UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
ESCOLA TÈCNICA SUPERIOR D'ENGINYERS
DE CAMINS, CANALS I PORTS

UN MODELO DE "DAÑO CONTINUO" PARA MATERIALES FRICCIONALES

TESIS DOCTORAL

Presentada por:
Sergio Horacio OLLER MARTÍNEZ

Dirigida por:
Eugenio OÑATE IBAÑEZ de NAVARRA
y
Javier OLIVER i OLIVELLA

Barcelona – Mayo de 1988.

(CAPITULO IV) ANEXO A

PARTICULARIZACION DE LA VARIABLE DE DAÑO PLASTICO.

An-A.1.- PARTICULARIZACION DE LA VARIABLE DE DAÑO PLASTICO PARA CASOS DE CARGAS ESPECIALES.

An-A.1.a- Introducción.

En el ***capítulo-IV*** (***apart IV.4.a***) se ha definido la *variable de daño plástico* que utiliza el modelo constitutivo presentado en esta tesis. En aquel apartado se presentó la definición de esta variable para procesos de carga uniaxial de tracción y compresión, y luego se la generalizó a procesos de carga multiaxial mediante las *ecs.(IV.14), (IV.15), (IV.16) y (IV.18)*. En este anexo, con el fin de controlar el buen funcionamiento de la definición multiaxial de la variable de daño plástico κ^p , se hará una particularización de ésta para los siguientes casos simples de carga radial: *tracción uniaxial*, *compresión uniaxial*, *problema de compresión biaxial simétrica*, y *problema de corte puro*.

An-A.1.b- Problema de tracción uniaxial.

Dado un estado de tracción pura y simple para un punto de un sólido friccional $0 = \sigma_3 = \sigma_2 < \sigma_1$, resulta de la *ec.(IV.16)* la siguiente expresión para el incremento temporal de la variable de daño plástico:

$$\dot{\kappa}^p = \sum_{i=1}^{3} \left[(h_{\kappa i})_T \;+\; (h_{\kappa i})_C \right] \; \dot{\epsilon}_i^p \quad ,$$

$$\dot{\kappa}^p = (h_{\kappa 1})_T \dot{\epsilon}_1^p + \underbrace{(h_{\kappa 2})_T \dot{\epsilon}_2^p}_{=0} + \underbrace{(h_{\kappa 3})_T \dot{\epsilon}_3^p}_{=0} + \underbrace{(h_{\kappa 1})_C \dot{\epsilon}_1^p}_{=0} + \underbrace{(h_{\kappa 2})_C \dot{\epsilon}_2^p}_{=0} + \underbrace{(h_{\kappa 3})_C \dot{\epsilon}_3^p}_{=0} \quad , \qquad \text{(An-A.1)}$$

$$\dot{\kappa}^p = (h_{\kappa 1})_T \; \dot{\epsilon}_1^p = \frac{1}{g_T^{p\,*}} \; \langle \sigma_1 \rangle \; \dot{\epsilon}_1^p \quad ,$$

y sustituyendo en ésta la *energía específica de tracción ajustada*, por su expresión matemática:

$$g_T^{p\,*} \;=\; g_T^p \; \frac{[\langle\sigma_1\rangle + \langle\sigma_2\rangle + \langle\sigma_3\rangle]}{\sigma_T} \;=\; g_T^p \; \frac{\langle\sigma_1\rangle}{\sigma_T} \quad , \tag{An-A.2}$$

se obtiene, previa sustitución de $\dot{\epsilon}_1^p$ por $\dot{\epsilon}_T^p$ (que coinciden en este caso particular), la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \dot{\kappa}^p &= \frac{1}{g_T^p} \, \frac{\sigma_T}{\langle\sigma_1\rangle} \, \langle\sigma_1\rangle \, \dot{\epsilon}_1^p \quad , \\ \dot{\kappa}^p &= \frac{1}{g_T^p} \, \sigma_T \, \dot{\epsilon}_T^p \quad , \end{aligned} \tag{An-A.3}$$

de donde resulta, como es obvio, la definición de la la *variable de daño plástico*, para un problema de tracción uniaxial ec.(IV.9):

$$\kappa^p \;=\; \frac{1}{g_T^p} \int_{t=0}^{t} \sigma_T \, \dot{\epsilon}_T^p \, dt \qquad . \tag{An-A.4}$$

An-A.1.c- Problema de compresión uniaxial.

En forma análoga al problema de tracción, se deduce para un estado tensional de compresión pura y simple $\sigma_3 < \sigma_2 = \sigma_1 = 0$, de la ec.(IV.16), la siguiente expresión para el incremento temporal de la variable de daño plástico:

$$\begin{aligned} \dot{\kappa}^p &= \sum_{i=1}^{3} [(h_{\kappa i})_T \;+\; (h_{\kappa i})_C] \;\dot{\epsilon}_i^p \quad , \\ \dot{\kappa}^p &= \underbrace{(h_{\kappa 1})_T \dot{\epsilon}_1^p}_{=0} + \underbrace{(h_{\kappa 2})_T \dot{\epsilon}_2^p}_{=0} + \underbrace{(h_{\kappa 3})_T \dot{\epsilon}_3^p}_{=0} + \underbrace{(h_{\kappa 1})_C \dot{\epsilon}_1^p}_{=0} + \underbrace{(h_{\kappa 2})_C \dot{\epsilon}_2^p}_{=0} + (h_{\kappa 3})_C \dot{\epsilon}_3^p \quad , \\ \dot{\kappa}^p &= (h_{\kappa 3})_C \;\dot{\epsilon}_3^p = \frac{1}{g_C^{p\,*}} \;\langle -\sigma_3\rangle \;\dot{\epsilon}_3^p \quad , \end{aligned} \tag{An-A.5}$$

y sustituyendo en ésta la *energía específica de compresión ajustada*, se tiene:

$$g_C^{p\,*} \;=\; g_C^p \,\frac{[\langle -\sigma_1\rangle + \langle -\sigma_2\rangle + \langle -\sigma_3\rangle]}{\sigma_C} \;=\; g_C^p \,\frac{\langle -\sigma_3\rangle}{\sigma_C} \quad , \qquad \text{(An-A.6)}$$

resultando, previa sustitución de $\dot{\epsilon}_3^p$ por $\dot{\epsilon}_C^p$ (que coinciden en este caso particular), la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \dot{\kappa}^p &= \frac{1}{g_C}\,\frac{\sigma_C}{\langle -\sigma_3\rangle}\,\langle -\sigma_3\rangle\,\dot{\epsilon}_3^p \quad , \\ \dot{\kappa}^p &= \frac{1}{g_C}\,\sigma_C\,\dot{\epsilon}_C^p \quad , \end{aligned} \qquad \text{(An-A.7)}$$

de donde resulta la definición de la la *variable de daño plástico*, para un problema de compresión uniaxial ec.(IV.12):

$$\kappa^p \;=\; \frac{1}{g_C^p}\int_{t=0}^{t} \sigma_C\,\dot{\epsilon}_C^p\,dt \qquad . \qquad \text{(An-A.8)}$$

An-A.1.d- Problema de compresión biaxial simétrica.

Siguiendo el mismo procedimiento que en los dos casos anteriores, se puede obtener, para el caso de un estado tensional de compresión biaxial doble simétrica $\sigma_3 = \sigma_2 = \sigma < \sigma_1 = 0$, la expresión para el incremento temporal de la variable de daño plástico. Par ello a partir de la ec.(IV.16), se tiene:

$$\begin{aligned} \dot{\kappa}^p &= \sum_{i=1}^{3}\,[(h_{\kappa i})_T \;+\; (h_{\kappa i})_C]\;\dot{\epsilon}_i^p \quad , \\ \dot{\kappa}^p &= \underbrace{(h_{\kappa 1})_T\dot{\epsilon}_1^p}_{=0} + \underbrace{(h_{\kappa 2})_T\dot{\epsilon}_2^p}_{=0} + \underbrace{(h_{\kappa 3})_T\dot{\epsilon}_3^p}_{=0} + \underbrace{(h_{\kappa 1})_C\dot{\epsilon}_1^p}_{=0} + (h_{\kappa 2})_C\dot{\epsilon}_2^p + (h_{\kappa 3})_C\dot{\epsilon}_3^p \quad , \qquad \text{(An-A.9)} \\ \dot{\kappa}^p &= (h_{\kappa 2})_C\;\dot{\epsilon}_2^p \;+\; (h_{\kappa 3})_C\;\dot{\epsilon}_3^p = \frac{1}{g_C^{p\,*}}\;[\langle -\sigma_2\rangle\;\dot{\epsilon}_2^p \;+\; \langle -\sigma_3\rangle\;\dot{\epsilon}_3^p] \quad , \end{aligned}$$

y sustituyendo en ésta la *energía específica de compresión ajustada*

$$g_C^{p\,*} \;=\; g_C^p \;\frac{[\langle -\sigma_1\rangle + \langle -\sigma_2\rangle + \langle -\sigma_3\rangle]}{\sigma_C} \;=\; g_C^p \;\frac{[\langle -\sigma_2\rangle + \langle -\sigma_3\rangle]}{\sigma_C} \;=\; 2\; g_C^p \;\frac{\langle -\sigma\rangle}{\sigma_C}$$

(An-A.10)

resulta:

$$\dot{\kappa}^p = \frac{1}{2\; g_C^p} \;\frac{\sigma_C}{\langle -\sigma\rangle}\; \langle -\sigma\rangle \;\; [\dot{\epsilon}_2^p \;+\; \dot{\epsilon}_3^p] \quad ,$$

(An-A.11)

$$\dot{\kappa}^p = \frac{1}{2\; g_C^p}\; \sigma_C \quad [\dot{\epsilon}_2^p \;+\; \dot{\epsilon}_3^p] \quad ,$$

que escrita en función de la regla de flujo generalizada ec.(IV.3), resulta:

$$\dot{\kappa}^p = \frac{\dot{\lambda}}{2\; g_C^p}\; \sigma_C \quad \left[\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \sigma_2} \;+\; \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \sigma_3}\right] \quad , \qquad \text{(An-A.12)}$$

pero dado que $\mathcal{G}(\boldsymbol{\sigma}, c)$ es una *función de potencial plástico* de comportamiento isotrópico, en el punto $\sigma_3 = \sigma_2 = \sigma < \sigma_1 = 0$ del espacio de tensiones principales el vector de flujo plástico $\boldsymbol{g} = \partial\mathcal{G}/\partial\boldsymbol{\sigma}$ tiene dos componentes g_2 y g_3 iguales y simétricas, por lo tanto $\partial\mathcal{G}/\partial\sigma = \partial\mathcal{G}/\partial\sigma_2 = \partial\mathcal{G}/\partial\sigma_3$, quedando expresada la ec.(IV.12) de la siguiente forma:

$$\dot{\kappa}^p = \frac{\dot{\lambda}}{g_C^p}\; \sigma_C\; \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \sigma} \;=\; \frac{1}{g_C^p}\; \sigma_C\; \dot{\epsilon}_C^p \qquad \text{(An-A.13)}$$

de donde resulta, la definición de la la *variable de daño plástico*, para un problema de compresión uniaxial ec.(IV.12).

$$\kappa^p \;=\; \frac{1}{g_C^p} \int_{t=0}^{t} \sigma_C\; \dot{\epsilon}_C^p\; dt \qquad . \qquad \text{(An-A.14)}$$

De esta última, se observa que la *variable de daño plástico,* transforma el problema multiaxial (en este caso biaxial doble simétrico) en uno de características uniaxiales equivalentes.

An-A.1.e- Problema de corte puro.

Siguiendo con el mismo esquema deductivo, se puede probar que en el caso de corte puro, la variable de daño o plástico interpreta el estado multiaxial actuante, como la combinación de dos estados uniaxiales equivalentes. Para probar esta afirmación, se introduce un estado tensional plano de corte puro $-\sigma_3 = \sigma_1 = \tau\ ,\ \sigma_2 = 0$, resultando de la *ec.(IV.16)* la siguiente expresión para el incremento temporal de la variable de daño plástico:

$$\dot{\kappa}^p = \sum_{i=1}^{3} \left[(h_{\kappa i})_T \ + \ (h_{\kappa i})_C \right] \ \dot{\epsilon}_i^p \quad ,$$

$$\dot{\kappa}^p = (h_{\kappa 1})_T \dot{\epsilon}_1^p + \underbrace{(h_{\kappa 2})_T \dot{\epsilon}_2^p}_{=0} + \underbrace{(h_{\kappa 3})_T \dot{\epsilon}_3^p}_{=0} + \underbrace{(h_{\kappa 1})_C \dot{\epsilon}_1^p}_{=0} + \underbrace{(h_{\kappa 2})_C \dot{\epsilon}_2^p}_{=0} + (h_{\kappa 3})_C \dot{\epsilon}_3^p \quad , \qquad \textit{(An-A.15)}$$

$$\dot{\kappa}^p = (h_{\kappa 1})_T \ \dot{\epsilon}_1^p + (h_{\kappa 3})_C \ \dot{\epsilon}_3^p = \frac{1}{g_T^{p\,*}} \ \langle \sigma_1 \rangle \ \dot{\epsilon}_1^p + \frac{1}{g_C^{p\,*}} \ \langle -\sigma_3 \rangle \ \dot{\epsilon}_3^p \quad ,$$

y sustituyendo en ésta las *energías específicas de compresión y a tracción ajustadas*, por sus respectivas expresiones matemáticas:

$$g_T^{p\,*} \ = \ g_T^p \ \frac{\left[\langle \sigma_1 \rangle + \langle \sigma_2 \rangle + \langle \sigma_3 \rangle \right]}{\sigma_T} \ = \ g_T^p \ \frac{\langle \sigma_1 \rangle}{\sigma_T} \quad ,$$

$$g_C^{p\,*} \ = \ g_C^p \ \frac{\left[\langle -\sigma_1 \rangle + \langle -\sigma_2 \rangle + \langle -\sigma_3 \rangle \right]}{\sigma_C} \ = \ g_C^p \ \frac{\langle -\sigma_3 \rangle}{\sigma_C} \quad , \qquad \textit{(An-A.16)}$$

se obtiene, previa sustitución de $\dot{\epsilon}_1^p$ por $\dot{\epsilon}_T^p$ y $\dot{\epsilon}_3^p$ por $\dot{\epsilon}_C^p$ (que coinciden en este caso particular), la siguiente expresión:

$$\dot{\kappa}^p = \frac{1}{g_T^p} \ \frac{\sigma_T}{\langle \sigma_1 \rangle} \ \langle \sigma_1 \rangle \ \dot{\epsilon}_1^p \ + \ \frac{1}{g_C^p} \ \frac{\sigma_C}{\langle -\sigma_3 \rangle} \ \langle -\sigma_3 \rangle \ \dot{\epsilon}_3^p \quad ,$$

$$\dot{\kappa}^p = \frac{1}{g_T^p} \ \sigma_T \ \dot{\epsilon}_T^p \ + \ \frac{1}{g_C^p} \ \sigma_C \ \dot{\epsilon}_C^p \quad , \qquad \textit{(An-A.17)}$$

de donde resulta, como es obvio, una *variable de daño plástico*, formada por la contribución de la variable correspondiente a un problema de tracción uniaxial *ec.(IV.9)* más un problema de compresión uniaxial *ec.(IV.12)*:

$$\kappa^p \;=\; \frac{1}{g_T^p} \int_{t=0}^{t} \sigma_T \; \dot{\epsilon}_T^p \; dt \;+\; \frac{1}{g_C^p} \int_{t=0}^{t} \sigma_C \; \dot{\epsilon}_C^p \; dt \qquad . \tag{An-A.18}$$

(CAPITULO IV) ANEXO B

FUNCIONES DE COHESION UTILIZADAS EN EL MODELO DE DAÑO PLASTICO.

An-B.1.- FUNCIONES DE COHESION UTILIZADAS EN EL MODELO DE DAÑO PLASTICO.

An-B.1.a- Introducción.

Para hormigones, se podrían proponer diferentes expresiones analíticas que describan la evolución que sufre la cohesión en función de la variable de daño plástico κ^p durante un proceso de carga uniaxial de tracción $c_T(\kappa^p)$ y compresión $c_C(\kappa^p)$. Una posibilidad, que es la que se ha utilizado en este modelo de daño plástico, es deducirlas a partir de curvas uniaxiales de tensión deformación plástica ($\sigma_T - \epsilon_T^p$, $\sigma_C - \epsilon_C^p$), que surgen de otras curvas uniaxiales de tensión deformación total ($\sigma_T - \epsilon_T$, $\sigma_C - \epsilon_C$) que resultan a su vez de estudios experimentales de tracción y compresión respectivamente. En forma esquemática esto es:

$$\textit{a partir de:} \qquad \sigma - \epsilon \quad \overset{se\ tiene}{\longmapsto} \quad \sigma - \epsilon^p \quad \overset{resulta}{\longmapsto} \quad c - \kappa^p$$

Las curvas $\sigma - \epsilon^p$ se pueden obtener a partir de las curvas $\sigma - \epsilon$, a través de una integración en el tiempo de la ecuación constitutiva elasto-plástica, para un problema uniaxial. Así ,

$$\dot{\epsilon}^p = \dot{\epsilon} - E_S^{-1}\,\dot{\sigma} \quad , \tag{An-B.1}$$

integrada para cada tiempo t del proceso de carga uniaxial cuasi-estático, proporciona la magnitud actual de la deformación plástica buscada:

$$\epsilon^p = \int_{t=0}^{t} \dot{\epsilon}^p\, dt \;=\; \int_{t=0}^{t} \dot{\epsilon}\, dt \;-\; \int_{t=0}^{t} E_S^{-1}\,\dot{\sigma}\, dt \tag{An-B.2}$$

Una vez conocidas las curvas $\sigma - \epsilon^p$ se transforman a curvas de $\sigma - \kappa^p$, mediante la propia definición de la variable de daño plástico para un proceso uniaxial de tracción *ec.(IV.9)* o compresión *ec.(IV.12)*, segun sea el caso (ver subsiguientes apartados). A partir de las curvas $\sigma - \kappa^p$, mediante un factor de escala k_C o k_T *ec.(IV.22)* o *ec.(IV.23)*, según se trate de una curva de tracción o compresión respectivamente, se obtienen las curvas $c_C - \epsilon^p$ y $c_T - \epsilon^p$ que intervienen en la regla de evolución de la *variable interna de cohesión* *ec.(IV.19)*.

A continuación, se presentarán tres expresiones de la tensión en función de la variable de daño plástico $\sigma - \kappa^p$, y se detallará la forma en que han sido obtenidas a partir de funciones uniaxiales del tipo $\sigma - \epsilon^p$.

An-B.1.b- Función tensión-deformación plástica lineal y su transformación en una función tensión-daño plástico.

Desde un punto de vista simple, se puede hacer la hipótesis de que el comportamiento uniaxial tension-deformación del hormigón a tracción, después de finalizar el período elástico, carece de endurecimiento e inicia inmediatamente una etapa de ablandamiento lineal [23][123] **fig.(An-B.1)**. Esto es:

$$\sigma_T(\epsilon_T^p) = \sigma_T^0 \left(1 - \frac{\epsilon_T^p}{\epsilon_T^{p\,u}}\right) \qquad \textit{(An-B.3)}$$

La energía específica plástica que disipará un punto del sólido durante todo el proceso de carga cuasi-estático a tracción, será para este caso particular:

$$g_T^p = \int_{t=0}^{\infty} \sigma_T \, \dot{\epsilon}_T^p \, dt = \frac{\sigma_T^0 \, \epsilon_T^{p\,u}}{2} \qquad \textit{(An-B.4)}$$

Partiendo de la misma definición de κ^p, para un proceso de carga uniaxial *ec.(IV.9)*, se puede obtener la transformación de $(\sigma_T - \epsilon_T^p) \xmapsto{en} (\sigma_T - \kappa^p)$. Esto es:

$$\kappa^p = \frac{1}{g_T^p} \int_{t=0}^{t} \sigma_T \, \dot{\epsilon}_T^p \, dt = \frac{1}{g_T^p} \int_{t=0}^{t} \sigma_T^0 \left(1 - \frac{\epsilon_T^p}{\epsilon_T^{p\,u}}\right) \dot{\epsilon}_T^p \, dt \qquad \textit{(An-B.5)}$$

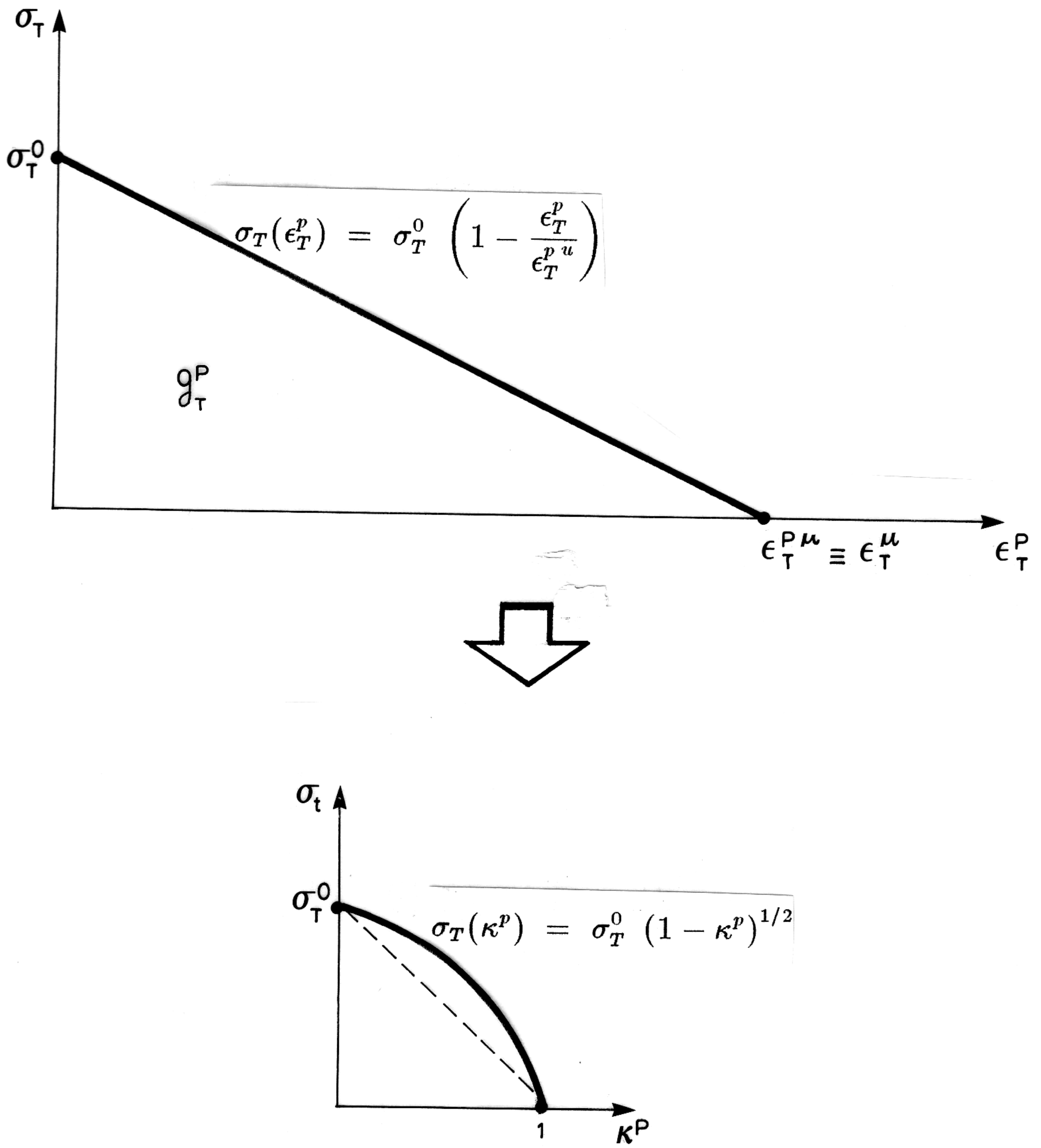


fig.(An-B.1): Función tensión-deformación plástica lineal, para tratar el comportamiento del hormigón a tracción, y su transformación en una función tensión-daño plástico.

resolviendo la *ec.(An-B.5)* y sustituyendo en ella la *ec.(An-B.4)*, resulta:

$$\kappa^p = \frac{2}{\sigma_T^0 \, \epsilon_T^{p\,u}} \, \sigma_T^0 \left[\epsilon_T^p - \frac{\left(\epsilon_T^p\right)^2}{2 \, \epsilon_T^{p\,u}} \right] = 2 \, \frac{\epsilon_T^p}{\epsilon_T^{p\,u}} - \left(\frac{\epsilon_T^p}{\epsilon_T^{p\,u}} \right)^2 \qquad \text{(An-B.6)}$$

y de aquí :

$$1-\kappa^p \;=\; 1-2\,\frac{\epsilon_T^p}{\epsilon_T^{p\,u}} \;+\; \left(\frac{\epsilon_T^p}{\epsilon_T^{p\,u}}\right)^2 \;=\; \left(1-\frac{\epsilon_T^p}{\epsilon_T^{p\,u}}\right)^2$$

$$(1-\kappa^p)^{1/2} \;=\; \left(1-\frac{\epsilon_T^p}{\epsilon_T^{p\,u}}\right) \qquad \textit{(An-B.7)}$$

sustituyendo esta última en la *ec.(An-B.3)*, queda la función de tensión uniaxial, expresada a partir de la variable de daño plástico κ^p :

$$\sigma_T(\kappa^p) \;=\; \sigma_T^0\;(1-\kappa^p)^{1/2} \qquad \textit{(An-B.8)}$$

de donde surge su derivada como:

$$\frac{d\sigma_T(\kappa^p)}{d\kappa^p} \;=\; -\;\frac{\sigma_T^0}{2\;(1-\kappa^p)^{1/2}} \qquad \textit{(An-B.9)}$$

An-B.1.c- Función tensión-deformación plástica exponencial y su transformación en una función tensión-daño plástico lineal.

En tracción pura, se pueden utilizar también funciones de *tensión-deformación plástica* que aproximen en mejor modo el comportamiento del hormigón. Existe un gran número de funciones de este tipo que han sido formuladas a partir de estudios experimentales [23][124][126] . En este trabajo, se ha considerado una función exponencial simple **fig.(An-B.2)** que se aproxima bastante bien a otras expresiones más complejas [124] que han sido propuestas para la simulación del comportamiento del hormigón a tracción con ablandamiento. Esto es:

$$\sigma_T(\epsilon_T^p) \;=\; \sigma_T^0\;\left[\;a\;e^{-b\epsilon_T^p}\right] \qquad \textit{(An-B.10)}$$

La energía específica total que disipará un punto del sólido durante todo el proceso de carga cuasi-estático a tracción, será para este caso particular:

$$g_T^p = \int_{t=0}^{\infty} \sigma_T\;\dot{\epsilon}_T^p\;dt = \sigma_T^0\;\int_{t=0}^{\infty} a\;e^{-b\epsilon_T^p}\;\dot{\epsilon}_T^p\;dt \;=\; \sigma_T^0\;a\;\left(-\frac{e^{-b\epsilon_T^p}}{b}\right)\Bigg|_{\epsilon_T^p=0}^{\infty} \;=\; \sigma_T^0\;\frac{a}{b} \qquad \textit{(An-B.11)}$$

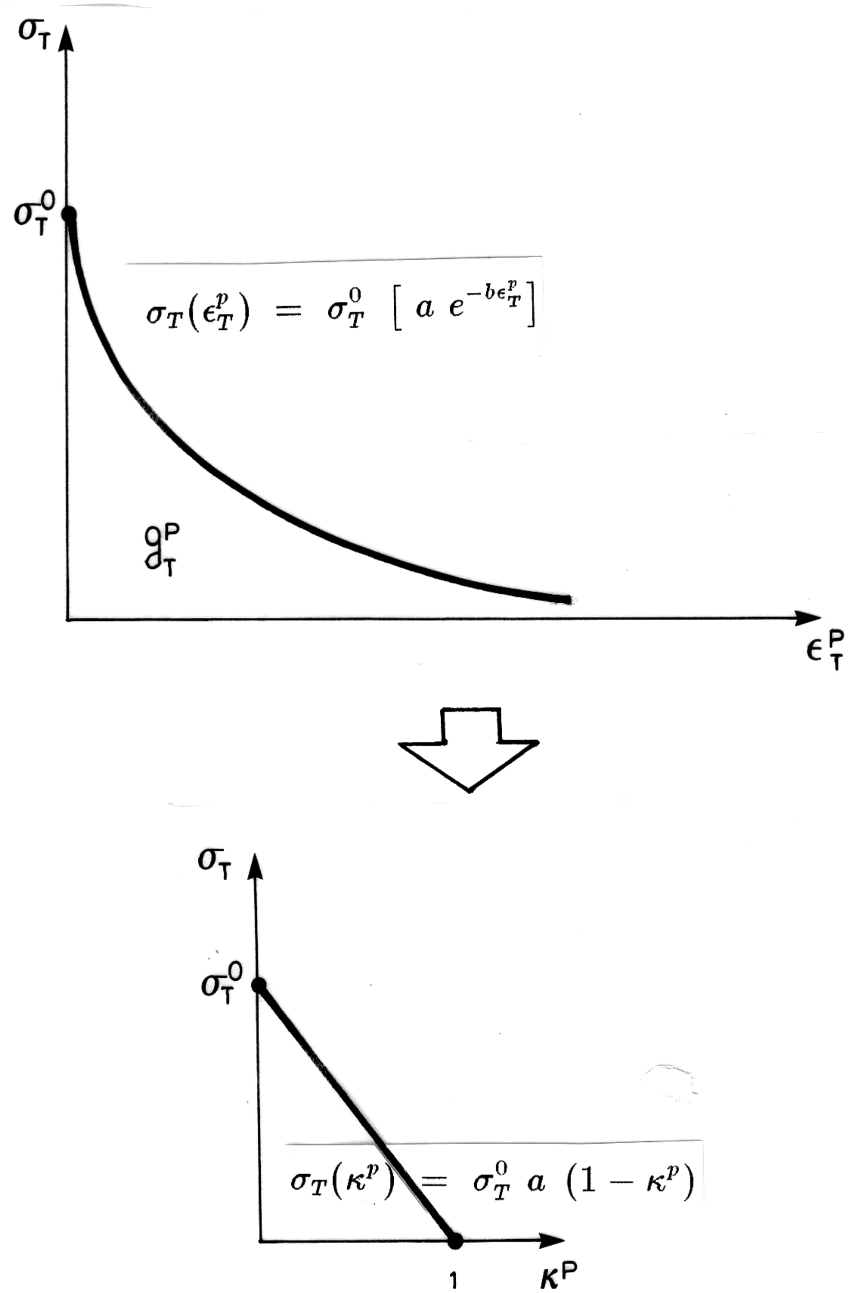


fig.(An-B.2): Función tensión-deformación plástica exponencial, para tratar el comportamiento del hormigón a tracción, y su transformación en una función tensión-daño plástico lineal.

La pendiente al iniciar el proceso plástico, surge de particularizar la derivada de la *ec.(An-B.10)* en $\epsilon_T^p = 0$. Esto es:

$$A' \;=\; \left.\frac{d\sigma_T(\epsilon_T^p)}{d\epsilon_T^p}\right|_{\epsilon_T^p=0} \;=\; -\,\sigma_T^0\; a\; b\; e^{-b\epsilon_T^p}\Big|_{\epsilon_T^p=0} \;=\; -\,\sigma_T^0\; a\; b \qquad \textit{(An-B.12)}$$

de donde se deduce, que para $a > 0$ se tienen pendientes A' negativas. De la *ec.(An-B.11)* y *ec.(An-B.12)*, se pueden encontrar las constantes a y b . Esto es:

$$\begin{cases} a \; = \; \dfrac{\sqrt{- \; A' \; g_T^p}}{\sigma_T^0} \\[2ex] b \; = \; \sqrt{- \; \dfrac{A'}{g_T^p}} \end{cases} \qquad \text{(An-B.13)}$$

Para transformar la función de la *ec.(An-B.10)* en otra del tipo $\sigma_T \, - \, \kappa^p$, será necesario partir de la definición de κ^p , para un proceso de carga uniaxial *ec.(IV.9)*. Así se tiene:

$$\kappa^p \; = \; \frac{1}{g_T^p} \int_{t=0}^{t} \sigma_T \; \dot{\epsilon}_T^p \; dt \; = \; \frac{1}{g_T^p} \int_{t=0}^{t} \sigma_T^0 \; \left[\; a \; e^{-b\epsilon_T^p} \right] \; \dot{\epsilon}_T^p \; dt \qquad \text{(An-B.14)}$$

resolviendo la *ec.(An-B.14)* y sustituyendo en ella la *ec.(An-B.11)*, resulta:

$$\begin{aligned} \kappa^p \; &= \; \frac{1}{g_T^0} \left[\sigma_T^0 \; a \; \left(- \; \frac{e^{-b\epsilon_T^p}}{b} \right) \Bigg|_{\epsilon_T^p=0}^{\infty} \right] \\ \kappa^p \; &= \; \underbrace{\frac{\sigma_T^0 \; a}{g_T^p \; b}}_{= \; 1} \; \left[1 \; - \; e^{-b\epsilon_T^p} \right] \\ e^{-b\epsilon_T^p} \; &= \; 1 \; - \; \kappa^p \end{aligned} \qquad \text{(An-B.15)}$$

sustituyendo ésta en la *ec.(An-B.10)*, resulta una función de tensión uniaxial lineal, expresada a partir de la variable de daño plástico κ^p :

$$\sigma_T(\kappa^p) \; = \; \sigma_T^0 \; a \; (1 - \kappa^p) \qquad \text{(An-B.16)}$$

donde la constante a surge de la pendiente al origen en el espacio $\sigma - \kappa^p$:

$$\left. \frac{d\sigma_T(\epsilon_T^p)}{d\kappa^p} \right|_{\kappa^p=0} \; = \; - \; \sigma_T^0 \; a \; \equiv \; - \; \frac{\sigma_T^0}{1} \quad \longrightarrow \quad a = 1 \qquad \text{(An-B.17)}$$

tal que sutituída en la ec.(An-B.16) resulta:

$$\sigma_T(\kappa^p) \;=\; \sigma_T^0 \;(1-\kappa^p) \qquad \text{(An-B.18)}$$

de donde surge su derivada como:

$$\frac{d\sigma_T(\kappa^p)}{d\kappa^p} \;=\; -\,\sigma_T^0 \;=\; \textit{cte.} \qquad \text{(An-B.19)}$$

An-B.1.d- Función tensión-deformación plástica exponencial y su transformación en una función tensión-daño plástico.

Para los casos más generales de tracción o compresión uniaxial en hormigones, se propone una función tensión-deformación plástica, compuesta de una primera parte con *endurecimiento*, hasta alcanzar la tensión pico σ^{pic}, seguida de un *ablandamiento* hasta hacerce nula la tensión. Una función analítica $\sigma-\epsilon^p$ que concuerda bastante bien con los estudios experimentales, tanto a tracción como a compresión uniaxial, viene dada por la siguiente expresión* **fig.(An-B.3)**:

$$\sigma(\epsilon^p) \;=\; \sigma^0 \;\left[\; a_1\; e^{-b\epsilon^p} \;-\; a_2\; e^{-2b\epsilon^p}\right] \qquad \text{(An-B.20)}$$

siendo:

$$a_1 \;=\; \chi\;(\;1\;+\;a\;)$$
$$a_2 \;=\; a$$

donde χ es una constante que determina la posición del pico de tensiones σ^{pic}, y a y b son dos constantes adimensionales que se obtienen a partir de las dos condiciones siguientes:

* *Nota: Debido a que la función que se propone servirá para aproximar tanto el comportamiento a tracción como a compresión uniaxial, mediante el ajuste de unas constantes, se obviará el uso de una notación con sub-indices "T" o "C", ya que la formulación podrá utilizarse indistintamente en uno u otro caso.*

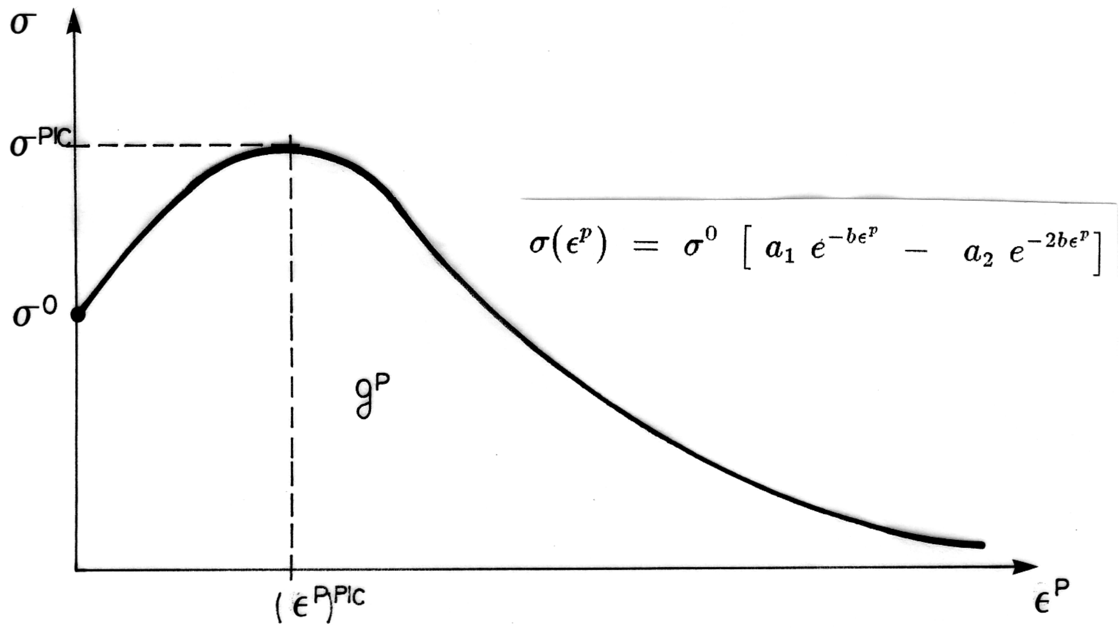


fig.(An-B.3): Función tensión-deformación plástica exponencial, para tratar el comportamiento del hormigón a tracción o compresión.

