Anexo 6

Breves apuntes sobre la teoría de errores.

A6.1. Introducción.

Se introduce brevemente los conceptos fundamentales de la teoría de errores para ensayos experimentales. Se trata de errores cometidos en la medida de una variable y errores cometidos en la medida indirecta de una función que depende de varias variables.

Las variables medidas pueden ser estadísticas o no estadísticas. En el sentido estricto de la palabra una variable se considera estadística cuando se ha obtenido un elevado número de medidas de la misma. Este número, en general, se considera que tiene que ser superior a 100 (Box, Hunter y Hunter, 1988; Giamberardino, 197?). Algunos autores consideran una variable estadística cuando su valor se ha medido un número de veces superior a 30 (Martínez y Maciá, 1988). En la práctica no se suelen realizar más de 10 ó 20 medidas de cada variable. En este caso los errores estadísticos pierden significado y quedan como definiciones convencionales que se utilizan para expresar los resultados experimentales

(Giamberardino, 197?). Por este motivo, junto con el valor asociado a una variable hay que indicar el número de medidas experimentales realizado sobre la misma. Si el número de medidas efectuadas es inferior a 10 se considera que la variable es no estadística y no se puede tener ninguna confianza en los errores estadísticos calculados.

Los errores asociados a una variable pueden ser de diferentes tipos:

- Errores sistemáticos. Se repiten en todas las medidas experimentales realizadas. Pueden estar ocasionados por:
 - Errores en la calibración de los instrumentos de medida.
 - Condiciones experimentales no adecuadas.
 - Técnicas experimentales imperfectas.
 - Fórmulas o teorías incorrectas.

- Errores casuales. Son aleatorios. Están presentes en todas las medidas que se realizan. Dentro de éstos se incluyen:
 - Los errores de apreciación que dependen de la mínima división de la escala del aparato de medida.
 - Los errores debidos a las condiciones de trabajo. Variaciones en las condiciones del laboratorio (humedad, temperatura, presión atmosférica, etc...) pueden producir oscilaciones en las medidas.
 - Errores producidos por la falta de definición de la magnitud que se quiere medir.

- Errores ilegítimos. Aquellos que no son casuales y que no se cometen de forma sistemática en el experimento. Se pueden agrupar en:
 - Errores personales. Ocasionados por un uso incorrecto de los instrumentos o por lecturas inexactas.
 - Errores de cálculo. Debidos a menudo a la falta de precisión del instrumento o programa utilizado para el cálculo.
 - Errores caóticos. Puede ocurrir una perturbación que, en unas medidas determinadas genere un error superior al error casual. En

estos casos es necesario desestimar estas medidas. Puede ocurrir, por ejemplo, en el caso de un cable mal conectado, una sobretensión, un contacto mal hecho, etc...

En este anexo se analiza, básicamente, la estimación de errores aleatorios.

A6.2. Errores de una variable.

A6.2.1. Promedio, errores aparentes, errores verdaderos y error sobre el promedio.

Cuando se mide experimentalmente una variable V se realizan n medidas de su valor, u_i con $i=1, \dots, n$. El valor real de esta variable en un cierto U^{real} desconocido. Se denominan errores verdaderos a la diferencia entre cada una de las medidas experimentales y el valor real de la variable:

$$\varepsilon_i = u_i - U^{\text{real}}, \text{ con } i=1, \dots, n. \quad (\text{A6.1})$$

Se denomina valor promedio de la variable U a:

$$\bar{u} = \frac{\sum_{i=1}^n u_i}{n} \quad (\text{A6.2})$$

Este valor promedio se dice que es el valor más probable de la variable U . Se considera que, para poder tener un valor estadístico de $\hat{u}$, n ha de ser mayor o igual a 10.

El error aparente o residuo es la diferencia entre cada una de las medidas realizadas y el valor promedio de la variable:

$$e_i = u_i - \bar{u} \text{ con } i=1, \dots, n \quad (\text{A6.3})$$

Estos errores, a diferencia de los errores verdaderos, son una cantidad que se puede calcular. El denominado error sobre el valor promedio es también una cantidad desconocida y se define como:

$$E = \bar{u} - U^{\text{real}} \quad (\text{A6.4})$$

A6.2.2. Histograma, distribución normal, t de Student, c^2 y curva de Gauss.

