de la que se obtiene el *factor de reducción* de rigidez secante $(1 - \hat{d}^e)$. De acuerdo a esto, la rigidez secante degradada resulta:

$$\boldsymbol{D}_S(\hat{d}^e) \;=\; \left(1 \;-\; \hat{d}^e\right)\; \boldsymbol{D}^0 \qquad \textit{(IV.105)}$$

donde $\boldsymbol{D}^0$ es el tensor de rigidez inicial, $\boldsymbol{D}_S(\hat{d}^e)$ es el tensor de rigidez secante que depende de la variable de degradación elástica $\hat{d}^e$. Esta variable vale $\hat{d}^e = 0$ para un material en su estado inicial no degradado, y $\hat{d}^e = 1$ para un material totalmente degradado. El sentido físico de esta variable está dado por el concepto de *área nominal degradada*, que es la relación que hay entre el área degradada y el área total de una determinada zona del sólido.

Distintos investigadores [1][29][33][34][42][44][74][136] , coinciden en que durante un proceso de carga uniaxial, de compresión o tracción, existe un comportamiento inicial elástico-degradable con módulo de Poisson constante hasta alcanzar el $75{-}80^o/_o$ de la tensión pico de compresión σ_C^{pic} o tracción σ_T^{pic} , respectivamente (***cap. 2***) (este límite puede tomarse para fijar la posición de la *superficie de discontinuidad inicial*). La *ec.(IV.105)* permite cumplir con este requisito hipotético. Así mismo, se admite que a partir de este límite se produce un incremento del módulo de Poisson, acompañado de un proceso de micro-fisuración que colabora en producir mayor degradación (degradación plástica (***apart. IV.8.d***)). En este caso, la *ec.(IV.103)*, provee una relación tensión-deformación que cumple con toda esta hipótesis de comportamiento.

Para estudiar el caso particular de degradación elástica de Kachanov, es necesario sustituir el *tensor de rigidez secante* *ec.(IV.105)* en la *ec.(IV.94)* que da el *incremento de tensión elástico degradado* y en la que resulte de éstas, sustituir la *regla de evolución de la variable de degradación elástica* *ec.(IV.82)*, resultando de aquí :

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{\sigma}}^e &= \boldsymbol{C}_T^e \ \dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \boldsymbol{D}_S(\hat{d}^e) \ \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \left[\boldsymbol{D}^0 \ \hat{\Phi} \ \langle \hat{\boldsymbol{k}}^T \ \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \rangle\right] \ \boldsymbol{D}_S^{-1}(\hat{d}^e) \ \boldsymbol{\sigma} \\
\dot{\boldsymbol{\sigma}}^e &= \boldsymbol{C}_T^e \ \dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \boldsymbol{D}_S(\hat{d}^e) \ \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \left[\boldsymbol{D}^0 \ \hat{\Phi} \ \langle \hat{\boldsymbol{k}}^T \ \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \rangle\right] \ \frac{\left(\boldsymbol{D}^0\right)^{-1}}{(1-\hat{d}^e)} \ \boldsymbol{\sigma} \\
\dot{\boldsymbol{\sigma}}^e &= \boldsymbol{C}_T^e \ \dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \boldsymbol{D}_S(\hat{d}^e) \ \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \frac{\hat{\Phi}}{(1-\hat{d}^e)} \ \langle \hat{\boldsymbol{k}}^T \ \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \rangle \ \boldsymbol{\sigma}
\end{aligned} \qquad \textit{(IV.106)}$$

donde $\boldsymbol{C}_T^e$ es simétrica, sí y sólo sí $\hat{\boldsymbol{k}}$ es proporcional o igual a $\boldsymbol{\sigma}$ (esta es una forma de definir la dirección de la degradación elástica, en la que la degradación de rigidez en un proceso elástico está asociada al *incremento total de trabajo de deformación* * *ec.(Ap-I.23)*).

Si se considera que $\hat{\Phi}$ se mantiene constante durante todo el proceso de carga, y además que $\hat{\boldsymbol{k}}^T \ \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \equiv \boldsymbol{\sigma}^T \ \dot{\boldsymbol{\epsilon}}$, la *ec.(IV.106)* quedaría formulada como sigue:

---

* *Nota: Para el rango de comportamiento elástico degradado, el "incremento total de trabajo de deformación" vale:* $\boldsymbol{\sigma}^T \ \dot{\boldsymbol{\epsilon}} = (1-\hat{d}^e) \ \dot{w}^0$ *, donde* $2 \ w^0 = \boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{D}^0 \boldsymbol{\epsilon}$ *es el cuadrado de la norma de energía de deformación para un punto no dañado* [131] .

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^e \;=\; \boldsymbol{C}^e_T \;\; \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \;=\; \boldsymbol{D}_S(\hat{d}^e) \;\; \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \;-\; \frac{\hat{\Phi}}{(1-\hat{d}^e)} \; \left(\boldsymbol{\sigma}\, \boldsymbol{\sigma}^T \;\right) \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \qquad \text{(IV.107)}$$

Resultando de aquí el tensor de rigidez degradado elásticamente:

$$\boldsymbol{C}^e_T(\hat{d}^e) \;\;=\;\; \boldsymbol{D}_S(\hat{d}^e) \;-\; \frac{\hat{\Phi}}{(1-\hat{d}^e)} \; \left(\boldsymbol{\sigma}\, \boldsymbol{\sigma}^T \;\right) \qquad \text{(IV.108)}$$

- En las ecuaciones antes mencionadas, el *factor de reducción* $(1-\hat{d}^e)$ puede estar formulado a través de cualquier regla de evolución del tipo de la *ec.(IV.82)* que, dependiendo del proceso mismo, produzca la degradación deseada. Aquí se ha hecho la hipótesis de relacionar este factor con el *trabajo de deformación elástico*, resultando la siguiente función de degradación propuesta:

$$\left(1 \;-\; \hat{d}^e\right) \;=\; \left(1 \;-\; \hat{\Phi}\; w^e\right) \qquad \text{(IV.109)}$$

donde $\dot{w}^e \;=\; \boldsymbol{\sigma}^T \; \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e$ es el incremento temporal de *energía específica elástica*. Sustituyendo la *ec.(IV.109)* en la *ec.(IV.105)*, se puede expresar la tensión total como:

$$\boldsymbol{\sigma} \;=\; \boldsymbol{D}_S(\hat{d}^e)\; \boldsymbol{\epsilon}^e \;=\; \boldsymbol{D}^0 \left(1 \;-\; \hat{\Phi}\; w^e\right) \; \boldsymbol{\epsilon}^e \qquad \text{(IV.110)}$$

y el incremento de *energía específica elástica* será :

$$\dot{w}^e = \boldsymbol{\sigma}^T \; \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e = \boldsymbol{\epsilon}^{eT} \; \boldsymbol{D}^0 \left(1 \;-\; \hat{\Phi}\; w^e\right) \; \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e \qquad \text{(IV.111)}$$

de donde surge el *factor de reducción* buscado:

$$\int_{t=0}^{t} \frac{\dot{w}^e}{(1-\hat{\Phi}w^e)}\, dt = \int_{t=0}^{t} \boldsymbol{\epsilon}^{eT}\ \boldsymbol{D}^0\ \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e\ dt$$

$$-\ \frac{1}{\hat{\Phi}}\ ln(1-\hat{\Phi}w^e) = \frac{1}{2}\ \boldsymbol{\epsilon}^{eT}\boldsymbol{D}^0\boldsymbol{\epsilon}^e$$

$$\left(1\ -\ \hat{d}^e\right) = (1-\hat{\Phi}w^e) = e^{-\ (\hat{\Phi}\epsilon^e_{ij}D^0_{ijkl}\epsilon^e_{kl})/2} \qquad \textit{(IV.112)}$$

A partir de ésta, se puede escribir la energía específica de la siguiente forma:

$$w^e\ =\ \frac{1}{\hat{\Phi}}\left(1\ -\ e^{-\ (\hat{\Phi}\epsilon^e_{ij}D^0_{ijkl}\epsilon^e_{kl})/2}\right) \qquad \textit{(IV.113)}$$

y de aquí la tensión valdrá :

$$\frac{dw^e}{d\boldsymbol{\epsilon}^e}\ =\ \boldsymbol{\sigma}\ =\ \boldsymbol{D}^0\ e^{-\ (\hat{\Phi}\epsilon^e_{ij}D^0_{ijkl}\epsilon^e_{kl})/2}\ \boldsymbol{\epsilon}^e \qquad \textit{(IV.114)}$$

por lo tanto, el tensor de rigidez secante resulta:

$$\boldsymbol{D}_S\ (\hat{d}^e)\ =\ (1\ -\ \hat{d}^e)\boldsymbol{D}^0\ \ =\ \boldsymbol{D}^0\ e^{-\ (\hat{\Phi}\epsilon^e_{ij}D^0_{ijkl}\epsilon^e_{kl})/2} \qquad \textit{(IV.115)}$$

