

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Departament d'Enginyeria Electrònica

**ESTUDIO DE LA VARIABILIDAD DEL
RITMO CARDÍACO MEDIANTE
TÉCNICAS ESTADÍSTICAS,
ESPECTRALES Y NO LINEALES**

Autor: Miguel Ángel García González
Director: Ramon Pallàs Areny

Febrero de 1998

CAPÍTULO 5: ANÁLISIS DE DINÁMICA NO LINEAL

*“¿Por qué contentarnos con vivir a rastras cuando sentimos el anhelo de
volar?”*

Hellen A. Keller

5 Análisis de dinámica no lineal

5.1 Introducción

En los capítulos anteriores se ha supuesto que la variabilidad del ritmo cardíaco podía ser caracterizada de dos formas diferentes: en el capítulo 2, al utilizar métodos estadísticos, se ha supuesto que la serie RR se puede tratar como una variable aleatoria de la cual extraemos parámetros como la desviación estándar, por ejemplo; en los capítulos 3 y 4, al emplear métodos espectrales, se supone que la serie RR es la salida de un sistema aproximadamente lineal, por lo que se supone que conocida la entrada al sistema se puede predecir su salida (es decir, se supone un sistema determinista). La extensión de la aplicación de los métodos espectrales en el campo médico se debe a la facilidad de poder separar diversos osciladores asociados a diferentes entradas al sistema (respiración, variaciones de presión sanguínea, etc.). No obstante, en registros ambulatorios el análisis frecuencial muestra una tendencia hacia una característica $1/f$, que no puede ser descrita mediante un sistema lineal.

En los últimos años se han propuesto nuevos métodos para el análisis de la variabilidad del ritmo cardíaco que suponen que la dinámica del sistema cardiovascular es no lineal. La irrupción de la teoría del caos y la caracterización de sistemas a partir de la dimensión fractal o el exponente de Hurst han tenido su aplicación directa en el análisis de registros ambulatorios. Por otro lado, la aplicación de estadísticas de orden superior (por ejemplo, el biespectro) ha conseguido poner en evidencia el grado de no linealidad de los sistemas que afectan a la variabilidad del ritmo cardíaco.

El propósito de este capítulo es doble. Por un lado, con el empleo del biespectro se tratará de poner de manifiesto la no linealidad de la función de transferencia entre el sistema respiratorio y la arritmia sinorrespiratoria. Si dicha función es no lineal se puede suponer que la dinámica de la serie RR es también no lineal. Por otro lado, se propondrán diversos métodos de análisis de la serie RR basados en la dinámica caótica (se supone que el sistema es poco predecible). Estos métodos serán presentados desde la pura definición matemática de los índices de caracterización de dinámica caótica hasta la definición de estimadores rápidos que aportan suficiente información para la caracterización de la serie RR.

5.2 Análisis de la secuencia RR empleando el biespectro

El biespectro es una herramienta útil para detectar posibles no linealidades en la dinámica de un sistema. Su utilidad en el análisis de la secuencia RR estriba en su capacidad de detectar relaciones entre osciladores. Estas relaciones se hacen patentes en la representación gráfica del módulo del biespectro ya que aparecen las componentes espectrales que se deben a batidos de dos o más frecuencias.

En primer lugar se presentará una introducción a las estadísticas de orden mayor que dos (Higher Order Statistics o HOS) para pasar a la definición del biespectro. A continuación se probará esta herramienta de análisis con señales sintéticas para ser aplicada después a las secuencias RR reales.

5.2.1 Introducción al biespectro [Mendel, 1991]

El procesado digital de señal se ha basado tradicionalmente en estadísticas de segundo orden (autocorrelación, espectro de potencia, etc.). El empleo de estadísticas de mayor orden (HOS) tiene por objetivo caracterizar con mayor exactitud la señal de interés. Se debe recordar que los procesos gaussianos se describen completamente con estadísticas de orden 2. Cuando la señal de interés no es un proceso gaussiano debe analizarse utilizando HOS. Los algoritmos en los que se basan las HOS parten del concepto de cumulantes que realizan la misma tarea que la covarianza en las estadísticas de segundo orden.

Recuérdese que la función de autocorrelación es el segundo momento. Se define el tercer momento como:

$$M_3(m_1, m_2) \equiv \langle x(n) x(n + m_1) x(n + m_2) \rangle \quad (5.1)$$

donde $x(n)$ es la señal a estudiar y $\langle \rangle$ es el operador esperanza matemática. De forma similar se pueden definir los momentos de orden superior. El espectro de potencia de una señal se puede estimar mediante la transformada de Fourier de la autocorrelación o bien hallando el cuadrado del módulo de la transformada de Fourier de la señal original.

Se define el biespectro como la transformada doble de Fourier del cumulante de orden tres. El cumulante de orden tres se define como

$$C_3(m_1, m_2) = M_3(m_1, m_2) - M_1[M_2(m_1) + M_2(m_2) + M_2(m_1 - m_2)] + 2M_1^3 \quad (5.2)$$

donde M_i denota el momento de orden i . De forma análoga a como se calcula el espectro de potencia, el biespectro puede ser estimado como:

$$B(k, l) = X(k) X(l) X^*(k + l) \quad (5.3)$$

donde $X(k)$ es la transformada de Fourier de la señal de interés (la cual debe haber sido enventanada para evitar el problema de la duración finita de la señal). Se define la bicoherencia como el biespectro normalizado entre 0 y 1. Esta normalización se realiza para evitar los problemas de varianza del estimador biespectral.

Una ventaja importante del análisis de señales mediante el biespectro es que se pueden detectar acoplamientos de fase entre distintos osciladores (que son debidos a no linealidades del sistema). Por otro lado, si la señal de interés lleva superpuesto ruido gaussiano, éste no afectará (en principio) al análisis. Esto únicamente es cierto cuando la duración de la señal es infinita.

A partir de ahora, cuando se hable de biespectro nos referiremos exclusivamente a su módulo. Como las representaciones gráficas se realizan con curvas de nivel es indistinto emplear el biespectro o la bicoherencia.

5.2.2 Aplicación del biespectro a señales sintéticas

Una vez definido el biespectro se ha diseñado el algoritmo que permite calcularlo a partir de las transformadas de Fourier de la señal original. Se han probado diferentes señales sintéticas para observar su comportamiento. Se ha empleado siempre una ventana de Hanning.

En primer lugar se ha probado una señal senoidal pura de frecuencia 0,1 Hz. La estimación del biespectro es la que se presenta en la figura 5.1 (izquierda). Obsérvese que el biespectro da un pico centrado en las coordenadas (0,1 Hz, 0,1 Hz) y no aparece ningún otro pico relevante. En la figura 5.1 (derecha) se observa el resultado del biespectro tras pasar por un sistema no lineal con característica exponencial. Se aprecia que han aparecido picos espúrios debidos a la no linealidad del sistema.

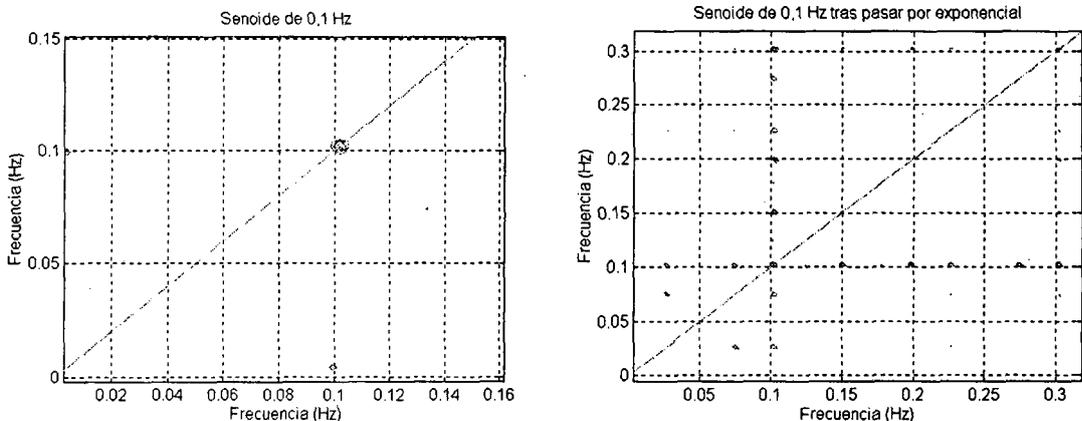


Figura 5.1 Ejemplo de biespectro para una señal senoidal pura (izquierda) y para la salida de un sistema no lineal excitado por la misma señal (derecha).

En la figura 5.2 se muestran los resultados cuando se tienen modulaciones de amplitud y frecuencia que, según se ha visto en los capítulos anteriores, juegan un papel importante en el estudio de la variabilidad del ritmo cardíaco. Obsérvese que en el caso de la modulación de amplitud, el biespectro presenta dos picos en las coordenadas (f_s, f_m) y (f_m, f_s) donde f_s es la frecuencia de la portadora y f_m es la frecuencia moduladora. En el caso de la modulación de frecuencia, el biespectro resultante es muy complicado, pues es el fruto de todos los batidos de frecuencia presentes en la señales y de sus espúrios. Es por esta razón que el biespectro de una señal modulada en frecuencia se asemeja al biespectro de ruido que es el que se muestra en la figura 5.3. Aunque teóricamente el biespectro de ruido gaussiano debería ser nulo, la duración limitada de la señal provoca la aparición de componentes frecuenciales.

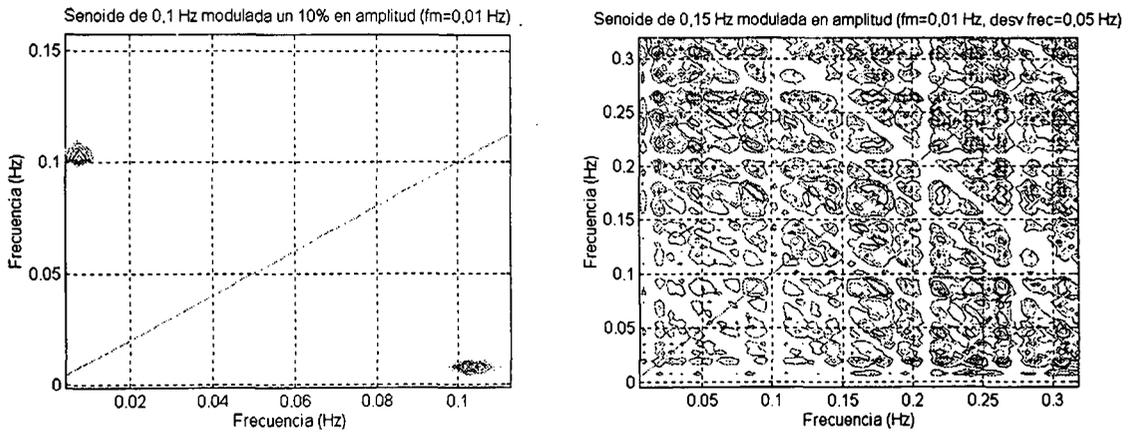


Figura 5.2 Biespectro de senoides moduladas en amplitud (izquierda) y en frecuencia (derecha).

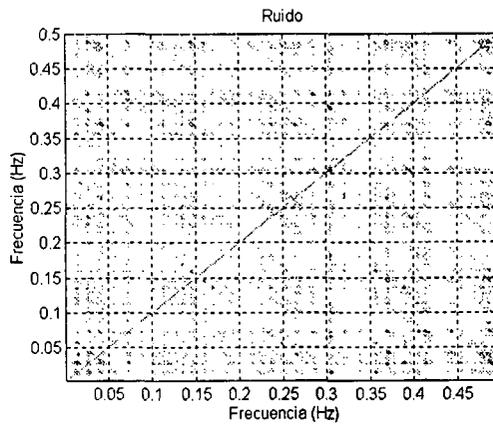


Figura 5.3 Biespectro de ruido gaussiano.

Según puede observarse en la figura 5.1, una componente monofrecuencial pura cae en la bisectriz del biespectro. Cuando esta señal está relacionada con otra aparecen picos en los puntos (f_1, f_2) y (f_2, f_1) siendo f_1 y f_2 las dos frecuencias relacionadas. La aparición de batidos provoca picos en los puntos (f_1+f_2, f_1) , (f_1, f_1+f_2) , (f_1+f_2, f_2) y (f_2, f_1+f_2) . La aparición de armónicos lleva a resultados similares. La aparición de batidos de frecuencia y de armónicos es un indicador de no linealidad de un sistema. Por lo tanto, el biespectro puede considerarse como una herramienta idónea para el análisis de no linealidad.

5.2.3 Aplicación del biespectro a secuencias RR

El biespectro se puede aplicar en secuencias RR para discernir la relación entre dos o más osciladores. Se han analizado diversas series RR para observar el comportamiento de los diversos osciladores en las siguientes condiciones:

- a) Durante un registro ambulatorio de un periodo de sueño profundo.
- b) Durante un registro ambulatorio durante esfuerzo físico.
- c) Durante respiración periódica a 0,15 Hz.