- **Condición de energía:**

$$g^p = \int_{t=0}^{\infty} \sigma \, \dot{\epsilon}^p \, dt = \sigma^0 \int_{t=0}^{\infty} \left[\chi(1+a) \, e^{-b\epsilon^p} - a \, e^{-2b\epsilon^p} \right] \dot{\epsilon}^p \, dt$$

$$g^p = \sigma^0 \left[\chi(1+a) \left(- \left. \frac{e^{-b\epsilon^p}}{b} \right|_{\epsilon^p=0}^{\infty} \right) - a \left(- \left. \frac{e^{-2b\epsilon^p}}{2b} \right|_{\epsilon^p=0}^{\infty} \right) \right] \qquad \text{(An-B.21)}$$

$$g^p = \sigma^0 \left[\frac{\chi}{b} + \frac{\chi a}{b} + \frac{a}{2b} \right] = \frac{\sigma^0}{b} \left[\chi + \frac{a}{2}(2\chi - 1) \right]$$

- **Condición de pendiente al origen:**

$$A' = \left. \frac{d\sigma(\epsilon^p)}{d\epsilon^p} \right|_{\epsilon^p=0} = \sigma^0 \left[-\chi(1+a) \, e^{-b\epsilon^p} \, b + a \, e^{-2b\epsilon^p} \, 2b \right] \Big|_{\epsilon^p=0} \qquad \text{(An-B.22)}$$

$$A' = \sigma^0 \left[-\chi(1+a) \, b + 2 \, a \, b \right] = \sigma^0 \, b \left[-\chi + a \, (2 - \chi) \right]$$

así , fijando la posición del pico de tensiones χ , de la *ec.(An-B.21)* y *ec.(An-B.22)* se obtiene a y b . Obsérvese que para $\chi = 1$ y $a > 1$, la función parte con pendiente inicial positiva (endurecimiento inicial), en cambio para $a < 1$ la función comienza con una pendiente inicial negativa (ablandamiento inicial).

Para transformar la función de la *ec.(An-B.20)* en otra del tipo $\sigma_T - \kappa^p$, será necesario, como en los casos anteriores, partir de la definición de κ^p para un proceso de carga uniaxial de tracción *ec.(IV.9)* o de compresión *ec.(IV.12)*, según sea el caso. En este apartado se deducirá una función genérica que luego puede ser utilizada para estados de tracción o compresión indistintamente. Esto es:

$$\kappa^p = \frac{1}{g^p} \int_{t=0}^{t} \sigma \, \dot{\epsilon}^p \, dt = \frac{\sigma^0}{g^p} \left[\chi(1+a) \left(- \left. \frac{e^{-b\epsilon^p}}{b} \right|_0^{\epsilon^p} \right) - a \left(- \left. \frac{e^{-2b\epsilon^p}}{2b} \right|_0^{\epsilon^p} \right) \right]$$

$$\kappa^p = \frac{\sigma^0}{g^p} \left[\frac{\chi(1+a)}{b} \left(- e^{-b\epsilon^p} + 1 \right) - \frac{a}{2b} \left(- e^{-2b\epsilon^p} + 1 \right) \right]$$

(An-B.23)

reagrupando términos, se tiene:

$$\kappa^p = \frac{\sigma^0}{g^p} \left[\frac{\chi(1+a)}{b} - \frac{a}{2b} \right] + \frac{\sigma^0}{g^p} \left[-\frac{\chi(1+a)}{b} \, e^{-b\epsilon^p} + \frac{a}{2b} \, e^{-2b\epsilon^p} \right] \qquad \text{(An-B.24)}$$

y sustituyendo en ésta g^p por su expresión *ec.(IV.21)*, resulta:

$$\kappa^p = 1 + \left[- \frac{\chi(1+a)}{\left[\chi + \frac{a}{2}(2\chi - 1) \right]} \, e^{-b\epsilon^p} + \frac{a}{2 \left[\chi + \frac{a}{2}(2\chi - 1) \right]} \, e^{-2b\epsilon^p} \right]$$

$$\kappa^p = 1 + \frac{1}{[2 \chi + a \, (2\chi - 1)]} \left[-2 \, \chi(1+a) \, e^{-b\epsilon^p} + a \, e^{-2b\epsilon^p} \right]$$

(An-B.25)

si se multiplican ambos miembros por: $a \; [2 \, \chi \; + \; a \; (2\chi - 1)]$, y a lo que resulte de aquí se le suma a ambos miembros: $[\chi \; (1+a)]^2 \; - \; a \; [2 \, \chi \; + \; a \; (2\chi - 1)]$, se obtiene:

$$\Big\{[\chi(1+a)]^2 \;-\; a\;[2\;\chi\;+\;a\;(2\chi-1)]\Big\}\;+\;a\;[2\;\chi\;+\;a\;(2\chi-1)]\;\kappa^p\;=$$

$$=\;[\chi(1+a)]^2\;-\;2a\chi(1+a)\;e^{-b\epsilon^p}+\left(e^{-b\epsilon^p}\right)^2$$

$$(\chi-a^2\;\chi+a^2)\;+\;\{a\;[2\;\chi\;+\;a\;(2\chi-1)]\;\kappa^p\}\;=\;\left\{[\chi(1+a)]-\left[a\;e^{-b\epsilon^p}\right]\right\}^2 \qquad \text{(An-B.26)}$$

de donde resulta:

$$e^{-b\epsilon^p}\;=\;\frac{1}{a}\left\{\chi(1+a)-\sqrt{\emptyset(\kappa^p)}\right\} \qquad \text{(An-B.27)}$$

siendo: $\emptyset(\kappa^p)\;=\;(\chi-a^2\;\chi+a^2)\;+\;\{a\;[2\;\chi\;+\;a\;(2\chi-1)]\;\kappa^p\}$. Sustituyendo la *ec.(An-B.27)* en la *ec.(An-B.20)*, se obtiene:

$$\sigma(\kappa^p)\;=\;\sigma^0\;\left\{\frac{\chi(1+a)}{a}\left[\chi(1+a)-\sqrt{\emptyset(\kappa^p)}\right]-\left[\frac{1}{a}\left\{\chi(1+a)-\sqrt{\emptyset(\kappa^p)}\right\}^2\right]\right\} \qquad \text{(An-B.28)}$$

de donde resulta la expresión de tensión uniaxial en función de la variable de daño plástico:

$$\sigma(\kappa^p)\;=\;\frac{\sigma^0}{a}\;\left\{\chi\;(1+a)\;\sqrt{\emptyset(\kappa^p)}\;-\;\emptyset(\kappa^p)\right\} \qquad \text{(An-B.29)}$$

de donde surge su derivada como:

$$\frac{d\sigma(\kappa^p)}{d\kappa^p}\;=\;\frac{d\sigma(\kappa^p)}{d\emptyset(\kappa^p)}\;\frac{d\emptyset(\kappa^p)}{d\kappa^p}$$

$$\frac{d\sigma(\kappa^p)}{d\kappa^p}\;=\;\sigma^0\left\{\frac{\chi(1+a)}{2\sqrt{\emptyset(\kappa^p)}}-1\right\}\;\{2\chi+a(2\chi-1)\} \qquad \text{(An-B.30)}$$

El máximo de la función expresada en la *ec.(An-B.29)*, se encuentra para $a > 0$, al anular su derivada; esto es:

$$\frac{d\sigma(\kappa^p)}{d\kappa^p} \;=\; 0 \quad \rightarrow \quad \chi(1+a) \;=\; 2\sqrt{\emptyset(\kappa^p)}$$

$$[\emptyset(\kappa^p)]^{pic} \;=\; \left(\frac{\chi^{pic}}{2}\right)^2 \; (1+a)^2 \qquad \text{(An-B.31)}$$

sutituyendo en ésta $\emptyset(\kappa^p)$ por su expresión, se obtiene la siguiente ecuación cuadrática en χ^{pic} : $-(\chi^{pic})^2 + \chi^{pic} \underbrace{\left[\frac{4}{(1+a)^2}\Big(1 - a^2 + 2a(\kappa^p)^{pic} + 2a^2(\kappa^p)^{pic}\Big)\right]}_{B} +$

$+ \underbrace{\frac{4a^2}{(1+a)^2}\Big(1 - (\kappa^p)^{pic}\Big)}_{C} = 0$, que permite obtener el valor de χ^{pic} para el que se produce el pico de tensión.

Sustituyendo la *ec.(An-B.31)* en la *ec.(An-B.29)*, resulta el valor de la tensión en el pico, en función de los parámetros a y χ^{pic} . Esto es:

$$\sigma^{pic} \;=\; \frac{\sigma^0}{a}\left(\frac{\chi^{pic}}{2}\right)^2 \; (1+a)^2 \qquad \text{(An-B.32)}$$

de donde resulta la siguiente ecuación cuadrática en a :

$a^2 - a\; 2\left[\frac{2}{(\chi^{pic})^2}\;\frac{\sigma^{pic}}{\sigma^0} - 1\right] + 1 = 0$, cuya raíz máxima vale:

$$a \;=\; 2\left(\frac{\sigma^{pic}}{(\chi^{pic})^2\sigma^0}\right) - 1 \;+\; 2\sqrt{\left(\frac{\sigma^{pic}}{(\chi^{pic})^2\sigma^0}\right)^2 - \left(\frac{\sigma^{pic}}{(\chi^{pic})^2\sigma^0}\right)} \qquad \text{(An-B.33)}$$

(CAPITULO IV) ANEXO C

CRITERIO DE FLUENCIA DE MOHR-COULOMB MODIFICADO.

An-C.1.- CRITERIO DE FLUENCIA DE MOHR-COULOMB MODIFICADO.

La utilización del criterio de fluencia original de Mohr-Coulomb para materiales del tipo del hormigón, presenta el inconveniente de no cumplir con la *relación inicial entre la resistencia uniaxial de tracción y compresión* $R^0 = |\sigma_C^0|/|\sigma_T^0|$ para *ángulos de rozamiento interno* ϕ comprendidos dentro de los valores naturales del hormigón, $30^o \leq \phi \leq 35^o$ (***apart. Ap-I.3.f***). Entre las soluciones que se adoptan habitualmente para resolver el problema, está la de aumentar este ángulo de rozamiento interno hasta alcanzar la relación inicial de resistencia uniaxial requerida. No obstante, ésta no es una solución si se trabaja con plasticidad asociada, pues el criterio de Mohr-Coulomb definido como superficie de potencial plástico con un ángulo de dilatancia $\psi = \phi$, produciría en el sólido un efecto excesivo del *fenómeno de dilatancia* (***apart. IV.4.d***). Debido a esto, se presenta la necesidad de utilizar una regla de flujo no-asociada $\dfrac{\partial \mathcal{G}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \neq \dfrac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$ con el fin de controlar el incremento de deformación plástica volumétrica $\dot{\epsilon}_v^p$. Otra solución que se utiliza muy a menudo, es la de limitar el dominio del criterio de fluencia de Mohr-Coulomb en la zona de tracción total, dentro del espacio de tensiones principales, con un *criterio de barrera* que no es otra cosa que una *disminución de tensión* llevada a cabo mediante el criterio de Rankine [33][126] (***apart. Ap-I.3.f***). Pero esta combinación de criterios (Mohr-Coulomb con Rankine), adolece de algunos inconvenientes que se indican en el ***apart. Ap-I.3.f***.

Con el fin de poder trabajar con plasticidad asociada, y de evitar el inconveniente que presenta la utilización de la función de Mohr-Coulomb definida con un ángulo de rozamiento interno muy alto (***apart. Ap-I.3.f***), se propone en este apartado una *simple modificación del criterio original* antes mencionado, consistente en afectar la tensión principal mayor σ_1 de un parámetro de ajuste

α_R que permite regular la relación de resistencia uniaxial, hasta cumplir con el valor deseado. Esto es, a partir de la *ec.(Ap-I.84)* se tiene:

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma}, c, \phi, \alpha_R) \;=\; \left(\frac{\alpha_R\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right) \;+\; \left(\frac{\alpha_R\sigma_1 + \sigma_3}{2}\right) \; sin\,\phi \;-\; c\;\; cos\,\phi \;=\; 0$$

(An-C.1)

siendo:

$\sigma_1 = \sigma^{max}$: *Tensión principal mayor* ,

$\sigma_3 = \sigma^{min}$: *Tensión principal menor* ,

c : *Cohesión interna entre partículas del sólido. Apart. IV.4.b.* ,

ϕ : *Ángulo de rozamiento interno entre partículas del sólido. Apart. IV.4.c.*

α_R : *Parámetro de ajuste de la tensión principal mayor* σ_1 .

operando algebraicamente con ésta, puede ser presentada en forma análoga a la *ec.(Ap-I.89)*:

$$\sigma^{min} \;=\; \alpha_R \, \sigma^{max} \; R_{Mohr} \;-\; 2\; c\; \sqrt{R_{Mohr}} \qquad \textit{(An-C.2)}$$

siendo:

$$R^0 = R_{Mohr} = \left.\frac{|\sigma_C^0|}{|\sigma_T^0|}\right|_{Mohr} \;=\; tan^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right) \quad ,$$

A partir de la *ec.(An-C.2)* se puede obtener el valor de α_R necesario para cumplir con la relación de resistencia uniaxial requerida $R'_{Mohr} = \alpha_R \; R_{Mohr}$, cualquiera que sea el ángulo de rozamiento interno ϕ que se proponga (cuidando que este ángulo esté comprendido entre $0^o < \phi < 90^o$). Esto es:

$$\begin{cases} \textit{para:} \quad \sigma^{max} = 0 \quad \longrightarrow \quad \sigma^{min} = -\ 2\ c\ \sqrt{R_{Mohr}} \\ \\ \textit{para:} \quad \sigma^{min} = 0 \quad \longrightarrow \quad \sigma^{max} = \dfrac{2\ c}{\alpha_R\ \sqrt{R_{Mohr}}} \end{cases}$$

(An-C.3)

resultando como es obvio:

$$R^0 \ = \ R'_{Mohr} = \frac{|\sigma_C^0|}{|\sigma_T^0|} = \frac{|\sigma^{min}|}{|\sigma^{max}|} = \frac{2\ c\ \sqrt{R_{Mohr}}}{\dfrac{2\ c}{\alpha_R\ \sqrt{R_{Mohr}}}} \ = \ \alpha_R\ R_{Mohr}$$

obteniendose, a partir de esta última, la expresión del ángulo de rozamiento interno ϕ , en función de la relación de resistencia uniaxial requerida R'_{Mohr} , y el parámetro de ajuste α_R :

$$\phi \ = \ 2\ \left[arctan\left(\sqrt{\frac{R'_{Mohr}}{\alpha_R}} \right) - \frac{\pi}{4} \right] \qquad \text{(An-C.4)}$$

Para formular la *ec.(An-C.1)* en función de los invariantes del tensor de tensiones $\boldsymbol{\sigma}$ y de su desviador $\boldsymbol{s}$, es necesario partir de la expresión de las tensiones principales en función de dichos invariantes (*ec.(An-F.35)*). Esto es:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix} \ = \ \frac{2\ \sqrt{J_2}}{\sqrt{3}} \begin{Bmatrix} sin(\theta + 2\frac{\pi}{3}) \\ sin(\theta) \\ sin(\theta + 4\frac{\pi}{3}) \end{Bmatrix} \ + \ \frac{I_1}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \qquad \text{(An-C.5)}$$

pero dado que el criterio de Mohr-Coulomb no tiene en cuenta la tensión principal intermedia σ_2 , se obtiene de la anterior:

$$\begin{cases} \sigma_1 = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\,(J_2)^{1/2}\,sin\left(\theta + 2\dfrac{\pi}{3}\right) \;+\; \dfrac{I_1}{3} \;= \\[2ex] \qquad =\; \dfrac{2}{\sqrt{3}}\,(J_2)^{1/2}\left[sin\,\theta\;\; cos\left(\theta + 2\dfrac{\pi}{3}\right) \;+\; cos\,\theta\;\; sin\left(\theta + 2\dfrac{\pi}{3}\right)\right] \;+\; \dfrac{I_1}{3} \\[2ex] \sigma_3 = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\,(J_2)^{1/2}\,sin\left(\theta + 4\dfrac{\pi}{3}\right) \;+\; \dfrac{I_1}{3} \;= \\[2ex] \qquad =\; \dfrac{2}{\sqrt{3}}\,(J_2)^{1/2}\left[sin\,\theta\;\; cos\left(\theta + 4\dfrac{\pi}{3}\right) \;+\; cos\,\theta\;\; sin\left(\theta + 4\dfrac{\pi}{3}\right)\right] \;+\; \dfrac{I_1}{3} \end{cases}$$

operando con éstas, se llega a:

$$\begin{cases} \sigma_1 = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\,(J_2)^{1/2}\,sin\,\theta + (J_2)^{1/2}\,cos\,\theta + \dfrac{I_1}{3} = \sqrt{J_2}\left(cos\,\theta - \dfrac{sin\,\theta}{\sqrt{3}}\right) + \dfrac{I_1}{3} \\[2ex] \sigma_3 = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\,(J_2)^{1/2}\,sin\,\theta - (J_2)^{1/2}\,cos\,\theta + \dfrac{I_1}{3} = \sqrt{J_2}\left(-\,cos\,\theta - \dfrac{sin\,\theta}{\sqrt{3}}\right) + \dfrac{I_1}{3} \end{cases} \tag{An-C.6}$$

de donde resulta :

$$(\alpha_R\sigma_1 - \sigma_3) \;=\; \sqrt{J_2}\left[(1-\alpha_R)\,cos\,\theta + \frac{(1-\alpha_R)}{\sqrt{3}}\,sin\,\theta\right] \;+\; \frac{I_1}{3}(\alpha_R - 1)$$

y: $$(\alpha_R\sigma_1 + \sigma_3) \;=\; \sqrt{J_2}\left[(1+\alpha_R)\,cos\,\theta - \frac{(1+\alpha_R)}{\sqrt{3}}\,sin\,\theta\right] \;+\; \frac{I_1}{3}(\alpha_R + 1) \tag{An-C.7}$$

sustituyendo estas dos últimas en la *ec.(An-C.1)*, resulta la función de Mohr-Coulomb, expresada en forma análoga a la *ec.(Ap-I.85)*:

$$\mathcal{F}(I_1, J_2, \theta, c, \phi, \alpha_R) = \frac{I_1}{3}\mathbb{K}_3 + \sqrt{J_2}\left(\mathbb{K}_1\, cos\,\theta - \mathbb{K}_2 \frac{sin\,\theta\, sin\,\phi}{\sqrt{3}}\right) - c\, cos\,\phi = 0 \tag{An-C.8}$$

siendo:

$$\begin{aligned}
\mathbb{K}_1 &= \frac{(\alpha_R + 1)}{2} - \frac{(1-\alpha_R)}{2}\, sin\,\phi \\
\mathbb{K}_2 &= \frac{(\alpha_R + 1)}{2} - \frac{(1-\alpha_R)}{2}\frac{1}{sin\,\phi} \\
\mathbb{K}_3 &= \frac{(\alpha_R + 1)}{2}\, sin\,\phi - \frac{(1-\alpha_R)}{2} = \mathbb{K}_2\ sin\,\phi
\end{aligned}$$

También se puede escribir ésta en función de los invariantes definidos en el espacio de Westergard. Esto es, multiplicando la *ec.(An-C.8)* por $\sqrt{3}$, resulta:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}(\xi, \rho, \theta, c, \phi, \alpha_R) = \\
&\quad = \sqrt{2}\xi\mathbb{K}_3 + \sqrt{3}\rho\left(\mathbb{K}_1\, cos\,\theta - \mathbb{K}_2\frac{sin\,\theta\ \ sin\,\phi}{\sqrt{3}}\right) - \sqrt{6}c\ \ cos\,\phi = 0
\end{aligned} \tag{An-C.9}$$

expresión que da una superficie de fluencia con meridianos rectos, y que permite ajustar la relación de resistencia uniaxial para un dado ángulo de rozamiento interno **fig.(An-C.1)**.

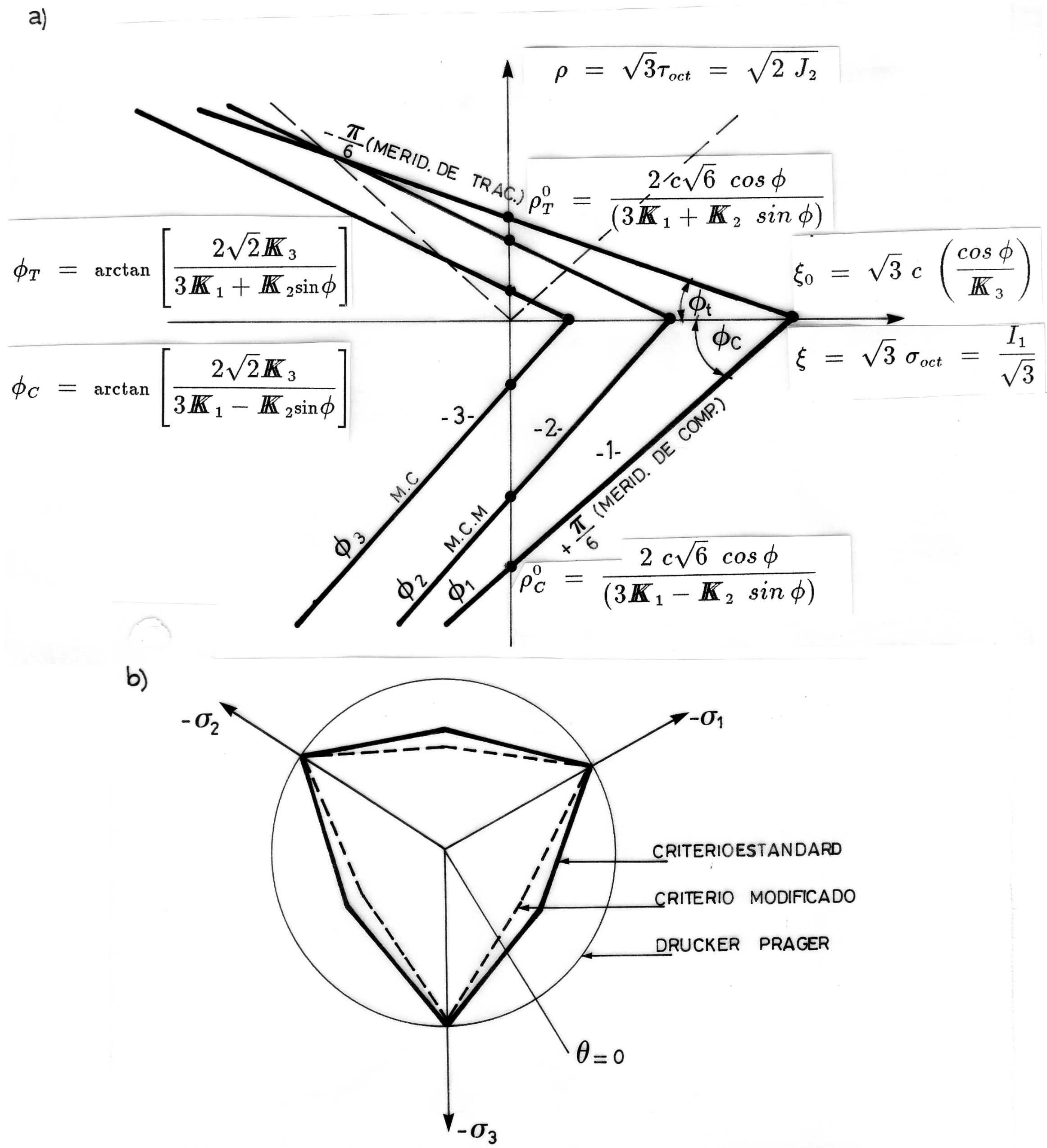
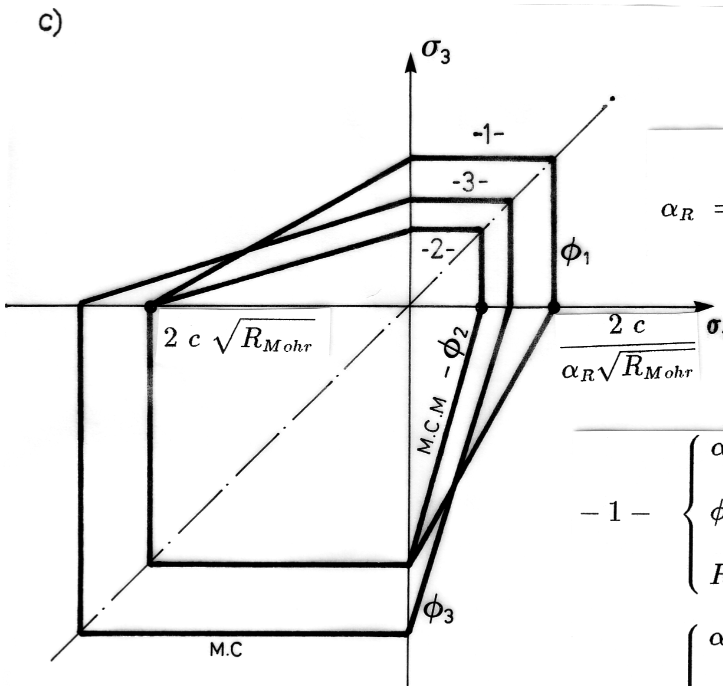


fig.(An-C.1): Criterio de fluencia de Mohr-Coulomb modificado: a) Según los meridianos de tracción y compresión máxima. b) Según un plano octaédrico cualquiera.



$$\alpha_R = \frac{R'}{R_{Mohr}} = \frac{\left|\dfrac{\sigma_C^0}{\sigma_T^0}\right|}{\tan^2\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\phi}{2}\right)}$$

$$-1- \quad \begin{cases} \alpha_R = 1 \\ \phi = \phi_1 \\ R' = \left(R_{Mohr\,\phi_1}\right) \end{cases}$$

$$-2- \quad \begin{cases} \alpha_R = 2 \\ \phi = \phi_2 \equiv \phi_1 \\ R' = 2\,\left(R_{Mohr\,\phi_1}\right) \end{cases}$$

$$-3- \quad \begin{cases} \alpha_R = 1 \\ \phi = \phi_3 \geq \phi_1 \\ R' = \left(R_{Mohr\,\phi_1}\right) \equiv 2\,\left(R_{Mohr\,\phi_2}\right) \end{cases}$$

fig.(An-C.1): Criterio de fluencia de Mohr-Coulomb modificado: c) Según el plano principal $\sigma_1 - \sigma_3,\ \sigma_2 = 0$.

An-C.2.- REGLA DE FLUJO ASOCIADA A LA FUNCION DE FLUENCIA DE MOHR-COULOMB MODIFICADO.

La regla de flujo asociada a esta *función modificada*, para un problema sin degradación de rigidez, resulta de una generalización de la expresión correspondiente a la función original de Mohr-Coulomb. Expresando el *vector de flujo plástico* en la forma detallada en el ***apart. An-G.1***, a partir de los invariantes del tensor de tensión y su desviador, resulta:

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{g} = C_1\, \boldsymbol{g}_1 + C_2\, \boldsymbol{g}_2 + C_3\, \boldsymbol{g}_3 \quad ; \quad \forall \quad -\tfrac{\pi}{6}<\theta<\tfrac{\pi}{6} \qquad \text{(An-C.10)}$$

donde los vectores $\boldsymbol{g}_1$, $\boldsymbol{g}_2$, y $\boldsymbol{g}_3$ son independientes de la función de potencial plástico (***apart. An-G.1***), en tanto las constantes C_i sí dependen de esta función, y valen:

$$C_1 = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial I_1} = \frac{\mathbb{K}_3}{3} \quad ;$$

$$C_2 = \frac{\partial \mathcal{G}}{(J_2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \theta}\, \frac{tan(3\theta)}{(J_2)^{\frac{1}{2}}} = \left(\mathbb{K}_1\, cos\,\theta - \mathbb{K}_2 \frac{sin\,\theta\;\; sin\,\phi}{\sqrt{3}}\right) -$$

$$- \frac{tan(3\theta)}{(J_2)^{\frac{1}{2}}} \left(-\mathbb{K}_1\, sin\,\theta - \mathbb{K}_2 \frac{cos\,\theta\;\; sin\,\phi}{\sqrt{3}}\right)$$

$$C_2 = cos \left[\mathbb{K}_1 (1 + tan(3\theta)\;\; tan\,\theta) + \mathbb{K}_2 \frac{sin\,\phi}{\sqrt{3}} (tan(3\theta) - tan\,\theta)\right] \quad ;$$

$$C_3 = -\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \theta}\, \frac{\sqrt{3}}{2\; cos(3\theta)}\, \frac{1}{(J_2)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$C_3 = \frac{\sqrt{3}}{2\; cos(3\theta)}\, \frac{(J_2)^{\frac{1}{2}}}{(J_2)^{\frac{3}{2}}} \left(-\mathbb{K}_1\, sin\,\theta - \mathbb{K}_2 \frac{cos\,\theta\;\; sin\,\phi}{\sqrt{3}}\right)$$

$$C_3 = \frac{(\mathbb{K}_1 \sqrt{3}\, sin\,\theta + \mathbb{K}_2\, cos\,\theta\, sin\,\phi)}{(2 J_2\, cos(3\theta))} \quad ;$$

Para salvar las singularidades que se presentan en la definición del flujo plástico, en correspondencia con los puntos angulosos, se sigue el método del *redondeo de* *aristas* (***apart. Ap-I.3.g***). Para ello, se sustituyen los valores de θ correspondiente a cada punto singular en la superficie de Mohr-Coulomb *ec.(An-C.8)*, de donde resulta una particularización de ésta en las aristas.

$$\begin{cases} \text{Para:} \quad \theta = \dfrac{\pi}{6} \longrightarrow \dfrac{I_1}{3}\mathbb{K}_3 + \dfrac{\sqrt{J_2}}{2}\left[\mathbb{K}_1\sqrt{3} - \mathbb{K}_2\dfrac{sin\,\phi}{\sqrt{3}}\right] - c\ cos\,\phi = 0 \\ \\ \text{Para:} \quad \theta = -\dfrac{\pi}{6} \longrightarrow \dfrac{I_1}{3}\mathbb{K}_3 + \dfrac{\sqrt{J_2}}{2}\left[\mathbb{K}_1\sqrt{3} + \mathbb{K}_2\dfrac{sin\,\phi}{\sqrt{3}}\right] - c\ cos\,\phi = 0 \end{cases} \tag{An-C.11}$$

con lo que se obtienen las siguientes constantes C_i para los puntos singulares:

$$\begin{cases} \text{Para:} \quad \theta = \dfrac{\pi}{6} \longrightarrow \begin{cases} C_1 = \dfrac{1}{3}\ \mathbb{K}_3 \\ C_2 = \dfrac{1}{2}\ \left[\mathbb{K}_1\sqrt{3} - \mathbb{K}_2\dfrac{sin\,\phi}{\sqrt{3}}\right] \\ C_3 = 0 \end{cases} \\ \\ \text{Para:} \quad \theta = -\dfrac{\pi}{6} \longrightarrow \begin{cases} C_1 = \dfrac{1}{3}\ \mathbb{K}_3 \\ C_2 = \dfrac{1}{2}\ \left[\mathbb{K}_1\sqrt{3} + \mathbb{K}_2\dfrac{sin\,\phi}{\sqrt{3}}\right] \\ C_3 = 0 \end{cases} \end{cases} \tag{An-C.12}$$

(CAPITULO IV) ANEXO D

ABLANDAMIENTO POR DEFORMACION COMO PROPIEDAD DEL MATERIAL. DIRECIONALIDAD DEL DAÑO PLASTICO – POST-PROCESO DE RESULTADOS.

An-D.1.- ABLANDAMIENTO POR DEFORMACION COMO PROPIEDAD DEL MATERIAL.

An-D.1.a- Introducción.

Los materiales friccionales sometidos a procesos inelásticos provocados por la acción de deformaciones impuestas, exhiben después de un cierto límite un fenómeno denominado *ablandamiento*. Durante un proceso de carga* cuasi-estático uniaxial, este ablandamiento se presenta físicamente como una disminución de la tensión total acompañado de un incremento en las deformaciones [7] . Este mismo concepto ha sido expresado por K.Z. Valanis en el espacio *n-dimensional* [34][116][140] , de la siguiente forma:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^T \, \dot{\boldsymbol{\epsilon}} < 0 \qquad , \tag{An-D.1}$$

Esta ecuación, establece una *condición suficiente* para definir la existencia de ablandamiento durante el comportamiento de un punto del sólido. En la ec.(An-D.1), el incremento temporal de tensión viene definido por la ec.(IV.103), como:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{C}_T^{ep}(\hat{\boldsymbol{d}}^e, \hat{\boldsymbol{d}}^p) \; \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \qquad , \tag{An-D.2}$$

donde $\boldsymbol{C}_T^{ep}(\hat{\boldsymbol{d}}^e, \hat{\boldsymbol{d}}^p)$ es el tensor de rigidez física tangente degradado, expresado como matriz de (6×6) . Sustituyendo la ec.(An-D.1) en la ec.(An-D.2), se obtiene la siguiente forma cuadrática:

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^T \; \boldsymbol{C}_T^{ep}(\hat{\boldsymbol{d}}^e, \hat{\boldsymbol{d}}^p) \; \dot{\boldsymbol{\epsilon}} < 0 \qquad ; \quad \forall \quad \epsilon_{ij} \neq 0 \qquad , \tag{An-D.3}$$

* *Nota: Entiendase el concepto de "carga", en el sentido dado por la "condición de consistencia plástica" de Prager ec.(Ap-I.58).*

de donde se deduce que para que exista un proceso de *ablandamiento* en un punto del sólido, se debe cumplir que la matriz $\boldsymbol{C}_T^{ep}(\hat{\boldsymbol{d}}^e, \hat{\boldsymbol{d}}^p)$ sea definida negativa [7][116] .

Como se ha mencionado en los ***apartados. IV.1 y IV.4.b***, subsiste en el criterio de muchos investigadores, la hipótesis de que la micro-fisuración en los materiales friccionales, se debe a una pérdida instantánea de la cohesión intergranular (consecuencia del deslizamiento sufrido entre granos o partículas del sólido [11][23][44][95][97][129]), luego de superar ciertos límites de deformación. Debido a esto, se considera que el *ablandamiento* es un fenómeno inexistente a nivel intergranular [11] , manifestándose solamente a nivel macroscópico, como consecuencia del *comportamiento promedio de una zona del sólido de dimensiones finitas*. Coincidente con este razonamiento, varios investigadores [50][51][52][116] , han puesto en duda la validez del concepto de *ablandamiento como una propiedad de cada punto del material* (fenómeno local), considerando que es un *fenómeno de estructura* o de conjunto [43] (fenómeno no local) que provoca una situación indeseable de inobjetividad en la respuesta [50][51][52][140] , y han propuesto modelos constitutivos que parten de la hipótesis de no admitir el ablandamiento como una propiedad del material [51] . No obstante, en total acuerdo con esta hipótesis, el modelo que se presenta realiza un *análisis numérico en el espacio discreto*, donde cada punto de este espacio representa el comportamiento de los infinitos puntos materiales encerrados en su área de influencia. Por ello, se considera que a este nivel, sí tiene sentido admitir el ablandamiento como un fenómeno dependiente del material y del tamaño de la zona de influencia del punto en el espacio discreto. Este concepto es aceptado implícitamente por distintos investigadores [5][7][11][12][14][18][23][26][30][54][56][123][124] , quienes consideran de una u otra forma la *medida del punto discreto* en la ecuación constitutiva.

An-D.1.b- Introducción al fenómeno de localización de deformaciones y bifurcación en la respuesta de un sólido cargado.

Cuando el sólido ha sido deformado suficientemente dentro del rango plástico, más allá del pico de tensiones máximas [11] , se observa frecuentemente que a partir de un cierto instante del proceso de carga cuasi-estático, se produce una *fuerte concentración de deformaciones* en una zona muy limitada [100][118] , que en el presente modelo constitutivo se ha denominado *zona de daño plástico*. Este fenómeno, llamado también *localización de deformaciones*, ocurre en una gran variedad de materiales dúctiles y frágiles, y a menudo es el motivo que conduce a la rotura del material [100][118] . Una vez que se inicia la localización, comienza a crecer la deformación en la zona dañada, acompañada de una disminución de la deformación (proceso de descarga) en la zona restante no-dañada [11][18][89] **fig.(An-D.1)**. Según algunos investigadores [11][18][89][100][118] , la aparición del *fenómeno de localización de deformaciones* está ligado a una *bifurcación* (***apen. II***) en la respuesta de los puntos situados en la zona de daño. Esto coincide con algunos resultados numéricos obtenidos en el ***cap. V***. También hay otros investigadores que consideran que los fenómenos de localización y bifurcación en la respuesta, no estan asociados entre sí y ocurren en instantes diferentes [18] .

La estructura teórica para el *análisis clásico de bifurcación en elasto-plasticidad*, ha sido presentada por R. Hill dentro de su teoría general de unicidad y estabilidad para sólidos elasto-plásticos (1958) [69][89] , donde relaciona la bifurcación en la respuesta con una localización de deformaciones en una banda, denominada banda transversal. Este estudio teórico, tema que no es objeto de la tesis, ha sido ampliado por Rudnicki and Rice (1975) [89] , y en un reciente trabajo de K. Willam and N. Solbh [142] se considera que la bifurcación en la respuesta no sólo debe se analizada a partir de un simple estudio de valores propios de $\boldsymbol{C}_T^{ep}(\hat{\boldsymbol{d}}^e, \hat{\boldsymbol{d}}^p)$, sino que también debe ser complementado con el estudio de las *condiciones críticas de propagación de ondas de aceleración plana*. Por ello, estos últimos autores proponen un análisis de valores propios del **tensor acústico** de segundo orden, o **matriz de localización** [100] : $Q_{T\,jk}(\boldsymbol{n}) \;=\; n_i\; C^{ep}_{T\;ijkl}\; n_l$, donde $\boldsymbol{n}$ representa el *vector normal al plano de discontinuidad de deformaciones* o plano de fallo, que se forma por efecto del fenómeno de la localización de deformaciones. Para mayores detalles sobre este tema, se recomienda consultar las referencias [18][21][69][89][100][111][142] .

An-D.1.c- Objetividad en la respuesta y su relación con la localización de deformaciones – Energías disipadas por unidad de área G^f y G^c .

