

## Capítulo 4. Esquemas numéricos para las ecuaciones de Saint Venant unidimensionales

### 4.1. Introducción

En este capítulo se describen los esquemas numéricos utilizados en esta tesis para la resolución de las ecuaciones de Saint Venant en una dimensión.

Dependiendo del problema que se desee resolver, alguna de las formas de escribir las ecuaciones vistas en el capítulo segundo es más conveniente que otra, ya que permite utilizar discretizaciones del dominio y esquemas numéricos más apropiados a cada problema. Para la obtención de soluciones discontinuas, se puede aprovechar la similitud de las ecuaciones de Saint Venant con las ecuaciones de Euler de dinámica de gases, para las cuales se ha realizado un gran esfuerzo de obtención de este tipo de soluciones, y adaptar las técnicas desarrolladas para ellas, y en especial toda la teoría de los *Riemann solvers*, para obtener la solución de las ecuaciones del flujo en lámina libre. Las diferencias entre estos dos sistemas de ecuaciones, principalmente la no-homogeneidad de las últimas frente a la homogeneidad de las primeras, y el hecho de que no solamente se desea obtener soluciones en el entorno de las discontinuidades, sino que también interesa modelar correctamente las zonas suaves, requiere el desarrollo de algunas técnicas especiales. Por otro lado es necesario aceptar que existe una teoría exacta y bien demostrada para el caso unidimensional, lineal y homogéneo, pero tan sólo aproximada para las ecuaciones no lineales y con término independiente, como son las ecuaciones completas del flujo en lámina libre en una o dos dimensiones para una topografía cualquiera.

Las observaciones sobre las propiedades de las ecuaciones y los distintos esquemas numéricos, junto con la discretización en volúmenes finitos, conducen a la obtención de *esquemas de alta resolución* para ecuaciones diferenciales, entendiéndose como tales los que cumplen las tres condiciones enunciadas en el Capítulo 1, apartado 1.2.2.2, según la propuesta de Harten y Hymann (1983). A lo largo del capítulo se verá en detalle lo que implican las tres condiciones anteriores y todo el aparato matemático necesario para conseguir esquemas que las satisfagan.

Los esquemas conservativos de primer orden pueden servir de punto de partida para el desarrollo de esquemas de segundo orden y de esquemas TVD. Entre los distintos esquemas conservativos *upwind*, (esquemas que tienen en cuenta como se propaga la información), destaca el método de Godunov, que es, o se puede ver como, la base de toda la familia de esquemas numéricos conocidos en la bibliografía como métodos *flux difference splitting* (separación de la diferencia de flujo), el tipo de esquemas utilizados en este trabajo.

Otra familia de esquemas de alta resolución son los esquemas conocidos como *flux vector splitting* (separación del vector de flujo), y que se utilizan mucho para las ecuaciones de Euler. Éstos son adecuados en principio para sistemas que cumplen la condición de homogeneidad  $\mathbf{F}(\mathbf{U}) = \mathbf{A}(\mathbf{U})\mathbf{U}$  (las ecuaciones de Euler lo hacen), aunque han sido también utilizados para las ecuaciones de Saint Venant (Vázquez-Cendón, 1999a).

En este capítulo se trata la resolución de las ecuaciones de Saint Venant en una dimensión presentadas en el capítulo segundo. En general se tratará con la forma conservativa de las ecuaciones por ser la utilizada en los esquemas numéricos empleados en esta tesis, que con la misma notación introducida en el Capítulo 2, son:

$$\mathbf{U}_t + \mathbf{F}(\mathbf{U})_x = \mathbf{H} \quad (4.1)$$

con:

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} A \\ Q \end{pmatrix} ; \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} Q \\ \frac{Q^2}{A} + gI_1 \end{pmatrix} ; \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 \\ gI_2 + gA(S_0 - S_f) \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

$$I_1 = \int_0^h (h - \eta) b(x, \eta) d\eta \quad (4.3)$$

$$I_2 = \int_0^h (h - \eta) \frac{\partial b(x, \eta)}{\partial x} d\eta \quad (4.4)$$

Es de destacar que las ecuaciones de Saint Venant en una dimensión tienen la particularidad que el vector de flujo  $\mathbf{F}$  no depende solamente de las variables  $\mathbf{U}$ , sino que tiene una dependencia espacial  $\mathbf{F}(\mathbf{U}, x)$  a través del término de presión  $I_1$ . La variación de  $I_1$  depende de la variación en el área pero también de la irregularidad geométrica del cauce. En ninguna de las referencias conocidas que tratan con geometrías irregulares esto se tiene en cuenta.

Otro aspecto que se ha cuidado en los desarrollos que se presentan en este capítulo es la capacidad de los esquemas numéricos de reproducir correctamente el régimen permanente. Hasta la fecha algunas referencias hacían hincapié en la capacidad de los esquemas en volúmenes finitos presentados de modelar correctamente una situación de agua parada con geometrías irregulares. Incluso dos de ellas de ellas (Hubbard y García-Navarro, 2000) (Tseng, (2004) demuestran la capacidad de sus esquemas de converger a una situación en régimen permanente, pero no al régimen permanente correcto. En este capítulo se demuestra que los esquemas numéricos presentados si lo hacen (es decir, para flujo en régimen permanente gradualmente variado, la solución que se obtiene con los esquemas numéricos que se desarrollan respeta la conservación de la energía).

## 4.2. Esquema conservativo de primer orden: Método de Godunov en una dimensión

Para un sistema de ecuaciones hiperbólico del tipo:

$$\mathbf{U}_t + \mathbf{F}(\mathbf{U})_x = 0 \quad (4.5)$$

el método de Godunov es un esquema conservativo que utiliza la discretización en volúmenes finitos y que, por lo tanto, se puede escribir en la forma:

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{F}_{i+1/2}^* - \mathbf{F}_{i-1/2}^*) \quad (4.6)$$

La particularidad del método de Godunov es que el flujo numérico  $\mathbf{F}_{i+1/2}^*$  entre dos celdas o volúmenes finitos  $i$  e  $i+1$ , se obtiene de la solución del problema de Riemann local (en cada intercelda o contorno de cada elemento de volumen) definido por el sistema (4.5) y las condiciones iniciales:

$$\mathbf{U}(x, t^n) = \begin{cases} \mathbf{U}_i^n & \text{si } x < x_{i+1/2} \\ \mathbf{U}_{i+1}^n & \text{si } x > x_{i+1/2} \end{cases} \quad (4.7)$$

o sea:

$$\mathbf{F}_{i+1/2}^* = \mathbf{F}(\mathbf{U}(x_{i+1/2}, [t^n, t^{n+1}])) \quad (4.8)$$

donde  $\mathbf{U}(x_{i+1/2}, [t^n, t^{n+1}])$  es la solución del problema de Riemann local mencionado ((4.5)(4.7)) en  $x_{i+1/2}$  en  $[t^n, t^{n+1}]$ . En este intervalo de tiempo, si se cumple la condición de Courant, la solución del problema de Riemann es constante sobre el eje de tiempos, como se ha visto en el Capítulo 2. En el caso unidimensional, para el problema local el subíndice L se refiere, como en el Capítulo 2, al estado inicial de la izquierda con y el subíndice R al estado de la derecha ( $\mathbf{U}_L = \mathbf{U}_i^n$  y  $\mathbf{U}_R = \mathbf{U}_{i+1}^n$ ), mientras que 0 indicará la abscisa  $x_{i+1/2}$  por ser el origen de este problema de Riemann local.

Para aplicar el método de Godunov es necesario en primer lugar resolver un problema de Riemann, a continuación encontrar la solución en  $x_{i+1/2}$  y finalmente evaluar el flujo  $\mathbf{F}$  con dicha solución. En la resolución del problema de Riemann y la evaluación de la solución es donde aparecen las distintas variantes que dan lugar a esquemas numéricos distintos.

Es ilustrativo ver como se concreta el método de Godunov para la ecuación escalar homogénea

$$u_t + f_x(u) = 0 \quad (4.9)$$

con  $f(u) = \lambda u$ . Como se ha visto en el capítulo anterior, el problema de Riemann asociado a la intercelda  $i+1/2$  es:

$$u(x, t) = \begin{cases} u_i^n & \text{si } x < x_{i+1/2} \\ u_{i+1}^n & \text{si } x > x_{i+1/2} \end{cases} \quad (4.10)$$

y su solución, que es trivial, viene dada por

$$u(x, t) = \begin{cases} u_i^n & \text{si } \lambda > 0 \\ u_{i+1}^n & \text{si } \lambda < 0 \end{cases} \quad (4.11)$$

de manera que el flujo numérico vendrá dado por

$$f_{i+1/2}^* = \begin{cases} \lambda u_i^n & \text{si } \lambda > 0 \\ \lambda u_{i+1}^n & \text{si } \lambda < 0 \end{cases} \quad (4.12)$$

Sustituyendo éste en la expresión (4.6) el esquema resulta:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \begin{cases} \frac{\Delta t}{\Delta x} \lambda (u_i^n - u_{i-1}^n) & \text{si } \lambda > 0 \\ \frac{\Delta t}{\Delta x} \lambda (u_{i+1}^n - u_i^n) & \text{si } \lambda < 0 \end{cases} \quad (4.13)$$

Comparando con (3.39), queda claro que para esta ecuación el método de Godunov coincide con el esquema *upwind* de primer orden presentado en el capítulo anterior. Para desarrollos posteriores es interesante ver que este flujo numérico del método de Godunov aplicado a la ecuación escalar lineal se puede escribir:

$$f_{i+1/2}^* = \frac{1}{2}(1+s)(\lambda u_i^n) + \frac{1}{2}(1-s)(\lambda u_{i+1}^n) \quad (4.14)$$

siendo  $s$  el signo de  $\lambda$ , o lo que es lo mismo:

$$f_{i+1/2}^* = \frac{1}{2}(f_{i+1} + f_i) - \frac{1}{2}|\lambda| \Delta u_{i+1/2} \quad (4.15)$$

Se ha visto en el Capítulo 2 que, para un sistema de ecuaciones no lineal e hiperbólico como son las ecuaciones de Saint Venant, el problema de Riemann tiene una estructura compleja y encontrar su solución es costoso. Por ello varios autores desarrollaron métodos numéricos para encontrar una solución aproximada del problema de Riemann, lo que se conoce como *aproximate Riemann Solvers*. Estos *Riemann Solvers* utilizan el hecho que para aplicar el método de Godunov no necesitamos saber el detalle de toda la solución del problema de Riemann, sino sólo el valor de la solución en el contorno entre dos volúmenes finitos.

#### 4.2.1. Approximate Riemann Solver de Roe en una dimensión

El *Riemann Solver* de Roe se desarrolló en principio para las ecuaciones de Euler (Roe, 1981). Desde entonces se ha aplicado a una gran variedad de problemas físicos, entre ellos las ecuaciones de Saint Venant. A menudo en la literatura se denomina al método de Godunov con el *Riemann Solver* de Roe simplemente como *esquema de Roe*.

El sistema de ecuaciones no lineales (4.5) también se puede escribir, como se ha visto en el capítulo segundo como:

$$\mathbf{U}_i + \mathbf{A}\mathbf{U}_x = 0 \quad (4.16)$$

donde  $\mathbf{A}$  es el jacobiano y viene dado por (2.68). La base del *Riemann solver* de Roe consiste en aproximar en cada incremento de tiempo este sistema de ecuaciones por el sistema de ecuaciones lineal a coeficientes constantes

$$\mathbf{U}_i + \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{U}_x = 0 \quad (4.17)$$

en el cual la matriz  $\tilde{\mathbf{A}}$ , es una aproximación a  $\mathbf{A}$  y se encuentra con los datos del problema de Riemann local  $\mathbf{U}_L$  y  $\mathbf{U}_R$ , es decir  $\tilde{\mathbf{A}} = \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R)$ , y debe cumplir tres propiedades que son:

1. El nuevo sistema (4.17) debe preservar el carácter hiperbólico del sistema inicial, por lo que  $\tilde{\mathbf{A}}$  debe tener valores propios  $\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2$  reales con sus vectores propios correspondientes  $\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2$  linealmente independientes.
2. El sistema debe ser consistente con el sistema original, lo que quiere decir que debe cumplirse  $\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{U}, \mathbf{U}) = \mathbf{A}(\mathbf{U})$ .

