

2 ESTADO ACTUAL EN EL DISEÑO DEL MECANISMO LEVA-PALPADOR

En la bibliografía básica consultada sobre el tema de estudio, sólo Erdman y Sandor [1993] y Cardona y Clos [2001], exponen de manera clara cual es el proceso de diseño de un mecanismo leva-palpador, siendo los últimos citados quienes mejor lo especifican, señalando tres etapas: la definición de la ley de movimiento del palpador, la obtención del perfil de la leva y por último la comprobación del mismo.

En el presente capítulo se realiza un análisis del estado actual en el diseño del mecanismo leva-palpador, haciendo énfasis en la obtención del perfil de leva. Se exponen los métodos gráficos y analíticos de generación del perfil, los primeros se incluyen puesto que proporcionan una clara comprensión y visualización geométrica del proceso de generación del perfil; los segundos se exponen porque son los que se utilizan en la actualidad, debido a las ventajas que representan y al desarrollo de los medios de cálculo modernos.

2.1 Definición de leyes de desplazamiento del palpador con técnicas CAGD

La mayor parte de la bibliografía básica consultada [Rohtbart, 1956; Kozhevnikov, 1981; Chen, 1982; Mabie y Reinholtz, 1987; Shigley y Uicker, 1988; Koloc y Vlácavík, 1993; Wilson y Sadler, 1993; Norton, 1995; Erdman y Sandor, 1998; Calero y Carta, 1999], trata la definición de la ley de desplazamiento del palpador con los denominados métodos tradicionales [Reyes, 2000], o sea, utilizando polinomios algebraicos con base canónica y polinomios trigonométricos con base de Fourier.

En el presente apartado se designa a la ley de desplazamiento del palpador como $s(\theta)$, para explicar los métodos que aquí se utilizan para la definición de dicha ley.

Los polinomios algebraicos expresados en base canónica o monomial han tenido amplia utilización en la definición de la ley de desplazamiento $s(\theta)$, debido a que son fáciles de manipular. Esta base para grado n consiste en los monomios: $\{1, \theta, \theta^2, \dots, \theta^n\}$. La expresión de la ley de desplazamiento en esta base es:

$$s(\theta) = \sum_{i=1}^n a_i \theta^i = a_0 + a_1 \theta + a_2 \theta^2 + \dots + a_n \theta^n \quad (2.1)$$

La expresión de un polinomio trigonométrico en la base de Fourier es:

$$s(\theta) = c_0 + \sum_{i=1}^m [s_i \cdot \sin(i \cdot \theta) + c_i \cdot \cos(i \cdot \theta)] \quad (2.2)$$

donde a_i , c_i y s_i son los coeficientes de los polinomios anteriores.

Reyes [2000] realiza un estudio profundo sobre el tema de definición de la ley de desplazamiento del palpador. En su trabajo expone un análisis crítico del estado de este tema. Dentro de las conclusiones a las que llega este autor, se señala que es poco adecuado definir la ley de desplazamiento del palpador $s(\theta)$ con los polinomios en base canónica o en base de Fourier, puesto que presentan las siguientes desventajas:

- Los coeficientes a_i de la Ec. 2.1 y c_i y s_i de la Ec. 2.2, no tienen significado geométrico. Por lo tanto, la modificación de un determinado coeficiente no produce un efecto intuitivo sobre la forma de la función $s(\theta)$. Así, resulta difícil gobernar la forma de la curva modificando los coeficientes con el fin de obtener una curva con unas características determinadas.
- Los coeficientes de los polinomios se obtienen al solucionar un sistema de ecuaciones que se origina de las restricciones que debe cumplir $s(\theta)$. Por tanto, sería engorroso automatizar la aproximación de $s(\theta)$ porque cada caso requiere un tratamiento particular.
- La base canónica de polinomios algebraicos no garantiza estabilidad numérica, especialmente si el grado n del polinomio es elevado.
- La imposición de las condiciones de continuidad en la unión entre los tramos D , S y B , de $s(\theta)$ resulta laborioso.

2.1.1 Curva de Bézier no paramétrica

La definición de la ley de desplazamiento del palpador por medio de la *base de polinomios de Bernstein* presenta ventajas en lugar de la base de monomios.