Se denomina histograma al esquema que muestra en número de veces que se obtienen valores determinados de una misma magnitud. Si el número de medidas realizadas es muy grande y los intervalos considerados para el histograma son pequeños se tiene una distribución $f(x)$. La probabilidad de que una sola de las medidas realizadas, tomada aleatoriamente, esté comprendida en el intervalo entre x y $x+dx$ se calcula como $f(x)dx$. Como la probabilidad de que una medida cualquiera tenga un valor cualquiera ha de ser la unidad, se cumple que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \quad (\text{A6.5})$$

Se define el promedio de una cierta cantidad x como:

$$\bar{x} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx} \quad (\text{A6.6})$$

La función $f(x)$ se puede definir de tal manera que sea independiente de la naturaleza de la medida y de los instrumentos utilizados. Diferentes definiciones de esta función proporcionan diferentes distribuciones. Una de las más utilizadas es la distribución de Gauss, llamada también distribución normal, definida como:

$$f(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2} \quad (\text{A6.7})$$

Siendo h un parámetro de precisión que determina lo aguda que es la curva simétrica definida por esta función. Una medida de la variable U es tanto más precisa cuanto mayor es el valor de h , lo que equivale a que los errores aparentes de las medidas son pequeños, por lo que estas medidas se concentran alrededor del su valor promedio. Valores elevados de h proporcionan una curva aguda.

Para obtener la función de Gauss se considera la probabilidad de obtener una cierta medida dentro de un intervalo entre $-x_1$ y $+x_1$:

$$\int_{-x_1}^{+x_1} f(x)dx = \int_{-x_1}^{+x_1} \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2} dx = 2 \int_0^{+x_1} \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2} dx \quad (A6.8)$$

Realizando el cambio de variables:

$$t = \sqrt{2hx} \quad (A6.9)$$

La ecuación 16.8 queda como:

$$\theta(z) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_z e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad (A6.10)$$

A la expresión 16.10 se le conoce como integral de Gauss y se evalúa mediante métodos numéricos o por aproximaciones. Sus valores están tabulados (ver, por ejemplo, Giamberardino, 197?).

No siempre los datos experimentales se ajustan a una distribución normal. Se consideran entonces otros modelos, como el definido por la distribución t de Student:

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{m}\right)^{-\left(\frac{m+1}{2}\right)} \quad (A6.11)$$

Donde m es el número de grados de libertad de la variable x porque ésta es la suma de m variables aleatorias independientes entre las que no existe ningún tipo de relación que restrinja su campo de variabilidad. Cada una de estas variables puede tomar un valor cualquiera entre $-\infty$ e ∞ (Martinez y Macià, 1986). Γ es la función gamma.

Otra distribución bastante común es la χ^2 . Sean u_i con $i=1, \dots, n$, variables aleatorias con distribución normal. Se considera una nueva variable aleatorio definida como:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n u_i^2 \quad (\text{A6.12})$$

Esta nueva variable sigue una distribución χ^2 si su función de densidad de probabilidad se define por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{m}{2}} \Gamma^{\frac{m}{2}}} x^{\frac{m-1}{2}} e^{-\frac{x}{2}} & \text{para } 0 < x \\ 0 & \text{para } x < 0 \end{cases} \quad (\text{A6.13})$$

Siendo el coeficiente m , como en la ecuación 16.11, el número de grados de libertad y Γ la función gamma.

A6.2.3. Error cuadrático medio y error estándar.

Error cuadrático medio.

El error cuadrático medio de una serie de n medidas de la variable U representa el error que se supone se ha cometido sobre cada una de las n medidas u_k . Se define como:

$$\mu_{cm} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n e_k^2}{n-1}} \quad (\text{A6.14})$$

Siendo n el número de medidas de la variable U realizadas y e_k el error aparente de u_k .

Cuando se identifica el parámetro h de la función de Gauss una función del error cuadrático dada por:

$$h = \frac{1}{\sqrt{2} \mu_{cm}} \quad (\text{A6.15})$$

Entonces la probabilidad de que el error sobre la medida de U esté comprendido entre dos valores x y $x+dx$ viene dado por:

$$f(x)dx = \frac{1}{\mu_{cm} \sqrt{2\pi}} \left(e^{-\frac{x^2}{2\mu_{cm}^2}} \right) dx \quad (\text{A6.16})$$

Analizando esta expresión se llega a que la probabilidad de que una medida u_k difiera del valor promedio $\hat{u}$ en más de $3\mu_{cm}$ es de un 0.27%.

Error estándar.

Se calcula el error cuadrático medio del promedio:

- Se determinan los n promedios $\hat{u}_1, \hat{u}_2, \dots, \hat{u}_n$.
- Se construye la curva de Gauss de los promedios, que resulta simétrica a un valor $\bar{\bar{u}}$. Se considera que la diferencia entre un promedio cualquiera y un promedio de promedios se distribuye según la ley de Gauss.
- Con estas consideraciones el error cuadrático medio o error estándar viene dado por:

$$\sigma = \frac{\mu_{cm}}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \mu_{cmi}^2}{n^2}} \quad (\text{A6.17})$$

Esta expresión es cierta para medidas estadísticas, es decir aquellas para las cuales el valor n (repetición de medidas) es muy elevado.