En el primer caso tenemos un registro donde ningún oscilador está controlado. El análisis es interesante puesto que en dicho registro aparecen las ondas de corte. El segundo registro aporta información del cambio de relación entre osciladores durante un período de esfuerzo físico. Se observará que la relación cambia en función del nivel de descarga simpática y vagal que experimenta el sujeto. El último ejemplo servirá para poder predecir el nivel de aumento del índice LF/HF que puede experimentar un sujeto cuando pasa de respirar periódicamente a respirar con frecuencia respiratoria modulada.

Ejemplo 1: sueño profundo.

En la figura 5.4 se presenta el registro analizado. Dicho registro está dominado fundamentalmente por una actividad de frecuencia rápida asociada con la respiración y otras de frecuencia mucho menor asociada a cambios en el nivel de ritmo cardíaco medio. Por otro lado, el nivel de arritmia sinorrespiratoria está modulado en amplitud. Además aparecen ondas de corte.

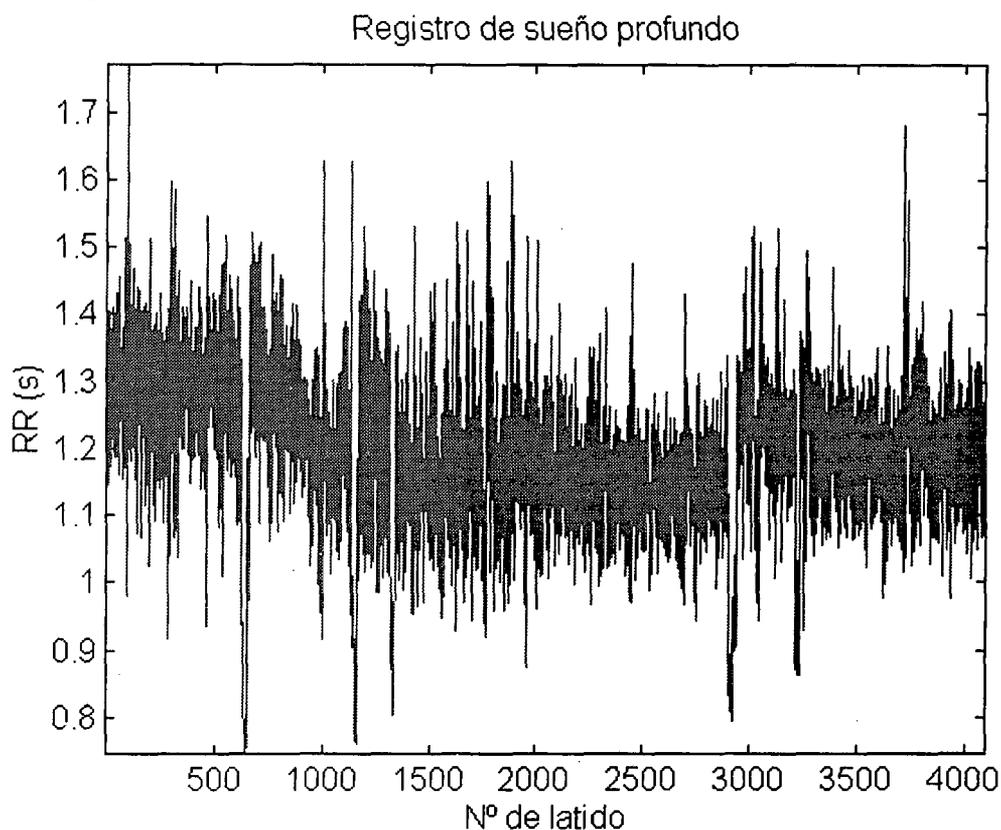


Figura 5.4 Serie RR durante sueño profundo.

El biespectro de la señal anterior se presenta en la figura 5.5. Se puede observar perfectamente la componente en alta frecuencia asociada a la respiración (cerca de los 0,27 Hz) y todo un conjunto de osciladores a muy baja frecuencia. Otro hecho destacable es la presencia de no linealidad que en este registro aparece de forma clara en la diagonal perpendicular a la bisectriz. Esta diagonal implica una relación no lineal entre la arritmia sinorrespiratoria y el resto de componentes. Este registro ejemplifica un caso de profunda no linealidad en la variabilidad del ritmo cardíaco durante monitorización ambulatoria. A continuación se observarán más no linealidades durante el transcurso de pruebas.

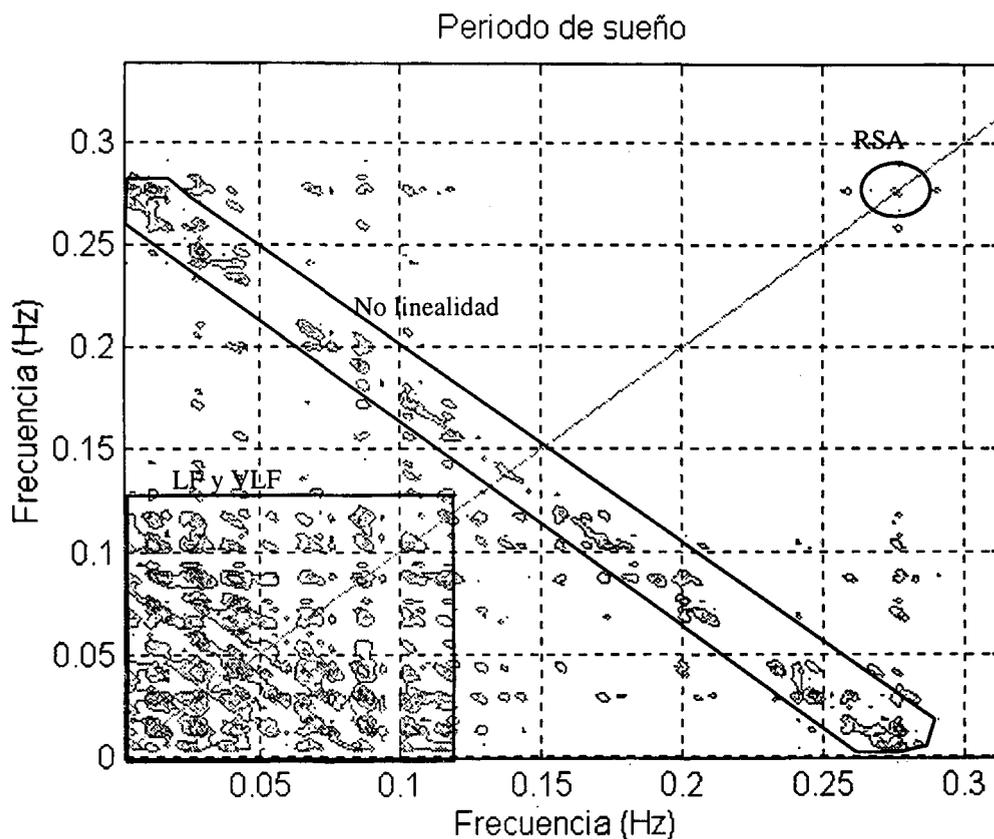


Figura 5.5 Biespectro durante un periodo de sueño profundo.

Ejemplo 2: registro durante ejercicio físico

El siguiente ejemplo muestra que la no linealidad durante la ejecución de un esfuerzo físico depende de la fase de ejecución en el sujeto medido. El registro se realizó en un individuo sano y deportista de 24 años, el cual inició el ejercicio de manera suave para después pedalear al límite de sus fuerzas. Tras el período de esfuerzo máximo se midió el período de recuperación.

En la figura 5.6 se muestran los diversos segmentos escogidos para realizar el estudio. Se han analizado los períodos de inicio de ejercicio, ejercicio suave, ejercicio máximo y recuperación. Obsérvese que durante el período de ejercicio máximo la variabilidad del ritmo cardíaco es muy reducida. Durante la recuperación, la serie RR se caracteriza por una fuerte descarga vagal. En cambio, al inicio del ejercicio, el predominio es de descarga simpática. En la figura 5.7 se presentan los biespectros para cada uno de estos períodos. Obsérvese que en la fase de inicio de ejercicio, el biespectro presenta una componente principal cerca de 0,1 Hz asociada con la presencia de ondas de Mayer. Dicha componente presenta batidos de frecuencia con otra situada a 0,05 Hz y con la arritmia sinorrespiratoria situada en 0,25 Hz. Durante la ejecución de ejercicio suave, el biespectro queda dominado por la baja frecuencia y aparecen no linealidades asociadas a la componente de 0,1 Hz.

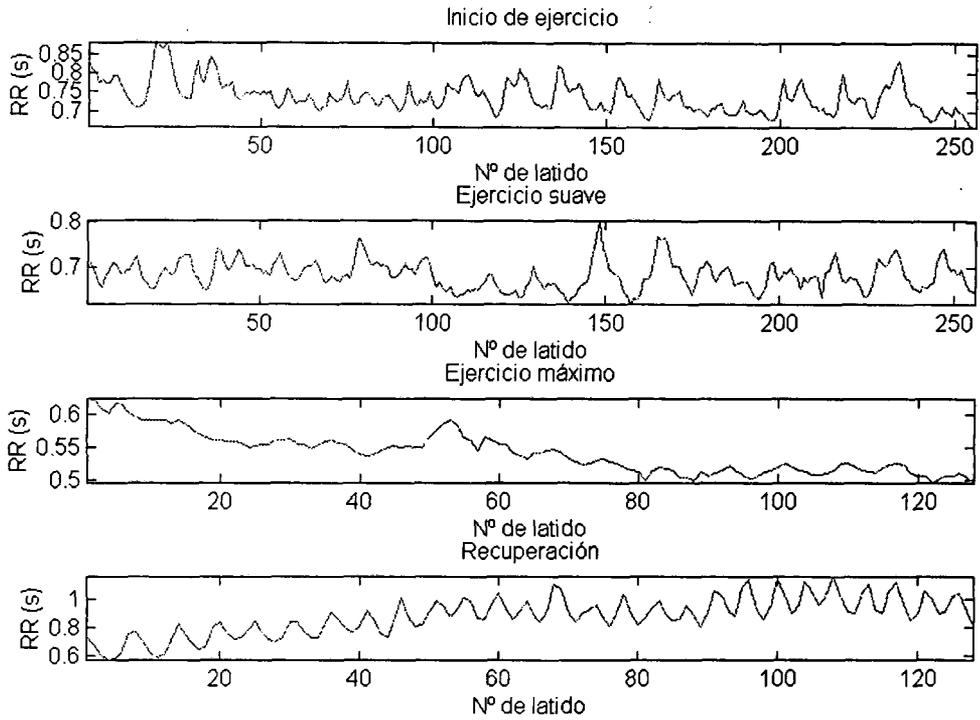


Figura 5.6 Registros analizados durante ejercicio.

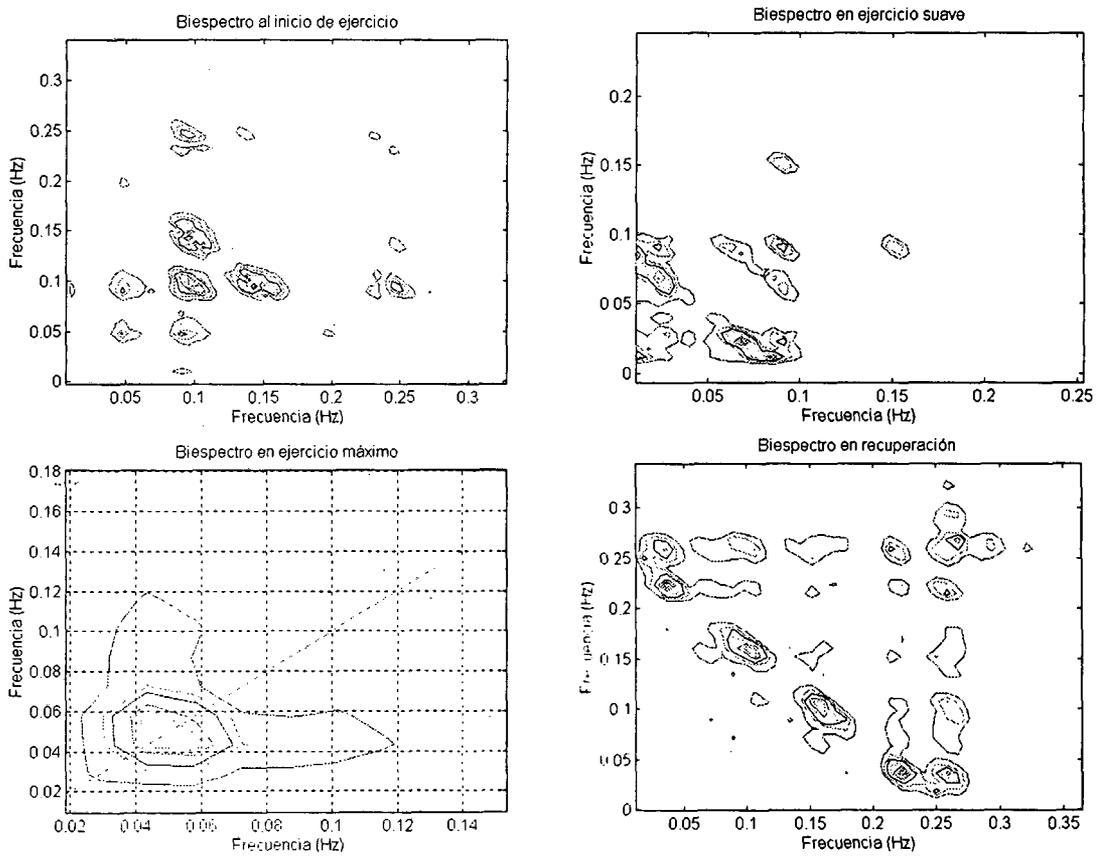


Figura 5.7 Biespectro para diversos períodos de esfuerzo físico.

