

**CONTRIBUCIÓN A LA OBTENCIÓN DE IMÁGENES
PARAMÉTRICAS EN TOMOGRAFÍA DE
IMPEDANCIA ELÉCTRICA PARA LA CARACTERIZACIÓN DE
TEJIDOS BIOLÓGICOS**

Tesis doctoral presentada en la
Universidad Politécnica de Catalunya
para la obtención del título de doctor

J. Oscar Casas Piedrafita
Director: Dr. Javier Rosell Ferrer

Barcelona, septiembre de 1998

3.1 Introducción a la tomografía de impedancia eléctrica

La tomografía de impedancia eléctrica (TIE) es un método de obtención de imágenes relacionadas con la distribución de impedancias en el interior de un objeto. Los antecedentes de esta técnica pueden encontrarse en los trabajos de Webster y Henderson (1978), que intentaban reproducir las técnicas de tomografía de rayos X, pero aplicando señales eléctricas de baja frecuencia. Fue en los años 80, cuando la universidad inglesa de Sheffield (Barber y Brown, 1982) desarrolló las bases de lo que se entiende hoy en día por EIT. Para realizar la medida de impedancia eléctrica es necesario inyectar al cuerpo en estudio una corriente eléctrica, la frecuencia y amplitud de la cual, en aplicaciones médicas, son seleccionadas para mantenerse por debajo de los criterios de seguridad establecidos por normas internacionales. Midiendo los potenciales eléctricos sobre la superficie del cuerpo se pueden obtener diferentes tipos de imágenes en función del método de medida y los algoritmos de reconstrucción. Se habla así de tomografía absoluta, dinámica y diferencial. En tomografía absoluta se obtiene una distribución del verdadero valor de las impedancias en el interior del cuerpo, mientras que en la tomografía dinámica tan sólo quedan reflejadas las zonas que experimentan variaciones de la impedancia con el tiempo. Finalmente la tomografía diferencial nos permite distinguir los objetos por el diferente comportamiento frecuencial de sus impedancias a partir de medidas a distintas frecuencias. A partir de estas imágenes multifrecuencia es posible representar las llamadas imágenes paramétricas, que no muestran los cambios de las impedancias con la frecuencia sino la distribución espacial de los parámetros del modelo de Cole-Cole aplicado a las impedancias reconstruidas. El objetivo de este capítulo es el desarrollo de las herramientas necesarias para la obtención de imágenes paramétricas a partir de imágenes multifrecuencia, para ello se estudiarán previamente los denominados problema directo e inverso, que nos permitirán definir respectivamente qué estrategias de adquisición son óptimas en EIT, mejorando de esta forma la distinguibilidad de los diferentes tejidos y cuáles son las limitaciones e influencias de los algoritmos de reconstrucción sobre los valores de impedancia medidos, teniendo este punto, como se verá, una influencia directa sobre la cuantificación de las imágenes paramétricas.

3.2. Problema directo: estrategias de inyección en Tomografía de Impedancia Eléctrica

En tomografía de impedancia eléctrica es importante el estudio de la estrategia de inyección, ya que nos permitirá encontrar la inyección óptima que incrementa la resolución espacial de la imagen o la distinguibilidad de diferentes conductividades. Este punto es trascendental en una técnica que encuentra la mayor dificultad para su aplicabilidad en el diagnóstico clínico en la baja resolución de las imágenes obtenidas.

En la bibliografía se encuentran tres estrategias básicas de inyección de corriente: la adyacente, la polar y la trigonométrica. En la figura 3.1 se muestran las estructuras de estas estrategias.

El criterio empleado hasta ahora para la elección de la inyección es el de la optimización del concepto de distinguibilidad. La primera definición de este criterio, aplicada a EIT, fue dada por Isaacson en 1986. Se basa en la maximización de la diferencia de tensiones en el contorno del objeto con y sin perturbación. La profundización en el estudio de este criterio y por tanto, en el de la estrategia de inyección óptima, nos llevará a la necesidad, por un lado, de resolver el problema directo para la obtención de las tensiones detectadas en el contorno y por otro, al análisis crítico de la definición para dicho criterio de distinguibilidad. Para la realización de este último punto, se hará previamente un estudio de los diferentes conceptos que nos permiten definir los límites teóricos en tomografía, estudiando su relación con la distinguibilidad.

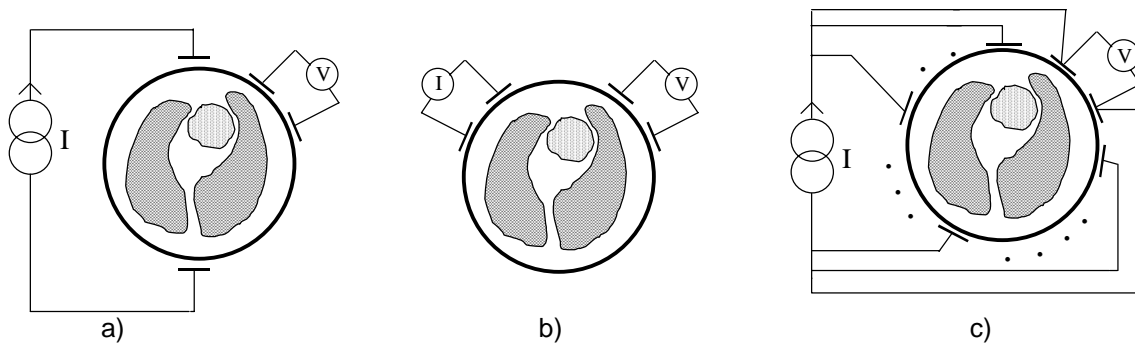


Figura 3.1 Principales estrategias de inyección en EIT. a) Polar, b) Adyacente y c) Trigonométrica.

3.2.1 Resolución del problema directo en dos dimensiones para una perturbación circular centrada.

El problema directo en EIT consiste en encontrar la distribución de potencial eléctrico en la superficie (S) de un objeto (B) con una distribución de conductividad $\sigma(r,\theta)$, cuando tanto el potencial como la corriente en el contorno son conocidos. Este potencial eléctrico satisface la ecuación de Poisson:

$$\nabla \cdot \sigma \nabla u = 0 \quad \text{en todo el objeto B} \quad (3.1)$$

con la condición de contorno

$$\sigma \frac{\partial u}{\partial n} = -j \quad \text{sobre la superficie} \quad (3.2)$$

Dado la complejidad matemática que conlleva la resolución de esta ecuación en geometrías complicadas, se empezará resolviendo el caso sencillo de dos dimensiones, con perturbaciones circulares centradas.

Para un objeto circular de radio R_0 y distribución de conductividad homogénea (σ_0) el potencial puede expresarse como:

$$u(r, \theta) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma_0 R_0^{n-1}} \frac{r^n}{n} (A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)) \quad (3.3)$$

donde la densidad de corriente se puede desarrollar genéricamente en series de Fourier

$$j(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta) \quad (3.4)$$

siendo los valores de sus coeficientes A_n, B_n

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} j(\theta) \cos(n\theta) d\theta \quad (3.5)$$

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} j(\theta) \sin(n\theta) d\theta \quad (3.6)$$

Además la densidad de corriente en la superficie del objeto ha de tener una contribución global nula, satisfaciendo la siguiente condición:

$$\int_S j dS = 0 \quad (3.7)$$

En nuestro caso, nos interesa sólo el potencial en el contorno. Este puede definirse como

$$V_u = u(R_0, \theta) \quad (3.8)$$

siendo su valor en el problema que nos ocupa

$$V_u(\theta) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_0}{\sigma_0} \frac{1}{n} (A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)) \quad (3.9)$$

Si ahora se introduce una perturbación circular de radio R_1 y conductividad σ_1 (fig.3.2), la solución de la ecuación de Poisson queda transformada en (Isaacson, 1986):

$$V(\theta) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_0}{\sigma_0} \frac{1 - \mu R^{2n}}{n(1 + \mu R^{2n})} (A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)) \quad (3.10)$$

donde

$$\mu = \frac{\sigma_1 - \sigma_0}{\sigma_1 + \sigma_0} = \frac{\sigma_1/\sigma_0 - 1}{\sigma_1/\sigma_0 + 1} \quad \text{y} \quad R = \frac{R_1}{R_0} \quad (3.11)$$

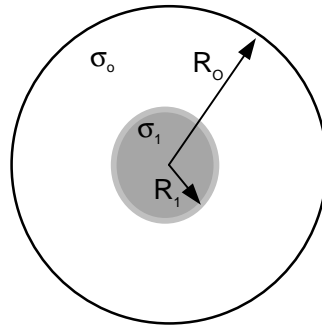


Figura 3.2. Geometría del problema con una perturbación centrada en dos dimensiones

La información referente a la perturbación, que nos permite su caracterización tanto en el valor de su radio como en el de su conductividad, está contenida en el factor diferencial entre las ecuaciones 3.9 y 3.10. Este factor ha sido denominado en la bibliografía como la información estructural (STI), siendo su expresión

$$STI = \frac{1 - \mu R^{2n}}{1 + \mu R^{2n}} \quad (3.12)$$

Como siempre se cumple que $R < 1$, el peso más importante de los diferentes armónicos en la información estructural corresponde a $n=1$, siendo muy rápida la disminución de dicha contribución al aumentar el valor de n (figura 3.3).

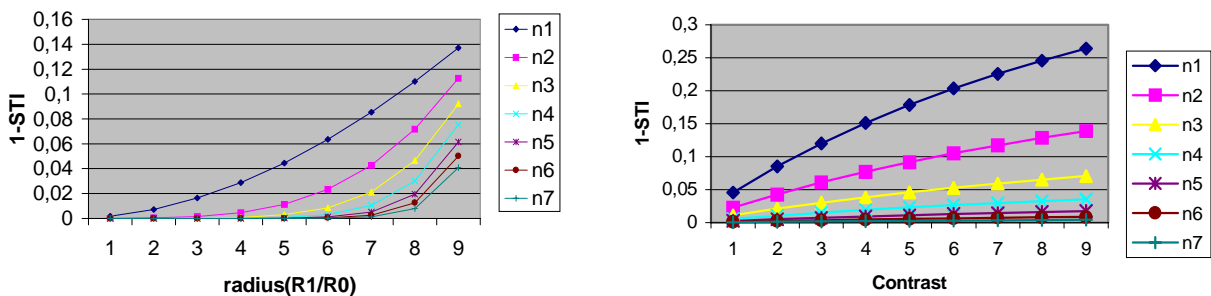


Figura 3.3. Variación del STI con el radio de la perturbación y el contraste.

El armónico de inyección para $n=1$ se denomina frecuencia angular fundamental de la inyección. Si se quiere aumentar la resolución espacial de la imagen es necesario aumentar dicha frecuencia angular, inyectando no sólo la frecuencia fundamental sino también la de sus armónicos. Será por tanto adecuado plantear el estudio de la optimización de la corriente estudiando los armónicos de la descomposición en series de Fourier de las diferentes estrategias, ya que de esta forma se podrá estudiar la optimización de la distinguibilidad, teniendo en cuenta su influencia sobre la resolución espacial del sistema.

3.2.2 Hacia la optimización del criterio de distinguibilidad. Revisión de los criterios de caracterización de los límites teóricos en EIT.

Para encontrar la expresión óptima del criterio de distinguibilidad, se realizará previamente un estudio de los conceptos que han ido apareciendo en la bibliografía que han permitido la caracterización de los límites teóricos en EIT. Estos conceptos han sido los de sensibilidad, visibilidad y resolución espacial.

En 1971, Geselowitz introdujo por primera vez el concepto de sensibilidad en las medidas de impedancia eléctrica al relacionar el cambio en la impedancia mutua, resultante de un cambio en la conductividad en una región particular de un volumen conductor. La fórmula que relaciona estos dos conceptos es

$$\Delta Z = - \int_{\nu} \Delta \sigma \frac{\nabla(\phi + \Delta\phi)}{I_{\phi}} \frac{\nabla(\psi)}{I_{\psi}} d\nu \quad (3.13)$$

donde ϕ y ψ son los potenciales medidos en dos posiciones arbitrarias en la superficie del volumen y I_{ϕ} , I_{ψ} son las corrientes inyectadas en estas dos mismas posiciones.

Fue en 1985, cuando Murai y Kagawa presentaron por primera vez la utilización la ecuación de Geselowitz (ec. 3.13) en la reconstrucción de las imágenes en EIT. En este trabajo se utilizaba una matriz de sensibilidad, los coeficientes de la cual se definían como

$$S_{ij} = \frac{\Delta Z_{ij}}{\Delta \sigma_{ij}} = \frac{\Delta V_{ij}}{\Delta \sigma_{ij}} = - \int_{i^{\text{th}} \text{ pixel}} \nabla \phi \nabla \psi d\nu \quad (3.14)$$

De esta forma se podían relacionar los cambios absolutos medidos en la superficie del objeto con los cambios absolutos en la distribución de conductividad en el volumen (ec. 3.15). Era, por tanto, una definición absoluta del concepto de sensibilidad.

$$\delta V = S \delta \sigma \quad (3.15)$$

Sin embargo, tanto en las imágenes dinámicas, como en las multifrecuencia en EIT, se representa normalmente los cambios relativos en conductividad (o resistividad). Por ello surgió la necesidad de crear una nueva matriz de sensibilidades, para la reconstrucción de imágenes, que relacionara estos cambios relativos. Un ejemplo de este tipo de matriz es la utilizada por Barber and Brown (1990) para la implementación del algoritmo de retroproyección filtrada. Se introducía de esta forma implícitamente una nueva definición de sensibilidad, una definición relativa, íntimamente ligada a la realidad de los datos reconstruidos y por tanto de las imágenes obtenidas. El desarrollo teórico y su relación con los límites en EIT fue presentado por (Seagar *et al.*,1987). En este trabajo se define la sensibilidad como la relación entre el cambio relativo en la tensión detectada en el contorno respecto al cambio relativo del contraste de conductividad

$$S_r = S = \frac{dV}{V} \bigg/ \frac{d\alpha}{\alpha} \text{ donde el contraste } \alpha \text{ es definido como } \alpha = \frac{\sigma_a}{\sigma_b} \quad (3.16)$$

Como se demuestra en la ecuación 3.17, esta definición es únicamente la versión relativa de la definición de sensibilidad utilizada por Murai y Kagawa. Si se considera que el único cambio en la conductividad se produce en la perturbación (σ_a), se llega a la relación:

$$S_r = \frac{\frac{dV}{V}}{\frac{d\alpha}{\alpha}} \cong \frac{\frac{\Delta V}{V}}{\frac{\Delta \alpha}{\alpha}} = \frac{\frac{\Delta V}{V}}{\frac{\Delta \sigma_a}{\sigma_a}} \quad (3.17)$$

La validez y aplicabilidad de esta expresión queda limitada a cambios pequeños en el contraste ($\Delta\alpha/\alpha \ll 1$). Para cuantificar de alguna manera cuál es el comportamiento cuando estas variaciones en el contraste son elevadas, en el mismo artículo, Seagar formuló un nuevo concepto: la definición de visibilidad (Q). Esta definición está basada en el mismo concepto aplicado en interferometría (Bates,1982) y cuantifica la posibilidad de visualización de una perturbación cuando se retroproyecta la imagen respecto a una referencia homogénea. Para que la expresión fuera independiente del nivel de corriente inyectado, la ecuación fue normalizada por el factor: $V(\theta)+V_u(\theta)$.

$$Q = \frac{V(\theta) - V_u(\theta)}{V(\theta) + V_u(\theta)} \quad (3.18)$$

De esta ecuación es posible extraer la relación existente entre el ruido y el concepto de visibilidad. Si tenemos un ruido en el sistema cuyo valor relativo (dV/V) excede el valor de visibilidad para unas condiciones de medida, entonces el cambio en conductividad en la región del espacio es invisible, no se puede detectar.

3.2.3 La nueva definición para el concepto de distinguibilidad.

Como ya se ha comentado, el concepto de distinguibilidad (δ) fue definido por primera vez por Isaacson como un criterio para la distinción de dos distribuciones de conductividad diferentes, sobre un cuerpo, utilizando tomografía de impedancia eléctrica. En el se decía que dos conductividades, σ_1 y σ_2 , eran distinguibles en medidas con una precisión ε si

$$\|V(\sigma_1, j) - V(\sigma_2, j)\| > \varepsilon \quad (3.19)$$

siempre considerando una densidad de corriente de norma unitaria ($\|J\|=1$).

Este criterio está relacionado con la definición absoluta del concepto de sensibilidad, ya que trabaja con los cambios absolutos en la tensión detectada. Con esta definición se ha mostrado (Gisser *et al.*, 1987), (Gisser *et al.*, 1988), (Jain *et al.*, 1995) que la inyección trigonométrica es la óptima, aunque en otros trabajos, (Köksal y Eyüboğlu, 1995), considerando la misma definición y aplicando la restricción de mantener constante la corriente total inyectada en el cuerpo, se ha llegado a la conclusión que la polar es la que mejor se comporta.

El criterio presentado por Isaacson tiene las siguientes limitaciones fundamentales: cuantifica sólo cambios absolutos en la distribución de conductividad, y las tensiones en la ecuación (3.18) son las tensiones continuas detectadas en la superficie de la sección a estudiar, mientras que en la realización física de los sistemas de EIT tendremos una discretización de esta tensión adquiriendo sólo un número limitado de tensiones diferenciales. (16,32,...). Este último punto fue estudiado por (Cheney *et al.*, 1992) que realizó la discretización de la tensión detectada, estudiando además el efecto de los electrodos detectores. La conclusión a la que llegó fue que la estrategia óptima era, también en este caso, la trigonométrica.

Como el objetivo final en tomografía de impedancia eléctrica es la obtención de una imagen que represente el cambio en la distribución de conductividad, ya sea en el tiempo (medidas dinámicas), como en el espectro de frecuencia (medidas multifrecuencia), para definir el criterio de distinguibilidad nos fijaremos en los algoritmos de retroproyección, estudiando qué criterio se debe aplicar para la distinción de los diferentes pixels debido a un cambio en la conductividad.

Mediante la técnica de retroproyección cada pixel del espacio se relaciona con las tensiones detectadas en el contorno a través de la ecuación:

$$P(x, y) = \frac{1}{N} \sum_1 \sum_m W_{1,m} \left(\frac{V_{lm}(\sigma_2, j) - V_{lm}(\sigma_1, j)}{V_{lm}(\sigma_1, j)} \right) \quad (3.20)$$

Para obtener una imagen distinta de cero, las diferencias relativas en el par l, m de tensiones diferenciales detectadas para el caso uniforme y para el caso no uniforme, han de ser superiores a la resolución de nuestro sistema. Con esta idea, íntimamente relacionada con los conceptos de visibilidad y sensibilidad relativa presentados por Seagar, se definirá el nuevo criterio de distinguibilidad como:

$$\delta_{lm} = \left\| \frac{V_{lm}(\sigma_2, j) - V_{lm}(\sigma_1, j)}{V_{lm}(\sigma_1, j)} \right\| \quad (3.21)$$

Esta nueva definición, soluciona los problemas que se planteaban en la anterior, ya que es independiente del nivel de corriente, utiliza los cambios relativos en la tensión detectada, es decir, los cambios que influyen en la reconstrucción de los *pixels* de una imagen, y además es aplicable directamente a las tensiones diferenciales detectadas.

3.2.4 Estrategia de inyección óptima en el problema centrado con el nuevo criterio de distinguibilidad.

Este nuevo criterio de distinguibilidad aporta solución a las limitaciones del presentado por Isaacson, pero debido a que su definición se puede asignar a cada uno de los pares diferenciales detectados, debemos primero estudiar sobre qué par se debe realizar la comparación de las diferentes estrategias de inyección. Desde un punto de vista conceptual la solución a esta pregunta es sencilla: se debe aplicar el criterio sobre el par que primero sufra una variación en su valor relativo, superior al ruido del sistema, al haber un cambio en la conductividad de la perturbación. Es decir, sobre el par más sensible a la variación de conductividad. De esta forma aunque éste sea el único par que sufra una variación, se habrá conseguido una imagen distinta de cero y por tanto, la visualización del cambio de conductividad. Por esto, nuestro primer estudio tiene que ir encaminado hacia la búsqueda de la tensión diferencial con más sensibilidad en cada una de las estrategias de inyección.

En la figura 3.4 se muestra los resultados del estudio de las sensibilidades para los diferentes ángulos de detección y para las tres estrategias. Se puede observar que mientras las diferencias absolutas de tensión tienen el mismo comportamiento, senoidal, en las tres inyecciones, el comportamiento relativo es muy diferente. En la inyección trigonométrica un cambio en la conductividad de la perturbación afecta por igual a todos los pares de detección. Esta estrategia uniformiza en las medidas, la influencia de los cambios de conductividad en la perturbación. Esto no ocurre para las otras dos inyecciones. En ellas siempre hay unos pares detectores más sensibles a estas variaciones que otros. Estos son los puntos (A) para la adyacente y (C) para la polar. En la inyección adyacente el par detector más sensible es el opuesto al inyector, mientras que en la polar son los dos pares simétricos que se encuentran

desfasados 90° respecto a la inyección. La discontinuidad en el punto (B) para la inyección adyacente es debido a la medida en que inyectores y detectores tienen la misma posición (medida a dos hilos de la impedancia).