Sustituyendo las *ecs.(IV.112), (IV.114), y (IV.115)* en la *ec.(IV.108)* resulta el tensor de rigidez degradado elásticamente, esto es:

$$\boldsymbol{C}_T^e(\hat{d}^e) \;=\; \boldsymbol{D}^0 \; e^{-\;(\hat{\Phi}\epsilon_{ij}^e D_{ijkl}^0 \epsilon_{kl}^e)/2} \;-\; \hat{\Phi}\left(\boldsymbol{\epsilon}^{eT}\boldsymbol{D}^0\boldsymbol{\epsilon}^e\right) \boldsymbol{D}^0 \; e^{-\;(\hat{\Phi}\epsilon_{ij}^e D_{ijkl}^0 \epsilon_{kl}^e)/2}$$

(IV.116)

$$\boldsymbol{C}_T^e(\hat{d}^e) \;=\; \boldsymbol{D}^0 \left[\, 1 \;-\; \hat{\Phi}\left(\boldsymbol{\epsilon}^{eT}\boldsymbol{D}^0\boldsymbol{\epsilon}^e\right)\right] \; e^{-\;(\hat{\Phi}\epsilon_{ij}^e D_{ijkl}^0 \epsilon_{kl}^e)/2}$$

En éstas sólo queda por determinar la magnitud del escalar $\hat{\Phi}$, que será considerado como una constante.

• La determinación de la constante $\hat{\Phi}$, surge de estudios llevados a cabo sobre ensayos unidimensionales. Aplicando la *ec.(IV.115)* a un problema uniaxial, resulta:

$$E_S \;=\; E^0 \; e^{-\;(\hat{\Phi}E^0(\epsilon^e)^2)/2} \qquad \text{(IV.117)}$$

donde E^0 es el módulo de elasticidad inicial (módulo de Young) y E_S es el módulo secante para un cierto instante t del proceso cuasi-estático. Determinando este último módulo para una cierta deformación ϵ_1^e , se puede obtener de la *ec.(IV.117)* la magnitud de $\hat{\Phi}$ **fig.(IV.15)**. Esto es:

$$E_S \;=\; E^1 \;=\; E^0 \; e^{-\;(\hat{\Phi}E^0(\epsilon_1^e)^2)/2} \;\longrightarrow\; \frac{E^1}{E^0} \;=\; e^{-\;(\hat{\Phi}E^0(\epsilon_1^e)^2)/2}$$

$$ln\,\frac{E^1}{E^0} \;=\; -\,\frac{\hat{\Phi}}{2}E^0(\epsilon_1^e)^2$$

$$\hat{\Phi} \;=\; -\,\frac{2}{E^0\;(\epsilon_1^e)^2}\;\; ln\,\frac{E^1}{E^0} \qquad \text{(IV.118)}$$

donde E^1 es el módulo de elasticidad secante, correspondiente al punto donde concluye el período elástico **fig.(IV.15)**.

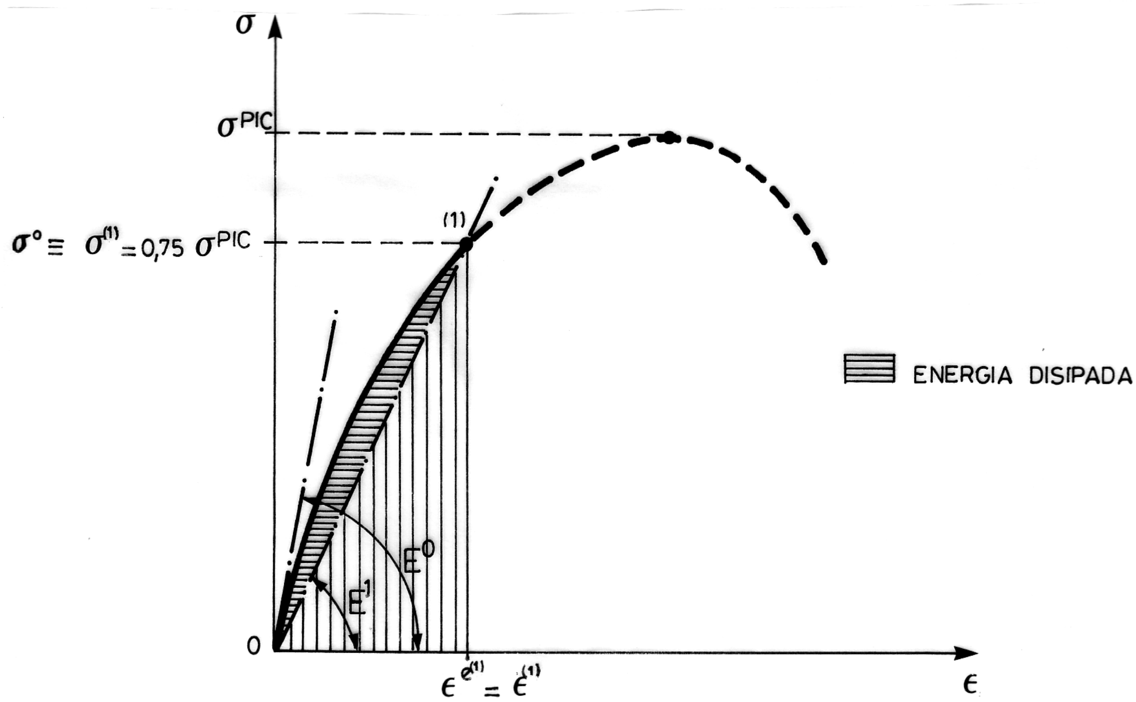

fig.(IV.15): Curva uniaxial de tensión deformación con un período elástico no-lineal.

La energía disipada durante un proceso elástico con degradación de rigidez, será :

$$w^d = \frac{1}{\hat{\Phi}}\left(1 - e^{-(\hat{\Phi}\epsilon^e_{ij}D^0_{ijkl}\epsilon^e_{kl})/2}\right) - \frac{1}{2}\,\boldsymbol{\epsilon}^{eT}\,\boldsymbol{D}^0\,\boldsymbol{\epsilon}^e \qquad \textit{(IV.119)}$$

IV.8.d- Degradación elástica diferenciada.

Algunos investigadores [29][33] , sostienen que la degradación propuesta por Kachanov es insuficiente para representar el comportamiento elástico del hormigón, siendo necesario recurrir a diferentes grados de degradación para el *módulo volumétrico secante* K_S^D , y para el *módulo de corte secante* G_S^D . Este tipo de degradación selectiva, se debe a la diferencia que hay entre las curvas volumétricas $\sigma_{oct} - \epsilon_{oct}$, y la distorsional $\tau_{oct} - \gamma_{oct}$ **fig.(IV.16).**

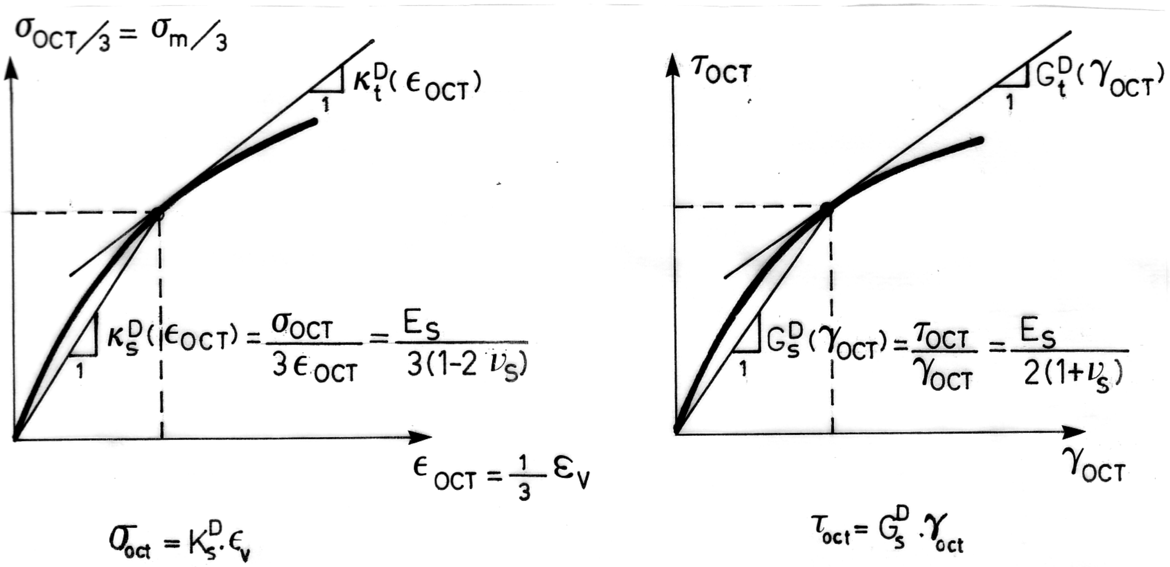

fig.(IV.16): Curva uniaxial de: a) Tensión-deformación octaédrica normal, b) Tensión-deformación octaédrica de corte.