Durante la ejecución de ejercicio máximo, el biespectro sólo presenta una componente de baja frecuencia situada en 0,05 Hz. La arritmia sinorrespiratoria ha desaparecido por completo. Finalmente, en el período de recuperación, la arritmia sinorrespiratoria aparece de forma notable y presenta una no linealidad muy acusada como indica la diagonal que une los puntos (0 Hz, 0,25 Hz) y (0,25 Hz, 0 Hz). Se debe destacar que esta presencia de arritmia sinorrespiratoria implica una alta descarga vagal que permite la desaceleración del ritmo cardíaco hasta niveles de reposo.

Este ejemplo ha mostrado que el grado de no linealidad del sistema cardiovascular puede depender del tipo de actividad que se está ejecutando. En el tercer ejemplo se van a comparar diversos sujetos que estaban realizando la misma actividad.

Ejemplo 3: registros durante respiración periódica

En el capítulo 3 se comentó que diferentes formas de respirar en un sujeto podían modificar la estimación del índice LF/HF. Observando la tabla 3.10 se concluye que la variación entre sujetos es enorme. Dicha variabilidad nos llevó a preguntarnos sobre el grado de no linealidad en la función de transferencia entre la respiración y la arritmia sinorrespiratoria. Para evaluar si dicha no linealidad podría ir asociada a los coeficientes hallados en el estudio del apartado 3.4.4 se ha calculado el biespectro de la señal RR y de la señal RESP en el primer caso de respiración periódica para los cuatro primeros sujetos.

En la figura 5.8 se muestran los biespectros de las señales RESP (izquierda) y RR (derecha) para cada uno de los cuatro sujetos estudiados. Se ha especificado asimismo el parámetro C1 (véase apartado 3.4.4) para cada uno de los sujetos. Recuérdese que este parámetro especifica el cociente entre los espectros de la serie RR cuando se respira en frecuencia modulada y periódicamente a la frecuencia de 0,05 Hz. En cierto modo, C1 indica el incremento del parámetro LF/HF que se tendría cuando el sujeto dejara de respirar periódicamente y comenzara a respirar con frecuencia modulada. Tal como se observa en la figura, **a menor parámetro C1 corresponde un mayor grado de no linealidad en la función de transferencia entre la respiración y la arritmia sinorrespiratoria**. Efectivamente, se debe tener en cuenta que el biespectro de la señal RESP es aproximadamente el de una senoide mientras que en el caso de C1=1,25 el biespectro de la serie RR presenta una gran no linealidad. La conclusión que se puede extraer de este análisis es: **a mayor no linealidad del sistema corresponde una menor sensibilidad del espectro de la serie RR asociada a la forma de onda del oscilador excitante**. Se puede formular la hipótesis de que a mayor no linealidad del sistema corresponde una mayor robustez frente a variabilidades de los osciladores. La aplicación inmediata de este resultado es que en aquellos sujetos donde la función de transferencia es poco lineal no es necesario controlar estrictamente la respiración para tener una estimación correcta del índice LF/HF. Por otro lado, en registros de monitorización ambulatoria se puede suponer que si el segmento a analizar espectralmente presenta un grado elevado de no linealidad (tal y como se ha visto en muchos casos), la estimación del índice LF/HF puede considerarse correcta a pesar de que no se controlen ni la forma de onda ni las variaciones de frecuencia de los osciladores. Sólo para aquellos casos en que el biespectro presente picos espectrales únicamente sobre la bisectriz será necesario un análisis adicional o un rechazo del resultado obtenido.

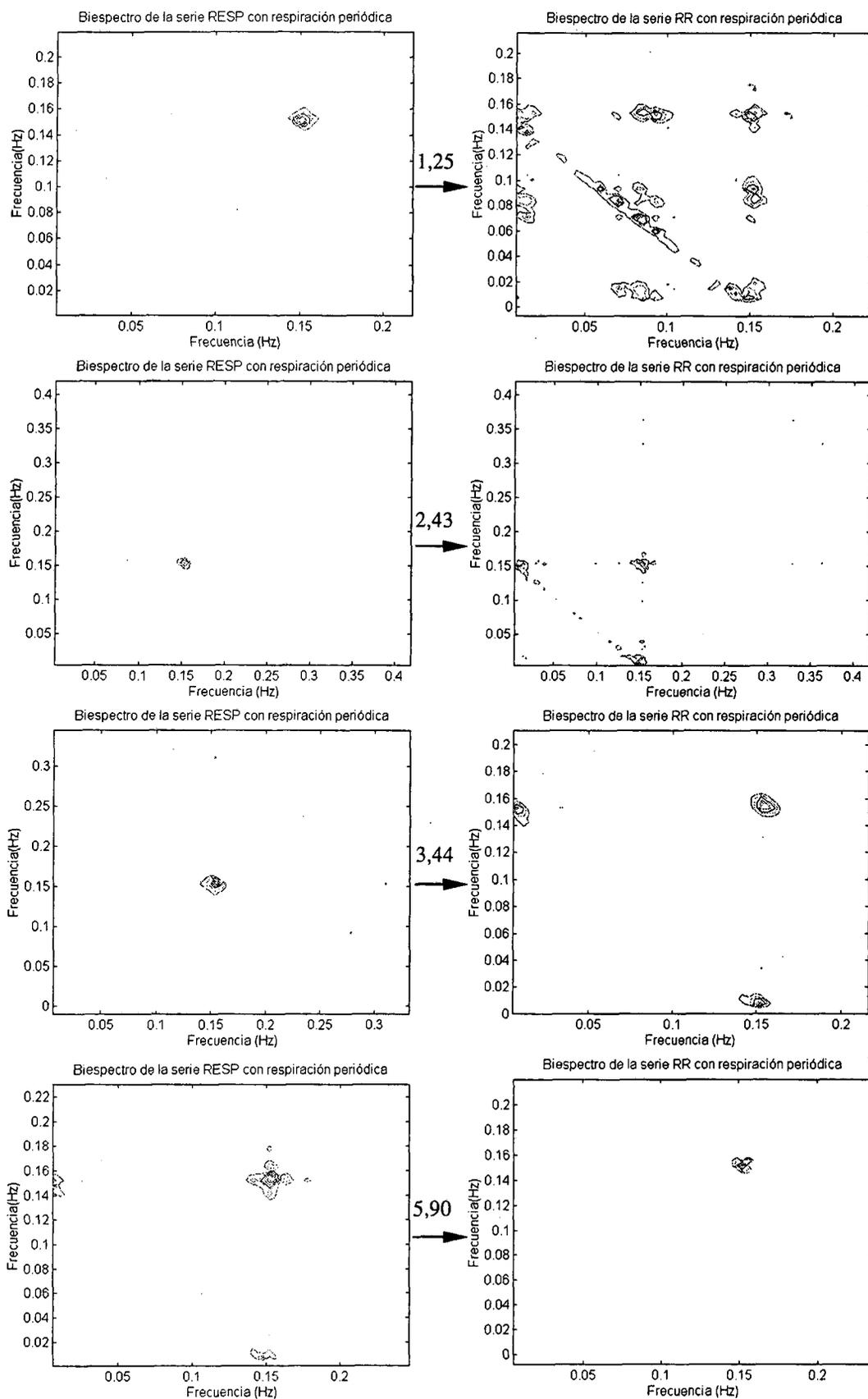


Figura 5.8 Biespectro de la secuencia RESP (izquierda) y RR (derecha) para cuatro sujetos cuando practicaban respiración periódica (sobre las flechas se indica el parámetro C1 (véase el apartado 3.4.4)).

5.2.4 Conclusiones sobre la aplicación del biespectro

El biespectro es una herramienta idónea para mostrar las posibles no linealidades asociadas a la regulación del sistema cardiovascular. Tras eventanar la secuencia RR, el análisis mediante el biespectro revela que el grado de no linealidad asociado a diversos osciladores dependen del sujeto y del tipo de actividad que esté desarrollando. Por otro lado, la no linealidad parece estar casi siempre presente cualquiera que sea dicha actividad.

Se observa una alta no linealidad en registros de sueño profundo así como en períodos de recuperación después de esfuerzo (asociados a una alta descarga parasimpática). Por otro lado, a mayor no linealidad en la función de transferencia entre la respiración y la arritmia sinorrespiratoria corresponde un menor grado de variación en el espectro de la secuencia RR asociado a la forma de respirar.

5.3 Análisis de la complejidad: caos y fractales

Para un observador no familiarizado con las series RR, éstas aparecen como señales “complejas” donde diríase que hay ciertas ondas repetitivas superpuestas a un comportamiento aparentemente aleatorio de la señal. El objetivo de este apartado es describir y cuantificar la complejidad de la variabilidad del ritmo cardíaco en diversas situaciones.

Se comenzará con una introducción a las técnicas gráficas para la representación de señales complejas (plano de fase, diagrama de Poincaré, mapas de retorno) para presentar a continuación los métodos de cuantificación de la complejidad: dimensión fractal, exponente de Hurst, dimensión de correlación, etc. Estos métodos, que a la postre reducen la serie a un único parámetro, serán en principio simulados y después aplicados a series RR reales. Finalmente, se comprobará que el grado de complejidad de la señal varía fuertemente a lo largo de los registros ambulatorios.

5.3.1 Introducción al análisis de complejidad de señales: dinámica caótica y fractales [Denton et al., 1990]

Es bien conocido que un sistema no lineal, por sencillo que sea, puede presentar una respuesta muy compleja. Cuando la respuesta de un sistema no lineal depende fuertemente de las condiciones iniciales y es poco predecible se considera que tiene un comportamiento caótico. No se debe confundir un proceso caótico con un proceso aleatorio. Cuando el proceso es caótico, si se conoce con una precisión infinita la condición inicial del sistema se puede saber el estado en cualquier instante. Es decir, un proceso caótico es determinista aunque poco predecible.

Se va a suponer que el sistema no lineal a estudiar está caracterizado por la siguiente función generatriz (**mapa**):

$$X_{n+1} = f(X_n) \quad (5.4)$$

Conociendo la condición inicial (X_0) se obtiene la serie temporal por iteración de (5.4). Por lo tanto, el valor de X_n se obtiene componiendo la función f n veces. Un ejemplo clásico para entender los diferentes comportamientos que puede tener un sistema no lineal es la ecuación logística que es una aproximación de la población de una especie en un ecosistema y está definida como

$$X_{n+1} = c \cdot X_n \cdot (1 - X_n) \quad (5.5)$$

El valor de la constante c es el que fija el comportamiento del sistema. Obsérvese que si $X_0 = 0$ ó $X_0 = 1$ se obtendrá que $X_{n+1} = 0$ para $n > 0$. Para mostrar los posibles comportamientos supondremos $X_0 = 0,25$ en todos los casos y simularemos la serie para diversos valores de c . En la figura 5.9 se muestran los resultados para 6 elecciones diferentes del parámetro c .