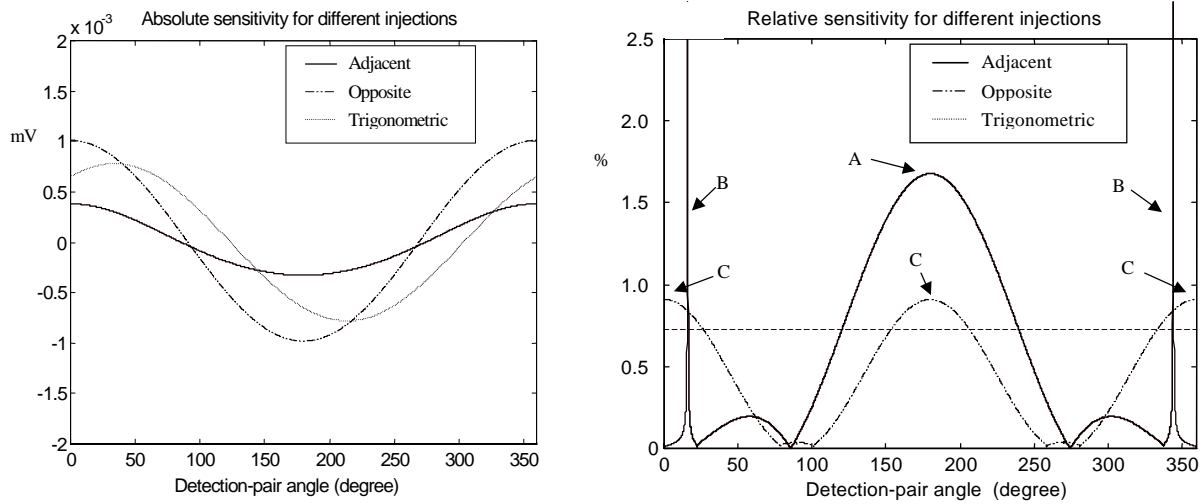
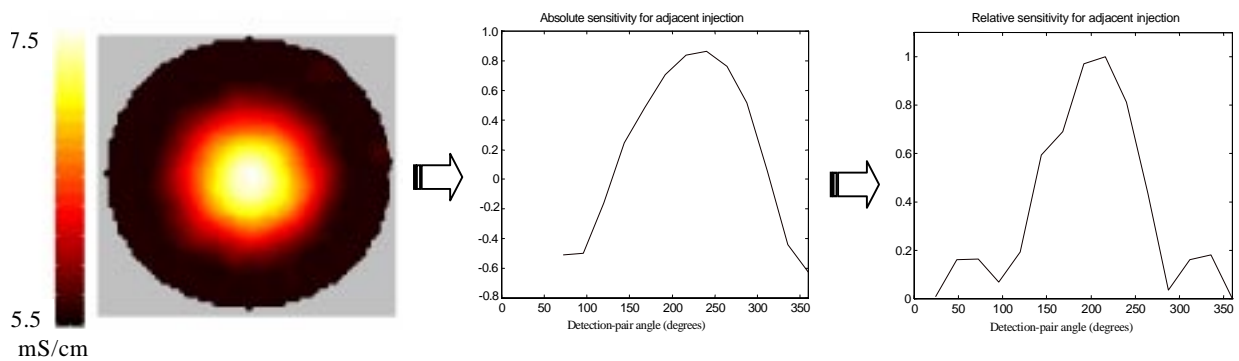
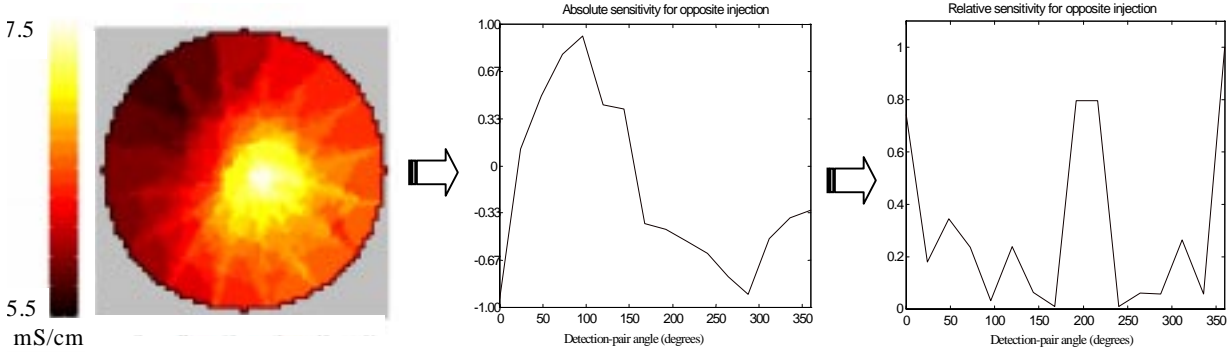


Figura 3.4 Estudio de sensibilidad para los diferentes pares diferenciales detectores

Para validar experimentalmente estos resultados teóricos se han realizado medidas experimentales de perturbaciones centradas con el sistema de tomografía de impedancia eléctrica TIE-1 (Rosell, 1989). La configuración de este sistema permite implementar tan sólo las inyecciones adyacente y polar por lo que la comparación sólo se realizará para estas dos estrategias de inyección. Como se observa en la figura 3.5 los resultados corroboran perfectamente lo encontrado teóricamente.



a) Adyacente



b) inyección polar

Figura 3.5 Estudio experimental de la sensibilidad en inyección adyacente y polar

Si se aplica el nuevo criterio de distinguibilidad al par diferencial más sensible para cada una de las inyecciones, encontramos que nuestro problema se reduce a estudiar el comportamiento relativo de la tensión detectada V_d para las tres inyecciones (fig 3.6) con y sin perturbación.

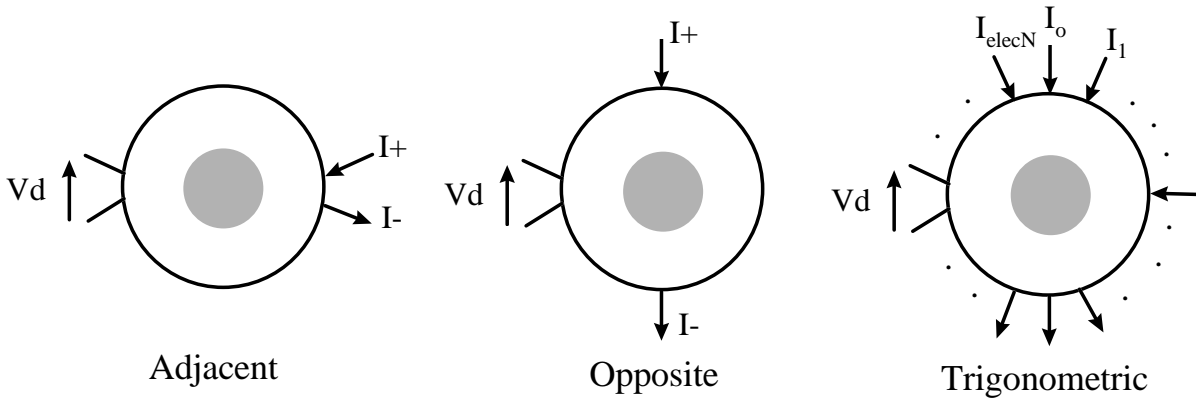


Figure 3.6 Pares diferenciales sobre los que aplicar el nuevo criterio de distinguibilidad

Las expresiones para la inyección adyacente y la polar con el nuevo criterio de distinguibilidad y para un sistema de tomografía con N_{elec} electrodos son:

$$\delta_{op} = \left\| \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{2\mu R^{2n}}{1 + \mu R^{2n}} \sin\left(n \frac{(N_{elec} - 1)\pi}{N_{elec}}\right) \sin\left(n \frac{(N_{elec} - 2)\pi}{2N_{elec}}\right)}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(n \frac{(N_{elec} - 1)\pi}{N_{elec}}\right) \sin\left(n \frac{(N_{elec} - 2)\pi}{2N_{elec}}\right)} \right\| \quad (3.22)$$

para la inyección polar, y

$$\delta_{ad} = \left\| \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{2\mu R^{2n}}{1 + \mu R^{2n}} \sin\left(n \frac{(N_{elec} - 1)\pi}{N_{elec}}\right) \sin\left(n \frac{\pi}{N_{elec}}\right)}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(n \frac{(N_{elec} - 1)\pi}{N_{elec}}\right) \sin\left(n \frac{\pi}{N_{elec}}\right)} \right\| \quad (3.23)$$

para la estrategia adyacente.

En la inyección trigonométrica se ha escogido la frecuencia fundamental ($n=1$), por tener una mayor contribución sobre la información estructural, resultando, como se había comprobado previamente, una distinguibilidad constante para todas las medidas y de valor

$$\delta_{\text{trig}} = \frac{2\mu R^2}{1 + \mu R^2} \quad (3.24)$$

Con estas ecuaciones se demuestra que la inyección óptima es en todos los casos la adyacente. Por ejemplo, considerando un sistema de tomografía de 16 electrodos y una perturbación con una relación de radios $R_1/R_0=0,2$ y una relación de conductividad $\sigma_1/\sigma_0=1,2$, la estrategia adyacente es aproximadamente 2 veces más sensible que la opuesta y 4 veces más que la trigonométrica. Para cuantificar de una manera más general la mejora de la inyección adyacente sobre las otras estrategias, en la figura 3.7 se presenta la evolución de este criterio para una variación en la relación de radios y en la de conductividades.

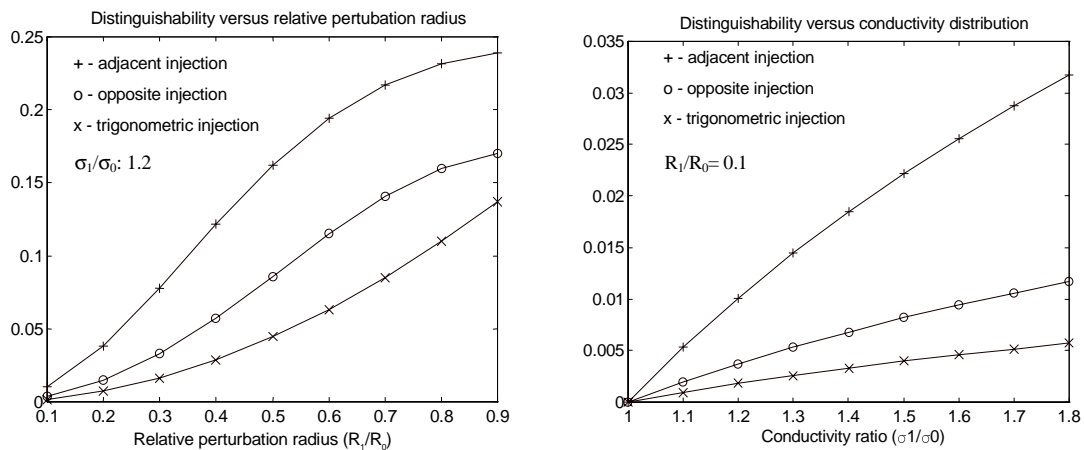


Figura 3.7 Variación de la distinguibilidad con el radio y el contraste de una perturbación circular centrada

3.2.5 Extensión al problema circular no centrado.

Se puede demostrar (Pidcock *et al.*, 1995), que cualquier problema en dos dimensiones, con una perturbación circular descentrada, puede ser convertido en un problema centrado mediante una transformación conforme. Si se tiene una perturbación de radio R_1 centrada en el punto (r_C, ϕ) , con una conductividad constante, de valor σ_1 introducida en una distribución de conductividad σ_0 y de radio R_0 (fig.3.8), se puede transformar en un nuevo problema centrado, con el uso de la siguiente transformación:

$$w = \left(\frac{ze^{-i\varphi} - cR_0}{cze^{-i\varphi} - R_0} \right) R_0 \quad (3.25)$$

donde c es la solución con $|c| < R_0$ de la ecuación:

$$r_c R_0 c^2 - (R_0^2 + r_c^2 - R_1^2)c + r_c R_0 = 0 \quad (3.26)$$

El nuevo radio equivalente para la perturbación centrada es:

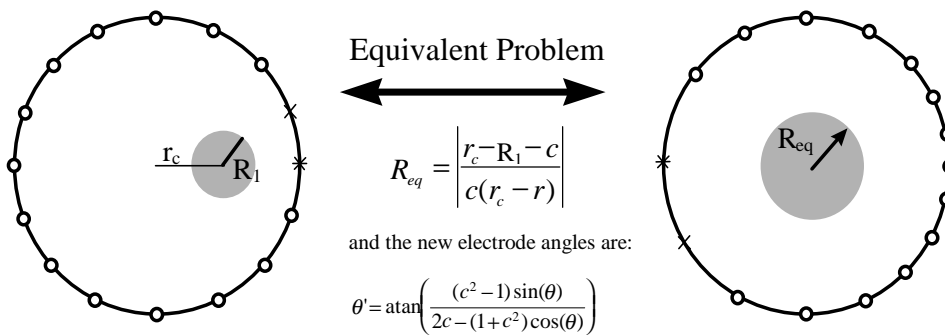
$$R_{eq} = \left| \frac{r_c - R_1 - cR_0}{c(r_c - R_1) - R_0} \right| R_0 \quad (3.27)$$

Esta expresión se puede simplificar normalizando las distancias respecto al radio exterior. Si se hace $R_0=1$, queda

$$R_{eq} = \left| \frac{r_c - R_1 - c}{c(r_c - R_1) - 1} \right| \quad (3.28)$$

La posición de los electrodos en el nuevo problema equivalente se sigue conservando sobre el círculo de radio unidad, siendo su única variación su diferente localización angular. Esta nueva localización es (Frangi,1996):

$$\theta' = \text{atan} \left(\frac{(c^2 - 1) \sin(\theta)}{2c - (1 + c^2) \cos(\theta)} \right) \quad (3.29)$$



Where c is the solution with $|c| < 1$ of the equation: $r_c c^2 - (1 + r_c^2 - R_1^2)c + r_c = 0$

Figura 3.8 Transformación del problema descentrado con una perturbación circular al problema centrado.

En la figura 3.9 se muestra cuál es la evolución de la posición de los electrodos y del valor del radio equivalente para diferentes valores de r_c , para el caso de una perturbación de radio $R_1=0,1$.

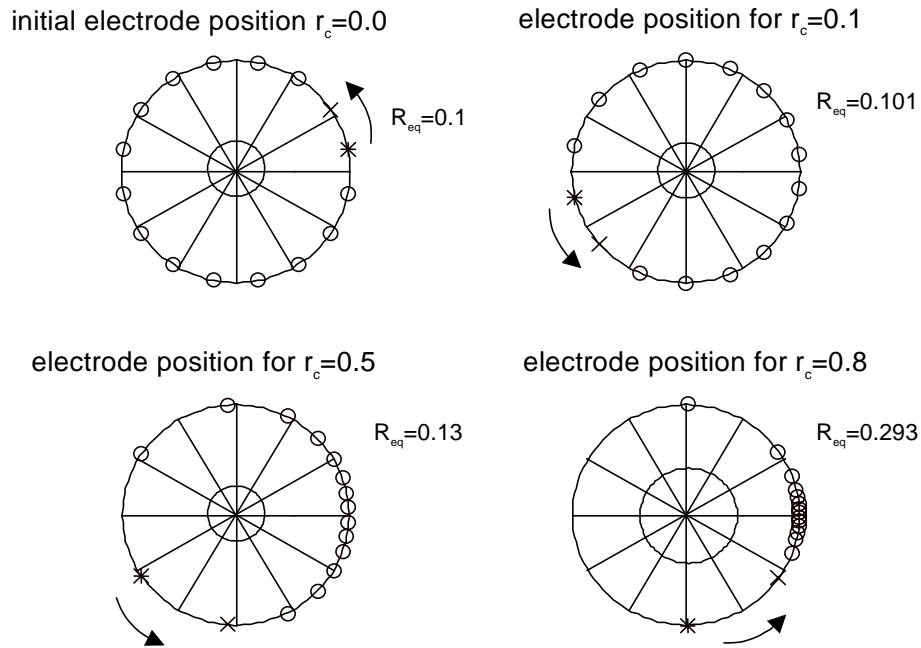


Figura 3.9 Desplazamiento de la posición angular de los electrodos con la aplicación de la transformación conforme

Aplicando esta transformación, podemos calcular fácilmente la solución para el problema no centrado, ya que se reduce a un problema centrado, con las únicas variaciones del valor del radio de la conductividad y de la posición de los electrodos. Con esta idea es posible el cálculo de las expresiones de la distinguibilidad para las diferentes estrategias de inyección.

Su expresión genérica para las estrategias adyacente y polar es

$$\delta_{lm} = \left\| \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\alpha_n)}{n} \frac{2uR_{eq}^{2n}}{1+uR_{eq}^{2n}} \sin(n\beta_n)}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\alpha_n)}{n} \sin(n\beta_n)} \right\| \quad (3.30)$$

donde α_n y β_n son la localización angular de los electrodos inyectoros y detectores respectivamente, coincidiendo la posición de los detectores para las dos inyecciones. En la implementación de la estrategia trigonométrica es necesario, al haber un desplazamiento de la posición de los electrodos, realizar un muestreo, en la posición de los diferentes electrodos, de la función continua senoidal, quedando la expresión de la distinguibilidad como

$$\delta_{lm} = \frac{\sum_{k=1}^{N_{elec}/2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\mu R_{eq}^{2n}}{1 + \mu R_{eq}^{2n}} \frac{\sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{N_{elec}}\right)}{n} \sin(n\alpha_k) \sin(n\beta_n)}{\sum_{k=1}^{N_{elec}/2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{N_{elec}}\right)}{n} \sin(n\alpha_k) \sin(n\beta_n)} \quad (3.31)$$

En la figura 3.10 se muestra la evolución del factor de distinguibilidad para las tres inyecciones respecto a la posición de la perturbación (se ha escogido de nuevo en la inyección trigonométrica la solución para el armónico fundamental, $n=1$). Se observa que cuando la perturbación se acerca hacia la posición de los electrodos inyectoros las tres estrategias tienen un comportamiento similar, ya que los electrodos tienden a cerrarse hacia las mismas posiciones en el espacio transformado. La distinguibilidad para la inyección adyacente es simétrica, como indica el teorema de reciprocidad. En oposición, las inyecciones trigonométricas y polares tienen una menor sensibilidad cuando la perturbación se acerca a los electrodos detectores.

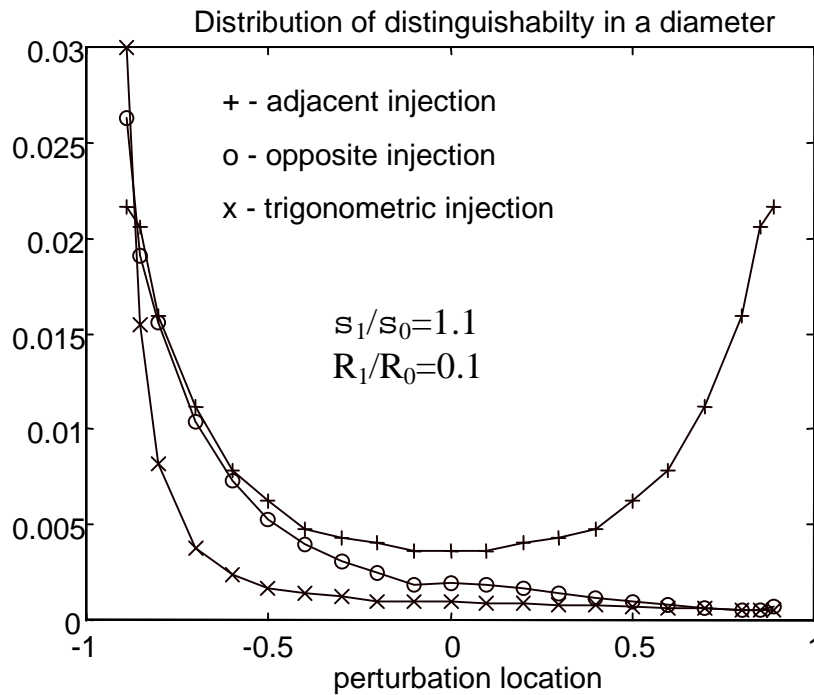


Figura 3.10 Distinguibilidad en función de la posición de la perturbación

3.2.6 Comparación de los límites teóricos para las diferentes estrategias de inyección.

Con el nuevo criterio de distinguibilidad se ha demostrado que la adyacente es la inyección óptima. Para completar la comparación de las diferentes estrategias se realizará el estudio de los límites teóricos que nos definen en EIT cada una de ellas. La estructura que se seguirá para realizar este estudio es similar a la utilizada por Seagar en (Seagar *et al.*,1987). En ese trabajo se mostraban los estudios de sensibilidad y visibilidad aplicados a la inyección trigonométrica. Aquí se realizarán los mismo estudios pero generalizando sus expresiones para cualquier tipo de inyección que admita un desarrollo en series de Fourier, particularizando para las tres estrategias comparadas en este capítulo.