3. La matriz  $\tilde{\mathbf{A}}$  debe asegurar la propiedad (algunas veces llamada *conservatividad*):

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}_R) - \mathbf{F}(\mathbf{U}_L) = \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{U}_R - \mathbf{U}_L) \quad (4.18)$$

Una vez obtenida la matriz  $\tilde{\mathbf{A}}$  se puede aplicar directamente lo visto en 2.5.7.1 para el problema de Riemann en sistemas hiperbólicos unidimensionales a coeficientes constantes, para el cual la solución está formada por estados constantes separados por las distintas ondas. Si se denota con  $\bar{\mathbf{U}}_{i+1/2}(x, t)$  a la solución de este problema de Riemann aproximado en  $x_{i+1/2}$  (para distinguirlo de la solución del problema de Riemann exacto  $\mathbf{U}_{i+1/2}(x, t)$ ), se tiene, con la notación de 2.5.7.1:

$$\bar{\mathbf{U}}_{i+1/2}(0) = \mathbf{U}_i^n + \sum_{\tilde{\lambda}_j \leq 0}^2 \tilde{\alpha}_j \tilde{\mathbf{e}}_j \quad (4.19)$$

o

$$\bar{\mathbf{U}}_{i+1/2}(0) = \mathbf{U}_{i+1}^n - \sum_{\tilde{\lambda}_j \geq 0}^2 \tilde{\alpha}_j \tilde{\mathbf{e}}_j \quad (4.20)$$

donde los  $\tilde{\alpha}_j$  son unos coeficientes constantes (llamados *fuerzas* de cada onda), y los valores  $\tilde{\lambda}_j$  son los valores propios de  $\tilde{\mathbf{A}}$ . Las dos expresiones anteriores se pueden combinar para tener:

$$\bar{\mathbf{U}}_{i+1/2}(0) = \frac{1}{2}(\mathbf{U}_i^n + \mathbf{U}_{i+1}^n) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 \text{signo}(\tilde{\lambda}_j) \tilde{\alpha}_j \tilde{\mathbf{e}}_j \quad (4.21)$$

Para la obtención del flujo numérico ahora sea provechan los resultados del Capítulo 2, apartado 2.5.7.2. Para ello la ecuación (2.211) se reescribe como (lo mismo se podría hacer con la ecuación (2.212)):

$$\mathbf{F}_0 = \mathbf{F}_L - S_L \mathbf{U}_L - \frac{1}{T} \int_{TS_L}^0 \mathbf{U}_{i+1/2}(x, T) dx \quad (4.22)$$

Por otro lado, el sistema aproximado (4.17) se puede entender como un sistema de leyes de conservación  $\mathbf{U}_t + \bar{\mathbf{F}}_x(\mathbf{U}) = 0$  con  $\bar{\mathbf{F}}(\mathbf{U}) = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{U}$ , que definirá otro problema de Riemann (que llamaremos problema de Riemann aproximado) y al que también se le puede aplicar el resultado anterior:

$$\bar{\mathbf{F}}_0 = \bar{\mathbf{F}}_L - S_L \mathbf{U}_L - \frac{1}{T} \int_{TS_L}^0 \bar{\mathbf{U}}_{i+1/2}(x, T) dx \quad (4.23)$$

La expresión (4.22) se refiere al problema de Riemann exacto, mientras que (4.23) se refiere al problema de Riemann aproximado. El *Riemann solver* de Roe considera que la solución exacta  $\mathbf{U}_{i+1/2}(x, T)$  se puede aproximar por  $\bar{\mathbf{U}}_{i+1/2}(x, T)$ . Así, suponiendo pues que los integrandos en estas dos últimas expresiones son iguales, sustituyendo una en la otra se obtiene:

$$\mathbf{F}_0 = \bar{\mathbf{F}}_0 + \mathbf{F}_L + \bar{\mathbf{F}}_L \quad (4.24)$$

Volviendo a coordenadas globales:

$$\mathbf{F}_{i+1/2}^* = \bar{\mathbf{F}}(\bar{\mathbf{U}}_{i+1/2}(0)) + \mathbf{F}(\mathbf{U}_i^n) + \bar{\mathbf{F}}(\mathbf{U}_i^n) \quad (4.25)$$

y sustituyendo aquí (4.19) y la definición del flujo  $\bar{\mathbf{F}}(\mathbf{U}) = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{U}$ , queda finalmente:

$$\mathbf{F}_{i+1/2}^* = \mathbf{F}(\mathbf{U}_i^n) + \sum_{\tilde{\lambda}_j \leq 0}^2 \tilde{\alpha}_j \tilde{\lambda}_j \tilde{\mathbf{e}}_j \quad (4.26)$$

El mismo desarrollo para el lado derecho del problema de Riemann a partir de la ecuación (2.212) daría:

$$\mathbf{F}_{i+1/2}^* = \mathbf{F}(\mathbf{U}_{i+1}^n) - \sum_{\tilde{\lambda}_j \geq 0} \tilde{\alpha}_j \tilde{\lambda}_j \tilde{\mathbf{e}}_j \quad (4.27)$$

y combinando estas dos últimas expresiones se obtiene el flujo numérico para el método de Godunov con el *Riemann solver* de Roe (o esquema de Roe):

$$\mathbf{F}_{i+1/2}^* = \frac{1}{2}(\mathbf{F}_i + \mathbf{F}_{i+1}) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 \tilde{\alpha}_j |\tilde{\lambda}_j| \tilde{\mathbf{e}}_j \quad (4.28)$$

Por analogía con lo realizado por Roe para las ecuaciones de Euler (Roe, 1981), en el caso de las ecuaciones de Saint Venant unidimensionales se puede encontrar la matriz  $\tilde{\mathbf{A}}$ , o  $\tilde{\mathbf{A}}_{i+1/2}$  para el problema de Riemann centrado en  $x_{i+1/2}$ , obteniendo primero un estado promedio  $\tilde{\mathbf{U}}_{i+1/2}$  y calculando  $\tilde{\mathbf{A}}_{i+1/2} = \mathbf{A}(\tilde{\mathbf{U}}_{i+1/2})$ . De la misma manera que  $\mathbf{A}$  tiene unos valores y vectores propios que dependen de  $\mathbf{U}$  (ecuación (2.71), los valores y vectores propios de  $\tilde{\mathbf{A}}_{i+1/2}$  dependerán de  $\tilde{\mathbf{U}}_{i+1/2}$  según:

$$\tilde{\lambda}_{1,2} = \tilde{u} \pm \tilde{c} \quad ; \quad \tilde{\mathbf{e}}_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{u} \pm \tilde{c} \end{pmatrix} \quad (4.29)$$

Como debe cumplirse la propiedad 1, un salto en las variables a través de la intercelda  $i+1/2$  se podrá escribir como:

$$\Delta \mathbf{U}_{i+1/2} = \sum_{j=1}^2 \tilde{\alpha}_j \tilde{\mathbf{e}}_j \quad (4.30)$$

siendo  $\Delta \mathbf{U}_{i+1/2} = \mathbf{U}_{i+1} - \mathbf{U}_i$ . Desarrollando (4.30) y teniendo en cuenta (2.52) se obtienen los coeficientes  $\tilde{\alpha}_j$ :

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_1 &= \frac{(\tilde{c} - \tilde{u})\Delta A + \Delta Q}{2\tilde{c}} \\ \tilde{\alpha}_2 &= \frac{(\tilde{c} + \tilde{u})\Delta A - \Delta Q}{2\tilde{c}} \end{aligned} \quad (4.31)$$

La propiedad 3 de la matriz  $\tilde{\mathbf{A}}_{i+1/2}$ , ecuación (4.18) se puede describir con la notación utilizada:

$$\Delta \mathbf{F}_{i+1/2} = \tilde{\mathbf{A}}_{i+1/2}(\Delta \mathbf{U}_{i+1/2}) = \sum_{j=1}^2 \tilde{\alpha}_j \tilde{\lambda}_j \tilde{\mathbf{e}}_j \quad (4.32)$$

sustituyendo en ella (4.30) y utilizando que  $\partial I_1 / \partial x = I_2 + A \partial h / \partial x$ , se obtiene el valor de la variable promedio  $\tilde{u}$  para las ecuaciones de Saint Venant unidimensionales:

$$\tilde{u} = \frac{\frac{Q_{i+1}}{\sqrt{A_{i+1}}} + \frac{Q_i}{\sqrt{A_i}}}{(\sqrt{A_i} + \sqrt{A_{i+1}})} \quad (4.33)$$

En cuanto a  $\tilde{c}$ , una posible expresión es:

$$\tilde{c} = \sqrt{g \frac{\tilde{A}}{\tilde{B}}} \quad (4.34)$$

De esta manera quedan determinadas todas las variables en (4.28) para la aplicación del método de Godunov con el *Riemann solver* de Roe para las ecuaciones de Saint Venant unidimensionales, sin haber considerado aun el término independiente.  $\tilde{A}$  y  $\tilde{B}$  son una aproximación del área y ancho superficial en el contorno, para los cuales se puede tomar en principio la media aritmética de los valores en los elementos contiguos, aunque en el apartado 4.6. se verá otra expresión más adecuada para asegurar la correcta modelación del régimen permanente.

Con lo visto hasta el momento, el *Riemann solver* de Roe aproxima el problema de Riemann para las ecuaciones de Saint Venant en cada intercelda por otro problema de Riemann asociado a un sistema de ecuaciones hiperbólico lineal (4.17). En el apartado 2.5.7.1. del Capítulo 2 se ha visto que para este último las ondas que se producen son líneas en el plano  $(x,t)$  que separan estados constantes. En cambio, para el sistema original las ondas pueden ser ondas de choque u ondas de depresión y, en este último caso, la onda no se limita a una línea en el espacio  $(x,t)$  sino que se esparce en un abanico. En el caso que dicho abanico comprenda el eje de tiempos (como ocurre por ejemplo en la rotura de presa, ver Figura 2.28 del Capítulo 2) el signo de  $\tilde{\lambda}$ , y por tanto el signo de la pendiente de las líneas características, cambia dentro del abanico. Lo que en cierta manera hace el *Riemann solver* de Roe es condensar todo el abanico a una única línea (Figura 4.1) y tener, para la onda correspondiente, una onda de choque que no se corresponde con la realidad (onda de choque de depresión como se ha visto en el apartado 2.5.2 del Capítulo 2) y que viola la condición de entropía (2.167).

Cuando se produce esta situación (onda de depresión transcritical  $j$ ), se cumple  $\lambda(\mathbf{U}_j^L) < \tilde{\lambda}_j$  y  $\tilde{\lambda}_j < \lambda(\mathbf{U}_j^R)$ , siendo  $\mathbf{U}_j^L$  y  $\mathbf{U}_j^R$  los estados situados respectivamente a izquierda y derecha de la onda. En ese caso se suele utilizar la corrección de entropía de Harten y Hyman (1982) que resulta de aproximar la zona comprendida dentro del abanico de la onda de depresión por un estado constante  $\bar{\mathbf{U}}_j$ , aplicar la forma integral del sistema de ecuaciones en un volumen que comprende la onda, y buscar el valor que debe tomar  $\tilde{\lambda}^j$  para calcular dicho estado constante con las expresiones (4.19) o (4.20). En definitiva se trata de aproximar la solución en la intercelda  $i+1/2$  de una manera más precisa que con el *Riemann solver* de Roe (que aproxima dicha solución por el estado constante comprendido entre las dos ondas, sin tener en cuenta que en algún caso el contorno puede quedar comprendida en una de las ondas).

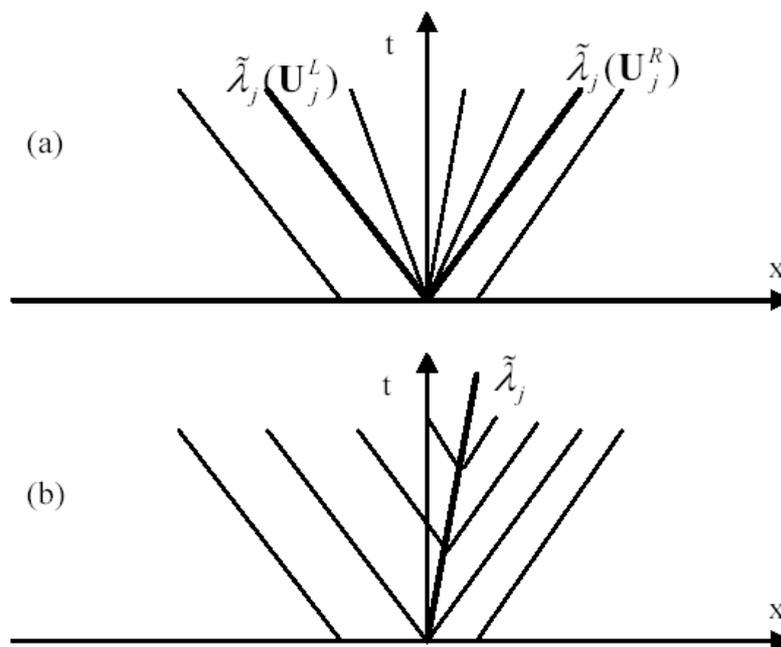


Figura 4.1. Esquema de una onda de depresión transcritical (a) y la aproximación de la misma, en forma de onda de onda de choque de depresión no admisible físicamente, del *Riemann solver* de Roe (b)

La corrección de entropía de Harten y Hyman consiste en reemplazar  $|\tilde{\lambda}_j|$  en (4.28) por  $\varphi_j$  siendo:

$$\varphi_j = \begin{cases} |\tilde{\lambda}_j| & \text{si } |\tilde{\lambda}_j| \geq \varepsilon_j \\ \varepsilon_j & \text{si } |\tilde{\lambda}_j| < \varepsilon_j \end{cases} \quad (4.35)$$

y

$$\varepsilon_{j,i+1/2} = \max\left[0, (\tilde{\lambda}_{j,i+1/2} - \lambda_{j,i}), (\lambda_{j,i+1} - \tilde{\lambda}_{j,i+1/2})\right] \quad (4.36)$$

Finalmente el método de Godunov con el Riemann solver de Roe y la corrección de entropía de Harten y Hyman se puede escribir:

$$\mathbf{F}_{i+1/2}^* = \frac{1}{2}(\mathbf{F}_i + \mathbf{F}_{i+1}) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 \tilde{\alpha}_j \varphi_j \tilde{\mathbf{e}}_j \quad (4.37)$$

#### 4.2.1.1 Término independiente en el esquema Godunov+Roe 1D

En el flujo de agua en lámina libre el efecto de la fricción y la pendiente de fondo pueden ser determinantes. Este efecto se plasma en el término independiente de las ecuaciones, por lo que se debe asegurar un correcto tratamiento del mismo ,y en concreto, utilizar una discretización en el esquema numérico que esté de acuerdo con el tratamiento del vector de flujo. Esto que parece obvio no es inmediato, porque el término independiente de las ecuaciones de Saint Venant en forma conservativa no se puede poner fácilmente de forma discreta como una diferencia tal como se hace con el vector de flujo.

Ello ha llevado a que tradicionalmente la consideración del término independiente se haya hecho para cada elemento de volumen según la expresión (3.11), es decir, considerando el valor medio del mismo en el centro del elemento. Sin embargo, esta aproximación centrada no consigue un correcto balance entre el término independiente y el vector de flujo, por lo que lleva a errores importantes. Esto se puede ver fácilmente intentando modelar una situación de agua parada sobre fondo irregular. En un elemento con fondo horizontal contiguo a otro con pendiente, la pendiente de fondo según (3.11) sería nula, mientras que los flujos numéricos en los contornos del elemento serían distintos (por haber niveles de agua distintos a ambos lados) y el esquema numérico produciría una solución no estacionaria. Con este tratamiento del término independiente los resultados que se obtienen para un problema estacionario son variables en el tiempo, lo que es evidentemente incorrecto. Un requisito indispensable es entonces que en situaciones estacionarias el tratamiento del termino independiente tenga un correcto balance con la discretización del vector de flujo, de manera que el efecto de ambos se anule y se obtenga una solución también estacionaria.