Del mismo modo que para la *degradación simple*, la *degradación diferenciada* puede presentarse como un caso general de la de Kachanov *ec.(IV.105)*. Esto es:

$$
\begin{aligned}
K_S^D(\hat{d}_K^e) &= \left(1 - \hat{d}_K^e\right) K^0 \\
G_S^D(\hat{d}_G^e) &= \left(1 - \hat{d}_G^e\right) G^0
\end{aligned}
\qquad \textit{(IV.120)}
$$

resultando el tensor de rigidez física secante, para un sólido isótropo, de la contribución de una parte volumétrica y otra de corte. Esto es, escrito en la forma de matriz de 6×6 :

$$\boldsymbol{D}_S(\hat{\boldsymbol{d}}^e) \;=\; K_S^D \; \mathbf{1}\,\mathbf{1}^T \;+\; G_S^D \; \boldsymbol{U}\; \boldsymbol{dev}$$

$$\boldsymbol{D}_S(\hat{\boldsymbol{d}}^e) \;=\; (1-\hat{d}_K^e)\; K^0 \; \mathbf{1}\,\mathbf{1}^T \;+\; (1-\hat{d}_G^e)\; G^0 \; \boldsymbol{U}\; \boldsymbol{dev} \tag{IV.121}$$

$$\boldsymbol{D}_S(\hat{\boldsymbol{d}}^e) = \begin{bmatrix} D_S^I & D^{II}{}_S & D^{II}{}_S & 0 & 0 & 0 \\ & D_S^I & D^{II}{}_S & 0 & 0 & 0 \\ & & D_S^I & 0 & 0 & 0 \\ & & & G_S^D & 0 & 0 \\ & \boldsymbol{sim.} & & & G_S^D & 0 \\ & & & & & G_S^D \end{bmatrix} \;; \qquad \begin{aligned} D_S^I &= K_S^D + \frac{4}{3} G_S^D \\ D^{II}{}_S &= K_S^D - \frac{2}{3} G_S^D \end{aligned}$$

y su inversa resulta:

$$\boldsymbol{D}_S^{-1}(\hat{\boldsymbol{d}}^e) \;=\; \frac{1}{9K_S^D}\; \mathbf{1}\,\mathbf{1}^T \;+\; \frac{1}{G_S^D}\; \boldsymbol{U}^{-1}\; \boldsymbol{dev}$$

$$\boldsymbol{D}_S^{-1}(\hat{\boldsymbol{d}}^e) \;=\; \frac{1}{9(1-\hat{d}_K^e)K^0}\; \mathbf{1}\,\mathbf{1}^T \;+\; \frac{1}{(1-\hat{d}_G^e)G^0}\; \boldsymbol{U}^{-1}\; \boldsymbol{dev} \tag{IV.122}$$

donde $\mathbf{1} = \{1,1,1,0,0,0\}^T$ es un vector unidad, $\boldsymbol{dev} = \boldsymbol{I} - \frac{1}{3}\,\mathbf{1}\,\mathbf{1}^T$ es el *operador desviador*, $\boldsymbol{I}$ es la matriz identidad, y:

$$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} 2 & & & & & \\ & 2 & & & \mathbf{0} & \\ & & 2 & & & \\ & & & 1 & & \\ & \mathbf{0} & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \quad ,$$

Para estudiar el caso particular de degradación elástica diferenciada, es necesario sustituir el *tensor de rigidez secante* ec.(IV.121) y su inversa ec.(IV.122) en la ec.(IV.94) que da el *incremento de tensión elástico degradado*, y en la expresión que resulte de éstas, sustituir las *reglas de evolución de las variables de degradación elástica* ec.(IV.82): $\dot{\hat{d}}^e_K = \hat{\Phi}_K \, \langle \hat{\boldsymbol{k}}^T_K \, \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \rangle$, y $\dot{\hat{d}}^e_G = \hat{\Phi}_G \, \langle \hat{\boldsymbol{k}}^T_G \, \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \rangle$, resultando de aquí :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^e = \boldsymbol{C}^e_T \;\; \dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \boldsymbol{D}_S(\hat{\boldsymbol{d}}^e) \;\; \dot{\boldsymbol{\epsilon}} + \left[\frac{\partial \boldsymbol{D}_S(\hat{\boldsymbol{d}}^e)}{\partial \hat{d}^e_K} \, \dot{\hat{d}}^e_K + \frac{\partial \boldsymbol{D}_S(\hat{\boldsymbol{d}}^e)}{\partial \hat{d}^e_G} \, \dot{\hat{d}}^e_G \right] \boldsymbol{D}_S^{-1} \, (\hat{\boldsymbol{d}}^e) \, \boldsymbol{\sigma}$$

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\sigma}}^e = \boldsymbol{C}^e_T \;\; \dot{\boldsymbol{\epsilon}} &= \boldsymbol{D}_S(\hat{\boldsymbol{d}}^e) \;\; \dot{\boldsymbol{\epsilon}} + \\ &+ \left[(-K^0 \, \mathbf{1} \, \mathbf{1}^T) \left(\hat{\Phi}_K \langle \hat{\boldsymbol{k}}^T_K \, \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \rangle \right) + (-G^0 \, \boldsymbol{U} \, \boldsymbol{dev}) \left(\hat{\Phi}_G \langle \hat{\boldsymbol{k}}^T_G \, \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \rangle \right) \right] \cdot \\ &\cdot \left[\frac{1}{9(1-\hat{d}^e_K)K^0} \, \mathbf{1} \, \mathbf{1}^T + \frac{1}{(1-\hat{d}^e_G)G^0} \, \boldsymbol{U}^{-1} \, \boldsymbol{dev} \right] \boldsymbol{\sigma} \end{aligned} \tag{IV.123}$$

operando algebraicamente con ésta, y teniendo en cuenta que: $\boldsymbol{dev} \, \mathbf{1} \, \mathbf{1}^T = 0$; $\boldsymbol{U} \, \boldsymbol{dev} \, \boldsymbol{U}^{-1} \, \boldsymbol{dev} = \boldsymbol{dev} \, \boldsymbol{dev} = \boldsymbol{dev}$; $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{dev} \, \boldsymbol{\epsilon}$; $(\mathbf{1} \, \mathbf{1}^T) \, (\mathbf{1} \, \mathbf{1}^T) = 3 \, (\mathbf{1} \, \mathbf{1}^T)$; $\sigma_{oct} = \frac{1}{3} \, \mathbf{1}^T \, \boldsymbol{\sigma}$; $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{dev} \, \boldsymbol{\sigma}$; la ec.(IV.123) resulta:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^e = \boldsymbol{C}^e_T \;\; \dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \boldsymbol{D}_S(\hat{\boldsymbol{d}}^e) \;\; \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \frac{\hat{\Phi}_K}{(1-\hat{d}^e_K)} \, \langle \hat{\boldsymbol{k}}^T_K \, \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \rangle \, \sigma_{oct} \, \mathbf{1} - \frac{\hat{\Phi}_G}{(1-\hat{d}^e_G)} \, \langle \hat{\boldsymbol{k}}^T_G \, \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \rangle \, \boldsymbol{s} \tag{IV.124}$$

donde $\boldsymbol{C}^e_T$ será simétrica durante todo el proceso de degradación elástica, si y sólo si $\hat{\boldsymbol{k}}_K = \sigma_{oct} \, \mathbf{1}$ y $\hat{\boldsymbol{k}}_G = \boldsymbol{s}$ *. En otras palabras, la degradación de

* *Nota: Estas dos formas de definir las direcciones de degradación elástica, contienen implícitamente "dos funciones de degradación": una para la parte volumétrica y otra para la parte de corte.*

rigidez volumétrica y distorsional están asociadas al incremento de trabajo de deformación volumétrico y distorsional, respectivamente.