Como se ha visto, el *ablandamiento* da origen a rigideces tangentes $\boldsymbol{C}_T^{ep}(\hat{\boldsymbol{d}}^e, \hat{\boldsymbol{d}}^p)$ definidas negativas y esto junto a la definición negativa de la *matriz acústica* $\boldsymbol{Q}_T$, determinan la localización de deformaciones, fenómeno que podría estar ligado a la bifurcación de la respuesta en el punto [100]

El problema de la *objetividad en la respuesta* de los modelos basados en *formulaciones locales*, que consideran el *ablandamiento* como una propiedad del material en el punto de análisis, no está totalmente aclarado, habiendo resultado de este tema una gran cantidad de opiniones controvertidas [5][7][11][12][14][18][23][26][30][31][50][51][52][54][56][116][118][123][124][140][148]. No obstante, se dará seguidamente una explicación al procedimiento que se ha utilizado en el presente modelo constitutivo, para garantizar la objetividad en la respuesta. Se parte aceptando como hipótesis, que la *localización de deformaciones* define una marcada *zona de daño plástico*, donde se disipa una energía plástica limitada al tamaño de esta zona, mientras tanto fuera de esta zona de daño se desarrolla un proceso de descarga elástico. De acuerdo a este razonamiento, la magnitud de la energía disipada dependerá de las dimensiones de la *zona de daño plástico*, a menos que este tamaño sea tenido en cuenta en la ley constitutiva del material.

Por simplicidad en la explicación, se tratará primeramente la objetividad en un hipotético modelo uniaxial y luego se extenderán las consideraciones al modelo propuesto.

An-D.1.c.1 Problema de objetividad en un hipotético modelo uniaxial.

En un problema uniaxial esquemático, como el de una simple barra constituida de un material homogéneo e isótropo y sin degradación de rigidez, de sección transversal constante **fig.(An-D.1)**, que incluye el *ablandamiento* como propiedad del material, se puede ver en forma sencilla el comportamiento con localización de deformaciones, y también el problema de inobjetividad en la respuesta en caso de no considerar las dimensiones de la zona dañada en la ley constitutiva.

Si se somete la barra de la **fig.(An-D.1)** a sostenidos incrementos de desplazamientos $\dot{\epsilon}$ en sus extremos, llegará el instante del proceso de carga cuasi-estático, en que el nivel de tensiones en cualquier punto del sólido habrá alcanzado la tensión de pico (punto **C**), o **segundo límite de fallo** (***apart. IV.4.b***). A partir de este punto se iniciará un proceso de carga con ablandamiento que continuará con una bifurcación en la respuesta como consecuencia de una localización de deformaciones en una zona del sólido de dimensiones L^p .

La ecuación constitutiva uniaxial tangente, para un material sin degradación de rigidez, es:

$$\dot{\sigma} = E_T \, \dot{\epsilon} \quad , \qquad \text{(An-D.4)}$$

tal que aplicada al ejemplo propuesto, permite escribir:

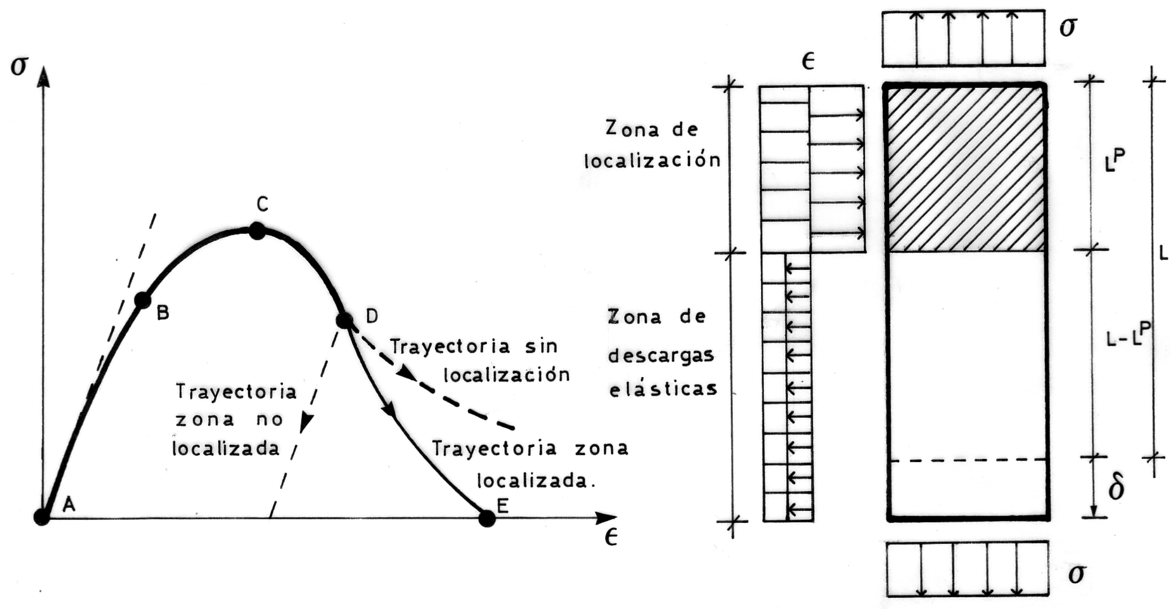


fig.(An-D.1): Localización del daño plástico en una barra sometida a incrementos de desplazamientos controlados en sus extremos.

$$\dot{u} \;=\; \left[\frac{L^p}{E_T} \;+\; \frac{(L-L^p)}{E_T}\right]\;\dot{\sigma} \;=\; \left[\frac{L^p}{E_T} \;+\; \frac{(L-L^p)}{E_S}\right]\;\dot{\sigma} \qquad \textit{(An-D.5)}$$

donde L^p es la longitud de la zona dañada, E_S el módulo de elasticidad secante, y E_T el módulo de elasticidad tangente, que es negativo para un proceso elasto-plástico con ablandamiento. Para un proceso de carga de este tipo, se tiene que cuando crece $\dot{u}$ decrece $\dot{\sigma}$, de donde resulta que la ecuación anterior se cumple siempre que:

$$\left[\frac{L^p}{E_T} \;+\; \frac{(L-L^p)}{E_S}\right] \;<\; 0 \qquad , \qquad \textit{(An-D.6)}$$

siendo ésta la condición que debe cumplir el tamaño de la zona dañada en función de las rigideces secante y tangente:

$$L \;\geq\; L^p \;\geq\; \frac{L}{1-\dfrac{E_S}{E_T}} \tag{An-D.7}$$

Esta condición ha sido establecida por Z. Bažant [5][14] (ver su generalización en el ***apen-II***), y presentada también por N. Ottosen [104], con el fin de establecer una *criterio de estabilidad global para los materiales con ablandamiento por deformación*. Si el fenómeno de localización se produce durante el desarrollo de un proceso elasto-plástico uniaxial, se puede relacionar la *ec.(An-D.7)* con la pendiente de la curva uniaxial* $\sigma - \epsilon^p$ **fig.(An-D.2)**. Así , esta pendiente puede ser expresada como una función del tamaño de la zona dañada. Esto es:

$$A' \;=\; \frac{d\sigma}{d\epsilon^p} \;=\; \frac{d\sigma}{(d\epsilon - d\epsilon^e)} \;=\; -\,\frac{E_S}{1-\dfrac{E_S}{E_T}} \tag{An-D.8}$$

sustituyendo ésta en la *ec.(An-D.7)*, resulta:

* *Nota: Para el caso particular de un material del tipo de Prandtl-Reus (**apart. Ap-I.3.c**), la pendiente de la curva uniaxial $\sigma - \epsilon^p$ coincide con el "parámetro de endurecimiento plástico" A ec.(Ap-I.51)* [143]*. Para este material, se tiene que: $\boldsymbol{h}_\kappa = \boldsymbol{\sigma}$ ec.(Ap-I.38), también se tiene una función de fluencia del tipo de la de Von-Mises: $\mathcal{F} = \sqrt{3J_2} - \overline{\sigma}(\kappa) = 0$ ec.(Ap-I.73), y un incremento de trabajo plástico expresado por la ec.(Ap-I.39,b) $\dot{\kappa} = \overline{\sigma}\,\dot{\overline{\epsilon}}^p$. Sustituyendo todo esto en la expresión del parámetro de endurecimiento plástico ec.(Ap-I.51), y considerando el teorema de Euler para funciones homogéneas de grado n en $\boldsymbol{\sigma}$, se obtiene:*

$$A = \left[\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \kappa}\;\left(\boldsymbol{h}_\kappa{}^T\,\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right)\right] = \left[\frac{d\overline{\sigma}}{d\overline{\epsilon}^p}\;\frac{1}{\overline{\sigma}}\;(\overline{\sigma})\right] \;\equiv\; A' = \frac{d\overline{\sigma}}{d\overline{\epsilon}^p}$$

En un caso general, para materiales que no coinciden con el de Prandtl-Reus, sólo se tiene proporcionalidad entre A y A' .

$$L \;\geq\; L^p \;\geq\; L\left[-\frac{A'}{E_S}\right] \qquad \textit{(An-D.9)}$$

de donde se deducen las condiciones de extremo de A' **fig.(An-D.2)**, las que coinciden con las de Pietruszczac-Mróz [104][111] :

$$\begin{cases} \textit{sí} : \quad L^p \to L \quad \Rightarrow \quad |-A'| \to |E_S| \;, & \textit{(plasticidad con ablandamiento)} \\ \textit{sí} : \quad L^p \to 0 \quad \Rightarrow \quad |-A'| \to 0 \;, & \textit{(plasticidad perfecta)} \end{cases}$$

(An-D.10)

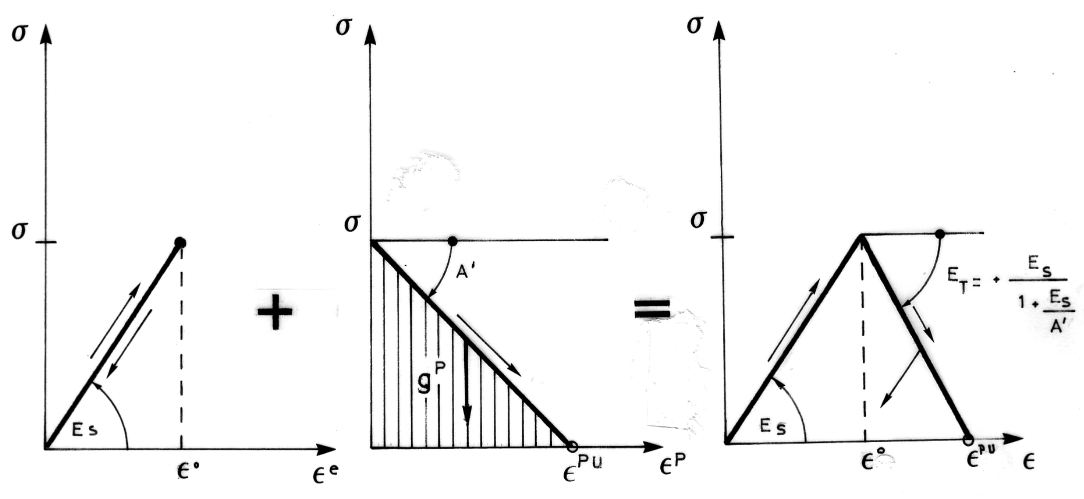


fig.(An-D.2): Esquema uniaxial de la respuesta elasto-plástica de un punto de un material con ablandamiento.

Por otro lado, para este problema uniaxial, la *densidad total de energía disipada* o *energía específica plástica* es igual al área encerrada por la curva $\sigma-\epsilon^p$, o sea:

$$g^p = \int_{t=0}^{\infty} \boldsymbol{\sigma}^T \, \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \, dt = \int_{t=0}^{\infty} \sigma \, \dot{\epsilon}^p \, dt \quad , \tag{An-D.11}$$

y la energía disipada por todo el sólido será:

$$W^p = \int_{V^p} g^p \;\; dV^p \tag{An-D.12}$$

Se puede probar para este ejemplo simple, con ablandamiento lineal, que cualquiera sea el tamaño de la zona dañada L^p , siempre que cumpla con la *ec.(An-D.9)*, se tendrá la misma energía disipada W^p . Para ello si la longitud de la zona dañada L^p se incrementa ϱ veces, para mantener la misma energía disipada al finalizar el proceso de carga cuasi-estático, será necesario corregir la pendiente A' de la curva uniaxial $\sigma - \epsilon^p$ en la misma proporción. Esto es:

$$\varrho \; L^p \; = \; L \; \left[- \; \frac{\varrho \; A'}{E_S} \right] \tag{An-D.13}$$

resultando de aquí , para una función de ablandamiento lineal **fig.(An-D.2)**, una deformación plástica última, igual a:

$$\epsilon^{pu} \; = \; \frac{\sigma^{pic}}{\varrho \; A'} \tag{An-D.14}$$

y una densidad de energía disipada plásticamente, igual a:

$$g^p \; = \; \frac{1}{2} \; \frac{\left(\sigma^{pic}\right)^2}{\varrho \; A'} \quad , \tag{An-D.15}$$

que sustituída en la *ec.(An-D.12)* permite comprobar que la energía disipada en todo el volumen del sólido es independiente de ϱ , o sea:

$$W^p = \int_{\varrho V^p} g^p \ dV^p \ = \ g^p \ \varrho \ V^p \ = \ \frac{1}{2} \ \frac{\left(\sigma^{pic}\right)^2}{A'} \ V^p \qquad \text{(An-D.16)}$$

Como se ha visto, la objetividad ha sido lograda en función de la condición *ec.(An-D.9)*, la que exije una dependencia entre la pendiente de la curva uniaxial $\sigma - \epsilon^p$ (o indirectamente la densidad de energía disipada) y la longitud de daño plástico, quedando la ley constitutiva del material *ec.(An-D.4)*, para este caso particular:

$$\dot{\sigma} \ = \ E_T \ \dot{\epsilon} \ = \ \frac{E_S}{1 - \frac{E_S}{A'}} \ \dot{\epsilon} \qquad \text{(An-D.17)}$$

donde $A' = - \ E_S \ \frac{L^p}{L}$, por lo tanto el incremento de tensión resulta:

$$\dot{\sigma} \ = \ \left[E_S \ \frac{L^p}{L^p - L} \right] \ \dot{\epsilon}^p \qquad \text{(An-D.18)}$$

De esta expresión simple, se puede ver que el *ablandamiento* no es una propiedad exclusiva del material E_S , sino que depende también del tamaño de la zona dañada L^p . Se podría decir, que la *ec.(An-D.18)* constituye una forma de presentar una *formulación no-local* a partir de una ecuación constitutiva que originalmente dependía solamente del punto mismo (*formulación local*).

Es importante observar en la *ec.(An-D.12)*, que la energía total disipada ha sido obtenida a través de una integración en el volumen dañado. Si se quiere, se puede integrar sobre el volumen total, previa consideración de la relación de tamaño que hay entre este volumen y el de la zona dañada. Esto es:

$$r_v \;=\; \frac{V^p}{V} \quad \rightarrow \quad dV^p \;=\; r_v\, dV \qquad \textit{(An-D.19)}$$

sustituyendo ésta en la *ec.(An-D.12)*, resulta:

$$W^p = \int_V g^p\; r_v\; dV \qquad \textit{(An-D.20)}$$

Esta relación de tamaño, es otra forma de introducir la influencia del comportamiento no-local, sobre la energía específica disipada por cada punto dañado.

- **Energía específica plástica para un proceso de tracción uniaxial – Relación con la energía de fractura G^f .**

La **mecánica de fractura**, presenta la *energía de fractura por unidad de área* G^f [10][48] como una propiedad del material, y la define como *la energía que es necesario disipar para abrir una fisura de área unitaria*. Siguiendo con el esquema uniaxial propuesto, se tendrá una energía disipada por unidad de área, para una fisura totalmente abierta, igual a **fig.(An-D.3)** [112] :

$$G^f \;=\; \frac{W^f}{A^f} \qquad \textit{(An-D.21)}$$

donde W^f es la energía disipada al final del proceso de carga cuasi-estático, y A^f el área total de la fisura abierta.

Para un modelo de material basado en la *mecánica de los sólidos continuos*, como el que se presenta, será esta energía el parámetro vinculante con la *mecánica de fractura*, que permita obtener objetividad en la respuesta [10] . Para ello, se hace la hipótesis de que la energía total disipada durante un proceso de tracción uniaxial elasto-plástico con ablandamiento y sin degradación de rigidez W_T^p , es igual a la energía total disipada por un fenómeno de fractura W^f . Esto es:

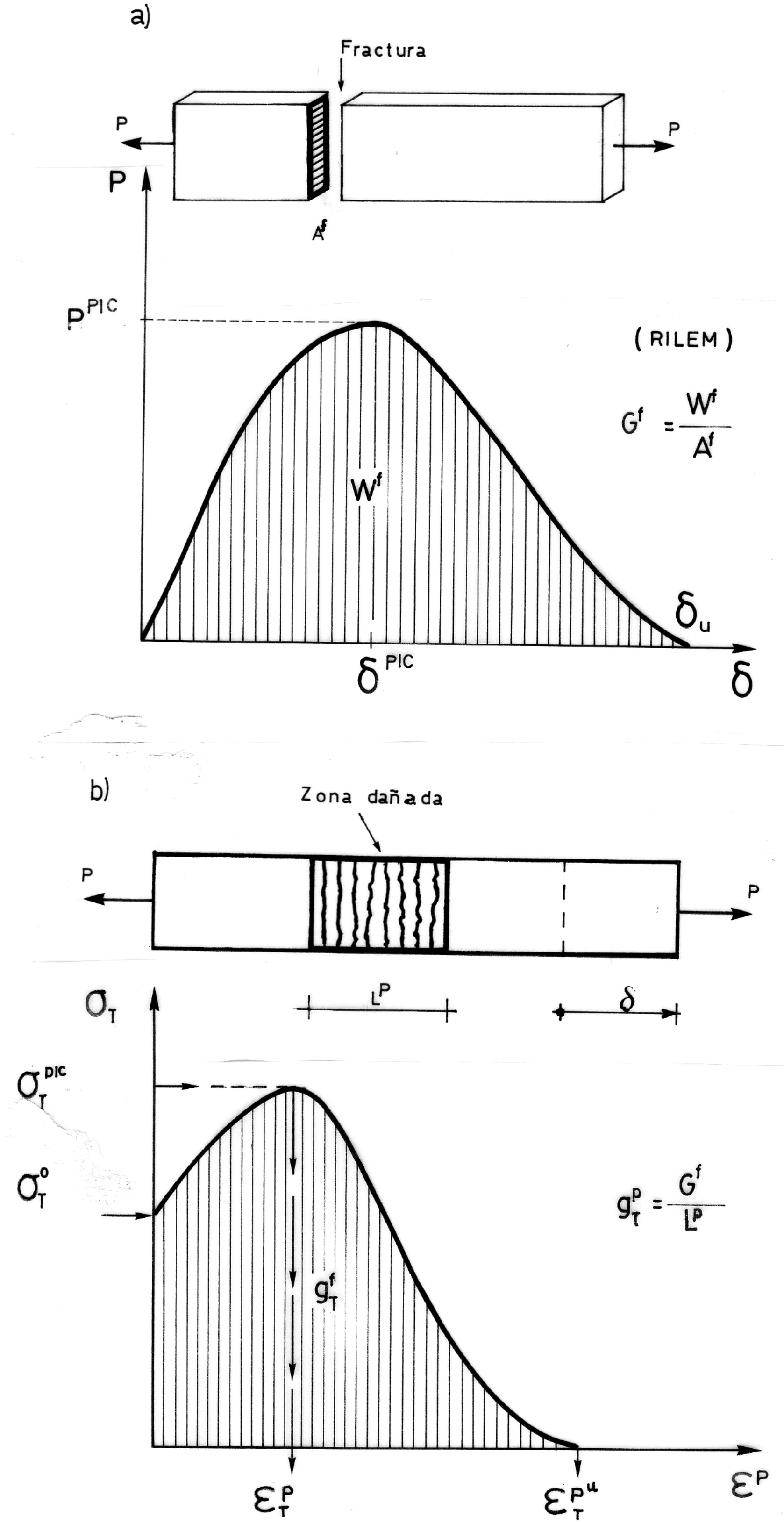


fig.(An-D.3): Esquema de interpretación del daño: a) por la mecánica de fractura, y b) por la mecánica del contínuo.

$$W^f = G^f \, A^f \equiv W_T^p = \int_V g_T^p \, \frac{V^p}{V} \, dV \qquad \text{(An-D.22)}$$

siendo:

g_T^p : *la energía específica plástica para un proceso de tracción pura.*

Considerando que en el continuo la longitud de la zona dañada vale $L^p = V^p/A^f$ **fig.(An-D.3)**, resulta de la *ec.(An-D.22)* la siguiente energía de fractura:

$$G^f = \int_V g_T^p \, \frac{L^p}{V} \, dV \qquad \text{(An-D.23)}$$

de donde resulta para este simple ejemplo, la siguiente relación entre el tamaño de la zona dañada y la energía específica plástica [10] :

$$G^f = g_T^p \, L^p$$

ó

$$g_T^p = \frac{G^f}{L^p} \qquad \text{(An-D.24)}$$

De esta forma, para cada L^p se obtiene una energía específica g_T^p , que sustituída en la *ec.(An-D.11)* o en la *ec.(An-D.14)*, permite encontrar el parámetro A' que interviene en la rigidez tangente y permite definir la ecuación constituiva *ec.(An-D.17)*.

- **Energía específica plástica para un proceso de compresión uniaxial – Relación con la energía G^c**

Si el proceso de carga es de *compresión pura*, sin degradación de rigidez el *daño plástico* vendrá provocado por distintos mecanismos, tales como *aplastamiento, distorsión y fisuración transversal a la deformación inelástica de estiramiento* (casi paralela a la dirección de compresión máxima [44][72][129]). Consecuentemente, si G^c fuese una propiedad del material, no podría ser identificada con ninguno de los mecanismos físicos antes mencionados. Mas bien, ésta puede ser definida hipotéticamente en función de la energía disipada a partir del instante en que se inicia el proceso de localización de deformaciones (en la rama de ablandamiento), dominio en que la respuesta del sólido se torna sensible al tamaño que tiene la malla de elementos finitos en la zona donde se ha localizado el daño plástico. De acuerdo con esto, una definición consistente de la energía específica plástica, para un proceso de compresión pura g_C^p , surge de considerar la siguiente forma aditiva: $g_C^{p\,0} + g_C^{p\,1}$, donde $g_C^{p\,0}$ es el área que existe por debajo de la curva $\sigma - \epsilon^p$ desde el origen hasta el punto donde se inicia la localización de deformaciones **fig.(An-D.4)**, y $g_C^{p\,1}$ es la parte restante del área encerrada por la misma curva, por lo que es identificable con los mecanismos de *fisuración transversal por localización de deformaciones inelásticas de estiramiento*. Debido a esto, $g_C^{p\,0}$ es una energía independiente de la malla de elementos finitos y por lo tanto es una propiedad del material, en cambio $g_C^{p\,1}$ se postula, por conveniencia, como: $g_C^{p\,1} = G^{c1}/L^p$, donde L^p es la longitud de la zona dañada y G^{c1} se adopta como una propiedad del material, que puede obtenerse de la siguiente relación:

$$G^{c1} = \frac{W^{c1}}{A^f} \quad , \qquad \text{(An-D.25)}$$

donde W^{c1} es la energía disipada desde que se inicia la localización de deformaciones en una banda, hasta el final del proceso de carga cuasi-estático, y A^f el área total de las fisuras abiertas **fig.(An-D.4)**.

La explicación del concepto antes mencionado, parte de admitir la hipótesis de que la energía total disipada durante un proceso de compresión uniaxial elasto-plástico con ablandamiento W_C^p , es igual a la energía total disipada en un ensayo uniaxial de compresión uniaxial W^c , que vale:

$$W^c = W^{c0} + W^{c1} = W^{c0} + G^{c1}\ A^f \ \equiv \ W_C^p = \int_V g_C^{p\,0}\ dV + \int_V g_C^{p\,1}\ \frac{V^p}{V}\ dV \quad ,$$

(An-D.26)

donde W^{c0} y W^{c1} son las energías disipadas por el sólido antes y después del límite de localización respectivamente. Considerando que en el continuo la longitud de la zona dañada vale $L^p = V^p/A^f$ **fig.(An-D.4)**, resulta de la *ec.(An-D.26)* la siguiente energía por unidad de área dañada:

$$G^{c1} \ = \ \int_V g_C^{p\,1}\ \frac{L^p}{V}\ dV \qquad \text{(An-D.27)}$$

de donde resulta para este simple ejemplo, la siguiente relación entre el tamaño de la zona dañada y la energía específica plástica:

$$G^{c1} \ = \ g_C^{p\,1}\ L^p$$

ó

(An-D.28)

$$g_C^{p\,1} \ = \ \frac{G^{c1}}{L^p}$$

De esta forma, para cada L^p se obtiene una energía específica $g_C^{p\,1}$, que sustituída en la *ec.(An-D.11)* o en la *ec.(An-D.14)*, permite encontrar el parámetro A' que interviene en la rigidez tangente y permite definir la ecuación constituiva *ec.(An-D.17)*.

- **Particularización de la longitud de daño al dominio discreto.**

Se hace la hipótesis de que una fisura real (discontinuidad en la masa del sólido) puede ser representada en la *mecánica de los medios continuos* por una *zona*

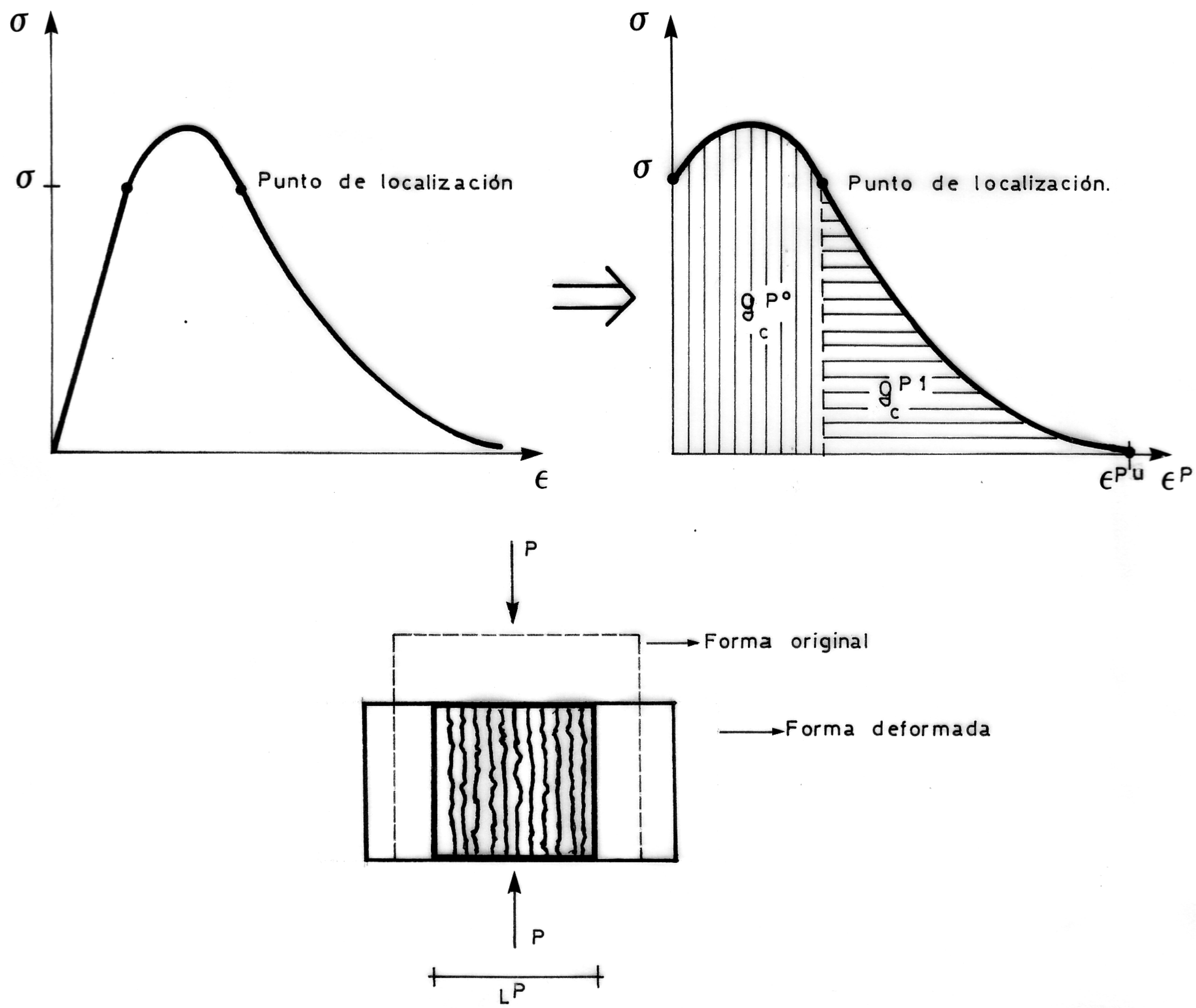


fig.(An-D.4): Esquema de interpretación del daño a compresión

dañada de dimensiones finitas (zona de daño plástico), donde las deformaciones tienden a ser muy grande respecto de las que se desarrollan en la zona no dañada. Por otro lado, también se admite como hipótesis, que en un *sólido* real como el hormigón, en una zona de longitud L^p , se desarrolla un número finito de micro-fisuras separadas una de otras una longitud L' que depende del tamaño del árido grueso [14] **fig.(An-D.5)**. Según esto último, se tiene que en la longidud dañada L^p caben $N^f = L^p/L'$ micro-fisuras, por lo tanto la *ec.(An-D.24)* y la *ec.(An-D.28)* se pueden escribir respectivamente, como:

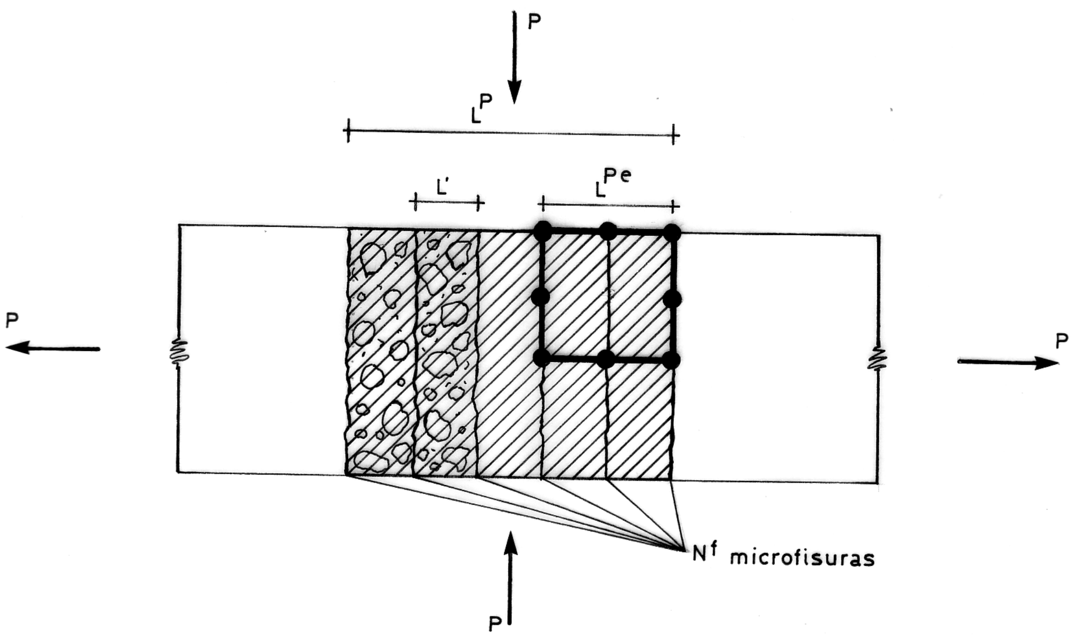


fig.(An-D.5): Micro-fisuración y separación entre micro-fisuras para un material del tipo del hormigón.

$$g_T^p = \frac{G^f}{N^f\ L'} \qquad y, \qquad g_C^{p\,1} = \frac{G^{c1}}{N^f\ L'} \tag{An-D.29}$$

Si ahora se discretiza el dominio a través de elementos finitos, resulta que cada elemento podrá contener un número finito de micro-fisuras, igual a:

$$N^f = \frac{L^{p^e}}{L'} \tag{An-D.30}$$

donde L^{p^e} es la *longitud característica* del elemento finito en la dirección perpendicular a las micro-fisuras. Sustituyendo esta última en la ec.(An-D.29), resultan las energías específicas plásticas afectadas de la *longitud característica del elemento finito*:

$$g_T^p = \frac{G^f}{L^{p^e}} \qquad \text{y,} \qquad g_C^{p\,1} = \frac{G^{c1}}{L^{p^e}} \quad , \tag{An-D.31}$$

para un proceso de tracción y compresión respectivamente. Así , para cada elemento finito, conocida su longitud característica L^{p^e} y las propiedades del material (G^f o G^{c1}), se pueden calcular sus energías específicas plásticas (g_T^p o $g_C^{p\,1}$). En función de éstas, se determinan las correspondientes pendientes de las curvas uniaxiales $\sigma - \epsilon^p$ a tracción y compresión, a partir del punto en que se inicia la localización de deformaciones, y con estas últimas se determinan las rigideces tangentes correspondientes:

$$\dot{\sigma} = E_T \, \dot{\epsilon} = \frac{E_S}{1 - \frac{E_S}{A'}} \; \dot{\epsilon} \tag{An-D.32}$$

con:

$$A' = A'^e = \infty \quad \text{, para todo proceso elástico} \quad ,$$

$$A' = A'^e = \begin{cases} A'^e\left(\dfrac{G^f}{L^{p^e}}\right) & \text{, para un comportamiento elasto-plástico a} \\ & \text{tracción con ablandamiento} \quad , \\ A'^e\left(g_C^{p\,0}\right) & \text{, para un comportamiento elasto-plástico a compresión} \\ & \text{previo a la localización de deformaciones} \quad , \\ A'^e\left(\dfrac{G^{c1}}{L^{p^e}}\right) & \text{para un comportamiento elasto-plástico a compresión} \\ & \text{con ablandamiento posterior a la localización de} \\ & \text{deformaciones} \quad , \end{cases}$$

An-D.1.c.2 Problema de objetividad en el modelo multiaxial de daño plástico.

Se ha visto para el caso simple de comportamiento uniaxial, que la objetividad en la respuesta para un proceso con localización de deformaciones y sin degradación de rigidez, se consigue considerando una ley constitutiva para cada elemento finito, obtenida a partir de una medida característica de este (L^{p^e}) y de un parámetro del material (G^f o G^{c1}), según se desarrolle un proceso de compresión o tracción respectivamente. Así , resulta una energía específica plástica a tracción o compresión (g_T^p o $g_C^{p\,1}$) única para cada elemento finito, que permite formular una rigidez tangente.

El modelo que se propone, considera el problema multiaxial como un *problema uniaxial equivalente* mediante la definición de la variable de daño plástico κ^p formulada en la ec.(IV.18):

$$\dot{\kappa}^p = \boldsymbol{h}_\kappa{}^T(\boldsymbol{\sigma}, \kappa^p, c)\ \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \frac{1}{g_T^p}\ \sigma_T\ \dot{\epsilon}_T^p\ +\ \frac{1}{g_C^p}\ \sigma_C\ \dot{\epsilon}_T^p = \frac{1}{\overline{g}^p}\ \overline{\sigma}\ \dot{\overline{\epsilon}}^p \qquad \text{(An-D.33)}$$

con:

$$g_T^p \ = \ \frac{G^f}{L^{p^e}}$$

$$g_C^p \ = \ g_C^{p\,1} \ = \ \frac{G^{c1}}{L^{p^e}}$$

de donde resulta que la variable de endurecimiento es una energía normalizada con respecto a una *energía uniaxial equivalente* $\overline{g}^p$ (desconocida "a priori"), que resulta de la evolución del proceso mismo, como una combinación de dos sub-procesos objetivos (de tracción y/o compresión pura), que hacen que al final de éste $\kappa^p = 1$, garantizando así que la respuesta multiaxial sea también objetiva.

En forma análoga al comportamiento uniaxial descrito en los sub-apartados anteriores, el valor actualizado de la energía normalizada (variable de daño plástico) κ^p , permite obtener el parámetro de endurecimiento A (pendiente de una curva $\overline{\sigma} - \dot{\overline{\epsilon}}^p$ uniaxial equivalente que encierra una energía específica $\overline{g}^p$)

que interviene en la rigidez tangente de una ley constitutiva definida para cada punto de integración de cada elemento finito:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{D}_S - \frac{\left[\boldsymbol{D}_S \left\{\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right\}\right] \left[\left\{\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right\}^T \boldsymbol{D}_S\right]}{A + \left[\left\{\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right\}^T \boldsymbol{D}_S \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right]} \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \qquad \text{(An-D.34)}$$

con:

$$A = \left[-\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \kappa} \underbrace{\left(\boldsymbol{h}_\kappa{}^T \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right)}_{\overline{\sigma}}\right] = \left[h_c \left(\boldsymbol{h}_\kappa{}^T \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right)\right] = \frac{1}{\dot{\lambda}} h_c \dot{\kappa}^p = \frac{1}{\dot{\lambda}} \dot{c}$$

tal que habrá ablandamiento, siempre que $\dot{c} < 0$, debido a que $\dot{\lambda}$ es siempre positivo o nulo.

An-D.1.c.3 Longitud característica de un elemento finito L^{p^e} .

En los sub-apartados anteriores, se ha introducido el concepto de *longitud característica* de un elemento finito L^{p^e} , como el parámetro geométrico que interviene en la ley constitutiva del material con el fin de hacer que la respuesta del sólido sea insensible al tamaño de la malla de elementos finitos (objetividad). N. Ottosen and O. Dahlblom [101] definen esta longitud característica como *la máxima longitud de la región elemental, medida en forma normal al plano de fisura*. Esta definición coincide con la de Z. Bažant [10][14] . A pesar de la claridad de ésta, para un simple análisis J. Rots et al. [123] muestran que esta medida no solo depende de la geometría de la malla, sino que también está influenciada por el estado de deformaciones al que está sometido el elemento finito, y propone en forma *heurística* una longitud característica para cada cada caso simple **fig.(An-D.6)**.