Conviene destacar (Hubbard et al 2000, Brufau, 2000) que la parte del término independiente correspondiente a la pendiente de fondo tiene un claro equilibrio con el vector de flujo, no ocurriendo lo mismo con los términos de fricción. Así, para el tratamiento del término independiente es conveniente la descomposición del mismo separando los términos de fricción, que admiten un tratamiento centrado, aunque pueden crear problemas de estabilidad en caso de ser importantes, del resto. De ahora en adelante se considerará:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}^1 + \mathbf{H}^2 \quad (4.38)$$

con

$$\mathbf{H}^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ gJ_2 + gAS_0 \end{pmatrix} \quad (4.39)$$

$$\mathbf{H}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -gAS_f \end{pmatrix} \quad (4.40)$$

Los primeros trabajos para equilibrar el término independiente con el vector de flujo se deben a Glaister (1988) para canales horizontales con fondo horizontal y ancho variable, seguidos bastante más tarde por Vázquez-Cendón (1999) en esquemas de primer orden en una y dos dimensiones y geometrías irregulares, planteándose la extensión a segundo orden de precisión y esquemas TVD por Hubbard y García-Navarro (2000).

En volúmenes finitos, el esquema numérico para la resolución de un sistema de ecuaciones con término independiente

$$\mathbf{U}_t + \mathbf{F}(\mathbf{U})_x = \mathbf{H} \quad (4.41)$$

se concreta en:

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{F}_{i+1/2}^* - \mathbf{F}_{i-1/2}^*) + \frac{\Delta t}{\Delta x} \mathbf{H}_i^* \quad (4.42)$$

donde las expresiones del flujo numérico son las vistas en 4.2. .  $\mathbf{H}_i^*$  es la expresión numérica del término independiente  $\mathbf{H}$ , y representa el término independiente integrado en todo el volumen finito.

En nuestro caso, con (4.38), se tiene:

$$\mathbf{H}_i^* = \mathbf{H}_i^{*1} + \mathbf{H}_i^{*2} \quad (4.43)$$

Para  $\mathbf{H}^2$ , que incluye los términos de fricción, se puede considerar una discretización centrada simple:

$$\mathbf{H}_i^{2*} = \Delta x \mathbf{H}_i^{2,n} \quad (4.44)$$

La parte correspondiente a  $\mathbf{H}^1$  deberá tratarse de acuerdo con el esquema numérico utilizado según lo que se expone a continuación

Para  $\mathbf{H}^1$  y para que se establezca un correcto balance entre el término independiente y la parte homogénea de la ecuación, la discretización deberá de hacerse de la misma manera que para el vector de flujo, por lo que, a la vista de (4.6), parece lógico considerar también dos contribuciones al término independiente, una en cada contorno del elemento de volumen, o sea:

$$\mathbf{H}_i^{1*} = \mathbf{H}_{i,i-1/2}^{1*} + \mathbf{H}_{i,i+1/2}^{1*} \quad (4.45)$$

siendo

$$\mathbf{H}_{i,i-1/2}^{1*} = \int_{x_{i-1/2}}^{x_i} \mathbf{H}^1 dx \quad ; \quad \mathbf{H}_{i,i+1/2}^{1*} = \int_{x_i}^{x_{i+1/2}} \mathbf{H}^1 dx \quad (4.46)$$

El esquema de Roe descompone la diferencia del vector de flujo a través de un contorno en función de los vectores propios del jacobiano del sistema (4.32). Una descomposición análoga del término independiente en función de los mismos vectores propios consiste en aproximar el término independiente en un contorno, o más concretamente la integral del término independiente en el volumen comprendido entre los centros de dos volúmenes finitos contiguos según:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \mathbf{H}^1 dx = \sum_{j=1}^2 \tilde{\beta}_j \tilde{\mathbf{e}}_j \quad (4.47)$$

donde  $\tilde{\beta}_j$  son unos coeficientes. De las dos últimas expresiones se deduce:

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_{i,i-1/2}^{1*} &= \frac{1}{2} \left( \sum_{j=1}^2 \tilde{\beta}_j (1 + \text{signo}(\tilde{\lambda}_j)) \tilde{\mathbf{e}}_j \right)_{i-1/2} \\ \mathbf{H}_{i,i+1/2}^{1*} &= \frac{1}{2} \left( \sum_{j=1}^2 \tilde{\beta}_j (1 - \text{signo}(\tilde{\lambda}_j)) \tilde{\mathbf{e}}_j \right)_{i+1/2}\end{aligned}\quad (4.48)$$

y con esta última, junto con (4.42), (4.45), (4.44) y (4.45), se obtiene la expresión del método de Godunov y el Riemann solver de Roe para un sistema de ecuaciones con término independiente:

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \mathbf{F}_{i-1/2}^* - \mathbf{F}_{i+1/2}^* + \mathbf{H}_{i,i-1/2}^{1*} + \mathbf{H}_{i,i+1/2}^{1*} \right) + \Delta t \mathbf{H}_i^{2,n} \quad (4.49)$$

donde  $\mathbf{F}^*$  responde a (4.28),  $\mathbf{H}^{1*}$  a (4.48), y  $\mathbf{H}^2$  a (4.40).

Para obtener los coeficientes  $\tilde{\beta}^j$ , considerando (4.47) junto con (4.39) se tiene:

$$\tilde{\beta}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{u} + \tilde{c} \end{pmatrix} + \tilde{\beta}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{u} - \tilde{c} \end{pmatrix} = \int_{x_1}^{i+1/2} \begin{pmatrix} 0 \\ gAS_0 + gI_2 \end{pmatrix} dx \quad (4.50)$$

si  $\tilde{S}_0 \Delta x = -\Delta z$  y  $\partial I_1 / \partial x = I_2 + A \partial h / \partial x$  resulta:

$$\begin{aligned}\tilde{\beta}_1 &= -\frac{1}{2\tilde{c}} g \tilde{A} (\Delta z + \Delta h) + \frac{1}{2\tilde{c}} g \Delta I_1 \\ \tilde{\beta}_2 &= -\tilde{\beta}_1\end{aligned}\quad (4.51)$$

#### 4.2.2. Dependencia espacial del vector de flujo en geometrías irregulares.

Las ecuaciones de Saint Venant en una dimensión (2.51) tienen la particularidad que el vector de flujo  $\mathbf{F}$  no depende solamente de las variables  $\mathbf{U} = (A, Q)$ , sino que tiene una dependencia espacial  $\mathbf{F}(\mathbf{U}, x)$  a través del término de presión  $I_1$ . Esto modifica lo visto hasta ahora en este subapartado 4.2., concretamente la expresión (4.18) y lo que de ella se deriva. La ecuación (4.18) se verifica cuando

$$\frac{d\mathbf{F}}{dx} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} \quad (4.52)$$

mientras en una geometría irregular se tiene:

$$\frac{d\mathbf{F}}{dx} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} \quad (4.53)$$

con

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = \begin{pmatrix} 0 \\ g \frac{\partial I_1}{\partial x} \end{pmatrix} \quad (4.54)$$

$I_1$  representa la fuerza producida por la distribución de presiones en una sección del río y, como se observa en (4.3), depende de  $\mathbf{A}$ , a través de  $h$ , pero también de  $x$  a través de la dependencia espacial de  $b$ . Un primera aproximación a sistemas de ecuaciones con dependencia espacial del vector de flujo se encuentra en Hubbard y García-Navarro (2000) para canales rectangulares.

De esta manera lo presentado en el subapartado anterior sería válido para canales prismáticos, pero no para geometrías irregulares. Para éstas la variación de  $I_1$  depende de la variación en el área pero también de la

irregularidad geométrica del cauce. Dos secciones de un río pueden tener la misma área pero distinto valor de  $I_1$ . Para canal prismático, de (4.18), teniendo en cuenta que  $\tilde{\mathbf{A}}$  es una aproximación a  $\mathbf{A} = \partial \mathbf{F} / \partial \mathbf{U}$ , se desprende  $g\Delta(I_1) = \tilde{c}\Delta A$ . En geometrías irregulares el incremento que sufre el valor de  $I_1$  de un elemento de volumen a otro se debe a la variación que sufre el valor del área a través de dicho contorno, pero también a la variación geométrica del cauce:

$$g\Delta(I_1)_{i+1/2} = \tilde{c}^2 \Delta A_{i+1/2} + g\Delta(I_1|_{\tilde{A}})_{i+1/2} \quad (4.55)$$

El término  $gI_1|_{\tilde{A}}$  indica el valor de la resultante de las presiones en una sección para un valor del área igual a  $\tilde{A}$ . La ecuación anterior indica que la diferencia de la resultante de las presiones entre dos secciones transversales del río depende de la diferencia de áreas entre dos secciones pero también de la diferencia de presión en ambas secciones a igualdad de área. En un canal prismático se tendría  $g\Delta(I_1|_{\tilde{A}})_{i+1/2} = 0$ .

Con estas consideraciones, ahora la ecuación (4.32) se puede describir como:

$$\Delta \mathbf{F}_{i+1/2} = \tilde{\mathbf{A}}_{i+1/2} (\Delta \mathbf{U}_{i+1/2}) + \Delta (gI_1|_{\tilde{A}})_{i+1/2} = \sum_{j=1}^2 \tilde{\alpha}_j \tilde{\lambda}_j \tilde{\mathbf{e}}_j + \sum_{j=1}^2 \tilde{\gamma}_j \tilde{\mathbf{e}}_j \quad (4.56)$$

$\tilde{\gamma}_{1,2}$  son el resultado de la descomposición en base a los vectores propios  $\tilde{\mathbf{e}}_{1,2}$  de  $\Delta (gI_1|_{\tilde{A}})_{i+1/2}$ :

$$g\Delta(I_1|_{\tilde{A}})_{i+1/2} = \sum_{j=1}^2 \tilde{\gamma}_j \tilde{\mathbf{e}}_j \quad (4.57)$$

de donde:

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_1 &= \frac{1}{2\tilde{c}} g\Delta(I_1|_{\tilde{A}}) \\ \tilde{\gamma}_2 &= -\tilde{\gamma}_1 \end{aligned} \quad (4.58)$$

$\tilde{A}$  es un valor representativo del área en el contorno entre dos volúmenes finitos.

Es destacable que ninguna de las referencias conocidas que tratan con geometrías irregulares utiliza una formulación que tenga en cuenta el efecto del último término de (4.56).

En las referencias se encuentran diferentes propuestas para  $\tilde{c}$  en cauces irregulares:  $\tilde{c} = \sqrt{g\tilde{A}/\tilde{B}}$  con  $\tilde{A} = (A_i + A_{i+1})/2$  y  $\tilde{B} = (B_i + B_{i+1})/2$ ,  $\tilde{c} = (c_i + c_{i+1})/2$ ,  $\tilde{c}^2 = (c_i^2 + c_{i+1}^2)/2$ ,  $\tilde{c} = \sqrt{g\Delta I / \Delta A}$ . Todas ellas son una buena aproximación en canales prismáticos, pero ninguna consigue calcular correctamente el salto en las fuerzas de presión  $g\Delta I_{i+1/2}$  si en (4.55) no se considera el último término de la ecuación (y habitualmente no se hace). Por otro lado, es evidente que ninguna de las expresiones vistas reproduce correctamente la descomposición del salto de las fuerzas de presión (4.56).

Por todo lo visto, se propone la siguiente expresión para la celeridad:

$$\tilde{c}^2 = g \frac{(I_{i+1} - I_i) - (\Delta I_1|_{\tilde{A}})_{i+1/2}}{A_{i+1} - A_i} \quad (4.59)$$

$(\Delta I_1|_{\tilde{A}})_{i+1/2}$  se calcula fácilmente como la diferencia de las fuerzas de presión en  $i+1$  y  $i$ :

$$(\Delta I_1|_{\tilde{A}})_{i+1/2} = (I_1|_{\tilde{A}})_{i+1} - (I_1|_{\tilde{A}})_i \quad (4.60)$$

mientras  $(I_1|_{\tilde{A}})_i$  son las fuerzas de presión en el volumen finito  $i$  para un valor del área  $\tilde{A}$ . Con lo visto hasta ahora,  $\tilde{A}$  podría ser cualquier valor comprendido entre  $A_i$  y  $A_{i+1}$ , aunque más adelante (apartado 4.6.) se verá

que para mantener un correcto balance con el término independiente en el caso de flujo estacionario debe utilizarse la media armónica.

Es de destacar que mientras se cumpla  $A_{i+1} \neq A_i$ , la expresión (4.59) está correctamente definida ya que  $\tilde{A} \in [A_i, A_{i+1}]$  y  $\text{signo}[(I_1)_{i+1} - (I_1|_{\tilde{A}})_{i+1}] = \text{signo}[(I_1|_{\tilde{A}})_i - (I_1)_i] = \text{signo}[A_{i+1} - A_i]$ . Cuando  $A_{i+1} = A_i$  la variación de la fuerza de presión por variación del área es cero, la expresión (4.55) se reduce a  $g\Delta I_{i+1/2} = g(\Delta I_1|_{\tilde{A}})_{i+1/2}$  y cualquiera de las definiciones de la celeridad vistas es posible. En este caso, en esta tesis se ha utilizado la expresión  $\tilde{c}^2 = (c_i^2 + c_{i+1}^2)/2$ .