Si se considera que $\hat{\Phi}_K$ y $\hat{\Phi}_G$ son constantes durante el proceso de carga, y además que: $\hat{\boldsymbol{h}}_K^T \, \dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \sigma_{oct} \mathbf{1}^T \, \dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ y que: $\hat{\boldsymbol{h}}_G^T \, \dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \boldsymbol{s}^T \, \dot{\boldsymbol{\epsilon}}$, se tiene que la *ec.(IV.124)* quedaría formulada como sigue:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^e = \boldsymbol{C}_T^e \; \dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \boldsymbol{D}_S(\hat{\boldsymbol{d}}^e) \; \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \frac{\hat{\Phi}_K}{(1-\hat{d}_K^e)} \, (\sigma_{oct} \, \mathbf{1}) \, (\mathbf{1}^T \, \sigma_{oct}) \, \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \frac{\hat{\Phi}_G}{(1-\hat{d}_G^e)} \, \boldsymbol{s} \, \boldsymbol{s}^T \; \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \tag{IV.125}$$

Se puede deducir inmediatamente, que la anterior se cumple cualquiera sea el $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ impuesto, resultando así el tensor de rigidez degradado elásticamente:

$$\boldsymbol{C}_T^e = \boldsymbol{D}_S(\hat{\boldsymbol{d}}^e) - \frac{\hat{\Phi}_K}{(1-\hat{d}_K^e)} \, (\sigma_{oct} \, \mathbf{1}) \, (\mathbf{1}^T \, \sigma_{oct}) - \frac{\hat{\Phi}_G}{(1-\hat{d}_G^e)} \, \boldsymbol{s} \, \boldsymbol{s}^T \tag{IV.126}$$

donde:

$$\sigma_{oct} = \frac{1}{3} \, \mathbf{1}^T \, \boldsymbol{\sigma} = K_S^D(\hat{d}_K^e) \, \epsilon_v = \left(1 - \hat{d}_K^e\right) \, K^0 \, \epsilon_v$$

$$\tau_{oct} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{s}^T \, \boldsymbol{s}}{3}} = G_S^D(\hat{d}_G^e) \, \gamma_{oct} = \left(1 - \hat{d}_G^e\right) \, G^0 \, \gamma_{oct}$$

$$\epsilon_v = \mathbf{1}^T \, \boldsymbol{\epsilon}$$

$$\frac{\gamma_{oct}}{2} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{e}^T \, \boldsymbol{e}}{3}}$$

- En las ecuaciones antes mencionadas, los dos *factores de reducción* $\left(1 - \hat{d}^e_K\right)$ y $\left(1 - \hat{d}^e_G\right)$, pueden estar directamente relacionados con el *trabajo elástico de deformación volumétrica* y con el *trabajo elástico de deformación distorsional*, respectivamente. A continuación se propondrá una regla de evolución, para cada una de estas dos variables internas de degradación elástica, que cumpla con la ley general presentada en la *ec.(IV.82)*.

Factor de reducción volumétrico: Se propone la siguiente función de degradación del módulo volumétrico:

$$\left(1 - \hat{d}^e_K\right) = \left(1 - \hat{\Phi}_K \, w^e_K\right) \qquad \text{(IV.127)}$$

donde $\dot{w}^e_K = \sigma_{oct} \, \dot{\epsilon}^e_v$ es el incremento temporal de *energía específica elástica volumétrica*. Sustituyendo la *ec.(IV.127)* en la *ec.(IV.120)*, se puede expresar la tensión normal octaédrica como:

$$\sigma_{oct} = K^D_S(\hat{d}^e_K)\epsilon^e_v = K^0 \left(1 - \hat{\Phi}_K \, w^e_K\right) \epsilon^e_v \qquad \text{(IV.128)}$$

y el incremento de *energía específica elástica volumétrica* será :

$$\dot{w}^e_K = \sigma_{oct} \, \dot{\epsilon}^e_v = K^0 \left(1 - \hat{\Phi}_K \, w^e_K\right) \epsilon^e_v \, \dot{\epsilon}^e_v \qquad \text{(IV.129)}$$

de donde surge el *factor de reducción* buscado:

$$\int_{t=0}^{t} \frac{\dot{w}^e_K}{(1 - \hat{\Phi}_K w^e_K)} \, dt = \int_{t=0}^{t} K^0 \, \epsilon^e_v \, \dot{\epsilon}^e_v \, dt$$

$$-\ \frac{1}{\hat{\Phi}_K}\ ln(1-\hat{\Phi}_K w_K^e) = \frac{1}{2}\ K^0 \epsilon_v^{e\,2}$$

$$\left(1\ -\ \hat{d}_K^e\right) = (1-\hat{\Phi}_K w_K^e) = e^{-\ (\hat{\Phi}_K K^0 \epsilon_v^{e\,2})/2} \qquad \text{(IV.130)}$$

a partir de ésta, se puede escribir la energía específica volumétrica, de la siguiente forma:

$$w_K^e\ =\ \frac{1}{\hat{\Phi}_K}\left(1\ -\ e^{-\ (\hat{\Phi}_K K^0 \epsilon_v^{e\,2})/2}\right) \qquad \text{(IV.131)}$$

y de aquí la tensión normal octaédrica valdrá :

$$\frac{dw_K^e}{d\epsilon_v^e}\ =\ \sigma_{oct}\ =\ K^0\ e^{-\ (\hat{\Phi}_K K^0 \epsilon_v^{e\,2})/2}\ \epsilon_v^e \qquad \text{(IV.132)}$$

donde:

$$K_S^D\ (\hat{d}_K^e)\ =\ (1\ -\ \hat{d}_K^e)K^0\ \ =\ K^0\ e^{-\ (\hat{\Phi}_K K^0 \epsilon_v^{e\,2})/2} \qquad \text{(IV.133)}$$

Factor de reducción distorsional: Se propone la siguiente función de degradación del módulo distorsional:

$$\left(1\ -\ \hat{d}_G^e\right)\ =\ \left(1\ -\ 3\hat{\Phi}_G\ w_G^e\right) \qquad \text{(IV.134)}$$

donde $\dot{w}_G^e = \tau_{oct}\ \dot{\gamma}_{oct}^e$ es el incremento temporal de *energía específica elástica distorsional*. Sustituyendo la ec.(IV.134) en la ec.(IV.120), se puede expresar la tensión cortante octaédrica como:

$$\tau_{oct} \;=\; G_S^D(\hat{d}_G^e)\gamma_{oct}^e \;=\; G^0\left(1 \;-\; 3\hat{\Phi}_G\; w_G^e\right)\;\gamma_{oct}^e \tag{IV.135}$$

y el incremento de *energía específica elástica distorsional* será :

$$\dot{w}_G^e = \tau_{oct}\;\dot{\gamma}_{oct}^e = \;G^0\left(1 \;-\; 3\hat{\Phi}_G\; w_G^e\right)\;\gamma_{oct}^e\;\dot{\gamma}_{oct}^e \tag{IV.136}$$

de donde surge el *factor de reducción* buscado:

$$\int_{t=0}^{t}\frac{\dot{w}_G^e}{(1-3\hat{\Phi}_G w_G^e)}\,dt = \int_{t=0}^{t} G^0\;\gamma_{oct}^e\;\dot{\gamma}_{oct}^e\;dt$$

$$-\;\frac{1}{3\hat{\Phi}_G}\;ln(1-3\hat{\Phi}_G w_G^e) = \frac{1}{2}\;G^0{\gamma_{oct}^e}^2$$

$$\left(1\;-\;\hat{d}_G^e\right) = (1-3\hat{\Phi}_G w_G^e) = e^{-\;(3\hat{\Phi}_G G^0 {\gamma_{oct}^e}^2)/2} \tag{IV.137}$$

a partir de ésta, se puede escribir la energía específica distorsional, de la siguiente forma:

$$w_G^e \;=\; \frac{1}{3\hat{\Phi}_K}\left(1\;-\;e^{-\;(3\hat{\Phi}_G G^0 {\gamma_{oct}^e}^2)/2}\right) \tag{IV.138}$$

y de aquí la tensión cortante octaédrica valdrá :

$$\frac{dw_G^e}{d\gamma_{oct}^e} \;=\; \tau_{oct} \;=\; G^0\;e^{-\;(3\hat{\Phi}_G G^0 {\gamma_{oct}^e}^2)/2}\;\gamma_{oct}^e \tag{IV.139}$$

y por lo tanto:

$$\boldsymbol{s} \;=\; \frac{2\;\tau_{oct}}{\gamma^e_{oct}}\;\boldsymbol{e}^e \;=\; 2\;G^0\;e^{-\;(3\hat{\Phi}_G G^0 {\gamma^e_{oct}}^2)/2}\;\boldsymbol{e}^e \tag{IV.140}$$

donde:

$$G^D_S\;(\hat{d}^e_G) \;=\; (1\;-\;\hat{d}^e_G)\;G^0 \;=\; G^0\;e^{-\;(3\hat{\Phi}_G G^0 {\gamma^e_{oct}}^2)/2} \tag{IV.141}$$