Los polinomios de Bernstein de grado n , $B_i^n(u)$, sobre un dominio unitario son:

$$B_i^n(u) = \binom{n}{i} u^i (1-u)^{n-i} = C_n^i u^i (1-u)^{n-i} \quad i = 0, \dots, n \quad (2.3)$$

donde:

$$\binom{n}{i} = C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!}$$

$$B_i^n(u) = 0 \quad i \notin \{0, \dots, n\}$$

Estos polinomios presentan las siguientes propiedades:

- Satisfacen la formula recursiva:

$$i \in \{0, \dots, n\}: B_i^n(u) = (1-u)B_i^{n-1}(u) + uB_{i-1}^{n-1}(u), \quad B_0^0 = 1$$

- Son una partición de la unidad: $\sum_{i=0}^n B_i^n(u) = 1$
- Positividad: $B_i^n(u) \geq 0, \quad u \in [0, 1]$
- Simetría: $B_i^n(u) = B_{n-i}^n(1-u)$
- Presentan un máximo para la abscisa $u = i/n$.
- Constituyen una base numéricamente estable.

En esta base una función polinómica $b(u)$ de grado n se expresa de la siguiente manera:

$$b(u) = \sum_{i=0}^n b_i B_i^n(u) \quad u \in [0, 1] \quad (2.4)$$

Donde los $n+1$ coeficientes b_i se denominan *ordenadas de Bézier*. El gráfico de la función $b(u)$ se llama *curva de Bézier no paramétrica*. Cada ordenada b_i define un punto \mathbf{b}_i de coordenadas $\mathbf{b}_i = (i/n, b_i)$, denominado *punto de control* y dada su definición se encuentran equiespaciados en el eje de las abscisas.

En la Ec. 2.4 el polinomio $B_i^n(u)$ se puede interpretar como la influencia de b_i en la curva $b(u)$. Esta influencia es máxima para $u = i/n$, donde $B_i^n(u)$ presenta su máximo, coincidiendo con la abscisa del punto \mathbf{b}_i . Esto hace que la representación gráfica de la curva tienda a ser próxima a la del polígono de control (Figura 2.1). Por lo tanto, al desplazar verticalmente un punto \mathbf{b}_i , modificando el valor de su ordenada, la curva tiende a seguirlo deformándose en sus proximidades.

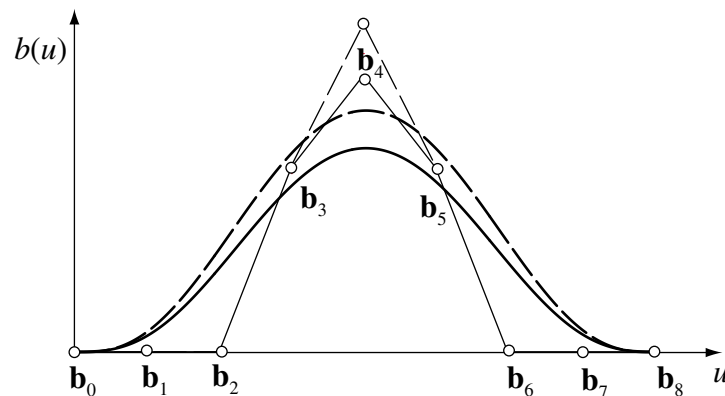


Fig. 2.1 Curva de Bézier

Esta cualidad de las curvas de Bézier y las siguientes le dan un significado geométrico a las ordenadas de Bézier que facilita el diseño y la modificación interactiva de una curva de este tipo:

- La curva pasa por los puntos extremos $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_n$ y es tangente al polígono de control en estos puntos.

- La curva se encuentra encerrada dentro del dominio convexo de los puntos de control. El polígono de control permite establecer una caja contenedora dentro de la cual se puede asegurar que se encuentra la curva.

Estas cualidades le permiten al diseñador adaptar las especificaciones de la ley de desplazamiento a sus necesidades.

Para definir una función $b(\theta)$ con la variable independiente θ definida en el dominio no unitario $\theta \in [\theta_i, \theta_f]$ con la utilización de las curvas de Bézier $b(u)$ definidas en un dominio unitario $u \in [0, 1]$, es necesario realizar en la Ec. 2.4 el cambio lineal de variable siguiente:

$$\theta \in [\theta_i, \theta_f] \rightarrow u \in [0, 1] \quad u(\theta) = \frac{\theta - \theta_i}{\theta_f - \theta_i} \quad (2.5)$$

Usualmente es necesario la derivada de $b(\theta)$ respecto a θ , en cuyo caso ésta se calcula como:

$$\frac{db(u(\theta))}{d\theta} = \frac{db(u)}{du} \cdot \frac{du(\theta)}{d\theta} = \frac{db(u)}{du} \cdot \frac{1}{\theta_f - \theta_i} \quad (2.6)$$