Identificando el parámetro h de la distribución de Gauss por:

$$h = \frac{1}{\sigma\sqrt{2}} \quad (\text{A6.18})$$

Se tiene que la función de distribución de probabilidad A6.16 puede escribirse como:

$$f(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2}} \left(e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \right) dx \quad (\text{A6.19})$$

Que representa la probabilidad de que el promedio de una cualquiera de esta serie de n medidas efectuadas difiera del valor promedio de todas ellas, considerado muy próximo al valor verdadero de la variable, en una cantidad comprendida entre x y $x+dx$. El valor del error definido en la ecuación A6.17 resulta ser la cantidad más adecuada porque da una idea de la probabilidad de que el promedio $\hat{u}$ de una serie de medidas difiera del valor verdadero U^{real} de la variable U . A su vez, la expresión A6.17 es equivalente a:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n e_k^2}{n(n-1)}} \quad (\text{A6.20})$$

Siendo σ el error conocido como estándar, que también recibe el nombre de desviación típica, siendo una medida de la dispersión de los datos.

Si se tiene una serie de medidas de una cierta variable U : $u_1, u_2, \dots, u_n$, el valor verdadero de esta variable, U^{real} tiene una probabilidad de estar comprendido entre:

- 1) $(\hat{u} - \sigma)$ y $(\hat{u} + \sigma)$ del 68.3%.
- 2) $(\hat{u} - 2\sigma)$ y $(\hat{u} + 2\sigma)$ del 95.45%.
- 3) $(\hat{u} - 3\sigma)$ y $(\hat{u} + 3\sigma)$ del 99.73%.

Esto indica que el promedio $\hat{u}$ tiene una probabilidad de menos del 0.27% de diferir en más de 3σ del valor verdadero de la variable U^{real} .

Este error estándar, que no se escribe con más de dos cifras decimales, se puede considerar como el error absoluto cuando la variable analizada es estadística, es decir, que este tratamiento es válido cuando el número de veces que se ha repetido una misma medida es elevado. Se suele considerar que todo lo expuesto hasta este punto es válido cuando $n=100$.

A6.2.4. Evaluación del error cuando n es pequeño. Variables no estadísticas.

En la práctica no se suelen efectuar más de 10 ó 20 medidas de una misma variable. Cuando esto ocurre, los errores introducidos hasta este punto pierden su significado y quedan únicamente como definiciones convencionales que generalmente se utilizan para expresar los resultados experimentales (Giamberardino, 197?).

Si el número de medidas es inferior a 10 se observa que el error que afecta al error estándar es tan grande como su propio valor, lo que indica que no se puede tener confianza alguna en los errores estadísticos. Por este motivo se utilizan las expresiones estadísticas para los casos en los que $n > 10$, teniendo en cuenta que para valores menores a $n=100$ (Box, Hunter y Hunter, 1988) o a $n=30$ (Martínez, Maciá y Pérez, 1988) estas expresiones no proporcionan el error estadístico y se convierten en unas definiciones utilizadas convencionalmente.

Si el número de medidas es $n < 10$ la variable medida no se puede considerar estadística. Para trabajar con ella se sigue en siguiente procedimiento:

- 1) Se obtiene un valor de n medidas de una cierta variable U , con $n < 10$.
- 2) Se calcula el valor promedio de las medidas (ecuación A6.2).
- 3) El error presuntamente cometido se calcula como la diferencia entre los dos valores más extremos de las n medidas realizadas dividida entre 2:

$$\Delta u_M = \frac{u_{\text{máx}} - u_{\text{mín}}}{2} \quad (\text{A6.21})$$

- 4) El valor de la variable U se da como:

$$U = \bar{u} \pm \Delta u_M \quad (\text{A6.22})$$

- 5) No se toma nunca un error inferior al Δu_M . En el caso que las medidas u_k realizadas tengan un error propio asociado Δu_k mayor que Δu_M se toma el primero como error de la variable.

A6.3. Errores en una función de varias variables.

En muchas ocasiones el parámetro calculado, F , se obtiene indirectamente como una función de m variables experimentales ($z_1, z_2, \dots, z_m$). Se dice en este caso que este parámetro es una medida indirecta: $F(z_1, z_2, \dots, z_m)$.