En la ecuación 3.16 se definía el concepto de sensibilidad relativa como el cambio relativo que sufría la tensión detectada al producirse un cambio relativo en el contraste de la perturbación. Si se tiene un desarrollo en series de Fourier de la densidad de corriente inyectada $J(\theta)$ como el mostrado en la ecuación 3.4, la expresión genérica de la sensibilidad relativa será

$$S_r = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\alpha R^{2n}}{[(\alpha+1) + (\alpha-1)R^{2n}]^2} \frac{1}{n} (A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta))}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha+1) - (\alpha-1)R^{2n}}{[(\alpha+1) + (\alpha-1)R^{2n}]} \frac{1}{n} (A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta))} \quad (3.32)$$

donde A_n y B_n son los coeficientes de Fourier de la corriente inyectada. Los coeficientes de Fourier para las tres estrategias estudiadas para el problema con una perturbación centrada son los recogidos en la tabla 3.1

	Polar	Trigonométrica	Adyacente
Coeficientes de Fourier	$B_n = \frac{2}{\pi} \sin(n \frac{\pi}{2})$ $A_n = 0 \quad \forall n \neq 0$	$B_1 = 1 \quad A_1 = 0$ $B_n = A_n = 0 \quad \forall n > 1$	$B_n = \frac{2}{\pi} \sin(n \frac{\pi}{N_{elec}})$ $A_n = 0 \quad \forall n \neq 0$

Tabla 3.1. Coeficientes de Fourier para las diferentes inyecciones

Se ha mostrado en la figura 3.4 que la sensibilidad relativa es constante para cualquier par detector de electrodos en la inyección trigonométrica. Por esta razón el estudio de la sensibilidad relativa y de sus límites teóricos es independiente realizarlo tanto en la expresión continua de la tensión detectada, como en cualquiera de las tensiones diferenciales detectadas en el contorno. Esto no ocurre si la inyección es polar o adyacente. En estas estrategias de inyección la cuantificación de la sensibilidad es diferente en función de par de electrodos elegidos. Esto nos obliga a aplicar esta fórmula de sensibilidad, tal como se ha hecho para el concepto de distinguibilidad, no a la tensión continua detectada, como Seagar

presentó en su trabajo, sino al par diferencial más sensible a la variación de conductividad en la perturbación. Lo resultados de esta comparación se pueden observar en las figuras 3.11 y 3.12, donde se muestra la evolución de la sensibilidad con el radio de la perturbación y el contraste respectivamente.

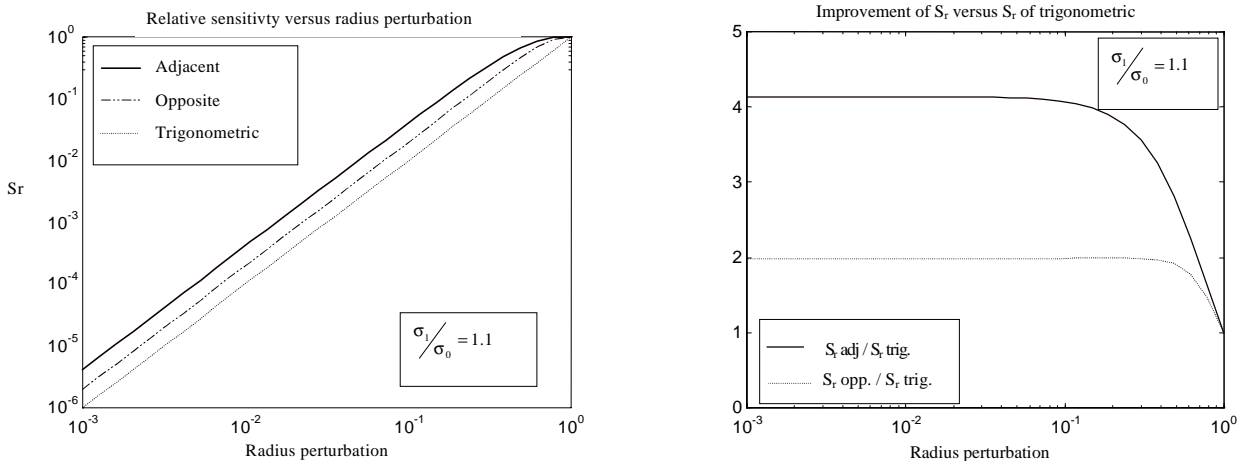


Figura 3.11 Evolución de la sensibilidad relativa con el radio de la perturbación para las tres estrategias de inyección

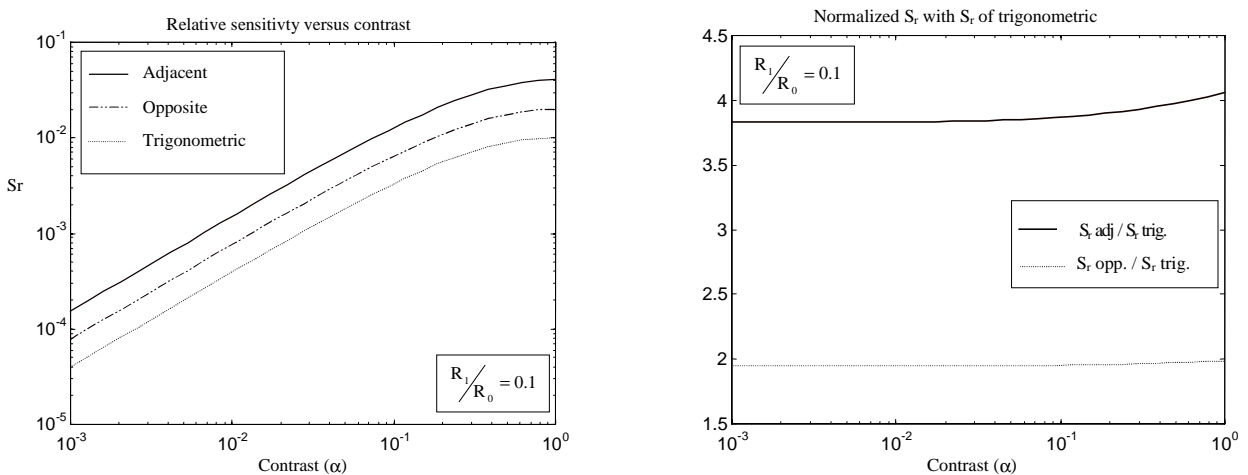


Figura 3.12 Evolución de la sensibilidad relativa con el contraste de la perturbación para las tres estrategias de inyección

Se puede observar que el comportamiento de las curvas es similar en las tres estrategias de inyección. En una perturbación con radio 0,1 y contraste 1,1, se obtiene aproximadamente una mejora en la sensibilidad de la inyección adyacente en un factor de 2 respecto a la polar y en un factor de 4 respecto al trigonométrica. Estas relaciones son bastante invariables al cambio en el contraste, si el radio permanece constante (fig.3.12). Si es el contraste el que

permanece constante y se varía el radio, se observa el mismo comportamiento salvo cuando la perturbación aumenta su radio, en este caso, las tres estrategias tienden hacia el valor unitario de sensibilidad, alcanzando, como es lógico, la misma relación de sensibilidad cuando el radio de la perturbación coincide con la sección tomográfica (fig.3.11).

El uso de múltiples medidas independientes ($n > 1$) en la estrategia trigonométrica de inyección hace aumentar su sensibilidad a cambios en la perturbación. En (Seager *et al.*, 1987) se cuantificó esta mejora, comprobándose que el incremento no es significativamente alto al incrementar el número de medidas independientes, incluso cuando la resolución espacial es relativamente baja, ($R_2/R_1=0,1$). Por ejemplo, inyectando los nueve primeros armónicos, si se tiene una perturbación de radio 0,8, el incremento de sensibilidad aumenta sólo en un factor de 1,3. Por tanto, el beneficio conseguido es menor que el que se conseguiría con el cambio de estrategia de inyección, empeorando, a cambio, la velocidad del sistema de tomografía al tener que inyectar un mayor número de señales.

El estudio de los límites que el concepto de visibilidad nos fija, en función del contraste y de la resolución espacial, se realizará de forma análoga al de la sensibilidad relativa. Seager cuantificó el concepto de visibilidad tal como se ha mostrado en la ecuación 3.18. El utilizó el factor $V(\theta)+V_u(\theta)$, para normalizar la expresión y conseguir así independencia del nivel de corriente inyectado. Si en lugar de escoger este factor de normalización escogemos $V_u(\theta)$, sólo hay un cambio en un factor de aproximadamente 2, obtenemos la siguiente expresión para la visibilidad

$$Q = \frac{V(\theta) - V_u(\theta)}{V_u(\theta)} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{2(\alpha-1)R^{2n}}{(\alpha+1) + (\alpha-1)R^{2n}} (A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta))}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta))} \quad (3.33)$$

Los resultados comparativos para las tres estrategias de inyección se pueden ver en las figuras 3.13 y 3.14.

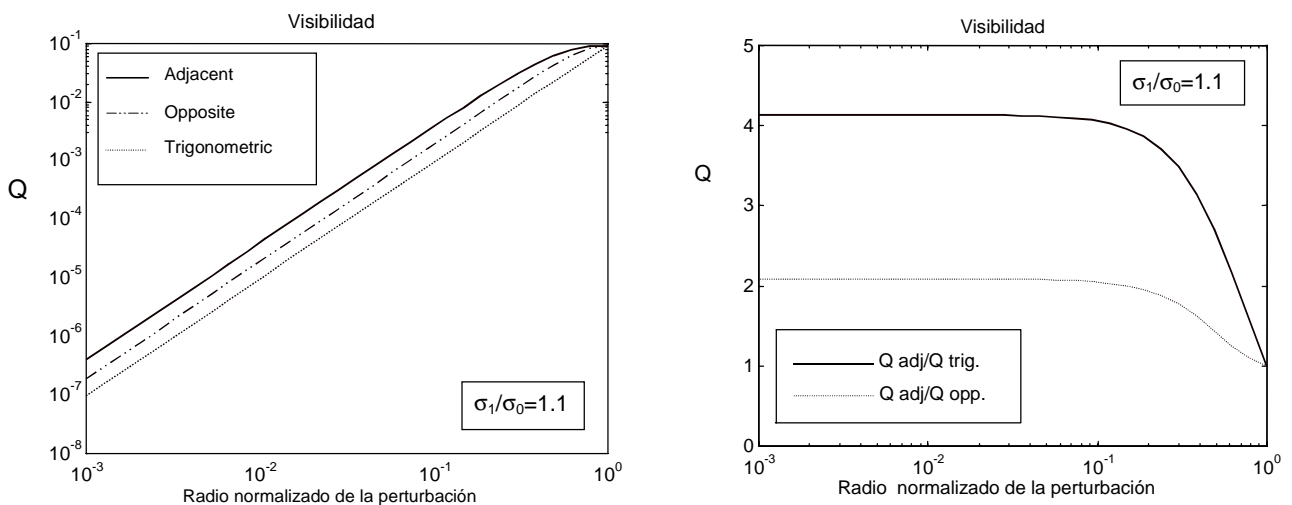


Figura 3.13 evolución de la visibilidad con el radio normalizado de la perturbación

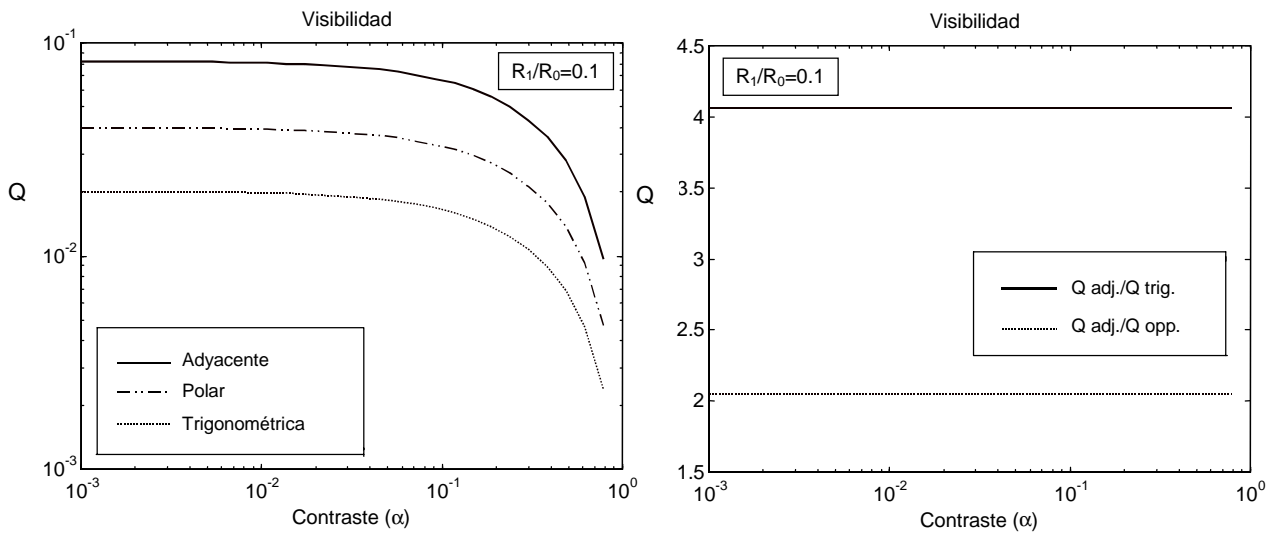


Figura 3.14 Evolución de la visibilidad con el contraste de la perturbación

Como puede observarse tanto la evolución de la visibilidad con el contraste y el radio de la perturbación, como las respectivas comparaciones entre estrategias de inyección muestran resultados similares que los hallados para la sensibilidad relativa.

Tanto para la sensibilidad como para la visibilidad se ha estudiado el caso con una perturbación centrada. Si se quisiera ampliar para perturbaciones no centradas, únicamente se tendría que aplicar la misma transformación conforme que la utilizada para la distinguibilidad. Se puede demostrar que el comportamiento al desplazar la perturbación por el diámetro de la sección tomográfica, tanto por lo que respeta a la sensibilidad como a la visibilidad, es similar al mostrado en el caso de la distinguibilidad.

3.2.7 Otros factores a considerar en la selección de la estrategia de inyección.

Resolución espacial y distribución de sensibilidad.

La estrategia adyacente es la óptima con el criterio de distinguibilidad propuesto. Además se ha comprobado que mejora los límites teóricos en EIT, tanto en sensibilidad como en visibilidad. Podemos ahora, por tanto, para completar este estudio mirar si aporta alguna ventaja más la utilización de la inyección adyacente sobre el resto de inyecciones.

Si se considera el caso genérico de aplicar una distribución de corriente, $J(\theta)$, en el contorno y ésta tiene un desarrollo en series de Fourier tal como indica la ecuación 3.4, la tensión detectada será de la forma

$$V(\theta) = k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{n} \cos(n\theta) + \frac{B_n}{n} \sin(n\theta) \quad \text{donde } k = \frac{R_0}{\sigma_0} \quad (3.34)$$

Por otro lado, se sabe que la resolución espacial aumenta, cuando aumenta la frecuencia espacial de la excitación (Boone *et al.*, 1997). Por ejemplo, una inyección trigonométrica con $\sin(2\theta)$ tendría más resolución espacial que una con $\sin(\theta)$. Por tanto, si se pretende aumentar la resolución espacial, incrementando así mismo la contribución de los armónicos de la información estructural, será necesario aplicar una distribución de corriente cuyos componentes de frecuencia angular (A_n , B_n) incrementen linealmente en amplitud con la frecuencia angular, ya que de este modo se compensará el factor $1/n$ que multiplica a dichos factores como se observa en la ecuación 3.34. Esta distribución puede obtenerse si lo que se aplica es un dipolo de corriente (Barber y Brown, 1987). La mejor aproximación de esta configuración es el uso de una estrategia de inyección adyacente. Siendo ésta una aproximación mejor cuanto mayor sea el número de electrodos considerados. En la figura 3.15 se presenta la evolución del factor A_n/n para las diferentes estrategias de inyección.

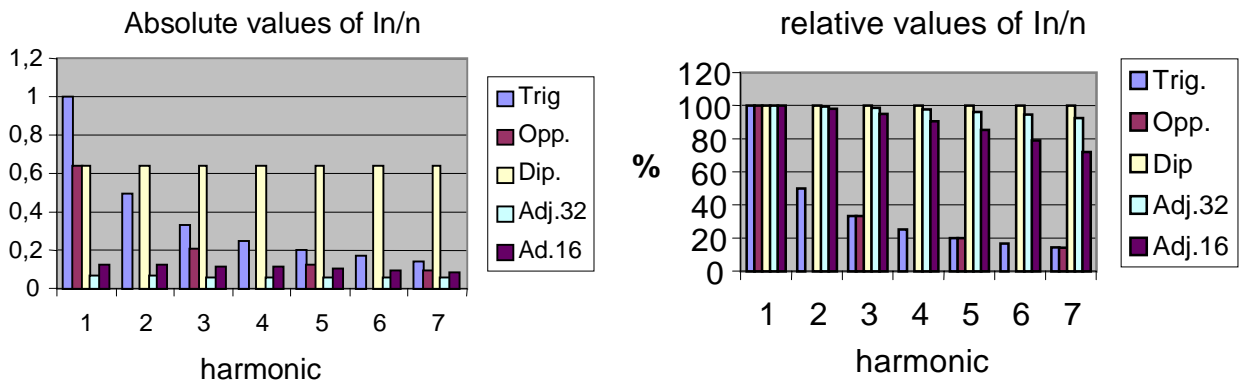


Figura 3.15 Evolución de los coeficientes de Fourier en las diferentes estrategias de inyección

Como se observa, aunque los valores absolutos son menores para la inyección adyacente su distribución al aumentar el número de armónicos es más lineal. Se puede decir por tanto, que la inyección adyacente proporciona una más uniforme distribución de la relación señal a ruido para los diferentes armónicos de la frecuencia angular fundamental de inyección, proporcionando de esta forma una mayor resolución espacial.

Con la inyección adyacente, la variación del potencial en la vecindad de los electrodos inyector es mayor que en posiciones más alejadas. A la vista de esto se pondría pensar que esta inyección tuviera la relación, entre la sensibilidad en los extremos y la sensibilidad en el centro, mayor que cualquier otra estrategia. Sin embargo, como se demostró teóricamente (Rosell, 1989) esto no es así, sino que la inyección adyacente resulta más homogénea que la polar en el espacio de la sección. Para validar estos estudios, se han realizado medidas experimentales con el sistema semi-paralelo TIE1-sys, en un tanque de disolución salina de 20 cm de diámetro, y con una perturbación de 2 cm. Las matrices adquiridas se han reconstruido mediante diferentes algoritmos de reconstrucción: retroproyección no ponderada para las medidas polares, y retroproyección no ponderada, ponderada y exponencial para las

mediadas adyacentes. En la figura 3.16 se puede observar la resistividad reconstruida para el mismo objeto, situado a lo largo del diámetro de la sección y reconstruido con los diferentes algoritmos de reconstrucción. Como puede observarse, la distribución en el valor del máximo calculado para la perturbación sufre menos variación para la inyección adyacente que para la polar, independientemente del algoritmo utilizado para obtener la imagen.

El problema fundamental de la inyección adyacente son los bajos niveles de tensión detectados. Esto nos obliga a diseñar un sistema con unos bajos niveles de ruido y alto rechazo a los errores no sistemáticos como pueda ser el rechazo en modo común. Sin embargo, si nuestro sistema tiene una buena relación señal a ruido, después de la amplificación, la resolución real obtenida en el conversor analógico digital puede ser mejor.