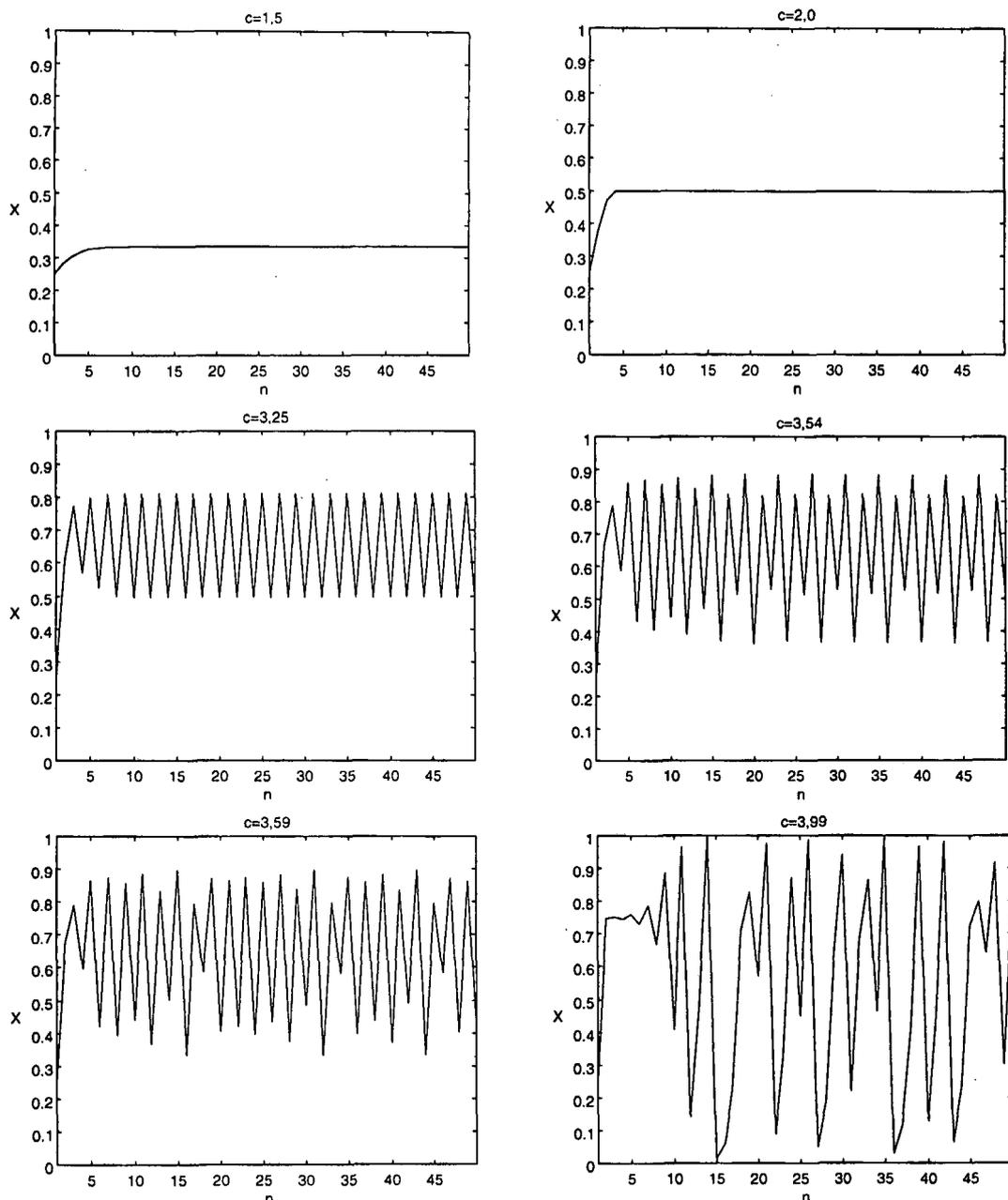


Figura 5.9 Diferentes simulaciones de la ecuación logística para diversos valores de c . La condición inicial es igual a 0,25.

Para valores de c pequeños (menores que 3), la serie converge hacia un punto fijo que depende del valor de c (período 1). Para c entre 3 y 3,45 aparece una oscilación de período 2. A medida que aumenta el parámetro c van apareciendo oscilaciones de otros períodos. Esto es debido al conocido proceso de **bifurcación**. Un análisis teórico [Denton et al., 1990] revela que a partir de 3,57 se produce el caos. En la figura 5.9 se observa el punto fijo para $c = 1,5$ y $c = 2$. La oscilación de período 2 (primera bifurcación) se muestra para $c = 3,25$. En el caso de $c = 3,54$ se ha producido una segunda bifurcación. Para $c = 3,59$ ya tenemos un proceso caótico en el cual aún puede observarse cierta regularidad (aunque no hay una periodicidad estricta). En el caso de $c = 3,99$ el proceso es claramente caótico. Una de las propiedades que caracterizan a un proceso caótico es su sensibilidad a las condiciones iniciales. En la figura 5.10 se muestran dos series escogiendo $c = 3,99$ y $X_0 = 0,2500$ en un caso y $X_0 = 0,2501$ en el

otro. Obsérvese que aunque al principio ambas series se parecen, al cabo de poco tiempo el comportamiento es completamente diferente.

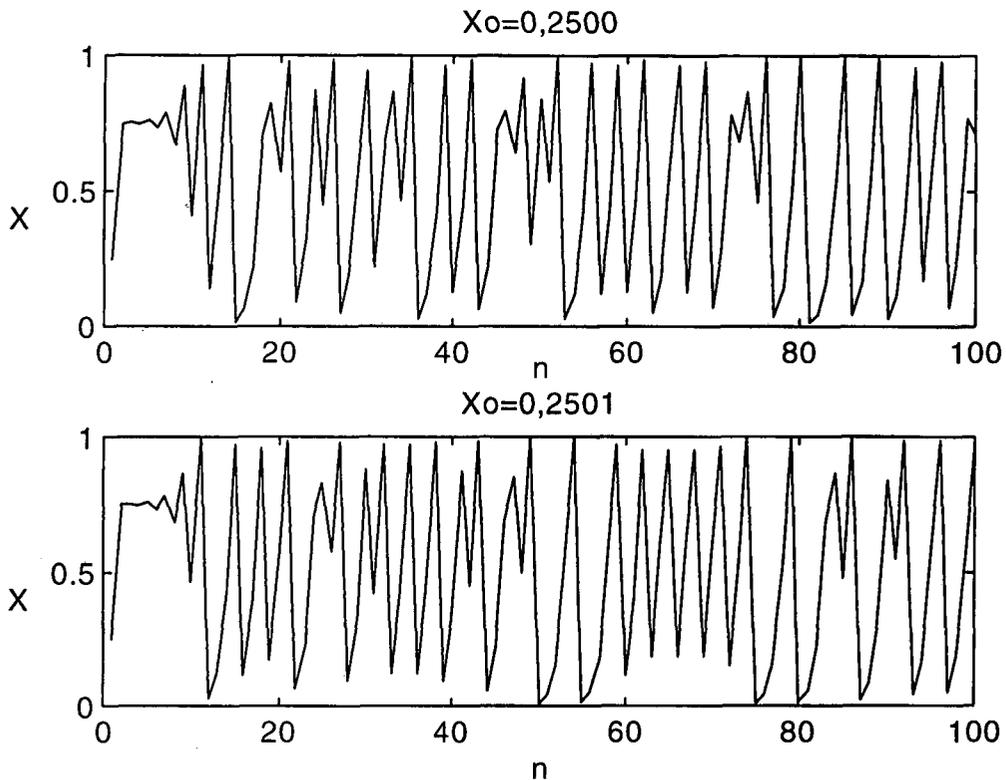


Figura 5.10 Comportamiento de la ecuación logística para $c = 3,99$ y dos condiciones iniciales muy parecidas.

Se puede definir caos como aquel comportamiento impredecible que aparece en un sistema dinámico determinístico debido a la sensibilidad a las condiciones iniciales [Denton et al., 1990].

Existen diferentes métodos para representar la característica de un sistema dinámico. La representación más extendida es el diagrama en el plano de fase cuando la señal analizada es continua o bien el mapa de retorno cuando la señal está muestreada. El caso que nos interesa es este último. Se define el mapa de retorno de primer orden como la representación de la señal X_{n+1} respecto a la señal X_n . De forma similar se pueden representar los mapas de retorno de orden k como la representación de la señal X_{n+k} respecto a la señal X_n . Obsérvese que todas estas representaciones tienen en común que representan una señal respecto a sí misma retardada un cierto número de muestras. En la figura 5.11 se presentan mapas de retorno de primer orden para las señales representadas en la figura 5.9. Obsérvese que para los dos primeros casos tenemos un punto fijo, para el tercer caso aparecen dos puntos asociados a la oscilación de período dos y en el cuarto caso tenemos cuatro puntos asociados a la doble bifurcación. Finalmente, el elevado número de puntos que aparecen en los dos últimos casos indica la presencia de caos. Pero hay que remarcar que estos puntos en el mapa de retorno están ordenados, mostrando, evidentemente, la forma del mapa que da origen al proceso (una parábola).

En ciertos casos es interesante aplicar un mapa de retorno de orden mayor. En la figura 5.12 se presentan mapas de retorno de diferentes órdenes para $c=3,99$. Obsérvese

que la traza que aparece en los mapas de retorno es independiente de las condiciones iniciales. Se aprecia también que las trazas que aparecen son las sucesivas composiciones del mapa. El empleo de los mapas de retorno de orden superior a 1 pone de manifiesto la aparición de periodicidades. Por ejemplo, en el caso de una bifurcación de período 2, su mapa de retorno de orden 2 se reduce a un único punto fijo. En la práctica se emplean estos mapas para detectar la presencia de atractores. Dicha presencia sólo es evidente cuando se utiliza un retardo (un orden del mapa de retorno) idóneo.

Por otro lado, el efecto del ruido sobre la serie temporal a analizar puede afectar a la interpretación de los mapas de retorno. En la figura 5.13 se muestran los mapas de retorno de primer orden para la ecuación logística ($X_0 = 0,25$, $c = 3,99$) a la cual se ha añadido ruido gaussiano con diferentes niveles de amplitud.

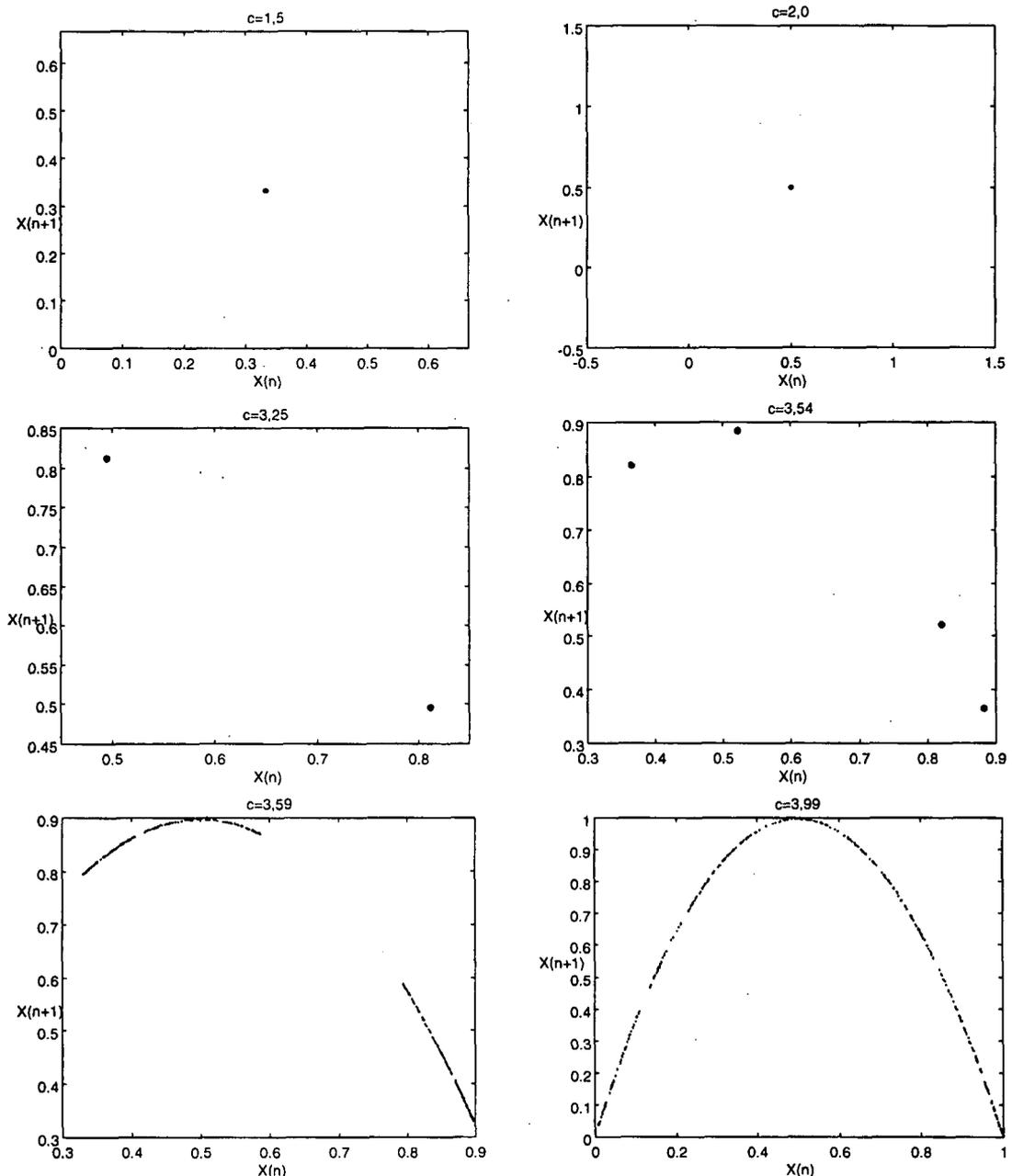


Figura 5.11 Mapas de retorno de primer orden para la ecuación logística para diferentes valores de c .