Según Z. Bažant and B. Oh [14] , para un elemento finito cuadrado de área A^e , totalmente fisurado, con una orientación de fisura que forma un ángulo ϑ con el eje x_1 del sistema de referencias global **fig.(An-D.6)**, la longitud característica vale:

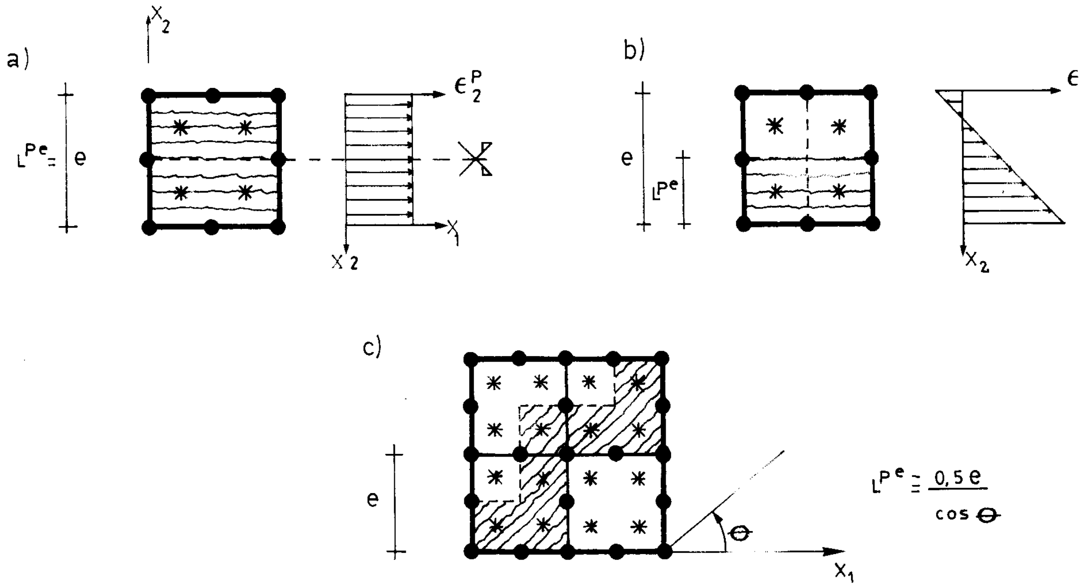


fig.(An-D.6): Estimación de la longitud característica de un elemento finito para diferentes estados de deformación [123] .

$$L^{pe} = \frac{\sqrt{A^e}}{cos\,\vartheta} \qquad \text{(An-D.35)}$$

La controversia sobre la determinación de esta longitud crece más aún cuando algunos investigadores hacen depender a esta medida del volumen de influencia de cada punto de integración numérica [31][93][96] . No obstante, las referencias [94][148] demuestran en forma rigurosa que a partir de una condición de disipación de energía a nivel global (de todo el sólido), se obtiene una longitud característica que depende del tamaño del elemento finito, del campo de desplazamiento que actúa sobre él , y de una función que depende de la orientación de la fisura dentro del elemento finito. Para mayor información al respecto, se recomienda recurrir a la referencia citada, ya que el tema está fuera del alcance de esta tesis.

Una conclusión importante de la referencia [94] , es que para casos simples, cuando los elementos son cuadrangulares y de lados aproximadamente iguales, la longitud característica resulta muy aproximada a la propuesta en la referencia [14] *ec.(An-D.35)*. Durante la pruebas realizadas con el modelo que se propone, se ha utilizado esta última relación obteniendo respuesta satisfactorias. En cada uno de los ejemplos del ***cap. V***, se menciona la longitud característica adoptada, respetando siempre la desigualdad expresada por la *ec.(An-D.241)*.

An-D.2.- DIRECCIONALIDAD DEL DAÑO PLASTICO EN UN PUNTO Y SU RELACION CON EL FLUJO PLASTICO – POST-PROCESAMIENTO DE RESULTADOS.

An-D.2.a- Introducción.

Se ha mencionado en el ***apart. IV.1***, que se puede considerar el daño en cada punto del sólido (daño local) como un fenómeno adireccional, y que la dirección macroscópica (fisura) viene definida por el lugar geométrico de los puntos dañados. No obstante, cada punto del sólido exhibe un comportamiento isotrópico en el espacio de tensiones, en el espacio de deformaciones plásticas se manifiesta una cierta direccionalidad del daño, que está relacionada con la deformación plástica. Así , se admite como hipótesis que la *dirección y magnitud* del daño local, resultan de un análisis del tensor de deformaciones plásticas $\boldsymbol{\epsilon}^p$:

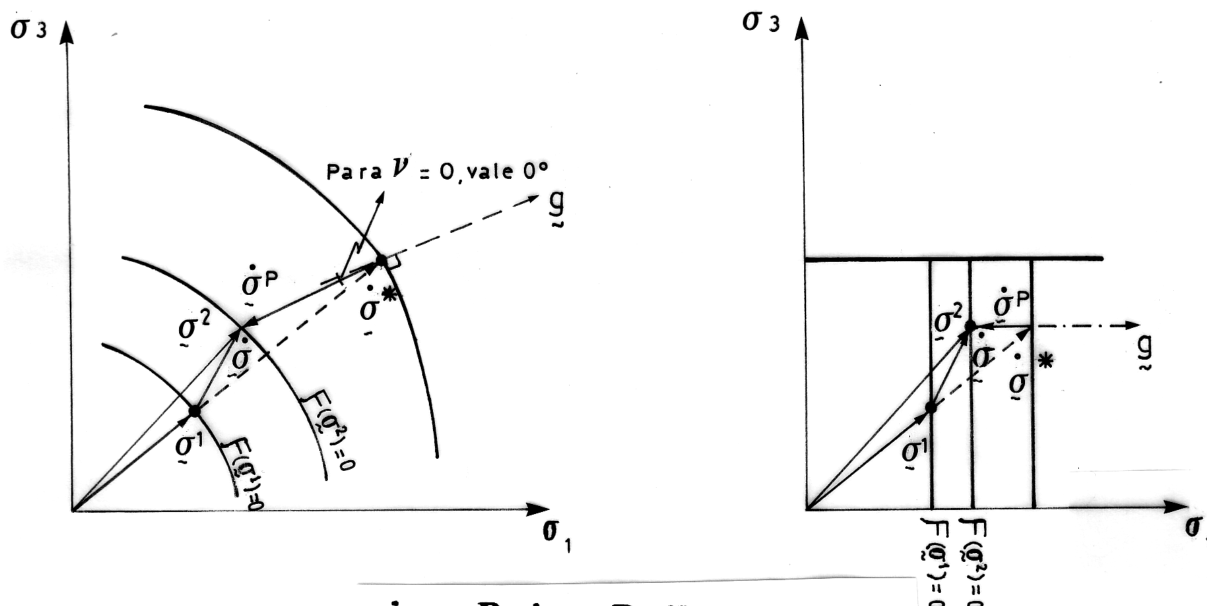
$$\boldsymbol{\epsilon}^p = \int_{t=0}^{t} \dot{\lambda} \, \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \, dt \qquad \textit{(An-D.36)}$$

De esta forma, el parámetro de consistencia plástica $\dot{\lambda}$ puede ser interpretado como la magnitud del incremento del daño en un punto, y el flujo plástico $\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$ como la orientación del daño en el espacio de tensiones principales.

Debido a que el modelo que se presenta no requiere la *dirección ni la magnitud del daño* durante el proceso resolutivo, esta hipótesis no necesita formar parte del cálculo, sino que sólo se la tiene en cuenta como un post-procesamiento de resultados, para mayor información sobre la respuesta del sólido. Los resultados obtenidos con este análisis (***cap. V***) coinciden muy bien con los estudios experimentales y también con los obtenidos con otros modelos ortótropos, que sí necesitan determinar la dirección del daño durante el proceso de cálculo.

An-D.2.b- Dirección del daño plástico en función de las deformaciones plásticas – Relación con otros modelos.

La ecuación constitutiva *ec.(IV.93)*, muestra que el incremento de deformación plástica $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p$ exige una relajación del incremento de tensión $\dot{\boldsymbol{\sigma}}^p$ en la dirección del flujo plástico $\dfrac{\partial \mathcal{G}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$ **fig.(An-D.7)**. Este decrecimiento de la tensión en una cierta dirección dentro del espacio de tensiones, da muestra de la direccionalidad local del daño plástico. Así , el modelo entiende como dirección principal de daño (normal al plano de daño local), la deformación plástica principal mayor ϵ_1^p .



$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{D}_S\,\dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \boldsymbol{D}_S\,\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{D}_S\,\dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \dot{\lambda}\,\boldsymbol{D}_S\,\boldsymbol{g} = \dot{\boldsymbol{\sigma}}^* - \dot{\boldsymbol{\sigma}}^p$$

fig.(An-D.7): Dirección del vector de flujo plástico y de tensiones, en el espacio de tensiones principales: a) para una genérica función de potencial $\mathcal{G}$, b) para una función de potencial del tipo Rankine.

Según esta hipótesis, se puede demostrar también que los modelos constitutivos, formulados para tratar el fenómeno de fisuración a tracción del hormigón, que utilizan funciones de fallo del tipo Rankine (***apart. Ap-I.3.e***) [14][18][22][30][54][93][123] , evalúan el daño local (en un punto del sólido discreto) indirectamente a partir de un análisis de las deformaciones inelásticas o de daño. Para explicar esto, conviene recordar previamente que estos modelos estudian: la *dirección del daño* a partir de un análisis del tensor de tensiones $\boldsymbol{\sigma}$, admitiendo como dirección normal a la fisura la de la tensión principal mayor σ_1 , siempre que ésta haya superado el umbral de tracción máxima; y la *magnitud del daño* a partir de la deformación uniaxial ϵ^{cr} (deformación de fisuración). Esta última satisface, durante un proceso de carga con ablandamiento, la siguiente ley constitutiva: $\dot{\sigma}_1^{cr} = E^{cr}\,\dot{\epsilon}^{cr}$, donde E^{cr} es la pendiente de la curva de ablandamiento $\dot{\sigma}_1 - \dot{\epsilon}^{cr}$, por lo tanto tiene un significado análogo al parámetro de endurecimiento plástico A que actúa en la ecuación constitutiva ec.(An-D.34). Para estos modelos, durante un proceso de tración sin degradación de rigidez, se puede escribir el incremento de tensión en forma análoga a la ec.(IV.93). Esto es [124] :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{D}_S\,\dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \boldsymbol{D}_S\,\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{cr} = \dot{\boldsymbol{\sigma}}^{e} - \dot{\boldsymbol{\sigma}}^{cr} \qquad \text{(An-D.37)}$$

Admitiendo que la deformación inelástica crece según una regla de flujo generalidada como la presentada en el (***apart. Ap-I.3.c***), y que la función de Rankine es utilizada como función de potencial plástico $\mathcal{G} = max.[\sigma_i] - \sigma_T^{max} = 0$, resulta en el espacio de tensiones principales (sistema de referencia local para cada fisura) para un estado de tensión $\sigma_3 \leq \sigma_2 < \sigma_1$ con $\sigma_1 > 0$, el siguiente incremento de deformación plástica:

$$\dot{\boldsymbol{e}}^{cr} = \dot{\lambda}\,\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \dot{\lambda} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \sigma_1} \\ \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \sigma_2} \\ \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \sigma_3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{\lambda} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \text{(An-D.38)}$$

transformando esta deformación plástica definida en un sistema de referencia local a uno global, resulta:

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{cr} = \begin{bmatrix} cos^2\vartheta_\sigma & sin^2\vartheta_\sigma & -\frac{1}{2}\,sin\,2\vartheta_\sigma \\ sin^2\vartheta_\sigma & cos^2\vartheta_\sigma & \frac{1}{2}\,sin\,2\vartheta_\sigma \\ sin\,2\vartheta_\sigma & -\,sin\,2\vartheta_\sigma & cos\,2\vartheta_\sigma \end{bmatrix} \dot{\boldsymbol{e}}^{cr} = \mathbb{N}\,\dot{\boldsymbol{e}}^{cr} \qquad \text{(An-D.39)}$$

donde ϑ_σ representa el ángulo que hay entre la tensión principal mayor y el eje x_1 del sistema de referencia global, y $\mathbb{N}$ una matriz de transformación de un sistema de referencia local a uno global. Sustituyendo esta última ecuación en la *ec.(An-D.37)*, resulta la ecuación constitutiva expresada en un sitema de referencia global, en la forma tratada por estos modelos de fisuración [123] :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{D}_S\,\dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \boldsymbol{D}_S\,\mathbb{N}\,\dot{\boldsymbol{e}}^{cr} \qquad \text{(An-D.40)}$$

De todo esto surge, que la dirección del incremento de deformación inelástica $\dot{\boldsymbol{e}}^{cr}$ definida en coordenadas locales de la fisura, coincide con la dirección del flujo plástico dado por la teoría de Rankine, y a la vez con la dirección de la tensión principal mayor **fig.(An-D.7)**. Así , en el caso particular en que esta superficie de fallo sea adoptada como de potencial plástico, la dirección normal a la fisura puede obtenerse indistintamente a partir de la tensión principal mayor, o de la deformación inelástica mayor.

An-D.2.c- Forma en que se obtiene la dirección del daño plástico, la magnitud, la energía disipada por cada fisura, y el factor de retención de tensiones cortantes.

La magnitud, dirección y demás información sobre el estado de daño local (en un punto del sólido discreto), se obtiene *a posteriori* del proceso de cálculo, una vez que se ha logrado la convergencia hacia un estado de equilibrio.

- **Dirección del daño plástico:** Para este modelo, la iniciación del daño en un punto del espacio discreto, ocurre cuando la variable de daño plástico se hace mayor que cero $\kappa^p > 0$. A partir de este instante, se entiende que hay *daño plástico* orientado según una dirección cuya normal viene definida por la componente principal mayor del tensor de deformación plástica **fig.(An-D.8)**:

$$\vartheta_\epsilon \;=\; \vartheta(\boldsymbol{\epsilon}^p) \qquad \text{(An-D.41)}$$

donde $\boldsymbol{\epsilon}^p$ es la deformación plástica definida según un sistema de referncias global, y ϑ_ϵ es el ángulo que hay entre la deformación principal mayor y el eje x_1 del mismo sistema de referencia. Para un problema plano se puede escribir la *ec.(An-D.41)* como:

$$tan(2\;\vartheta_\epsilon) \;=\; \frac{2\;\epsilon_{12}^p}{\epsilon_{11}^p + \epsilon_{22}^p} \qquad \text{(An-D.42)}$$

La deformación plástica expresada según un sitema de referencia definido en el espacio de daño local $\boldsymbol{e}^{cr}$, resulta de un cambio de base aplicado sobre $\boldsymbol{\epsilon}^{cr}$, a través de una matriz de transformación de coordenadas $\boldsymbol{T}_\epsilon$ [25] **fig.(An-D.8)**. Esto es:

$$\boldsymbol{e}^{cr} \;=\; \boldsymbol{T}_\epsilon\;\boldsymbol{\epsilon}^p \qquad \text{(An-D.43)}$$

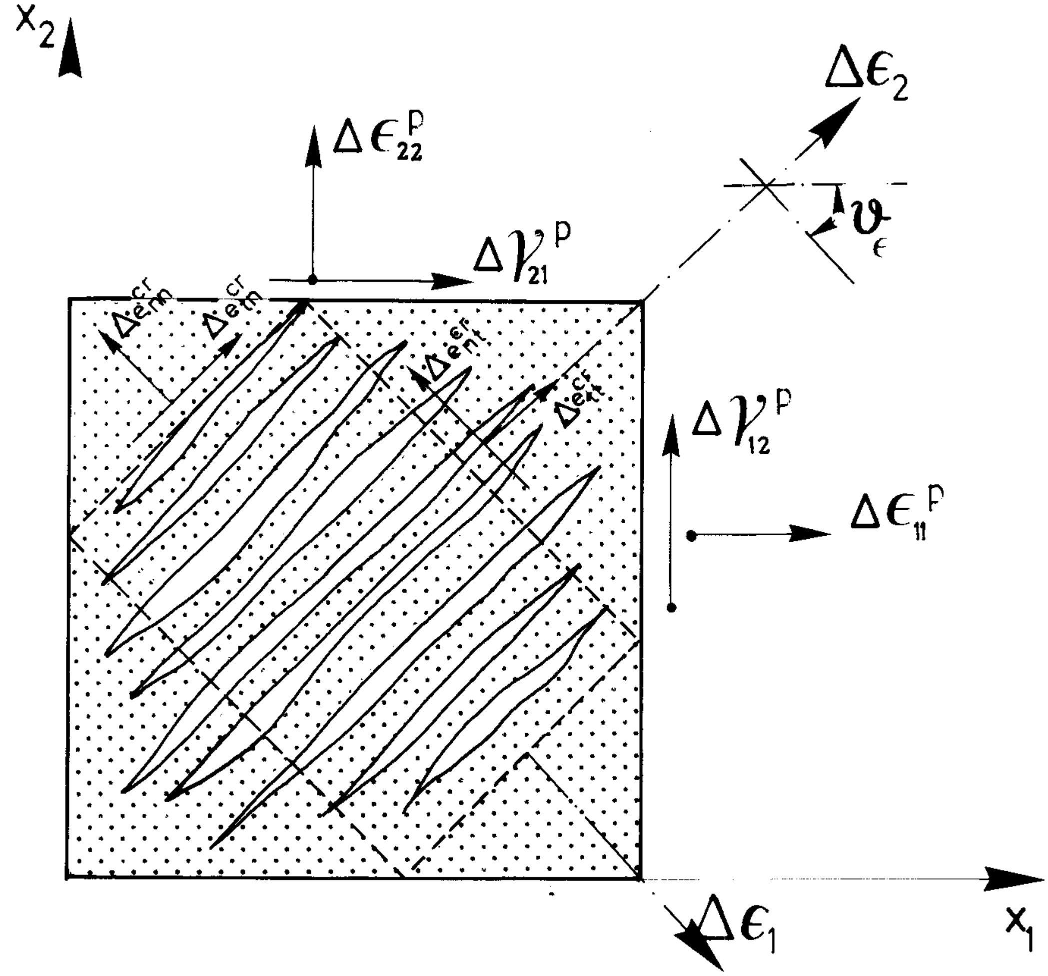
donde:

$$\boldsymbol{T}_\epsilon \;=\; \begin{bmatrix} cos^2\,\vartheta_\epsilon & sin^2\,\vartheta_\epsilon & \frac{1}{2}\,sin\,2\vartheta_\epsilon \\ sin^2\,\vartheta_\epsilon & cos^2\,\vartheta_\epsilon & -\frac{1}{2}\,sin\,2\vartheta_\epsilon \\ -\,sin\,2\vartheta_\epsilon & sin\,2\vartheta_\epsilon & cos\,2\vartheta_\epsilon \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{e}^{cr} \;=\; \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\epsilon}^p \;=\; \begin{Bmatrix} e_{nn}^{cr} \\ e_{tt}^{cr} \\ e_{nt}^{cr} \end{Bmatrix}$$

siendo $\boldsymbol{T}_\epsilon^{-1} = \mathbb{N}$ siempre que $\vartheta_\sigma \equiv \vartheta_\epsilon$ *ec.(An-D.38)*. Analizando el signo de las componentes principales del tensor de deformación plástica, se sabe si hay aplastamiento o fisuración, o sea que hay aplastamiento si $\epsilon_i^p < 0$ y fisuración si $\epsilon_i^p > 0$.



$$\Delta\boldsymbol{\epsilon}^p = \begin{Bmatrix} \Delta\epsilon_{11}^p \\ \Delta\epsilon_{22}^p \\ \Delta\gamma_{12}^p \end{Bmatrix} \quad ; \quad \Delta\boldsymbol{e}^{cr} = \begin{Bmatrix} \Delta e_{nn}^{cr} \\ \Delta e_{tt}^{cr} \\ \Delta e_{nt}^{cr} = 0 \end{Bmatrix}$$

fig.(An-D.8): Orientación de la fisuración respecto del sistema de referencia global.

• **Magnitud del daño plástico:** El modelo presentado, basado en la mecánica del continuo, considera el daño como una deformación localizada en una cierta zona de dimensiones finitas a la que se ha denominado *zona de daño plástico* (***apart. IV.1***). En virtud de esto, se puede considerar que una fisura real es la acumulación en una zona de dimensiones infinitesimales de todo el daño distribuido en la *zona de daño plástico* [123] . De esta manera, mediante el post-procesado de los resultados, se obtiene una *magnitud de daño equivalente* al de una fisura real. fig.(An-D.9). Esto es:

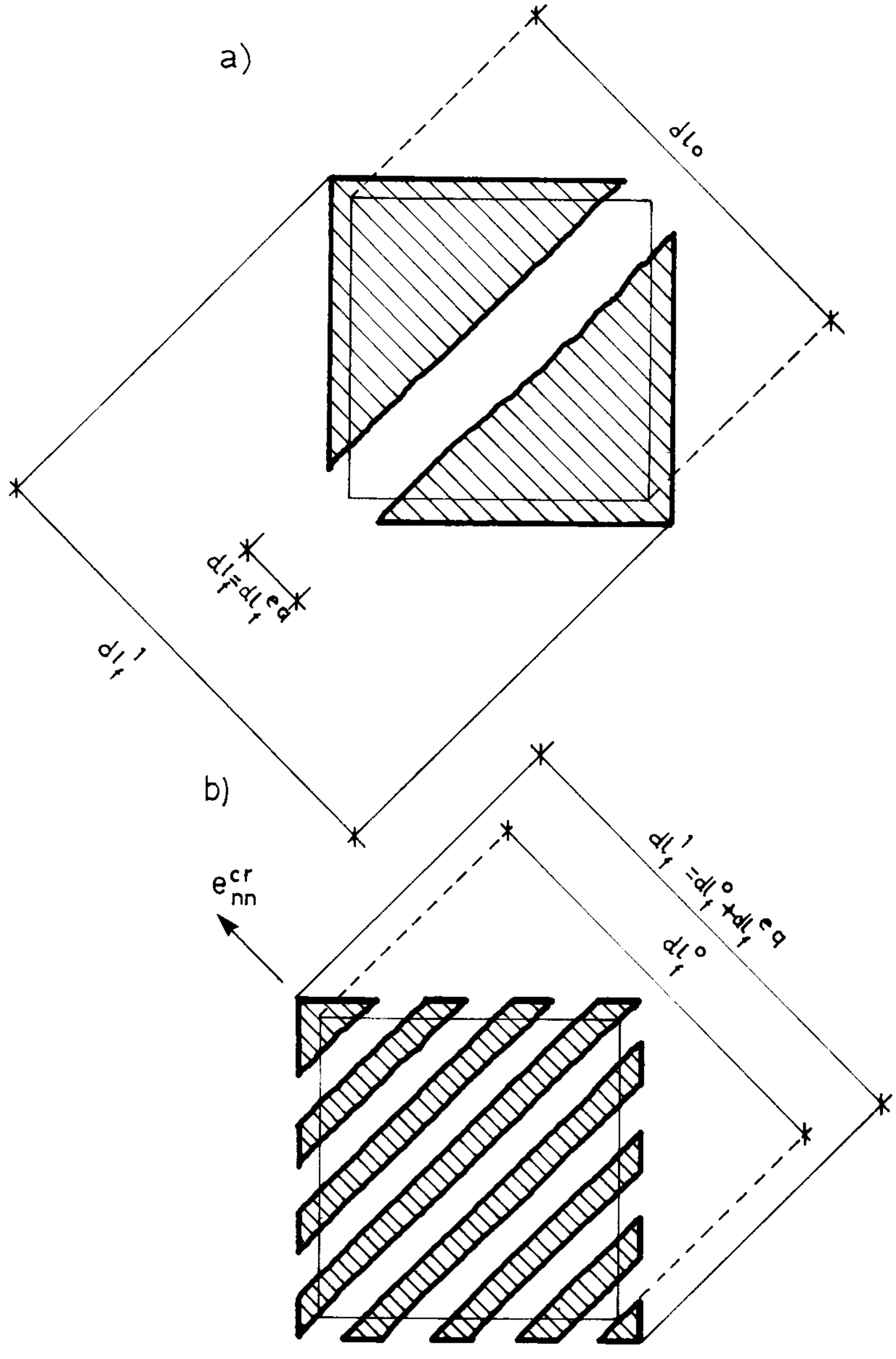


fig.(An-D.9): a) Fisura real, y b) fisura distribuida equivalente a la real.

$$
\begin{aligned}
dl_f^{eq} &= dl_f^1 - dl_f^0 = \left[dl_f^0 + e_{nn}^{cr}\, dl_f^0 \right] - dl_f^0 \\
dl_f^{eq} &= e_{nn}^{cr}\, dl_f^0
\end{aligned}
\qquad \text{(An-D.44)}
$$

de donde resulta:

$$l_f^{eq} \;=\; \int_{L^{pe}} e_{nn}^{cr}\; dl_f^0 \qquad \text{(An-D.45)}$$

donde L^{pe} es la longitud característica de un elemento finito, definida en la *ec.(An-D.35)*.

- **Energía disipada por cada punto de la zona dañada:** Debido a que se ha hecho la hipótesis que la energía disipada es igual al trabajo plástico, se tiene:

$$\dot{w}^p \;=\; \boldsymbol{\sigma}^T\; \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \qquad \text{(An-D.46)}$$

resultando de aquí que el trabajo plástico total en un cierto instante t del proceso cuasi-estático vale:

$$W^p = \int_{V^p} \left[\int_{t=0}^{t} \boldsymbol{\sigma}^T\; \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \right]\; dV^p \qquad \text{(An-D.47)}$$

donde V^p es el volumen de la zona dañada.

- **Factor de retención de tensiones cortantes:** Ciertos modelos de fisuración, como los mencionados en las referencias [18][30][93][123], aceptan que la rigidez al corte en la zona dañada sea constante y aproximadamente igual a $\beta_G\, G^0$, donde β_G es un factor de reducción de la capacidad inicial de retensión de tensión cortante. Así , en un cierto instante del proceso elasto-plástico se tiene una tensión cortante igual a:

$$\sigma_{12} \;=\; G_S\; \gamma_{12} \;=\; \beta_G\; G^0\; \gamma_{12} \qquad \text{(An-D.48)}$$

en cambio, si el proceso de carga hubiese sido totalmente elástico, esta tensión hubiese valido:

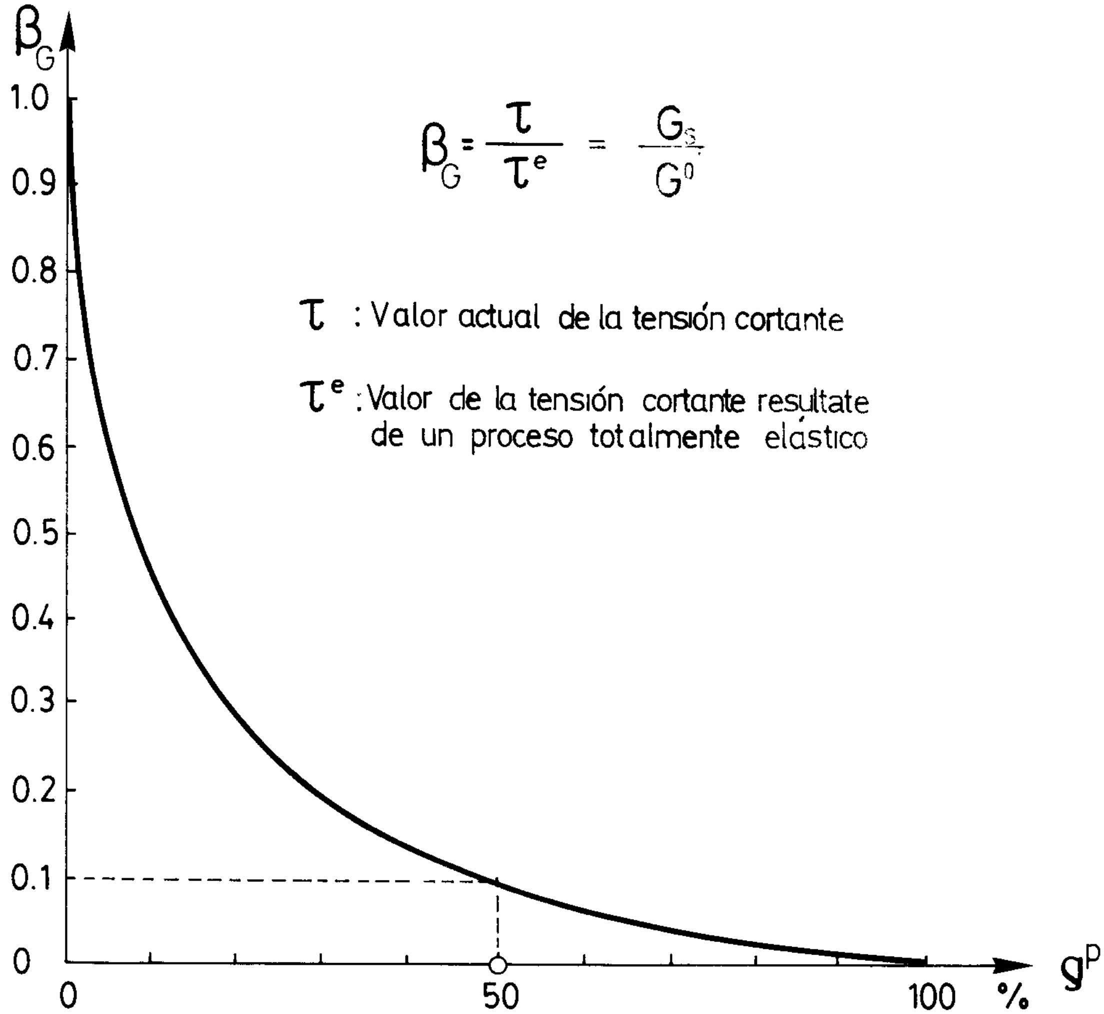


fig.(An-D.10): Evolución del factor de retención de tensiones cortantes a lo largo del proceso plástico

$$\sigma_{12}^e = G^0 \, \gamma_{12} \qquad \textit{(An-D.49)}$$

De la *ec.(An-D.48)* y la *ec.(An-D.49)*, se concluye que el factor de retensión de tensiones cortantes β_G es la relación que existe entre la tensión cortante en el instante actual σ_{12} y la tensión cortante en el mismo instante para el caso en que el proceso sea totalmente elástico σ_{12}^e . Esto es:

$$\frac{\sigma_{12}}{\sigma_{12}^{e}} = \frac{G_S}{G^0} = \beta_G \qquad \textit{(An-D.50)}$$

En el modelo que se presenta, debido a que se trabaja con una ley constitutiva acoplada *ec.(IV.103)*, la rigidez al corte no necesita ser impuesta a través de un parámetro como el β_G , sino que resulta del proceso mismo. Si se quiere, se puede obtener β_G en este mismo post-proceso, de donde resulta que no es una constante, sino que varía a medida que evoluciona el proceso plástico **fig.(An-D.10)**.

En estudios experimentales llevados a cabo por Cedolin y otros [29] se puede ver que para hormigones resultan curvas $\frac{G_S}{G^0}$ muy parecidas a la que resultan del post-procesado de los resultados obtenidos con el modelo, en los ejemplos analizados en el ***cap. V***.

CAPITULO V

EJEMPLOS DE APLICACION.

V.1.- INTRODUCCION.

En este capítulo se presentan los resultados que se han obtenido, con el **modelo de daño plástico** que se propone, analizando una serie de probetas y elementos estructurales bajo diversas condiciones estáticas y geométricas, llevando siempre el *ensayo numérico* a situaciones últimas, consistente en el *agotamiento total* de la pieza ensayada. Gran parte de estas pruebas, que se han realizado con el objeto de controlar el modelo, corresponden a estudios experimentales y numéricos realizados por diversos investigadores. Debido a que fue necesario desarrollar ejemplos que resaltaran algunos aspectos particulares del modelo que se presenta, de los ocho ejemplos de comprobación que se dan, dos no corresponden a ningún ensayo previo.

La aplicación del *modelo de daño plástico* , ha sido materializada mediante un programa de elementos finitos, desarrollado exclusivamente con esta finalidad (**PLAST-FIS** ***apart. Ap-II.2.***). Este programa se encuentra actualmente capacitado solamente para resolver problemas de tensión y/o deformación plana, a pesar de que el modelo constitutivo goza de la generalidad suficiente para ser utilizado en tres dimensiones.

V.2.- ENSAYO DE COMPRESION Y/O TRACCION BIAXIAL.

V.2.a- Consideraciones generales sobre el ensayo.

Se ha adoptado el ensayo de *Kupfer, Hilsdorf and Rüsch* [74] como primera verificación del modelo constitutivo, debido a su amplia documentación y la característica de *ensayo modelo* que ha adquirido, dado la cantidad de investigadores que lo han utilizado como referencia para verificar ensayos experimentales y numéricos.

De este ensayo, consistente en estudiar el comportamiento de una probeta de hormigón de $20.0 \times 20.0 \times 5.0\ cm.$ **fig.(V.1)**, sometida a diversos estados de carga **fig.(V.2,a)**, solamente se han verificado los siguientes casos: – Compresión-compresión con una relación de tensiones $(\sigma_{22}/\sigma_{11} = -1/0 \ \ y\ \sigma_{33} = 0)$ o *compresión simple.* – Compresión-compresión con una relación de tensiones $(\sigma_{22}/\sigma_{11} = -1/-1 \ \ y\ \sigma_{33} = 0)$ o *compresión doble simétrica.* – Compresión-compresión con una relación de tensiones $(\sigma_{22}/\sigma_{11} = -1/-0.52 \ \ y\ \sigma_{33} = 0)$ o *compresión doble asimétrica.* – Tracción-tracción con una relación de tensiones $(\sigma_{22}/\sigma_{11} = 1/0 \ \ y\ \sigma_{33} = 0)$ o *tracción simple.* – Tracción-tracción con una relación de tensiones $(\sigma_{22}/\sigma_{11} = 1/1 \ \ y\ \sigma_{33} = 0)$ o *tracción doble simétrica.* – Tracción-tracción con una relación de tensiones $(\sigma_{22}/\sigma_{11} = 1/0.55 \ \ y\ \sigma_{33} = 0)$ o *tracción doble asimétrica.*

Las características geométricas y mecánicas utilizadas para realizar el ensayo numérico, son las que muestra la **fig.(V.1)**. La mayoría de los datos del *modelo de material* utilizado, surgen de un simple análisis llevado a cabo sobre un ensayo uniaxial a compresión y tracción, para valores menores de la relación de resistencias a compresión uniaxial y a compresión biaxial doble simétrica, que para hormigones es *casi* una constante $\sigma_{cb}/\sigma_C \simeq 1.16$ [35][74][136] (***apart. II.3.c***), y la obtención del parámetro γ del criterio de fluencia propuesto, que actúa en problemas de tensión triaxial (***apart. IV.5.b***) y que para el hormigón puede considerarse como una constante $\gamma \simeq 3.5$.

Se ha discretizado el dominio con cuatro elementos finitos planos de cuatro nodos **fig.(V.1)**. Se ha utilizado para cada elemento una integración numérica de Gauss-Legendre [144] de 2×2 puntos.

La vinculación y los tipos de cargas aplicados, se muestran en cada una de las figuras que describen la respuesta tensión-deformación para cada caso particular **figs.(V.2),(V.3),(V.4)**.

Con el objeto de mantener la relación de tensiones impuesta σ_{22}/σ_{11} , a lo largo de todo el proceso de carga, ha sido necesario utilizar en todos los casos el método de control de desplazamientos propuesto por Crisfield [37] (***apart.***

Ap-II.3.c), que ha permitido obtener la respuesta del sólido en procesos con ablandamiento.

El problema de plasticidad no-asociada conduce a desarrollar una matriz de rigidez tangente no-simétrica, ocacionando serios problemas en la resolución del sistema de ecuaciones (***apart. Ap-II.3.***). Existen distintos caminos para solucionar de *alguna manera* este inconveniente [47][108] ; utilizándose en este caso el método de rigidez inicial K_0 (***apart. Ap-II.3.***).

V.2.b- Análisis del ensayo.

a.-) Compresión-compresión – $(\sigma_{22}/\sigma_{11} = -1/0 \;\; y \; \sigma_{33} = 0)$ –.

Como se observa en la **fig.(V.2,b)** se ha logrado una buena coincidencia de la respuesta $\sigma_{22} - \epsilon_{22}$ con la correspondiente al ensayo experimental tanto en plasticidad asociada como en plasticidad no asociada. En la curva $\sigma_{22} - \epsilon_{11}$, coincide muy bien en el período elástico-degradable y luego se obtiene una buena coincidencia hasta el pico de tensiones con plasticidad no asociada, en cambio con plasticidad asociada se logra mejor aproximación después del pico de tensiones.

En la **fig.(V.4,a)** se comparan con el ensayo de Kupfer, los resultados numéricos obtenidos por otros investigadores para este mismo tipo de carga. Entre estos, el de Han-Chen [56] es uno de los que mejor aproxima el comportamiento uniaxial, observándose para el resto de los ensayos numéricos una gran dispersión en los resultados.

En la **fig.(V.6,a)** se muestra el estado de fisuración que predice el modelo en los puntos de integración de Gauss-Legendre. El análisis de dicha fisuración se ha realizado de acuerdo a la metodología presentada en el ***apart. An-D.2.***; así el post-procesador del modelo interpreta que la fisuración se produce cuando la deformación plástica en el punto tiene una componente positiva (estiramiento inelástico), la orientación de cada fisura se representa mediante un trazo ortogonal a la dirección de la correspondiente deformación plástica principal positiva y la densidad de líneas verticales paralelas da idea cualitativa de la *apertura* de estas fisuras. El esquema de fisuración obtenido para el tipo de carga aplicado, coincide con el descrito por Nilssen [33] **fig.(II.6)** ***apart. II.3.c***.

b.-) Compresión-compresión – $(\sigma_{22}/\sigma_{11} = -1/-1 \;\; y \; \sigma_{33} = 0)$ –.

En la **fig.(V.2,c)** se observa una buena aproximación con el ensayo experimental, alejandose un poco en la vecindad del pico de tensiones. También conviene observar en esta figura, que al final del ensayo numérico se encuentra un comportamiento con tendencia a una *sobre-rigidización* , comportamiento supuestamente atribuíble a un fenómeno de *bloqueo* en los elementos finitos de cuatro nodos [40] , producido por una integración completa de Gauss-Legendre de (2×2) durante un estado plástico incompresible $\dot{\epsilon}_v^p = 0$, consecuencia de un campo de deformaciones altamente restringido por el tipo de carga aplicada. Problemas de este tipo han sido recientemente estudiados por Crook and Hinton, en la referencia [40] .

En la **fig.(V.4,b)** se comparan con el ensayo de Kupfer, los resultados numéricos obtenidos por otros investigadores para este mismo tipo de carga, pudiéndose observar en este caso mucha mayor dispersión en la respuesta que para el ensayo de compresión uniaxial.

