

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
ESCOLA TÈCNICA SUPERIOR D'ENGINYERS
DE CAMINS, CANALS I PORTS

**UN MODELO DE “DAÑO CONTINUO”
PARA MATERIALES FRICCIONALES**

TESIS DOCTORAL

PRESENTADA POR:

SERGIO HORACIO OLLER MARTÍNEZ

DIRIGIDA POR:

EUGENIO OÑATE IBAÑEZ DE NAVARRA

Y

JAVIER OLIVER I OLIVELLA

BARCELONA – MAYO DE 1988.

fig.(V.14): Ensayo de una viga en voladizo, a flexión – Características geométricas mecánicas y malla de elementos finitos utilizada en el ensayo numérico.

fig.(V.15): Ensayo de una viga en voladizo, a flexión – a) Carga P vs. desplazamiento vertical en el extremo libre. b) Energía total disipada, vs. desplazamiento vertical en el extremo libre. c) Tensión principal máxima de tracción vs. deformación principal máxima de estiramiento, en el punto de integración más dañado (cara superior de la viga, próximo al empotramiento).

fig.(V.16): Ensayo de una viga en voladizo, a flexión – a) Deformación de la viga de 6 elementos finitos en el estado último – localización del daño –. b) Deformación de la viga de 24 elementos finitos en el estado último – localización del daño –. c) Deformación de la viga de 96 elementos finitos en el estado último – localización del daño –.

fig.(V.17): Ensayo de una viga en voladizo, a flexión – a) Fisuración de la viga de 6 elementos finitos en el estado último – fisuras mayores al 3% de la máxima–. b) Fisuración de la viga de 24 elementos finitos en el estado último – fisuras mayores al 3% de la máxima–. c) Fisuración de la viga de 96 elementos finitos en el estado último – fisuras mayores al 3% de la máxima–.

V.6.- ENSAYO A FLEXION DE UNA VIGA ENTALLADA SIMPLEMENTE APOYADA

V.6.a- Consideraciones generales sobre el ensayo.

Este ejemplo prueba la capacidad del modelo constitutivo, para simular estados de concentración de tensiones en el fondo de una entalla, provocados por un mecanismo de flexión pura. Este problema ha sido analizado experimentalmente por Petersson ^[123] para estudiar la *fractura en modo-I*, y ha sido reproducido en forma numérica por Rots et al. ^[123], Rots ^[124], De Borst ^[18] y Oliver y Fernandez ^[93].

El ensayo consiste en imponer un desplazamiento creciente en el punto medio de la cara superior de una viga de hormigón simple, de sección transversal rectangular, simplemente apoyada, con una entalla en el cordón inferior en el centro de la luz **fig.(V.18)**. El ensayo se desarrolla hasta alcanzar un desplazamiento que provoque un daño considerable en la viga **fig.(V.19,a)**.

El dominio de la viga ha sido discretizado con una malla de 84 elementos finitos planos, de ocho nodos **fig.(V.18)**, utilizándose una integración numérica de Gauss-Legendre ^[144] de 3×3 para la zona vecina a la entalla, y de 2×2 para la zona restante. También se ha probado el uso de una integración reducida de 2×2 en la zona de la entalla, encontrándose problemas de modos de energía nulos para estados plásticos posteriores al pico de tensión. Esta situación había sido advertida por Rots ^[124], utilizando en su trabajo una integración numérica muy particular.

La resolución del sistema de ecuaciones, durante el proceso no-lineal, se ha realizado con el método de rigidez inicial K_0 *apart. Ap-II.3.*

Las características geométricas y mecánicas utilizadas para la resolución de este problema, se presentan en la **fig.(V.18)**.

V.6.b- Análisis del ensayo.

En la referencia ^[123] se presenta la respuesta experimental carga-desplazamiento obtenida por Petersson. En ella se advierte una banda experimental bastante amplia que da muestra de la dispersión obtenida durante estos ensayos. Dicha

situación es posible que se deba a las dificultades que presenta la realización de ensayos precisos durante el período de ablandamiento, donde la rigidez de la máquina de ensayo puede influir sensiblemente en los resultados, dando origen a tales dispersiones. La **fig.(V.19,a)** muestra la evolución de la carga aplicada P vs. el desplazamiento de su punto de aplicación; en ella se advierte una buena coincidencia con los resultados experimentales obtenidos por Petersson ^[123], ajustándose al límite inferior de la banda experimental antes mencionada. En la **fig.(V.19,b)** se muestra la relación que hay entre los resultados experimentales y los obtenidos por Rots ^[124] en forma numérica. No obstante esta es la mejor simulación numérica que se encuentra en las referencias, ya que permite observar la sensibilidad de los resultados a la forma de la *función de ablandamiento* impuesta.

La **fig.(V.20)**, presenta la curva de disipación total de energía que se desarrolla durante todo el proceso de carga. La pendiente de esta curva tiende a hacerse horizontal a medida que crece el daño en el sólido.

En la **fig.(V.21)**, se puede observar la evolución del factor de retención de tensiones cortantes β_G durante el proceso elasto-plástico vs. la energía total disipada en el punto de integración numérica más cercano al fondo de la entalla.

La **fig.(V.22)** presenta la evolución de la tensión principal mayor vs. la deformación principal mayor, en el punto de integración numérica más cercano al fondo de la entalla.

En las **figs.(V.23) y (V.24)** se observan respectivamente la deformada de la viga con su banda de localización de daño y el esquema de fisuración que obtiene el modelo para la zona de la entalla, encontrándose total coincidencia con una típica fractura de *modo-I*. Al igual que en los problemas antes presentados, el análisis de dicha fisuración se ha realizado de acuerdo a la metodología desarrollada en el **apart. An-D.2.**; así el post-procesador del modelo interpreta que la fisuración se inicia cuando la deformación plástica en el punto tiene una componente positiva (estiramiento inelástico), la orientación de cada fisura se representa mediante un trazo ortogonal a la dirección de la correspondiente deformación plástica principal positiva y la densidad de líneas verticales paralelas da idea cualitativa de la magnitud de la *apertura* de estas fisuras.

En las **figs.(V.25,a)** , **(V.25,b)** y **(V.25,c)**, se dibujan los estados tensionales que alcanza la viga al final del período elástico, en el pico de tensiones, y en el límite último, respectivamente. En ellos, se representan las tensiones principales mediante un trazo, que es proporcional a su magnitud, y se puede observar la forma en que avanza la *zona de material inerte* hacia la cara superior de la viga, estrangulando paulatinamente la zona de compresión, a medida que avanza el proceso de carga.

fig.(V.18): Ensayo a flexión de una viga entallada simplemente apoyada – Características geométricas mecánicas y malla de elementos finitos utilizada en el ensayo numérico.

fig.(V.19): Ensayo a flexión de una viga entallada simplemente apoyada – a) Carga aplicada P vs. desplazamiento vertical en su punto de aplicación: comparación entre el modelo propuesto y los resultados experimentales de Petersson ^[123] . b) Carga aplicada P vs. desplazamiento vertical en su punto de aplicación: comparación entre los resultados de Rots ^[124] y los estudios experimentales de Petersson ^[123] .

fig.(V.20): Ensayo a flexión de una viga entallada simplemente apoyada – Curva de energía total disipada vs. desplazamiento vertical en el punto de aplicación de la carga.

fig.(V.21): Ensayo a flexión de una viga entallada simplemente apoyada – Relación entre β_G y la energía total disipada en el punto de integración numérica más cercana al fondo de la entalla.

fig.(V.22): Ensayo a flexión de una viga entallada simplemente apoyada – Relación tensión principal mayor vs. deformación principal mayor $\sigma_1 - \epsilon_1$ en el punto de integración numérica más cercana al fondo de la entalla.

fig.(V.23): Ensayo a flexión de una viga entallada simplemente apoyada – Deformación de la viga y localización de deformaciones en el estado último – amplificación $\times 400.0$.

fig.(V.24): Ensayo a flexión de una viga entallada simplemente apoyada – Esquema de fisuración de la viga: a) En el pico de tensiones, y b) en el estado último.

fig.(V.25): Ensayo a flexión de una viga entallada simplemente apoyada – Estado tensional en la viga:
a) al límite elástico, b) al pico de tensiones, c) al límite último de carga aplicada.

V.7.- ENSAYO A TRACCION DE UNA VIGA CANTILEVER PRETENSADA.

V.7.a- Consideraciones generales sobre el ensayo.

El problema que se trata en este apartado, se refiere a una viga cantilever (sección doble T) de hormigón con una entalla en uno de sus extremos situada sobre su propio eje baricéntrico **fig.(V.26)**. La viga ha sido sometida a un ensayo numérico con el objeto de evaluar su respuesta bajo dos tipos de solicitaciones: a) Pretensado en la dirección paralela al eje baricéntrico, seguido de una b) aplicación de carga perpendicular a dicho eje, que trata de abrir la entalla. La viga ha sido ensayada en forma experimental, bajo estas condiciones de carga, por *Sok, Baron and François* ^[123] y estudiada nuevamente tanto en forma experimental como numérica, con algunas modificaciones en la sección transversal original, por *Rots et al.* ^[123]. Los datos y parámetros del material que se utilizan en este ensayo numérico, han sido extraídos de este último trabajo.