Sustituyendo los factores de reducción volumétrico y distorsional *ecs.(IV.130) y (IV.137)*, y las tensiones octaédrica *ec.(IV.132)* y desviadora *ec.(IV.140)* en la *ec.(IV.126)*, resulta la expresión del el tensor de rigidez degradado elásticamente en forma diferenciada, esto es:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{C}^e_T(\hat{\boldsymbol{d}}^e) \;&=\; \boldsymbol{D}_S(\hat{\boldsymbol{d}}^e)\;-\;(1-\hat{d}^e_K)\;\hat{\Phi}_K\;(K^0)^2\;(\epsilon^e_v)^2\;(\mathbf{1}\;\mathbf{1}^T)\;- \\
&-\;(1-\hat{d}^e_G)\;\hat{\Phi}_G\;(2G^0)^2\;\boldsymbol{e}^e\;\boldsymbol{e}^{eT} \\
\boldsymbol{C}^e_T(\hat{\boldsymbol{d}}^e) \;&=\; \boldsymbol{D}_S(\hat{\boldsymbol{d}}^e)\;-\;e^{-\;(\hat{\Phi}_K K^0 \epsilon^{e\,2}_v)/2}\;\hat{\Phi}_K\;(K^0)^2\;(\epsilon^e_v)\;(\mathbf{1}\;\mathbf{1}^T)\;- \\
&-\;e^{-\;(3\hat{\Phi}_G G^0 {\gamma^e_{oct}}^2)/2}\;\hat{\Phi}_G\;(2G^0)^2\;\boldsymbol{e}^e\;\boldsymbol{e}^{eT}
\end{aligned} \tag{IV.142}$$

sustituyendo en ésta la *ec.(IV.121)*, y operando algebraicamente resulta:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{C}^e_T(\hat{\boldsymbol{d}}^e) \;&=\; K^0\;(\mathbf{1}\;\mathbf{1}^T)\left[1-\;\hat{\Phi}_K\;(K^0)\;(\epsilon^e_v)^2\right]\;e^{-\;(\hat{\Phi}_K K^0 \epsilon^{e\,2}_v)/2}\;+ \\
&+\;G^0\;\left[\boldsymbol{U}\;\boldsymbol{dev}\;-\;\hat{\Phi}_G\;4G^0\;\boldsymbol{e}^e\;\boldsymbol{e}^{eT}\right]\;e^{-\;(3\hat{\Phi}_G G^0 {\gamma^e_{oct}}^2)/2}
\end{aligned} \tag{IV.143}$$

- La determinación de las constantes $\hat{\Phi}_K$ y $\hat{\Phi}_G$, surgen de considerar el valor que toman los módulos $K^D_S\;(\hat{d}^e_K)$ y $G^D_S\;(\hat{d}^e_G)$ cuando se alcanza el límite de elasticidad, durante ensayos uniaxiales. Así , a partir de la *ec.(IV.133)* se tiene:

$$K_S^D\ (\hat{d}_K^e)\ =\ (1\ -\ \hat{d}_K^e)K^0\ \ =\ K^0\ e^{-\ (\hat{\Phi}_K K^0 \epsilon_v^{e\,2})/2} \qquad \textit{(IV.144)}$$

tal que en el límite elástico, cuando $\boldsymbol{\epsilon}^e = (\boldsymbol{\epsilon}^e)_1$, se tiene:

$$\hat{\Phi}_K\ =\ \frac{2}{K^0(\epsilon_v^e)_1^2}\ ln\,\frac{(K_S^D)_1}{K^0} \qquad \textit{(IV.145)}$$

siendo $(K_S^D)_1$ el módulo volumétrico secante en límite elástico, y $(\epsilon_v^e)_1$ la deformación volumétrica en el límite de elasticidad. La relación $\frac{(K_S^D)_1}{K^0} \simeq \frac{3}{4}$ en el momento en que se inicia el crecimiento del módulo de Poisson [33] (Límite convencional de inicio de la plasticidad, admitido por el modelo).

A partir de la *ec.(IV.141)* se tiene:

$$G_S^D\ (\hat{d}_G^e)\ =\ (1\ -\ \hat{d}_G^e)\ G^0\ \ =\ G^0\ e^{-\ (3\hat{\Phi}_G G^0 \gamma_{oct}^{e}{}^2)/2} \qquad \textit{(IV.146)}$$

tal que en el límite elástico, cuando $\boldsymbol{\epsilon}^e = (\boldsymbol{\epsilon}^e)_1$, se tiene:

$$\hat{\Phi}_G\ =\ \frac{2}{3G^0(\gamma_{oct}^e)_1^2}\ ln\,\frac{(G_S^D)_1}{G^0} \qquad \textit{(IV.147)}$$

siendo $(G_S^D)_1$ el módulo distorcional secante al límite de elasticidad, y $(\gamma_{oct}^e)_1$ la distorción octaédrica en el límite de elasticidad. La relación $\frac{(G_S^D)_1}{G^0} \simeq \frac{1}{2}$ en el momento en que se inicia el crecimiento del módulo de Poisson [33] (Límite convencional de inicio de la plasticidad, admitido por el modelo)

A partir del ajuste de las constantes $\hat{\Phi}_K$ y $\hat{\Phi}_G$, las *ecs.(IV.133) y (IV.139)* permiten obtener buenos resultados de comportamiento elástico degradado (***cap. 5***). Como alternativa al uso de las *ec.(IV.120)*, existen expresiones empíricas que permiten considerar la degradación de los módulos volumétrico y distorsional [29][33] .

- Por último, para un sólido isótropo y como una alternativa desde un punto de vista operativo, es conveniente presentar el tensor de rigidez secante degradado elásticamente $\boldsymbol{D}_S(\hat{\boldsymbol{d}}^e)$ ec.(IV.121) como:

$$\boldsymbol{D}_S(\hat{\boldsymbol{d}}^e) = \boldsymbol{D}_S\left(E_S(\hat{\boldsymbol{d}}^e), \nu_S(\hat{\boldsymbol{d}}^e)\right) \tag{IV.148}$$

siendo:

$$E_S(\hat{\boldsymbol{d}}^e) = \frac{9\ K_S^D(\hat{d}_K^e)\ G_S^D(\hat{d}_G^e)}{3\ K_S^D(\hat{d}_K^e)\ +\ G_S^D(\hat{d}_G^e)} \tag{IV.149,a}$$

$$\nu_S(\hat{\boldsymbol{d}}^e) = \frac{3\ K_S^D(\hat{d}_K^e)\ -\ 2\ G_S^D(\hat{d}_G^e)}{2\ (3\ K_S^D(\hat{d}_K^e)\ +\ G_S^D(\hat{d}_G^e))} \tag{IV.149,b}$$

$$K_S^D\ (\hat{d}_K^e) = (1 - \hat{d}_K^e)K^0 = K^0\ e^{-\ (\hat{\Phi}_K K^0 \epsilon_v^{e\,2})/2} \tag{IV.149,c}$$

$$G_S^D\ (\hat{d}_G^e) = (1 - \hat{d}_G^e)\ G^0 = G^0\ e^{-\ (3\hat{\Phi}_G G^0 {\gamma_{oct}^e}^2)/2} \tag{IV.149,d}$$

$$K^0 = \frac{E_0}{3\ (1\ -\ 2\nu_0)} \tag{IV.149,e}$$

$$G^0 = \frac{E_0}{2\ (1\ +\ \nu_0)} \tag{IV.149,f}$$

IV.8.e- Degradación plástica.

En este apartado se presenta un modelo simple para tratar el fenómeno de degradación de rigidez que ocurre en el hormigón por efecto de la deformación plástica. Se basa en admitir como hipótesis, que este fenómeno de *degradación plástica* se desarrolla a partir del momento en que se inicia el ablandamiento del material (pérdida de cohesión), situación que coincide con el inicio del período de *macro-fisuración* (límite convencional adoptado por distintos investigadores

[46][123][133]). Así , se formula la rigidez secante en un punto del sólido, en función de la evolución de la cohesión en dicho punto, situación que se confirma con resultados experimentales que muestran claramente que cerca y más allá del pico de tensiones, existe una pérdida de cementación intergranular que se evidencia también como un fenómeno de degradación de la rigidez [46][56]. Este comportamiento se pone de manifiesto cuando de aplican cargas cíclicas **fig.(IV.17)**.