En este caso no se ha detectado fisuración en el plano del ensayo (x_1, x_2) , no obstante, según Nilssen [33] **fig.(II.6)** ***apart. II.3.c***, este fenómeno se desarrollaría en planos paralelos al de carga: $\perp x_3$.

c.-) Compresión-compresión – $(\sigma_{22}/\sigma_{11} = -1/-0.52 \;\; y \; \sigma_{33} = 0)$ –.

En la **fig.(V.2,d)** se observa una mayor diferencia, que en los casos anteriores, respecto al ensayo experimental de Kupfer. En la curva $\sigma_{22} - \epsilon_{22}$ de esta figura se encuentran errores del $3.0\ ^o/_o$ y $15.0\ ^o/_o$ en el pico de tensiones y la correspondiente deformación, respectivamente, con respecto al ensayo experimental. En la curva $\sigma_{22} - \epsilon_{11}$ se desarrolla un proceso *casi* con deformación constante para plasticidad no asociada, y en plasticidad asociada ocurre lo mismo hasta el nivel de tensión pico, desarrollándose luego una pérdida de deformación como consecuencia de la excesiva dilatancia que produce la componente de tensión mayor. En ambos casos se tiene una razonable coincidencia hasta el nivel de tensión pico. Al final del proceso se produce un aumento en la deformación ϵ_{11} en el mismo sentido de la tensión σ_{11} , situación que probablemente se debe al daño que ha sufrido el sólido en la dirección paralela a σ_{22} .

En la **fig.(V.4,c)** se pueden ver los resultados obtenidos por otros modelos numéricos para este mismo tipo de carga. De esta comparación surge que la respuesta que mas se aleja del pico de tensiones está un $10.2\ ^o/_o$ por encima del ensayo de Kupfer y el que más se acerca al ensayo de referencia está también por encima del pico de tensiones en un $3.0\ ^o/_o$. En lo que respecta a la deformación correspondiente al pico, sólo en el modelo de Klisinski-Mroz [70] hay coincidencia (pero en este caso la tensión se encuentra un $6.0\ ^o/_o$ por encima de la correcta). En general se puede decir que existe poca concordancia con el ensayo de referencia.

En este caso, al igual que para compresión doble simétrica, no aparecen fisuras en el plano del ensayo, pero es razonable intuír que pueden ocurrir en planos paralelos a éste.

d.-) Casos de tracción biaxial.

Los resultados del ensayo de Kupfer et al. [74] a tracción biaxial, sólo muestran una rama ascendente, casi lineal, que alcanza en todos los casos una tensión de aproximadamente $30.00\ kg/cm^2$. Para tales casos, el modelo propuesto supera escasamente los $31.00\ kg/cm^2$ **figs.(V.3,a),(V.3,c),(V.3,d)**, con una deformación de pico ligeramente mayor que la obtenida por el ensayo experimental en los tres casos: *tracción simple, tracción doble simétrica y tracción doble asimétrica.*

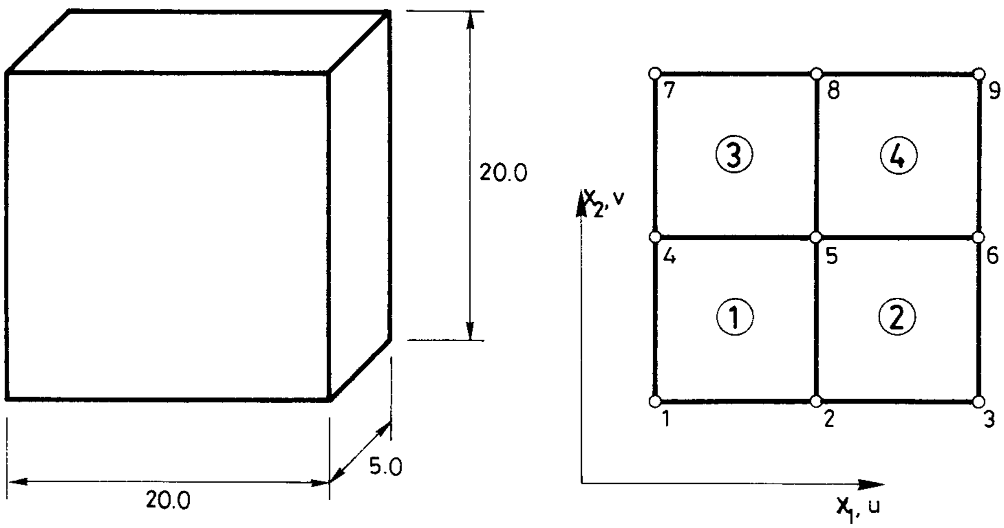
Los modelos numéricos citados en los ensayos anteriores, no brindan resultados de tracción, por lo tanto no ha sido posible presentar una comparación de respuestas de la misma forma que para compresión.

Los estados de fisuración obtenidos para estos tres ensayos de tracción, se muestran en las **figs.(V.6,b),(V.6,c),(V.6,d)** y coinciden cualitativamente con el esquema de Nilssen [33] **fig.(II.6)** ***apart. II.3.c.***

En lo que respecta a la energía disipada durante todo el proceso de compresión simple W^c , se ha obtenido una diferencia del $15.0\ ^o/_o$ entre la energía G^c impuesta como dato y la correspondiente obtenida al final del proceso elasto-plástico. Este exceso de energía disipada, se debe a que durante el desarrollo de este ensayo numérico, aún no se había considerado la hipótesis realizada por la *ec.(An-D.26)*. En lo que se refiere a la energía disipada durante el desarrollo del proceso de tracción simple W^f , se ha obtenido una exacta coincidencia entre la energía G^f impuesta como dato y la correspondiente obtenida al final del proceso elasto-plástico, cumpliendo totalmente la hipótesis realizada en la *ec.(An-D.22)*. En procesos multiaxiales es mas difícil conocer el grado de error cometido por el modelo.

Por último, en la **fig.(V.5)**, se muestra la evolución del factor de retención de tensiones cortantes $\beta_G = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_{12}^e} = \frac{G_S}{G^0}$ (***apart. An-D.2.c***), que resulta del post-procesamiento de los resultados. Debido a que se han normalizado a la unidad las escalas de los ejes de referencia, este gráfico es reflejo de los resultados obtenidos tanto a compresión como a tracción, para un punto de integración que sigue un proceso elasto plástico con ablandamiento. Conviene también observar la coincidencia con los estudios experimentales de Cedolin et al. [29] (comparar con la **fig.(An-D.10)**).

Como comentario final, hay que decir que estos ensayos han sido realizados también con elementos planos de ocho nodos, habiéndose obtenido comportamientos insatisfactorios para todas las combinaciones de carga, al final del proceso elasto-plástico, tanto con reglas de integración reducida como completa (ver también los comentarios hechos por Oliver y Fernandez en la ref. [94]).



$E_0 = 395000.00\ kg/cm^2.$

$\nu_0 = 0.24$

$\sigma_C{}^0 = -229.00\ kg/cm^2$

$\sigma_C{}^{pic} = -328.00\ kg/cm^2$

$\sigma_T{}^0 = \ 22.90\ kg/cm^2$

$\alpha = 0.12 \rightarrow \dfrac{\sigma_{b0}}{\sigma_{c0}} = 1.16$

$\gamma = 3.0$

$p = 1.0$

$G^f = 0.16\ kg/cm$

$G^c = 16.00\ kg/cm$

$L^{pe} = \sqrt{A^e}$

Flujo asociado. Criterio de fluencia propuesto

Flujo no-asociado. $\begin{cases} \text{Criterio de fluencia propuesto ;} \\ \text{Func. de potencial de Mohr-Coulomb} \\ \text{con : } \phi = \psi = 15^o \end{cases}$

Función de endurecimiento a compresión $c_C(\kappa)$: $F-3$

Función de endurecimiento a tracción $c_T(\kappa)$: $F-3$

Posición relativa del pico de tensiones : $(\kappa^p)^{pic} = 0.38$

Con degradación elástica.

Sin degradación plástica.

fig.(V.1): Ensayo de compresión y/o tracción biaxial – Características geométricas mecánicas y malla de elementos finitos utilizada en el ensayo numérico.

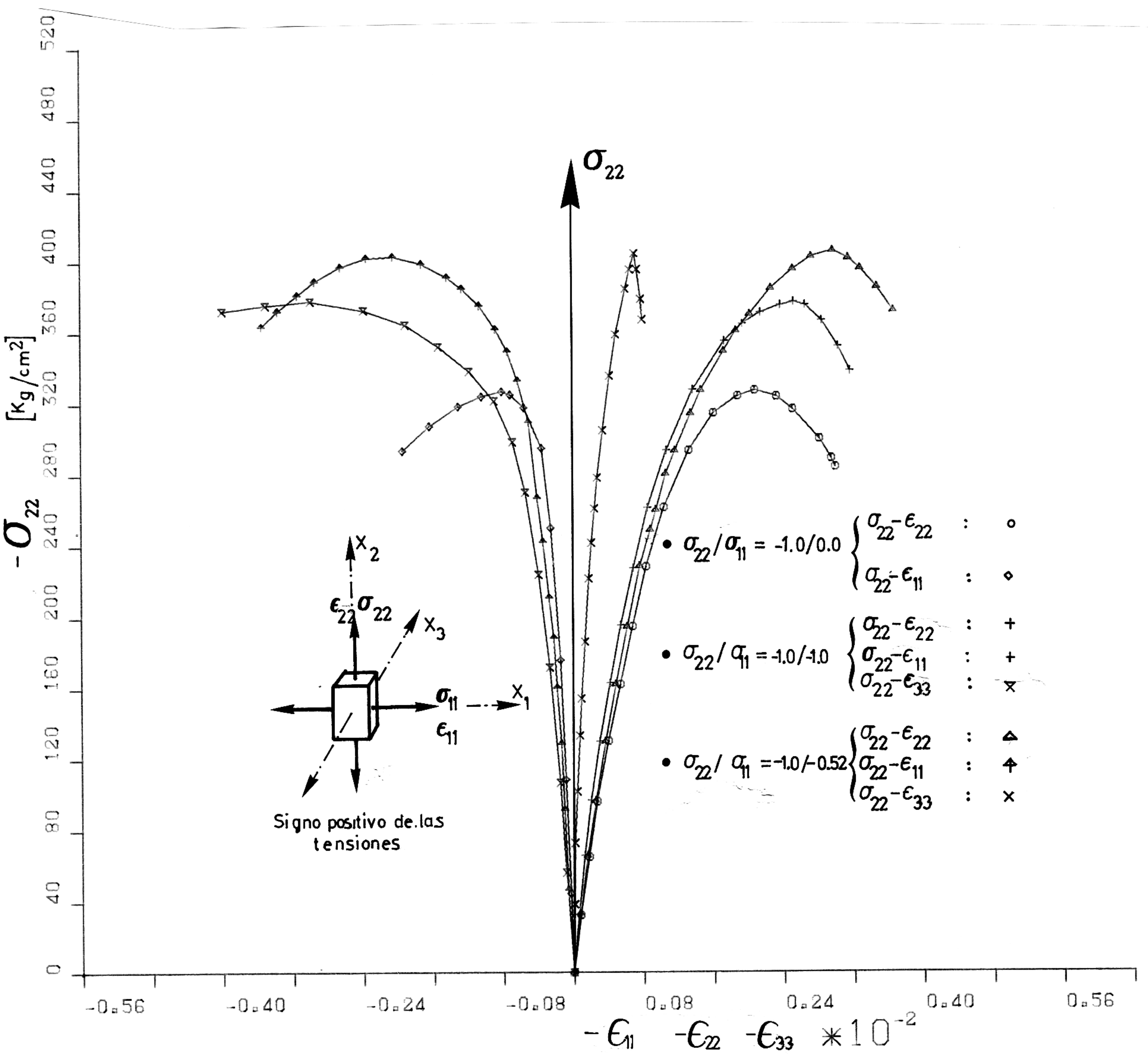


fig.(V.2,a): Resultados del ensayo experimental a compresión de Kupfer et al. [74] .

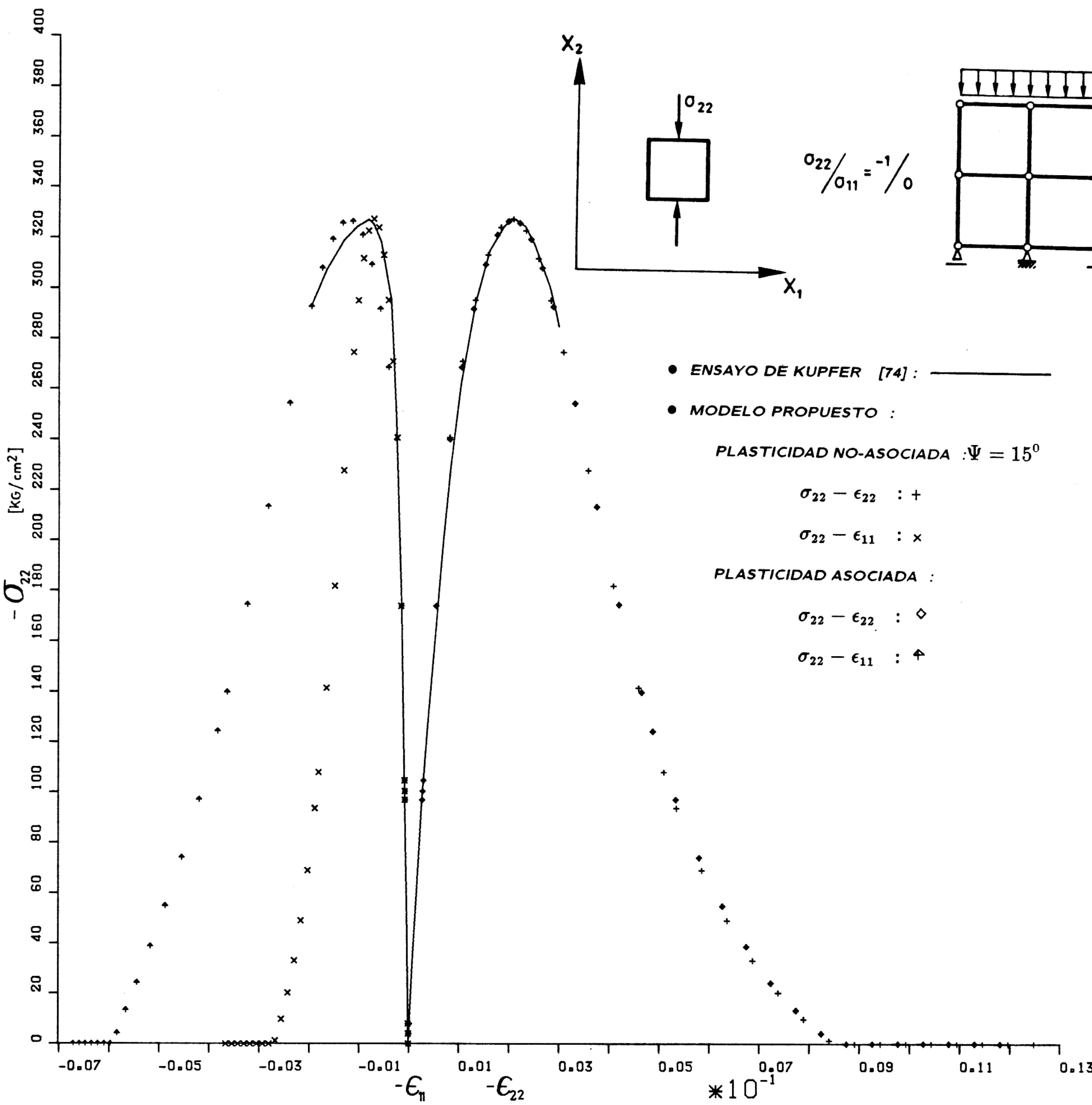


fig.(V.2,b): Comparación entre el resultado obtenido por el modelo, y el ensayo a compresión uniaxial de Kupfer et al. [74] . Caso de carga a.-: $(\sigma_{22}/\sigma_{11} = -1/0 \ y \ \sigma_{33} = 0)$

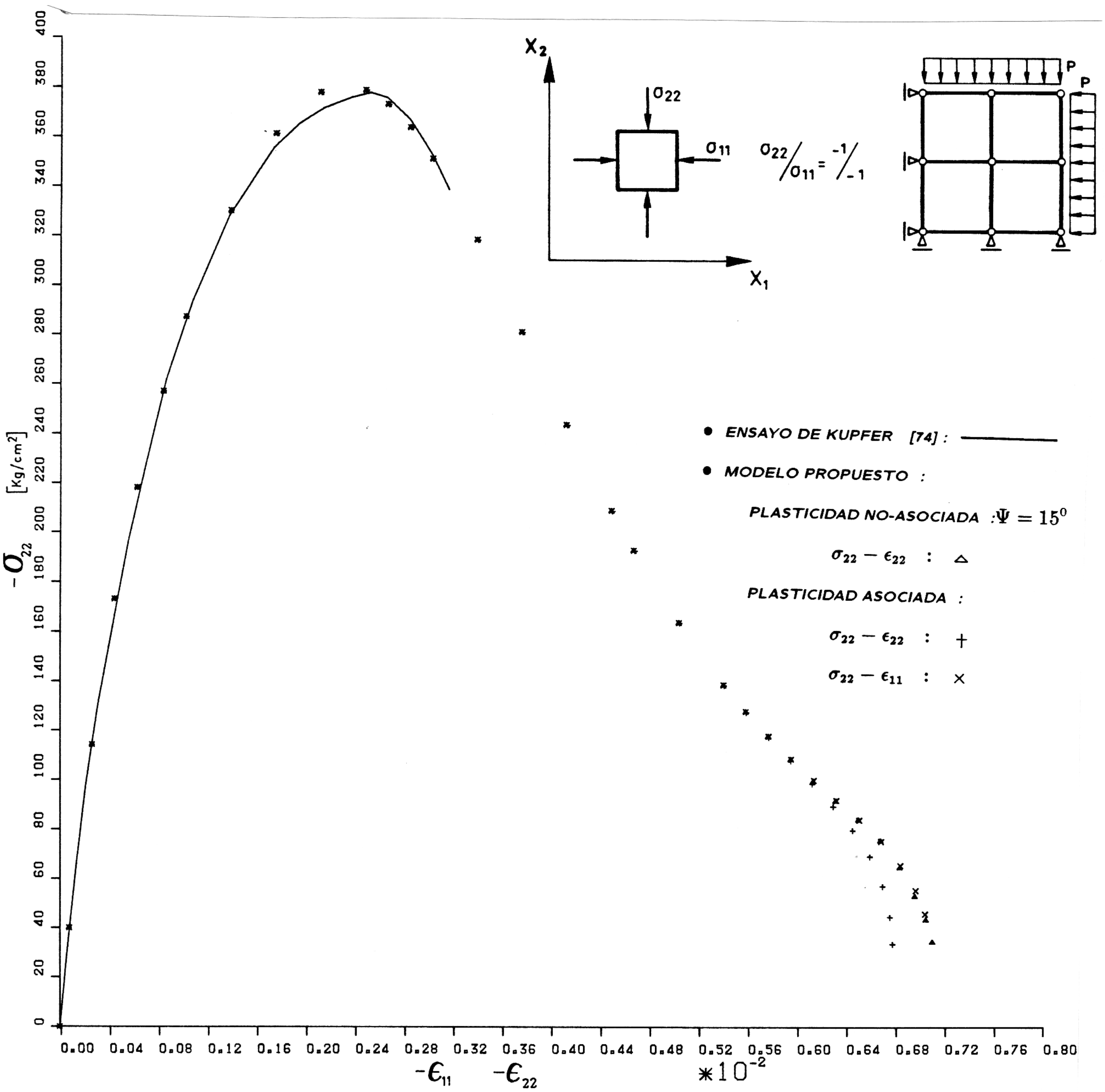


fig.(V.2,c): Comparación entre el resultado obtenido por el modelo, y el ensayo a compresión biaxial doble simétrica de Kupfer et al. [74] . Caso de carga **b.-**: $(\sigma_{22}/\sigma_{11} = -1/-1 \;\; y \; \sigma_{33} = 0)$

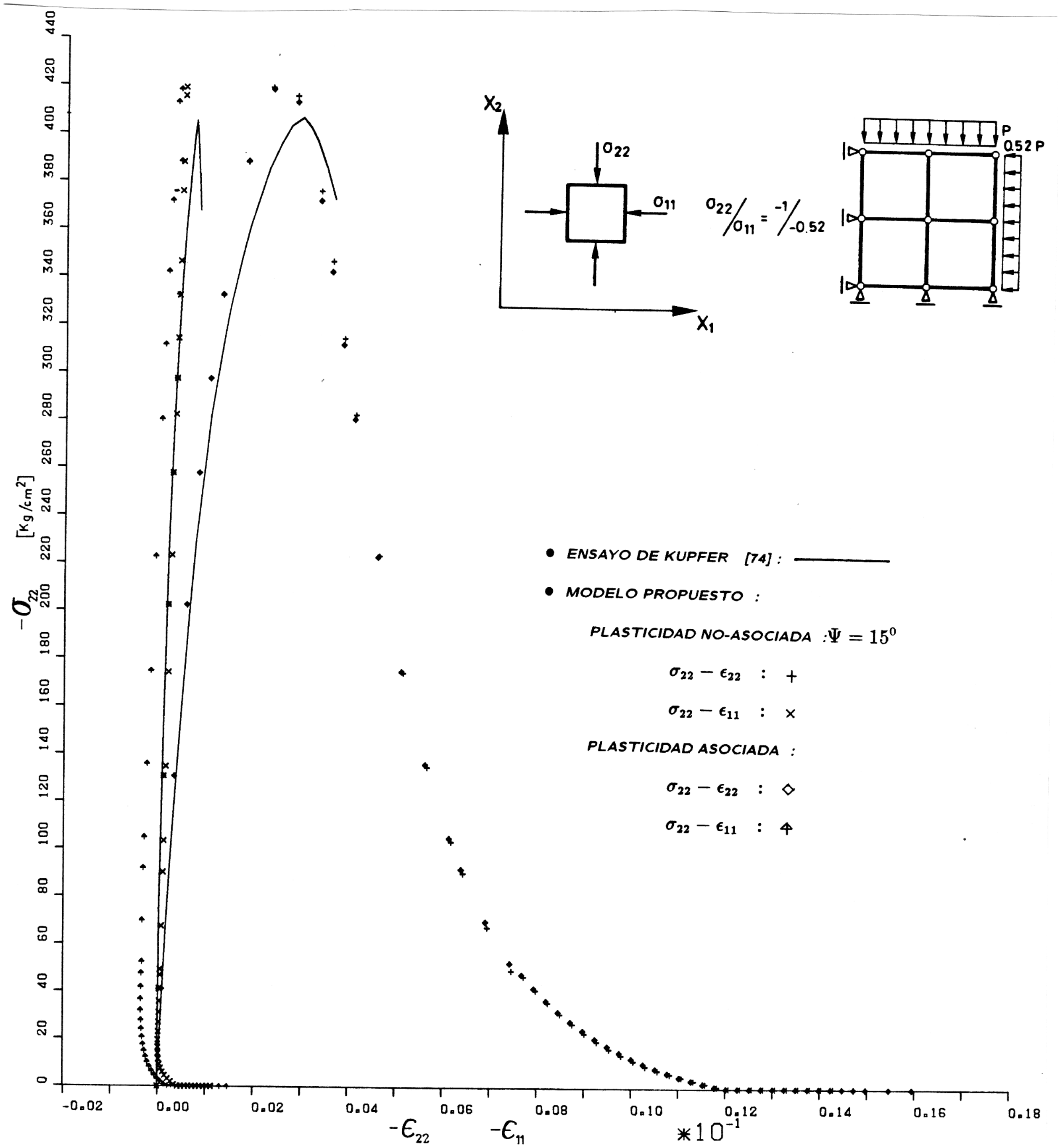


fig.(V.2,d): Comparación entre el resultado obtenido por el modelo, y el ensayo a compresión biaxial doble asimétrica de Kupfer et al. [74] . Caso de carga c.-: $(\sigma_{22}/\sigma_{11} = -1/-0.52 \ y \ \sigma_{33} = 0)$

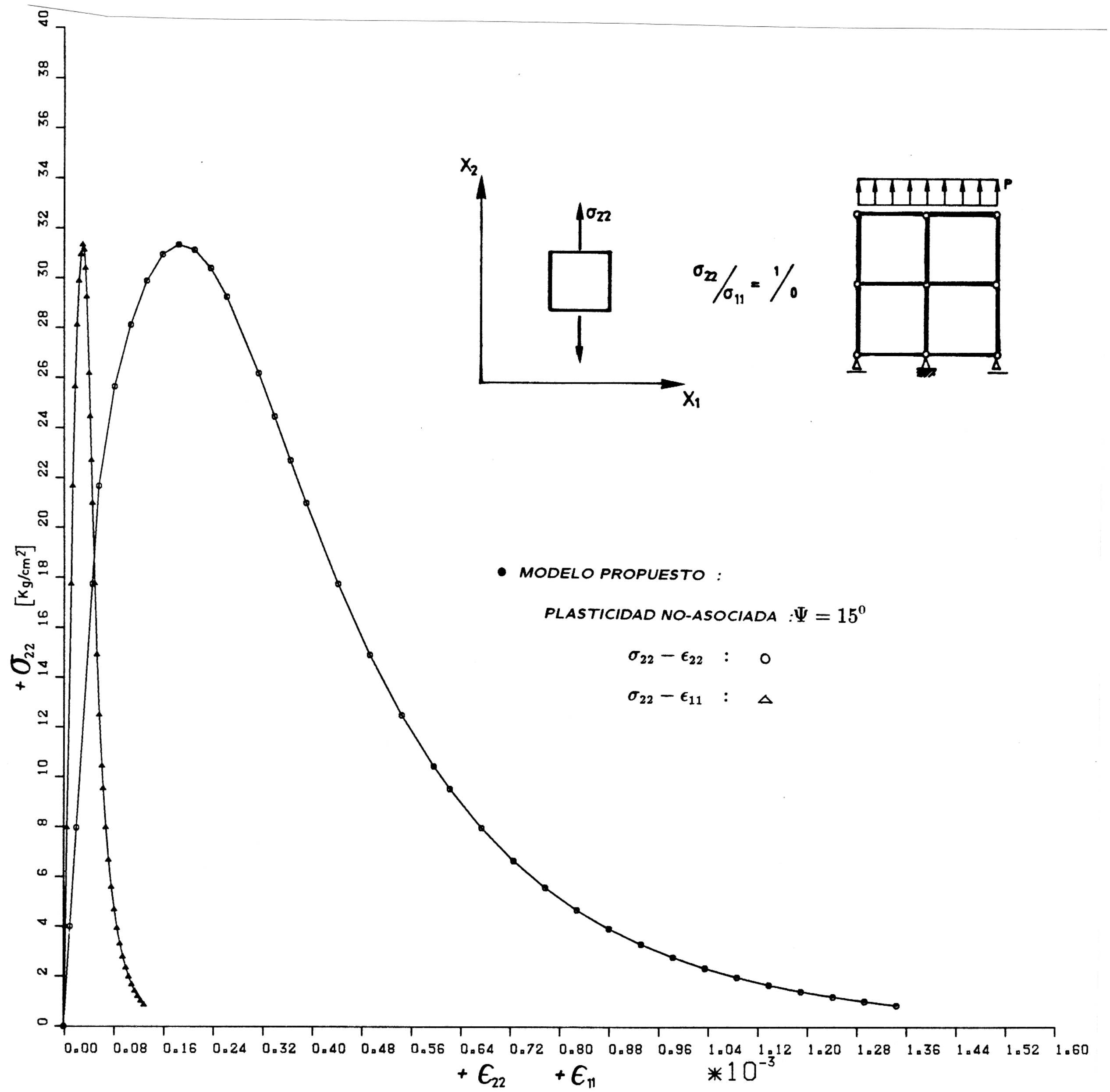


fig.(V.3,a): Resultado obtenido por el modelo durante el ensayo a tracción uniaxial. Caso de carga d.-: $(\sigma_{22}/\sigma_{11} = 1/0 \;\; y \; \sigma_{33} = 0)$

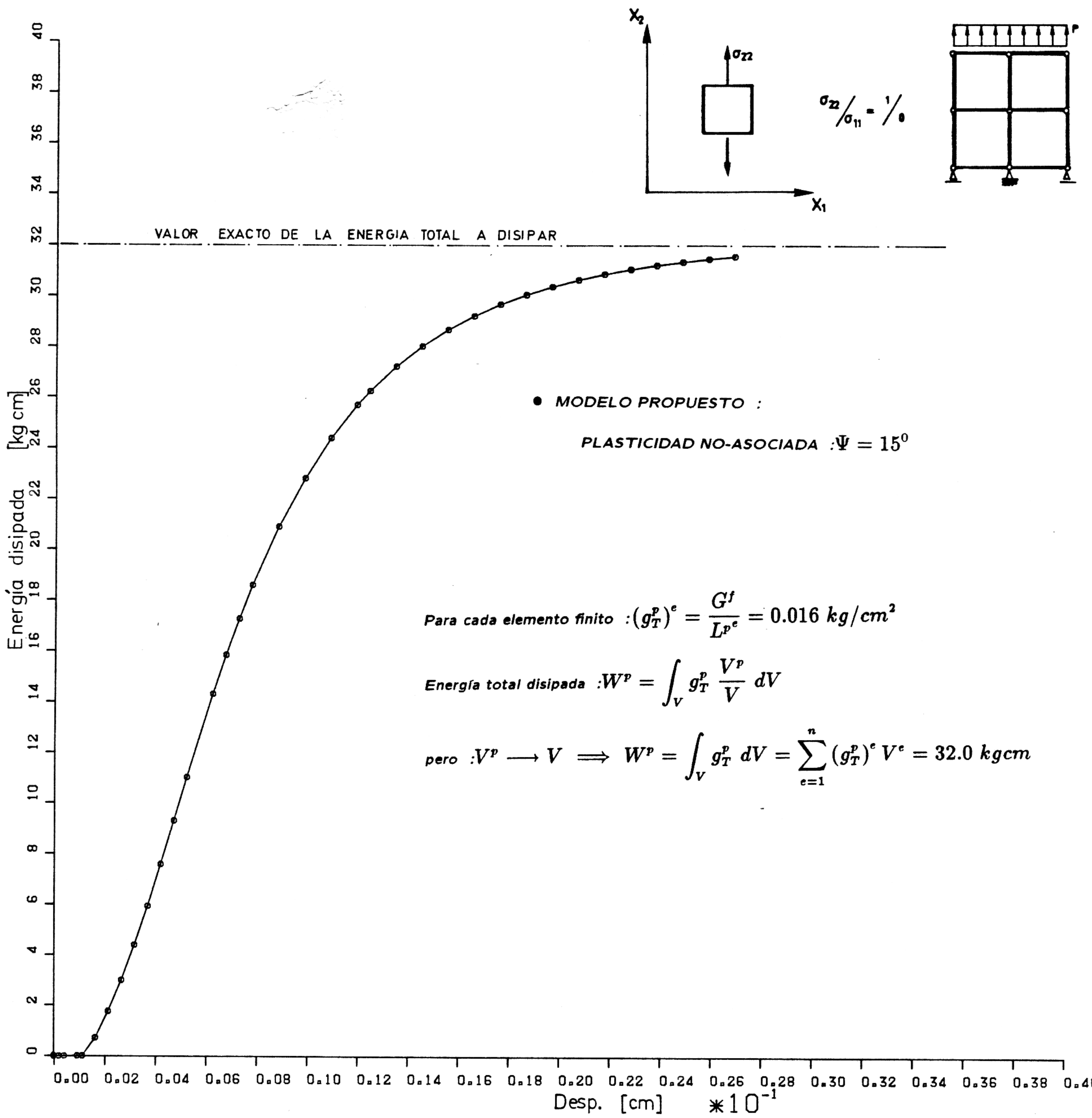


fig.(V.3,b): Energía disipada por el modelo durante el ensayo de tracción uniaxial. Caso de carga d.-: $(\sigma_{22}/\sigma_{11} = 1/0\ \ y\ \sigma_{33} = 0)$

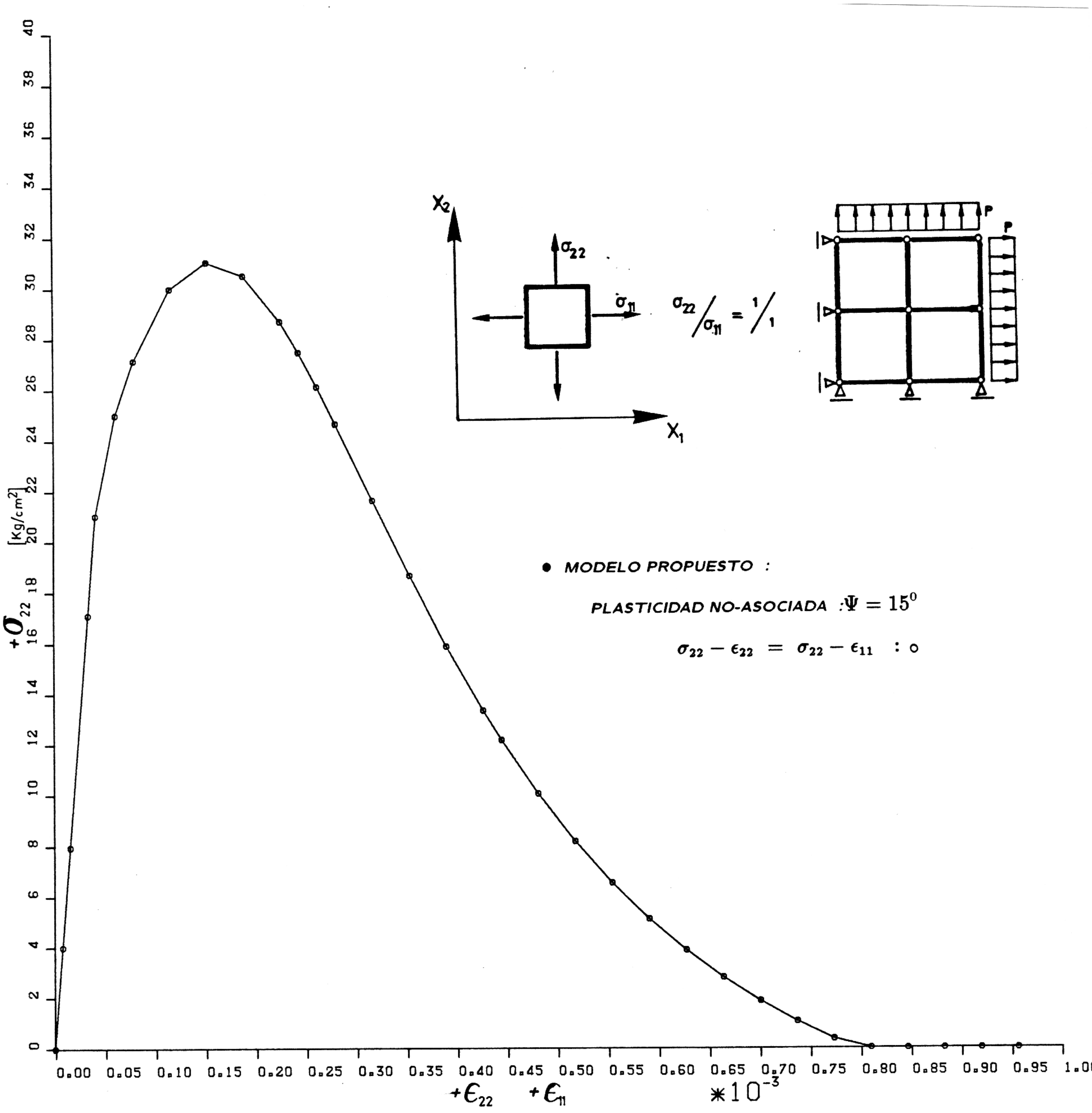


fig.(V.3,c): Resultado obtenido por el modelo durante el ensayo a tracción biaxial doble simétrica. Caso de carga d.-: $(\sigma_{22}/\sigma_{11} = 1/1 \;\; y \; \sigma_{33} = 0)$

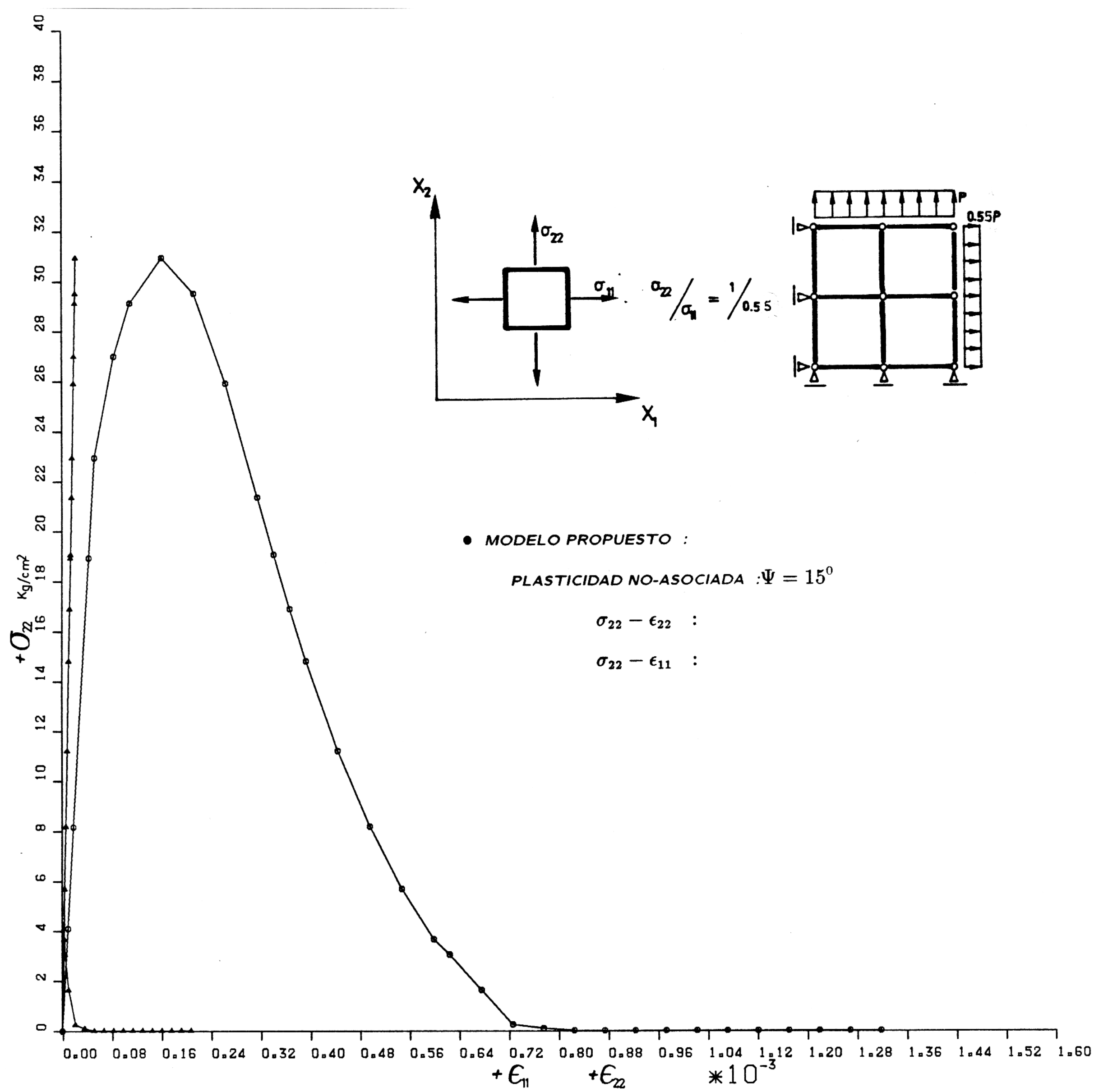


fig.(V.3,d): Resultado obtenido por el modelo durante el ensayo a tracción biaxial doble asimétrica. Caso de carga d.-: $(\sigma_{22}/\sigma_{11} = 1/0.55\ \ y\ \sigma_{33} = 0)$