La malla de elementos finitos que se ha utilizado **fig.(V.26)**, está compuesta por elementos planos de cuatro nodos, sobre una faja donde la viga es más estrecha, y por elementos de ocho nodos en la zona restante. Para todos los elementos se ha utilizado una integración numérica de Gauss-Legendre ^[144] de 2×2 puntos.

Se ha resuelto el problema con plasticidad asociada haciendo uso de la función de fluencia de Mohr-Coulomb modificada (*anexo-C*).

La solución del sistema de ecuaciones no-lineales, se ha llevado a cabo con el método de rigidez inicial K_0 *apart. Ap-II.3.a.*, juntamente con la técnica de control de desplazamientos a través de un camino plano, propuesta en el *apart. Ap-II.3.d.*

Inicialmente se realizó un ensayo sin la aplicación de las cargas de pretensado, pero durante la evolución del proceso inelástico, aparecieron grandes fisuras normales al eje baricéntrico de la pieza, debido a problemas de flexión en los cordones. Situación similar se le presentó a *Rots et al.* en el ensayo numérico de la referencia ^[123], y para evitar este *efecto secundario*, se ha sometido a una carga previa de pretensado, paralela al eje baricéntrico, materializada a través de desplazamientos impuestos en un único incremento, y seguidamente se aplicó la segunda carga, normal al eje baricéntrico, pero en forma incremental **fig.(V.26)**.

V.7.b- Análisis del ensayo.

La curva carga-desplazamiento obtenida con el modelo propuesto, se dibuja en la **fig.(V.27,a)**, donde se compara también con el resultado experimental de Sok et al. ^[123] y con los resultados numéricos de Rots et al ^[123] . En esta figura, se puede observar que se ha logrado una buena concordancia con los resultados experimentales y con las respuestas numéricas de Rots, para el caso en que utiliza una función de ablandamiento bilineal. También se puede apreciar que la carga aplicada no alcanza el valor nulo a pesar de encontrarse en un estado muy próximo al último. Es probable que esto se deba a la componente vertical de la carga de pretensado, que ofrece una resistencia a la apertura de la viga, y al problema de concentración de tensiones ocasionado por la forma en que se ha vinculado la viga en su extremo.

En cada uno de los ensayos numéricos de la referencia ^[123] se ha pre-establecido la energía de fractura por unidad de área fisurada G^f , con el objeto de lograr coincidencias en los valores de las cargas máximas de los ensayos numéricos, con la obtenida en el resultado experimental. En cambio, en el presente ensayo numérico, se ha adoptado una de las energías de fractura: $G^f = 0.255 \text{ kg/cm}$ y directamente, sin ajustes previos, se ha realizado el ensayo numérico.

En la figura **fig.(V.27,b)** se presenta la curva de energía total disipada vs. el desplazamiento entre caras de la entalla. En ella se observa que la energía tiende al valor introducido como dato: $W^p = 0.255 \times (178.0 \times 10.0) = 453.9 \text{ kgcm}$.

En la **fig.(V.27,c)** se puede ver la evolución de la tensión principal mayor, vs. la deformación principal mayor $\sigma_1 - \epsilon_1$, en el punto más severamente dañado (el más próximo al fondo de la entalla).

La localización de deformaciones se encuentra en la zona esperada, **fig.(V.28)**, y su profundidad abarca de uno a otro extremo de la viga. En la misma figura, se puede ver la evolución de las tensiones en diez puntos alineados, situados en la banda de localización de deformaciones de la viga, para los distintos niveles de carga aplicada. En ésta secuencia de gráficos, se puede observar, cómo un punto que está sometido en un instante del proceso de carga cuasi-estático a un estado de tracción, en un instante posterior puede pasar a un estado de compresión o viceversa. Esto muestra la capacidad del modelo de reproducir procesos de cargas *radiales y no-radiales*.

El estado de fisuración dominante **fig.(V.28)**, es paralelo al eje de la viga, pero aparecen también, a pesar de la carga de pretensado, fisuras secundarias y ortogonales a la principales.

Por último, en la **fig.(V.29)** se puede ver el estado tensional al final del proceso, donde se representan las tensiones principales, donde la magnitud del trazo y su orientación dan una idea del estado de sollicitaciones que sufre la viga. En esta figura se aprecia que la zona central está totalmente agotada, no pudiendo resistir más tensiones (zona de material inerte); en cambio la zona restante, mantiene la tensión de pretensado que se le impuso al iniciar el ensayo.

fig.(V.26): Ensayo a tracción de una viga cantilever pretensada – Características geométricas mecánicas y malla de elementos finitos utilizada en el ensayo numérico.

fig.(V.27): Ensayo a tracción de una viga cantilever pretensada – a) Respuesta Carga vs. desplazamiento relativo entre las dos caras de la entalla. b) Disipación de energía vs. desplazamiento relativo entre caras de la entalla. c) Tensión principal mayor Vs. deformación principal mayor $\sigma_1 - \epsilon_1$ en el punto de integración más próximo al fondo de la entalla.

fig.(V.28): Ensayo a tracción de una viga cantilever pretensada – Banda de localización del daño y evolución de las tensiones en los puntos más dañados de esta banda, para cada nivel de carga.

fig.(V.29): Ensayo a tracción de una viga cantilever pretensada – Estado tensional al final del proceso elasto-plástico.

V.8.- ENSAYO DE FLEXION Y CORTE EN UNA VIGA ENTALLADA – MODO MIXTO DE FRACTURA: Modos -I- y -II-.

V.8.a- Introducción.

Hasta ahora se ha cotejado el modelo constitutivo propuesto, con ensayos que conducen a una fractura tipificada como de *modo -I-* (fisura que experimenta un desplazamiento normal entre sus caras). En este apartado se verifica la capacidad del modelo para simular el denominado *modo mixto de fractura*, es decir, cuando se desarrolla un mecanismo de fractura que involucra los *modos -I- y -II-* a la vez, produciéndose un desplazamiento normal acompañado de un deslizamiento entre las caras de la fisura ^{[48][123]}. Es muy importante que un modelo numérico sea capaz de representar este comportamiento combinado, ya que a excepción de algunos casos particulares de simetría de carga y forma, las estructuras fallan bajo un modo mixto de fractura ^[54].

De una escasa cantidad de experimentos disponibles sobre el modo-mixto de fractura, se ha elegido como ensayo de referencia el de *Arrea and Ingraffea* ^[2] **fig.(V.30)**, debido a que también ha sido considerado por otros investigadores ^{[18][21][48][54][122][123]} para evaluar sus respectivos modelos numéricos.

Sobre este ensayo se encuentran en las referencias simulaciones numéricas : -1- insatisfactorias ^[123], -2- medianamente satisfactorias ^[54], y -3- bastante bien logradas ^[122]. En el *primer caso*, Rots et al. ^[123] no han podido obtener coincidencia con las curvas de respuesta experimental, ni con el camino que ha seguido la evolución de la fractura; en el *segundo caso*, Glemberg ^[54] ha mejorado las curvas de respuesta, sin llegar a obtener una buena aproximación con los resultados experimentales, y no ha podido seguir un buen camino de evolución de fractura; y en el *tercer caso*, Rots and De Borst ^[122] han logrado una buena aproximación con la respuesta experimental, pero sin obtener un camino correcto en la evolución de la fractura ^{[18][21][122]}. Esta mejora en la aproximación de la respuesta experimental, se ha obtenido gracias a la consideración adicional del *nuevo concepto* de energía de fractura en modo-II-, de bastante discutida existencia ^[122], que ha permitido formular una *función de ablandamiento de las tensiones cortantes*, en forma independiente de las tensiones normales. Este concepto se ha introducido en el *modelo de fisura distribuída* ^{[18][20][22][122][123]} (**apart. III.5.a**), formulado para simular el modo-I- de fractura,

evitando así un comportamiento post-pico sobre-rigidizado como consecuencia de un factor de retención de las tensiones cortantes β_G , que impone una tensión de corte constante durante todo el proceso de fisuración $\tau = \beta_G \tau^e$.

El modelo que se presenta en esta tesis, ha sido formulado para tratar estados tensionales complejos no-radiales, de una manera única (*cap. IV*), sin que sea necesario admitir la existencia de una energía de fractura modo-II-. Así, se verá en este ejemplo, que se obtiene una buena aproximación a la respuesta experimental y una buena predicción del camino de evolución de las fisuras *figs.(V.33)*.

V.8.b- Consideraciones generales sobre el ensayo.

El ensayo consiste en una viga de hormigón en masa, como la que se muestra en la *fig.(V.30)*, cargada en forma asimétrica con el objeto de provocar sobre la entalla un estado tenso-deformacional que conduzca a una fractura en modo-mixto.

La aplicación de la carga se ha realizado en forma indirecta mediante una barra de acero de gran rigidez, colocada sobre la viga de hormigón. Esta forma de aplicar la carga, ha sido realizada con el fin de reproducir de la mejor manera posible el ensayo de Arrea-Ingraffea.

Se ha discretizado el dominio total con 107 elementos finitos planos de ocho nodos *fig.(V.30)*, que han sido integrados numericamente mediante la cuadratura de Gauss-Legendre ^[144] con 3×3 puntos para el hormigón y con 2×2 puntos para la barra de aplicación de cargas. El alto orden de integración para los elementos de hormigón, surge para evitar los modos de energía nulos que se puedan desarrollar ^[21].