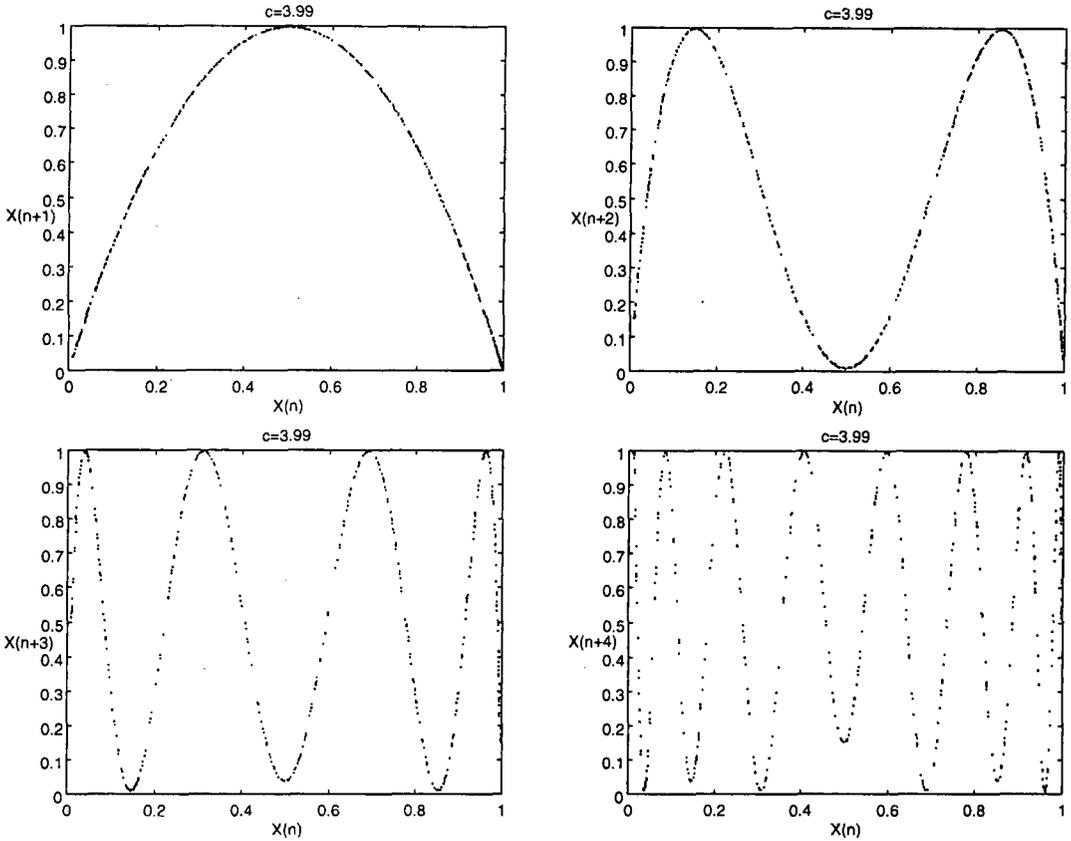


Figura 5.12 Mapas de retorno de orden 1, 2, 3 y 4 para $c = 3,99$ en el caso de la ecuación logística.

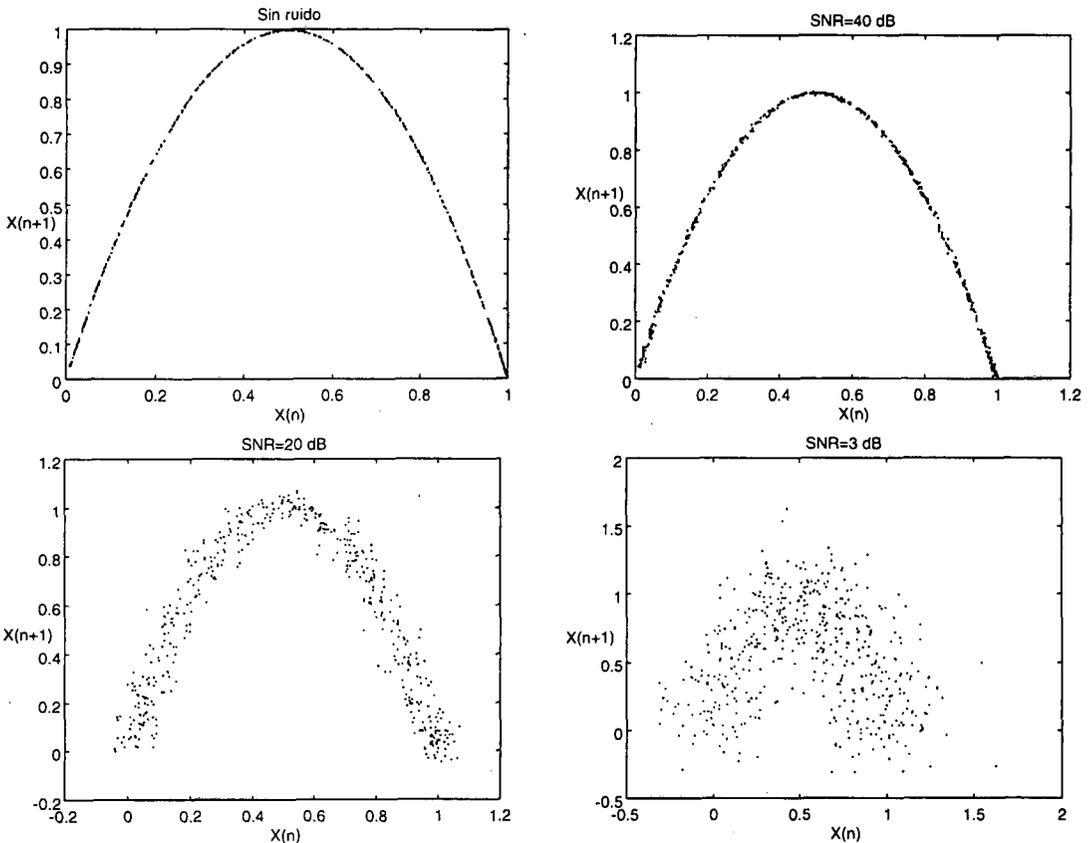


Figura 5.13 Efecto del ruido sobre los mapas de retorno.

Los sistemas caóticos exhiben a menudo estructuras fractales. Un fractal es un conjunto de puntos que no se parece a un objeto euclídeo (punto, recta, plano) independientemente de la escala a la que se le mire. Un fractal es una curva o superficie que es independiente de la escala [Mandelbrot, 1983]. Debido a esta causa, una de las propiedades fundamentales de toda estructura fractal es la **autosemejanza** (observando la señal a diferentes escalas tiene el mismo aspecto). Es por esto que las curvas fractales tienen un espectro con comportamiento $1/f^\alpha$.

Una definición muy aplicada en el análisis de señales caóticas es la de **dimensión fractal**. Para poder entender este concepto se presenta a continuación un ejemplo propuesto en [Mandelbrot, 1983]. Supóngase que se quiere medir la costa de la Gran Bretaña. Para ello, basta con tomar una regla y deslizarla a lo largo de ella para obtener la longitud. La longitud estimada será el producto del número de veces que hemos deslizado la regla y la longitud de la regla. No obstante, ¿qué ocurre si disminuimos la longitud de la regla?. La longitud estimada aumentará porque se estará teniendo en cuenta detalles de la costa que antes se obviaban (debido a que la regla es recta e indeformable). Si la longitud de la regla tiende a cero, la longitud estimada tenderá a infinito. La definición geométrica de la dimensión fractal es:

$$D_F = \frac{\log\left(\frac{l_2}{l_1}\right)}{\log\left(\frac{s_1}{s_2}\right)} \quad (5.6)$$

donde l_2 y l_1 son las longitudes estimadas con las reglas 2 y 1 mientras que s_2 y s_1 son las longitudes de las reglas. La dimensión fractal es un número situado entre la dimensión euclídea y la dimensión euclídea más uno del objeto que se mide. Es decir, para una curva variará entre 1 y 2. La definición anterior también es conocida como la dimensión de Hausdorff.

Íntimamente ligada al concepto de dimensión fractal está la definición del **exponente de Hurst**. Según se observará más adelante, la mayoría de algoritmos estiman dicho exponente, que está relacionado con el comportamiento de la serie a analizar a distintas escalas, y luego calculan la dimensión fractal aplicando $D_f = D_e - H$, donde D_f es la dimensión fractal, D_e es la dimensión euclídea (igual a 2 para series temporales) y H es el exponente de Hurst. El exponente de Hurst cuantifica la dinámica de la serie temporal. Para $H = 0,5$ la serie se comporta como un movimiento browniano. Para $0,5 < H < 1$ tiene un aspecto "suave" mientras que para $0,5 < H < 1$ la curva se caracteriza por un mayor contenido de alta frecuencia. En la figura 5.14 se muestran 5 ejemplos para diferentes exponentes de Hurst. Las señales han sido generadas con el algoritmo descrito en [Bassingthwaight et al, 1995] y basado en la síntesis espectral.

El exponente de Hurst cuantifica la dinámica caótica del sistema a analizar. No obstante, la complejidad del sistema puede caracterizarse a partir de la **dimensión de correlación**, mientras que la impredecibilidad se puede cuantificar con los **exponentes de Lyapunov**. Para obtener en una serie temporal ambos índices se debe tener en cuenta que hay que trabajar en un espacio de fase de dimensión N (dimensión de análisis). Para una serie temporal se define el vector en el espacio de fase N como

$$X(n) = [x(n), x(n + \tau), x(n + 2\tau), \dots, x(n + (N - 1)\tau)] \quad (5.7)$$

donde $x(n)$ es el valor de la serie temporal en el instante n y τ se determina como la posición en la cual el vector autocorrelación de la señal $x(n)$ cae por debajo de $1/e$.

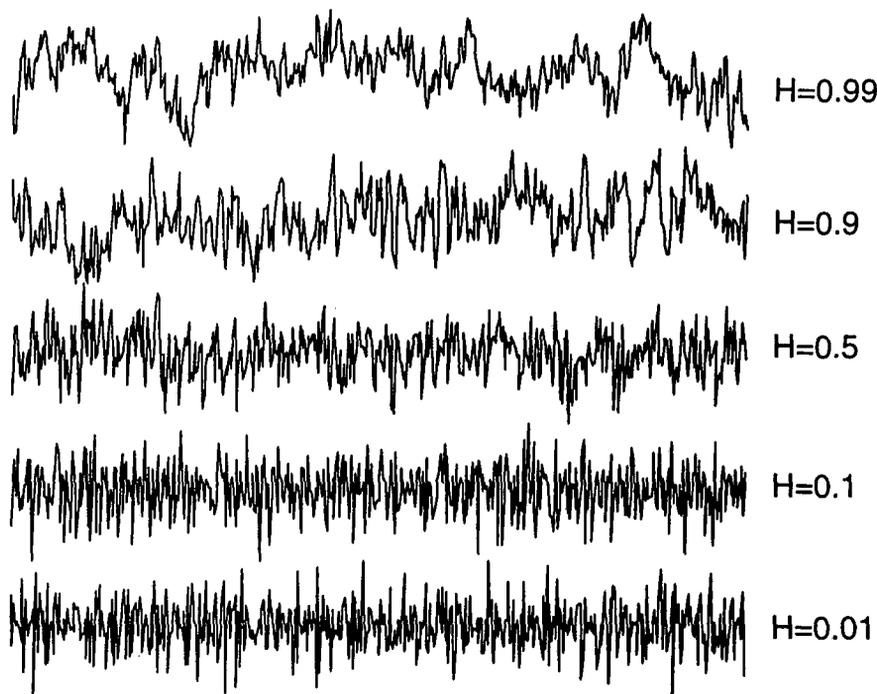


Figura 5.14 Ejemplos de series temporales con diferentes exponentes de Hurst.

El punto crítico en la determinación de la dimensión de correlación y de los exponentes de Lyapunov reside en la elección de la dimensión de análisis. Ésta se puede estimar a partir de diversos cálculos de la dimensión de correlación con dimensiones de análisis diferentes. En señales caóticas la dimensión de correlación tiende a saturarse a un valor determinado cuando la dimensión de análisis aumenta. En cambio, para señales aleatorias no hay tal saturación. Dado un retardo y una dimensión de análisis conocida, la dimensión de correlación (CD) se calcula de la siguiente forma:

$$CD = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log C(r)}{\log r} \quad (5.8)$$

donde

$$C(r) = \frac{1}{M^2} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M H(r - |X_i - X_j|) \quad (5.9)$$

siendo H la función de Heaviside, M el número de puntos en el espacio de dimensión de análisis N y X_i el punto en el espacio de fase definido en la ecuación (5.7) para $n = i$. Este algoritmo está descrito en [Grassberger et al., 1983]. Calculando la expresión (5.9) para diferentes radios, y teniendo en cuenta que el mínimo r vendrá fijado por los pasos de cuantificación, se puede realizar la estimación de la dimensión de correlación para diferentes dimensiones de análisis.

La impredecibilidad de la señal se puede cuantificar con los exponentes de Lyapunov. Basta decir que si el exponente mayor de Lyapunov es positivo, la señal se considera impredecible (caótica). Una estimación del máximo exponente de Lyapunov

se basa en el algoritmo propuesto en [Wolf et al., 1985]. Sea X_k un punto en el espacio de fase de dimensión N . Sea $L(k)$ la distancia euclídea entre este punto y el punto más próximo (sea X_j). Sea $L(k+\Delta k)$ la distancia entre X_k y el punto $X_{j+\Delta k}$. Entonces se puede estimar el exponente máximo de Lyapunov como:

$$LE = \frac{1}{M\Delta k} \sum_{k=1}^M \log_2 \frac{L(k + \Delta k)}{L(k)} \quad (5.10)$$

donde M es el número de puntos en el espacio de fase. Δk es el intervalo de predicción que es, para una señal periódica, su período.