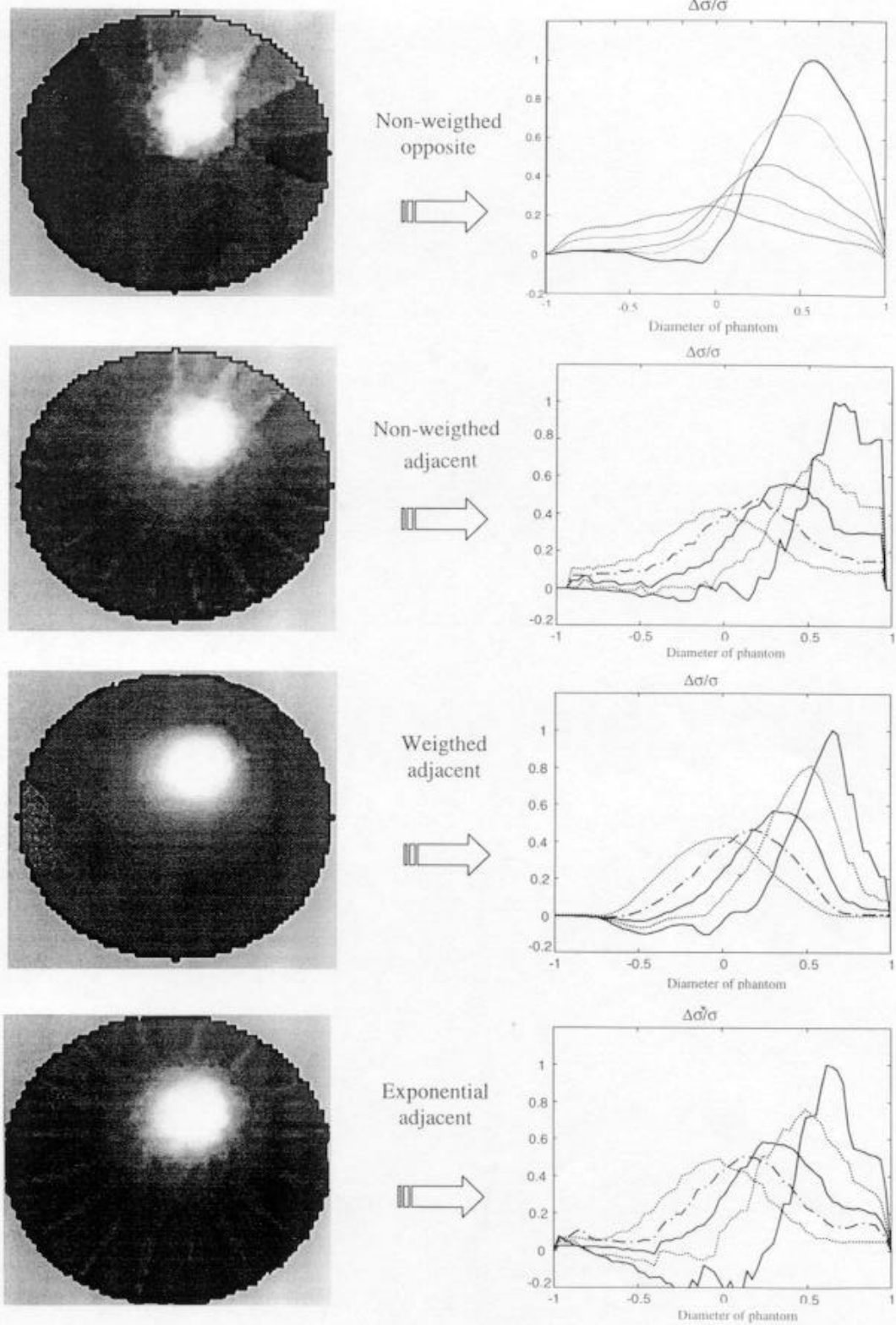


Figura 3.16 Perfiles reconstruidos de la resistividad de una perturbación para los diferentes algoritmos de reconstrucción y las estrategias de inyección polar y adyacente

3.2.8 Influencia de la tercera dimensión en las medidas de tomografía de impedancia eléctrica en dos dimensiones

El último punto que se tratará en este apartado será el de la influencia de la tercera dimensión de los objetos en nuestras medidas de tomografía de impedancia. Este será un punto interesante ya que ésta será una limitación siempre existente en las medidas *in-vivo*, que es donde se pretende realizar la aplicación de las imágenes paramétricas. Para simplificar el problema, éste se resolverá para una geometría cilíndrica, tanto en el caso homogéneo (fig. 3.17) como en el caso de tener una perturbación centrada, también circular. (fig 3.18).

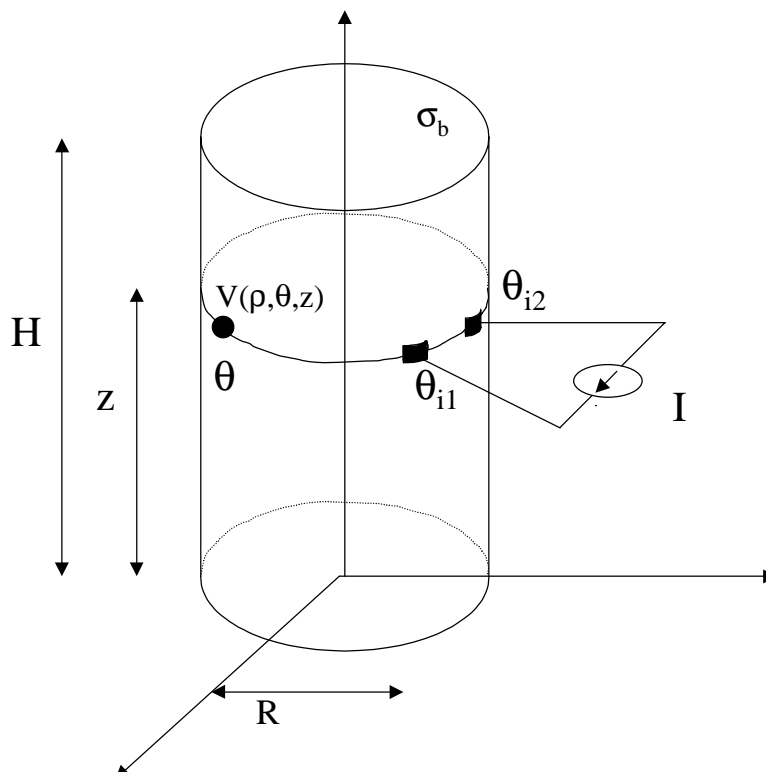


Figura 3.17 Problema en 3D: Cilindro homogéneo

Si suponemos el caso de un cilindro homogéneo de altura H, y un plano bidimensional situado a una altura constante z, el potencial a esta altura en cualquier punto exterior del cilindro (fig 3.17) vendrá dado por la expresión

$$V(R, \theta, z) = \frac{I}{\sigma \pi H R} \ln \left| \frac{\sin\left(\frac{\theta_{i2} - \theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta_{i1} - \theta}{2}\right)} \right| + \frac{2I}{\sigma \pi H R} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\lambda_n} \frac{I_m(\lambda_n)}{I_m(\lambda_n)} \cos^2(\lambda_n z) (\cos(m(\theta_{i1} - \theta)) - \cos(m(\theta_{i2} - \theta))) \right\} \quad (3.35)$$

donde

$$\bar{H} = \frac{H}{R}, \quad \bar{z} = \frac{Z}{R}, \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{H} \quad (3.36)$$

y I es la corriente inyectada e I_m la función de Bessel modificada de primera especie y orden m .

De igual forma es posible solucionar el problema en el caso de tener dos cilindros centrados y concéntricos de distinta conductividad (fig.3.18). En este caso el potencial en un punto arbitrario a una altura z es

$$\begin{aligned} V(R, \theta, z) = & \frac{I}{\sigma_b \pi \bar{H} R} \sum_{m=1}^{\infty} Coeff_{0m} [\cos(m(\theta_{i1} - \theta)) - \cos(m(\theta_{i2} - \theta))] + \\ & + \frac{2I}{\sigma_b \pi \bar{H} R} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} Coeff_{nm} \cos^2(\lambda_n \bar{z}) [\cos(m(\theta_{i1} - \theta)) - \cos(m(\theta_{i2} - \theta))] \end{aligned} \quad (3.37)$$

donde

$$\begin{aligned} Coeff_{0,m} &= \frac{1}{m} \frac{(\sigma_b + \sigma_p) + (\sigma_b - \sigma_p) r_p^{2m}}{(\sigma_b + \sigma_p) - (\sigma_b - \sigma_p) r_p^{2m}} \\ Coeff_{nm} &= \frac{1}{\lambda_n} \frac{(\sigma_p - \sigma_b) K_m(\lambda_m) + I_m(\lambda_n) \left[\sigma_b \frac{K'_m(\lambda_n r_p)}{I'_m(\lambda_n r_p)} - \sigma_p \frac{K_m(\lambda_n r_p)}{I_m(\lambda_n r_p)} \right]}{(\sigma_p - \sigma_b) K'_m(\lambda_m) + I'_m(\lambda_n) \left[\sigma_b \frac{K'_m(\lambda_n r_p)}{I'_m(\lambda_n r_p)} - \sigma_p \frac{K_m(\lambda_n r_p)}{I_m(\lambda_n r_p)} \right]} \end{aligned}$$

$$\bar{H} = \frac{H}{R_b}, \quad \bar{z} = \frac{z}{R_b}, \quad r_p = \frac{R_p}{R_b}, \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{H} \quad (3.38)$$

y

I es la corriente inyectada, e I_m , K_m son las funciones de Bessel de 1ª y 2ª especie respectivamente.

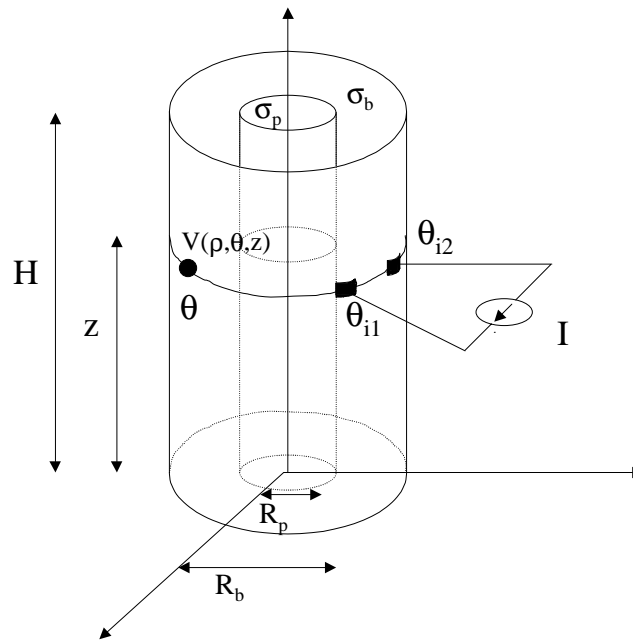


Figura 3.18 Problema en 3D: cilindros concéntricos

A partir de las ecuaciones (3.35) y (3.37) es posible reproducir el estudio realizado para dos dimensiones, de los límites teóricos en tomografía de impedancia eléctrica pero aplicado ahora en tres dimensiones. Como ejemplo, y dado que nuestro estudio se centrará únicamente en imágenes en dos dimensiones, se presentará, en la figura 3.19, cuál es la influencia en la cuantificación de la tensión diferencial detectada con esta tercera dimensión, presentando en concreto la evolución de la variación relativa de la tensión diferencial detectada con la altura normalizada respecto al radio del cilindro exterior.

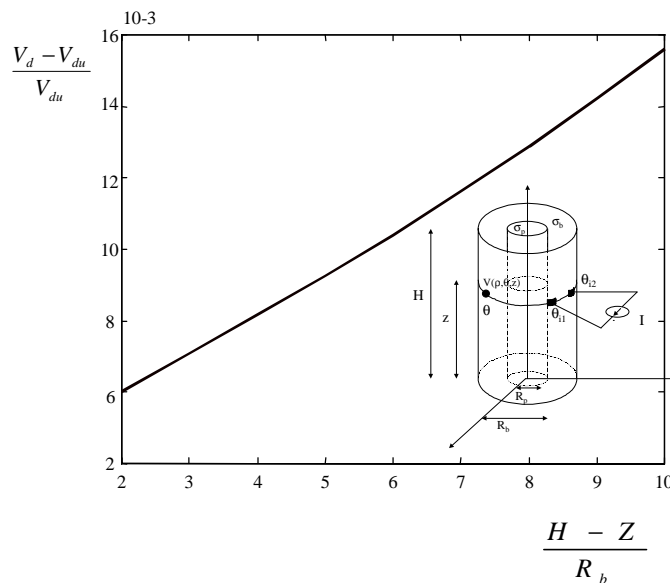


Figura 3.19 Evolución, con la altura de la perturbación, de la variación relativa de la tensión diferencial detectada en el par diferencial con más sensibilidad con una estrategia de inyección adyacente

Como puede observarse, a medida que la altura relativa aumenta, también lo hace el incremento relativo de tensión diferencial detectada. Este efecto produce un error en la cuantificación espacial de la impedancia, si el objeto a detectar tiene una variación en su altura a lo largo del plano donde se realiza la tomografía.

Para desarrollar los trabajos aquí presentados y para la realización de futuros trabajos teóricos que necesiten solucionar el problema directo en dos o tres dimensiones, así como el empleo de algoritmos de retroproyección, se ha desarrollado un software (fig. 3.20), que recogiendo el desarrollo matemático realizado en la solución del problema directo, así como los algoritmos que ya estaban implementados (Dávila, 1989), (Morón,1996) y (Frangi,1997), permite solucionar más cómodamente estos problemas.

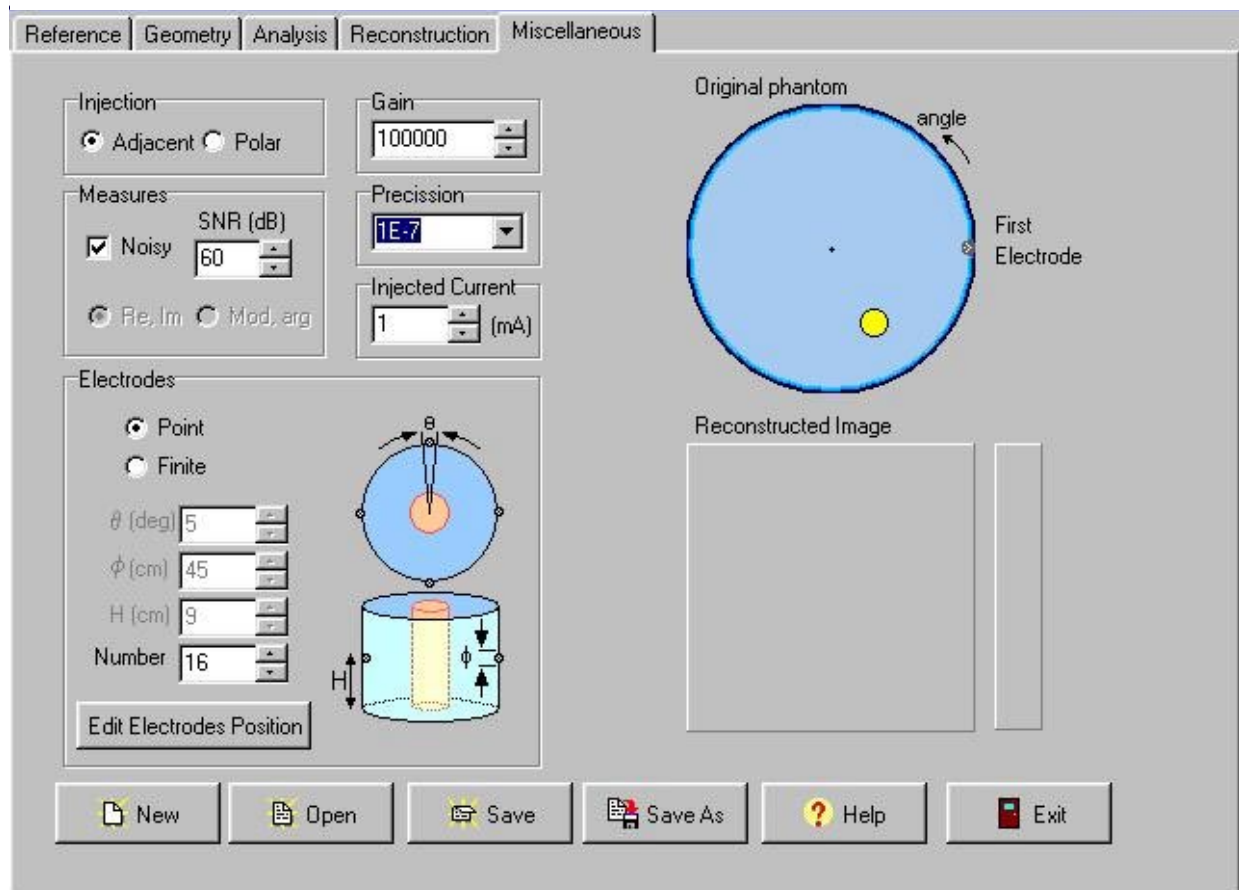


Figura 3.20 Software desarrollado para la solución de los problemas directo e inverso en tomografía de impedancia eléctrica

3.3 Problema inverso: reconstrucción de imágenes en tomografía de impedancia eléctrica

3.3.1 Introducción

El objetivo de los métodos de reconstrucción es la obtención de la distribución de conductividad en la sección del cuerpo que se está estudiando, a partir de los datos de la distribución de potencial y corriente obtenidos en la superficie. Es por tanto necesario la resolución de un problema inverso no lineal, por lo que las soluciones para su resolución pasaran o bien por la aproximación lineal de la ecuación de Poisson o bien por la utilización de métodos iterativos.

En este apartado nos centraremos únicamente en la reconstrucción de imágenes en dos dimensiones. Esto supone realizar la aproximación que la corriente inyectada sólo circulará por la sección a medir. Se ha intentado salvar esta limitación desarrollando algoritmos de reconstrucción en tres dimensiones (Olivé, 1993), pero su complejidad ha llevado a resultados que en muchas ocasiones se han alejado de la distribución de conductividad real, aumentando significativamente el tiempo de procesado. Una limitación clara que tienen los algoritmos de reconstrucción es el bajo número de medidas independientes con las que se pretende realizar la reconstrucción. En un sistema de tomografía de impedancia eléctrica de N electrodos, utilizando una estrategia de inyección adyacente y depreciando las medidas a dos y tres hilos se obtienen $N \cdot (N-3)/2$ tensiones independientes (104 para un sistema EIT de 16 electrodos). Esto hará que frente a otro instrumental médico aplicado a la imagen, como la resonancia magnética nuclear o la tomografía computerizada, sea un sistema de muy baja resolución.

El objetivo de este apartado es la revisión de los diferentes métodos de reconstrucción de imágenes en EIT propuestos hasta el presente, así como sus limitaciones teóricas y su influencia sobre la obtención de imágenes paramétricas. Una consideración importante es que muchos de los algoritmos presentados en la bibliografía han sido únicamente verificados a nivel de simulación, siendo pocos los algoritmos que han sido probados con medidas reales sobre phantoms y menos aún con medidas *in-vivo* sobre humanos, por lo que éste será un punto importante a incidir en la presentación de los algoritmos utilizados.

3.3.2 Métodos de reconstrucción iterativos

Existe toda una serie de métodos basados en la discretización del objeto y el cálculo de la imagen a partir de la resolución del sistema de ecuaciones no lineales que caracteriza el problema. Son métodos iterativos y por tanto lentos, que pueden trabajar con cualquier conjunto independiente de medidas. Los más desarrollados son los métodos basados en el algoritmos de Newton-Raphson (Yorkey *et al.*, 1987), en estudios de sensibilidad (Murai y

Kagawa, 1985; Tarassenko y Rolfe, 1984), el de perturbación (Kim *et al.*, 1989) o el método adaptativo (algoritmo NOSER), presentado por Isaacson y Edic (1992).