El proceso de cargas se ha realizado mediante desplazamientos impuestos en el punto *C* *fig.(V.30)*, y se ha utilizado en la resolución el método de control de desplazamientos propuesto por Crisfield ^[37] (control de desplazamientos según un camino esférico *apart. Ap-II.3.c*), aplicado al grado de libertad más significativo, que en este caso es el deslizamiento entre las caras de la fisura *fig.(V.30)*, en vez de controlar la norma global de todos los desplazamientos. Esta forma de *control indirecto de desplazamientos*, propuesta por R. De Borst ^{[18][21][122]}, permite mantener dentro de los valores deseados el desplazamiento dominante, logrando así una respuesta post-pico bastante estable, a pesar de la fuerte localización

de deformaciones que se produce en ese instante del proceso cuasi-estático. De esta forma, se procura que el incremento de cargas respete la siguiente relación de arco $\Delta l_{i,m}$ (*apart. Ap-II.3.c*):

$$(\Delta u_{qp})_{i,m} (\Delta u_{qp})_{i,m} = \Delta l_{i,m}^2$$

siendo $(\Delta u_{qp})_{i,m}$ el incremento de desplazamiento entre el grado de libertad q y el p , durante la iteración i del incremento de carga m .

La resolución del sistema de ecuaciones no-lineal, se ha llevado a cabo con buena convergencia, con el método de rigidez inicial K_0 .

V.8.c- Análisis del ensayo.

La curva carga-desplazamiento relativo entre las caras de la fisura ($(\Delta u_{155,151})_{i,m} = [u_{155} - u_{151}]_{i,m}$) **fig.(V.31,a)**, muestra una muy buena coincidencia con los resultados experimentales de Arrea-Ingraffea ^[2]. Es importante resaltar, como el modelo *administra internamente* la energía a disipar, utilizando una adecuada combinación de estados tenso-deformacionales uniaxiales (*cap. IV y apart. An-D.1.c.2*).

En las **figs.(V.31,b), (V.31,c) y (V.31,d)**, se muestra la evolución de la carga aplicada respecto de los desplazamientos de los puntos A , B y C , respectivamente. Estas curvas explican la necesidad de controlar el deslizamiento relativo entre las caras de la fisura, y no el desplazamiento del punto de aplicación de carga ^{[18][21][122]}.

En la **fig.(V.31,e)** se puede ver la curva de disipación total de energía, respecto del deslizamiento relativo entre caras de fisura.

Al iniciar la aplicación de las cargas, se presenta un caso de flexión dominante, con fuertes tracciones en el cordón superior de la viga **fig.(V.32,a) y 9V.32,b)** (debajo mismo de la carga aplicada), que conduce a abrir las primeras fisuras **fig.(V.33,a) y (V.33,b)** (modo-I). Al mismo tiempo, como consecuencia de este fenómeno, se produce una fuerte compresión entre las caras de la entalla. Seguidamente, a medida que se aumenta la carga aplicada, comienza a producirse un deslizamiento entre las caras de la entalla, de donde resultan las primeras fisuras por corte

(extremo superior derecho de la entalladura) (modo-II-), que forman un ángulo de 60° con respecto al eje de referencia global x_1 . Estas fisuras se propagan siguiendo la vertical que pasa por el plano de la entalla **fig.(V.33,a)**. A partir de un determinado punto en la respuesta (pico de carga máxima), comienzan a despegarse las caras de la entalladura como si se tratara de la acción de un efecto de flexión **fig.(V.34)**, y se inicia un cambio de orientación en el camino evolutivo de las fisuras. A partir de este momento, estas progresan como resultante de un modo-mixto de fractura **fig.(V.33,b)**, **(V.33,c)**, **(V.33,d)** y **(V.33,e)**. Debido a este comportamiento, se desarrolla una banda de localización de deformaciones **fig.(V.34)**, que el modelo interpreta como banda de daño.

Por último, conviene observar el estado último de tensiones que adquiere la viga, donde queda perfectamente definida una zona de material inerte, o material que ha perdido la capacidad de responder a esfuerzo alguno **fig.(V.32,c)**, **(V.32,d)** y **(V.32,e)**.

fig.(V.30): Ensayo de flexión y corte en una viga entallada – modo mixto de fractura – Características geométricas mecánicas y malla de elementos finitos utilizada en el ensayo numérico.

fig.(V.31,a): Ensayo de flexión y corte en una viga entallada – modo mixto de fractura – Curva de carga P' vs. deslizamiento relativo entre caras de la entalla, y su comparación con los resultados experimentales de Arrea-Ingraffea ^[2]

fig.(V.31): b) Ensayo de flexión y corte en una viga entallada – modo mixto de fractura – Carga P' vs. desplazamiento del punto A . c) Ensayo de flexión y corte en una viga entallada – modo mixto de fractura – Carga P' vs. desplazamiento del punto B .

fig.(V.31): d) Ensayo de flexión y corte en una viga entallada – modo mixto de fractura – Carga P' vs. desplazamiento del punto C (punto de aplicación de la carga P'). e) Ensayo de flexión y corte en una viga entallada – modo mixto de fractura – Energía total disipada Vs. deslizamiento relativo entre caras de la entalla.

fig.(V.32): Ensayo de flexión y corte en una viga entallada – modo mixto de fractura – a) Estado tensional en toda la viga, al finalizar el período elástico. b) Detalle del estado tensional en la zona crítica, al finalizar el período elástico.

fig.(V.32): Ensayo de flexión y corte en una viga entallada – modo mixto de fractura – c) Estado tensional en toda la viga, al finalizar el período plástico. d) Detalle del estado tensional en la zona crítica, al finalizar el período plástico.

fig.(V.32,e): Ensayo de flexión y corte en una viga entallada – modo mixto de fractura – Detalle del estado tensional al finalizar el período plástico, sin la superposición de la malla de elementos finitos.

fig.(V.33): Ensayo de flexión y corte en una viga entallada – modo mixto de fractura – a) Estado de fisuración correspondiente al pico de tensiones (fisuras mayores al 2% de la máxima). b) Estado de fisuración correspondiente al límite último (fisuras mayores al 3% de la máxima). c) Estado de fisuración correspondiente al límite último (fisuras mayores al 5% de la máxima).

fig.(V.33): Ensayo de flexión y corte en una viga entallada – modo mixto de fractura – d) Detalle del estado de fisuración correspondiente al límite último (fisuras mayores al $2.8 \text{ }^{\circ}/_{o}$ de la máxima). e) Detalle del estado de fisuración sin la superposición de la malla de elementos finitos, correspondiente al límite último (fisuras mayores al $2.8 \text{ }^{\circ}/_{o}$ de la máxima).

fig.(V.34): Ensayo de flexión y corte en una viga entallada – modo mixto de fractura – a) Deformación de la viga y localización de deformaciones en el estado último (amplificación $\times 300.0$). b) Detalle de la localización de deformaciones en el estado último (amplificación $\times 300.0$).

V.9.- ENSAYO A FLEXION DE UNA VIGA ARMADA.

V.9.a- Consideraciones generales sobre el ensayo.

El problema que se considera en este apartado, se refiere a una viga de hormigón armado simplemente apoyada, como la que se muestra en la **fig.(V.35,a)**, sometida a la acción de dos cargas puntuales iguales y simétricas. Esta fue ensayada experimentalmente por Walraven ^[22] y verificada numéricamente por Borst and Nauta ^[22].

Los parámetros y datos que definen las características físicas, mecánicas y geométricas del ensayo, son las que se muestran en la **fig.(V.35)**.

Se ha discretizado el dominio con una malla de elementos finitos planos de ocho nodos, integrados numéricamente con una cuadratura de Gauss-Legendre de 3×3 puntos. Los elementos finitos de acero y hormigón han sido ensamblados considerando que ambos materiales son infinitamente solidarios en el comportamiento (adherencia perfecta). En caso que se desee considerar este fenómeno, será necesario incluir un *elemento de junta* ^[126], que permita simular la verdadera adherencia entre ambos materiales.

El problema ha sido resuelto con plasticidad asociada, haciendo uso de la función de fluencia propuesta en el *cap. IV*.

La solución del sistema de ecuaciones no-lineales, se ha llevado a cabo con el método de rigidez inicial K_0 *apart. Ap-II.3.a.*, sin encontrar ningún problema hasta que se alcanzan valores de desplazamiento aplicado de 0.5 cm , a partir del cual comienzan algunos problemas de convergencia en la solución.

V.9.b- Análisis del ensayo.