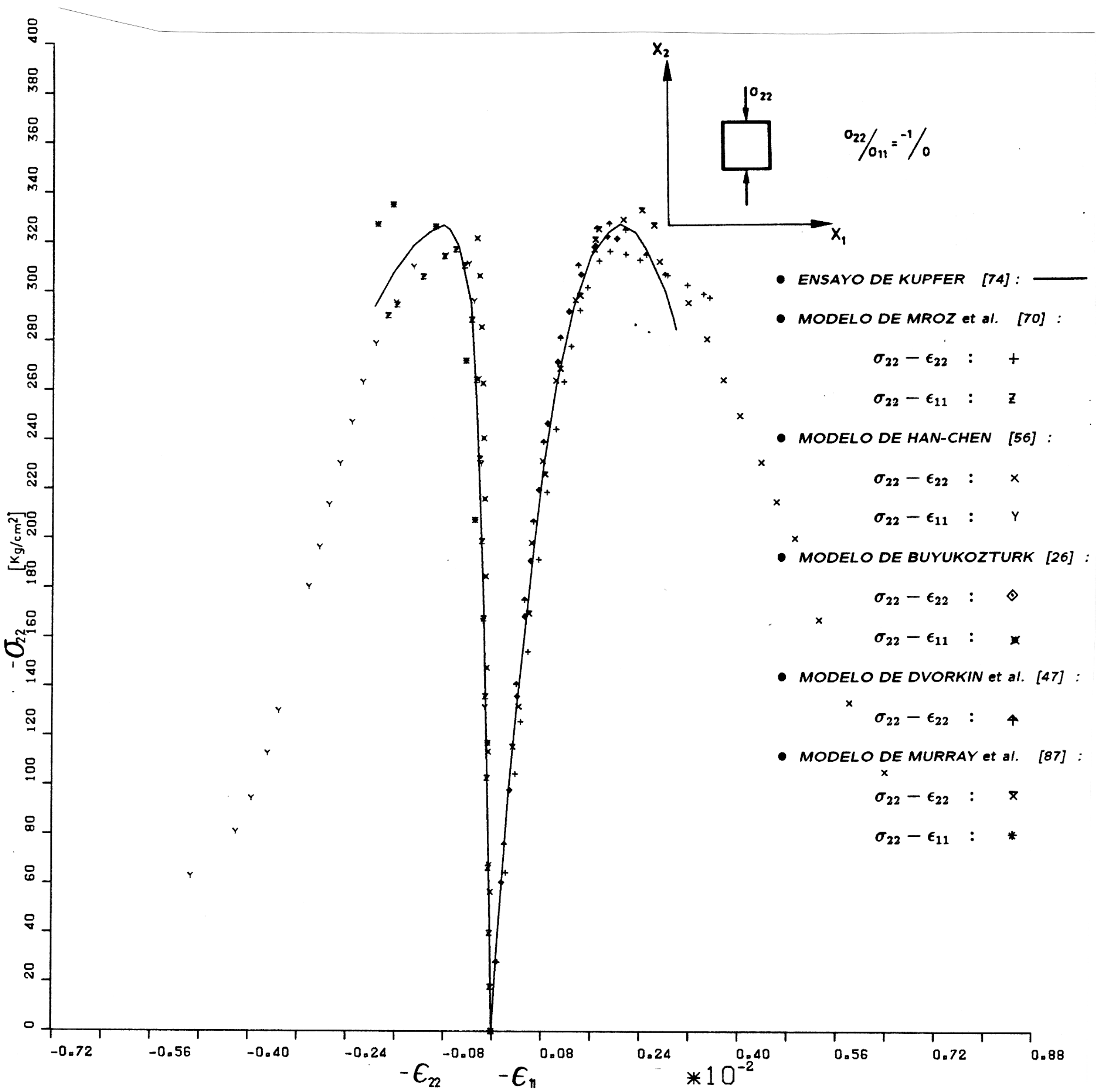


fig.(V.4,a): Comparación entre los resultados obtenidos por algunos modelos numéricos desarrollados por otros investigadores, y el ensayo a compresión uniaxial de Kupfer et al. [74] . Caso de carga a.-: $(\sigma_{22}/\sigma_{11} = -1/0 \;\; y \; \sigma_{33} = 0)$

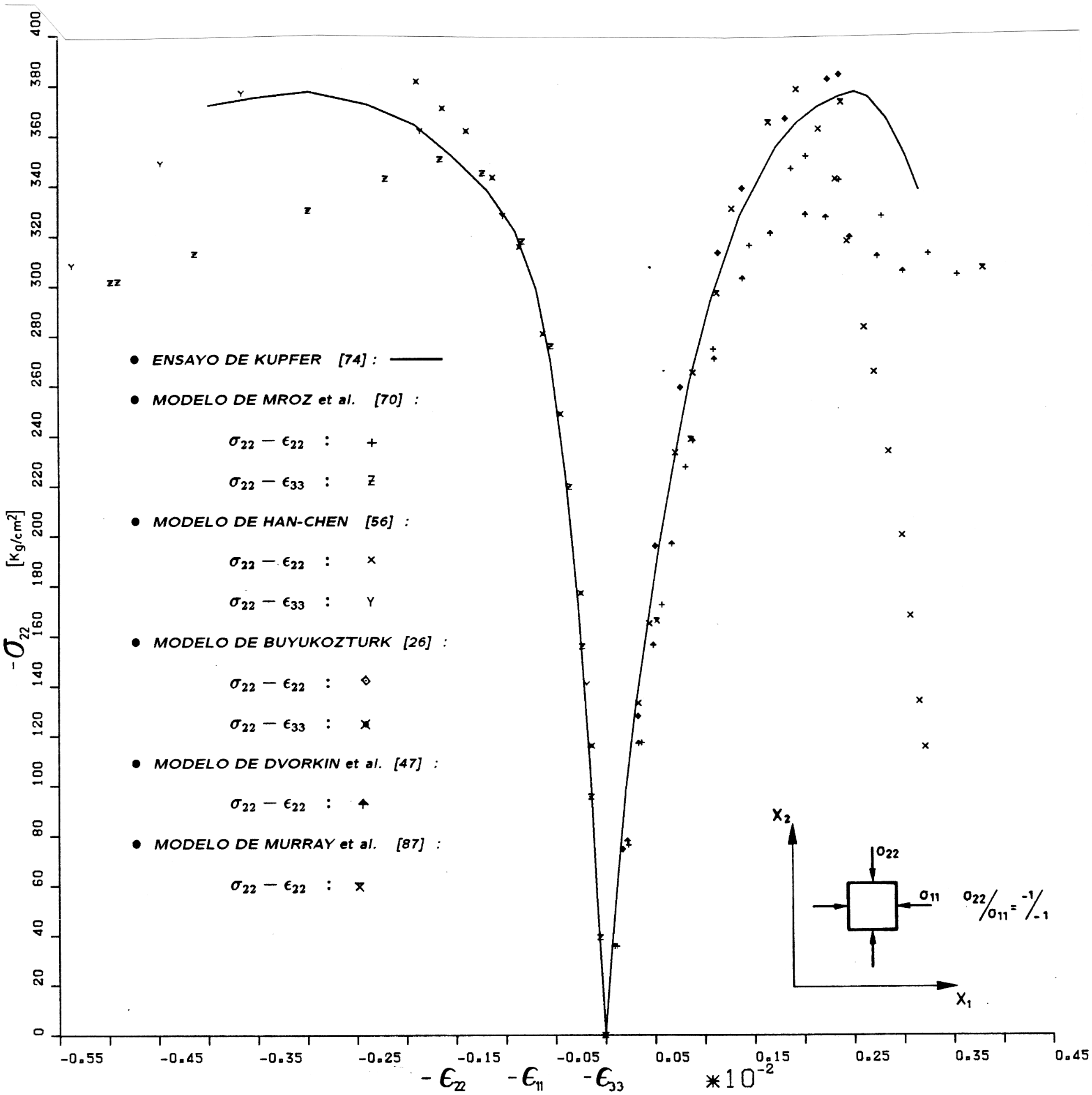


fig.(V.4,b): Comparación entre los resultados obtenidos por algunos modelos numéricos desarrollados por otros investigadores, y el ensayo a compresión biaxial doble simétrica de Kupfer et al. [74] . Caso de carga b.-: $(\sigma_{22}/\sigma_{11} = -1/-1 \;\; y \; \sigma_{33} = 0)$

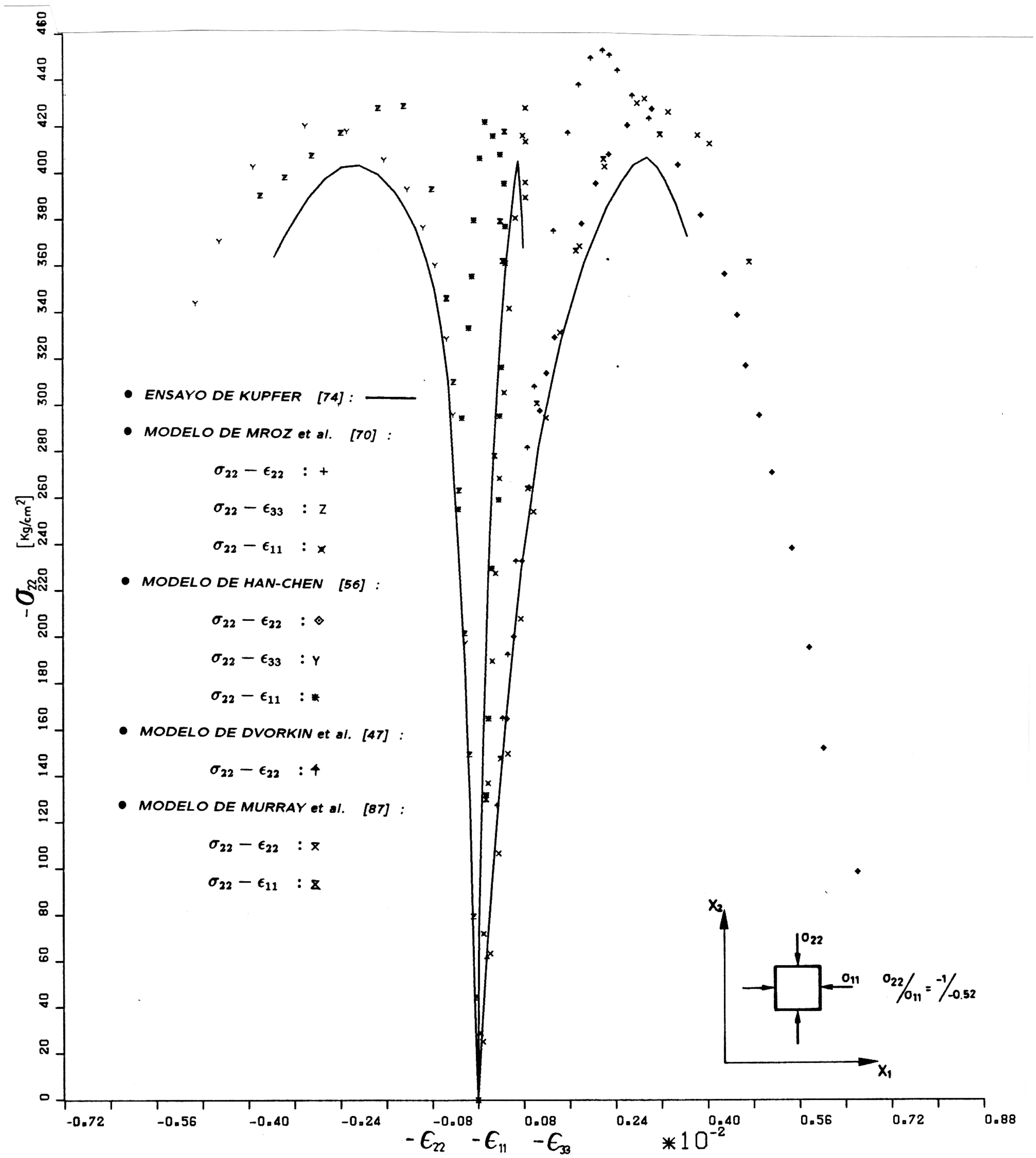
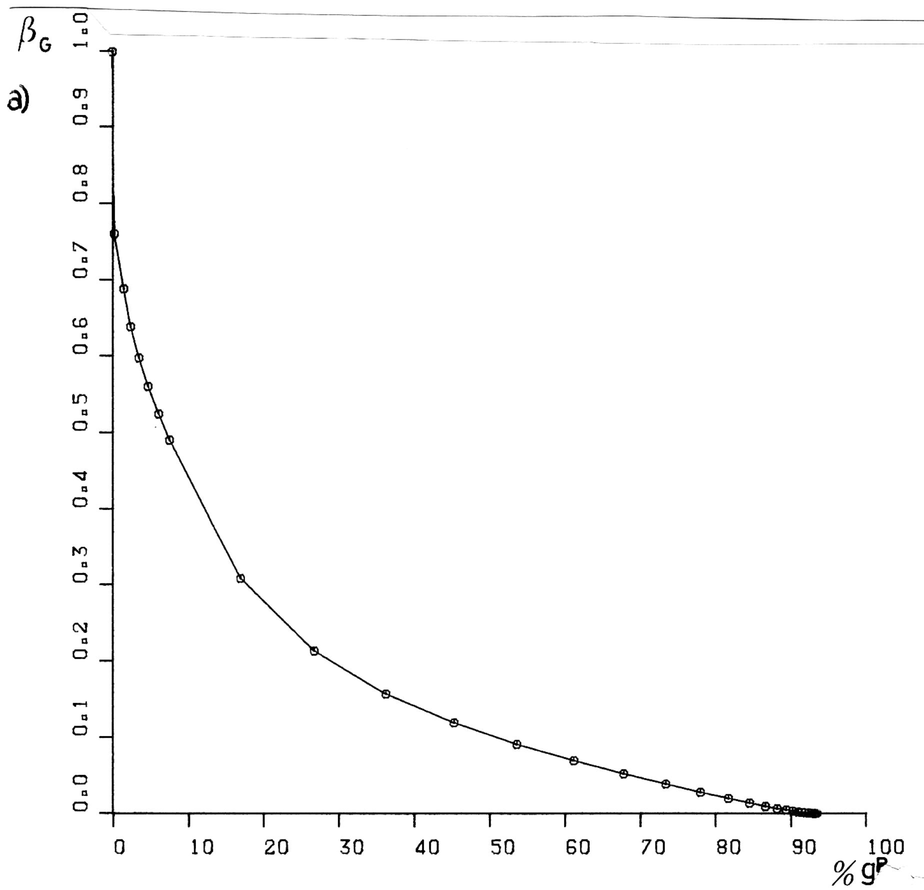


fig.(V.4,c): Comparación entre los resultados obtenidos por algunos modelos numéricos desarrollados por otros investigadores, y el ensayo a compresión biaxial doble asimétrica de Kupfer et al. [74] . Caso de carga c.-: $(\sigma_{22}/\sigma_{11} = -1/-0.52 \;\; y \; \sigma_{33} = 0)$



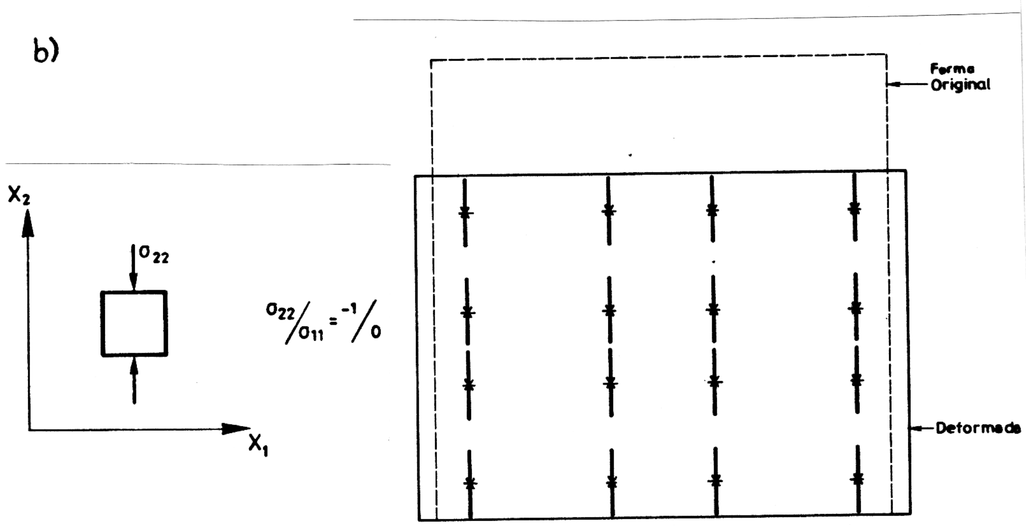


fig.(V.5): a) Forma en que evoluciona el Factor de retención de tensiones cortantes β_G , en un punto de integración numérica, durante el desarrollo de un proceso de carga cuasi estático de tracción o compresión uniaxial. b) Esquema de fisuración para un caso de compresión simple.

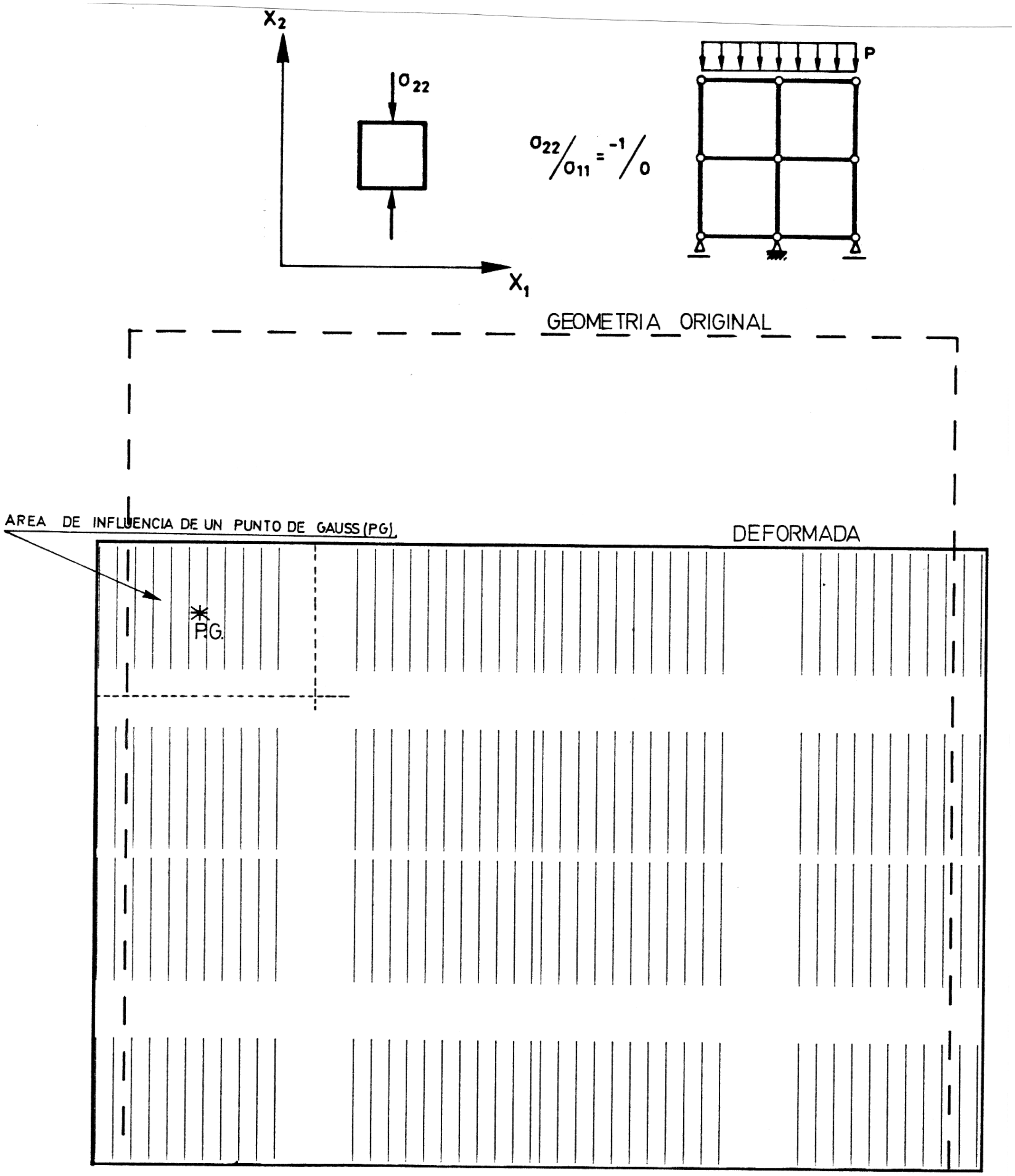


fig.(V.6,a): Tipo de fisuración que predice el modelo, para el caso de carga a.-: $(\sigma_{22}/\sigma_{11} = -1/0 \;\; y \; \sigma_{33} = 0)$

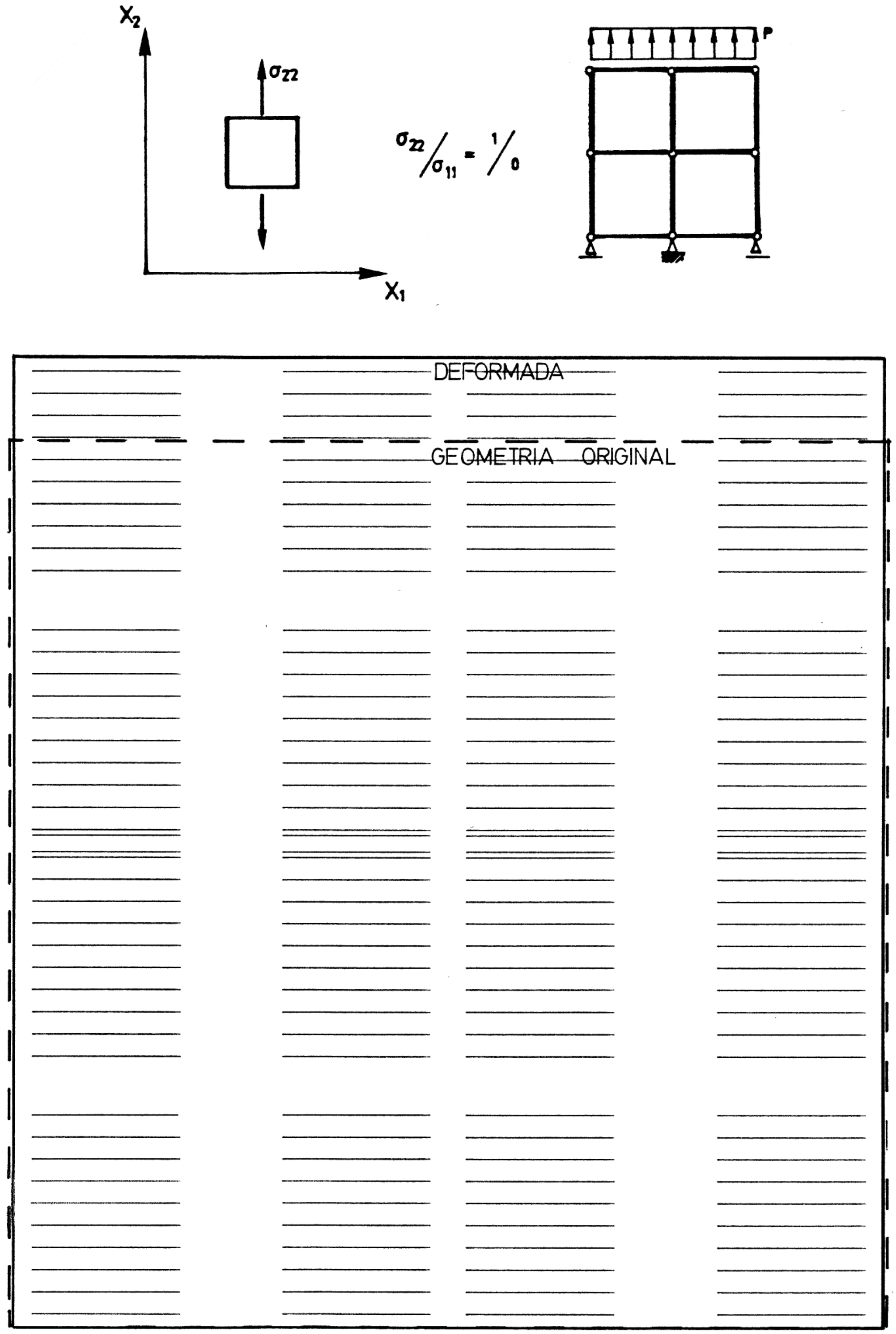


fig.(V.6,b): Tipo de fisuración que predice el modelo, para el caso de carga d.-: $(\sigma_{22}/\sigma_{11} = 1/0 \;\; y \; \sigma_{33} = 0)$

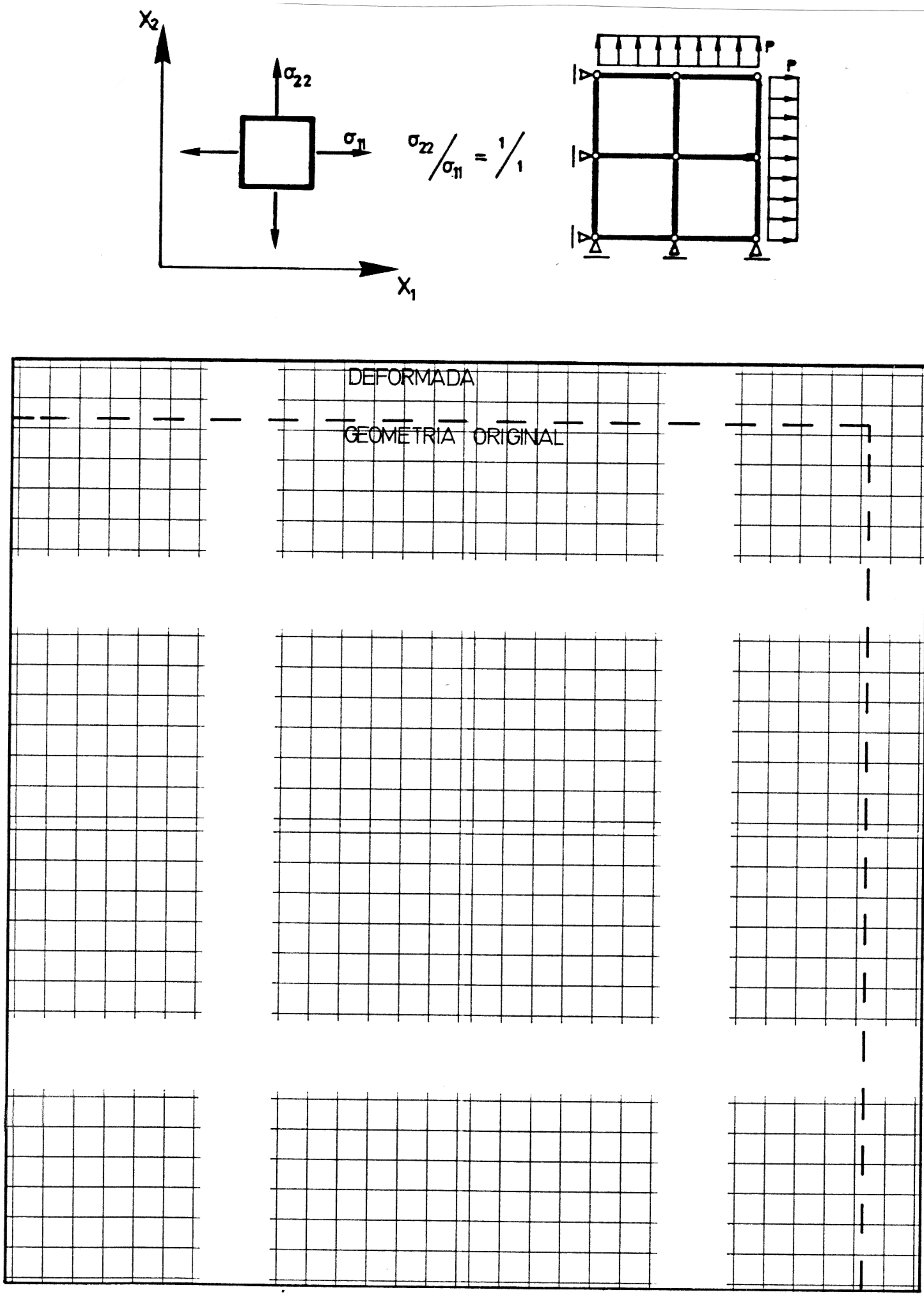
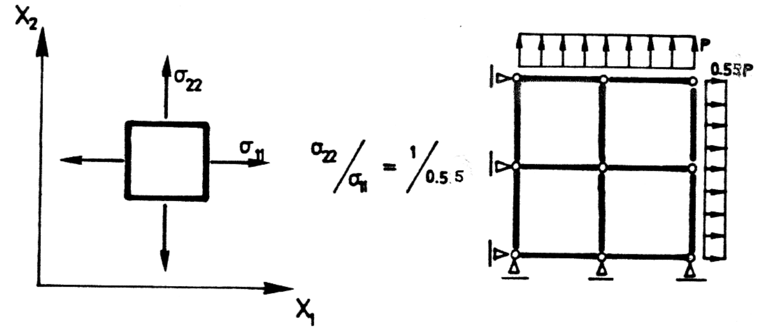


fig.(V.6,c): Tipo de fisuración que predice el modelo, para el caso de carga d.-: $(\sigma_{22}/\sigma_{11} = 1/1 \;\; y \; \sigma_{33} = 0)$



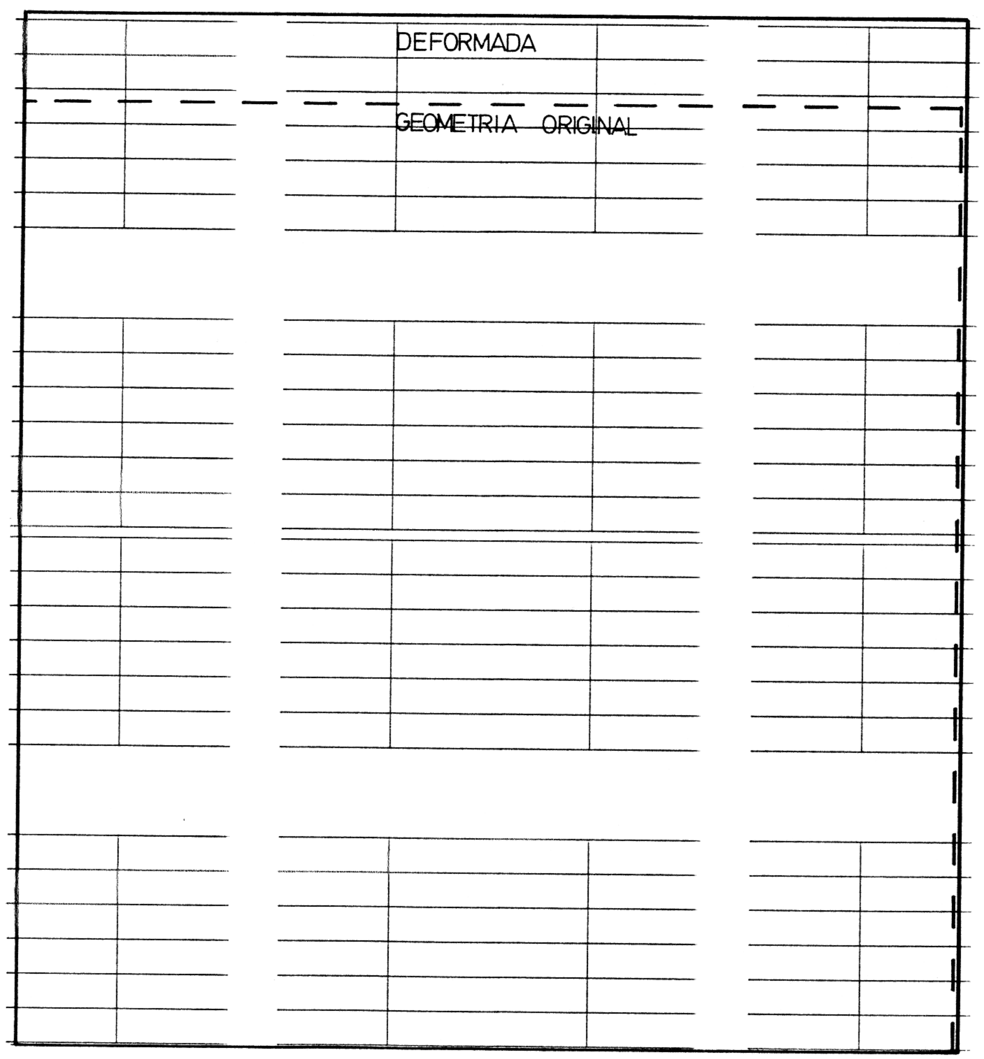


fig.(V.6,d): Tipo de fisuración que predice el modelo, para el caso de carga **d.-**: $(\sigma_{22}/\sigma_{11} = 1/0.55 \;\; y \; \sigma_{33} = 0)$

V.3.- ENSAYO DE TRACCION EN DOS DIRECCIONES ORTOGONALES – PRUEBA DE LA DIRECCIONALIDAD DEL DAÑO.

V.3.a- Consideraciones generales sobre el ensayo.

Se ha realizado este ensayo de tracción sobre una probeta de hormigón de $20.0 \times 20.0 \times 5.0$ *cm.* del tipo de la de Kupfer et al [74] **fig.(V.7,a)**, con el fin de mostrar el comportamiento *macro-direccional* que exhibe el daño en la masa del sólido, después de que un cierto número de puntos inician su comportamiento inelástico con ablandamiento (***aparts. IV.1*** y ***An-D.1***).

Esta probeta cúbica ha sido sometida a dos estados de cargas **fig.(V.7,b)**: **Primero** se traccionó en la dirección x_2 (carga P_{AB}), hasta alcanzar el estado último (estado en que el sólido no puede seguir resistiendo cargas); y luego se aplicó la **segunda** carga en la dirección normal a la anterior, x_1 (carga P_{BC}), hasta alcanzar nuevamente un estado de daño considerable.

Las caracerísticas geométricas y mecánicas utilizadas para realizar el ensayo numérico son las que se muestran en la **fig.(V.7)**. Como se puede observar, el *modelo de material* utilizado coincide con el de Kupfer ***apart. V.2*** .

Se ha discretizado el dominio del sólido con 121 elementos finitos planos de cuatro nodos, y se ha utilizado para cada elemento una integración numérica de Gauss-Legendre [144] de 2×2 puntos.

En el ensayo descrito en el apartado anterior ha sido necesario aplicar cargas, controlando desplazamientos en ciertos puntos mediante el procedimiento de Crisfield [37] , con el fin de mantener constante la relación de tensiones σ_{22}/σ_{11} durante todo el proceso de carga. En el problema que se está analizando, no ha sido necesario mantener constante esta relación de tensiones, por que son dos ensayos uniaxiales superpuestos. Debido a esto, no se ha utilizado ningún método de control de desplazamientos, y en vez de aplicar cargas, se han impuesto desplazamientos en las caras: primero en la dirección x_2 (δu_{AB}) hasta alcanzar el estado último, y luego se ha aplicado el desplazamiento en la dirección x_1 (δu_{BC}).

Se ha resuelto el problema de plasticidad no-asociada, utilizando el método de rigidez inicial K_0 al igual que en el problema anterior.

V.3.b- Análisis del ensayo.

En la figs.(V.8), se pueden observar las curvas de evolución de la tensión vs. la deformación, para distintos puntos del sólido, tanto en la dirección x_1 como en la x_2 . En ellas, el trazo AB describe el proceso que se desarrolla bajo la aplicación del desplazamiento δu_{AB} , y el trazo $B - C$ describe el proceso que se desarrolla bajo la aplicación del desplazamiento δu_{BC} , mientras se mantiene constante el desplazamiento δu_{AB}^{max} en su valor máximo fig.(V.7,c).

Durante el desarrollo del proceso AB (en la dirección x_2), al llegar al punto L_{AB} figs.(V.8) mas allá del pico de tensiones, se produce una *localización de deformaciones en una banda* definida por los elementos $56\ al\ 66$ figs.(V.9,a) y (V.9,b), donde la relación tensión-deformación, para todos los puntos contenidos en esta banda, siguen un proceso con ablandamiento figs.(V.8,a) y (V.8,b). El resto de los puntos que están fuera de la banda de localización, sigue un proceso elasto-plastico con ablandamiento por un camino distinto, hasta alcanzar el límite L'_{AB} figs.(V.8,c) y (V.8,d), a partir del cual inician una descarga elástica.