Con lo visto, un desarrollo paralelo al del subapartado 4.2.1, pero considerando la variabilidad espacial del vector de flujo, permite obtener la expresión final del método de Godunov con el Riemann solver de Roe y la corrección de entropía de Harten y Hyman para las ecuaciones de Saint Venant unidimensionales:

$$\mathbf{F}_{i+1/2}^* = \frac{1}{2}(\mathbf{F}_i + \mathbf{F}_{i+1}) - \frac{1}{2} \left( \sum_{j=1}^2 \tilde{\alpha}_j \varphi_j \tilde{\mathbf{e}}_j + \sum_{j=1}^2 \tilde{\gamma}_j \text{signo}(\tilde{\lambda}_j) \tilde{\mathbf{e}}_j \right) \quad (4.61)$$

### 4.3. Esquemas de segundo orden en una dimensión

Ya se ha visto en el capítulo anterior que los esquemas de segundo orden son incompatibles con la condición de no tener oscilaciones espurias en el entorno de las discontinuidades, pero también se ha adelantado ya que los esquemas TVD o de alta resolución consiguen evitar estas oscilaciones manteniendo el segundo orden de precisión en prácticamente todo el dominio. Los esquemas de segundo orden, que se abordan en este apartado son la base para el posterior desarrollo de esquemas TVD.

De entre la multitud de esquemas de segundo orden existentes para las ecuaciones de Saint Venant se tratan aquellos que son útiles más adelante para el desarrollo de métodos TVD, y que permiten además un tratamiento adecuado del término independiente.

A partir del método de Godunov se pueden desarrollar esquemas de segundo orden en base a dos planteamientos distintos: los esquemas tipo WAF (de *Weight Averaged Flux* o flujo ponderado) y los esquemas tipo MUSCL (de *Monotone Upstream-centered Scheme for Conservation Laws*) también llamados esquemas de extrapolación de variables.

Los esquemas de segundo orden se presentan aquí por ser la base de los esquemas de alta resolución presentados en 4.4. , aunque carecen de utilidad práctica por si solos debido a las oscilaciones espurias que conllevan en caso de existir discontinuidades en el flujo. Por ello no se han utilizado en las simulaciones, y solamente se presenta el esquema para la parte homogénea de las ecuaciones.

#### 4.3.1. Esquema WAF en una dimensión

En el esquema WAF, o de flujo ponderado, el flujo numérico es un promedio integral del flujo en  $[x_i, x_{i+1}] \times [t^n, t^{n+1}]$ :

$$\mathbf{F}_{i+1/2}^* = \frac{1}{t^{n+1} - t^n} \frac{1}{x_{i+1} - x_i} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \mathbf{F}(\bar{\mathbf{U}}(x, t)) dx dt \tag{4.62}$$

donde  $\bar{\mathbf{U}}(x, t)$  es la solución del problema de Riemann con datos iniciales  $\mathbf{U}_i, \mathbf{U}_{i+1}$ , que se denota por  $\mathbf{U}_{i+1/2}$ . Si además en (4.62) se aproxima la integral en el tiempo por el punto medio resulta:

$$\mathbf{F}_{i+1/2}^* = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \mathbf{F}(\mathbf{U}(x, \frac{1}{2} \Delta t)) dx \tag{4.63}$$

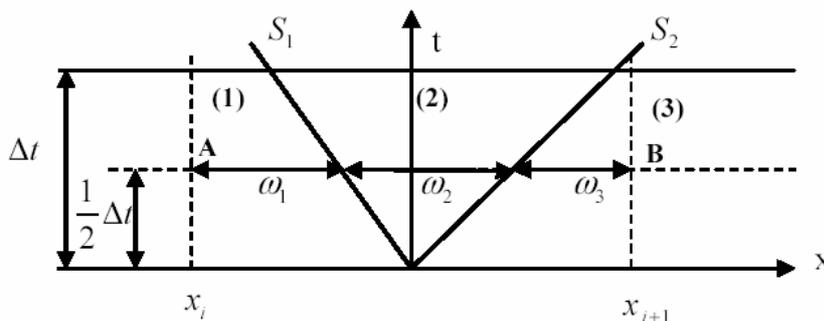


Figura 4.2 Ponderación del flujo en el esquema WAF

Para las ecuaciones de Saint Venant unidimensionales, las dos ondas del problema de Riemann tienen velocidades de propagación  $S_1$  y  $S_2$ . La integral de (4.63) (desde A hasta B en la Figura 4.2) se puede descomponer como la suma de tres integrales para cada una de los tres estados (1), (2) y (3). De esta manera de (4.63) resulta:

$$\mathbf{F}_{i+1/2}^* = \omega_1 \mathbf{F}^{(1)} + \omega_2 \mathbf{F}^{(2)} + \omega_3 \mathbf{F}^{(3)} \quad (4.64)$$

donde  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  y  $\omega_3$  son los pesos de ponderación del flujo y que valen:

$$\omega_j = \frac{1}{2}(v_j - v_{j-1}) \quad \text{con} \quad \begin{cases} v_0 = -1 \\ v_j = \frac{\Delta t S_j}{\Delta x} \quad j=1,2 \\ v_3 = 1 \end{cases} \quad (4.65)$$

teniendo en cuenta que  $\mathbf{F}^{(1)} = \mathbf{F}_i$ ,  $\mathbf{F}^{(3)} = \mathbf{F}_{i+1}$ , y  $\Delta \mathbf{F}_{i+1/2}^j = \mathbf{F}_{i+1/2}^{(j+1)} - \mathbf{F}_{i+1/2}^{(j)}$  queda finalmente la expresión del flujo numérico para el esquema WAF:

$$\mathbf{F}_{i+1/2}^* = \frac{1}{2}(\mathbf{F}_i + \mathbf{F}_{i+1}) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 v_j \Delta \mathbf{F}_{i+1/2}^j \quad (4.66)$$

Naturalmente esta última expresión no queda completa hasta conocer la expresión de  $\mathbf{F}^{(2)}$ , para lo cual se necesita conocer la solución del problema de Riemann, o una aproximación a ella mediante un *Riemann solver*. El esquema WAF puede tener distintas variedades según como se aproxime esta solución.

Es interesante ver que el esquema WAF para la ecuación escalar homogénea (3.1) es idéntico al esquema de Lax-Wendroff (3.50). Si aplicamos  $f(u) = \lambda u$  a (3.50) se obtiene directamente

$$f_{i+1/2}^* = \frac{1}{2}(f_{i+1} + f_i) - \frac{1}{2} \frac{\lambda \Delta t}{\Delta x} (f_{i+1}^n - f_i^n) \quad (4.67)$$

Como para este caso la velocidad de propagación de la onda es precisamente  $\lambda$ , se tiene que  $v = \frac{\lambda \Delta t}{\Delta x}$ , de manera que al final el esquema queda como:

$$f_{i+1/2}^* = \frac{1}{2}(f_{i+1} + f_i) - \frac{1}{2} c (\Delta f_{i+1/2}) \quad (4.68)$$

que es el equivalente de (4.66) para una sola ecuación. De esta manera se puede entender el esquema WAF como una generalización para sistemas hiperbólicos no lineales, basada en el problema de Riemann, del esquema de Lax-Wendroff. Para desarrollos de apartados posteriores es interesante ver que la expresión anterior, reorganizando términos y teniendo en cuenta que  $\Delta f = \lambda \Delta u$  y  $\lambda v = |\lambda| |v|$  (por tener  $\lambda$  y  $c$  el mismo signo), se puede escribir como:

$$f_{i+1/2}^* = \frac{1}{2}(f_{i+1} + f_i) - \frac{1}{2} |\lambda| \Delta u_{i+1/2} + \frac{1}{2} |\lambda| (1 - |v|) \Delta u_{i+1/2} \quad (4.69)$$

que a la vista de (4.15) permite entender el esquema de Lax-Wendroff como el método de Godunov (o, en este caso, esquema *upwind* de primer orden) más unos términos (el último sumando de (4.69)) que lo corrigen a segundo orden de precisión.

Si se sustituye en la expresión general del esquema WAF (4.66), la ecuación (4.56), obtenida con el *Riemann solver* de Roe se obtiene:

$$\mathbf{F}_{i+1/2}^* = \frac{1}{2}(\mathbf{F}_i + \mathbf{F}_{i+1}) - \frac{1}{2} \left( \sum_{j=1}^2 \tilde{\alpha}_j \tilde{\lambda}_j \nu_j \tilde{\mathbf{e}}_j + \sum_{j=1}^2 \tilde{\gamma}_j \nu_j \tilde{\mathbf{e}}_j \right) \quad (4.70)$$

que sería como una extensión a sistemas de ecuaciones del esquema de Lax-Wendroff, y que no es recomendable utilizar en presencia de discontinuidades o fuertes gradientes por los problemas de oscilaciones espurias asociados a cualquier esquema de segundo orden. En la expresión anterior  $\nu_j = \tilde{\lambda}_j \Delta t / \Delta x$ . Esta última expresión también se puede poner como un flujo numérico de primer orden más unas contribuciones de segundo orden:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{i+1/2}^* = & \frac{1}{2}(\mathbf{F}_i + \mathbf{F}_{i+1}) - \frac{1}{2} \left( \sum_{j=1}^2 \tilde{\alpha}_j |\tilde{\lambda}_j| \tilde{\mathbf{e}}_j + \sum_{j=1}^2 \tilde{\gamma}_j \text{signo}(\tilde{\lambda}_j) \tilde{\mathbf{e}}_j \right) + \\ & + \frac{1}{2} \left( \sum_{j=1}^2 \tilde{\alpha}_j |\tilde{\lambda}_j| (1 - |\nu_j|) \tilde{\mathbf{e}}_j + \sum_{j=1}^2 \tilde{\gamma}_j \text{signo}(\tilde{\lambda}_j) (1 - |\nu_j|) \tilde{\mathbf{e}}_j \right) \end{aligned} \quad (4.71)$$

y añadiéndole la corrección de entropía para evitar discontinuidades no físicas en el caso de tener una onda transcítica, finalmente resulta:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{i+1/2}^* = & \frac{1}{2}(\mathbf{F}_i + \mathbf{F}_{i+1}) - \left( \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 \tilde{\alpha}_j \varphi_j \tilde{\mathbf{e}}_j + \sum_{j=1}^2 \tilde{\gamma}_j \text{signo}(\tilde{\lambda}_j) \tilde{\mathbf{e}}_j \right) + \\ & + \frac{1}{2} \left( \sum_{j=1}^2 \tilde{\alpha}_j \varphi_j (1 - |\nu_j|) \tilde{\mathbf{e}}_j + \sum_{j=1}^2 \tilde{\gamma}_j \text{signo}(\tilde{\lambda}_j) (1 - |\nu_j|) \tilde{\mathbf{e}}_j \right) \end{aligned} \quad (4.72)$$

### 4.3.2. Esquema de McCormack en una dimensión

El esquema de McCormack es uno de los esquemas explícitos más utilizados para la resolución de las ecuaciones de Saint Venant, tanto en una como en dos dimensiones. Es un esquema en dos pasos, predictor y corrector, de segundo orden de precisión tanto en el espacio como en el tiempo, cómodo de aplicar para sistemas de ecuaciones no lineales incluso con término independiente.

El esquema, en cada incremento de tiempo, realiza dos pasos, uno considerando un contorno del volumen finito otro considerando el otro contorno. Así, el avance en un incremento de tiempo puede escribirse:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_i^P &= \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{F}_i^n - \mathbf{F}_{i-1}^n) \\ \mathbf{U}_i^C &= \mathbf{U}_i^P - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{F}_{i+1}^P - \mathbf{F}_i^P) \\ \mathbf{U}_i^{n+1} &= \frac{1}{2} (\mathbf{U}_i^P + \mathbf{U}_i^C) \end{aligned} \quad (4.73)$$

El esquema de McCormack utiliza aproximaciones distintas al flujo en cada contorno en el predictor y el corrector. En (4.73) en el predictor se ha aproximado  $\mathbf{F}_{i-1/2}^* = \mathbf{F}_{i-1}^n$  y  $\mathbf{F}_{i+1/2}^* = \mathbf{F}_i^n$ , mientras en el corrector se ha utilizado  $\mathbf{F}_{i-1/2}^* = \mathbf{F}_i^P$  y  $\mathbf{F}_{i+1/2}^* = \mathbf{F}_{i+1}^P$ . Es conveniente en cada incremento de tiempo ir alternando el orden en el predictor y el corrector (en el siguiente paso de tiempo consideraríamos  $\mathbf{F}_{i-1/2}^* = \mathbf{F}_i^n$  y  $\mathbf{F}_{i+1/2}^* = \mathbf{F}_{i+1}^n$  en el predictor y  $\mathbf{F}_{i-1/2}^* = \mathbf{F}_{i-1}^P$  y  $\mathbf{F}_{i+1/2}^* = \mathbf{F}_i^P$  en el corrector).

El esquema de McCormack se desarrolló a partir del esquema de Lax-Wendroff. Para la ecuación escalar homogénea lineal (3.1) los dos esquemas son el mismo; la expresión del flujo numérico del esquema de McCormack para dicha ecuación resulta exactamente (4.68). Para sistemas de ecuaciones, o para ecuaciones no lineales esta igualdad deja de ser cierta. Sin embargo se ha utilizado esta similitud para desarrollar variaciones del esquema de McCormack (en concreto el esquema de McCormack TVD) basadas en propiedades del

esquema de Lax-Wendroff o del esquema WAF (que también se puede entender como una extensión del esquema de Lax-Wendroff).

### 4.3.3. Esquemas MUSCL en una dimensión

Los esquemas tipo MUSCL o de extrapolación de variables (Van Leer, 1977b) (Van Leer, 1979), que también se pueden ver como una extensión a segundo orden de precisión del método de Godunov, implican una serie de pasos, el más importante de los cuales es la obtención de un problema de Riemann modificado que sustituye al problema de Riemann original en el método de Godunov. Como en cualquier método de volúmenes finitos el valor en cada elemento representa el promedio integral de la solución en todo el elemento.