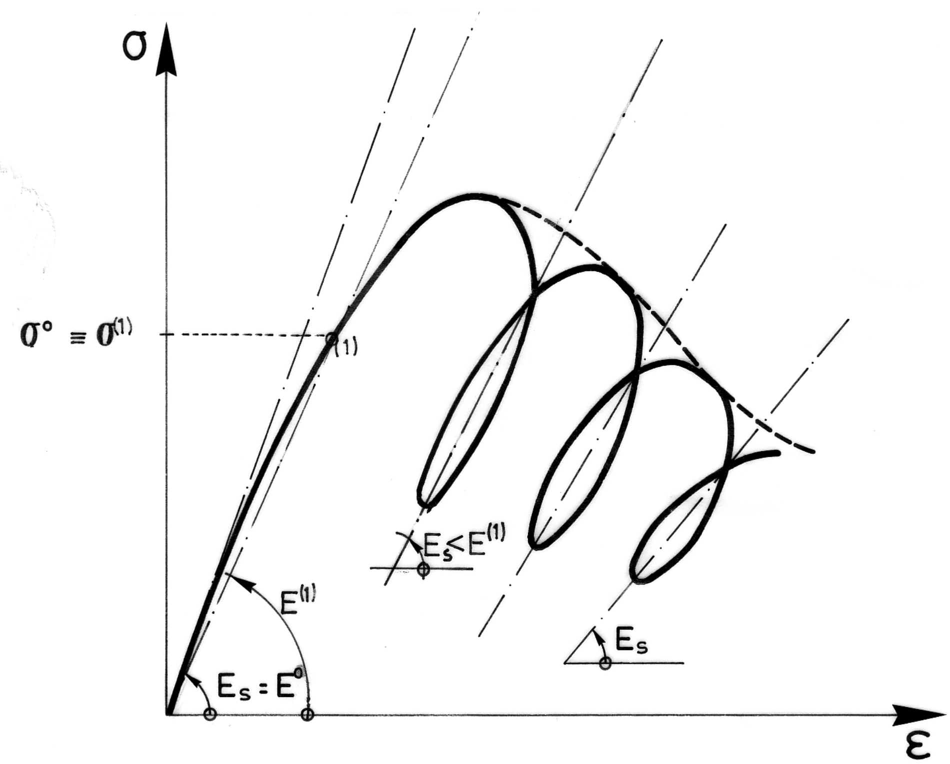

fig.(IV.17): Esquema uniaxial de degradación de la rigidez secante.

Definido el problema con base en la hipótesis antes realizada, se tiene un sola variable de degradación plástica $\hat{\boldsymbol{d}}^p \equiv \hat{d}^p$, que permite formular la *rigidez secante degradada*, por efecto del fenómeno plástico, del siguiente modo:

$$\boldsymbol{D}_S(\hat{d}^p, \hat{\boldsymbol{d}}^e) \;=\; \left(1 \;-\; \hat{d}^p\right)\; \boldsymbol{D}_S(\hat{\boldsymbol{d}}^e) \qquad \textit{(IV.150)}$$

donde $\boldsymbol{D}_S(\hat{d}^p, \hat{\boldsymbol{d}}^e)$ es el tensor de rigidez que resulta de un proceso de degradación elástica y plástica, $\boldsymbol{D}_S(\hat{d}^e)$ es el tensor de rigidez secante degradado elásticamente *ec.(IV.105)*, y $\hat{d}^p$ es la variable de degradación plástica, cuya regla de evolución es la siguiente:

$$\dot{\hat{d}}^p = \frac{(1 - \hat{d}^p)}{c} \langle -\dot{c} \rangle \tag{IV.151}$$

donde c es la cohesión definida según la regla de evolución expresada mediante la *ec.(IV.19)*. El valor inicial de $\hat{d}^p$ será nulo y se mantendrá sin cambios hasta que se inicie el proceso de ablandamiento $(\dot{c} < 0)$, a partir del cual valdrá :

$$\hat{d}^p = 1 - \frac{c}{c^{peak}} \tag{IV.152}$$

Sustituyendo la *ec.(IV.14)* en la *ec.(IV.19)*, y ésta en la *ec.(IV.151)*, resulta:

$$\dot{\hat{d}}^p = \frac{(1 - \hat{d}^p)}{c} \langle - h_c(\boldsymbol{\sigma}, \kappa^p, c) \, \boldsymbol{h}_\kappa^T(\boldsymbol{\sigma}, \kappa^p, c) \, \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \rangle \tag{IV.153}$$

de donde se puede obtener una formulación que se identifica con la regla de evolución general de las variables de degradación plástica *ec.(IV.84)*; esto es:

$$\dot{\hat{d}}^p = \hat{\boldsymbol{\ell}}^T \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \tag{IV.154}$$

donde:

$$\hat{\boldsymbol{\ell}} = \frac{(1 - \hat{d}^p)}{c} \langle - h_c(\boldsymbol{\sigma}, \kappa^p, c) \rangle \; \boldsymbol{h}_\kappa(\boldsymbol{\sigma}, \kappa^p, c) \quad , \tag{IV.155}$$

es un vector, que representa la dirección de *degradación plástica*. Esta forma particular de definir $\hat{\boldsymbol{\ell}}$ lleva implícito una superficie de degradación en el espacio de tensiones.

Sustituyendo la *ec.(IV.154)* y la *ec.(IV.150)* en la *ec.(IV.95)*, resulta el *incremento de tensión plástico degradado* expresado de la siguiente forma:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^p \;=\; \boldsymbol{C}_T^p \;\; \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \;=\; \boldsymbol{D}_S(\hat{d}^p,\hat{\boldsymbol{d}}^e)\;\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p - \frac{\partial \boldsymbol{D}_S(\hat{d}^p,\hat{\boldsymbol{d}}^e)}{\partial \hat{d}^p}\;\dot{\hat{d}}^p\;\boldsymbol{\epsilon}^e$$

(IV.156)

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^p \;=\; \boldsymbol{D}_S(\hat{d}^p,\hat{\boldsymbol{d}}^e)\;\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p - \left[\boldsymbol{D}_S(\hat{\boldsymbol{d}}^e)\;\;\hat{\boldsymbol{\ell}}^T\;\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p\right]\;\frac{\boldsymbol{D}_S^{-1}(\hat{\boldsymbol{d}}^e)}{(1-\hat{d}^p)}\;\boldsymbol{\sigma}$$

y a partir de esta última, se puede escribir el tensor de rigidez degradado plásticamente, como:

$$\boldsymbol{C}_T^p \;=\; \boldsymbol{D}_S(\hat{d}^p,\hat{\boldsymbol{d}}^e) \;-\; \frac{\langle -h_c(\boldsymbol{\sigma},\kappa^p,c)\rangle}{c}\;\;\boldsymbol{\sigma}\;\;\boldsymbol{h}_\kappa^T(\boldsymbol{\sigma},\kappa^p,c) \qquad \textit{(IV.157)}$$

Por simplicidad, en la implementación de estos modelos de degradación (***cap. V***), se ha tenido en cuenta una hipótesis adicional a las ya realizadas, que considera que la degradación elástica y plástica no ocurren simultáneamente (la degradación elástica actúa hasta alcanzar la tensión pico, y luego se hace actuar la degradación plástica), sin embargo la formulación presentada,permite considerar ambos fenómenos a de degradación de rigidez a la vez.

IV.8.f- Regla de flujo asociada para materiales con degradación .