En el ensayo experimental se ha observado, que la falla de la viga se produce por fisuras diagonales, provocadas por corte, como las que exhibe la **fig.(V.37,a)**; no obstante aparecen también otras fisuras verticales que se desarrollan predominantemente en la zona de momentos flectores constantes. En el análisis numérico, también se ha observado la aparición de ambos grupos de fisuras **fig.(V.37,b)** y **(V.37,c)**. Así, se observa que primeramente aparecen las fisuras verticales, (modo-I-) de fractura **fig.(V.37,b)**, y luego de que el desplazamiento del

punto de aplicación de la carga supera los 0.3cm aproximadamente, comienzan a desarrollarse las nuevas fisuras que nacen desde el apoyo y se orientan hacia el punto de aplicación de la carga, estando provocadas por la acción del corte **fig.(V.37,c)**. Algunas de las fisuras correspondientes a este último grupo, se manifiestan localmente como rotación de las ya existentes. Debido a esto, el modelo presentado por los investigadores de la referencia ^[22], muestran la necesidad de definir el ángulo umbral a partir del cual se permite abrir una nueva fisura. Dado que el presente modelo considera isotropía en el punto de análisis, no es necesario definir dirección de daño en el punto.

La **fig.(V.36,a)** muestra la respuesta carga vs. desplazamiento, para el modelo de Borst-Nauta ^[22], para el ensayo experimental y para este modelo. En ella se puede ver que la respuesta de este modelo se desarrolla paralelamente a la experimental, pero por debajo de los valores correctos. Es probable que esta diferencia se deba a que en la discretización, se ha situado el eje de los elementos finitos que representan el acero a una distancia de 5.62 cm de la cara inferior de la viga, en cambio, en el ensayo real estaba situado a 3.0 cm .

En la **fig.(V.36,b)**, se observa la curva de tensión vs. deformación en el punto de integración del hormigón que ha sufrido mayor deformación plástica (punto A, **fig. V.35,a**) solicitado, y en ella se puede ver como este punto describe una trayectoria con ablandamiento, en tanto la respuesta global de la viga muestra un endurecimiento.

En la **fig.(V.36,c)**, se observa la curva tensión-deformación para el punto de integración más solicitado del acero (punto B, **fig. V.35,a**).

fig.(V.35): Ensayo de flexión de una viga armada.– Características geométricas mecánicas y malla de elementos finitos utilizada en el ensayo numérico.

fig.(V.36): Ensayo de flexión de una viga armada.- a) Respuesta carga vs. desplazamiento del pto. de aplicación de la carga – comparación con los resultados experimentales y numéricos reportados en la referencia ^[22] . b) Respuesta tensión-deformación principal mayor, para el punto de hormigón más solicitado. c) Respuesta tensión-deformación principal mayor, para el punto del acero más solicitado.

fig.(V.37): Ensayo de flexión de una viga armada.- a) Estado de fisuración último obtenido en el estudio experimental ^[22] . b) Estado de fisuración del ensayo numérico, en el límite correspondiente a $\delta = 0.25 \text{ cm}$ (fisuras mayores que el 1.5% de la máxima). b) Estado de fisuración del ensayo numérico, en el límite último, $\delta = 0.75 \text{ cm}$ (fisuras mayores que el 1.5% de la máxima).

CONCLUSIONES

y

LINEAS DE INVESTIGACION FUTURA

• CONCLUSIONES SOBRE LA “FORMULACION DEL MODELO CONSTITUTIVO” PROPUESTO.

En esta tesis, se *formula un modelo constitutivo de daño plástico* que permite simular, dentro de un rango muy amplio, el comportamiento de los materiales cohesivo-friccionales, con especial orientación hacia el hormigón, dentro de procesos de carga cuasi-estáticos. El modelo ha sido analizado en profundidad y se ha aplicado a diversos ejemplos de comprobación. De su formulación, se podrian destacar las siguientes conclusiones:

- 1 – El modelo constitutivo surge de una *generalización* de los conceptos clásicos de la teoría de la plasticidad, y permite tratar en modo general el comportamiento mecánico del hormigón, bajo complejos estados tensionales que resultan de procesos de cargas *radiales* y *no-radiales*, incluyendo la posibilidad de considerar el fenómeno de degradación de rigidez que se produce durante el desarrollo de procesos elásticos y plásticos. Asimismo permite controlar el fenómeno de dilatancia mediante el uso de una regla de flujo no-asociada. La teoría mecánica que respalda los fundamentos del *modelo de daño plástico*, hace de él una formulación consistente factible de ser particularizada o generalizada aún más.
- 2 – La modelización del hormigón ha requerido una nueva definición de la *variable interna de endurecimiento plástico*, denominada en este modelo *variable interna de daño plástico*, la que constituye una “medida relativa” de la energía disipada durante el proceso plástico. Esta variable ha posibilitado

el tratamiento unificado de los procesos multiaxiales en general, que se desarrollan en el hormigón.

- 3 – A la vista de las limitaciones que presentan las formulaciones elasto-plásticas clásicas, para modelar el comportamiento de materiales friccionales mediante el uso de una *función de endurecimiento isotrópico* formulada en forma explícita, ha sido necesario en su lugar definir la *cohesión* como una *variable interna* regulada por la correspondiente ecuación de evolución. Se hace una propuesta general para dicha ecuación de evolución en función de curvas de resistencia (cohesión) obtenidas en ensayos uniaxiales a tracción y compresión. También se proponen tres funciones explícitas para aproximar dichas curvas uniaxiales de cohesión.
- 4 – Se presentan funciones explícitas que definen el valor del ángulo de *rozamiento interno* y de *dilatancia* para cada pseudo-instante del proceso de carga, y se proponen dos funciones simplificadas, respectivamente, para el caso en que se trabaje con hormigones.
- 5 – Se definen los fenómenos de *degradación de rigidez elástica y plástica* a través de dos variables internas y de sus respectivas ecuaciones de evolución, asociadas a cada fenómeno particular. Además se formulan para casos simples de degradación, las expresiones de los tensores de rigidez secante y tangente degradados. Por otra parte se generaliza el concepto de *flujo plástico asociado* para el caso general de procesos con degradación de rigidez.
- 6 – Se formula una *función de fluencia plástica*, homogénea de primer grado en las tensiones, que aproxima muy bien el comportamiento del hormigón y que también puede ser considerada como función de potencial plástico, sin que introduzca una excesiva dilatancia. También se propone una *modificación simple de la función de fluencia de Mohr-Coulomb*, que permite obtener una adecuada relación inicial entre las resistencias uniaxiales a compresión y tracción, para ángulos de rozamiento interno comprendidos dentro de los valores naturales del hormigón. El hecho de utilizar *funciones de fluencia plástica*, homogéneas de primer grado en las tensiones, presenta la ventaja de permitir que el modelo pueda usar, además de las funciones propuestas

en esta tesis, otras que pueden encontrarse en gran cantidad de trabajos y experiencias acumuladas por otros investigadores en este tema. Además, estas funciones permiten definir *reglas de endurecimiento plástico* con un claro significado físico (tensiones o cohesión).

- 7 – El modelo permite simular procesos de carga que conducen al sólido a su estado último, situación en que no puede seguir resistiendo las acciones impuestas. Esto plantea una marcada diferencia con muchos modelos que están formulados para modelar el comportamiento hasta el límite de tensiones máximas (comportamiento pre-pico), o ligeramente más allá de este límite.
- 8 – De la utilización de este modelo, se observa que en algunos problemas simples de carga radial, la respuesta obtenida coincide bastante con los resultados de otros modelos basados en formulaciones más simples. Sin embargo, no se puede extender esta afirmación a problemas donde se desarrollan estados tensionales de compresión pura, o situaciones más complejas (procesos de compresión-tracción, o corte), ni para aquellos casos de procesos de carga no-radial, ya que se pueden desarrollar estados tensionales de difícil simulación, que el presente modelo resuelve satisfactoriamente.
- 9 – El manejo adecuado de los parámetros y conceptos que intervienen en la formulación del modelo constitutivo que se presenta, le proporcionan una gran versatilidad que permite transformarlo en distintos modelos más simples que podrían considerarse como casos particulares de éste. Entre ellos, y a modo de ejemplo, se pueden mencionar los siguientes: Modelo elástico no-lineal con degradación de rigidez; Modelo elasto-plástico con endurecimiento positivo, nulo o negativo, con degradación elástica y/o degradación plástica, etc.

• CONCLUSIONES SOBRE LA “APLICACION DEL MODELO CONSTITUTIVO” PROPUESTO.

La aplicación de la teoría formulada en el presente modelo constitutivo, puede llevarse a cabo, en líneas generales, mediante la forma clásica utilizada para la implementación de las formulaciones no-lineales inelásticas; sin embargo, conviene

resaltar algunos conceptos, sobre los que fué necesario trabajar para conseguir una buena respuesta del modelo:

- 1 – Con el objeto de poder realizar un análisis de procesos de deformación inestables, se propone un *algoritmo de control de desplazamientos* (versión particular del método de *plano normal actualizado –normal plane update–*), que permite mejorar la velocidad de convergencia. Este algoritmo, de simple implementación, ha revelado ser eficaz en la obtención del camino de respuesta en algunos ejemplos analizados. Dentro de este mismo contexto, se propone un algoritmo de *control de plastificación* que permite regular el incremento de carga, a partir de una definición automática de la *longitud de arco*, para que en dicho incremento plastifique sólo un punto de integración. Esta técnica de control automático de incremento de carga, está formulado para ser utilizado con cualquier método de *control de desplazamientos* y permite que la disipación de energía durante cada incremento sea mínima.
- 2 – Se propone un *algoritmo para implementar* la técnica de *retorno radial*, que posibilita integrar implícitamente la ecuación constitutiva elasto-plástica. Esta es una técnica de integración, adecuada para los problemas con ablandamiento por deformación (contracción de la superficie de fluencia plástica), y permite una sustancial economía de tiempo de cálculo frente a otras técnicas alternativas.
- 3 – Un post-proceso de los resultados permite obtener en forma simple luego de alcanzar la convergencia, como se muestra en los ejemplos de aplicación presentados, la información sobre el estado de fisuración y/o aplastamiento de cada punto del sólido.
- 4 – Se han analizado una considerable cantidad de *ejemplos* con el modelo propuesto. En cada caso se han exigido condiciones forzadas de cargas y vínculos, que conducían a problemas de difícil resolución, obteniéndose siempre resultados satisfactorios con una buena coincidencia con los ensayos experimentales, inclusive para modo mixto de fractura, caso en que se han reproducido resultados que aún no habían sido logrados por otros modelos

constitutivos. Estos ejemplos indican las posibilidades futuras que puede ofrecer la posterior aplicación del modelo en su estado actual de desarrollo.