Se ha visto que el método de Godunov considera que cada elemento de volumen es una región en la que existe un estado constante o promedio integral (cada elemento es una *rebanada constante*). Los esquemas MUSCL, en cambio, pretenden incorporar más información considerando que cada elemento es una región en la que existe un estado lineal y la solución tiene una variación  $\Delta_i$  de un extremo del elemento a otro (cada elemento es una *rebanada lineal*). Esta variación se suele calcular a partir del salto que sufre la solución entre un elemento y el siguiente, ponderado por unos ciertos pesos  $\omega$ :

$$\Delta_i = \frac{1}{2}(1 + \omega)\Delta U_{i-1/2} + \frac{1}{2}(1 - \omega)\Delta U_{i+1/2} \quad (4.74)$$

Lo más común es tomar  $\omega = 0$

Una vez definidas las variaciones en cada elemento de volumen, se pueden obtener los valores de la solución reconstruida en los contornos del elemento:

$$\bar{U}_{i,i-1/2} = U_i - \frac{1}{2}\Delta_i \quad ; \quad \bar{U}_{i,i+1/2} = U_i + \frac{1}{2}\Delta_i \quad (4.75)$$

donde  $\bar{U}_{i,i-1/2}$  indica el valor de la solución reconstruida en el elemento  $i$  junto al contorno  $i-1/2$  (Figura 4.3), y  $\bar{U}_{i,i+1/2}$  el valor junto al contorno  $i+1/2$

Entre las distintas variedades de esquemas MUSCL en esta tesis se ha optado por el esquema MUSCL-Hancock, atribuido a S. Hancock (Toro, 1977) de tres pasos:

1. Reconstrucción lineal de los datos según (4.75)
2. Evolución de los valores extrapolados en los contornos con:

$$\begin{aligned} \bar{U}_i^L &= U_i^L - \frac{1}{2}(\mathbf{F}(U_i^R) - \mathbf{F}(U_i^L)) \\ \bar{U}_i^R &= U_i^R - \frac{1}{2}(\mathbf{F}(U_i^R) - \mathbf{F}(U_i^L)) \end{aligned} \quad (4.76)$$

3. Resolución del problema de Riemann en cada contorno  $i+1/2$  formado por  $\bar{U}_i^R, \bar{U}_{i+1}^L$  y, de la misma manera que con el método de Godunov, obtener el flujo numérico  $\mathbf{F}_{i+1/2}^* = \mathbf{F}(U_{i+1/2}(0))$  con la solución del problema de Riemann valorada en el contorno.

En esta tesis, el tercer paso (resolución del problema de Riemann modificado) se ha realizado con el método de Godunov y el *Riemann solver* de Roe, aunque se podría haber utilizado cualquier otro *Riemann solver*.

Es de destacar que existen múltiples variantes del esquema MUSCL, que se diferencian principalmente en el método de resolución del problema de Riemann en el tercer paso, pero también hay algunos que invierten el orden de los dos primeros y se puede encontrar en la bibliografía trabajos donde incluso se obvia el segundo paso. Esto llevaría a esquemas que no serían realmente de segundo orden (Toro, 1997). Para tener segundo orden

de precisión y esquemas que no sean altamente inestables no es suficiente con la reconstrucción de variables y la resolución del problema de Riemann con las variables extrapoladas a los contornos, sino que se requiere de alguna operación más (como el segundo paso del esquema MUSCL-Hancock).

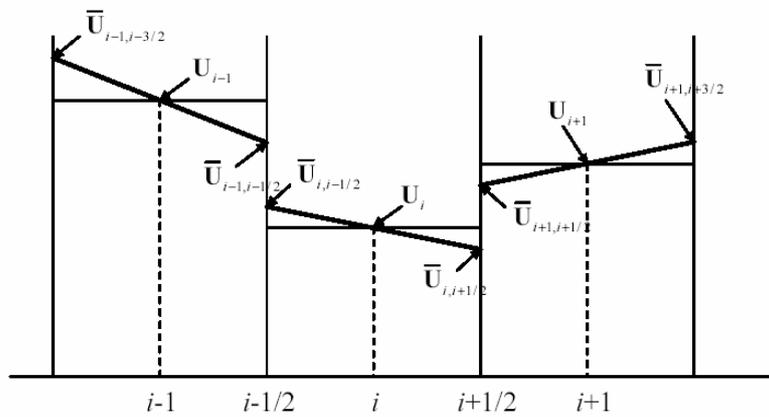


Figura 4.3 Reconstrucción de los datos en rebanadas lineales en los esquemas MUSCL

#### 4.4. Esquemas de alta resolución en una dimensión (Métodos de segundo orden y variación total decreciente)

En el capítulo anterior se han descrito los problemas de oscilaciones espurias asociados a los esquemas de segundo orden en presencia de discontinuidades o gradientes importantes (Teorema de Godunov, apartado 3.6.5 del Capítulo 3). También se han adelantado las propiedades que debe tener un esquema numérico para que no se produzcan estas oscilaciones y, en especial, para que el esquema sea TVD (Teorema de Harten, apartado 3.6.7 del Capítulo 3) en el caso de la ecuación escalar homogénea (3.1).

En este apartado se muestra como se concreta todo esto para los esquemas vistos en el apartado anterior, primero para la ecuación escalar homogénea y después para sistemas hiperbólicos no lineales. Mientras que en el caso escalar la variación total decreciente se consigue de manera rigurosa, esta generalización a sistemas no lineales no es rigurosa pero funciona bien en la práctica, por lo que se puede considerar como una generalización empírica.

Los esquemas TVD se pueden obtener directamente a partir de esquemas de segundo orden (por ejemplo el esquema WAF) imponiendo restricciones a los coeficientes para asegurar que se cumpla el teorema de Harten (Toro, 1997) o a partir de otra idea, quizás más intuitiva, de combinar un esquema de primer orden con otro de segundo, haciendo un promedio ponderado, y ver que pesos se le debe dar a cada esquema para asegurar que el esquema resultante sea TVD. Según esta segunda opción, el flujo numérico de un esquema TVD se escribe como:

$$f_{i+1/2}^* = f_{i+1/2}^{1er} + \psi_{i+1/2} (f_{i+1/2}^{2do} - f_{i+1/2}^{1er}) \quad (4.77)$$

donde  $f_{i+1/2}^{1er}$  es el flujo numérico del esquema de primer orden y  $f_{i+1/2}^{2do}$  el del esquema de segundo orden. Para  $\psi_{i+1/2} = 1$  el esquema resultante sería precisamente el esquema de segundo orden escogido. Como en presencia de fuertes gradientes éste no cumplirá las condiciones de Harten para ser TVD, se trata de deducir una expresión para la *función de limitación del flujo*  $\psi_{i+1/2}$ , que regule la corrección del esquema de segundo orden para asegurar la variación total decreciente.

##### 4.4.1. Esquema WAF TVD en una dimensión

Para la ecuación escalar homogénea (3.1) se ha visto que los esquema de Lax-Wendroff y WAF coinciden, por lo que a veces el esquema WAF TVD se encuentra referido como esquema de Lax-Wendroff TVD. Sin embargo, para sistemas de ecuaciones no lineales como las ecuaciones de Saint Venant, el esquema de Lax-Wendroff como tal no existe mientras si lo hace el esquema WAF, por ello parece más apropiado referirse al esquema como esquema WAF TVD.

El esquema WAF TVD se puede obtener considerando como  $f_{i+1/2}^{1er}$  el flujo numérico del método de Godunov, y  $f_{i+1/2}^{2do}$  el flujo numérico del esquema WAF.

Para la ecuación escalar homogénea (3.1) el flujo numérico del método de Godunov (4.12) se puede escribir:

$$f_{i+1/2}^{1er} = \frac{1}{2}(1+s)(\lambda u_i^n) + \frac{1}{2}(1-s)(\lambda u_{i+1}^n) \quad (4.78)$$

con  $s = \text{signo}(\lambda)$  mientras que el flujo numérico del esquema WAF (4.68) es:

$$f_{i+1/2}^{2do} = \frac{1}{2}(1+\nu)(\lambda u_i^n) + \frac{1}{2}(1-\nu)(\lambda u_{i+1}^n) \quad (4.79)$$

En el caso  $\lambda > 0$ , sustituyendo (4.78) y (4.79) en (4.77) y operando se puede llegar a escribir el esquema numérico como

$$u_i^{n+1} = u_i^n - C_{i-1/2} \Delta u_{i-1/2} \quad (4.80)$$

donde:

$$C_{i-1/2} = \nu \left( 1 + \left[ \frac{1}{2}(1+\nu) - 1 \right] \psi_{i-1/2} + \frac{1}{r_i^+} \left[ \frac{1}{2}(1-\nu) \right] \psi_{i+1/2} \right) \quad (4.81)$$

con

$$r_i^+ = \frac{\Delta u_{i-1/2}}{\Delta u_{i+1/2}} \quad (4.82)$$

$r_i^+$  se puede ver como el salto que sufre la solución en el contorno upwind del elemento de volumen respecto el salto en el otro contorno.

La expresión (4.80) tiene la forma de (3.66), por lo que ahora sólo faltará ver como debe ser  $\psi$  para que se cumplan las restricciones (3.67), es decir, para que:

$$0 \leq \nu \left( 1 + \left[ \frac{1}{2}(1+\nu) - 1 \right] \psi_{i-1/2} + \frac{1}{r_i^+} \left[ \frac{1}{2}(1-\nu) \right] \psi_{i+1/2} \right) \leq 1 \quad (4.83)$$

Desarrollando la desigualdad de la izquierda (para el caso  $\lambda > 0$  y por tanto  $c > 0$ ) se obtiene

$$\begin{cases} \psi_{i+1/2} \geq \left( \psi_{i-1/2} - \frac{2}{1-\nu} \right) r_i^+ & \text{si } r_i^+ \geq 0 \\ \psi_{i+1/2} \leq \left( \psi_{i-1/2} - \frac{2}{1-\nu} \right) r_i^+ & \text{si } r_i^+ \leq 0 \end{cases} \quad (4.84)$$

mientras que la de la derecha conduce a

$$\begin{cases} \psi_{i+1/2} \leq \left( \psi_{i-1/2} + \frac{2}{\nu} \right) r_i^+ & \text{si } r_i^+ \geq 0 \\ \psi_{i+1/2} \geq \left( \psi_{i-1/2} + \frac{2}{\nu} \right) r_i^+ & \text{si } r_i^+ \leq 0 \end{cases} \quad (4.85)$$

Se puede realizar un procedimiento análogo para el caso  $\lambda < 0$  (y por lo tanto  $\nu < 0$ ) obteniéndose entonces:

$$u_i^{n+1} = u_i^n + D_{i+1/2} \Delta u_{i+1/2} \quad (4.86)$$

con:

$$D_{i+1/2} = -\nu \left( 1 + \left[ \frac{1}{2}(1+\nu) - 1 \right] \psi_{i+1/2} + \frac{1}{r_i^-} \left[ \frac{1}{2}(1-\nu) \right] \psi_{i-1/2} \right) \quad (4.87)$$

donde ahora

$$r_i^- = \frac{\Delta u_{i+1/2}}{\Delta u_{i-1/2}} \quad (4.88)$$

tiene el mismo significado de ser el salto de la solución en el en el contorno *upwind* del elemento de volumen respecto del salto en el otro contorno. De (3.66), (3.67) resulta:

$$0 \leq D_{i+1/2} \leq 1 \quad (4.89)$$

y desarrollando como antes la desigualdad de la izquierda:

$$\begin{cases} \psi_{i-1/2} \geq \left( \psi_{i+1/2} - \frac{2}{1+\nu} \right) r_i^- & \text{si } r_i^- \geq 0 \\ \psi_{i-1/2} \leq \left( \psi_{i+1/2} - \frac{2}{1+\nu} \right) r_i^- & \text{si } r_i^- \leq 0 \end{cases} \quad (4.90)$$

mientras que de la de la derecha:

$$\begin{cases} \psi_{i-1/2} \leq \left( \psi_{i+1/2} + \frac{2}{-\nu} \right) r_i^- & \text{si } r_i^- \geq 0 \\ \psi_{i-1/2} \geq \left( \psi_{i+1/2} + \frac{2}{-\nu} \right) r_i^- & \text{si } r_i^- \leq 0 \end{cases} \quad (4.91)$$

Las expresiones (4.84)(4.85) por un lado, junto con (4.90)(4.91) por el otro, son limitaciones al valor de  $\psi$  en un contorno de un elemento de volumen. Estas cuatro desigualdades se pueden escribir de forma condensada para un contorno cualquiera  $i+1/2$ , sustituyendo en (4.84)(4.85)  $\nu$  por  $|\nu|$  y en (4.90)(4.91)  $\nu$  por  $-|\nu|$ , como:

$$\begin{cases} \psi_{i+1/2-s} - \frac{\psi_{i+1/2}}{r_{i+1/2}} \leq \frac{2}{1-|\nu|} & \text{si } r_{i+1/2} \geq 0 \\ \psi_{i+1/2-s} - \frac{\psi_{i+1/2}}{r_{i+1/2}} \leq \frac{2}{1-|\nu|} & \text{si } r_{i+1/2} \leq 0 \end{cases} \quad (4.92)$$

$$\begin{cases} \frac{\psi_{i+1/2}}{r_{i+1/2}} - \psi_{i+1/2-s} \leq \frac{2}{|\nu|} & \text{si } r_{i+1/2} \geq 0 \\ \frac{\psi_{i+1/2}}{r_{i+1/2}} - \psi_{i+1/2-s} \geq \frac{2}{|\nu|} & \text{si } r_{i+1/2} \leq 0 \end{cases} \quad (4.93)$$

$$r_{i+1/2} = \frac{\Delta u_{i+1/2-s}}{\Delta u_{i+1/2}} = \frac{u_{i+1-s} - u_{i-s}}{u_{i+1} - u_i} \quad (4.94)$$

Teniendo en cuenta estos resultados es interesante hacer unas consideraciones que nos conducen a las restricciones finales que deberá cumplir  $\psi(r)$ :

1.  $\psi(r)$  es un factor que limita la corrección de segundo orden según (4.77), por lo que no tiene sentido que tome valores negativos. De esta manera se exigirá siempre  $\psi(r) \geq 0$ .
2. Para tener el esquema de segundo orden en las zonas suaves de la solución (donde la variación en una intercelda es parecida a la variación en la intercelda contigua) se debe exigir  $\psi(r) = 1$  para  $r = 1$ .
3. Un valor negativo de  $r_{i+1/2}$  indica distinto sentido de propagación de la onda en cada extremo del elemento de volumen, es decir, una discontinuidad. En tal caso un esquema de segundo orden podría producir oscilaciones. Por lo tanto se tomará  $\psi(r) = 0$  para  $r < 0$ , y las segundas desigualdades de (4.92) y (4.93) no tendrán utilidad.
4. Como la primera desigualdad de (4.92) debe ser cierta en cualquier elemento de volumen, y el valor de  $\psi(r)$  en un extremo del mismo puede ser independiente del valor en el otro extremo, resulta que  $\psi_{i+1/2-s} \leq 2/(1-|\nu|)$ , o, en general:  $\psi(r) \leq 2/(1-|\nu|)$ .