Se observa, pues, que los algoritmos para la caracterización de la señal a nivel de dinámica no lineal son lentos. No obstante, han aparecido recientemente algoritmos rápidos para la estimación del exponente de Hurst. Estos algoritmos son el método de análisis dispersional [Bassingthwaight et al., 1995] y el análisis de reescalado [Bassingthwaight et al., 1994]. El primero da buenos resultados para exponentes de Hurst pequeños mientras que el segundo da buenos resultados para exponentes de Hurst elevados. Además tienen la ventaja de realizar estimaciones lo suficientemente correctas con segmentos cortos de señal (ya funcionan bien a partir de 256 muestras) y no requieren ni el cálculo del retardo ni una dimensión de análisis predefinida ya que se basan en cálculos estadísticos y espectrales de la señal (se emplea el concepto de autosemejanza). Serán estos algoritmos los que utilizaremos para la caracterización de la dinámica no lineal de la secuencia RR.

Por otro lado, todos estos índices, que tienen un indudable interés matemático y conceptual, sólo serán útiles cuando sepan distinguir entre diferentes situaciones fisiológicas. Serán utilizados de igual manera que los índices estadísticos o espectrales. Se revelarán especialmente interesantes durante el análisis de registros ambulatorios donde se comprobará si a lo largo de un día las características no lineales de la señal varían de forma notoria.

5.3.2 Análisis de dinámica caótica con señales sintéticas

Previamente al análisis de señales RR se han analizado señales sintéticas caóticas. En primer lugar se han analizado señales originadas de la ecuación logística y después señales sintetizadas por el método de la síntesis espectral. En ambos casos se ha calculado la dimensión de correlación, el exponente principal de Lyapunov y se ha estimado el exponente de Hurst mediante el método dispersivo. Así mismo, se ha calculado el retardo que se requiere en la señal para originar el mapa de retorno.

Para el caso de la ecuación logística se ha realizado el cálculo para $c=3,8$, $c=3,9$ y $c=3,99$. Se han realizado los cálculos para tres dimensiones de análisis diferentes: 2, 6 y 12. En la tabla 5.1 se muestran los resultados (media y desviación estándar). Se han empleado cincuenta realizaciones diferentes por cada c (haciendo un barrido lineal de la condición inicial entre 0 y 1) y la longitud de los segmentos analizados ha sido de 512 muestras.

Dimensión de análisis	c	Dimensión de correlación	Exponente de Lyapunov	Exponente de Hurst	Retardo
2	3,8	0,88 ± 0,03	2,65 ± 0,12	0,12 ± 0,08	1 ± 0
2	3,9	0,84 ± 0,04	2,48 ± 0,16	0,22 ± 0,07	1 ± 0
2	3,99	0,87 ± 0,04	2,04 ± 0,29	0,37 ± 0,06	1 ± 0
6	3,8	1,05 ± 0,10	2,14 ± 0,13	0,12 ± 0,08	1 ± 0
6	3,9	1,08 ± 0,09	1,92 ± 0,18	0,22 ± 0,07	1 ± 0
6	3,99	1,31 ± 0,13	1,34 ± 0,20	0,37 ± 0,06	1 ± 0
12	3,8	2,35 ± 0,35	1,23 ± 0,13	0,12 ± 0,08	1 ± 0
12	3,9	2,34 ± 0,38	1,06 ± 0,18	0,22 ± 0,07	1 ± 0
12	3,99	4,70 ± 0,23	0,53 ± 0,09	0,37 ± 0,06	1 ± 0

Tabla 5.1 Resultados del análisis de la ecuación logística.

En la tabla 5.1 se observa que la dimensión de correlación aumenta con la dimensión de análisis y el valor de c. Los exponentes de Lyapunov tienen el comportamiento opuesto. Por otro lado, el exponente de Hurst calculado según el método dispersional aumenta con c (se debe tener en cuenta que no depende de la dimensión de análisis).

A continuación se ha realizado la simulación para señales originadas a partir del método de la síntesis espectral. En este método se originan secuencias caóticas con un exponente de Hurst conocido. Por lo tanto, la utilidad de esta simulación es observar si el método dispersional estima correctamente dicho índice. No obstante, también se han calculado el retardo, la dimensión de correlación y el exponente principal de Lyapunov en el caso de una dimensión de análisis igual a 12. Los resultados se muestran en la tabla 5.2 y han sido obtenidos con secuencias de 256 muestras. Tal y como se observa, la dimensión de correlación y el exponente de Hurst se mantienen prácticamente constantes para las diferentes realizaciones. No obstante, el exponente de Hurst estimado realiza un seguimiento del real aunque para exponentes bajos o altos tiende a saturarse. El retardo aumenta al aumentar el exponente de Hurst.

Exponente de Hurst	Dimensión de correlación	Exponente de Lyapunov	Exponente de Hurst estimado	Retardo
0	6,41 ± 0,36	0,16 ± 0,02	0,17 ± 0,08	1 ± 0
0,1	6,60 ± 0,31	0,16 ± 0,02	0,23 ± 0,08	1 ± 0
0,2	6,64 ± 0,36	0,17 ± 0,02	0,31 ± 0,08	1 ± 0
0,3	6,83 ± 0,39	0,16 ± 0,02	0,36 ± 0,08	1 ± 0
0,4	6,84 ± 0,32	0,16 ± 0,02	0,44 ± 0,08	1 ± 0
0,5	6,67 ± 0,34	0,16 ± 0,02	0,50 ± 0,09	1 ± 0
0,6	6,63 ± 0,28	0,16 ± 0,02	0,59 ± 0,09	1,08 ± 0,27
0,7	6,40 ± 0,41	0,17 ± 0,02	0,69 ± 0,09	1,88 ± 1,14
0,8	6,34 ± 0,41	0,17 ± 0,02	0,73 ± 0,08	2,34 ± 1,02
0,9	5,78 ± 0,74	0,17 ± 0,02	0,79 ± 0,08	4,82 ± 4,63
1	5,53 ± 0,60	0,18 ± 0,02	0,82 ± 0,06	4,84 ± 2,10

Tabla 5.2 Resultados para señales generadas a partir de síntesis espectral.

5.3.3 Análisis de dinámica caótica en señales RR.

En este apartado se muestran algunas observaciones realizadas en secuencias RR al ser cuantificadas por el exponente de Hurst mediante el método dispersivo. Se debe remarcar que aunque se ha cuantificado la secuencia RR mediante la dimensión de correlación y los exponentes de Lyapunov, estos índices únicamente indican la presencia de dinámica caótica (la dimensión de correlación aporta información sobre la presencia de atractores estraños mientras que los exponentes de Lyapunov indican la sensibilidad del sistema a las condiciones iniciales). Dado que estamos interesados en la caracterización de la dinámica de la secuencia RR hemos creído más oportuno tomar **el exponente de Hurst como índice de caracterización de complejidad**. Así pues, un exponente de Hurst elevado indica la presencia de una complejidad baja (correlación positiva) mientras que un exponente de Hurst bajo indica la presencia de una complejidad alta (correlación negativa).

Primeramente se han realizado medidas en registros de cinco minutos para comprobar si la arritmia sinorrespiratoria afecta a la complejidad de la secuencia RR. Se han comparado los exponentes de Hurst de ocho sujetos en los cuales se realizaron dos medidas diferentes: una respirando libremente y otra respirando periódicamente. Los resultados se muestran en la figura 5.15. Obsérvese que en el caso de respiración libre la complejidad de la señal es menor (exponente de Hurst mayor, dimensión fractal menor) que en el caso de respiración periódica. Se debe remarcar que en el sujeto 3 la complejidad de la señal es particularmente elevada mientras que para los sujetos 1 y 8 dicha complejidad es reducida (sobre todo en el caso de respiración libre). Excepto para el sujeto 4, los exponentes de Hurst respirando libremente son sensiblemente superiores a los exponentes de Hurst respirando periódicamente. En la figura 5.16 se muestran los registros RR durante respiración libre para el sujeto 1 y para el sujeto 3. Por lo tanto, parece ser que **la forma de respirar afecta claramente a la complejidad de la señal RR**.

Los siguientes registros que se han analizado corresponden a pruebas de esfuerzo en tres sujetos diferentes y con tres protocolos diferentes. Estos registros se muestran en la figura 5.17. En el primer caso el sujeto pedaleó en una bicicleta estática durante 15 minutos. Se realizaron tres etapas de esfuerzo pidiendo al voluntario que pedaleara a velocidad constante y graduando la fuerza de frenado. En el caso del sujeto 2 no se empleó ningún tipo de protocolo por lo cual pedaleó a velocidad variable pero con fuerza de frenado constante. El caso del sujeto 3 es como el del sujeto 2 pero está respirando periódicamente. Para cada uno de estos registros se ha estimado el exponente de Hurst en ventanas de 300 latidos solapadas entre ellas. Los resultados se muestran en las figuras 5.18, 5.19 y 5.20 para los sujetos 1, 2 y 3 respectivamente. El resultado de las tres medidas es siempre el mismo: **el exponente de Hurst es máximo en la fase de esfuerzo máximo**. Por lo tanto, en una fase de estrés, la complejidad de la señal es menor. Se podría preguntar si dicha falta de complejidad puede estar asociada a la baja variabilidad del ritmo cardíaco durante el esfuerzo máximo. Como se observará en el análisis de registros ambulatorios, una variabilidad baja del ritmo cardíaco no implica una complejidad baja. Por otro lado, el resultado del análisis parece depender poco del protocolo o de la forma de respirar. Recuérdese que en esfuerzo máximo la componente de la arritmia sinorrespiratoria desaparece prácticamente debido a la fuerte descarga simpática con lo cual la diferencia entre los tres sujetos es poco apreciable. Se debe

remarcar también que mientras que la variación del exponente de Hurst en el segundo sujeto es pequeña, en los sujetos 1 y 3 es bastante mayor. Se puede achacar dicho comportamiento a un mayor grado de entrenamiento de estos dos últimos.

Exponente de Hurst estimado

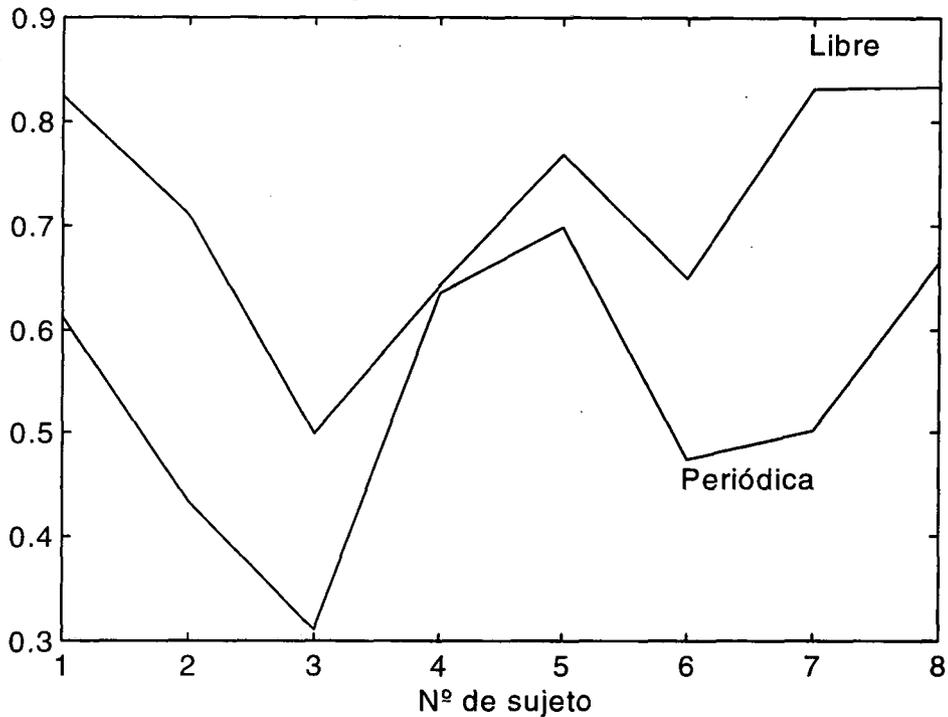


Figura 5.15 Exponentes de Hurst de series RR de cinco minutos para sujetos con respiración libre y con respiración periódica.