- 5 – Durante la resolución de los ejemplos, se ha podido observar que mientras se desarrollan procesos de carga con endurecimiento isotrópico en todos los puntos del sólido, se obtiene la convergencia hacia la solución en forma relativamente rápida, comenzando a decrecer esta velocidad de convergencia a medida que aumentan los puntos que desarrollan proceso elasto-plásticos con ablandamiento, sobre todo después que se inicia el proceso de localización de deformaciones.

• LINEAS DE INVESTIGACION FUTURA

El estudio desarrollado en este trabajo, permite plantear nuevas líneas de investigación, a partir de una mayor profundización de algunos temas que en esta tesis no están totalmente cerrados. Entre los más interesantes, se destacan los siguientes:

- 1 – El *problema de la objetividad en la solución respecto del tamaño de la malla de elementos finitos*. En lo que respecta al comportamiento elasto-plástico con endurecimiento no se presentan problemas de objetividad en las respuestas; y aparentemente, este problema está *medianamente* solucionado para procesos elasto-plásticos con un comportamiento elástico inicial, seguido de un comportamiento plástico con ablandamiento, aprovechándose en forma satisfactoria en este trabajo la experiencia de otros investigadores que han profundizado en el estudio de este campo. Si embargo, el hormigón como muchos otros materiales friccionales, tiene tanto a tracción como a compresión una respuesta marcada por un proceso elástico, seguido de otro inelástico con endurecimiento que conduce finalmente a un comportamiento con ablandamiento. Este problema de comportamiento, necesita un mayor esfuerzo de investigación que permita dar solución a los inconvenientes de falta de objetividad en la respuesta que se presentan. Dentro de este mismo contexto, también necesita mayor profundidad el estudio de la energía de aplastamiento G^c que se propone en esta tesis, y que en un primer momento ha permitido dar solución a ciertos problemas de comportamiento multiaxial que se han presentado.

-
- 2 – Conviene estudiar también con más rigor el fenómeno de *localización de deformaciones*, el cual está muy ligado, en este modelo, al problema de la objetividad. Durante el desarrollo de algunos ejemplos de esta tesis se ha permitido que esta localización se desarrolle espontáneamente, en cambio en otros ejemplos ha sido necesario excitar su iniciación.
 - 3 – Dada las características de la formulación del modelo, y su capacidad para emular el comportamiento de materiales friccionales frágiles, sería interesante investigar su posible aplicación al análisis del comportamiento de materiales cerámicos.
 - 4 – Es también de particular interés la *extensión de esta formulación para materiales friccionales que tengan marcada ortotropía*, como es el caso de la mampostería, e inclusive mejorar la definición del daño local en algunos problemas relacionados con el hormigón.
 - 5 – La resolución de un problema cuasi-estático con localización, resulta muy costoso desde el punto de vista del tiempo computacional, siendo necesario dedicar mayor atención en el desarrollo de técnicas que permitan alcanzar la convergencia en la solución con menor esfuerzo.
 - 6 – Sería conveniente extender la formulación del presente modelo, para considerar problemas con grandes deformaciones, con el objeto de ampliar su versatilidad y mejorar el tratamiento de los procesos con localización de grandes deformaciones.
 - 7 – A pesar que los datos básicos que necesita este modelo surgen de estudios uniaxiales a tracción y compresión del hormigón, puede resultar dificultosa la determinación de algunos parámetros, como la energía de fractura por unidad de área, y por lo tanto es deseable que sucesivas investigaciones sobre el modelo permitan reducir la utilización de algunos de estos parámetros, con el fin de hacer más sencilla su aplicación práctica.
 - 8 – Por último, sería de gran importancia realizar distintos *estudios experimentales uniaxiales y multiaxiales* sobre el hormigón, que permitan

aclarar su comportamiento durante determinados procesos de carga, con el objeto de que se pueda ajustar mejor el modelo constitutivo que se presenta.

REFERENCIAS

- [1] - **Andenaes E., Grestle K. and Ko H.** - *Response of mortar and concrete to biaxial compression* - Journal of the Engineering Mechanics Division - ASCE - Vol. 103 - Nro. EM4 - pp. 515, 526 - 1977.
- [2] - **Arrea M. and Ingraffea A. R.** - *Mixed mode crack propagation in mortar and concrete* - Cornell University, Department of Structural Engineering - Report Nro. 81-13 - Ithaca - New York.
- [3] - **Bathe K. J. and Ramaswamy S.** - *On three dimensional non linear analysis of concrete structures* - Nuclear Engineering and Design - Vol. 52 - pp. 385, 409 - 1979.
- [4] - **Batoz J. L. and Dhatt** - *Incremental displacement algorithms for non linear problems* - Int. Journal for Numerical Methods in Engineering - Short communications - pp. 1262, 1267 - 1979.
- [5] - **Bažant Z.** - *Inestability, ductility, and size effect in strain softening concrete* - Journal of The Engineering Mechanics Division - Vol. 102 - Nro. EM2 - pp. 331, 344 - ASCE - 1976.
- [6] - **Bažant Z.** - *Endochronic inelasticity and incremental plasticity* - Int. Jour. of Solids and Structures - Vol. 14 Nro. 9 - pp. 691, 714 - 1978.
- [7] - **Bažant Z.** - *Inestability, ductility, and size effect in strain softening concrete* - Discussion [5] - Journal of The Engineering Mechanics Division - Proc. paper 12042 - ASCE- 1978.
- [8] - **Bažant Z.** - *Crack band model for fracture of Geomaterials* - proc. 4th Int. Conf. on Numer. Methods in Geomech - Edmonton, AB, Canada - Ed. by Z. Eisenstein - Vol. 3 - pp. 1137, 1152 - 1982.
- [9] - **Bažant Z.** - *Comment on Hillerborg's comparison of size effect law with fictitious crack model* - Testimonianze e note scientifiche in onore del settantesimo compleanno de Sandro dei Poli - pp. 335, 338 - Milano - 1985.
- [10] - **Bažant Z.** - *Fracture in concrete and reinforced concrete* - Mechanics of Geomaterials - pp. 259, 303 - Edited by. Z. Bažant - 1985.

-
- [11] - **Bažant Z.**- *Mechanics of distributed cracking* - Appl. Mech. Rev. - Vol. 39 Nro. 5 - pp. 675, 705 - 1986
- [12] - **Bažant Z. and Cedolin L.**- *Blunt crack propagation in finite element analysis* - Journal of The Engineering Division - Vol. 105 - Nro EM2 - pp. 297, 315 - ASCE - 1979
- [13] - **Bažant Z. and Kim S.**- *Plastic fracturing theory for concrete* - Jour. Engineering Mechanics Division - Vol. 105 - Nro. EM3 - pp. 407, 428 - ASCE - 1979
- [14] - **Bažant Z. and Oh B.**- *Crack band theory for fracture of concrete* - Mat. Construct. 16 (93) - pp. 155, 177 - 1983
- [15] - **Bažant Z., Bishop F. and Chang**- *Compression test of concrete and cement paste at very high pressures and lateral confinement* - Testimonianze e note scientifiche in onore del settantesimo compleanno de Sandro dei Poli - pp. 21, 41 - Milano - 1985.
- [16] - **Belytschko T., Bažant Z., Woong Y. W. and Chang T.** - *Strain softening material and finite element solutions* - Computers and Structures - Vol 23 - Nro. 2 - pp. 163, 180 - 1986.
- [17] - **Bicanic N.**- *Non linear finite element transient response of concrete structures* - Ph. D. Thesis - Univ. College of Swansea - 1978.
- [18] - **Borst R. De** - *Non linear analysis of frictional materials* - Ph. D. Thesis - Delft, The Netherlands - 1986.
- [19] - **Borst R. De** - *Integration of plasticity equations for singular yield functions* - Computer and Structures - Vol. 26 - Nro. 5 - pp. 823, 829 - 1987.
- [20] - **Borst R. De**- *Smearred cracking, plasticity, creep and thermal loading - unified approach* - Computer Meth. Appl. Mech. Engng. 62 , 89 - 110 - 1987.
- [21] - **Borst R. De**- *Computation of post-bifurcation and post-failure behavior of strain-softening solids* - Computer and Structures - Vol. 25 - Nro. 2 - pp. 211, 224 - 1987.
- [22] - **Borst R. De and Nauta P.**- *Non-orthogonal cracks in a smeared finite element model* - International Report inst. TNO for building material and building structures - Delft, Netherlands - 1984.
- [23] - **Borst R. De and Vermeer P.**- *Non associated plasticity for soils, concrete, and rock* - Heron - Vol. 29 - Delft, Netherlands - 1984.