5. Con un procedimiento análogo, de la segunda desigualdad de (4.93) se obtiene  $\psi(r) \leq 2r/|v|$ .
6. Finalmente, de la primera desigualdad de (4.93) se obtiene  $\psi(r) \geq -2r/(1-|v|)$ , aunque esta desigualdad, como  $r \geq 0$  y  $1-|v| \geq 0$  no aporta nada por ser más restrictiva la condición  $\psi(r) \geq 0$ . Igualmente de la primera desigualdad de (4.93) se obtendría  $\psi(r) \geq -2/|v|$  que tampoco aporta nada por la misma razón.

Las restricciones de los puntos 1 a 5 han permitido a distintos autores definir distintas funciones de limitación:

Función de limitación de *Van Leer*:

$$\psi(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r \leq 0 \\ \frac{2r}{1+r} & \text{si } r \geq 0 \end{cases} \quad (4.95)$$

Función de limitación *Minmod*:

$$\psi(r) = \max[0, \min(r, 1)] \quad (4.96)$$

Función de limitación *Superbee*:

$$\psi(r) = \max[0, \min(2r, 1), \min(r, 2)] \quad (4.97)$$

Función de limitación *Van Albada*:

$$\psi(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r \leq 0 \\ \frac{r(1+r)}{1+r^2} & \text{si } r \geq 0 \end{cases} \quad (4.98)$$

y función de limitación *Ultrabee*:

$$\psi(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r \leq 0 \\ \frac{2}{|v|}r & \text{si } 0 \leq r \leq \frac{|v|}{1-|v|} \\ \frac{2}{1-|v|} & \text{si } r \geq \frac{|v|}{1-|v|} \end{cases} \quad (4.99)$$

Las funciones de limitación (Figura 4.4), excepto *Ultrabee*, utilizan el hecho que la condición más restrictiva del punto 4 es  $\psi(r) \leq 2$  y la más restrictiva del punto 5  $\psi(r) \leq 2r$  (por la condición de Courant  $0 \leq |v| \leq 1$ ).

Como se aprecia en la Figura 4.4 todas las funciones de limitación presentadas cumplen con las restricciones de los puntos 1 a 5, excepto la *Ultrabee*, que no cumple  $\psi(1) = 1$  y por lo tanto con ella nunca se reproducirá el esquema de Lax-Wendroff. Con todas las funciones se consiguen esquemas TVD que no producen oscilaciones espurias alrededor de las discontinuidades. Una comparación de los resultados con las distintas funciones se encuentra en (Toro, 1997), donde se concluye que las mejores para capturar bien las discontinuidades son la *Ultrabee* y la *Superbee*, mientras que para zonas suaves de la solución las mejores son la *Superbee* y la de *Van Leer*. Estas dos últimas son también las que producen mejores resultados cuando se tienen tanto discontinuidades como zonas con variaciones suaves, tanto para la ecuación escalar como también para sistemas no lineales, siendo las más recomendables para casos reales.

Con todo lo visto, el esquema WAF TVD para la ecuación escalar homogénea se obtiene de sustituir (4.15) y (4.69) en (4.77), resultando directamente:

$$f_{i+1/2}^* = \frac{1}{2}(f_{i+1} + f_i) - \frac{1}{2}|\lambda|\Delta u_{i+1/2} + \psi_{i+1/2} \frac{1}{2}|\lambda|(1-|\nu|)\Delta u_{i+1/2} \quad (4.100)$$

donde queda claro, comparando con (4.69), que  $\psi$  es un factor que gradúa la cantidad de corrección de segundo orden del esquema. La expresión anterior se puede escribir de forma más compacta:

$$f_{i+1/2}^* = \frac{1}{2}(f_{i+1} + f_i) - \frac{1}{2}|\lambda|(1-\psi_{i+1/2}(1-|\nu|))\Delta u_{i+1/2} \quad (4.101)$$

Para la ecuación escalar hay una única ley de conservación y una onda, pero para las ecuaciones de Saint Venant unidimensionales tenemos dos leyes de conservación y dos familias de ondas. A la hora de imponer la variación total decreciente a las ecuaciones de Saint Venant, la solución del sistema completo se puede caracterizar por saltos individuales a través de cada una de las ondas, por lo que la extensión del esquema WAF, para las ecuaciones de Saint Venant, al esquema WAF TVD se puede realizar aplicando una función de limitación a cada una de las dos ondas que se producen en el problema de Riemann asociado a cada contorno.

Así, aplicando funciones de limitación al esquema WAF con el *Riemann solver* de Roe (4.70) (que recordamos se puede ver como una extensión a sistemas no lineales del esquema de Lax-Wendroff) por analogía a lo que se ha hecho para el esquema de Lax-Wendroff en la ecuación escalar, y incluyendo ya la corrección de entropía de Harten y Hyman, resulta:

$$\mathbf{F}_{i+1/2}^* = \frac{1}{2}(\mathbf{F}_i + \mathbf{F}_{i+1}) - \frac{1}{2} \left( \sum_{j=1}^2 \tilde{\alpha}_j \varphi_j (1 - \psi_j (1 - |\nu_j|)) \tilde{\mathbf{e}}_j + \sum_{j=1}^2 \tilde{\gamma}_j \text{signo}(\tilde{\lambda}_j) (1 - \psi_j (1 - |\nu_j|)) \tilde{\mathbf{e}}_j \right) \quad (4.102)$$

donde ahora  $\psi_j = \psi(r_j)$ .

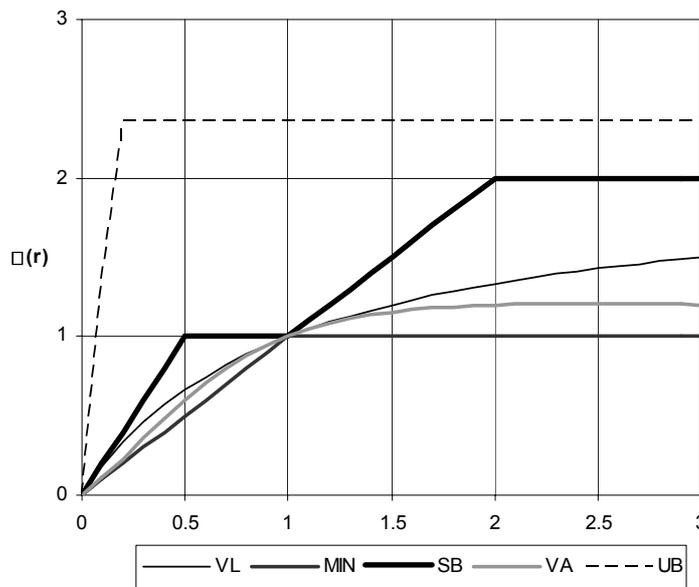


Figura 4.4. Funciones de limitación: VL: Van Leer, MIN: Minmod, SB: Superbee, VA: Van Albada, UB: Ultrabee

El mismo esquema, escrito como un esquema de primer orden más las correcciones de segundo orden, queda:

$$\mathbf{F}_{i+1/2}^* = \frac{1}{2}(\mathbf{F}_i + \mathbf{F}_{i+1}) - \frac{1}{2} \left( \sum_{j=1}^2 \tilde{\alpha}_j \varphi_j \tilde{\mathbf{e}}_j + \sum_{j=1}^2 \tilde{\gamma}_j \text{signo}(\tilde{\lambda}_j) \tilde{\mathbf{e}}_j \right) + \frac{1}{2} \left( \sum_{j=1}^2 \psi_j \tilde{\alpha}_j \varphi_j (1 - |\nu_j|) \tilde{\mathbf{e}}_j + \sum_{j=1}^2 \psi_j \tilde{\gamma}_j \text{signo}(\tilde{\lambda}_j) (1 - |\nu_j|) \tilde{\mathbf{e}}_j \right) \quad (4.103)$$

$r_j$  debe ser un indicador del salto que sufre la solución a través de una onda en el contorno upwind del elemento de volumen respecto del mismo salto en el otro contorno. A la vista de (4.30) una posible expresión para  $r_j$  sería el cociente entre las componentes que permiten escribir el salto en función de los valores propios:

$$(r_j)_{i+1/2} = \frac{(\tilde{\alpha}_j)_{i+1/2-s}}{(\tilde{\alpha}_j)_{i+1/2}} \quad (4.104)$$

Otra posibilidad con la que se obtienen buenos resultados (Alcrudo, 1992) es definir  $r_j$  como el cociente entre contribuciones de la onda  $j$  al término que hace que el esquema numérico (4.102) sea de segundo orden, ya que estas son precisamente las que provocan las oscilaciones espurias:

$$(r_j)_{i+1/2} = \frac{(\tilde{\alpha}_j \varphi_j (1 - |\nu_j|))_{i+1/2-s}}{(\tilde{\alpha}_j \varphi_j (1 - |\nu_j|))_{i+1/2}} \quad (4.105)$$

#### 4.4.1.1 Término independiente en el esquema WAF TVD 1D

Las ecuaciones (4.102) y (4.103) son la expresión del flujo numérico del esquema WAF TVD en una dimensión que, como se ha visto, se puede entender como el esquema de primer orden (4.28) más unas correcciones de segundo orden. Naturalmente, para conseguir un balance correcto entre la discretización del vector de flujo y la del término independiente, estas mismas correcciones deberán extenderse a la discretización de primer orden de este último (4.48) (4.45).

La inclusión de las correcciones de segundo orden en (4.48) se puede hacer de la misma manera que se ha hecho en (4.28) para obtener (4.102). Así, de la observación de estas tres últimas expresiones se deduce la expresión de la parte del término independiente correspondiente a  $\mathbf{H}'$  discretizado de acuerdo con el esquema WAF TVD:

$$\mathbf{H}_{i,i-1/2}^{1*} = \frac{1}{2} \left( \sum_{j=1}^2 \tilde{\beta}_j (1 + \text{signo}(\lambda_j) (1 - \psi_j (1 - |\nu_j|))) \tilde{\mathbf{e}}_j \right)_{i-1/2} \quad (4.106)$$

$$\mathbf{H}_{i,i+1/2}^{1*} = \frac{1}{2} \left( \sum_{j=1}^2 \tilde{\beta}_j (1 - \text{signo}(\lambda_j) (1 - \psi_j (1 - |\nu_j|))) \tilde{\mathbf{e}}_j \right)_{i+1/2}$$

#### 4.4.2. McCormack TVD en una dimensión

Se puede realizar una extensión TVD del esquema de McCormack un tanto empírica, pero con buenos resultados (Alcrudo 1992, Franco 1996, Villanueva 1999). Recordamos que este esquema, al igual que el esquema WAF (4.72) es una extensión del esquema de Lax-Wendroff a sistemas de ecuaciones, y por lo tanto se puede considerar que el flujo numérico del esquema de McCormack es también (4.72). Para que el esquema sea pues TVD solo haría falta multiplicar las correcciones de segundo orden en (4.72). por una función de limitación, tal como se hace en (4.103), pero esto, con el esquema de McCormack tal como se ha presentado en (4.73) no es evidente. Por ello lo que se suele hacer es corregir el esquema de McCormack restándole la contribución de los términos de segundo orden y luego añadiéndole otra vez esta contribución pero limitada por una función de limitación. Escrito en forma de flujo numérico sería:

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_{i+1/2}^{MacCTVD} &= \mathbf{F}_{i+1/2}^{MacC} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 \tilde{\alpha}_j \varphi_j (1 - |v_j|) \tilde{\mathbf{e}}_j + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 \psi_j \tilde{\alpha}_j \varphi_j (1 - |v_j|) \tilde{\mathbf{e}}_j = \\
&= \mathbf{F}_{i+1/2}^{MacC} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 (1 - \psi_j) \tilde{\alpha}_j \varphi_j (1 - |v_j|) \tilde{\mathbf{e}}_j
\end{aligned} \tag{4.107}$$

Así resulta que el esquema de McCormack TVD se puede escribir como el esquema de McCormack cambiando el tercer paso:

$$\begin{aligned}
\mathbf{U}_i^P &= \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{F}_i^n - \mathbf{F}_{i-1}^n) \\
\mathbf{U}_i^C &= \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{F}_{i+1}^P - \mathbf{F}_i^P) \\
\mathbf{U}_i^{n+1} &= \frac{1}{2} (\mathbf{U}_i^P + \mathbf{U}_i^C) + \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left( \left[ \sum_{j=1}^2 (1 - \psi_j) \tilde{\alpha}_j \varphi_j (1 - |v_j|) \tilde{\mathbf{e}}_j \right]_{i+1/2} - \left[ \sum_{j=1}^2 (1 - \psi_j) \tilde{\alpha}_j \varphi_j (1 - |v_j|) \tilde{\mathbf{e}}_j \right]_{i-1/2} \right)
\end{aligned} \tag{4.108}$$

El esquema de McCormack TVD es bastante más complejo que el esquema WAF TVD y requiere muchas más operaciones en cada incremento de tiempo mientras que los resultados con ambos esquemas tienen el mismo grado de precisión. Por otro lado, una de las propiedades del esquema de McCormack, que era que permitía introducir el término independiente con facilidad, ya no es tal cuando se pasa a alta resolución, pues ya se ha visto que el término independiente necesita una discretización de acuerdo con el resto de la ecuación, que hacen el esquema de McCormack TVD todavía más engorroso.