La teoría de la plasticidad clásica, introduce el concepto de *flujo plástico asociado* a través de una regla de normalidad a la superficie de fluencia plástica, la que está definida en el espacio de tensiones mediante la *ec.(Ap-I.22)*. La regla de flujo asociada definida en esta forma, es equivalente el axioma de **máxima disipación plástica (MDP)** para el caso en que la rigidez se mantenga constante [79] . Esta idea sobre plasticidad asociada deja de ser válida para sólidos que sufren degradación de rigidez durante el proceso de carga. Para una definición más general del *flujo asociado*, válido para estos sólidos, es necesario admitir:

• **en primer lugar** que la *energía libre puede ser descompuesta en una parte plástica y otra elástica* ec.(IV.85), situación que permite escribir la disipación total de energía Ξ mediante una expresión simplificada de la desigualdad de Clasius-Duhem ec.(IV.87), esto es:

$$\Xi = \left[\boldsymbol{\sigma}^T - \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\epsilon}^e} \right\}^T \right] \dot{\boldsymbol{\epsilon}} + \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\epsilon}^e} \right\}^T \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p - \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{q}_\alpha} \right\}^T \dot{\boldsymbol{q}}_\alpha - \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{q}_\beta} \right\}^T \dot{\boldsymbol{q}}_\beta \geq 0 \tag{IV.158}$$

pero según la ec.(IV.89), se tiene que la tensión vale: $\boldsymbol{\sigma} = \partial \Psi / \partial \boldsymbol{\epsilon}^e$, tal que sustituída en la expresión anterior, permite formular la desigualdad de Clasius-Duhem como la suma de una disipación elástica más otra plástica. Esto es:

$$\Xi = \Xi^e + \Xi^p \geq 0 \tag{IV.159}$$

donde la *disipación elástica* que se desarrolla durante el proceso de carga, vale:

$$\Xi^e = - \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{q}_\beta} \right\}^T \dot{\boldsymbol{q}}_\beta = - \sum_i \frac{\partial \Psi}{\partial q_{\beta_i}} \dot{q}_{\beta_i} \tag{IV.160}$$

y la *disipación plástica*, que se desarrolla durante el mismo proceso de carga, vale:

$$\Xi^p = \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\epsilon}^e} \right\}^T \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p - \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{q}_\alpha} \right\}^T \dot{\boldsymbol{q}}_\alpha = \boldsymbol{\sigma}^T \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p - \sum_j \frac{\partial \Psi}{\partial q_{\alpha j}} \dot{q}_{\alpha j} \tag{IV.161}$$

considerando además los tipos de degradación elástica y plástica propuesto en los dos apartados anteriores, donde las *variables internas plásticas* son: $\boldsymbol{q}_\alpha = \{\boldsymbol{\epsilon}^p, \hat{\boldsymbol{d}}^p\}$, y las *variables internas elásticas son*: $\boldsymbol{q}_\beta = \{\hat{\boldsymbol{d}}^e\}$, la disipación elástica y plástica, formuladas anteriormente, quedan expresadas respectivamente por las siguientes ecuaciones:

$$\Xi^e = -\left\{\frac{\partial\Psi}{\partial\hat{\boldsymbol{d}}^e}\right\}^T \dot{\hat{\boldsymbol{d}}}^e = -\sum_i \frac{\partial\Psi}{\partial\hat{d}_i^e}\,\dot{\hat{d}}_i^e \qquad \text{(IV.162)}$$

$$\Xi^p = \left\{\frac{\partial\Psi}{\partial\boldsymbol{\epsilon}^e}\right\}^T \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p - \left\{\frac{\partial\Psi}{\partial\hat{\boldsymbol{d}}^p}\right\}^T \dot{\hat{\boldsymbol{d}}}^p - \left\{\frac{\partial\Psi}{\partial\boldsymbol{\epsilon}^p}\right\}^T \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \boldsymbol{\sigma}^T\,\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p - \sum_j \frac{\partial\Psi}{\partial\hat{d}_j^p}\,\dot{\hat{d}}_j^p - \dot{\Psi}^p \qquad \text{(IV.163)}$$

Sustituyendo en estas dos últimas la *energía libre* propuesta en la ec.(IV.90), y luego las *reglas de evolución* de las variables internas de degradación elástica ec.(IV.82) y plástica ec.(IV.84), resultan las siguientes expresiones para la disipación de energía elástica y plástica, respectivamente:

$$\begin{cases} \Xi^e = -\left\{\frac{\partial\Psi}{\partial\hat{\boldsymbol{d}}^e}\right\}^T \dot{\hat{\boldsymbol{d}}}^e = -\frac{1}{2}\,(\dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p)^T\,\frac{\partial\boldsymbol{D}_S(\hat{\boldsymbol{d}}^e, \hat{\boldsymbol{d}}^p)}{\partial\hat{\boldsymbol{d}}^e}\,(\dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p)\;\dot{\hat{\boldsymbol{d}}}^e \\ \Xi^e = -\sum_i \frac{\partial\Psi}{\partial\hat{d}_i^e}\,\dot{\hat{d}}_i^e = -\frac{1}{2}\sum_i \hat{\Phi}_i\,(\dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p)^T\,\frac{\partial\boldsymbol{D}_S(\hat{\boldsymbol{d}}^e, \hat{\boldsymbol{d}}^p)}{\partial\hat{d}_i^e}\,(\dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p)\;\langle\hat{\boldsymbol{k}}_i^T\,\dot{\boldsymbol{\epsilon}}\rangle \end{cases} \qquad \text{(IV.164)}$$

$$
\begin{cases}
\Xi^p = \left\{ \dfrac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\epsilon}^e} \right\}^T \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \; - \; \left\{ \dfrac{\partial \Psi}{\partial \hat{\boldsymbol{d}}^p} \right\}^T \dot{\hat{\boldsymbol{d}}}^p \; - \; \left\{ \dfrac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\epsilon}^p} \right\}^T \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \; = \\[2ex]
\quad = \; (\dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p)^T \, \boldsymbol{D}_S(\hat{\boldsymbol{d}}^e, \hat{\boldsymbol{d}}^p) \, \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \; - \; \dfrac{1}{2} \, (\dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p)^T \, \dfrac{\partial \boldsymbol{D}_S(\hat{\boldsymbol{d}}^e, \hat{\boldsymbol{d}}^p)}{\partial \hat{\boldsymbol{d}}^p} \, (\dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p) \; \dot{\hat{\boldsymbol{d}}}^p \; - \; \dot{\Psi}^p \\[2ex]
\Xi^p = \boldsymbol{\sigma}^T \, \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \; - \; \sum_j \dfrac{\partial \Psi}{\partial \hat{d}_j^p} \; \dot{\hat{d}}_j^p \; - \; \dot{\Psi}^p \; = \\[2ex]
\quad = \; (\dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p)^T \left[\boldsymbol{D}_S(\hat{\boldsymbol{d}}^e, \hat{\boldsymbol{d}}^p) \; - \; \dfrac{1}{2} \sum_j \dfrac{\partial \boldsymbol{D}_S(\hat{\boldsymbol{d}}^e, \hat{\boldsymbol{d}}^p)}{\partial \hat{d}_j^p} \; (\dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p) \; \hat{\boldsymbol{\ell}}_j^T \right] \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \; - \; \dot{\Psi}^p
\end{cases}
$$

(IV.165)

donde la *disipación elástica* se debe al proceso de degradación elástica, y la *disipación plástica* se debe al proceso de degradación plástica, más la energía disipada por el mismo proceso plástico irreversible. La desigualdad de Clasius-Duhem (segunda ley de la termodinámica) *ec.(IV.159)* se satisface siempre que $\Xi^p \geq 0$ y $\Xi^e \geq 0$, cumpliéndose esta última para cada $\hat{d}_i^e$ si se tiene una $\dfrac{\partial \boldsymbol{D}_S(\hat{\boldsymbol{d}}^e, \hat{\boldsymbol{d}}^p)}{\partial \hat{d}_i^e}$ definida negativa (ver la definición de $\boldsymbol{D}_S$ en las *ecs.(IV.105, IV.121)*).

• **y en segundo lugar**, se debe admitir también, que el axioma de la **(MDP)** supone que [79] :

$$
\Xi^p(\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}^p, \boldsymbol{q}_\alpha, \boldsymbol{q}_\beta, \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p, \dot{\boldsymbol{q}}_\alpha) \; \geq \; \Xi^p(\boldsymbol{\epsilon}^* - \boldsymbol{\epsilon}^p, \boldsymbol{q}_\alpha, \boldsymbol{q}_\beta, \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p, \dot{\boldsymbol{q}}_\alpha) \qquad \textit{(IV.166)}
$$

donde $\boldsymbol{\epsilon}^*$ es un estado de deformación que puede ser obtenido a partir de $\boldsymbol{\epsilon}$ por medio de un proceso elástico, ($\boldsymbol{\epsilon}^p = cte.$). En ausencia de degradación de rigidez, se obtiene un caso simple de la desigualdad anterior, la que toma la conocida forma del *segundo postulado* de Drucker *ec.(Ap-I.56)*: $\boldsymbol{\sigma}^T \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \geq \boldsymbol{\sigma}^{*T} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p$.