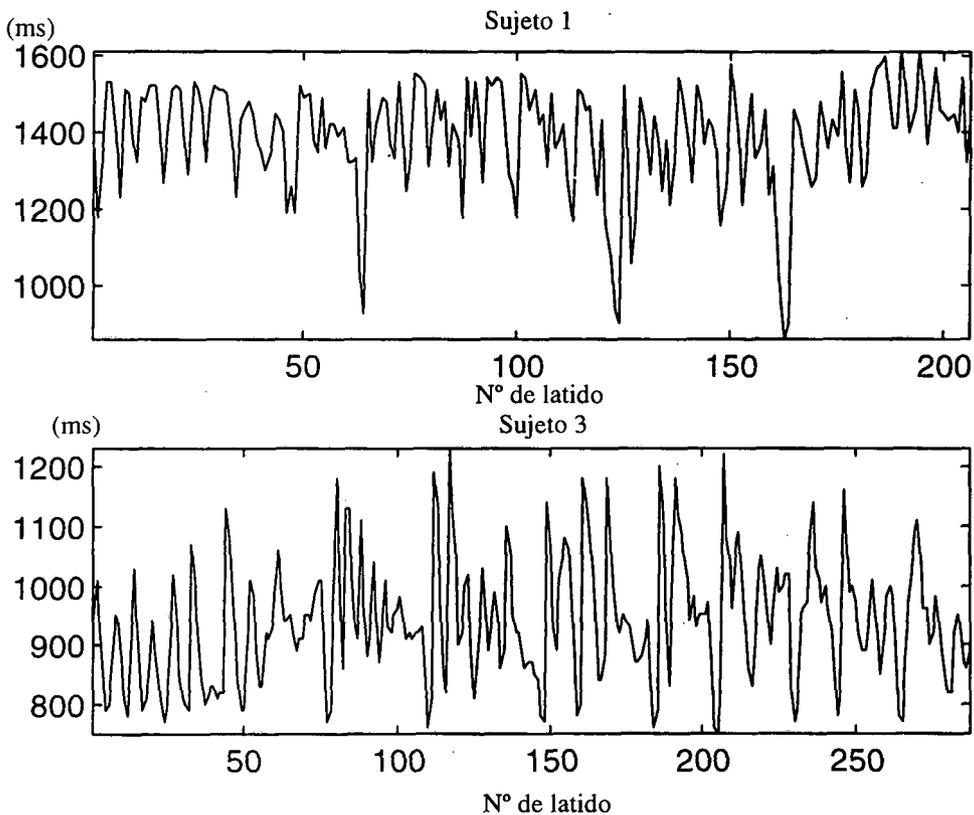


Figura 5.16 Secuencias RR para los sujetos 1 y 3 cuando respiran libremente.

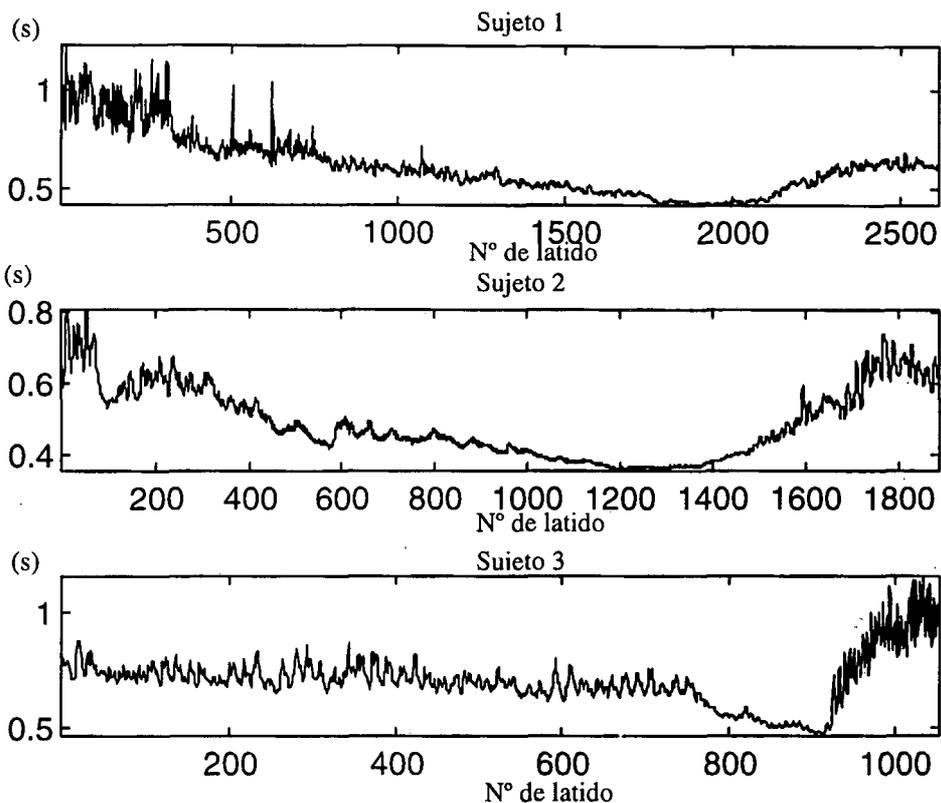


Figura 5.17 Series RR durante prueba de esfuerzo analizadas.

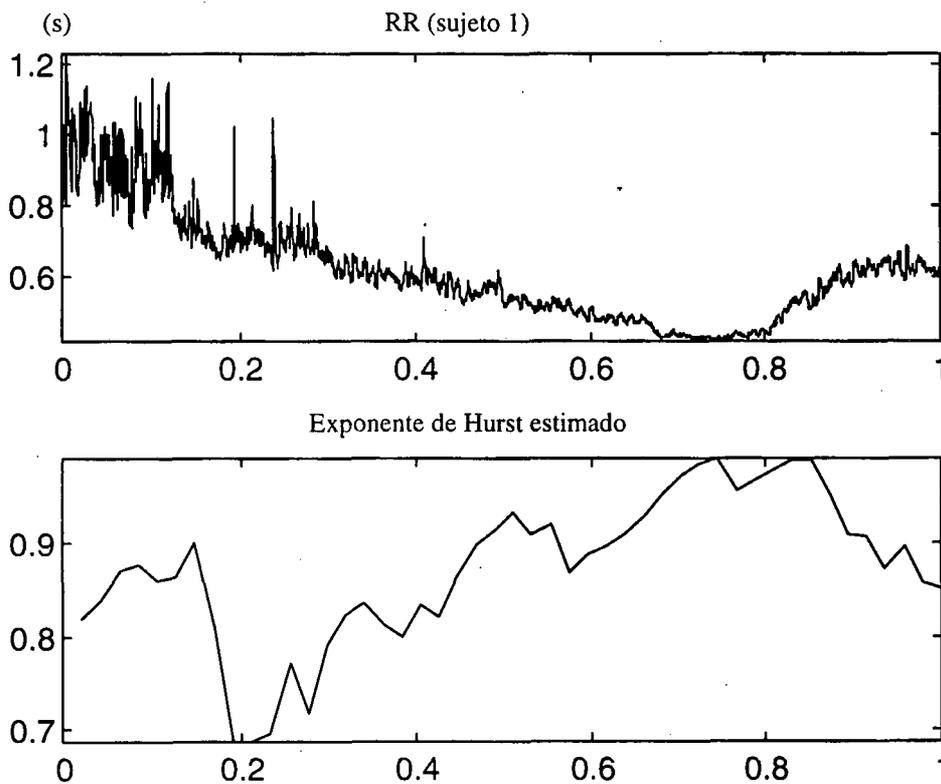


Figura 5.18 Estimación del exponente de Hurst a lo largo de un registro de esfuerzo. (sujeto 1)

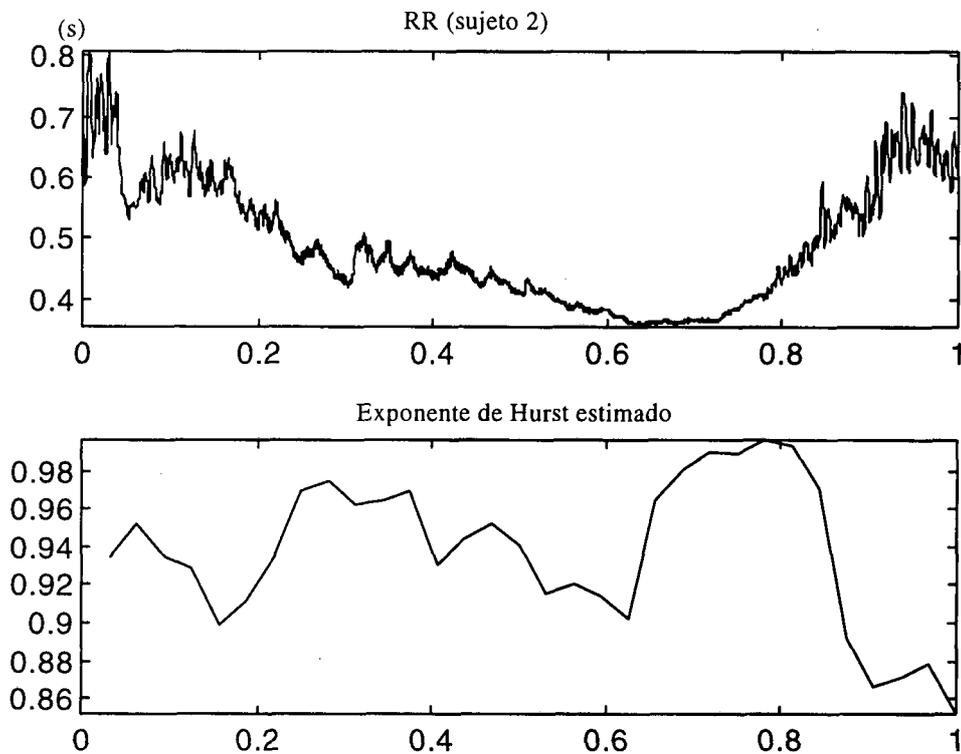


Figura 5.19 Estimación del exponente de Hurst a lo largo de un registro de esfuerzo. (sujeto 2)

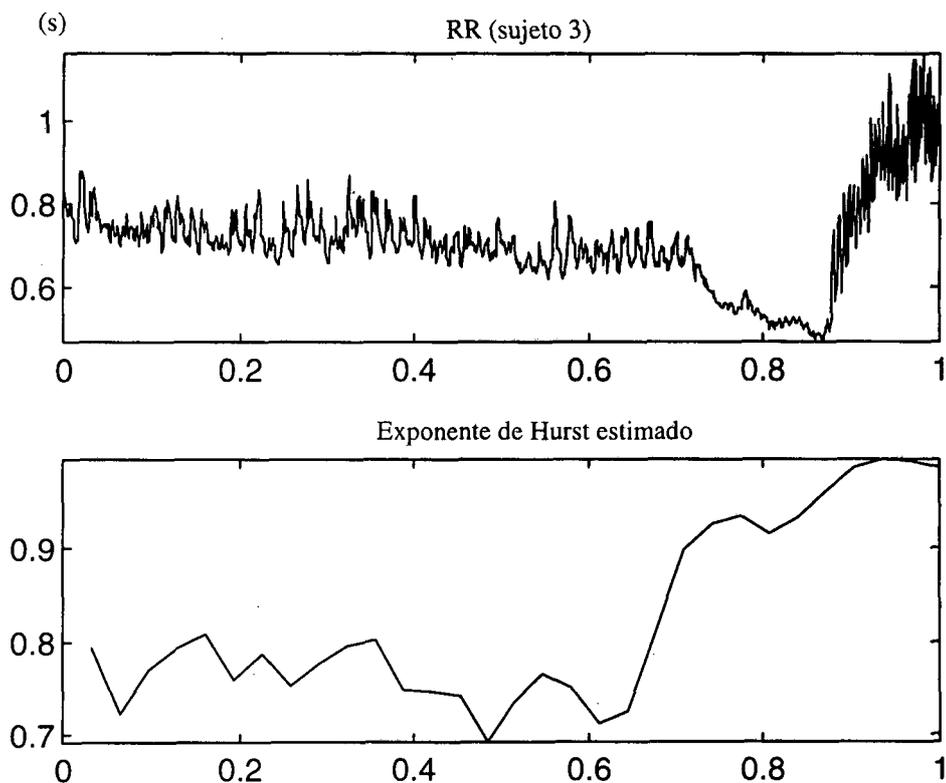


Figura 5.20 Estimación del exponente de Hurst a lo largo de un registro de esfuerzo. (sujeto 3)

El siguiente conjunto de medidas a analizar ha sido el correspondiente a registros ambulatorios de 24 horas de duración. Se han analizado tres registros de sujetos diferentes. Se ha estimado el exponente de Hurst en ventanas de 300 latidos con un solapamiento de 150 latidos. Los resultados se muestran en las figuras 5.21, 5.22 y 5.23. Tal y como se observa, la mayor complejidad de la secuencia RR suele ocurrir en períodos nocturnos y especialmente en aquellos segmentos durante los cuales la variabilidad del ritmo cardíaco es menor (sueño profundo). Recuérdese que durante estos períodos la variabilidad del ritmo cardíaco está dominada por la componente vagal y es fruto de una arritmia sinorrespiratoria aproximadamente periódica. De ahí que la complejidad de la señal en este caso sea mayor, tal y como se ha visto en los registros de respiración periódica. Obsérvese que, a pesar de la presencia de estos períodos de mayor complejidad, **el exponente de Hurst en los tres individuos sanos acostumbra a valer entre 0,8 y 0,9** indicando un grado de complejidad bajo.

En los capítulos 6 y 7 se compararán los resultados obtenidos en registros de corta y larga duración con los índices estadísticos y espectrales. En la figura 5.24 se muestran diferentes mapas de retorno para los tres tipos de señales analizadas en este apartado.