#### 4.4.2.1 Término independiente en el esquema McCormack TVD 1D

Para incorporar el término independiente en el esquema de McCormack con una discretización en volúmenes finitos existen distintas opciones, concretamente:

1. Término independiente centrado en el predictor y corrector.
2. Término independiente ponderado en el predictor y corrector considerando los elementos que contribuyen en cada uno de ellos.
3. Término independiente ponderado en el predictor y corrector con corrección TVD
4. Predictor y corrector sin término independiente, y considerar la contribución de este, de acuerdo con el esquema WAF TVD, en el tercer paso.

La primera opción de término centrado corresponde al tratamiento clásico, utilizado tanto en diferencias finitas (Chaudrhy, 1993) como en volúmenes finitos (Alcrudo y García-Navarro 1992). Se trata de incorporar tanto al predictor como al corrector el término independiente según:

$$\begin{aligned}
\mathbf{U}_i^P &= \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{F}_i^n - \mathbf{F}_{i-1}^n) + \frac{\Delta t}{\Delta x} \mathbf{H}_i^{*n} \\
\mathbf{U}_i^C &= \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{F}_{i+1}^P - \mathbf{F}_i^P) + \frac{\Delta t}{\Delta x} \mathbf{H}_i^{*p}
\end{aligned} \tag{4.109}$$

donde  $\mathbf{H}_i^n$  y  $\mathbf{H}_i^P$  corresponden respectivamente a la integral del término independiente en el elemento  $i$ . En una dimensión:

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}_i^{*P} &= \Delta x \begin{bmatrix} 0 \\ gI_2 + gA(S_0 - S_f) \end{bmatrix}_i \\
\mathbf{H}_i^{*C} &= \Delta x \begin{bmatrix} 0 \\ gI_2 + gA(S_0 - S_f) \end{bmatrix}_i
\end{aligned} \tag{4.110}$$

En el caso de las ecuaciones de Saint Venant esta formulación provoca grandes errores en la solución tanto en la versión clásica del esquema como en su versión TVD. De esta forma, el término independiente no es consistente con el tratamiento del vector de flujo, ni siquiera para el esquema de McCormack clásico (no TVD), ya que en el cálculo de  $(\mathbf{F}_i^n - \mathbf{F}_{i-1}^n)$  en el predictor, o de  $(\mathbf{F}_{i+1}^P - \mathbf{F}_i^P)$  en el corrector, aparece no sólo el elemento  $i$  sino también los contiguos, lo que no ocurre en el término independiente.

La segunda opción intenta solucionar este problema ponderando el término independiente en cada paso según los elementos (anterior o posterior) que intervengan en el cálculo de la parte homogénea de la ecuación. En definitiva, teniendo en cuenta que  $\tilde{S}_0 \Delta x = -\Delta z$  y  $I_2 \Delta x = I_1 - A \Delta h$ , la segunda opción consistiría en calcular

$$\mathbf{H}_i^{*P} = \begin{bmatrix} 0 \\ -g \left( \tilde{A}_{i-1/2}^n (\Delta z)_{i-1/2} + (\Delta I_1)_{i-1/2}^n - \tilde{A}_{i-1/2}^n (\Delta h)_{i-1/2}^n - (\Delta x)_{i-1/2} \tilde{A}_{i-1/2}^n (S_f)_i^n \right) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_i^{*C} = \begin{bmatrix} 0 \\ -g \left( \tilde{A}_{i+1/2}^P (\Delta z)_{i+1/2} + (\Delta I_1)_{i+1/2}^P - \tilde{A}_{i+1/2}^P (\Delta h)_{i+1/2}^P - (\Delta x)_{i+1/2} \tilde{A}_{i+1/2}^P (S_f)_i^P \right) \end{bmatrix} \quad (4.111)$$

donde  $(\Delta \bullet)_{i+1/2} = \bullet_{i+1} - \bullet_i$ ,  $(\Delta \bullet)_{i-1/2} = \bullet_i - \bullet_{i-1}$  y  $\tilde{A}_{i\pm 1/2}^{n,P} = 1/2(A_i^{n,P} + A_{i\pm 1}^{n,P})$ .

De esta manera el término independiente si es consistente con el tratamiento de la parte izquierda de la ecuación. Sería pues un esquema de segundo orden de precisión con un correcto balance, pero con los problemas ya mencionados de oscilaciones espurias de este tipo de esquemas. En el caso de utilizar la versión TVD del esquema (4.108), las correcciones introducidas para el vector de flujo no tienen contrapartida en el término independiente, y por lo tanto el esquema sería incorrecto.

La tercera opción considera en el término independiente las mismas correcciones TVD que en la parte homogénea de la ecuación. El esquema de McCormack (4.109)(4.111) y (4.73) se puede considerar equivalente al esquema WAF, de segundo orden de precisión, mientras lo que se desea es que sea equivalente al esquema WAF TVD. Para ello habrá que introducir la misma corrección a los términos de segundo orden en el término independiente que en la parte homogénea de la ecuación, o sea restar los términos de segundo orden y añadir la parte correspondiente según la función de limitación. Se escribe el término independiente del esquema WAF TVD (4.106) como unos términos de primer orden más una extensión a segundo orden:

$$\mathbf{H}_{i,i-1/2}^{**} = \frac{1}{2} \left( \sum_{j=1}^2 \tilde{\beta}_j (1 + \text{signo}(\lambda_j)) \tilde{\mathbf{e}}_j \right)_{i-1/2} - \frac{1}{2} \left( \sum_{j=1}^2 \psi_j \tilde{\beta}_j \text{signo}(\lambda_j) (1 - |v_j|) \tilde{\mathbf{e}}_j \right)_{i-1/2}$$

$$\mathbf{H}_{i,i+1/2}^{**} = \frac{1}{2} \left( \sum_{j=1}^2 \tilde{\beta}_j (1 - \text{signo}(\lambda_j)) \tilde{\mathbf{e}}_j \right)_{i+1/2} + \frac{1}{2} \left( \sum_{j=1}^2 \psi_j \tilde{\beta}_j \text{signo}(\lambda_j) (1 - |v_j|) \tilde{\mathbf{e}}_j \right)_{i+1/2} \quad (4.112)$$

Comparando con (4.48) se puede ver que el segundo sumando corresponde a la extensión a segundo orden limitada por el factor  $\psi_j$ . Si como se hizo anteriormente se consideran el esquema de McCormack y el esquema WAF equivalentes, la corrección al primero para que sea TVD consistirá en restar en el tercer paso toda la contribución de segundo orden del término independiente (implícitamente introducida en (4.109)) y volverla a añadir pero limitada, es decir:

$$\mathbf{U}_i^P = \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{F}_i^n - \mathbf{F}_{i-1}^n) + \frac{\Delta t}{\Delta x} \mathbf{H}_i^{*n}$$

$$\mathbf{U}_i^C = \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{F}_{i+1}^P - \mathbf{F}_i^P) + \frac{\Delta t}{\Delta x} \mathbf{H}_i^{*P} \quad (4.113)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{U}_i^{n+1} = & \frac{1}{2}(\mathbf{U}_i^P + \mathbf{U}_i^C) \\
& + \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left( \left[ \sum_{j=1}^2 (1-\psi_j) \tilde{\alpha}_j \varphi_j (1-|v_j|) \tilde{\mathbf{e}}_j \right]_{i+1/2} - \left[ \sum_{j=1}^2 (1-\psi_j) \tilde{\alpha}_j \varphi_j (1-|v_j|) \tilde{\mathbf{e}}_j \right]_{i-1/2} \right) \\
& - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left( \left[ \sum_{j=1}^2 (\psi_j - 1) \tilde{\beta}_j \text{signo}(\lambda_j) (1-|v_j|) \tilde{\mathbf{e}}_j \right]_{i-1/2} + \left[ \sum_{j=1}^2 (\psi_j - 1) \tilde{\beta}_j \text{signo}(\lambda_j) (1-|v_j|) \tilde{\mathbf{e}}_j \right]_{i+1/2} \right)
\end{aligned} \quad (4.114)$$

A la vista de lo expuesto, es mucho más sencillo (4ª opción) no considerar el término independiente en el predictor ni en el corrector, asumir igualmente que el esquema de McCormack TVD i el esquema WAF TVD són equivalentes, y añadir el término independiente del esquema WAF TVD (4.106) de una vez al final, o sea:

$$\begin{aligned}
\mathbf{U}_i^P &= \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{F}_i^n - \mathbf{F}_{i-1}^n) \\
\mathbf{U}_i^C &= \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{F}_{i+1}^P - \mathbf{F}_i^P) \\
\mathbf{U}_i^{n+1} &= \frac{1}{2}(\mathbf{U}_i^P + \mathbf{U}_i^C) + \\
& + \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left( \left[ \sum_{j=1}^2 (1-\psi_j) \tilde{\alpha}_j \varphi_j (1-|v_j|) \tilde{\mathbf{e}}_j \right]_{i+1/2} - \left[ \sum_{j=1}^2 (1-\psi_j) \tilde{\alpha}_j \varphi_j (1-|v_j|) \tilde{\mathbf{e}}_j \right]_{i-1/2} \right) + \frac{\Delta t}{\Delta x} \mathbf{H}^*
\end{aligned} \quad (4.115)$$

$$\mathbf{H}_i^* = \mathbf{H}_i^{*1} + \mathbf{H}_i^{*2} \quad (4.116)$$

$$\mathbf{H}_i^{*2} = \Delta x \begin{pmatrix} 0 \\ -gA_i^n (S_f)_i^n \end{pmatrix} \quad (4.117)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}_i^{*1} &= \left[ \sum_{j=1}^2 \tilde{\beta}_j (1 + \text{signo}(\lambda_j) (1 - \psi_j (1 - |c_j|))) \tilde{\mathbf{e}}_j \right]_{i-1/2} \\
& + \frac{1}{2} \left[ \sum_{j=1}^2 \tilde{\beta}_j (1 - \text{signo}(\lambda_j) (1 - \psi_j (1 - |c_j|))) \tilde{\mathbf{e}}_j \right]_{i+1/2}
\end{aligned} \quad (4.118)$$

### 4.4.3. MUSCL TVD en una dimensión

Para construir un esquema con variación total decreciente a partir del esquema MUSCL (apartado 4.3.3) existen distintas opciones, todas ellas con la finalidad de limitar la reconstrucción de variables en el primer paso del esquema, que es en definitiva la responsable de conseguir segundo orden de precisión en el esquema MUSCL.

Se puede trabajar, para limitar directamente la pendiente de la solución reconstruida, sustituyendo la expresión (4.74) por otras que aseguren que la pendiente resultante consigue un esquema TVD. Otra opción es, una vez calculada la pendiente con (4.74), aplicar un limitador a la misma en función de las variaciones que tiene la solución en contornos contiguos, o incluso hacerlo para cada una de las ondas que se producen en el problema de Riemann asociado a un contorno. En cualquier caso, la limitación a aplicar dependerá de la variante del método escogida, los detalles de las cuales se pueden encontrar, para el caso unidimensional, en (Toro, 1997).

#### 4.4.3.1 Término independiente en el esquema MUSCL TVD 1D

La estructura particular del esquema MUSCL (reconstrucción de datos, evolución, y solución del problema de Riemann) no hace posible un razonamiento como el realizado en el apartado anterior para el esquema WAF

TVD con la finalidad de hacer un tratamiento del término independiente análogo al del vector de flujo. Lo visto en el apartado anterior serviría para el último paso del esquema (solución del problema de Riemann) pero no para los otros dos. En esta tesis, ni en otros trabajos que se conozcan, no se ha conseguido realizar un tratamiento del término independiente que consiga un correcto balance a partir del esquema MUSCL TVD, por lo que las aplicaciones de este esquema han quedado restringidas a geometrías con fondo horizontal.

### 4.5. Condiciones de contorno en una dimensión

En la resolución de las ecuaciones de Saint Venant unidimensionales, con cualquiera de los esquemas en volúmenes finitos, para encontrar la solución en un elemento en un instante de tiempo es necesario conocer el valor de la solución en el mismo elemento y en los contiguos en un instante anterior, con el fin de evaluar el flujo numérico a través de cada contorno del elemento. Naturalmente, en los elementos situados en los extremos aguas abajo y aguas arriba del tramo de estudio, no se conoce a priori el valor de la solución al otro lado del contorno, por lo que habrá que imponerlos como condición.

En la resolución de un sistema hiperbólico, como son las ecuaciones de Saint Venant en forma conservativa, el número de condiciones de contorno que se pueden imponer es igual al número de características entrantes en el contorno, tal como se desprende de la teoría de características presentada en el apartado 2.4.2, mientras para aplicar cualquiera de los esquemas vistos es necesario conocer el valor que toman todas las variables dependientes ( $A$  y  $Q$ ) en cada contorno. Así, el número de variables que se deben imponer depende del régimen hidráulico (lento o rápido) y de si el contorno se trata de una entrada o una salida. El resto de variables hay que calcularlas, y para ello se utiliza precisamente la teoría de las características. Las ecuaciones necesarias se pueden obtener particularizando la ecuación (2.110) sobre las características salientes.

Si se denota por  $P$  el punto en el contorno sobre el cual se requiere conocer el valor de las variables dependientes en el instante  $n+1$ , las distintas disposiciones posibles de líneas características se muestran en la Figura 4.5 y el número de condiciones a imponer en la Tabla 4.1. En la figura, el punto  $A$  es el punto del instante  $n$  sobre la característica  $C^+$  que pasa por  $P$ , mientras que  $C$  es el punto en el instante  $n$  sobre la característica  $C^-$  que pasa por  $P$ .