A modo de ejemplo de estos algoritmos se explicará brevemente el basado en el algoritmo de Newton-Raphson. Este método fue propuesto en 1981 por Dines y Lytle, pero su estudio y desarrollo principal corrió a cargo de Yorkey (1986). Se basa en la asociación de cada pixel de la imagen con una red resistiva. Fijando las tensiones en el exterior se estiman las corrientes a la salida, se compara esta estimación con las medidas reales y la diferencia es usada para calcular la nueva conductividad de la imagen. Este proceso es realizado mediante el método iterativo de Newton- Raphson (fig 3.20)

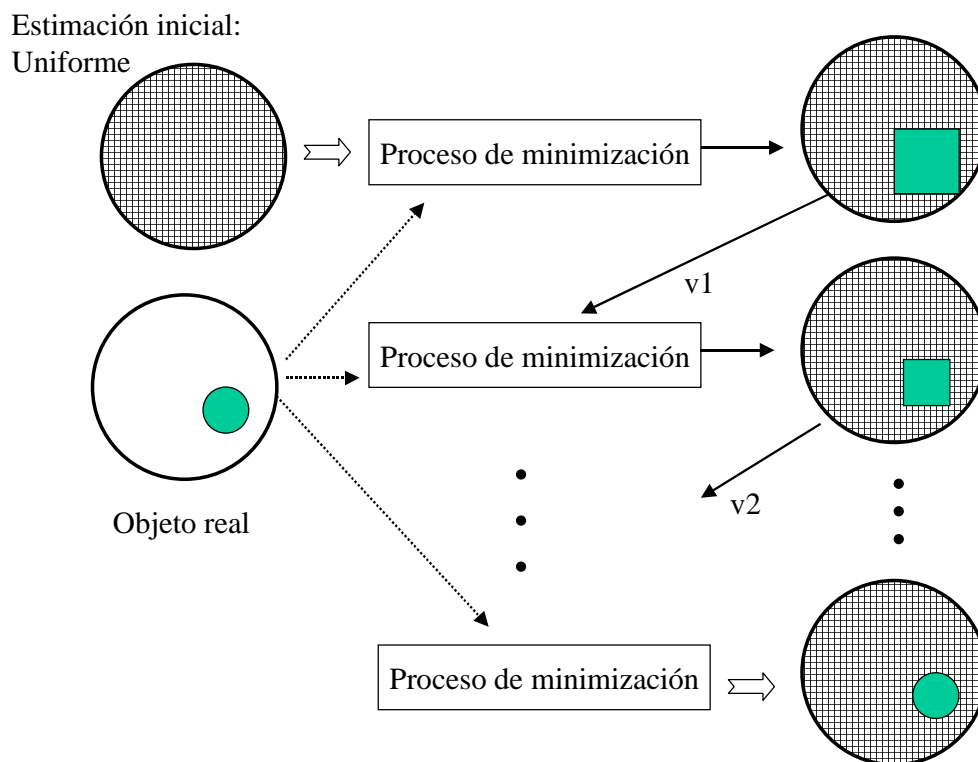


Figura 3.20 Estructura general de los algoritmos iterativos de reconstrucción

En (Patiño y Valentinuzzi,1995) se propuso una modificación de estos algoritmos para incrementar su velocidad, pero aún a pesar de estos esfuerzos, para su aplicación en medidas dinámicas en seres humanos aun son algoritmos lentos, por lo que normalmente se utilizan algoritmos no iterativos.

3.3.3 Métodos de reconstrucción no iterativos

El primer método no iterativo fue desarrollado por la universidad inglesa de Sheffield (Barber y Brown, 1986; Barber y Seagar, 1987). La idea básica del método es suponer que, si las variaciones de conductividad son pequeñas respecto al caso uniforme, las líneas

equipotenciales no cambian de forma y las variaciones sólo afectan al valor del potencial. La inyección de corriente se realiza entre dos electrodos adyacentes habiéndose calculado previamente las líneas equipotenciales que acaban en cada electrodo donde se mide. Como dichas líneas no cambian de forma, una variación en la diferencia de potencial entre electrodos adyacentes respecto al caso uniforme se achaca a una variación de conductividad en toda la zona delimitada por líneas equipotenciales que acaban en dichos electrodos (fig. 3.21). Esta es la base del denominado algoritmo de retroproyección que reduce el problema de Poisson no lineal a la solución del siguiente sistema lineal (con la aproximación $\Delta\sigma \ll \sigma$):

$$\nabla^2 U_p = -\nabla \ln(\Delta\sigma) \cdot \nabla U_u \quad (3.37)$$

donde U_u es el potencial conocido para la conductividad inicial, y U_p la perturbación de este potencial.

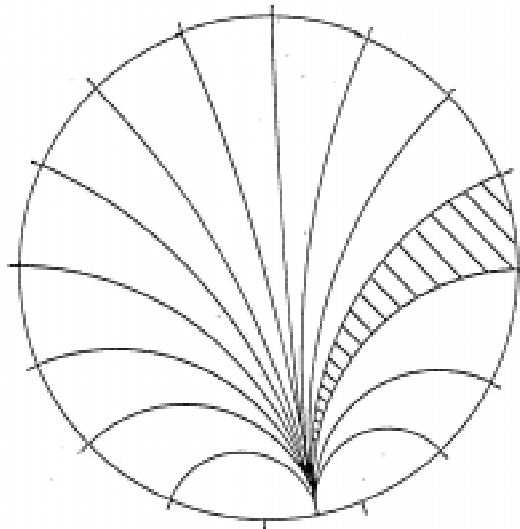


Figura 3.21 Líneas equipotenciales en inyección adyacente

Si se despeja de esta fórmula el valor del incremento de conductividad se obtiene la expresión

$$\Delta\sigma = \ln\left(\frac{U_p}{U_u}\right) \quad (3.38)$$

que si las variaciones son pequeñas se puede aproximar por

$$\Delta\sigma \approx \frac{U_p - U_u}{U_u} \quad (3.39)$$

Yorkey [1986] compara ambas soluciones llegando a la conclusión que con la inclusión del logaritmo en la ecuación se obtienen mejoras para variaciones pequeñas de la perturbación, mientras que para variaciones mayores es mejor la aproximación lineal.

Este algoritmo de retroproyección puede mejorarse haciendo que cada pixel se vea ponderado por un peso proporcional a la densidad de corriente que circula por él. De esta forma se obtiene el denominado algoritmo de retroproyección ponderada.

Estos dos algoritmos de retroproyección, tanto el ponderado como el no ponderado, han sido implementados (Dávila, 1989) y utilizados en las aplicaciones dinámicas de los sistemas de tomografía desarrollados por nuestro grupo de investigación.

En general en las medidas dinámicas de tomografía de impedancia eléctrica sobre el cuerpo humano, y en cortos intervalos de tiempo, es posible hacer la aproximación de que el cambio de impedancia debido a la perturbación es de valor mucho menor que la impedancia basal medida. Sin embargo, en tomografía multifrecuencia, la impedancia de la perturbación puede tener cambios relativos grandes con la frecuencia, por lo que la aplicación directa de los métodos empleados en tomografía dinámica nos pueden llevar a trabajar en zonas donde la estimación de los incrementos de conductividad tenga un comportamiento no lineal. Para solucionar este problema se desarrolló un nuevo algoritmo de reconstrucción, el de retroproyección exponencial (Povill y Riu, 1995) que, basado en la linealización de la ecuación de Poisson en el espacio ortogonal curvilíneo formado por las líneas equipotenciales y de corriente en el interior del volumen, mejora este problema de linealidad.

Para realizar una primera comparación de los tres algoritmos de retroproyección se obtendrán imágenes *in-vivo* del thorax humano mediante el sistema de tomografía Tie1_sys. Los resultados obtenidos se pueden observar en las imágenes de las figuras 3.22, 3.23 y 3.24, así como en la cuantificación de la variación de la actividad respiratoria en una zona de los pulmones (fig 3.25).

De estas imágenes se puede extraer dos conclusiones: por un lado que los dos algoritmos más eficientes a la hora de realizar la reconstrucción son los de retroproyección ponderada y retroproyección exponencial, y por otro, que la cuantificación y distribución de impedancias varían al hacerlo el algoritmo de reconstrucción. Esto conlleva la necesidad de realizar una comparación y evaluación de los errores que se obtienen con estos dos últimos algoritmos de retroproyección.

Retroproyección

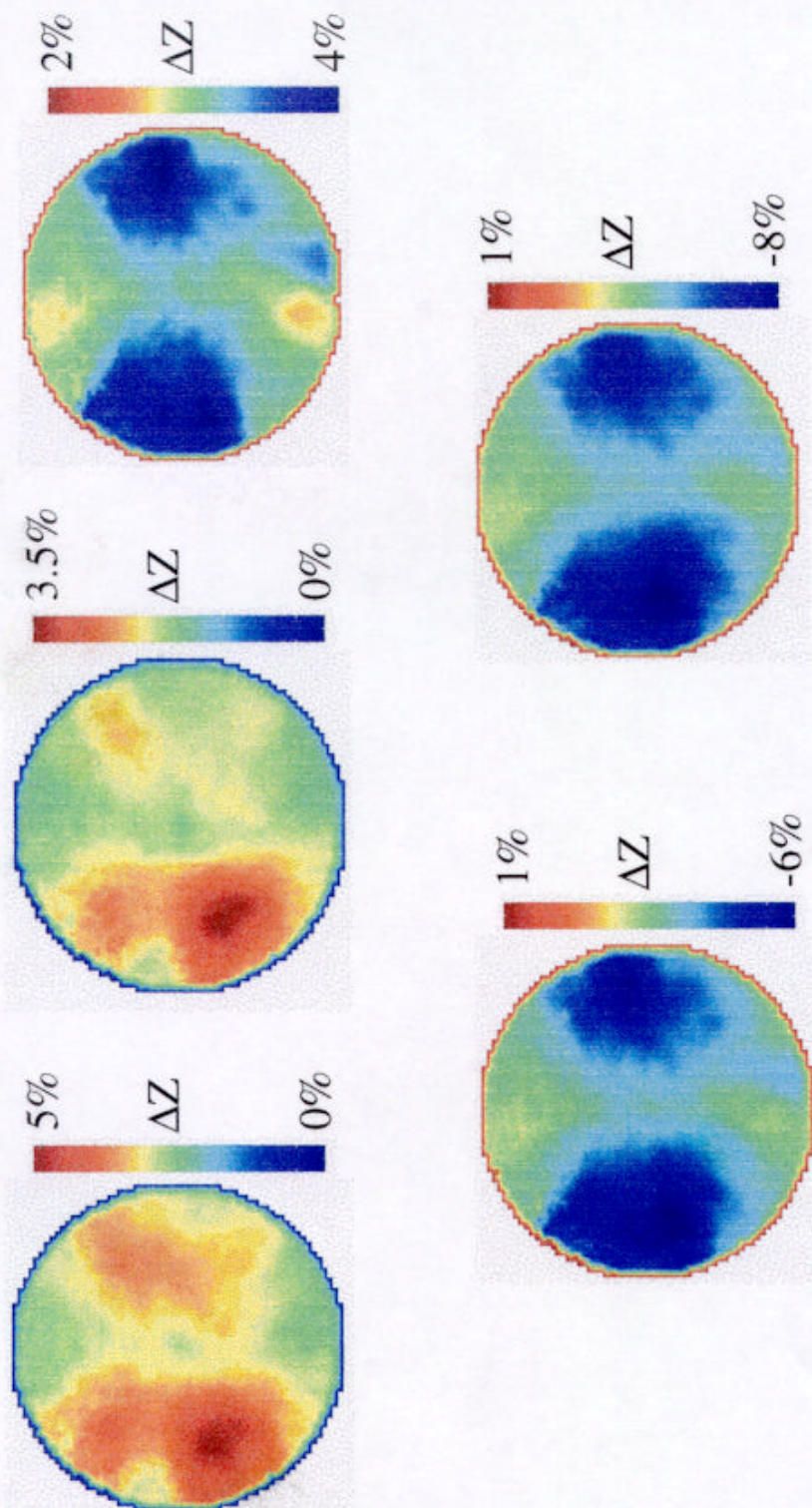


Figura 3.22 Imágenes de tomografía de un ciclo respiratorio reconstruidas mediante retroproyección

Retroproyección

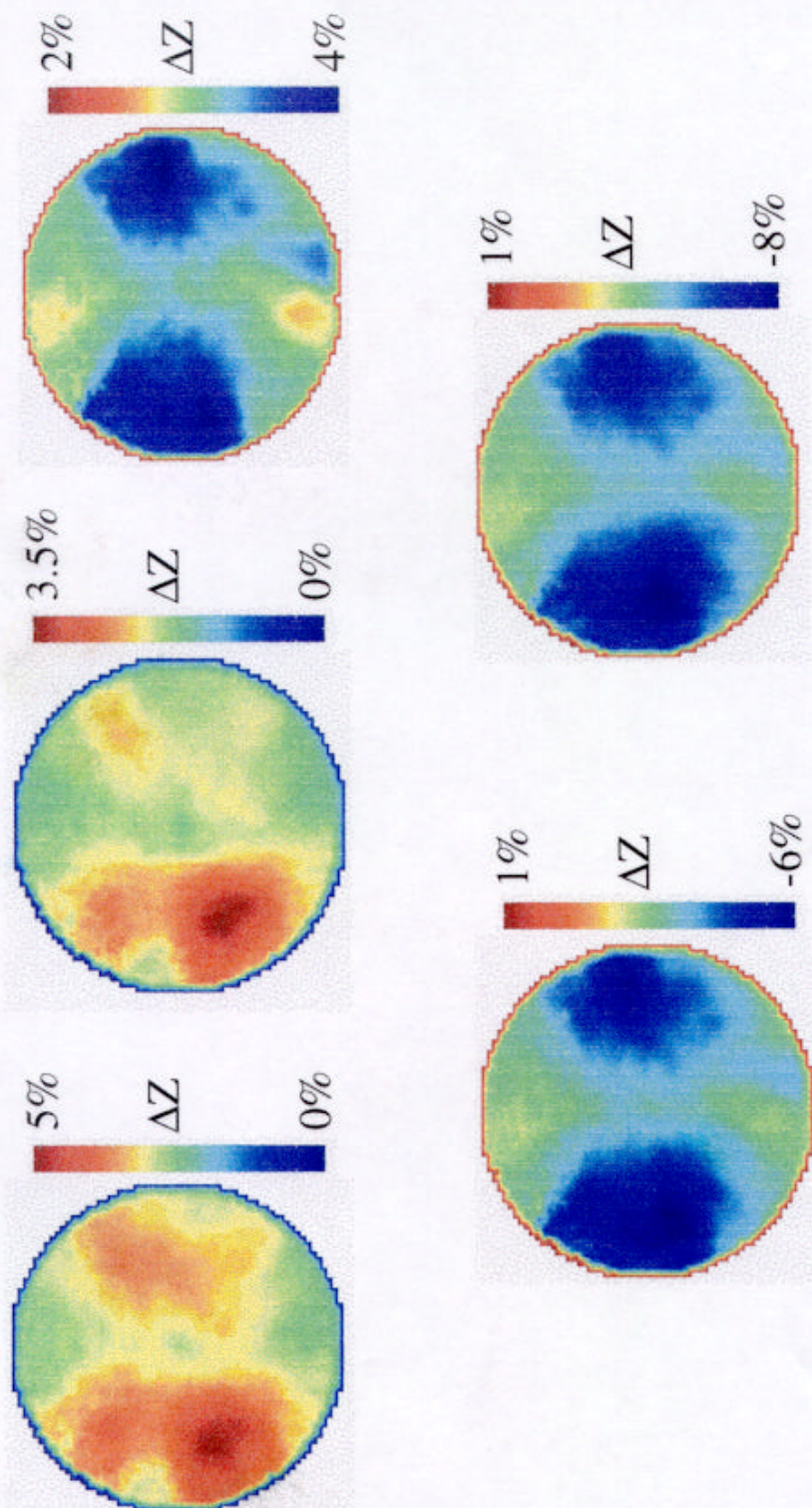


Figura 3.22 Imágenes de tomografía de un ciclo respiratorio reconstruidas mediante retroproyección

Retroproyección exponencial

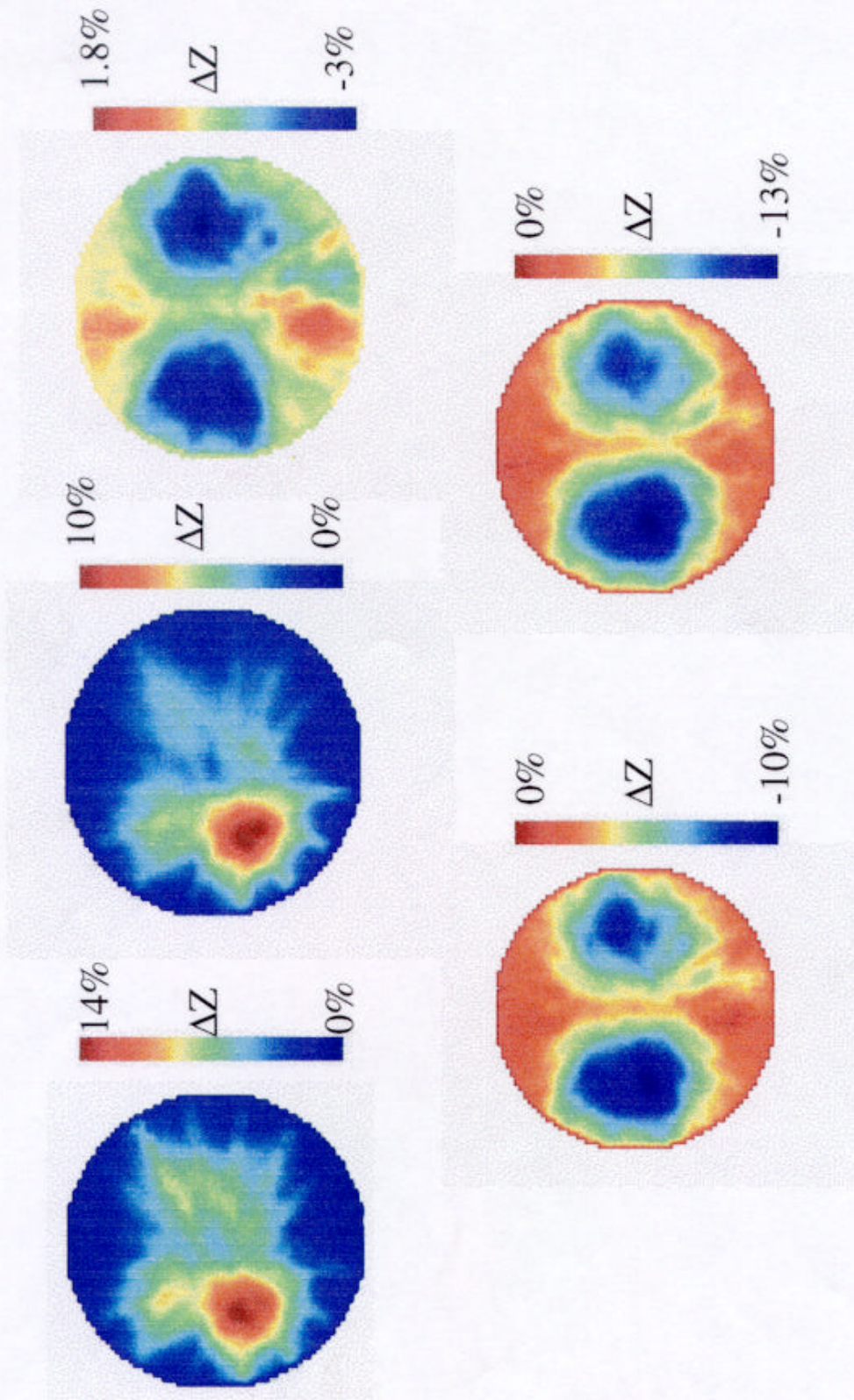


Figura 3.24 Imágenes de tomografía de un ciclo respiratorio reconstruidas mediante retroproyección exponencial

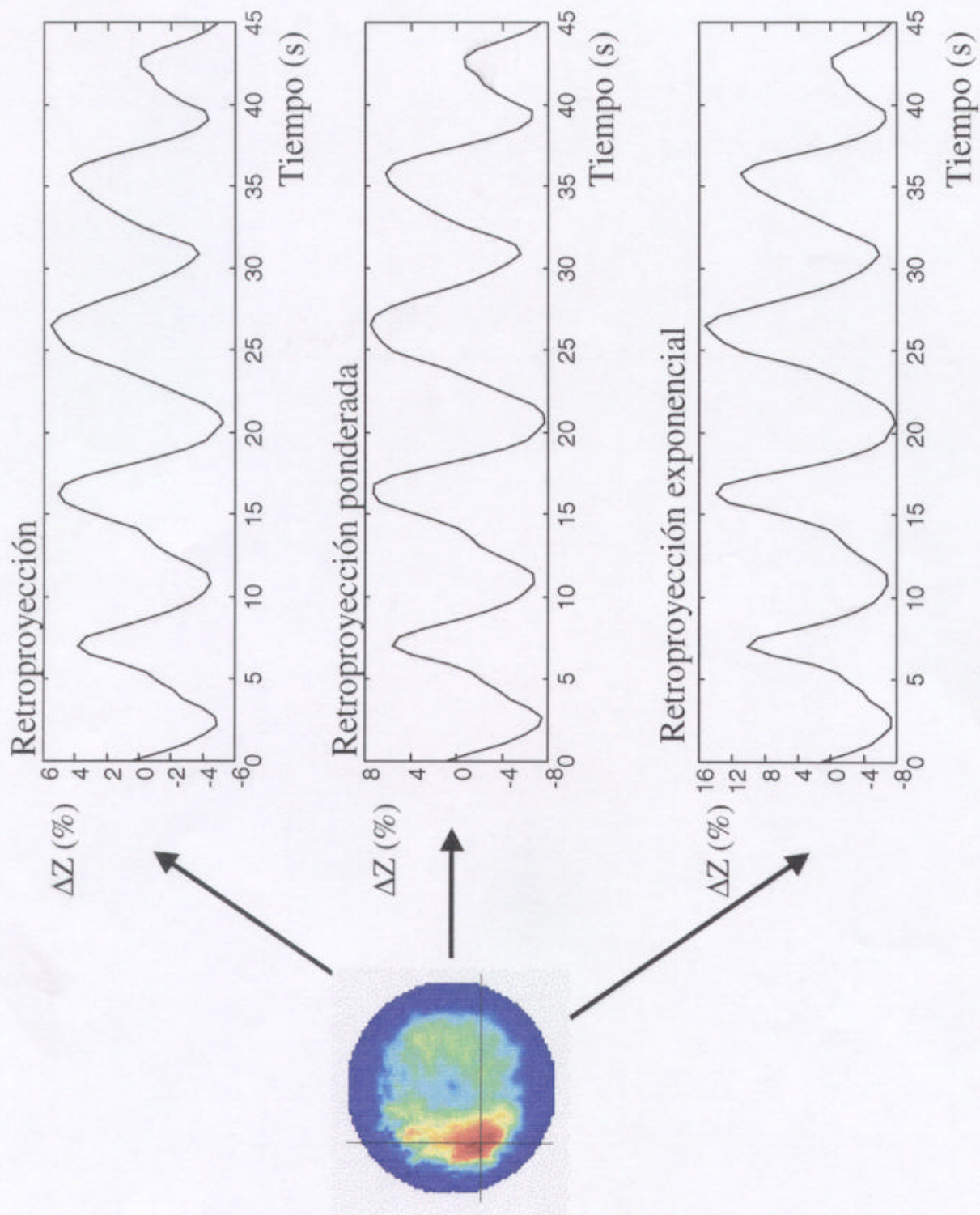


Figura 3.25 Evolución del ciclo cardíaco de un pixel con los tres algoritmos de reconstrucción

Este estudio se presenta en (Morón, 1996). En él se analizan los errores de dichos algoritmos en función de la variación de los parámetros de conductividad, contraste inicial, posición y radio de la perturbación. Tal y como se propone en (Yorkey, 1986), se utiliza como error, la medida de la variancia normalizada de la imagen real respecto a la reconstruida. Para una imagen de N puntos este error viene dado por.

$$\varepsilon = \frac{\sum_{i=0}^N (C_i - C'_i)^2}{\sum_{i=0}^N (C_i - \mu)^2} \quad (3.40)$$

con

$$\mu = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N C_i \quad (3.41)$$

donde C_i son los valores de la imagen real, C'_i los valores de la imagen reconstruida y μ la media de la imagen real.