Alcanzado el valor de desplazamiento δu_{AB}^{max} (Punto B), se aplica un desplazamiento δu_{BC} en la dirección x_1 . Debido a que el daño producido en el proceso anterior se ha localizado en una faja paralela a la dirección x_1 y el resto del sólido no ha agotado su resistencia, sino que la mantiene *casi* intacta, se pueden aplicar nuevas cargas en direcciones distintas a la x_2 figs.(V.8,e) y (V.8,f). El proceso BC , se inicia con un comportamiento elástico hasta alcanzar el nuevo pico de tensiones, que coincide con el valor de la tensión al límite L_{AB} (inicio de la descarga elástica en el proceso de carga anterior): $\sigma_{BC}^{pic} \equiv \sigma_{AB}^{L_{AB}}$. Si se sigue incrementando el desplazamiento δu_{BC} , se alcanza el límite L_{BC} figs.(V.8), que marca el inicio de una nueva *localización de deformaciones*, en una banda transversal a la anterior, definida por los elementos: $6, 17, 28, 39, 50, 61, 72, 83, 94, 105, 116$ figs.(V.9,b) , (V.9,c) y (V.9,d), y donde sus puntos siguen con un comportamiento tensión deformación con ablandamiento figs.(V.8,e) y (V.8,f). Entre los puntos restantes que no pertenecen a esta banda, están aquellos que se encuentran dentro de la faja de localización desarrollada durante el proceso anterior, para los cuales la respuesta tensión deformación se desarrolla con una rigidez nula; y están los que no pertenecen a ninguna de estas dos fajas y siguen un proceso elasto-plástico con ablandamiento por un camino distinto a los puntos dañados, hasta alcanzar el límite L'_{BC} donde se inicia un proceso elástico de descarga **fig.(V.8,f)**.

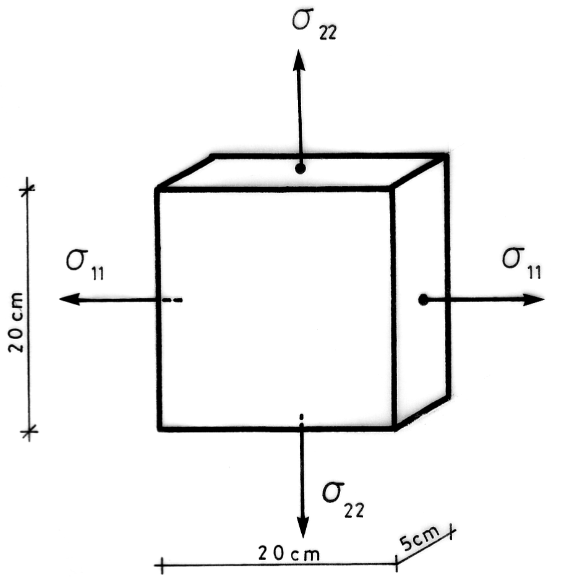
Al concluir el proceso de carga BC , se puede observar en la **figs.(V.10)** que la banda de localización desarrollada durante el primer caso de carga, no ha respondido frente a la aplicación del segundo caso de carga.

A partir del punto C , se han presentado grandes problemas de convergencia hacia la solución. Debido a que el ensayo tenía por objeto mostrar el fenómeno de macro-ortotropía o macro-direccionalidad, y habiéndose cumplido este objetivo, se consideró innecesario proseguir más allá de este límite.

En las **figs.(V.9,b) y (V.9,d)** se muestra el estado de fisuración que predice el modelo en los puntos de integración de Gauss-Legendre. El análisis de dicha fisuración se ha realizado de acuerdo a la metodología presentada en el ***apart. An-D.2.***; así el post-procesador del modelo interpreta que la fisuración se inicia cuando la deformación plástica en el punto tiene una componente positiva (estiramiento inelástico), la orientación de cada fisura se representa mediante un trazo ortogonal a la dirección de la correspondiente deformación plástica principal positiva y la densidad de líneas verticales paralelas da una idea cualitativa de la magnitud de la *apertura* de estas fisuras. El esquema de fisuración obtenido revela la formación de dos fajas donde se ha localizado el *daño plástico* **figs.(V.9,a) y (V.9,c)** .

La energía total disipada al finalizar el proceso de carga AB ha sido de 34.00 $kgcm$, siendo ésta un poco más elevada que la disipada en el problema anterior (Kupfer et al.), con cuatro elementos finitos. Probablemente esta sobre-energía disipada se deba a que la localización no se produjo inmediatamente después de superar el pico de tensiones.

Al igual que en el ejemplo de Kupfer et al. presentado en el apartado anterior, se han obtenido resultados insatisfactorios con elementos planos de ocho nodos.



a) Geometría y sentido positivo de las tensiones

$E_0 = 395000.00\ kg/cm^2.$

$\nu_0 = 0.24$

${\sigma_C}^0 = -229.00\ kg/cm^2$

${\sigma_C}^{pic} = -328.00\ kg/cm^2$

${\sigma_T}^0 = \ 22.90\ kg/cm^2$

$\alpha = 0.12 \longrightarrow \dfrac{\sigma_{b0}}{\sigma_{c0}} = 1.16$

$\gamma = 3.0$

$p = 1.0$

$G^f = 0.16\ kg/cm$

$G^c = 16.00\ kg/cm$

$L^{p^e} = \sqrt{A^e}$

Flujo asociado. Criterio de fluencia propuesto

Flujo no-asociado. $\begin{cases} \text{Criterio de fluencia propuesto} \ ; \\ \text{Func. de potencial de Mohr-Coulomb} \\ \text{con : } \phi = \psi = 15^o \end{cases}$

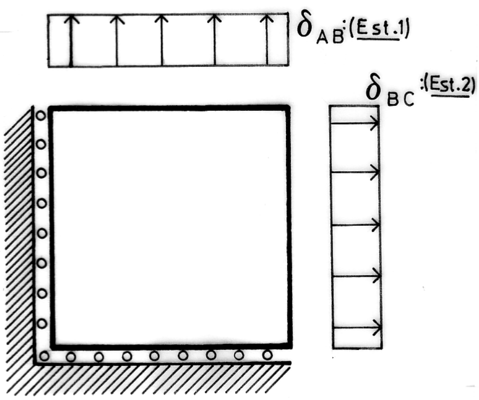
Función de endurecimiento a compresión $c_C(\kappa)$: $F-3$

Función de endurecimiento a tracción $c_T(\kappa)$: $F-3$

Posición relativa del pico de tensiones : $(\kappa^p)^{pic} = 0.38$

Con degradación elástica.

Sin degradación plástica.



b) Desplazamientos impuestos al sólido

$\delta^{max} = 0{,}02\ cm$

• Est.1 : $\begin{cases} \delta_{AB} = \delta^{max} \\ \delta_{BC} = 0 \end{cases}$ • Est.2 : $\begin{cases} \delta_{AB} = \delta^{max} \\ \delta_{BC} = \delta^{max} \times 0{,}25 \end{cases}$

fig.(V.7): Ensayo de tracción en dos direcciones ortogonales– Características geométricas y mecánicas utilizadas en el ensayo numérico.

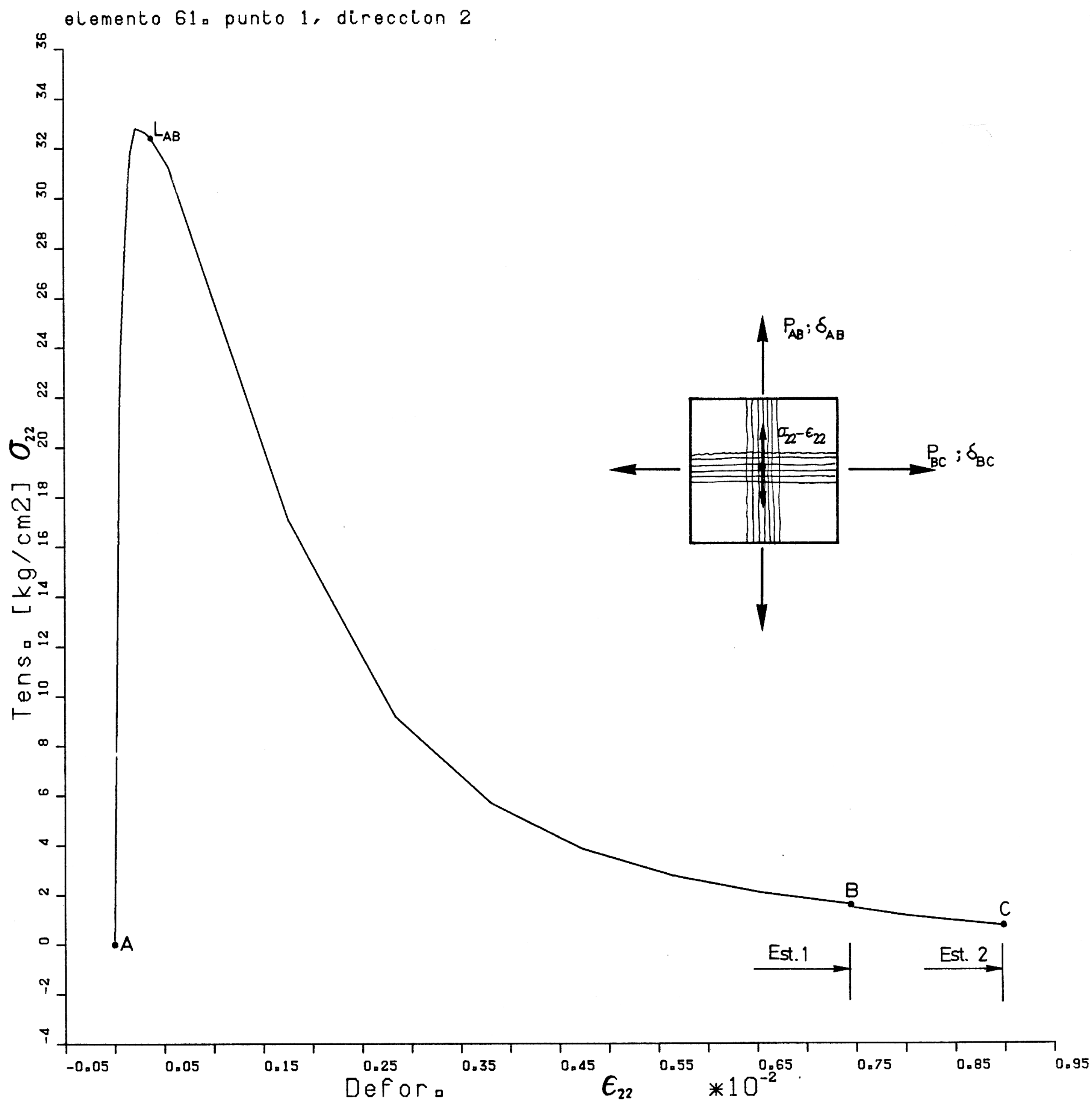


fig.(V.8,a): Ensayo de tracción en dos direcciones ortogonales– Respuesta tensión-deformación $\sigma_{22} - \epsilon_{22}$ para el punto de integración $N^{ro.}\ 1$, perteneciente al elemento finito $N^{ro.}\ 61$

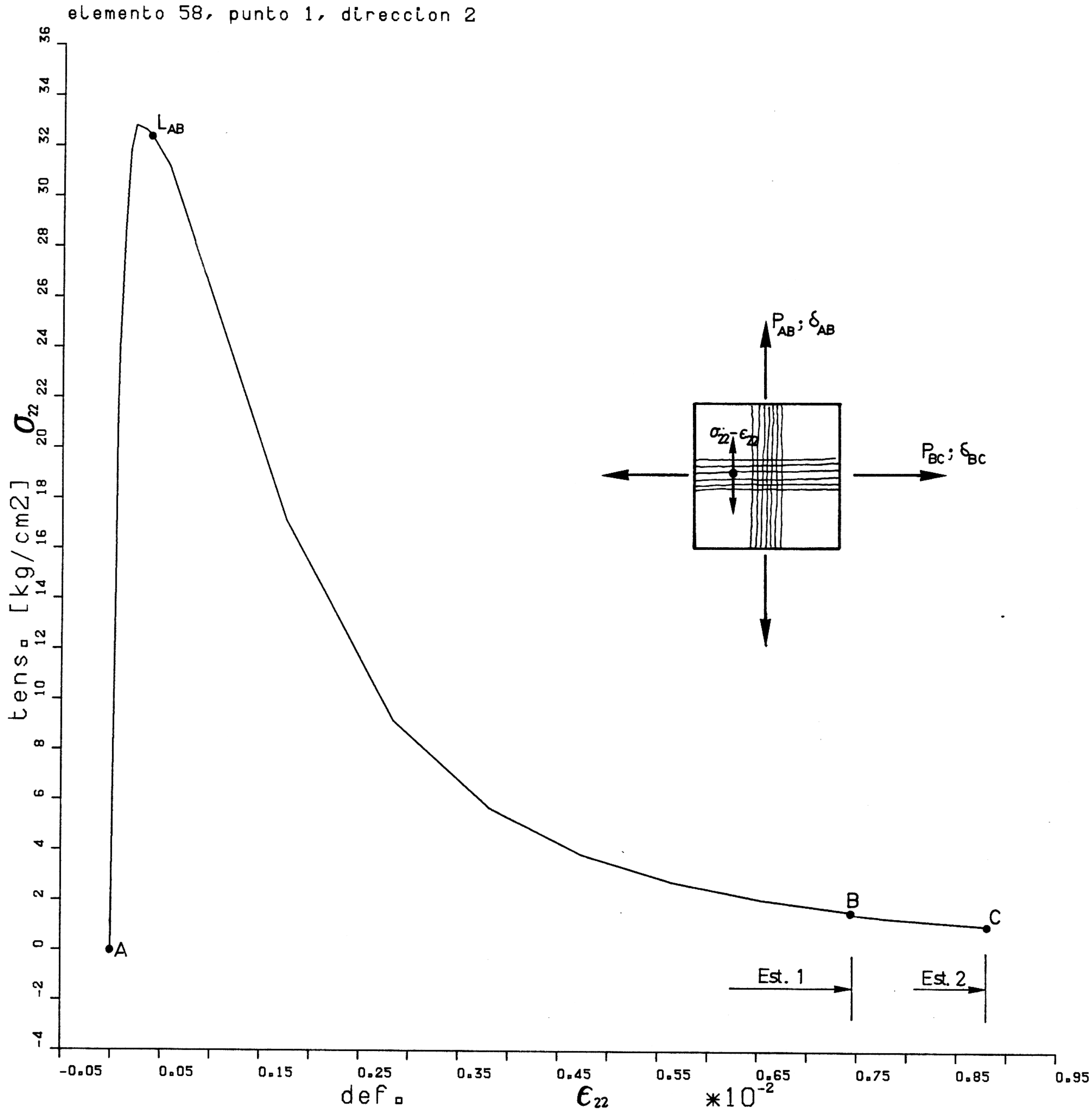


fig.(V.8,b): Ensayo de tracción en dos direcciones ortogonales– Respuesta tensión-deformación $\sigma_{22} - \epsilon_{22}$ para el punto de integración $N^{ro.}$ 1 , perteneciente al elemento finito $N^{ro.}$ 58

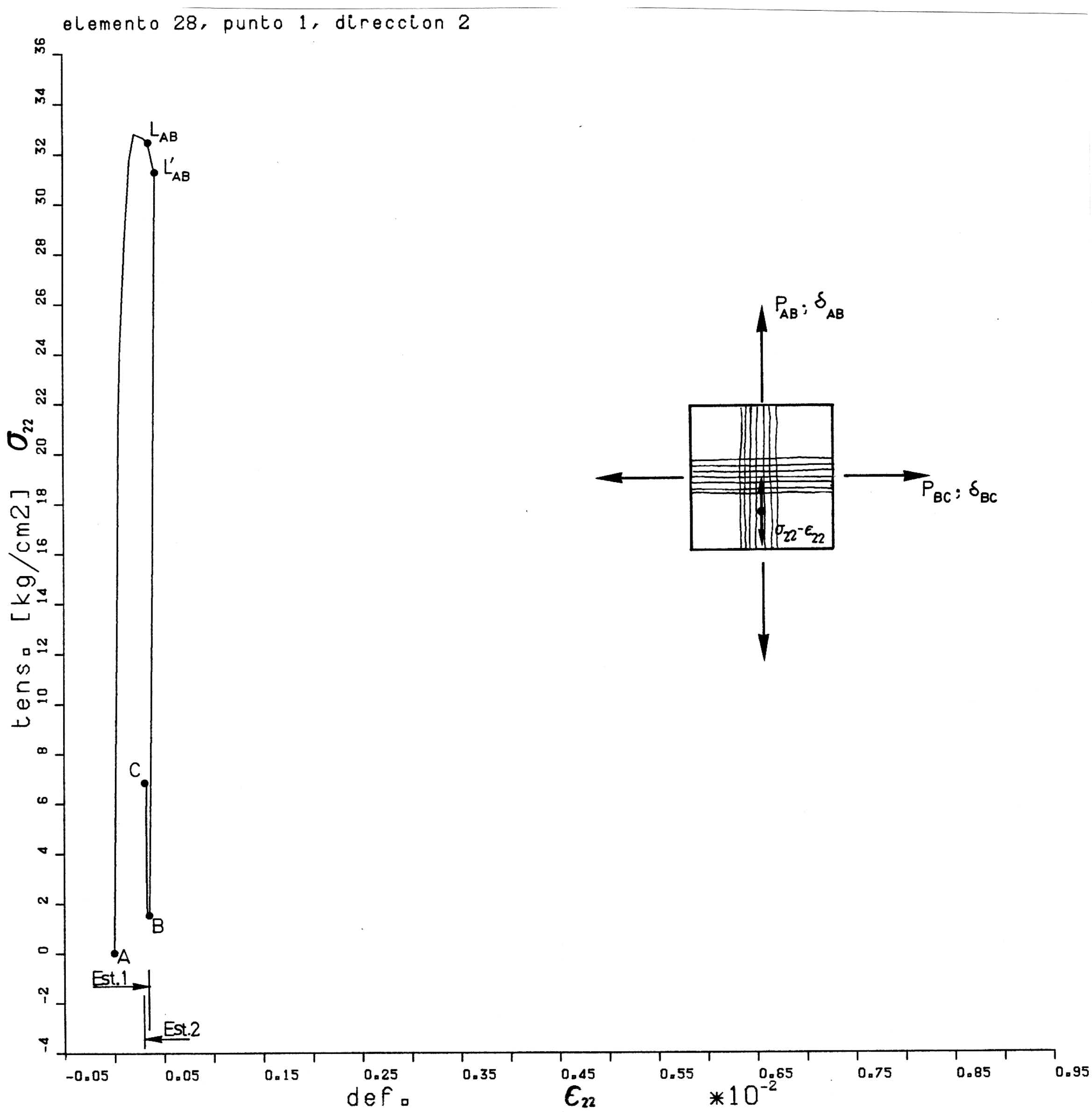


fig.(V.8,c): Ensayo de tracción en dos direcciones ortogonales– Respuesta tensión-deformación $\sigma_{22} - \epsilon_{22}$ para el punto de integración $N^{ro.}\ 1$, perteneciente al elemento finito $N^{ro.}\ 28$

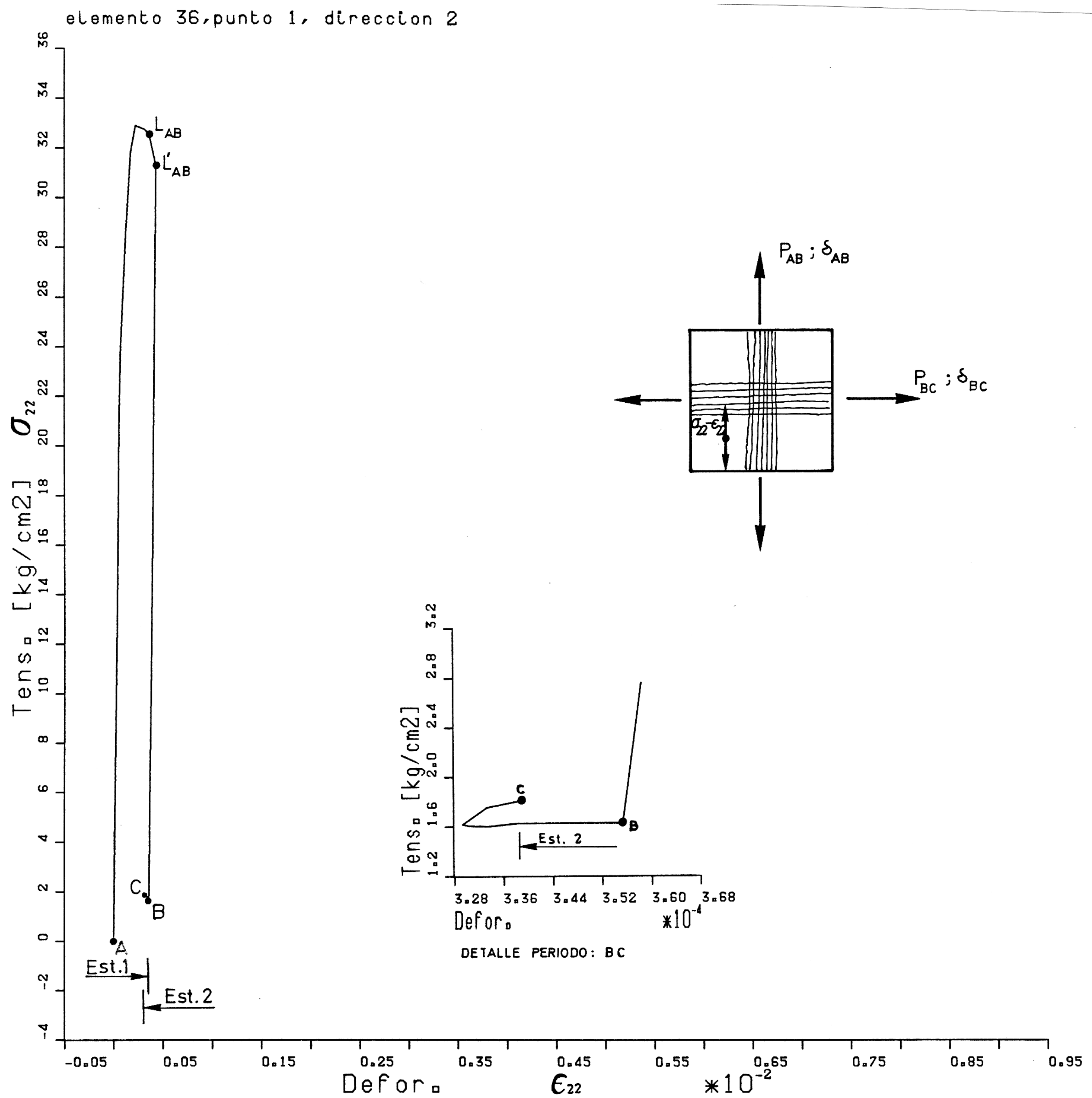


fig.(V.8,d): Ensayo de tracción en dos direcciones ortogonales– Respuesta tensión-deformación $\sigma_{22} - \epsilon_{22}$ para el punto de integración $N^{ro.}\ 1$, perteneciente al elemento finito $N^{ro.}\ 36$

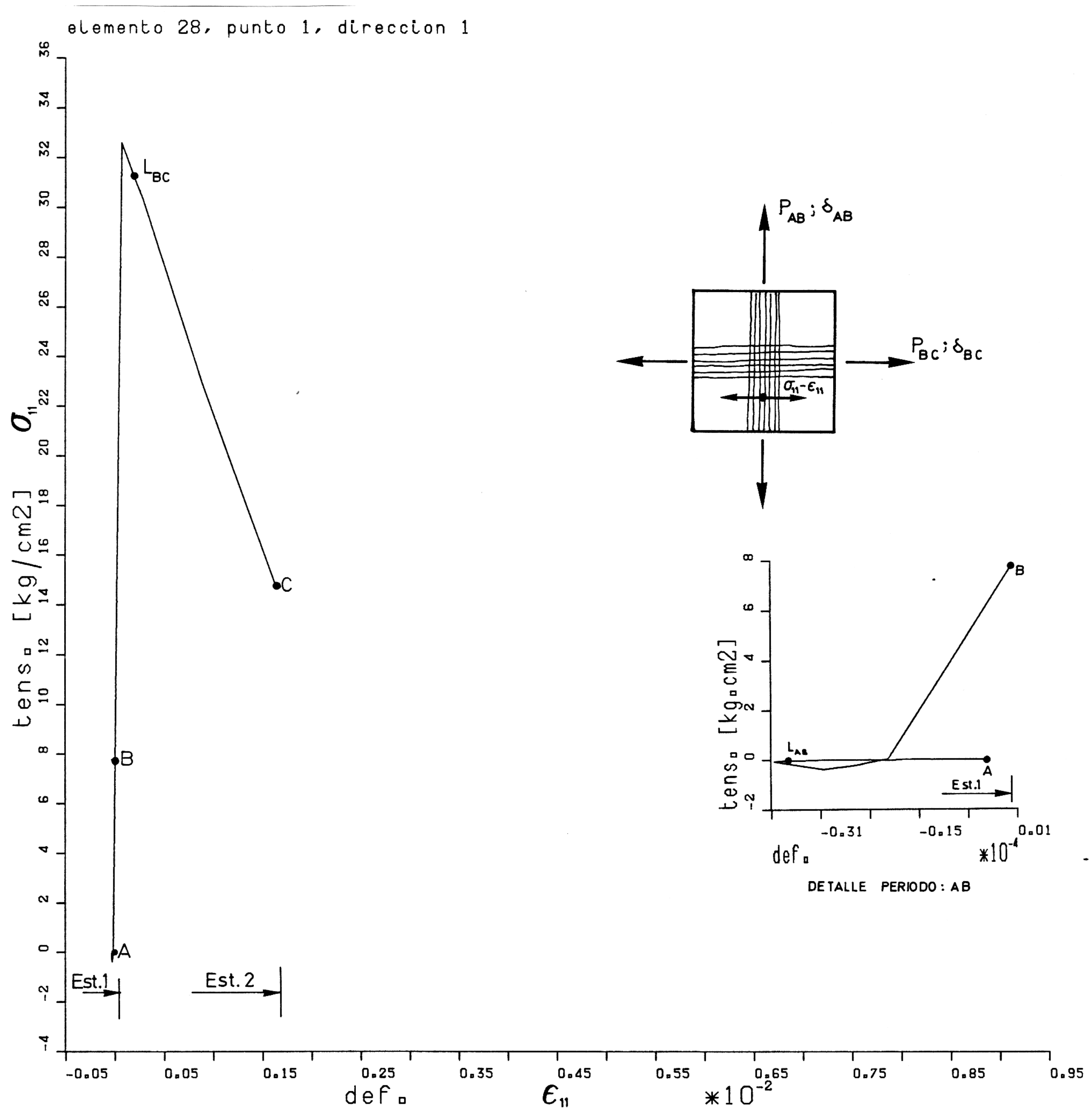


fig.(V.8,e): Ensayo de tracción en dos direcciones ortogonales– Respuesta tensión-deformación $\sigma_{11} - \epsilon_{11}$ para el punto de integración $N^{ro.}$ 1 , perteneciente al elemento finito $N^{ro.}$ 28

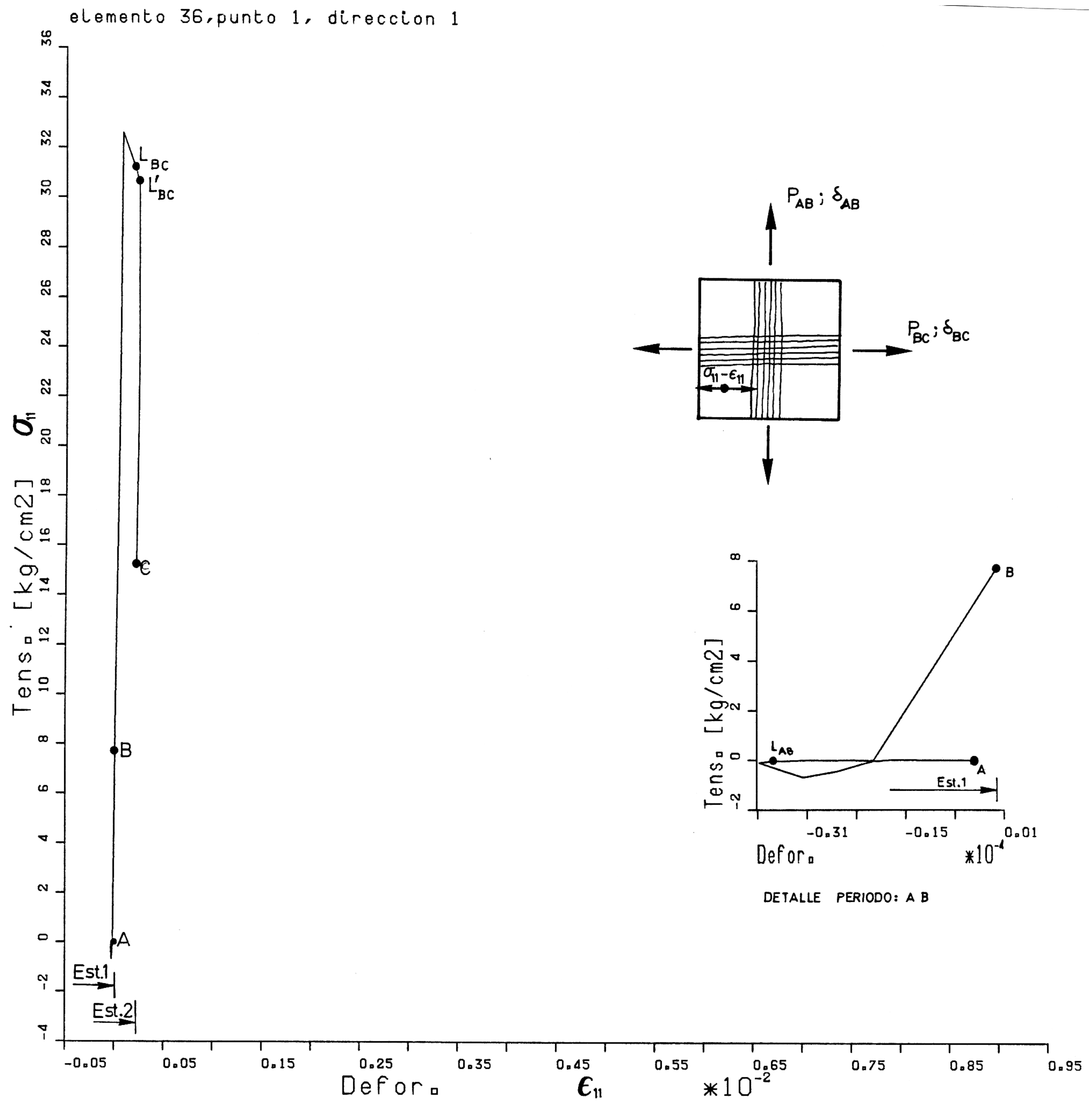


fig.(V.8,f): Ensayo de tracción en dos direcciones ortogonales– Respuesta tensión-deformación $\sigma_{11} - \epsilon_{11}$ para el punto de integración $N^{ro.}\ 1$, perteneciente al elemento finito $N^{ro.}\ 36$

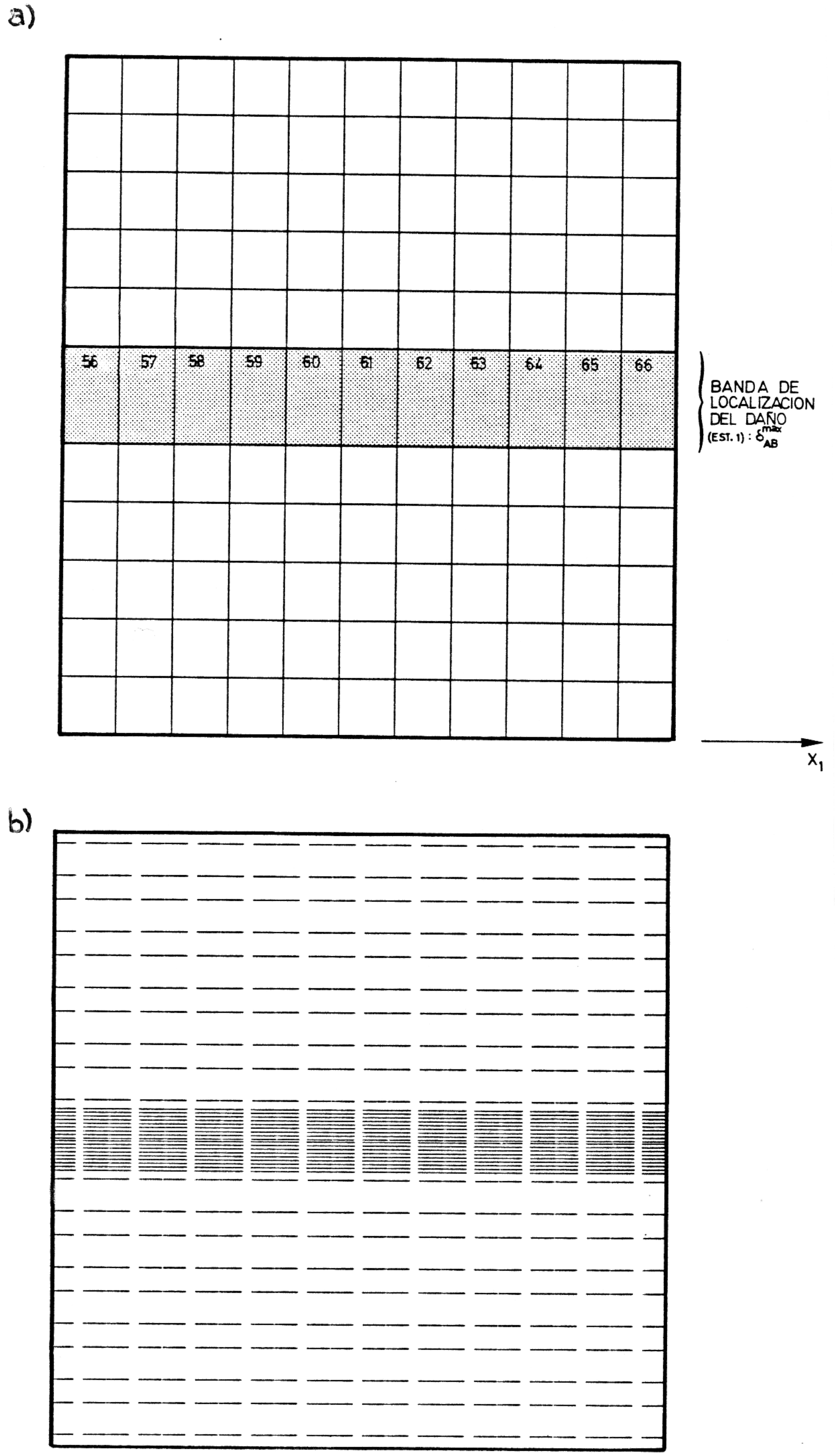
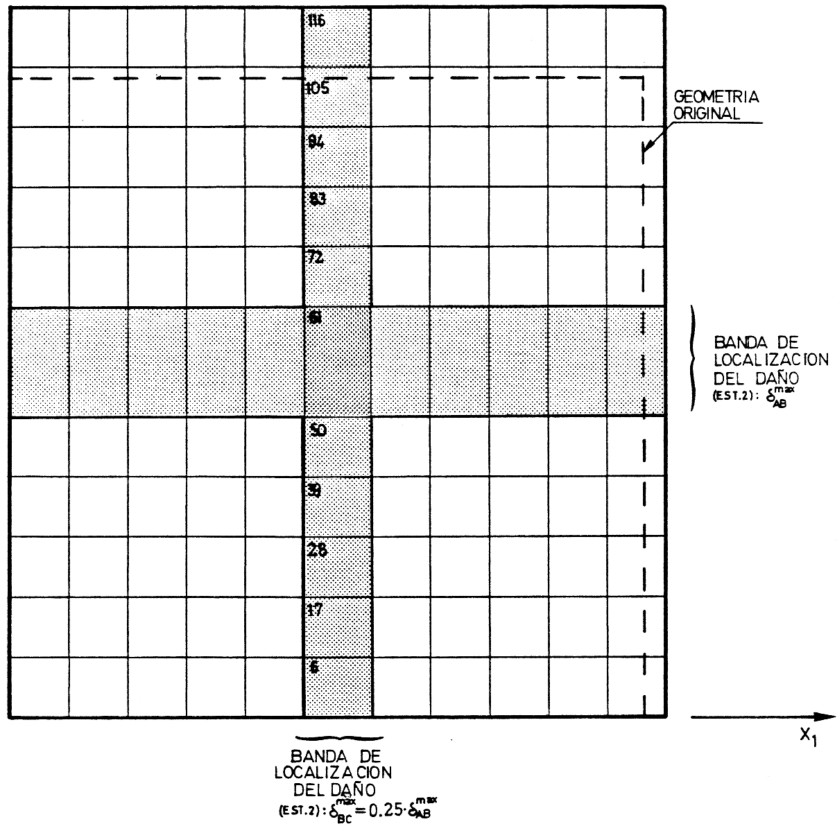


fig.(V.9): a) Ensayo de tracción en dos direcciones ortogonales– Modo de localización de las deformaciones al finalizar la aplicación del desplazamiento δu_{AB} . b) Ensayo de tracción en dos direcciones ortogonales– Estado de fisuración al finalizar la aplicación del desplazamiento δu_{AB} . Representación de todas las fisuras.

c)



d)

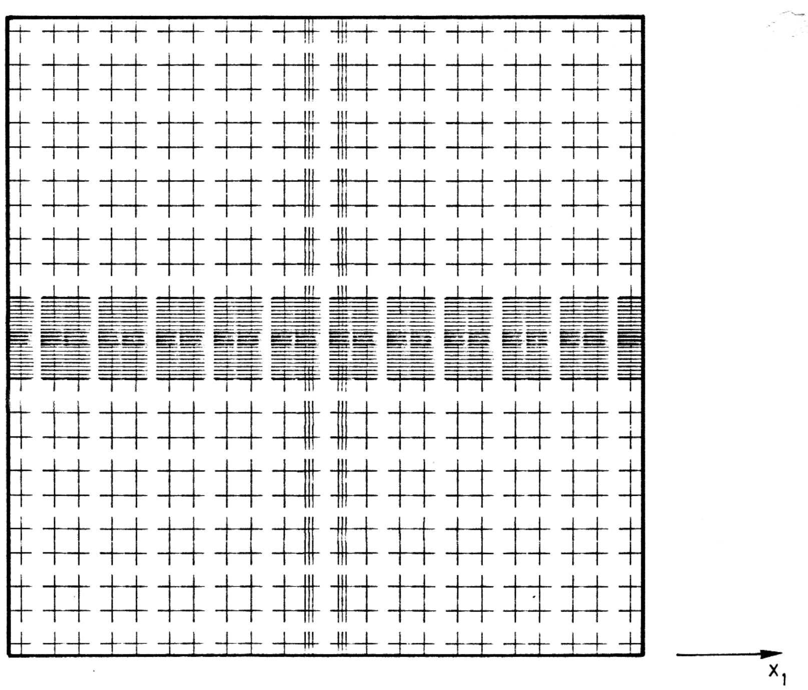


fig.(V.9): c) Ensayo de tracción en dos direcciones ortogonales– Modo de localización de las deformaciones al finalizar la aplicación del desplazamiento δu_{BC} . d) Ensayo de tracción en dos direcciones ortogonales– Estado de fisuración al finalizar la aplicación del desplazamiento δu_{BC} . Representación de todas las fisuras.