Caso	Número de características salientes	Número de condiciones a imponer
1. Entrada en régimen rápido	0	2
2. Entrada en régimen lento	1	1
3. Salida en régimen lento	1	1
4. Salida en régimen rápido	2	0

Tabla 4.1. Condiciones de contorno en 1D

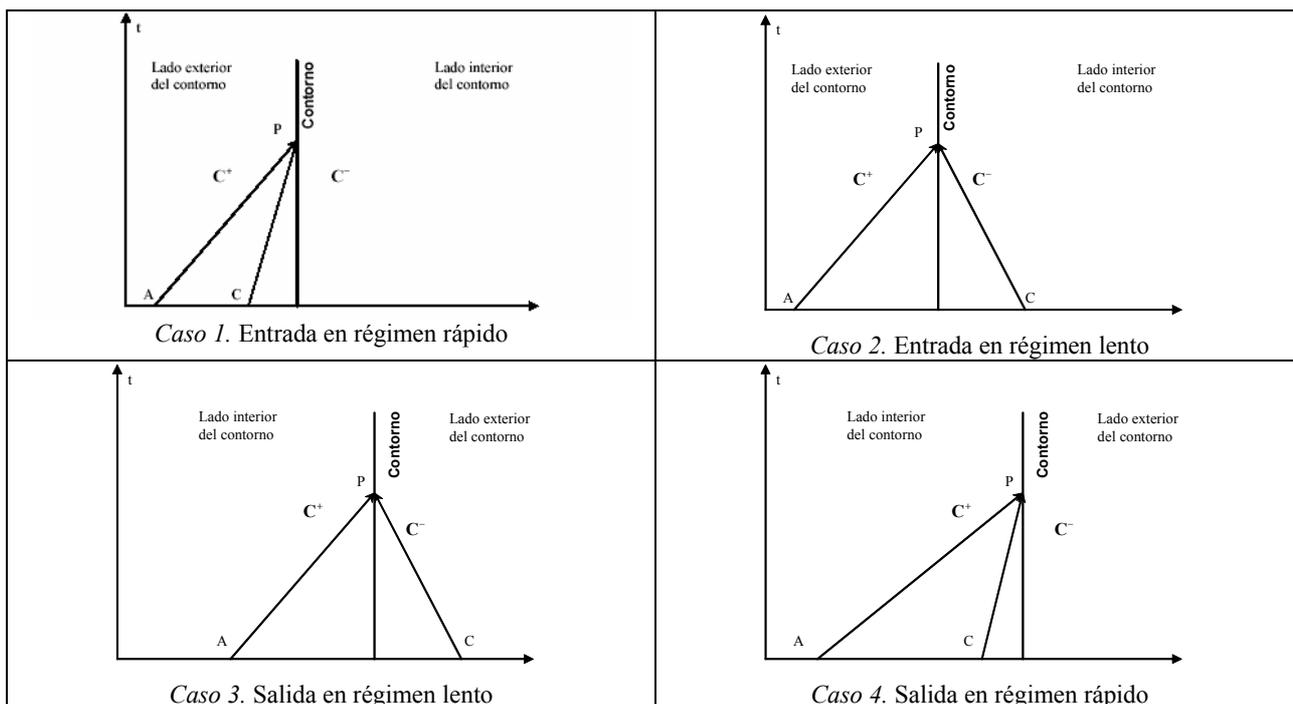


Figura 4.5. Características entrantes y salientes para distintos tipos de régimen

A continuación se detallan las ecuaciones que se deben utilizar en cada caso:

### Caso 1. Entrada en régimen rápido

En ese caso se deben imponer dos condiciones en el contorno. En la tesis se contemplan las siguientes posibilidades:

- Caso 1a: Se impone caudal ( $Q$ ) y calado ( $y$ ).  $U_p^{n+1}$  se obtiene directamente mediante la expresión:

$$U_p^{n+1} = \begin{pmatrix} A \\ Q \end{pmatrix} \quad (4.119)$$

teniendo en cuenta que hay una relación biunívoca entre el calado  $y$  y el área  $A$  dada por la geometría de la sección.

- Caso 1b. Se impone velocidad ( $v$ ) y calado ( $y$ ):  $U_p^{n+1}$  se obtiene igualmente con (4.119) teniendo en cuenta que  $Q = v \cdot A$

En ambos casos no se requiere de más ecuaciones.

### Caso 2. Entrada en régimen lento

En ese caso se debe imponer una condición. Se contemplan las siguientes posibilidades:

- Caso 2a: Se impone el caudal  $Q$ .
- Caso 2b. Se impone la velocidad  $v$
- Caso 2c. Se impone el calado  $y$ .

La condición que falta se obtiene particularizando la ecuación (2.105) sobre la línea  $C^+$ :

$$(u + \omega)_p^{n+1} = (u + \omega)_A^n + g \left( \frac{I_2}{A} + S_0 - S_f \right)_A^n \quad (4.120)$$

Con ésta y la ecuación que relaciona  $\omega$  con el calado (2.107) se puede obtener  $U_p^{n+1}$ .

### Caso 3. Salida en régimen lento

En ese caso también se debe imponer una condición:

- Caso 3a: Se impone el caudal  $Q$ .
- Caso 3b. Se impone la velocidad  $v$
- Caso 3c. Se impone el calado  $y$ .
- Caso 3d. Se impone una relación entre caudal y calado (por ejemplo tipo vertedero).

Ahora, la ecuación (2.105) sobre la línea  $C^-$  conduce a:

$$(u - \omega)_p^{n+1} = (u - \omega)_C^n + g \left( \frac{I_2}{A} + S_0 - S_f \right)_C^n \quad (4.121)$$

En cualquiera de los cuatro casos, con esta ecuación ya se dispone del mismo número de ecuaciones que incógnitas, y por lo tanto se puede encontrar  $U_p^{n+1}$ .

### Caso 4. Salida en régimen rápido

En ese caso no se puede imponer el valor de ninguna variable en el contorno, por lo que  $U_p^{n+1}$  se obtiene de resolver simultáneamente las ecuaciones (4.120) y (4.121).

En cualquiera de las situaciones anteriores, la posición espacial de los puntos  $A$  y  $C$  se puede encontrar conociendo las ecuaciones de las líneas características (2.95), y el valor de la solución en dichos puntos

interpolando con los valores en los elementos próximos o bien suponer que el valor en A y C coincide con el valor en el elemento junto al contorno.

Como se ha dicho, para poder aplicar el método de los volúmenes finitos es necesario conocer el valor a cada lado de un contorno. Para ello se consideran dos *elementos de contorno*, y se imponen en ellos unos valores de  $A$  y  $Q$  tales que los valores que el esquema numérico considere en cada contorno a la hora de evaluar el flujo numérico coincidan con los calculados con las ecuaciones características. Es decir, se busca  $A$  y  $Q$  en el elemento de contorno para que:

$$A_p^{n+1} = \tilde{A}^{n+1} \quad Q_p^{n+1} = \tilde{Q}^{n+1} \quad (4.122)$$

donde  $\tilde{A}$  responde a (4.127) y  $\tilde{Q} = \tilde{A} \cdot \tilde{u}$  con  $\tilde{u}$  calculado según (4.33). Aislado de estas expresiones, si se denota con el subíndice 0 al elemento de contorno aguas arriba, se obtiene (prescindiendo del superíndice temporal  $n+1$ ):

$$A_0 = \frac{A_1 A_p}{2A_1 - A_p} \quad Q_0 = \frac{Q_p}{A_p} \sqrt{A_0} (\sqrt{A_0} + \sqrt{A_1}) - Q_1 \frac{\sqrt{A_0}}{\sqrt{A_1}} \quad (4.123)$$

mientras que para el contorno aguas abajo (subíndice  $N+1$  siendo  $N$  el número de secciones del tramo):

$$A_{N+1} = \frac{A_N A_p}{2A_N - A_p} \quad Q_{N+1} = \frac{Q_p}{A_p} \sqrt{A_{N+1}} (\sqrt{A_{N+1}} + \sqrt{A_N}) - Q_1 \frac{\sqrt{A_{N+1}}}{\sqrt{A_N}} \quad (4.124)$$

## 4.6. Preservación del régimen permanente

El caso de régimen permanente es un caso particular del régimen variable, y por tanto cualquier esquema numérico para la resolución del régimen variable, con unas condiciones de contorno constantes, debería ser capaz de reproducir correctamente el régimen permanente. Esto, sin embargo, no es evidente con el tipo de esquemas explícitos en volúmenes finitos utilizados en esta tesis, hasta el punto que en la bibliografía no se ha encontrado ningún trabajo en que se consiga este objetivo para geometrías totalmente irregulares.

En este sentido destaca el trabajo de Hubbard y García-Navarro (2000) en que se plantea un correcto balance para la situación de agua parada en canal rectangular de geometría variable. En Burguette y García-Navarro (2004) se presentan variaciones de los esquemas de Lax-Friedrichs, y Roe que convergen a una solución estacionaria para cauces irregulares, aunque no se asegura que la convergencia sea a la solución correcta.

En este apartado, se plantea la necesidad que el esquema numérico sea capaz de resolver cualquier flujo estacionario, y además que la solución converja a la solución correcta, es decir, se conserve la energía entre secciones, siempre y cuando no haya un resalto hidráulico. De esta manera, se consiguen esquemas de primer orden y de alta resolución que, en régimen permanente, convergen a la misma solución que se obtiene mediante un cálculo en régimen permanente gradualmente variado a partir de la ecuación de conservación de la energía.

En cualquier flujo estacionario, se cumple  $U_i^{n+1} = U_i^n$ , por lo que a la vista de (4.42), el término independiente debe compensar exactamente la diferencia de flujo, o sea, debe cumplirse (utilizando (4.45), (4.48) y (4.61)):

$$\tilde{\alpha}_j \tilde{\lambda}_j + \tilde{\gamma}_j = \tilde{\beta}_j \quad (4.125)$$

Un primer caso de flujo estacionario es el de agua parada, para el cual se tiene  $Q = 0$ ,  $\tilde{u} = 0$ ,  $\Delta h = -\Delta z$  y  $S_f = 0$ . Sustituyendo estas igualdades en las expresiones de  $\tilde{\alpha}$  y  $\tilde{\beta}$  se puede comprobar que se cumple directamente (4.125), por lo que el esquema planteado permite la correcta simulación de agua en reposo.

Otro caso de flujo estacionario es el correspondiente a régimen permanente, para el cual debe cumplirse también el mismo balance entre el término independiente y la diferencia de flujo (4.125) a la vez que la ecuación de conservación de la energía entre dos secciones del río, que con la notación utilizada hasta ahora y despreciando la fricción con el contorno ( $S_f = 0$ ) se puede escribir, entre dos secciones  $i$  e  $i+1$  como

$$(\Delta z + \Delta h)_{i+1/2} = \frac{1}{g} \left( \frac{Q^2}{2A_i^2} - \frac{Q^2}{2A_{i+1}^2} \right) \quad (4.126)$$

La expresión anterior indica que la diferencia en la cota de la lámina de agua entre las dos secciones es la diferencia entre energía de velocidad, siendo  $Q$  el caudal en cualquier punto del río. Utilizando esta ecuación junto con que  $\Delta Q = 0$  en las expresiones de  $\tilde{\alpha}$  y  $\tilde{\beta}$ , resulta que para que se cumpla (4.125), debe utilizarse la media armónica:

$$\tilde{A} = \frac{2A_i A_{i+1}}{A_i + A_{i+1}} \quad (4.127)$$

En la bibliografía se encuentran trabajos donde  $\tilde{A}$  se calcula con expresiones distintas a (4.127). Está claro que en ellos no se está reproduciendo correctamente el régimen permanente.

Con (4.127) se consigue que el esquema converja a la solución en régimen permanente correcta, siempre y cuando la hipótesis de conservación de energía (4.126) sea correcta. Ello es así, en régimen lento, en régimen rápido y en el paso de rápido a lento, pero no en el paso de lento a rápido donde la existencia de un resalto hidráulico añade unas pérdidas de energía adicionales. En este último caso, se producen oscilaciones de caudal alrededor del resalto hidráulico como se describe en Brugette y García-Navarro (2004) y Tseng (2004). Estas oscilaciones no dependen sin embargo de la irregularidad de la geometría ni del tratamiento del término independiente, sino que son inherentes al esquema de Godunov con el *Riemann solver* de Roe que se utiliza.

Para entender las mencionadas oscilaciones de caudal y su procedencia, es interesante ver, de forma discreta, que condiciones se están imponiendo a la hora de aplicar el esquema numérico para un volumen finito determinado. Para ello se puede considerar un volumen finito  $i$  con contornos  $i-1/2$  e  $i+1/2$  y aplicar (4.49) con (4.37) (4.48) sin considerar fricción con el fondo ( $\mathbf{H}_i^2 = 0$ ) para el caso  $Q_{i-1} = Q_i = Q_{i+1}$  (en régimen permanente el caudal debe ser constante). Este desarrollo se presenta en el Anejo 1 para el esquema de primer orden visto en 4.2. con cuatro hipótesis distintas posibles:

1. Flujo subcrítico en el elemento de volumen
2. Flujo supercrítico en el elemento de volumen
3. Flujo transcrito (lento a rápido) en el elemento de volumen
4. Flujo transcrito (rápido a lento) en el elemento de volumen

En los cuatro casos el desarrollo conduce a que el esquema convergerá a una solución que cumpla:

$$\tilde{u}_{i+1/2}(\Delta A)_{i+1/2} = g\tilde{A}_{i+1/2}(\Delta z + \Delta h)_{i+1/2} \quad (4.128)$$

Sustituyendo (4.33) con  $Q_i = Q_{i+1} = Q$  y (4.127) en esta última expresión, se obtiene precisamente (4.126). Es decir, en los cuatro casos se está imponiendo conservación de la energía entre volúmenes finitos contiguos. Esto es correcto en los tres primeros casos, pero obviamente no en el cuarto, donde se está cometiendo una incongruencia al pretender por un lado que el esquema numérico encuentre una solución que no conserva la energía, y por otro se está imponiendo dicha conservación. En este caso el esquema converge a una solución estacionaria con caudal no constante como se puede ver en el Capítulo 7 de verificación.

Conviene destacar que estas oscilaciones de caudal que se producen en el paso de rápido a lento se concentran únicamente en un elemento de volumen, el elemento transcrito, y no tienen repercusión global en el resto del dominio, como se aprecia en los ejemplos de verificación mencionados. Es más, si se comprueba el flujo de masa (que no es más que el caudal) a través de los contornos de los elementos, este si que se estabiliza a un único valor en todo el dominio en la solución estacionaria.