Las conclusiones a las que se llega en este estudio son:

- El error en la reconstrucción con los dos algoritmos es prácticamente independiente de las variaciones del contraste inicial, al igual que lo es del valor del incremento de conductividad (fig 3.26).
- La reconstrucción bajo ambos métodos depende de la posición de la perturbación (fig 3.27) Aunque los resultados en los dos algoritmos son semejantes, se observa que el método exponencial obtiene menos error en perturbaciones laterales que en perturbaciones centradas, sucediendo lo contrario para la retroproyección ponderada.
- Existe un error grande en ambos algoritmos para radios relativos de perturbación menores a 0,2 ($r/R < 0,2$). Se encuentra una relación lineal entre el radio reconstruido y el radio original para $r/R > 0,2$ en perturbaciones laterales y $r/R > 0,3$ en perturbaciones centradas (fig 3.28).
- El método exponencial es en general más lineal a incrementos en la conductividad real que el de retroproyección ponderada, especialmente para perturbaciones laterales, siendo ambos métodos lineales para incrementos de conductividad pequeños ($\sigma_p/\sigma_o < 0,3$). Además en ambos métodos la estimación del incremento de conductividad depende tanto del radio de la perturbación, como del contraste inicial.

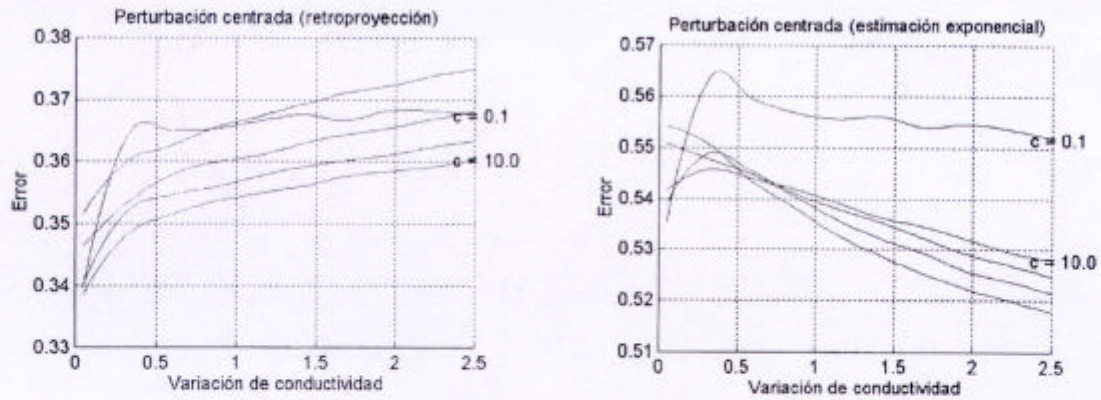


Figura 3.26 Error en la reconstrucción respecto a la variación de conductividad (Morón,1996)

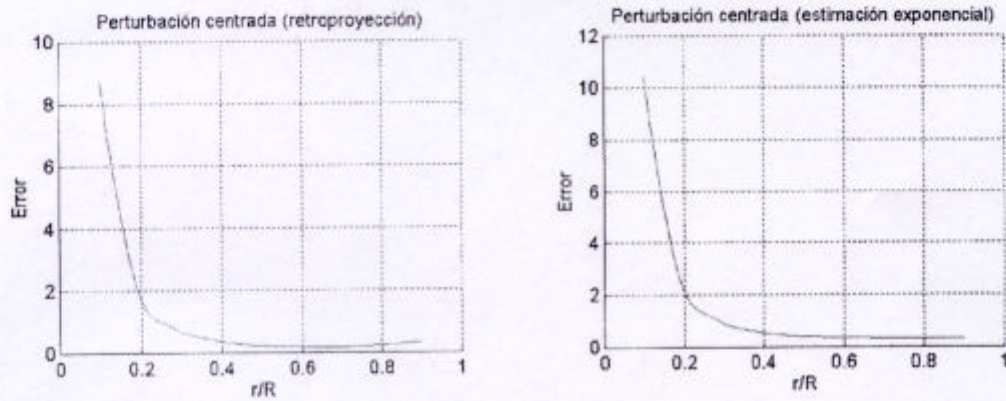


Figura 3.27 Error en función del radio para una perturbación centrada con un incremento de conductividad del 50% (Morón,1996)

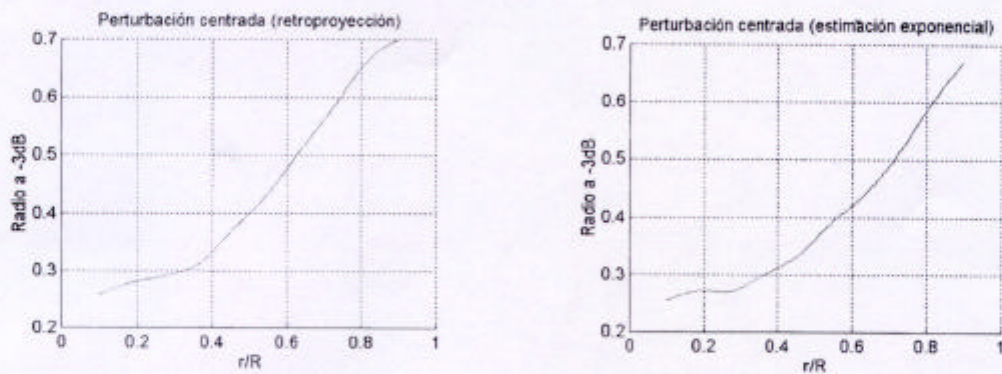


Figura 3.28 Radio reconstruido en función del radio de la perturbación para una perturbación centrada con incremento de conductividad del 50%(Morón,1996)

De todos estos factores el que más directamente nos afecta en la obtención de imágenes paramétricas es el último, ya que un error en la cuantificación de los valores de impedancia reconstruidos provocará directamente un error en los parámetros de las imágenes obtenidas. Es posible minimizar la influencia de este problema mediante fórmulas que ecualicen este comportamiento no lineal, pudiéndose de este modo agrandar la zona de trabajo lineal frente a incrementos de conductividades. En (Frangi, 1996), se han propuesto modelos matemáticos para perturbaciones circulares, que permiten compensar esta falta de linealidad tanto para algoritmos con retroproyección ponderada, como con retroproyección exponencial (fig.3.29)

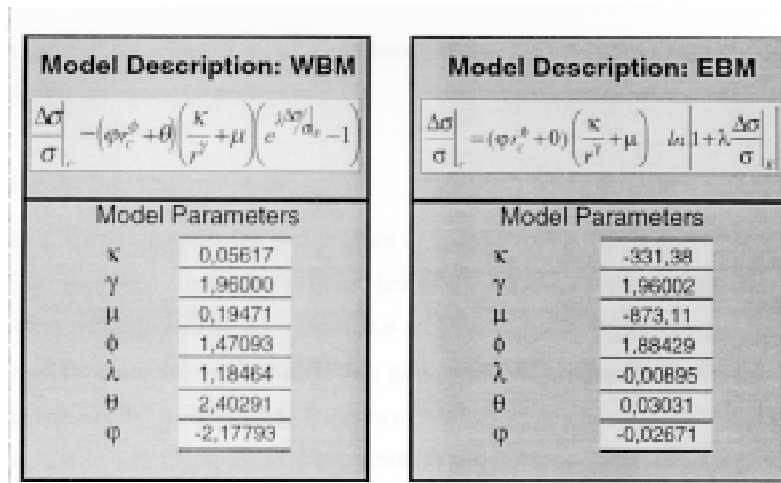


Figura 3.29 Modelos matemáticos para la corrección de no linealidad en la cuantificación de la conductividad (Frangi,1996)

Estos resultados teóricos han sido validados experimentalmente mediante la realización de medidas sobre los phantoms de agar descritos en el capítulo segundo. Se han realizado medidas con 50 valores distintos de conductividad ($-80\% < \Delta\sigma/\sigma < 150\%$), distribuidos en diferentes posiciones a lo largo del diámetro de la sección medida. Los datos han sido reconstruidos con los algoritmos de retroproyección ponderada y exponencial y posteriormente corregidos mediante las expresiones propuestas en (Frangi,1996, Frangi *et al.*, 1997b). Los resultados obtenidos indican que la aplicación de estos modelos permiten rebajar la incertidumbre de la estimación de la conductividad a valores inferiores a $\pm 8,6\%$ y extender el margen lineal de trabajo hasta $\pm 100\%$ en el cambio de conductividad (Frangi *et al.*, 1997a), por lo que éstas serán las fórmulas utilizadas para mejorar la cuantificación del valor de la conductividad en las medidas *in-vivo* que realicemos.

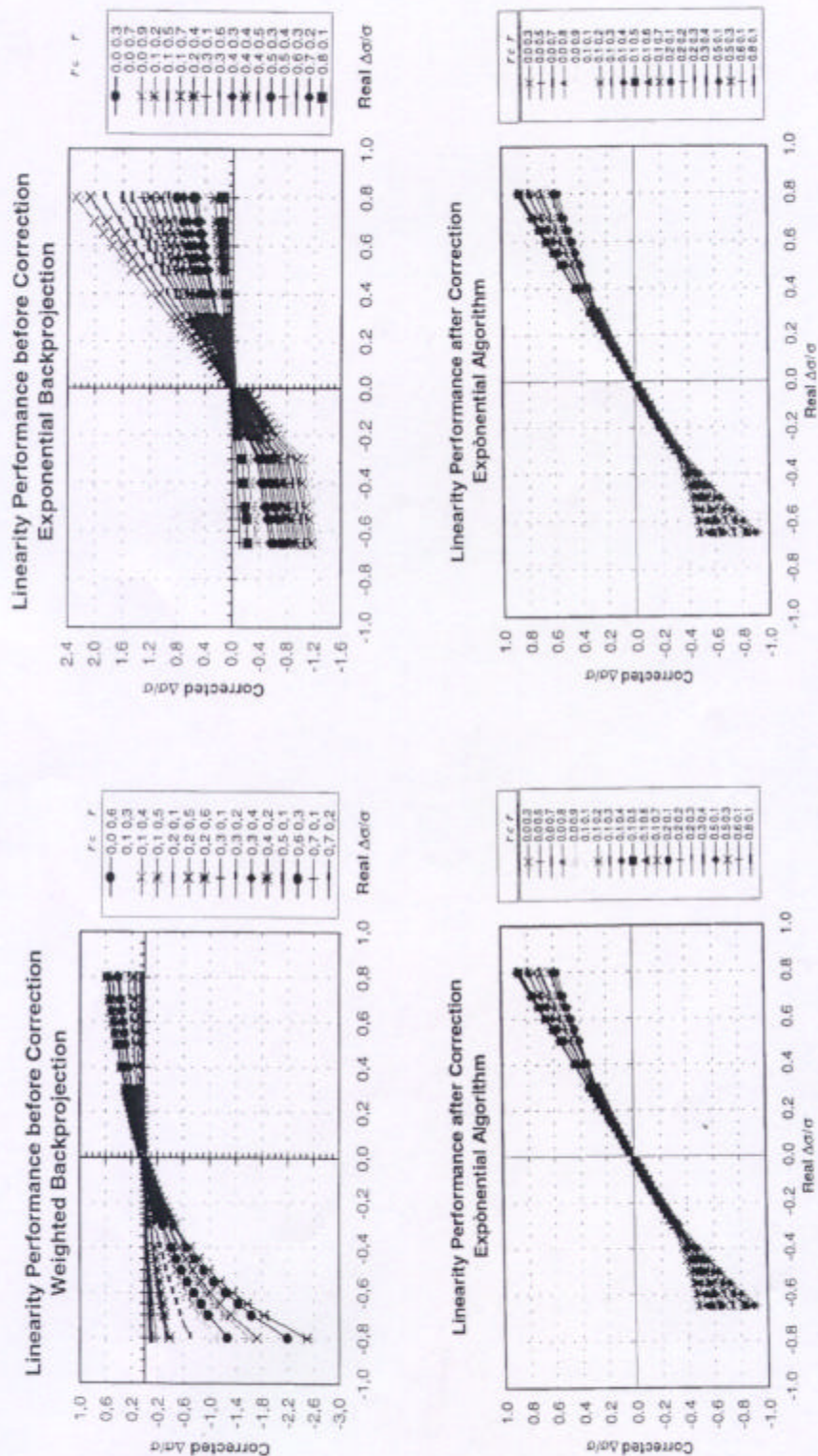


Figura 3.30 Linealidad de la cuantificación de la conductividad antes y después de aplicar los modelos de corrección (Frangi, 1996)

3.4 Extracción de características eléctricas en imágenes MEIT. Imágenes paramétricas.

3.4.1 Introducción

Como se ha visto en el primer capítulo, la impedancia biológica de los tejidos varía con la frecuencia, siendo posible su caracterización y por tanto su aplicabilidad en el diagnóstico clínico mediante medidas espectroscópicas y modelos de Cole-Cole (Cole y Cole, 1941). La teoría de imágenes paramétricas conjuga la utilización de estas técnicas y las de tomografía de impedancia eléctrica multifrecuencia (MEIT), para la obtención de imágenes que muestren la evolución espacial de los parámetros de Cole obtenidos. Griffiths y Jossinet (1994) hicieron un primer estudio simulado, que permitía la extracción de las componentes reales e imaginarias de las características eléctricas de los *pixels* de imágenes obtenidas mediante tomografía de impedancia eléctrica multifrecuencia (fig.3.31). Sin embargo, el método propuesto por ellos requería que la imagen utilizada como referencia fuera puramente resistiva, premisa que no se cumple en las medidas *in-vivo*, que constituyen su principal campo de aplicabilidad. Es por tanto necesario el desarrollo de un método que permita la obtención de los parámetros del modelo de Cole en imágenes MEIT independientemente del valor reactivo de los *pixels* de la imagen utilizada como referencia.

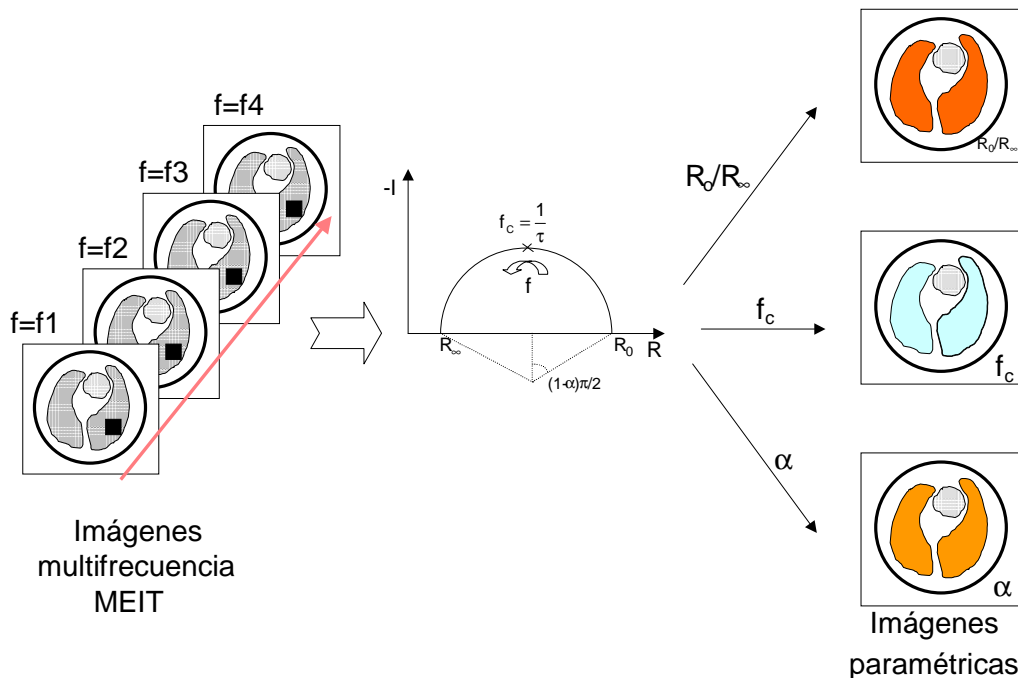


Figura 3.31 Esquema de obtención de imágenes paramétricas

3.4.2 Teoría básica de imágenes paramétricas

En (Griffiths *et al.*, 1992) se mostraba que cuando se retroproyecta logarítmicamente una tensión compleja de valor

$$V_2^* = |V_2| \exp(j\phi_2) \quad (3.42)$$

sobre una referencia también compleja de valor V_1^* , el valor complejo de cada uno de los pixels de la imagen viene dado por la expresión

$$s^* = \ln \left(\frac{V_2^*}{V_1^*} \right) \quad (3.43)$$

Asumiendo que la corriente inyectada es idéntica en la referencia y en la imagen, el valor complejo de estos pixels es posible expresarlo en términos de impedancias

$$s^* = \ln \left(\frac{Z_2^*}{Z_1^*} \right) \quad (3.44)$$

pudiéndose obtener dos imágenes diferentes según se represente el cambio de módulo (s') o el cambio de fase (s'')

$$s' = \ln \left(\frac{|Z_2|}{|Z_1|} \right)$$

$$s'' = \phi_2 - \phi_1 \quad (3.45)$$

Mediante estas ecuaciones es posible obtener la información del valor de la impedancia medida en términos del valor de la impedancia de referencia

$$|Z_2| = |Z_1| \exp(s')$$

$$\phi_2 = \phi_1 + s'' \quad (3.46)$$

En general, para la imagen i -ésima los valores de la parte real e imaginaria de su impedancia relativa pueden expresarse como

$$\exp(s') \cdot \exp(js'') = \exp(s') \cdot (\cos(s'') + j\sin(s'')) = \frac{Z_i^*}{Z_1^*} = \frac{|Z_i|}{|Z_1|} \exp(j(\phi_i - \phi_1)) = \frac{R(Z_i^*) + jI(Z_i^*)}{R(Z_1^*) + jI(Z_1^*)} \quad (3.47)$$

Al disponer únicamente de la evolución de la impedancia normalizada respecto al valor a la frecuencia de referencia, los datos que se representaran serán la parte real y la parte imaginaria de esta impedancia relativa

$$Z_{rel} = \frac{R_i + jI_i}{R_1 + jI_1} \Rightarrow R_{rel} = \frac{R_i R_1 + I_i I_1}{R_1^2 + I_1^2} \quad I_{rel} = \frac{I_i R_1 - R_i I_1}{R_1^2 + I_1^2} \quad (3.48)$$

Es necesario, en primer lugar, buscar qué relación guarda esta representación R-I con el modelo de Cole de las impedancias reales.