-
- [24] - **Borst R. De and Vermeer P.**- *Possibilities and limitations of finite elements for limit analysis* - Geotechnique 34 - Nro. 2 - pp. 199, 210 - 1984.
- [25] - **Brebbia C. A. and Connor J.J.**- *Método de los elementos finitos en ingeniería civil* - Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos - Madrid 1975.
- [26] - **Buyukozturk O. and Shareef S.**- *Constitutive modeling of concrete in finite element analysis* - Computers and Structures - Vol. 21 - Nro. 3 - pp. 581, 610 - 1985.
- [27] - **Calavera J., González Valle E. y González Isabel G.**- *La influencia de los esfuerzos previos de compresión, sobre la resistencia a tracción del hormigón* - Hormigón y Acero - Nro. 119, 120 - pp. 39, 42 - 1977.
- [28] - **Cedolin L.**- *Sulla applicabilità della meccanica della frattura al calcestruzzo* - Testimonianze e note scientifiche in onore del settantesimo compleanno de Sandro dei Poli - pp. 181, 194 - Milano - 1985.
- [29] - **Cedolin L., Crutzen R. and Dei Poli S.**- *Triaxial stress-strain relationship for concrete* - Journal of Engineering Mechanics Division - Vol. 103 - Nro. EM3 - pp. 423, 439 - 1977.
- [30] - **Cervera M. and Hinton E.**- *Nonlinear analysis of reinforced concrete plates and shells using a three dimensional model* - Internal Report - Departament of Civil Engineering Univ. College of Swansea U.K.- 1985.
- [31] - **Cervera M., Hinton E. and Hassan O.**- *Non linear analysis of reinforced plate and shell structures using 20-nodes isoparametric brick elements* - Computer and Structures - Vol. 25 - Nro. 6 - pp. 845, 870 - 1987.
- [32] - **Cesar de Sa J. M. A. and Owen D. R. J.**- *The imposition of the incompressible constraint in finite elements - a review of approaches with a new insight to the locking phenomenon* - 3rd. Int. Conf. on Num. Methods for non linear problems - Dubrovnik - Ed. by Owen D. R. J., Taylor C., Hinton E., Damjanic F. - Pineridge Press - pp. 268, 285 - 1986.
- [33] - **Chen W. F.**- *Plasticity in reinforced Concrete* - Mc Graw Hill - 1982.
- [34] - **Chen A. and Chen W. F.**- *Constitutive Relations for Concrete* - Journal of The Engineering Mechanics Division - Vol. 101 - Nro. EM4 - pp. 465, 481 - ASCE - 1975.

-
- [35] - **Chen W. F. and Ting E.**- *Constitutive models for concrete structures* - Journal of The Engineering Mechanics Division - Vol. 106 - Nro. EM1 - pp. 1, 18 - ASCE - 1980.
- [36] - **Creus G.**- *Inestability, ductility, and size effect in strain softening concrete* - Discussion [5] - Journal of The Engineering Mechanics Division - Proc. paper 12042 - pp. 357, 358 - ASCE - 1977.
- [37] - **Crisfield M. A.**- *A fast incremental iterative solution procedure that handles "snap through"* - Computer and structures - Vol. 13 - pp. 55,62 - 1981.
- [38] - **Crisfield M. A.**- *An arc-length method including line searches and accelerations*- Int. Journal for numerical method in engineering -Vol. 19 - pp. 1269, 1289 - 1983.
- [39] - **Crisfield M. A.**- *Snap-through and snap-back response in concrete structures and the Dangers of Under-integration* - Int.Jour.for Num. Meth. Eng. - Vol. 22 - pp. 751, 756 - 1986.
- [40] - **Crook A. J. L. and Hinton E.**- *Comparison of 2D quadrilateral finite elements for plasticity problems* - Proceedings of the International Conference of Computational Plasticity - Edited by D. R. J. Owen, E. Hinton, E. Oñate - Part 1 - pp. 181, 195 - Pineridge Press - 1987.
- [41] - **Darwin D. et al.**- *Cracking of concrete members in direct tension* - ACI Journal 224-2R-86 - Reported by ACI Committee 224 - January, February - 1986.
- [42] - **Delibes A.**- *Microfisuración del hormigón por compresión, ¿ Estamos del lado de la seguridad ?* - Informes de la Construcción - Vol. 37 - Nro. 379 - pp. 43, 47 - 1986.
- [43] - **Desai C. and Siriwardane H.**- *Constitutive laws for engineering materials, with emphasis on geologic materials*- Printice Hall - 1984.
- [44] - **Ditomaso A.**- *Evaluation of concrete fracture* - *Fracture Mechanics of Concrete: Material characterization and testing* - Ed. by A. Carpinteri and A. Ingrassia - pp. 31, 65 - Martinus Nijhoff Publishers - 1984.
- [45] - **Dougill J. W.**- *On stable progressively fracturing solids* - Jour. Applied Math. Physics (ZAMP) 27 - 1976.
- [46] - **Dougill J. W.**- *Constitutive Relations for concrete and Rock: Applications and extensions of elasticity and plasticity Theory* - Mechanics of Geomaterials - pp. 21, 46 - Edited by. Z. Bažant - 1985.

-
- [47] - **Dvorkin E., Torrent R. and Alvaredo A.**- *A constitutive relation for concrete* - Proceedings of the International Conference of Computational Plasticity - Edited by D. R. J. Owen, E. Hinton, E. Oñate - Part 2 - pp. 1415, 1430 - Pineridge Press - 1987.
- [48] - **Elices M.**- *Fractura del hormigón : método de cálculo numérico* - Informes de la Construcción - Vol. 37 - Nro. 372 - Madrid 1985.
- [49] - **Elices M., LLorca J. e Ingrassia A.**- *Fractura del hormigón en régimen elástico y lineal* - Informes de la Construcción - Vol. 37 - Nro. 372 - Madrid - 1985.
- [50] - **Fardis M. N. and Chen E. S.**- *A cyclic multiaxial model for concrete*- Computational Mechanics - Vol. 1 - pp. 301, 305 - 1986.
- [51] - **Frantziskonis G. and Desai G. S.**- *Constitutive model with strain softening* - Int. Jour. Solids Structures - Vol. 23 - Nro. 6 - pp. 733, 750 - 1987.
- [52] - **Frantziskonis G. and Desai G. S.**- *Analysis of strain softening constitutive model* - Int. Jour. Solids Structures - Vol. 23 - Nro. 6 - pp. 751, 767 - 1987.
- [53] - **Frantziskonis G., Desai G. S. and Somasundaram S.**- *Constitutive Model for non-associative behavior* - Journal of Engineering Mechanics - Vol. 112 - Nro. 9 - ASCE - 1986.
- [54] - **Glemberg R.**- *Dynamic analysis of concrete structures* - Ph. D. Thesis - Department of structural mechanics, chalmers University of Technology - Goteborg, Sweden - 1984.
- [55] - **Green G. E. and Bishop A. W.**- *A Note on the Drained strength of sands and generalized strain conditions* - Geotechnique - Vol XIX - Nro. 1 - pp. 144, 149 - 1969.
- [56] - **Han D. J. and Chen W. F.**- *Strain space plasticity formulation for hardening-softening material with elastoplastic coupling* - Int. Jour. Solids Structures - Vol. 22 - Nro. 8 - pp. 935,950 - 1986.
- [57] - **Hansen B.**- *Line ruptures regarded as narrow ruptures zones - Basic equations based on kinematic considerations* - Proc. Brusels Conf. 58 on earth pressure problems - 1958.
- [58] - **Hill R.**- *The mathematical theory of plasticity*- Oxford University Press - London 1950.
- [59] - **Hillerborg A.**- *Comparison between the size effect law and the fictitious crack model* - Testimonianze e note scientifiche in onore del settantesimo compleanno de Sandro dei Poli - pp. 329, 334 - Milano - 1985.