Las variables utilizadas para obtener la función pueden ser estadísticas (cantidades medidas como mínimo 10 veces) o no estadísticas (medidas menos de 10 veces).

El error cometido al estimar la función se evalúa a partir de las m variables medidas que intervienen. Pueden darse tres situaciones:

- 1) Las m magnitudes medidas son estadísticas.

- 2) Ninguna de las m magnitudes es estadística.
- 3) Algunas z_k son estadísticas y las demás no lo son.

A6.3.1. Tratamiento estadístico.

Este tratamiento se realiza cuando la m variables son estadísticas.

Para trabajar con ellas se procede de la siguiente manera:

- 1) Se calculan los promedios de las m variables $z_1, z_2, \dots, z_m$, a partir de todas las n medidas efectuadas estimarlas (con $n > 10$).
- 2) Se obtienen los errores cuadráticos medios asociados con cada una de las variables estadísticas: $\mu_{cm1}, \mu_{cm2}, \dots, \mu_{cmm}$.
- 3) Se calculan los errores estándar de cada una de las variables: $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m$.
- 4) Con los errores cuadráticos de cada una de las variables se estima el error cuadrático de la función F como:

$$\mu_F = \sqrt{\sum_{j=1}^m \left(\mu_j^2 \left(\frac{\partial f}{\partial z_j} \right)^2 \right)} \quad (\text{A6.23})$$

- 5) Con los errores estándar de cada variable se calcula el error estándar de la función F :

$$\sigma_F = \sqrt{\sum_{j=1}^m \left(\sigma_j^2 \left(\frac{\partial f}{\partial z_j} \right)^2 \right)} \quad (\text{A6.24})$$

- 6) La función que representa la probabilidad de que el error del parámetro buscado $\bar{F} = \bar{F}(\bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots, \bar{z}_m)$ esté comprendido entre x y $x+dx$ es:

$$F(x)dx = \frac{1}{\mu_F \sqrt{2\pi}} \left(e^{\left\{ -\frac{x^2}{2\mu_F^2} \right\}} \right) dx \quad (\text{A6.25})$$

Las ecuaciones A6.23 y A6.24 dan lugar a la ley de propagación de errores estadísticos. El error cuadrático medio y el error estándar de la función tienen el mismo significado que el que presentaban para una variable, por lo que el resultado final el parámetro F se suele escribir como:

$$F = \bar{F} \pm 3\sigma_F \quad (\text{A6.26})$$

Al analizar los errores cuadrático medio y estándar se presentan dos situaciones extremas:

- 1) Cuando los diferentes errores $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m$ (o los errores $\mu_{cm1}, \mu_{cm2}, \dots, \mu_{cmm}$) no tienen ninguna relación entre ellos. Se dice entonces que son estadísticamente independientes. En este caso F se calcula a partir de la expresión A6.26 y sus errores asociados con las ecuaciones A6.23 y A6.24.
- 2) Cuando varias de las variables z_k pueden depender unas de otras y sus errores asociados pueden estar relacionados entre sí. En este caso los errores estándar de estas variables son estadísticamente no independientes.

Cuando los errores son estadísticamente independientes se supone que se produce una compensación de errores ya que éstos son totalmente aleatorios de una variable a otra. La desviación típica de F se calcula a partir de la ecuación A6.24.

Cuando los errores son estadísticamente dependientes se supone que no se produce compensación y las contribuciones de los σ_k se suman algebraicamente. Por lo tanto, en este caso, el error asociado a F se expresa como:

$$\sigma_F = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial F}{\partial z_i} \right) \sigma_i^2 \right) + 2 \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^m L_{ij} \left(\frac{\partial F}{\partial z_i} \right) \left(\frac{\partial F}{\partial z_j} \right) \sigma_i \sigma_j \right)} \quad (\text{A6.27})$$

Donde los coeficientes L_{ij} son los denominados factores de correlación entre las variables i y j (siendo $i=1, 2, \dots, m$; $j=1, 2, \dots, m$).

En el caso de que todas las medidas sean estadísticamente independientes, los coeficientes de correlación son nulos, y la ecuación A6.27 se transforma en la ecuación A6.24.

Cuando todas las medidas son no independientes, la correlación entre variables es máxima y los coeficientes de correlación son la unidad. En este caso la expresión A6.27 se simplifica quedando:

$$\sigma_F = \sum_{i=1}^m \left\{ \sigma_i \left(\frac{\partial F}{\partial z_i} \right) \right\} \tag{A6.28}$$

Cuando los coeficientes de correlación están entre 0 y 1 se aplica la expresión A6.27. El error que proporciona la ecuación A6.28 es mayor que el de A6.27 que, a su vez también es mayor que el obtenido por la expresión A6.24.