Desarrollando la desigualdad *(IV.166)* se obtiene una *forma local* del axioma de la **(MDP)**:

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^T \ \frac{\partial \Xi^p}{\partial \boldsymbol{\epsilon}^e} \ \geq \ 0 \tag{IV.167}$$

sustituyendo en esta última la disipación plástica por su expresión *ec.(IV.165)*, resulta:

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^T \ \left[\boldsymbol{D}_S(\hat{\boldsymbol{d}}^e, \hat{\boldsymbol{d}}^p) \ - \ \sum_j \frac{\partial \boldsymbol{D}_S(\hat{\boldsymbol{d}}^e, \hat{\boldsymbol{d}}^p)}{\partial \hat{d}_j^p} \ (\dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p) \ \hat{\boldsymbol{\ell}}_j^T \right] \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \ \geq \ 0 \quad , \tag{IV.168}$$

que puede ser escrita, según la *ec.(IV.95)* y la *ec.(IV.84)*, como:

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^T \ \left[\boldsymbol{C}_T^p(\hat{\boldsymbol{d}}^e, \hat{\boldsymbol{d}}^p) \right] \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \ \geq \ 0 \quad , \tag{IV.169}$$

sustituyendo en ésta la regla de flujo *ec.(IV.3)*, resulta:

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^T \ \boldsymbol{C}_T^p(\hat{\boldsymbol{d}}^e, \hat{\boldsymbol{d}}^p) \ \dot{\lambda} \, \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \ \geq \ 0 \quad , \tag{IV.170}$$

pero en un estado de carga plástica se debe cumplir siempre que $\dot{\lambda} \geq 0$ (ver también las condiciones de Kuhn-Tucker ***apart. Ap-I.3.e***), por lo tanto la ecuación anterior se puede escribir, como:

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^T \ \boldsymbol{C}_T^p(\hat{\boldsymbol{d}}^e, \hat{\boldsymbol{d}}^p) \, \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \ \geq \ 0 \quad , \tag{IV.171}$$

y teniendo en cuenta que, durante la misma situación de carga plástica para que $\dot{\lambda} \geq 0$, se debe cumplir en la *ec.(IV.101)* que:

$$\left[\left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\}^T \boldsymbol{C}_T^e(\hat{\boldsymbol{d}}^e, \hat{\boldsymbol{d}}^p)\, \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \right]^T \geq 0 \rightarrow \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^T \boldsymbol{C}_T^e(\hat{\boldsymbol{d}}^e, \hat{\boldsymbol{d}}^p)\, \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \tag{IV.172}$$

Para que las desigualdades *ec.(IV.171)* y *ec.(IV.172)* se cumplan a la vez, es necesario que exista proporcionalidad entre ambas, o sin perder generalidad exigir su igualdad, esto es:

$$\boldsymbol{C}_T^p(\hat{\boldsymbol{d}}^e, \hat{\boldsymbol{d}}^p)\, \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{C}_T^e(\hat{\boldsymbol{d}}^p, \hat{\boldsymbol{d}}^p)\, \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \tag{IV.173}$$

resultando así, una definición más general de *regla de flujo asociada, válida para materiales con degradación de rigidez*. Se puede verificar que en el caso particular de rigidez secante constante (sin degradación de rigidez): $\boldsymbol{C}_T^p(\hat{\boldsymbol{d}}^p, \hat{\boldsymbol{d}}^p) = \boldsymbol{C}_T^e(\hat{\boldsymbol{d}}^p, \hat{\boldsymbol{d}}^p) = \boldsymbol{D}_S = cte.$, la regla de flujo asociada se reduce a la forma clásica

$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$, ya presentada en el ***Ap-I***.

Para plasticidad asociada con degradación, donde $\boldsymbol{C}_T^p(\hat{\boldsymbol{d}}^p, \hat{\boldsymbol{d}}^p) \neq \boldsymbol{C}_T^e(\hat{\boldsymbol{d}}^p, \hat{\boldsymbol{d}}^p)$, el incremento de tensión *ec.(IV.102)* queda definido por:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{C}_T^e \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \frac{\left[\boldsymbol{C}_T^e \left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\} \right] \left[\left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\}^T \boldsymbol{C}_T^e \right]}{\left[h_c \left(\boldsymbol{h}_\kappa{}^T \underbrace{\boldsymbol{C}_T^{p\,-1} \boldsymbol{C}_T^e \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}}_{\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}} \right) \right] + \left[\left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\}^T \boldsymbol{C}_T^e \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right]} \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \tag{IV.174}$$

donde $\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$ representa el nuevo vector de flujo asociado que tiene en cuenta el fenómeno de degradación de rigidez. De la ecuación anterior resulta la siguiente relación constitutiva tangente, para un proceso elasto-plástico asociado con degradación de rigidez:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{C}_T^{ep} \; \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \tag{IV.175}$$

siendo $\boldsymbol{C}_T^{ep}$ el *tensor de rigidez elasto-plástico tangente del material* para plasticidad asociada, que contempla los fenómenos de degradación elástica y plástica a la vez y puede ser presentado en la siguiente forma:

$$\boldsymbol{C}_T^{ep} = \boldsymbol{C}_T^{e} - \frac{\left[\boldsymbol{C}_T^{e} \left\{\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right\}\right] \left[\left\{\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right\}^T \boldsymbol{C}_T^{e}\right]}{\underbrace{\left[h_c \left(\boldsymbol{h}_\kappa{}^T \boldsymbol{C}_T^{p\,-1} \boldsymbol{C}_T^{e} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right)\right]}_{A} + \left[\left\{\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right\}^T \boldsymbol{C}_T^{e} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right]} \tag{IV.176}$$

Para el caso de la degradación plástica propuesta en en el (***apart. IV.8.e***), el *flujo plástico asociado* toma una forma particular, que puede ser obtenido a partir de la ec.(IV.173). Esto es:

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{C}_T^{p\,-1}(\hat{\boldsymbol{d}}^e, \hat{\boldsymbol{d}}^p)\, \boldsymbol{C}_T^{e}(\hat{\boldsymbol{d}}^p, \hat{\boldsymbol{d}}^p)\, \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \tag{IV.177}$$

sustituyendo en ésta *el tensor de rigidez degradado plásticamente* ec.(IV.157), resulta:

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \left[\boldsymbol{D}_S(\hat{\boldsymbol{d}}^p, \hat{\boldsymbol{d}}^e) - \frac{\langle -h_c(\boldsymbol{\sigma}, \kappa^p, c)\rangle}{c} \; \boldsymbol{\sigma} \; \boldsymbol{h}_\kappa^T(\boldsymbol{\sigma}, \kappa^p, c)\right]^{-1} \boldsymbol{C}_T^{e}(\hat{\boldsymbol{d}}^p, \hat{\boldsymbol{d}}^p)\, \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$$

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{D}_S^{-1}(\hat{\boldsymbol{d}}^p, \hat{\boldsymbol{d}}^e) \left[\boldsymbol{C}_T^{e} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} - \frac{\langle -h_c\rangle\, \boldsymbol{h}_\kappa^T\, \boldsymbol{D}_S^{-1}(\hat{\boldsymbol{d}}^p, \hat{\boldsymbol{d}}^e)\, \boldsymbol{C}_T^{e} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}}{c + \langle -h_c\rangle\, \boldsymbol{h}_\kappa^T\, \boldsymbol{D}_S^{-1}(\hat{\boldsymbol{d}}^p, \hat{\boldsymbol{d}}^e)\, \boldsymbol{\sigma}}\right] \boldsymbol{\sigma} \tag{IV.178}$$

siendo ésta la regla de normalidad asociada a la superficie de fluencia plástica, modificada por la acción de la degradación de la rigidez. A partir de esta definición de flujo plástico asociado, se puede obtener para este caso particular de degradación plástica, el *parámetro de endurecimiento plástico* que se expresa en la ec.(IV.176). Esto es:

$$A = \frac{c \;\; h_c \;\; \boldsymbol{h}_\kappa^T \, \boldsymbol{D}_S^{-1}(\hat{\boldsymbol{d}}^p, \hat{\boldsymbol{d}}^e) \; \boldsymbol{C}_T^e \, \dfrac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}}{c \; + \; \langle -h_c \rangle \, \boldsymbol{h}_\kappa^T \, \boldsymbol{D}_S^{-1}(\hat{\boldsymbol{d}}^p, \hat{\boldsymbol{d}}^e) \; \boldsymbol{\sigma}} \qquad \text{(IV.178)}$$

sustituyendo esta ecuación en la ec.(IV.176), se obtiene el tensor de rigidez elasto-plástico tangente degradado $\boldsymbol{C}_T^{ep}$, para este caso particular de degradación plástica.