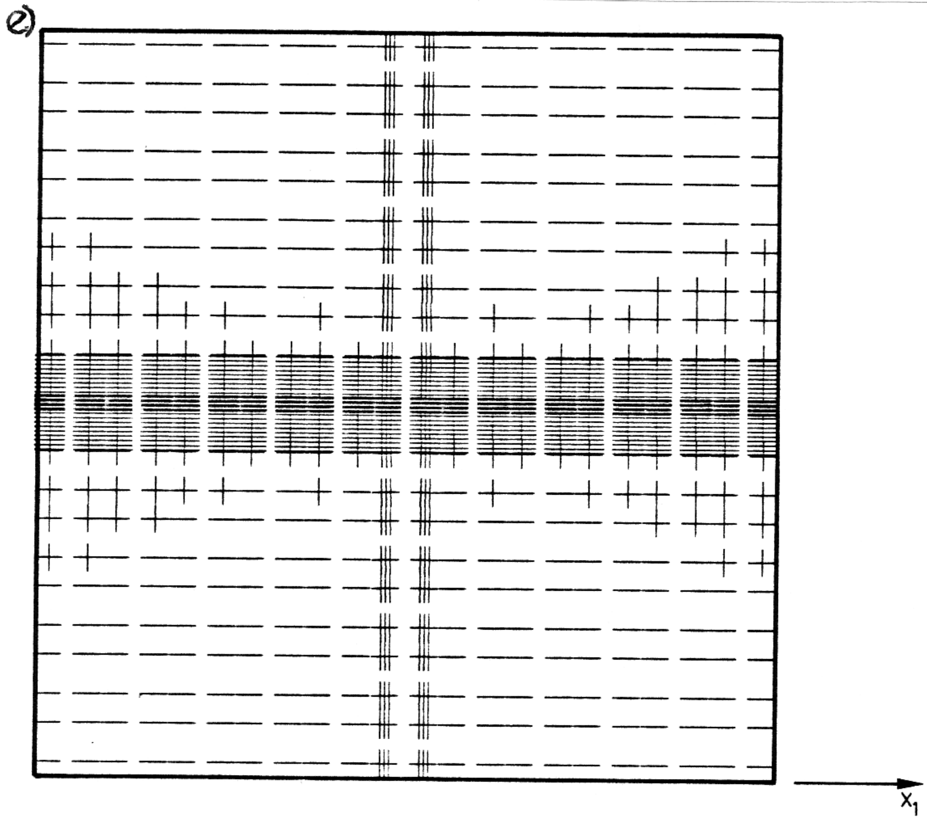


fig.(V.9,e): Ensayo de tracción en dos direcciones ortogonales– Estado de fisuración al finalizar la aplicación del desplazamiento δu_{BC} . Representación de las fisuras mayores al $3\ ^{o}/_{o}$ de la máxima.

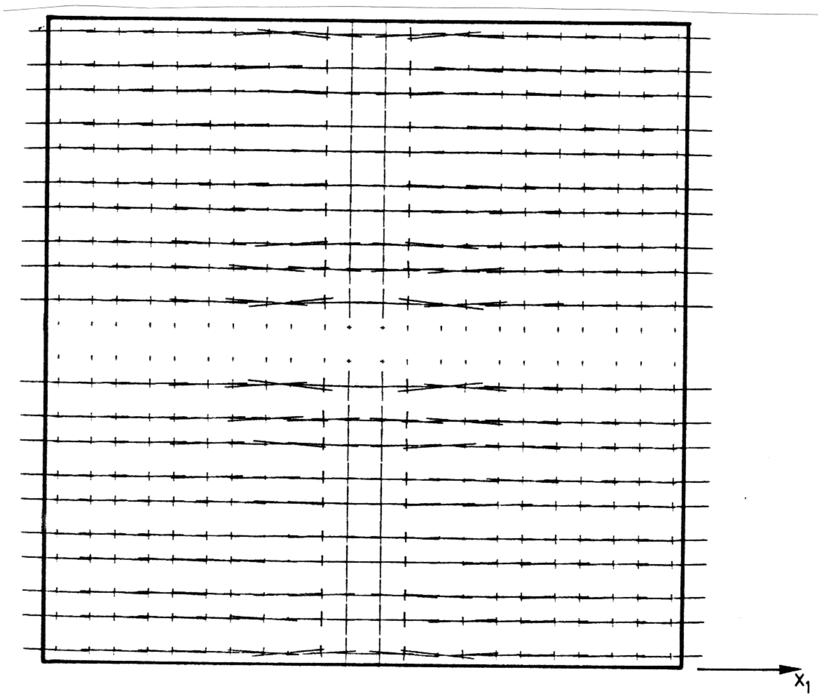


fig.(V.10): Ensayo de tracción en dos direcciones ortogonales– Estado de tensiones al finalizar la aplicación del desplazamiento δu_{BC} .

V.4.- ENSAYO A TRACCION SIMPLE DE UNA PROBETA ENTALLADA.

V.4.a- Consideraciones generales sobre el ensayo.

Este ejemplo ha sido propuesto para probar la *objetividad* en la respuesta del modelo propuesto, respecto de dos mallas de elementos finitos con distinto grado de discretización **fig.(V.11,c)**. Este caso ha sido ensayado por Petersson [110] con el fin de determinar la magnitud de la *energía de fractura por unidad de área* G^f , y ha sido analizado en forma numérica por Glemberg [54] en su tesis doctoral.

El ensayo consiste en un paralelepípedo entallado **fig.(V.11,a)** de mortero de cemento, que ha sido sometido a un estiramiento a través de un desplazamiento impuesto en la cara superior de la probeta, hasta agotar totalmente su resistencia a tracción **fig.(V.12)**.

Dada la simetría que presenta la probeta respecto del eje de referencia vertical x_2 , se ha estudiado sólo la parte simétrica derecha del sólido **fig.(V.11,b)**. A pesar de tener también otro plano de simetría horizontal que pasa por el eje x_1 , no se considera la posibilidad de estudiar por separado las sub-partes superior e inferior, debido a que se pretende mostrar la *evolución y localización del daño* en la zona por donde pasa este eje de simetría horizontal.

Se ha discretizado el dominio con dos mallas de elementos finitos de 12 y 30 elementos planos de ocho nodos **fig.(V.11,c)**, y se ha utilizado para cada elemento una integración numérica de Gauss-Legendre [144] de 3×3 puntos.

Para la resolución del sistema de ecuaciones no-lineales, se ha utilizado el método de rigidez inicial K_0 ***apart. Ap-II.3.***, conjuntamente con la técnica de control de desplazamientos con un camino plano, propuesta en el ***apart. Ap-II.3.d***, combinada a su vez con el método de control de plastificación, propuesto en el ***apart. Ap-II.3.e***.

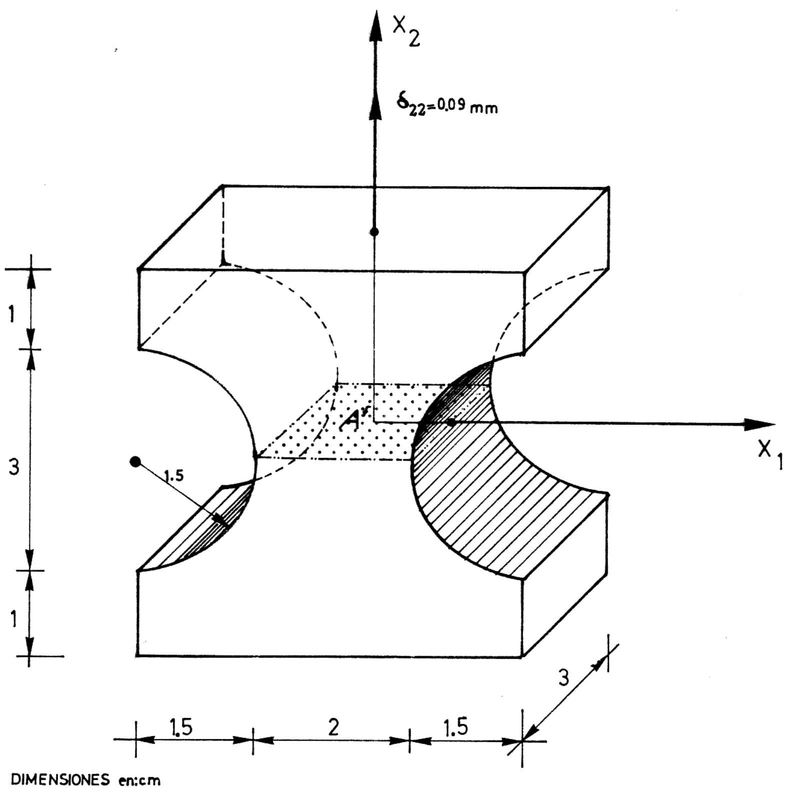
V.4.b- Análisis del ensayo.

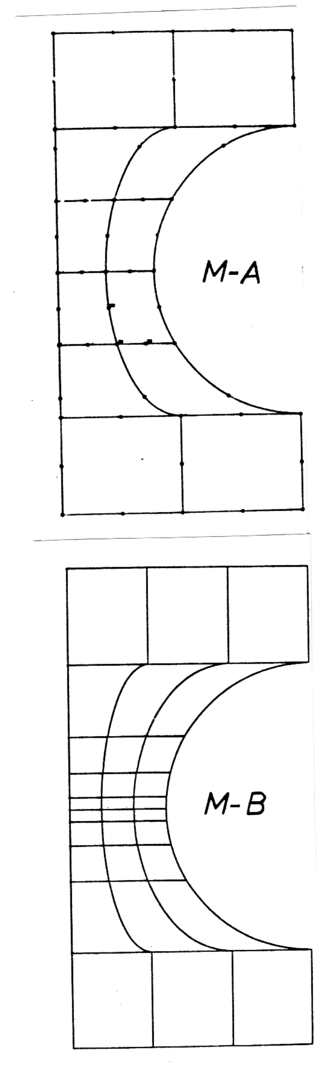
En la **fig.(V.12)** se puede observar las curvas de evolución de carga vs. desplazamiento durante todo el desarrollo del proceso cuasi-estático de carga.

En el ensayo numérico se ha utilizado una cohesión inicial (correspondiente al límite de discontinuidad inicial) de $c^0 = 27.8014\ kg/cm^2$, que junto al ángulo de rozamiento interno de $\phi = 32^o$ y a una relación de resistencias uniaxiales en el límite de discontinuidad inicial igual a $R^0_{Mohr} = 3.255$ *ec.(Ap-I.88)*, dan una resistencia a tracción máxima inicial de $\sigma^0_T = 30.82\ kg/cm^2$ *ec.(Ap-I.96)*. Esta resistencia es un $\equiv 7\ ^o/_o$ más baja que la utilizada por Glemberg en su tesis [54] , por lo tanto la carga máxima alcanzada resulta menor en esta misma proporción **fig.(V.12,b) y (V.12,c)**. No obstante esta diferencia, se ha logrado una buena coincidencia con los resultados del ensayo de Petersson y con el de Glemberg.

La energía disipada con las dos mallas de elementos finitos, tiende a un valor ligeramente superior al que se ha introducido como dato: $W^f \simeq 0.127\ kg/cm \times (2cm \times 3cm) = 0.762\ kgcm.$ **fig.(V.12,a)**, siendo siempre menor la obtenida con la malla más densa.

Las fisuras se inician a ambos lados del eje de simetría horizontal y a medida que evoluciona el proceso de ablandamiento y localización, se observa una pérdida de simetría , quedando definitivamente localizada en una banda de elementos finitos por debajo del eje de simetría **fig.(V.13,a)**. Los puntos que están fuera de dicha banda de localización, inician un proceso de descarga elástico **fig.(V.13,b)**. Al igual que en los problemas antes presentados, el análisis de dicha fisuración se ha realizado de acuerdo a la metodología detallada en el ***apart. An-D.2.***; así el post-procesador del modelo interpreta que la fisuración se inicia cuando la deformación plástica en el punto tiene una componente positiva (estiramiento inelástico), la orientación de cada fisura se representa mediante un trazo ortogonal a la dirección de la correspondiente deformación plástica principal positiva y la densidad de líneas verticales paralelas da una idea cualitativa de la magnitud de la *apertura* de estas fisuras.





$E_0 = 320000.00\ kg/cm^2$.

$\nu_0 = 0.18$

$c_C{}^0 = -27.8014\ kg/cm^2$

$c_C{}^{pic} = -92.6667\ kg/cm^2$ (*acomp.*)

$R^0 = \dfrac{|\sigma_C^0|}{|\sigma_T^0|} = 3.255$

$G^f = 0.127\ kg/cm$

$G^c = 13.00\ kg/cm$

L^{pe} = Dimensión del elemento finito, perpendicular a la fisura.

Flujo asociado.
- **Criterio de fluencia de Mohr-Coulomb modificada:** $\phi = 32^0$
- **Función de potencial de Mohr-Coulomb modificada:** $\phi = \psi = 32^0$

Función de endurecimiento a compresión $c_C(\kappa)$: $F-3$

Función de endurecimiento a tracción $c_T(\kappa)$: $F-2$

Posición relativa del pico de tensiones : $(\kappa^p)^{pic} = 0.38$

Sin degradación elástica.

Sin degradación plástica.

fig.(V.11): Ensayo de una probeta entallada, a tracción simple – Características geométricas mecánicas y malla de elementos finitos utilizada en el ensayo numérico.

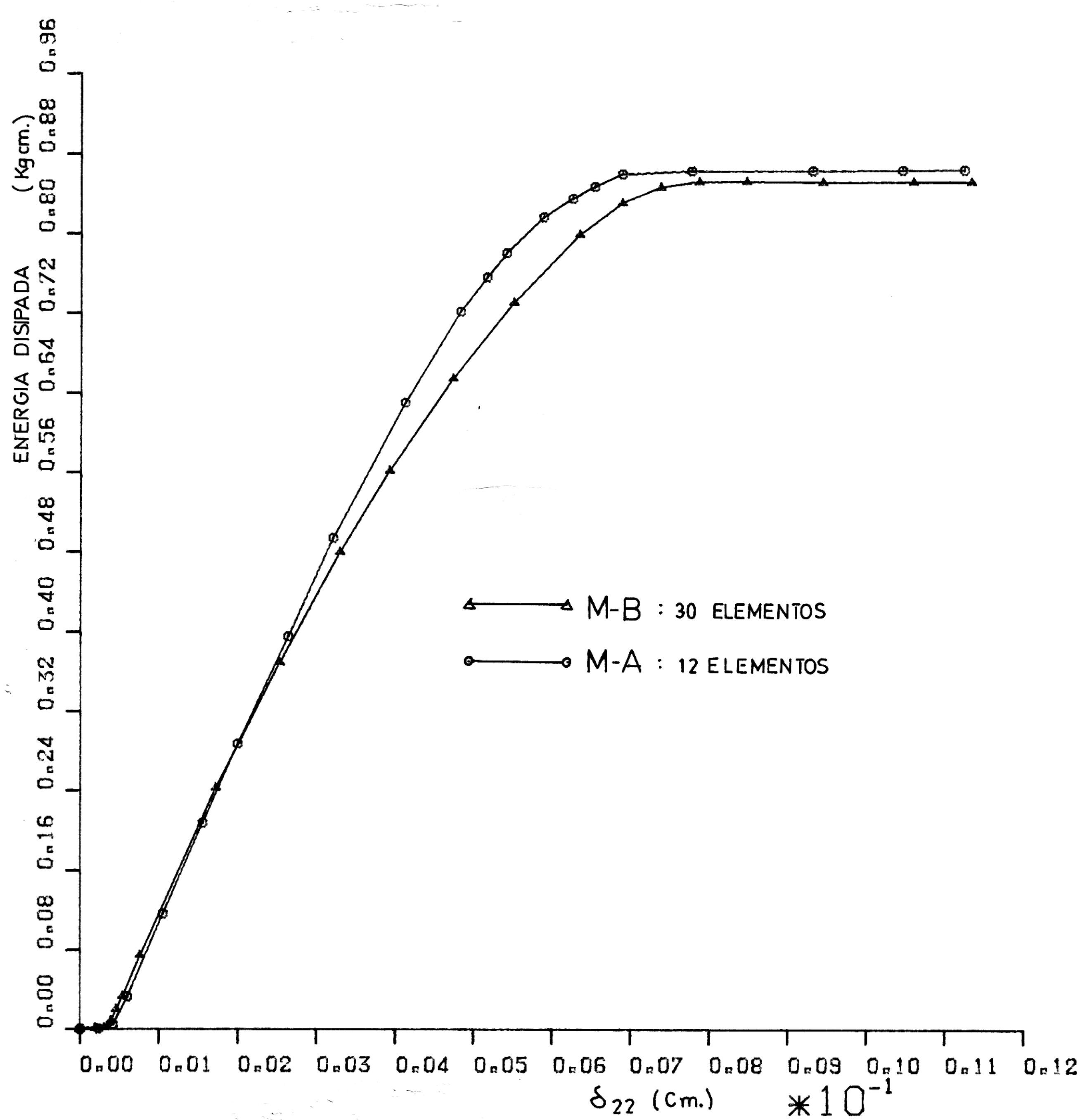


fig.(V.12,a): Ensayo de una probeta entallada, a tracción simple – Energía disipada por el sólido discretizado con las dos mallas de elementos finitos.

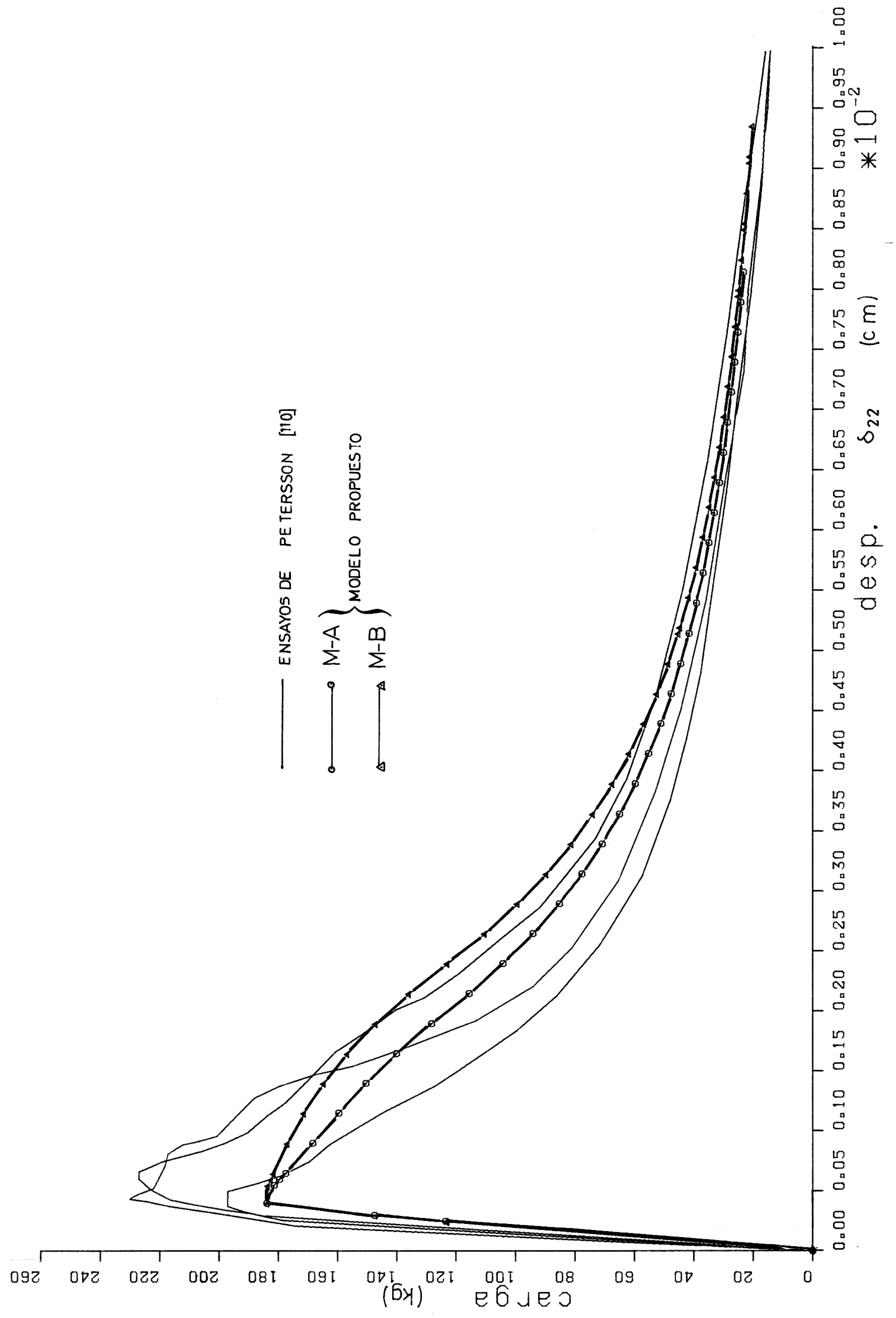


fig.(V.12,b): Ensayo de una probeta entallada, a tracción simple – Comparación de las curvas carga-desplazamiento obtenidas en forma experimental por Petersson [110], con las obtenidas por el modelo de daño plástico con dos mallas de 12 (M-A) y 30 (M-B) elementos finitos.

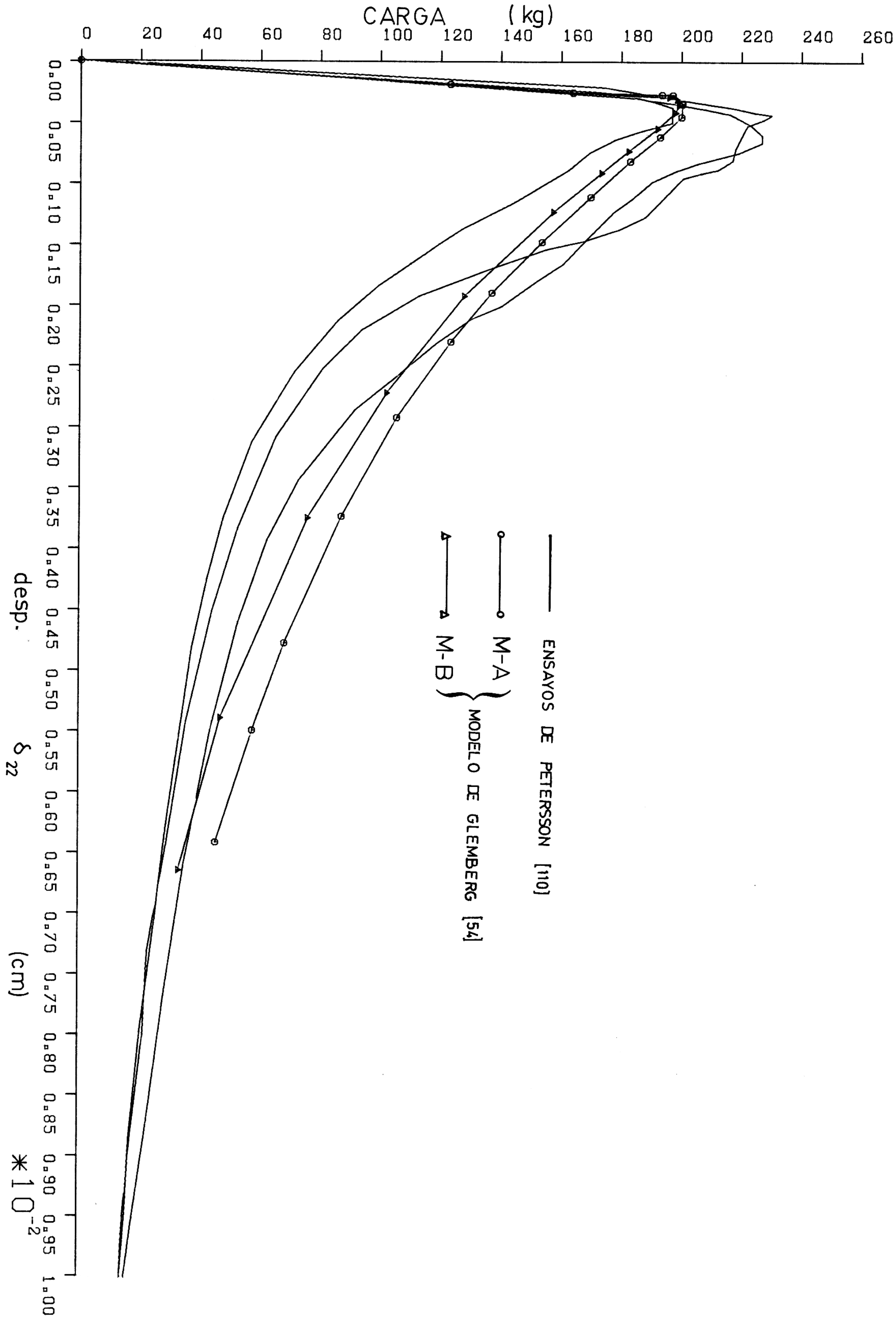


fig.(V.12,c): Ensayo de una probeta entallada, a tracción simple – Comparación de las curvas carga-desplazamiento obtenidas en forma experimental por Petersson [110], con las obtenidas por Glemberg [54] con dos mallas de 12 y 30 elementos finitos.

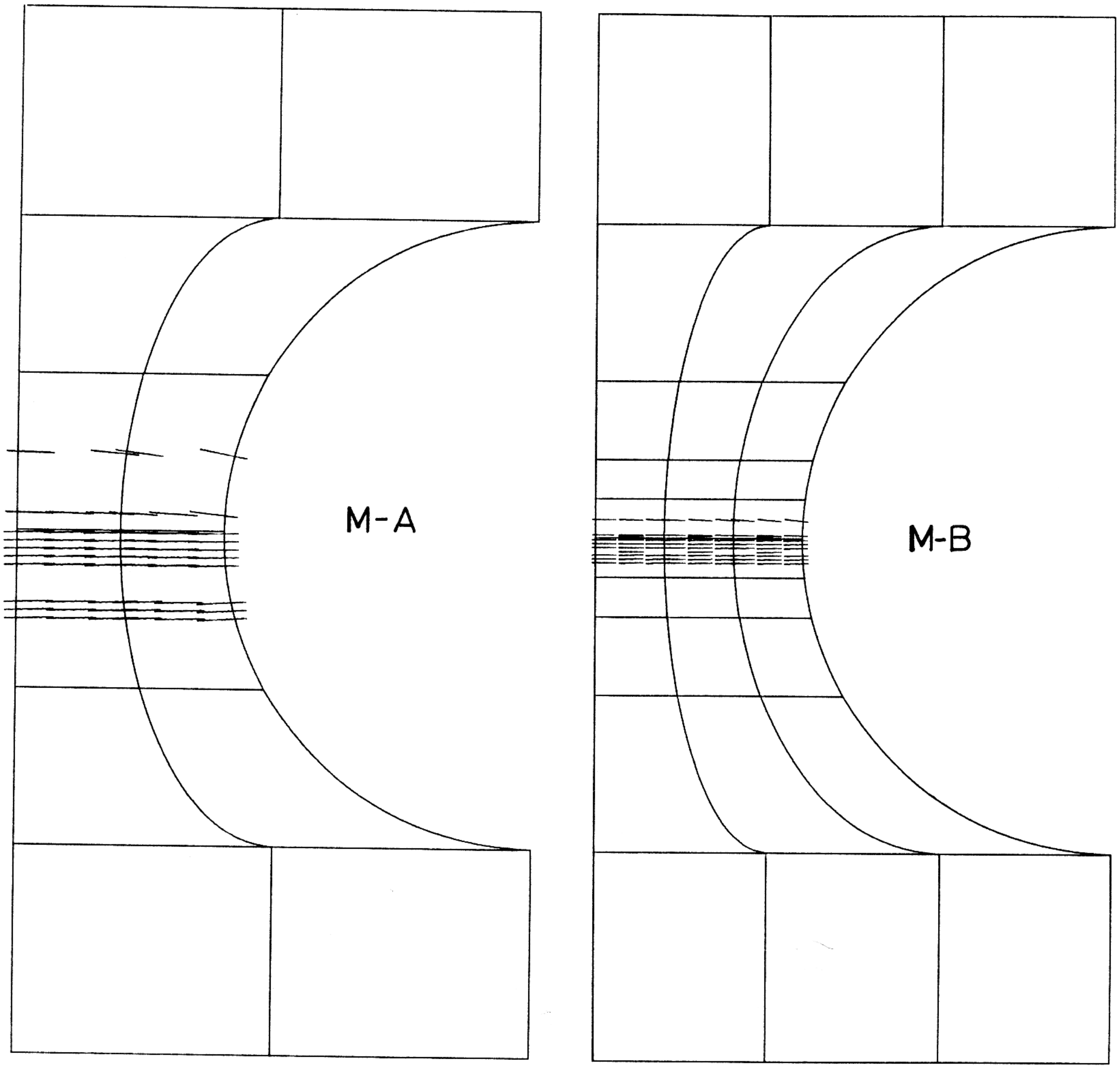


fig.(V.13,a): Ensayo de una probeta entallada, a tracción simple – Estado de fisuración obtenido por el modelo para las probetas discretizadas con las mallas de 12 (M-A) y 30 (M-B) elementos finitos.

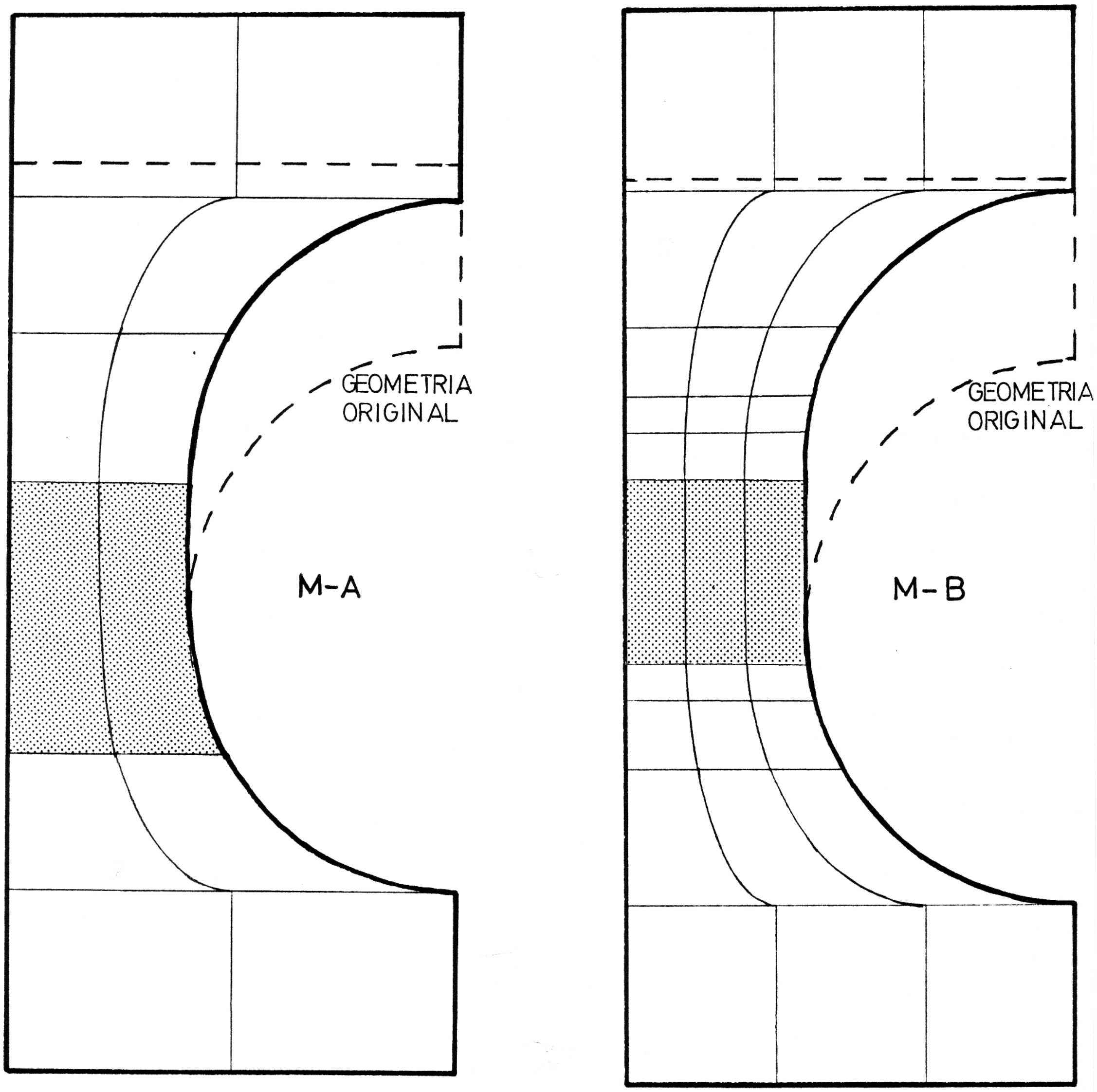


fig.(V.13,b): Ensayo de una probeta entallada, a tracción simple – Deformadas obtenidas por el modelo para las probetas discretizadas con las mallas de 12 (M-A) y 30 (M-B) elementos finitos.

V.5.- ENSAYO A FLEXION DE UNA VIGA EN VOLADIZO.

V.5.a- Consideraciones generales sobre el ensayo.

Este ejemplo se presenta para probar la *objetividad* en la respuesta que ofrece el modelo propuesto respecto del uso de tres mallas de elementos finitos con distinto grado de discretización **fig.(V.14)**, y también para verificar la capacidad del modelo para simular estados de flexión dominante, combinados con corte (flexión transversal).

El ensayo consiste en aplicar un desplazamiento vertical, sobre el eje baricéntrico, en el extremo de una viga en voladizo constituida de hormigón en masa **fig.(V.14)**. El ensayo se desarrolla desde el instante inicial (material inalterado) hasta alcanzar un desplazamiento que provoca la pérdida total de la resistencia de la pieza. **fig.(V.15,a)**.

El dominio de la viga ha sido discretizado con tres mallas de 6, 24 y 96 elementos finitos planos de ocho nodos **fig.(V.14)**, utilizándose una integración numérica de Gauss-Legendre [144] de $4{\times}4$, $3{\times}3$ y $2{\times}2$ puntos, respectivamente.

No se ha observado para el caso de sobre-integración el fenómeno de *bloqueo*, ni en el caso de sub-integración el desarrollo de *modos de energía nula*. La razón de utilizar una cuadratura con tantos puntos en la viga de seis elementos finitos, se debe a la necesidad de disponer de puntos más cerca del empotramiento y de aumentar la densidad de estos en la zona dañada, permitiendo así seguir el camino evolutivo de la fractura, por debajo del eje baricéntrico **fig.(V.17)**.

Para la resolución del sistema de ecuaciones no-lineales se ha utilizado el método de rigidez tangente K_T ***apart. Ap-II.3.***

Las características geométricas y mecánicas utilizadas para la resolución de este problema, se presentan en la **fig.(V.14)**.

V.5.b- Análisis del ensayo.

La **fig.(V.15,a)** muestra las curvas de evolución de la carga P vs. el desplazamiento de su punto de aplicación. Es importante notar la total coincidencia de los resultados para las tres mallas de elementos finitos.

La **fig.(V.15,b)** presenta las curvas de disipación de energía W^p vs. el desplazamiento del extremo, encontrándose para los tres casos una marcada convergencia hacia el valor correcto de la energía disipada $W^p = 495\ kgcm$, ya que el valor de entrada ha sido $W^p{}_{entr.} = G^f\ A^f \simeq 473.0\ kgcm$. La energía sobre-disipada posiblemente se debe al proceso de aplastamiento que se desarrolla en algunos puntos de la viga.

La **fig.(V.15,c)** muestra la evolución de las curvas de tensión vs. deformación en el punto más dañado de las tres mallas de elementos finitos. En esta se puede apreciar que la energía específica $g_T^p = \dfrac{G^f}{L^{pe}}$ crece con la inversa de la longitud característica plástica del elemeneto finito $L^{pe} = \sqrt{A^e}$ ***apart. An-D.1.c.1*** , con el objeto de garantizar la misma energía disipada en las tres mallas.

Las **figs.(V.16)** muestran la deformada de la viga para las tres mallas de elementos finitos, en los respectivos estados últimos, exhibiendo una marcada *cuña* de localización de deformaciones que delimita el tamaño de la zona dañada. Obsérvese que esta banda de localización se sitúa siempre dentro de la primer columna de elementos finitos, adyacente al empotramiento (formación de una especie de rótula plástica), permitiendo que el resto de la viga se comporte como un sólido rígido.

Las **figs.(V.17)** presentan el estado de fisuración alcanzado por las tres mallas de elementos finitos. Al igual que en los problemas antes presentados, el análisis de dicha fisuración se ha realizado de acuerdo a la metodología desarrollada en el ***apart. An-D.2.***; así el post-procesador del modelo interpreta que la fisuración se inicia cuando la deformación plástica en el punto tiene una componente positiva (estiramiento inelástico), la orientación de cada fisura se representa mediante un trazo ortogonal a la dirección de la correspondiente deformación plástica principal positiva y la densidad de líneas verticales paralelas da idea cualitativa de la magnitud de la *apertura* de estas fisuras. En estas figuras se representan las fisuras que superan el $3\ {}^o/_o$ de la máxima, mostrando una definida forma de cuña que decrece hacia el cordón inferior de la viga. Es posible interpretar que estas fisuras distribuidas dentro del elemento finito, representan una simple fractura. En cambio en una región más amplia, que abarca parte de la cara superior de la viga, se presentan fisuras cuya apertura es menor que el $3\ {}^o/_o$ de la máxima, pudiendose interpretar a éstas como micro-fisuras que no han prosperado en su proceso evolutivo.