Los coeficientes de correlación se pueden estimar a partir de la expresión:

$$L_{ij} = \frac{1}{(n-1)\sigma_i\sigma_j} \left\{ \sum_{k=1}^m z_{ik}z_{jk} - n\bar{z}_i\bar{z}_j \right\} \tag{A6.29}$$

Donde n es el número de veces que se ha realizado la medida de las variables z_i y z_j , que tiene que ser el mismo para ambas.

A6.3.2. Tratamiento no estadístico.

Cuando las medidas realizadas para alguna de las variables son pocas (convencionalmente se considera pocas para $n < 10$), el tratamiento estadístico ya no es correcto y toda aquella variable que sea no estadística tiene un error asociado que no es la desviación típica.

Se presentan tres situaciones:

- 1) Todas las variables se miden varias veces sin superar en ningún caso las 9 medidas.
- 2) Todas las variables implicadas se miden una única vez.
- 3) Parte de las variables se mide una única vez (variables no estadísticas), otras se miden un número de veces n inferior a 10 (variables no estadísticas) y el resto se mide un número de veces superior a 10 (variables estadísticas).

Para considerar el error de la función F hay que tener en cuenta el valor de cada una de las variables implicadas y su error absoluto asociado, estimado a partir de:

- 1) Los errores estándar (si la variable es estadística).
- 2) Los errores máximos (si la variable no es estadística).
- 3) Los errores de apreciación (si se realiza una única medida o si el error de lectura o sensibilidad del aparato es mayor que los errores máximos).

Todas las variables se miden varias veces sin superar en ningún caso $n=9$.

En este caso no se puede producir ninguna compensación entre los errores y el error asociado con la función F se estima a partir de la ecuación A6.28. Por lo tanto se obtiene como:

$$\Delta_F = \left| \frac{\partial F}{\partial z_1} \right| \Delta z_1 + \left| \frac{\partial F}{\partial z_2} \right| \Delta z_2 + \dots + \left| \frac{\partial F}{\partial z_m} \right| \Delta z_m = \sum_{i=1}^m \left\{ \left| \frac{\partial F}{\partial z_i} \right| \Delta z_i \right\} \quad (\text{A6.30})$$

Como las variables z_k no son estadísticas, su error se evalúa a partir de la ecuación A6.21 como:

$$\Delta z_k = \frac{k_{\text{máx}} - k_{\text{mín}}}{2} \quad (\text{A6.31})$$

O bien utilizando el error de precisión (de lectura o sensibilidad del aparato) de la variable z_k si este es mayor que el resultante de A6.31.

Si de una determinada variable z_k se hace una única lectura, el error utilizado para esta variable en la ecuación A6.30 es el asociado con la lectura o sensibilidad del aparato, Δz_0 .

El utilizar las derivadas parciales para estimar los errores es muy práctico porque los diferenciales pueden considerarse como los errores con la condición de que estos últimos sean pequeños y se pueda realizar la aproximación $\Delta x \approx dx$.

Todas las variables se miden una única vez.

En este caso los errores de cada una de las variables implicadas son los de sensibilidad o lectura del aparato. No se puede producir ninguna compensación entre los errores, de manera que el error de la función F se estima utilizando la ecuación A6.30, donde cada uno de los Δz_k son errores de sensibilidad del aparato de medida.

Medidas mezcladas de variables.

En este caso parte de las variables se estiman a partir de una única medida. Otra parte mediante un número de medidas inferior a 10, mientras que el resto son variables estadísticas ($n > 10$).

Este caso es el más complejo de tratar. El error justo correspondiente a la variable F sería ΔF^* tal que estaría comprendido entre los proporcionados por las expresiones A6.24 y A6.30, cumpliéndose que:

$$\sigma_F = \sqrt{\sum_{j=1}^m \left(\sigma_j^2 \left(\frac{\partial f}{\partial z_j} \right)^2 \right)} < \Delta F^* < \sum_{i=1}^m \left\{ \left| \frac{\partial F}{\partial z_i} \right| \Delta z_i \right\} = \Delta_F \tag{A6.32}$$

De tal manera que ΔF^* se tiene que calcular mediante la ecuación A6.27, calculando los coeficientes de correlación a partir de la ecuación A6.29. Sin embargo es difícil que se puedan estimar estos coeficientes y, en caso de conseguirlo, el valor de ΔF^* solo tendría sentido si las variables estadísticas se hubieran estimado a partir de un número de medidas muy elevado ($n > 100$). Por ello se considera correcto el considerar que $\Delta F^* = \Delta_F$.