-
- [60] - **Hillerborg A., Modeer M. and Petersson P.**- *Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements* - Cement and Concrete Research - Vol. 6 - Nro. 6 - pp. 773, 782 - 1976.
- [61] - **Hillermier B. and Hilsdorf H. K.**- *Fracture mechanics studies of concrete compounds* - Cement Concrete Research - Vol. 7 - pp. 523, 536 - 1977.
- [62] - **Hinton E. and Owen D. R. J.**- *An introduction to finite element computations*- Pineridge Press Limited - Swansea U.K. - 1979.
- [63] - **Hinton E. and Owen D. R. J.**- *Finite elements in plasticity* - Pineridge Press Limited - Swansea U.K. - 1980.
- [64] - **Hinton E. and Rahman A.**- *Finite element model for the analysis of reinforced concrete structures* - Aplicaciones del método de los elementos finitos en ingeniería - Eds. Oñate E., Alonso E., Casteleiro M., - Apendice - Barcelona 1982.
- [65] - **Instrucción Española para el proyecto y la ejecución de obras de hormigón en masa y armado** - (EH-82) - MOPU - 1982.
- [66] - **Irons B.**- *A frontal solution program for finite element analysis* - Int. Jour. for Num. Meth. in Engineering - Vol.2 - pp. 5, 32 - 1970.
- [67] - **Jurina L. and Maier G.**- *Inestability, ductility, and size effect in strain softening concrete*- Discussion [5] - Journal of The Engineering Mechanics Division - ASCE - 1977.
- [68] - **Kleiber M.**- *Influence of nucleation and growth of void limit load capacity of a thick cylinder* - Arch. Mech., 35, 2 - pp. 307, 312 - Warszawa, Poland - 1983.
- [69] - **Kleiber M.**- *On plastic localization and failure in plane strain and round void containing tensile bars* - Int. Jour. of Plasticity - Vol. 2 - pp. 205, 221 -1986.
- [70] - **Klisinski M. and Mroz Z.**- *Description of inelastic deformation and degradation of concrete* - Internal report - Institute of fundamental technological research - Warszawa , Poland - 1987.
- [71] - **Koiter W. T.**- *General theorems for elastic-plastic solids* - Progress in Solid Mechanics - Vol.1 - pp. 165, 221 - North Holland Publishing Co. Amsterdam - 1960.
- [72] - **Kotsovos M. D. and Newman J. B.**- *Generalized stress-strain relations for concrete* - Jour. of Engineering Mechanics Division - Vol. 104 - Nro. EM4 - pp. 845, 856 - ASCE -

1978.

- [73] - **Kupfer H. B. and Gerstle K. H.**- *Behavior of concrete under biaxial stress* - Jour. Engineering Mechanics Division - Vol. 99 - pp. 852, 866 - ASCE - 1973.
- [74] - **Kupfer H. B., Hilsdorf H., and Rusch H.**- *Behavior of concrete under biaxial stresses* - Journal ACI - Vol. 66 - Nro. 8 - 1969.
- [75] - **Lade P. V. and Duncan J. M.**- *Elasto plastic stress-strain theory for cohesionless soil* - Journal of the Geotechnical Engineering Division - ASCE - Vol. 101 - Nro. GT10 - pp. 1037, 1053 - 1975.
- [76] - **Lade P. V. and Musante H. M.**- *Three dimensional behavior of remolded clay*- Journal of the Geotechnical Engineering Division - ASCE - Vol. 104 - Nro. GT2 - pp. 193, 209 - 1978.
- [77] - **Lama R. D. and Vutukuri V. S.**- *Mechanicals Properties of rocks* - Transtech publications - Vol. II
- [78] - **Lubliner J., Oller S., Oliver J. y Oñate E.**- *A plastic damage model for non linear analysis of concrete* - Paper submitted for consideration for publication in: Int. Solids and Structures - 1988.-
- [79] - **Lubliner J.**- *Thermomechanics of deformable bodies*- Edited by Department of Civil Engineering University of California, Berkeley - U.S.A. - 1985.
- [80] - **Ma S. Y. A. and May I. M.**- *The Newton-Raphson method used in the non-linear analysis of concrete structures* - Computer and Structures - Vol. 24 - Nro. 2 - pp. 177, 185 - 1986.
- [81] - **Malvern L. E.**- *Introduction to the mechanics of a continuous medium* - Printice Hall - U.S.A. - 1969.
- [82] - **Marques J. M. M. C.**- *Non linear finite element solutions with quasi-and secant-Newton methods* - 3rd. Int. Conf. on Num. Methods for non linear problems - Dubrovnik - Ed. by Owen D. R. J., Taylor C., Hinton E., Damjanic F. - Pineridge Press - 1986.
- [83] - **Matthies H. and Strang G.**- *The solution of non-linear finite element equations* - Int. Jour. for Num. Meth. in Engineering - Vol. 14 - pp. 1613, 1626 - 1979.
- [84] - **Mier J. G. M. van**- *Examples of non-linear analysis of reinforced concrete structures with DIANA* - Heron - Vol. 32 - Nro. 3 - Delft, Netherlands - 1987.

-
- [85] - **Mindess S.**- *Fracture toughness testing of cement and concrete - Fracture mechanics of concrete: Material characterization and testing* - Ed. by A. Carpinteri and A. Ingrassia - pp. 67, 110 - Martinus Nijhoff Publishers - 1984.
- [86] - **Mindess S. and Diamond S.**- *A preliminary SEM study of crack propagation in mortar* - Cement Concr. Research - Nro. 10 - 1980.
- [87] - **Murray D. W., Chitnuyanondh L., Khazal Y. and Chung Wong** - *Concrete Plasticity theory of biaxial stress analysis*- Jour. Eng. Mechanics Division - ASCE - Vol. 105 - Nro. EM6 - pp. 989, 1106 - 1979.
- [88] - **Nayak G., and Zienkiewicz O.**- *Elasto-plastic Stress Analysis. a Generalization for Various constitutive Relations , Including Strain softening* - Int. Jour. for Num. Meth. Eng. - Vol. 5 - pp. 113, 135 - 1972.
- [89] - **Needleman A. and Tvergaard V.**- *Finite element analysis of localization in plasticity* - From: "Finite elements special problems in solid mechanics"- Vol. 5 - Chap. 3 - pp. 94, 267 - Ed. by Oden J. T., and Carey F. - 1985.
- [90] - **Ngo D. and Scordelis A.**- *Finite element analysis of reinforced concrete beams*- Journal of A.C.I. - Vol. 64 - Nro. 3 - 1967.
- [91] - **Nilson A.**- *Non linear analysis of reinforced concrete by finite element method* - Journal A.C.I.- Vol. 65 - Nro. 9 - 1968.
- [92] - **Nilsson L. and Oldenburg M.**- *Non linear wave propagation in plastic fracturing materials* - A Constitutive Modelling and Finite Element Analysis - IUTAM Simposium - Ed. U. Nigul - (1982) - J. Engeibrecht - Springer Berlin - Heidelberg - 1983.
- [93] - **Oliver J. y Fernandez Roure J. R.**- *Análisis no lineal de estructuras bidimensionales de hormigón por el método de los elementos finitos* - II Simposium de Aplicaciones del Metodo de los Elementos Finitos en Ingeniería - Eds. Oñate E., Suarez B., Miquel Canet J.- Vol. 1 - pp. 447, 463 - Barcelona 1986.
- [94] - **Oliver J. y Fernandez Roure J. R.**- *Consideraciones sobre el modelo numérico de distribución para el análisis de la fisuración de hormigón* - Revista Internacional de Metodos Numéricos para el Cálculo y Diseño en Ingeniería - Vol. 3,4 - pp. 343,368 - 1987.
- [95] - **Oller S., Oliver J. y Oñate E.**- *Simulación numérica de procesos no lineales de fractura y aplastamiento en hormigón, mediante un modelo plástico* - I Jornadas Ibéricas de fractura - Ed. Farias L. - pp. 223-1, 223-12 - Braga, Portugal - 1987.

-
- [96] - **Oller S., Oñate E. y Oliver J.**- *Un modelo de fisuración del hormigón basado en la teoría incremental de la plasticidad*- II Simposium de Aplicaciones del Método de los Elementos Finitos en Ingeniería - Eds. Oñate E., Suarez B., Miquel Canet J.- Vol. 1 - pp. 393, 416 - Barcelona 1986.
- [97] - **Oñate E., Oller S., Oliver J. and Lubliner J.**- *A constitutive model for cracking of concrete based on de incremental theory of plasticity* - Proceedings of the International Conference of Computational Plasticity - Edited by D. R. J. Owen, E. Hinton, E. Oñate - Part 2 - pp. 1311, 1327 - Pineridge press - Barcelona - 1987 .
- [98] - **Oñate E., Oller S., Oliver J. and Lubliner J.**- *A fully elastoplastic constitutive model for non linear analysis of concrete* - Int. Conf. on Num. Methods in Ingng., Theory and Applications - NUMETA - Eds. Pande G. and Middleton J. - Martinus Nijhoff Publishers - Swansea U.K. - 1987.
- [99] - **Oñate E., Oller S., Oliver J. and Lubliner J.**- *A constitutive model of concrete based on the incremental theory of plasticity* - Engineering Computations - Vol. 5, 2 - 1988.
- [100] - **Ortiz M., Leroy Y. and Needleman**- *A finite element method for localized failure analysis*- Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering - Vol. 61 - pp. 189, 214 - North Holland - 1987.
- [101] - **Ottosen N. S. and Dahlblom O.**- *Smearred crack analysis using a non linear fracture model for concrete*- 3rd. Int. Conf. on Num. Methods for non linear problems - Dubrovnik - Ed. by Owen D. R. J., Taylor C., Hinton E., Damjanic F. - Pineridge Press - 1986.
- [102] - **Ottosen N. S.**- *A failure criterion for concrete*- Journal of Engineering Mechanics Division - ASCE - Vol. 103 - Nro. EM4 - pp. 527, 535 - 1977.
- [103] - **Ottosen N. S.**- *Theoretical framework for modelling the behavior of frictional material*- Int. J. Solis Structures - Vol. 22 - Nro. 11 - pp. 1325, 1342 - 1986.
- [104] - **Ottosen N. S.**- *Thermodynamic consequences of strain softening in tension* - Journal of Engineering Mechanics Division - ASCE - Vol. 112 - pp. 1152, 1164 - 1986.
- [105] - **Owen D. and Gomez C.**- *Some recent developments in solution techniques for non linear finite element problems* - Aplicaciones del Método de los elementos finitos en ingeniería - Eds: E. Oñate, E. Alonso, M. Casteleiro - Barcelona - 1982.
- [106] - **Padovan J. and Moscarello R.**- *Locally bound constrained Newton-Raphson solution algorithms* - Computer and structures - Nro. 2 - pp. 1181, 1197 - 1986.