Si la proyección de los valores de las impedancias (R_i, I_i) satisfacen el modelo de Cole y por tanto se pueden ajustar a la circunferencia

$$(R_i - a)^2 + (I_i - b)^2 = r^2 \quad (3.49)$$

es posible demostrar que la proyección sobre el plano R-I de las impedancias relativas calculadas en las imágenes paramétricas son también ajustables a una circunferencia, cuya expresión es

$$\left(R_{rel} - \frac{aR_1 + bI_1}{R_1^2 + I_1^2} \right)^2 + \left(I_{rel} - \frac{bR_1 - aI_1}{R_1^2 + I_1^2} \right)^2 = \frac{r^2}{R_1^2 + I_1^2} \quad (3.50)$$

encontrándose las siguientes relaciones entre los parámetros que definen estas dos circunferencias

$$a_{rel} = \frac{aR_1 + bI_1}{R_1^2 + I_1^2} = \frac{a_n + b_n \theta}{1 + \theta^2} \quad (3.51)$$

$$b_{rel} = \frac{bR_1 - aI_1}{R_1^2 + I_1^2} = \frac{b_n - a_n \theta}{1 + \theta^2} \quad (3.52)$$

$$r_{rel}^2 = \frac{r_n^2}{1 + \theta^2} \quad (3.53)$$

donde

$$\theta = \frac{I_1}{R_1}; \quad a_n = \frac{a}{R_1}; \quad b_n = \frac{b}{R_1}; \quad r_n = \frac{r}{R_1} \quad (3.54)$$

Esta normalización respecto a R_1 , no conlleva una pérdida de información ya que los sistemas de tomografía de impedancia eléctrica utilizados no permiten la adquisición de imágenes

absolutas, siendo el objetivo de las imágenes paramétricas, por tanto, únicamente la representación de los parámetros R_0/R_{∞} , f_c , y α (Fitzgerald *et al.*, 1997a).

En las figuras 3.32 y 3.33 se observa las relaciones existentes entre los parámetros de dichos arcos

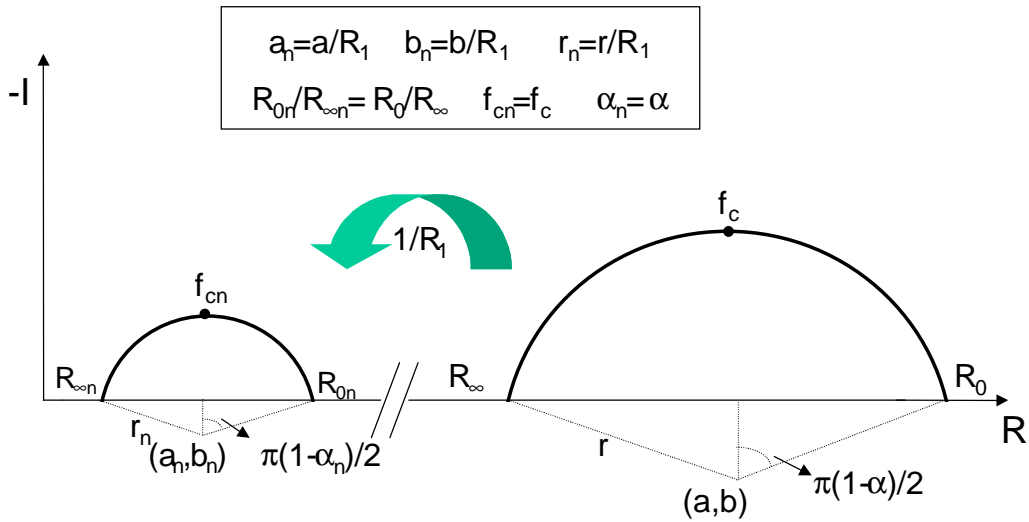


Figura 3.32 Transformación del arco de Cole debido a la normalización respecto a R_1

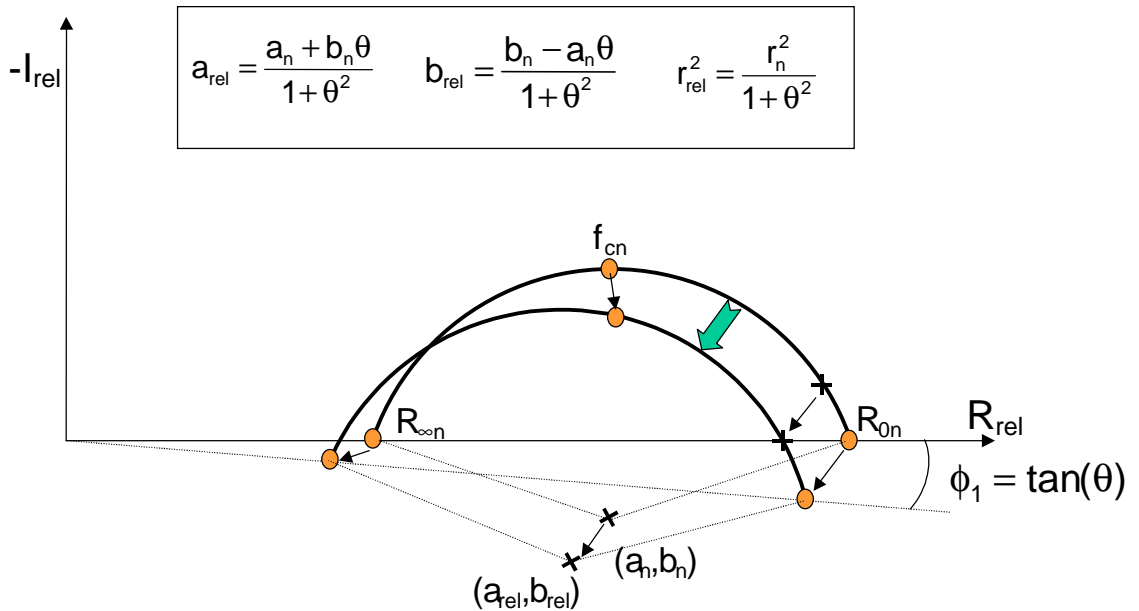


Figura 3.33 Transformación del arco de Cole debido al desfase de $Z(f_1)$

Si se aplica directamente sobre los datos reconstruidos el método de ajuste a modelos de un arco desarrollado en el capítulo segundo se estiman los siguientes valores para los parámetros buscados

$$\frac{R_0}{R_\infty} \Big|_{\text{estimada}} = \frac{R_{0n}}{R_{\infty n}} \Big|_{\text{estimada}} = \left[\frac{R_0}{R_\infty} \cdot \frac{1 + 2 \left(\frac{f_1}{f_c} \right)^{(1-\alpha)} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}(1-\alpha)\right) + \left(\frac{f_1}{f_c} \right)^{2(1-\alpha)}}{\left(\frac{R_0}{R_\infty} \right)^2 + 2 \left(\frac{R_0}{R_\infty} \right) \cdot \left(\frac{f_1}{f_c} \right)^{(1-\alpha)} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}(1-\alpha)\right) + \left(\frac{f_1}{f_c} \right)^{2(1-\alpha)}} \right]^{-1} \quad (3.55)$$

$$\alpha \Big|_{\text{estimada}} = 1 - \frac{2}{\pi} a \cos\left(\frac{a_{\text{rel}} \theta}{r_{\text{rel}}} + \sqrt{1 + \theta^2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}(1-\alpha)\right) \right) \quad (3.56)$$

$$f_c \Big|_{\text{estimada}} = f_c \left(\frac{-\theta - \sqrt{1 + \theta^2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}(1-\alpha)\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}(1-\alpha)\right) + \theta \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}(1-\alpha)\right)} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad (3.57)$$

Como se observa, ninguno de los parámetros calculados se ajusta al comportamiento del modelo de Cole de los datos reales del tejido, ya que existe una dependencia en todos los ellos con el desfase existente en la impedancia escogida como referencia. Esto nos obliga a tener un método que nos permita calcular este desfase, para el cálculo posterior de los parámetros reales del modelo de Cole, o bien un algoritmo que nos permita calcular directamente los valores correctos de Cole.

3.4.3 Algoritmos para el cálculo de imágenes paramétricas

El primer método implementado para la obtención de imágenes paramétricas es un algoritmo basado en la minimización, mediante métodos iterativos, de la función error definida como

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^m \left[\text{Dato}_{\text{obtenido}}(i) - \text{Dato}_{\text{ajustado}}(i) \right]^2 \quad (3.58)$$

El hecho de tener una función error dependiente de tres variables (R_0/R_∞ , f_c y α) y que esta función sea de una cierta complejidad, nos ha hecho inclinarnos por la utilización de algoritmos que no incluyan el cálculo de gradientes al realizar la aproximación, optimizando de esta forma el tiempo de cálculo. Es por ello que se han utilizado algoritmos basados en los métodos *Downhill Simplex* [Nelder y Mead, 1965] y *Powell* (prototipo de los denominados *direction-set*

methods) [Acton, 1970]. Dado que la frecuencia a la que se produce el máximo de la evolución de la fase permanece invariante al realizar la normalización, estos métodos han sido aplicados sobre la evolución del módulo y de la fase de las impedancias reconstruidas.

Los resultados obtenidos con ambos métodos han sido similares, siendo el simplex más robusto pero más lento que el Powell, que optimiza el número de evaluaciones requeridas de la función error. Estos algoritmos, que nos han permitido el ajuste de curvas teóricas, han mostrado dos limitaciones fundamentales [Martínez, 1997]: a) Existe un problema de convergencia que depende fuertemente de la selección de las condiciones iniciales y de los valores de R_0/R_∞ (el algoritmo no converge para $R_0/R_\infty > 6$). Este problema, por ejemplo, nos limitará su utilización en tejidos animales isquémicos [Gersing *et al.*, 1995] o en tejidos vegetales [Repo, 1992] ya que ambos tienen una elevada relación R_0/R_∞ . b) El tiempo de cálculo es elevado (aprox. 5 segundos para cada curva). Es necesario, por tanto, el desarrollo de un nuevo algoritmo que solucione estas limitaciones.

Como se ha presentado en las bases teóricas, es posible aproximar por un arco de circunferencia la proyección de las impedancias reconstruidas sobre el plano R-I. Sin embargo, como también se ha mostrado, el cálculo de los parámetros de Cole que se realiza sobre esta curva, aplicando el algoritmo desarrollado para los datos de espectroscopia es erróneo, siendo mayor este error cuanto mayor sea el desfase en la impedancia escogida como referencia. El análisis únicamente de los datos de la parte real e imaginaria de las impedancias reconstruidas no nos permite extraer la información para el cálculo de dicho desfase, ya que un cambio en el desfase de la referencia ocasiona simplemente una rotación de los puntos de impedancia sobre la misma circunferencia. Es, por tanto, necesario para su cálculo actuar directamente sobre el modelo de Cole, buscando en su evolución frecuencial, que en la proyección R-I no se representa, la información necesaria para el cálculo de este desfase.

En el caso particular que las frecuencias utilizadas sigan una progresión geométrica, los puntos del arco de Cole-Cole son simétricos alrededor de la frecuencia central, hecho que nos permite calcular el desfase y a partir de él los parámetros de Cole (Fitzgelard *et al.*, 1997a). Este método tiene como limitaciones que su convergencia hacia la solución correcta depende de la localización de la frecuencia central con respecto al margen de frecuencias utilizado (Fitzgerald *et al.*, 1997b) y que obliga a que las frecuencias aplicadas sigan una progresión geométrica.

Si se estudia con más detalle la evolución frecuencial del arco de impedancias representado, éste es posible modelarlo mediante la expresión:

$$Z_{rel} = R_{\infty n} \frac{1-j\theta}{1+\theta^2} + \frac{(R_{0n} - R_{\infty n}) \frac{1-j\theta}{1+\theta^2}}{1 + \left(j \frac{f}{f_c} \right)^{(1-\alpha)}} \quad (3.59)$$

si se trabaja con el arco en todo el margen frecuencial, (desde $f=0$ hasta $f \rightarrow \infty$) (fig 3.34), o, si sólo se trabaja con los valores positivos (fig. 3.35), mediante la expresión

$$Z_{rel} = (2a_{rel} - 1) + \frac{2(1 - a_{rel})}{p_1(f_c, \alpha, R_0/R_{\infty}) + jp_2(f_c, \alpha, R_0/R_{\infty})} \quad (3.60)$$

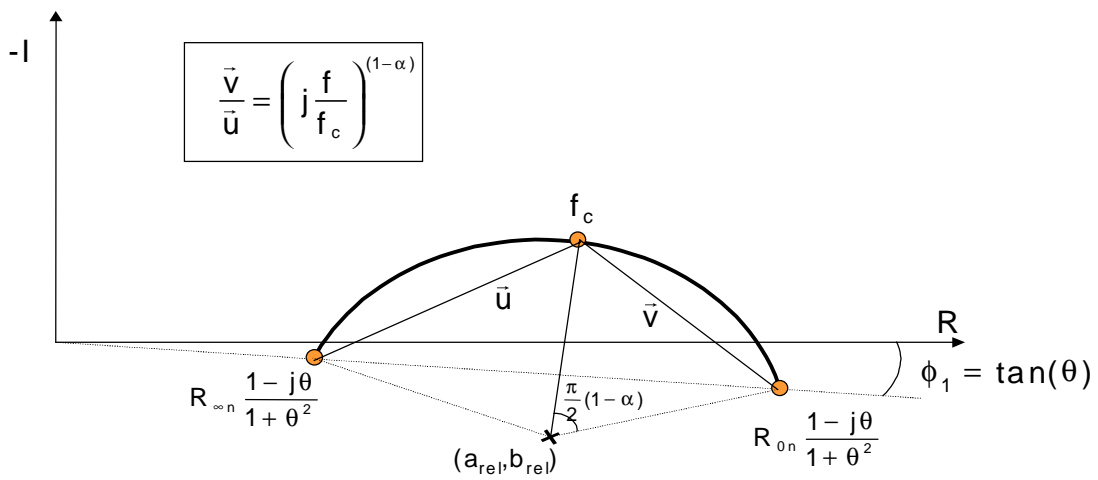


Figura 3.34 Comportamiento frecuencial del arco de impedancias

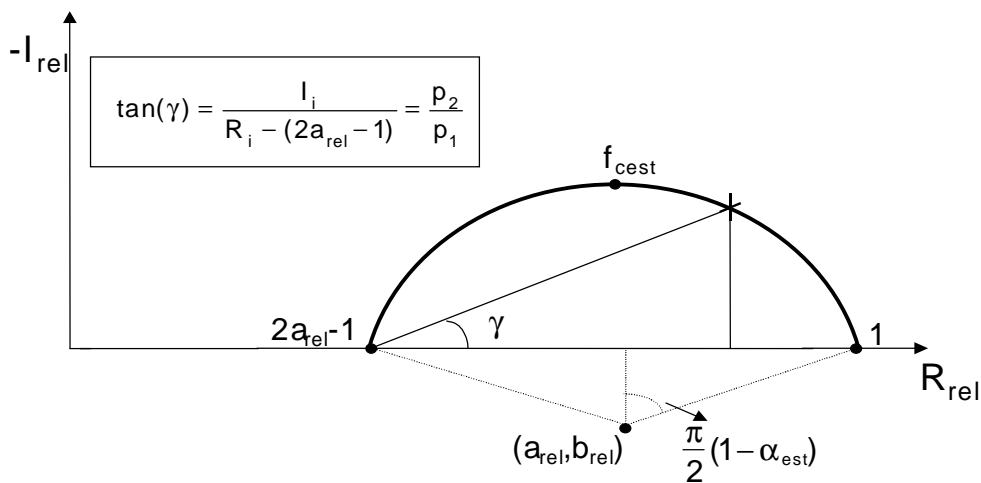


Figura 3.35 Comportamiento del arco de Cole para valores positivos de impedancias relativas

El objetivo es hallar una expresión sencilla, que dependa del mínimo número de variables y que nos permita, en el menor tiempo posible, calcular los parámetros correctos del arco de Cole.

Después de probar diferentes alternativas derivadas de las expresiones (3.59) y (3.60) se ha encontrado que la mejor solución es aproximar la ecuación

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\left(\left(\frac{f}{f_c} \right)^{(1-\alpha)} - \left(\frac{f_1}{f_c} \right)^{(1-\alpha)} \right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}(1-\alpha)\right)}{\left(\frac{f}{f_c} \right)^{(1-\alpha)} \cdot \left(\frac{f_1}{f_c} \right)^{(1-\alpha)} + \left(\left(\frac{f}{f_c} \right)^{(1-\alpha)} + \left(\frac{f_1}{f_c} \right)^{(1-\alpha)} \right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}(1-\alpha)\right) + 1} = \frac{I_{rel}}{R_{rel} - 2a_{rel} + 1} \quad (3.61)$$

Esta igualdad únicamente contiene dos parámetros incógnitas, α y f_c siendo posible su cálculo a partir de los datos de las impedancias reconstruidas ($R_{rel,i}, I_{rel,i}, f_i$). Esto lo realizaremos mediante la minimización del error de la ecuación (3.58) siendo los parámetros iniciales de este algoritmo de aproximación, los calculados considerando un desfase nulo en la impedancia de referencia.

A partir de los valores encontrados para α y f_c y de las ecuaciones 3.55, 3.56 y 3.57 es posible calcular el desfase inicial y el parámetro R_0/R_∞ .

Para comprobar la bondad del algoritmo de parametrización, se ha estudiado su inmunidad a la variación de los parámetros, su inmunidad al ruido y el tiempo de ejecución. Para ello se han generado datos teóricos, que aproximan la función de Cole, se han normalizado respecto al primer valor, contaminándose con niveles de ruido desde -10 dB hasta -80 dB respecto al valor máximo de la parte real. Para cada caso se han realizado 100 medidas, calculándose su media y su desviación standard. En todos los casos, salvo para relación señal a ruido muy bajas, independiente del valor de los parámetros, el algoritmo convergía hacia la solución correcta, obteniéndose un tiempo de procesado que iba desde 110 ms hasta 170 ms, según se utilizaran respectivamente de 8 hasta 32 puntos. Como ejemplo, en las gráficas (3.36) y (3.37) así como en las tablas 3.2 y 3.3 se muestran los resultados encontrados en dos ejemplos con parámetros muy diferenciados, que son una muestra de los valores que podemos encontrarnos en medidas sobre tejidos biológicos. El margen frecuencial utilizado en estos dos casos ha sido de 10 kHz hasta 1 MHz, utilizándose 8 puntos logarítmicamente espaciados.