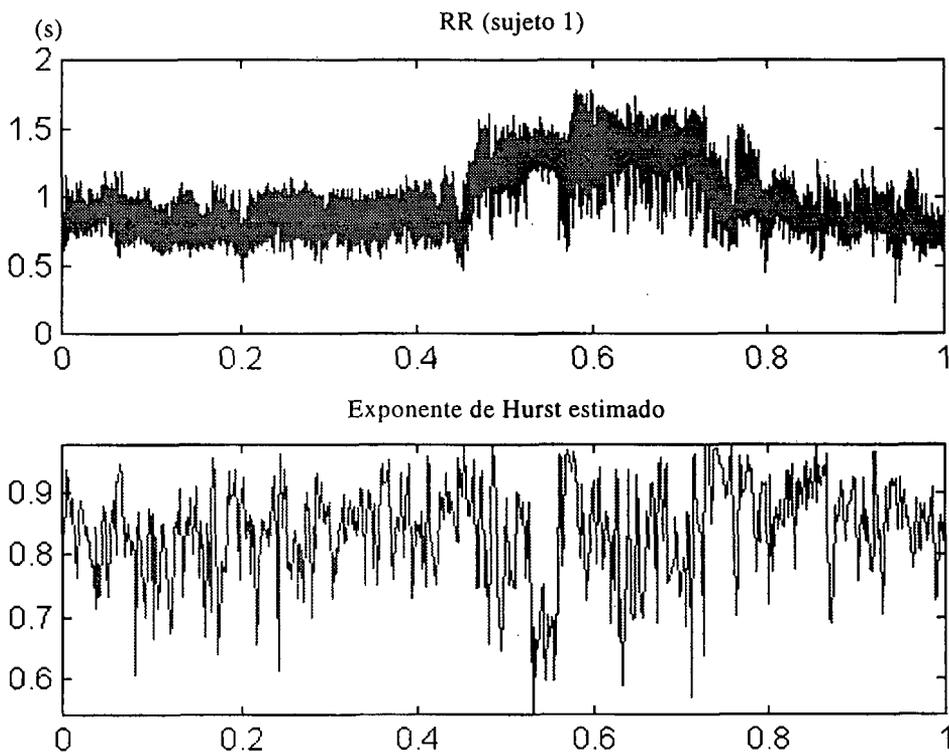


Figura 5.21 Registro ambulatorio y exponentes de Hurst estimados para el sujeto 1.

5.3.4 Conclusiones sobre análisis de complejidad

A pesar de que son muchos y variados los índices que se emplean en la caracterización de la dinámica caótica de series temporales aquí se ha decidido utilizar el exponente de Hurst como indicador de complejidad. Esto implica aceptar que efectivamente, la dinámica de la serie RR es caótica.

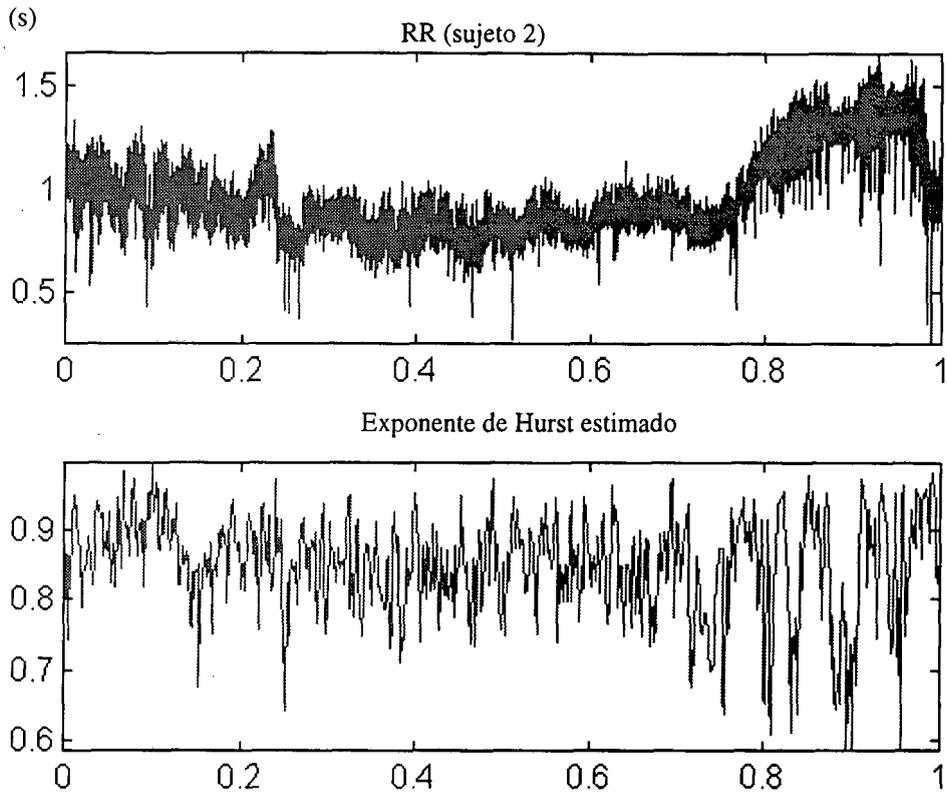


Figura 5.22 Registro ambulatorio y exponentes de Hurst estimados para el sujeto 2.

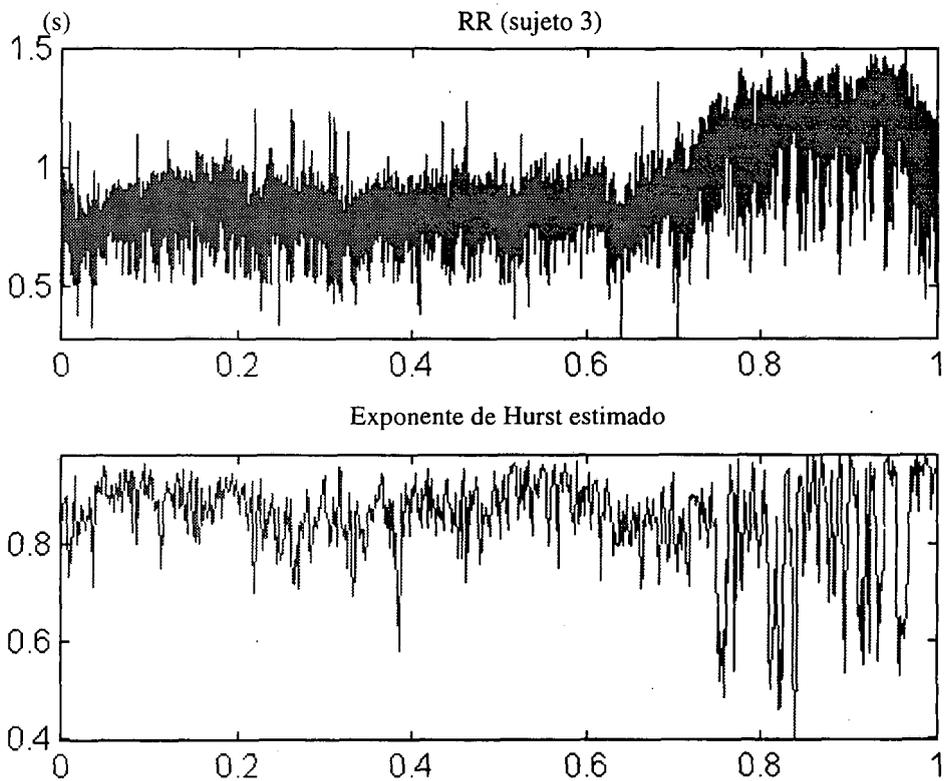


Figura 5.23 Registro ambulatorio y exponentes de Hurst estimados para el sujeto 3.

Se han realizado las siguientes observaciones:

- La complejidad de la señal aumenta cuando la arritmia sinorrespiratoria tiene una mayor contribución, es decir, en casos de descarga vagal elevada.
- La complejidad de la señal es menor en situaciones de estrés.
- En un registro ambulatorio, la complejidad suele ser baja aunque puede aumentar en períodos de sueño profundo.

No obstante, se debe remarcar que el empleo de este tipo de caracterización está muy poco extendido y se encuentra todavía en fase de investigación. Se requerirían un gran número de pruebas para poder constatar la permanencia de estas observaciones.

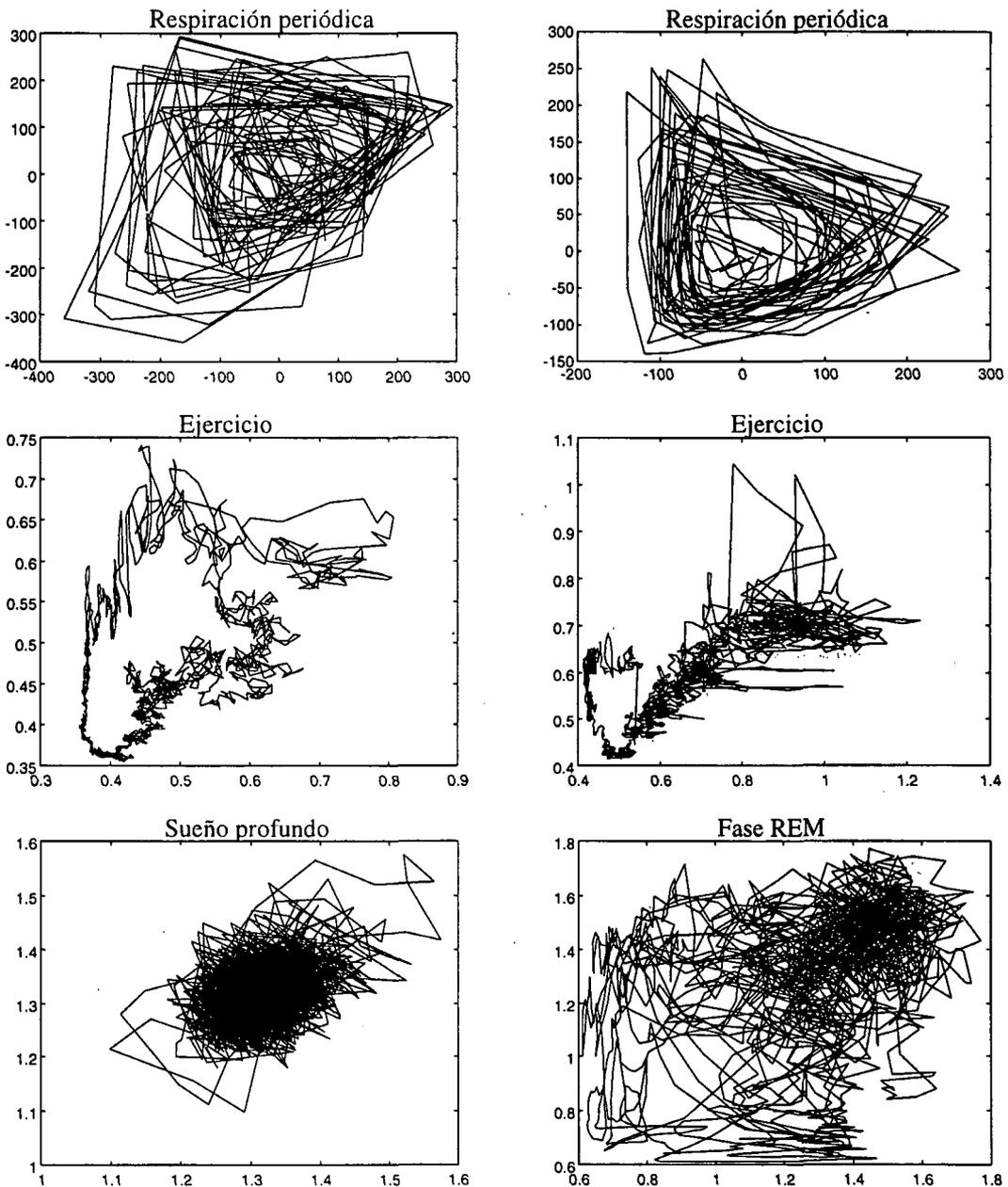


Figura 5.24 Mapas de retorno para situaciones fisiológicas diferentes. El orden de cada mapa viene especificado por el retardo calculado a partir de la autocorrelación.

5.4 Conclusiones

El análisis de la secuencia RR desde un punto de vista de dinámica no lineal puede complementar la información aportada por los métodos clásicos (estadísticos y espectrales).

El empleo del biespectro muestra que la no linealidad en la secuencia RR está presente casi siempre aunque el grado de no linealidad depende del sujeto y de la situación fisiológica. Dicha no linealidad es muy elevada en casos de sueño profundo. Por otro lado se ha encontrado que a mayor no linealidad en la función de transferencia entre la respiración y la arritmia sinorrespiratoria corresponde un menor grado de variación en el espectro de la secuencia RR asociado a la forma de respirar.

Respecto al análisis de complejidad se ha observado que la complejidad de la señal es mayor en casos de alta arritmia sinorrespiratoria y en sueño profundo. En cambio, durante la ejecución de ejercicio la complejidad de la señal es baja.