-
- [107] - **Page A. W.**- *Finite Element model for masonry* - Journal of the structural division - ASCE - Vol. 104 - Nro. ST8 - 1978.
- [108] - **Pande G. N. and Pietruszczak S.**- *Simetric tangencial stiffness formulation for non-associated plasticity* - Computers and Geotechnics - Nro. 2 - pp. 89, 99 - 1986.
- [109] - **Papadrakakis M. and Ghionis P.**- *Conjugate gradient algorithms in non-linear structural analysis problems* - Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering - 59 - pp. 11, 27 - 1986.
- [110] - **Petersson P. E.**- *Crack growth and development of fracture zones in plain concrete and similar material* - Division of Building Material - University of Lund : Institute of Technology - Report TVBM-1006
- [111] - **Pietruszczak S. and Mroz Z.**- *Finite Element Analysis of deformation of strain softening material*- International Journal for Numerical Methods in Engineering - Vol. 17 - pp. 327, 334 - 1981.
- [112] - **Planas J., Elices M.**- *Fractura del hormigón en régimen lineal: intentos para medir la energía de fractura*Gf.- Informes de la Construcción - Vol. 37 - Nro. 372 - 1985.
- [113] - **Podgorski J.**- *General failure criterion for isotropic media* - Journal of Engineering Mechanics - Vol. 111 - Nro. 2 - 1985.
- [114] - **Radenkovic D.**- *Theoremes limites pour un materau de Coulomb a dilatation non standardisee* - C.R.Ac.Sc. 252 - Paris - 1961.
- [115] - **Rashid Y. R.**- *Analysis of prestressed concrete pressure vessels* - Nuclear Engineering and Design - Vol. 7 - Nro. 4 - 1968.
- [116] - **Read H. E. and Hegemier G. A.**- *Strain softening of rock, soil and concrete* - A review article, Mechanics of Materials - Nro. 3 - pp. 271, 294 - 1984.
- [117] - **Reinhardt H. W.**- *Fracture mechanics of an elastic softening material like concrete*- Heron - Vol. 29 - Nro. 2 - Delft, Netherlands - 1984.
- [118] - **Rice J.**- *The localization of plastic deformation* - Theoretical and Applied Mechanics - pp. 207, 220 - Ed. W. T. Koiter - North Holland Publishing Co. - 1976.
- [119] - **Riggs R. and Powell G.**- *Rough crack model for analysis of concrete* - Journal of Engineering Mechanics - Vol. 112 - Nro. 5 - pp.448, 464 - ASCE -1986.

-
- [120] - **Riks E.**- *The application of Newton's method to the problem of elastic stability* - Jour. Appl. Mechanics - Vol. 39 - pp. 1060, 1066 -1972.
- [121] - **Ronca P.**- *Simulazione numerica di prove a trazione per elementi bidimensionali in calcestruzzo* - Testimonianze e note scientifiche in onore del settantesimo compleanno de Sandro dei Poli - pp.507, 519 - Milano - 1985.
- [122] - **Rots J. G. and Borst R. De**- *Analysis of mixed-mode fracture in concrete* - Paper submitted for consideration for publication in : "Journal of Engineering Mechanics" - ASCE - 1986.
- [123] - **Rots J. G., Nauta P., Kusters G. and Blaauwendraad J.**- *Smearred crack approach and fracture localization in concrete* - Heron - Vol. 30 - Delft, Netherlands - 1985.
- [124] - **Rots J. G.**- *Strain softening analysis of concrete fracture specimens* - Fracture Toughness and Fracture Energy of Concrete - p. 133 - Ed. by F. H. Wittman - Amsterdam - 1986.
- [125] - **Rowe P. W.**- *Theoretical meaning and observed values of deformation parameters for soil* - Proc. Rascoe Memorial Symp. on Stress-Strain Behavior of Soils - Cambridge - 1972.
- [126] - **Sacchi Landreani G. e Riccioni R.**- *Compotamento delle strutture Murarie* - Clup - Milano - 1982.
- [127] - **Saenz L. P.**- *Equation for the stress-strain curve of concrete* - Discussion by Desayi and Krishnan - Am. Concr. Inst.- 61 - pp. 1229, 1235 - 1964.
- [128] - **Schweizerhof K. H. and Wriggers P.**- *Consistent linearization for Path following methods in non-linear F. E. analysis* - Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering - 59 - pp. 261, 279 - 1986.
- [129] - **Sih G.**- *Mechanics of material damage in Concrete - Fracture Mechanics of Concrete: Material characterization and testing* - Ed. by A. Carpinteri and A. Ingraffea - pp. 1, 29 - Martinus Nijhoff Publishers - 1984.
- [130] - **Simo J. C. and Ju J. M.**- *On continuum damage - elastoplasticity at finite strains: a computational framework* - Paper submitted for consideration for publication in: "Computational Mechanics" - 1987.
- [131] - **Simo J. C. and Ju J. M.**- *Strain and stress based continuum damage model - Part I : Formulation* - Int. Solids and Structures - Vol. 23, Nro. 7, pp. 281,841 - 1987.

-
- [132] - **Simo J. C. and Taylor T. L.**- *A return mapping algorithm for plane stress elastoplasticity* - Int. Jour. for Numerical Methods in Engineering - Vol. 22 - pp. 649, 670 - 1986.
- [133] - **Slate F. and Hover K.**- *Microcracking concrete - Fracture mechanics of concrete: Material characterization and testing* - Ed. by A. Carpinteri and A. Ingraffea - pp. 137, 159 - Martinus Nijhoff Publishers - 1984.
- [134] - **State of the art report on: Finite Element Analysis of Reinforced concrete** - ASCE - 1982.
- [135] - **Suidan M. and Schnobrich W.**- *Finite element analysis of reinforced concrete* - Journal of the structural division - ASCE - Vol. 99 - Nro. ST10 - pp. 2109, 2122 - 1973.
- [136] - **Tasuji E., Slate F. and Nilson A.**- *Stress-strain response and fracture of concrete in biaxial loading*- Journal ACI - Vol 75 - Nro. 7 - pp. 306, 312 - 1978.
- [137] - **Taylor L. and Chen E.**- *Microcrack-induced damage accumulation in brittle rock under dynamic loading* - Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering - 55 - North Holland - 1986.
- [138] - **Valanis K. Z.**- *A theory of viscoplasticity without a yield surface -Part I, General theory* - Archives of Mechanics - Vol. 23 - Nro. 4 - pp. 517, 534 -1971.
- [139] - **Valanis K. Z.**- *A theory of viscoplasticity without a yield surface -Part II, Applications to mechanical behavior of metals*- Archives of Mechanics - Vol. 23 - Nro. 4 - pp. 535, 551 -1971.
- [140] - **Valanis K. Z.**- *On the uniqueness of solution of the initial value problem in softening materials* - Journal of Applied Mechanics - Vol. 52 - pp. 649, 653 - 1985.
- [141] - **Vermeer P. A.**- *A modified initial strain method for plasticity problems* - third Int. Conference on Numerical Methods in Geomechanics - Aachen - pp. 377, 387 - 1979.
- [142] - **Willam K. and Sobh N.**- *Bifurcation analysis of tangencial material operators* - Int. Conf. on Num. Methods in Ingng., Theory and Applications - NUMETA - Eds. Pande G. and Middleton J. - Martinus Nijhoff Publishers - Swansea U.K. - 1987.
- [143] - **Zienkiewicz O. C., Vallippan S. and King P.**- *Elasto plastic solutions of engineering problems "initial-stress", finite element approach* - Int. Jour. for Num. Meth. in Engineering - Vol. 1 - pp. 75, 100 - 1969.

-
- [144] - **Zienkiewicz O. C.**- *El método de los elementos finitos*- Edit. Reverté- Barcelona - 1982.
- [145] - **Washizu K.**- *Variational methods in elasticity and plasticity*- Pergamon Press - 1974.
- [146] - **Zienkiewicz O. C., Humpheson C. and Lewis R. W.**- *Associated and non-associated visco-plasticity and plasticity in soil mechanics*- Géotechnique - Vol. 25 , No. 4 - pp. 671, 689 - 1974.
- [147] - **Chilov G.**- *Analyse mathématique*- MIR Moscu - 1975.
- [148] - **Oliver J.**- *A consistent characteristic length for smeared cracking models*- Paper submitted for consideration for publication in: Applied Numerical Methods - 1988.-
- [149] - **Oliver J., Oller S., Oñate E.**- *Modelos elasto-plásticos para la simulación numérica de procesos de fractura* - V Encuentro del Grupo Español de Fractura - Barcelona 1988.-