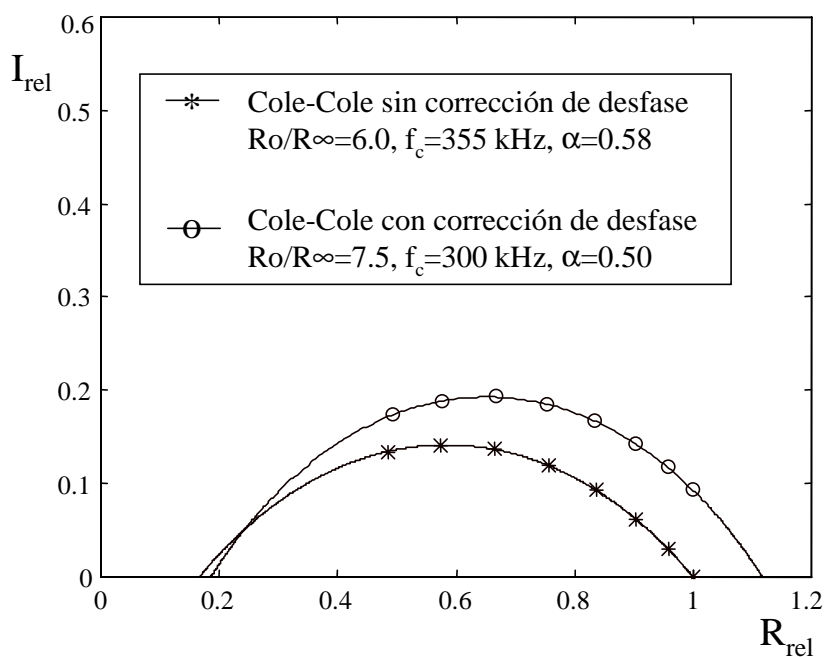


Figura 3.36 Arcos de Cole calculados con y sin corrección de desfase

	R_0/R_∞ (7,5)	f_c (kHz) (300 kHz)	α (0,5)
Cole sin corrección de desfase	6,01	355,39	0,58
Cole con corrección de desfase	7,50	300,00	0,50
Con corrección S/N=10 dB	$4,80 \pm 2,82$	$450,57 \pm 232,09$	$0,37 \pm 0,09$
Con corrección S/N=20 dB	$6,50 \pm 1,96$	$312,89 \pm 59,28$	$0,48 \pm 0,02$
Con corrección S/N=30 dB	$7,34 \pm 0,61$	$299,55 \pm 16,11$	$0,50 \pm 7e-3$
Con corrección S/N=40 dB	$7,51 \pm 0,18$	$300,45 \pm 5,07$	$0,50 \pm 2e-3$
Con corrección S/N=50 dB	$7,50 \pm 0,05$	$300,19 \pm 1,68$	$0,50 \pm 7e-4$
Con corrección S/N=60 dB	$7,50 \pm 0,02$	$299,97 \pm 0,56$	$0,50 \pm 3e-4$
Con corrección S/N=80 dB	$7,50 \pm 0,001$	$300,00 \pm 0,05$	$0,50 \pm 2e-5$

Tabla 3.2 Valores de media y desviación standard calculados para diferentes S/N, con 8 puntos espaciados logarímicamente en el margen frecuencial de 10 kHz-1 MHz

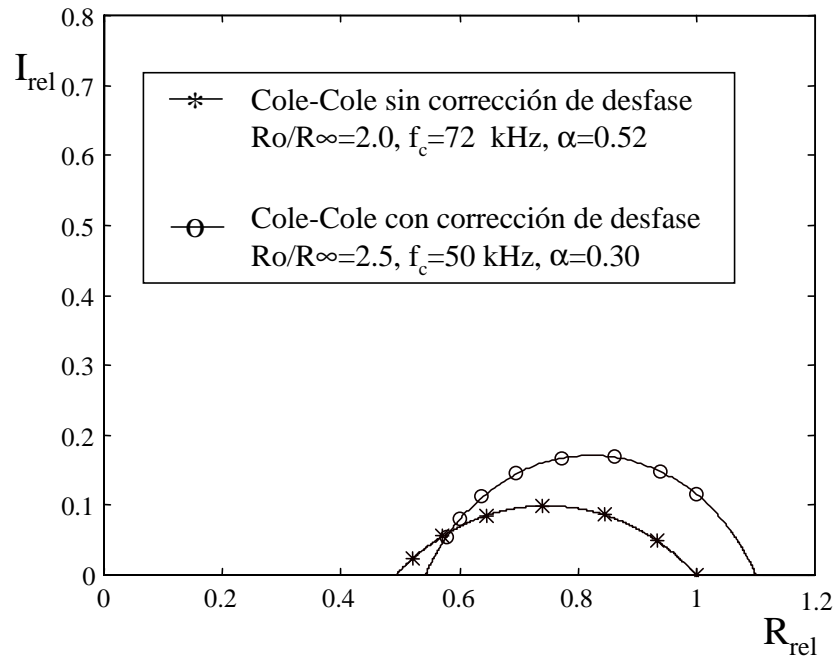


Figura 3.37 Arcos de Cole calculados con y sin corrección de desfase

	R_0/R_∞ (2.5)	f_c (kHz) (50 kHz)	α (0.3)
Cole sin corrección de desfase	2,02	71,95	0,53
Cole con corrección de desfase	2,50	50,00	0,3
Con corrección S/N=10 dB	1,98±0,75	141,66±266,43	0,20±0,45
Con corrección S/N=20 dB	2,43±0,39	85,58±135,56	0,22±0,13
Con corrección S/N=30 dB	2,50±0,14	64,60±91,18	0,27±0,05
Con corrección S/N=40 dB	2,50±0,02	49,67±5,98	0,30±6e-3
Con corrección S/N=50 dB	2,50±5e-3	50,18±2,01	0,30±2e-3
Con corrección S/N=60 dB	2,50±1e-3	50,08±0,66	0,30±7e-3
Con corrección S/N=80 dB	2,50±2e-4	50,00±0,06	0,30±1e-3

Tabla 3.3 Valores de media y desviación standard calculados para diferentes S/N, con 8 puntos espaciados logarítmicamente en el margen frecuencial de 10 kHz-1 MHz

3.4.4 Obtención de imágenes paramétricas utilizando la parte real de las impedancias

La primera pregunta que hemos de plantearnos, si queremos realizar un algoritmo que extraiga los parámetros de Cole a partir de las imágenes de la parte real de un sistema de TIEM, es qué se representa con la retroproyección de las partes reales de la tensión detectada.

Como se mostró en las ecuaciones (3.44 y 3.45), asumiendo una corriente inyectada idéntica en la referencia y en la imagen, el valor complejo de cada pixel se puede representar como

$$\ln\left(\frac{Z_2^*}{Z_1^*}\right) = \ln\left(\frac{V_2^*}{V_1^*}\right) \Rightarrow \ln\left(\frac{|Z_2|}{|Z_1|}\right) = \ln\left(\frac{|V_2|}{|V_1|}\right) \text{ y } (\phi_2 - \phi_1) = (\theta_2 - \theta_1) \quad (3.62)$$

donde ϕ_i representa la fase de la impedancia reconstruida y θ_i la fase de la tensión detectada.

Si se retroproyecta la parte real de las tensiones se obtiene

$$\ln\left(\frac{V_{r2}}{V_{r1}}\right) = \ln\left(\frac{|V_2| \cos(\theta_2)}{|V_1| \cos(\theta_1)}\right) = \ln\left(\frac{|V_2|}{|V_1|}\right) + \ln\left(\frac{\cos(\theta_2)}{\cos(\theta_1)}\right) = \ln\left(\frac{|Z_2|}{|Z_1|}\right) + \ln\left(\frac{\cos(\theta_2)}{\cos(\theta_1)}\right) \quad (3.63)$$

donde la relación de módulos de impedancia se puede expresar como

$$\ln\left(\frac{|Z_2|}{|Z_1|}\right) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{R_2^2 + I_2^2}{R_1^2 + I_1^2}\right) = \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) + \ln\left(\frac{\sqrt{1 + \left(\frac{I_2^2}{R_2^2}\right)}}{\sqrt{1 + \left(\frac{I_1^2}{R_1^2}\right)}}\right) = \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) + \ln\left(\frac{\sqrt{1 + \tan^2(\phi_2)}}{\sqrt{1 + \tan^2(\phi_1)}}\right) \Rightarrow \quad (3.64)$$

$$\ln\left(\frac{|Z_2|}{|Z_1|}\right) = \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) - \ln\left(\frac{\cos(\phi_2)}{\cos(\phi_1)}\right)$$

sustituyendo (3.64) en (3.63) obtenemos

$$\ln\left(\frac{V_{r2}}{V_{r1}}\right) = \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) + \ln\left(\frac{\cos(\theta_2)}{\cos(\theta_1)}\right) - \ln\left(\frac{\cos(\phi_2)}{\cos(\phi_1)}\right) \approx \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) \quad (3.65)$$

Por tanto, la reconstrucción de la parte real de las tensiones representa aproximadamente la evolución relativa de la parte real de las impedancias, pudiéndose, para que los desfases sean más pequeños y por tanto la aproximación más exacta, retroproyectar las imágenes no respecto a la frecuencia más baja, sino respecto a la imagen medida con la frecuencia inferior más próxima.

La ventaja de la utilización únicamente de la parte real de la impedancia reconstruida es que normalmente es menos ruidosa que la parte imaginaria, pudiéndose obtener *a priori* más exactitud en los resultados. Sin embargo, el hecho de tener que ajustar una función que depende de cuatro parámetros diferentes (ec. 3.66) provoca problemas de convergencia (Lu *et al.*, 1996).

$$\exp\left[\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)\right] = \frac{R_1}{R_2} = \frac{R_\infty + \frac{(R_0 - R_\infty) \left(1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^{(1-\alpha)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(1-\alpha)\right)\right)}{1 + 2\left(\frac{f}{f_c}\right)^{(1-\alpha)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(1-\alpha)\right) + \left(\frac{f}{f_c}\right)^{2(1-\alpha)}}}{R_2} = R_{\infty n} + \frac{(R_{0n} - R_{\infty n}) \left(1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^{(1-\alpha)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(1-\alpha)\right)\right)}{1 + 2\left(\frac{f}{f_c}\right)^{(1-\alpha)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(1-\alpha)\right) + \left(\frac{f}{f_c}\right)^{2(1-\alpha)}} \quad (3.66)$$

Para evitar estos problemas de convergencia, se ha optado por dividir el problema en la aproximación de dos funciones diferentes, tales que cada una de ellas contenga únicamente dos de los parámetros a calcular.

En una primera iteración, se aproximará la función

$$g = \frac{\frac{R(f_i)}{R_1} - \frac{R(f_{i+1})}{R_1}}{\frac{R(f_{i+1})}{R_1} - \frac{R(f_{i+2})}{R_1}} = \frac{\frac{\left(1 + \left(\frac{f_i}{f_c}\right)^{(1-\alpha)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(1-\alpha)\right)\right)}{1 + 2\left(\frac{f_i}{f_c}\right)^{(1-\alpha)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(1-\alpha)\right) + \left(\frac{f_i}{f_c}\right)^{2(1-\alpha)}} - \frac{\left(1 + \left(\frac{f_{i+1}}{f_c}\right)^{(1-\alpha)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(1-\alpha)\right)\right)}{1 + 2\left(\frac{f_{i+1}}{f_c}\right)^{(1-\alpha)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(1-\alpha)\right) + \left(\frac{f_{i+1}}{f_c}\right)^{2(1-\alpha)}}}{\frac{\left(1 + \left(\frac{f_{i+1}}{f_c}\right)^{(1-\alpha)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(1-\alpha)\right)\right)}{1 + 2\left(\frac{f_{i+1}}{f_c}\right)^{(1-\alpha)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(1-\alpha)\right) + \left(\frac{f_{i+1}}{f_c}\right)^{2(1-\alpha)}} - \frac{\left(1 + \left(\frac{f_{i+2}}{f_c}\right)^{(1-\alpha)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(1-\alpha)\right)\right)}{1 + 2\left(\frac{f_{i+2}}{f_c}\right)^{(1-\alpha)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(1-\alpha)\right) + \left(\frac{f_{i+2}}{f_c}\right)^{2(1-\alpha)}}} \quad (3.67)$$

que dependerá sólo de f_c y α . Una vez calculados los valores de estos dos parámetros se sustituirán en la ecuación (3.66), siendo el segundo paso, el cálculo en dicha ecuación de R_{0n} y $R_{\infty n}$, que nos permiten dar el valor de R_0/R_∞ .

Al igual que se hizo con los algoritmos basados en la parte real e imaginaria de las impedancias se ha probado este algoritmo en las mismas condiciones, en cuanto a número de puntos y márgenes frecuenciales. Los resultados encontrados muestran una peor convergencia de este algoritmo cuando la relación señal a ruido es baja (10-20 dB), así como un tiempo de procesado mayor: de 310 ms a 490 ms, empleando de 8 a 32 puntos. En las tablas 3.4 y 3.5 y en las figuras 3.38 y 3.39 se muestran los resultados para dos casos

diferentes, empleando 8 puntos logarítmicamente espaciados en el margen frecuencial de 10 kHz a 1 MHz.

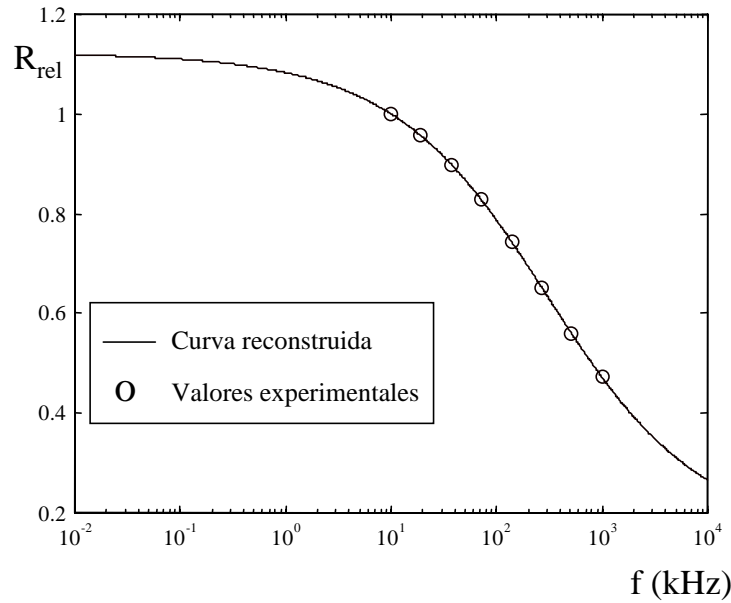


Figura 3.38 Parametrización del modelo de Cole a partir de la parte real de la impedancia

	R_0/R_∞ (7,5)	f_c (kHz) (300 kHz)	α (0,5)
Sin ruido	7,50	300,00	0,50
S/N=10 dB	13,87±270,24	1157,30±2134,50	0,57±0,26
S/N=20 dB	31,95±222,13	1580,50±1256,40	0,55±0,13
S/N=30 dB	7,29±2,31	302,42±42,50	0,50±0,02
S/N=40 dB	7,57±0,98	299,81±12,67	0,50±9e-3
S/N=50 dB	7,47±0,23	299,28±3,66	0,50±2e-3
S/N=60 dB	7,50±0,07	300,06±1,20	0,50±8e-3
S/N=80 dB	7,50±7e-3	299,99±0,14	0,50±1e-4

Tabla 3.4 Valores de media y desviación standard calculados para diferentes S/N, con 8 puntos espaciados logarítmicamente en el margen frecuencial de 10 kHz-1 MHz

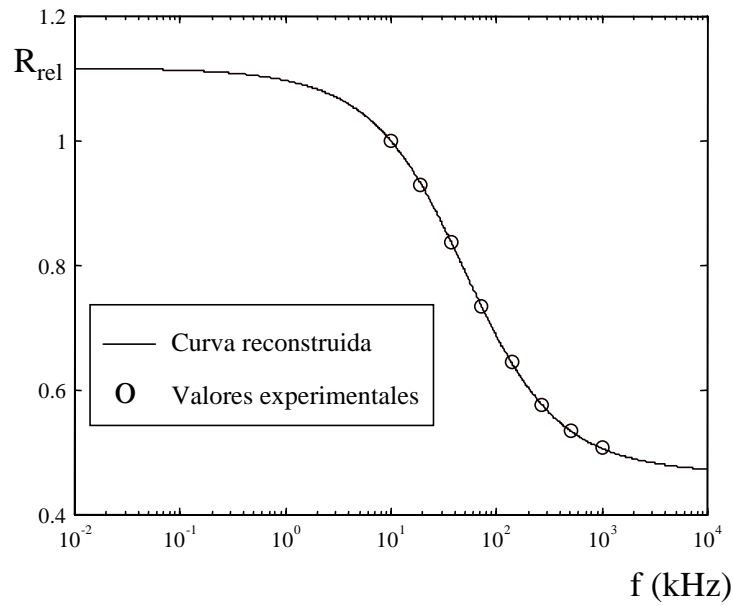


Figura 3.39 Parametrización del modelo de Cole a partir de la parte real de la impedancia

	R_0/R_∞ (2,5)	f_c (kHz) (50 kHz)	α (0,3)
Sin ruido	2,50	50,00	0,30
S/N=10 dB	7,04±33,43	1100,60±8038,60	0,51±0,43
S/N=20 dB	2,41±0,60	60,01±37,86	0,26±0,21
S/N=30 dB	2,49±0,18	52,08±10,48	0,29±0,06
S/N=40 dB	2,50±0,05	50,32±1,85	0,30±1e-2
S/N=50 dB	2,50±1e-2	50,10±0,55	0,30±4e-3
S/N=60 dB	2,50±5e-3	50,03±0,18	0,30±1e-3
S/N=80 dB	2,50±6e-4	50,00±0,02	0,30±2e-4

Tabla 3.5 Valores de media y desviación standard calculados para diferentes S/N, con 8 puntos espaciados logarítmicamente en el margen frecuencial de 10 kHz-1 MHz.

Resumen del capítulo

La tomografía y la espectroscopia de impedancia eléctrica han estado tradicionalmente tratadas por separado, pero puede ser un avance utilizar conceptos y técnicas asociados a la espectroscopia en el campo de la tomografía, de cara a poder determinar cuantitativamente las características de los tejidos in vivo. El objetivo de este capítulo ha sido el desarrollo de las herramientas necesarias para la obtención de las denominadas imágenes paramétricas que representan, como indica su nombre, de forma parametrizada la evolución frecuencial de los pixels que conforman las imágenes multifrecuencia de tomografía de impedancia eléctrica. Para ello se ha estudiado previamente los denominados problemas directo e inverso, que nos han permitido hallar, por un lado, qué estrategia de adquisición en los tomógrafos es óptima para distinguir los diferentes tejidos y por otro lado saber qué limitaciones nos imponen los diferentes algoritmos de reconstrucción que son utilizados en la obtención de las imágenes.

Antes de definir qué estrategia de inyección es la óptima se ha de decidir cuál es el criterio de distinguibilidad que se seguirá para realizar dicha elección. La bibliografía sobre el tema nos ha permitido comprobar que las definiciones extraídas a partir de la resolución del problema directo se han tratado tanto de forma absoluta, como las empleadas por Murai y Kagawa en 1985 para la definición de sensibilidad o Isaacson en 1986 para la de distinguibilidad, o bien de forma relativa, como la definición de sensibilidad que propone Seagar *et al.*, en 1987. Como lo que se pretende es extraer la información del comportamiento espectral de los pixels de las imágenes, y éstas son calculadas a partir de la retroproyección de los cambios relativos de las tensiones detectadas, es lógico plantear la definición de distinguibilidad para cada par diferencial detector como

$$\delta = \left\| \frac{V_{lm}(\sigma_2, j) - V_{lm}(\sigma_1, j)}{V_{lm}(\sigma_1, j)} \right\|$$

Un estudio de la optimización de esta expresión, para el problema circular en dos dimensiones y el par diferencial con más sensibilidad en cada inyección, presenta a la inyección adyacente como la más sensible, siendo esta sensibilidad unas dos veces mayor que con la inyección polar y unas cuatro veces mayor que con la trigonométrica. Este resultado se vuelve a confirmar si extendemos el análisis al caso no centrado mediante la utilización de transformaciones conformes (Pidcock *et al.*, 1995; Frangi, 1996). Otra ventaja de la estrategia de inyección adyacente es que la mayor contribución de sus armónicos provoca un aumento de resolución espacial respecto al resto de estrategias de inyección. El problema fundamental de la inyección adyacente son los bajos niveles de tensión detectados, que obliga al diseño de un sistema con bajo nivel de ruido y alto rechazo a los errores no sistemáticos como puedan ser el CMRR. Complementando este estudio, se han presentado y comparado gráficamente las limitaciones teóricas que presentan cada una de las inyecciones, así como la influencia de la tercera dimensión en los modelos de dos dimensiones de TIE.

En cuanto al problema inverso, se ha presentado cuál es el efecto, sobre la cuantificación de los valores de impedancia, que provocan los distintos algoritmos de retroproyección (Morón, 1996; Frangi, 1996). Esto nos ha permitido observar la necesidad de tener unas herramientas (Frangi *et al.*, 1996, 1997) que nos permitan compensar este efecto, ya que tendrá una influencia directa en el cálculo de las imágenes paramétricas

Se ha comprobado, tal como presentó Fitzgerald en 1997, que la evolución frecuencial de los pixels de las imágenes multifrecuencia, responde a un arco de Cole con una rotación debido al valor de la impedancia de la imagen que se toma como referencia. Esto imposibilita la aplicación directa de los algoritmos desarrollados para las aplicaciones de espectroscopia y que sea necesario el desarrollo de nuevos algoritmos. Fitzgerald presentó un algoritmo que, basándose en el comportamiento simétrico que presenta una progresión geométrica de frecuencias alrededor de la frecuencia central, permitía hallar la rotación que había sufrido el arco. Sin embargo, este algoritmo obligaba, como se ha dicho, a la utilización de una inyección de frecuencias en progresión geométrica, siendo además muy sensible su convergencia a la relación entre las frecuencias utilizadas y la frecuencia central (Fitzgerald *et al.*, 1997b). Para solucionar estas limitaciones se ha desarrollado un algoritmo que permite extraer la misma información, independientemente de las frecuencias utilizadas. Este estudio además se ha completado con el desarrollo de otro algoritmo, que aunque más lento que el primero, ya que divide el problema que inicialmente es de cuatro incógnitas en dos problemas de dos incógnitas, permite la extracción de los parámetros de Cole a partir únicamente de las imágenes de la parte real, solucionando de esta forma las limitaciones que imponen los otros algoritmos al depender de la parte imaginaria, que normalmente es más ruidosa, por sus bajos valores, que la parte real.