La derivada $b'(u)$ de un polinomio $b(u)$ de grado n es un polinomio de grado $n' = n - 1$. En la base de Bernstein se puede comprobar que los coeficientes b_i' de la derivada se obtienen como:

$$b_i' = n(b_{i+1} - b_i) \quad i = 0, \dots, n-1 \quad (2.7)$$

Esto indica que las derivadas r -ésimas en los extremos $u = 0$, $u = 1$ sólo dependen de los $r + 1$ puntos de control más próximos, es decir, en $u = 0$ sólo depende de los coeficientes $b_0 \dots b_r$ y en $u = 1$ de los coeficientes $b_{n-r} \dots b_n$. Por lo tanto, la imposición de condiciones de continuidad r -ésima en la unión entre dos curvas resulta más sencilla en la base de Bernstein que en la base canónica o monomial, ya que sólo se ven involucrados $r + 1$ coeficientes de cada curva.

En el caso particular de la unión de una curva de Bézier con una recta, para conseguir continuidad C^r respecto al parámetro es suficiente que los $r + 1$ puntos de control más próximos a la unión se encuentren sobre la prolongación de la recta (Figura 2.2).

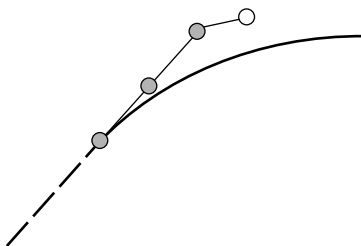


Fig.2.2 Empalme con continuidad C^2 entre una recta y una curva de Bézier.

De aquí que, las curvas de Bézier no paramétricas constituyen una buena herramienta para generar las curvas de desplazamiento, velocidad, aceleración o sobreaceleración, no obstante presentan ciertas limitaciones [Reyes, 2000]:

- En la unión de dos curvas no se garantiza continuidad C^r de manera automática.
- El grado de la curva depende del número de puntos de control. Si la curva tiene una forma compleja su grado ha de ser elevado y el desplazamiento de los puntos de control centrales produce pocos cambios en la forma de la curva.
- Falta de control local, es decir, el desplazamiento de un punto de control afecta a toda la curva.
- Las abscisas de los puntos de control son fijas.

No obstante, en la presente investigación se hace uso de las facilidades que ofrecen las curvas de Bézier para el diseño de la ley de desplazamiento del palpador. En la Figura 2.3 se muestra una ley de desplazamiento de tipo *D-S-D-B-D* formada por cuatro curvas de Bézier, dos de las cuales –tramos I y III– son rectas.

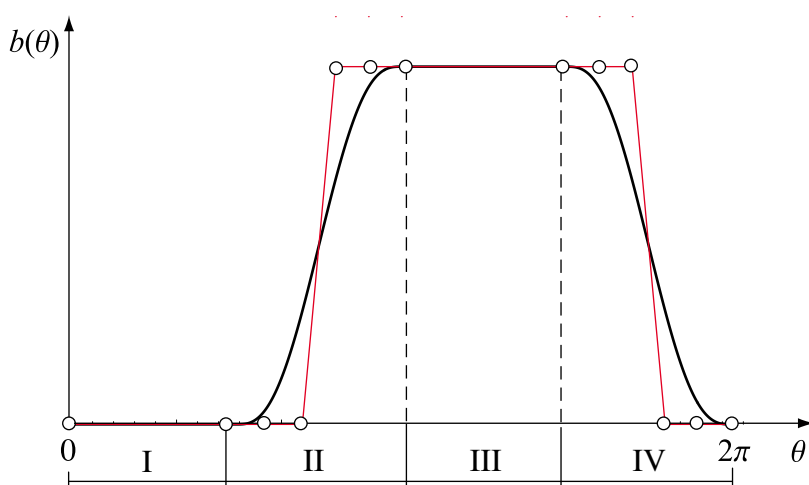


Fig. 2.3 Ley de desplazamiento tipo *D-S-D-B-D* diseñada con curvas de Bézier

2.1.2 Curva B-spline no paramétrica

Las limitaciones expuestas de las curvas de Bézier se solucionan utilizando las curvas B-splines.

En general se denomina *curva spline* a la compuesta por varios tramos –no necesariamente polinómicos–, donde cada tramo puede poseer una expresión matemática distinta. Así, una curva spline polinómica de grado n es la unión de tramos polinómicos de grado n . Una *curva B-spline*, es la unión de curvas de Bézier de grado n definidas sobre intervalos $[u_i, u_{i+1}]$ consecutivos (Figura 2.4).

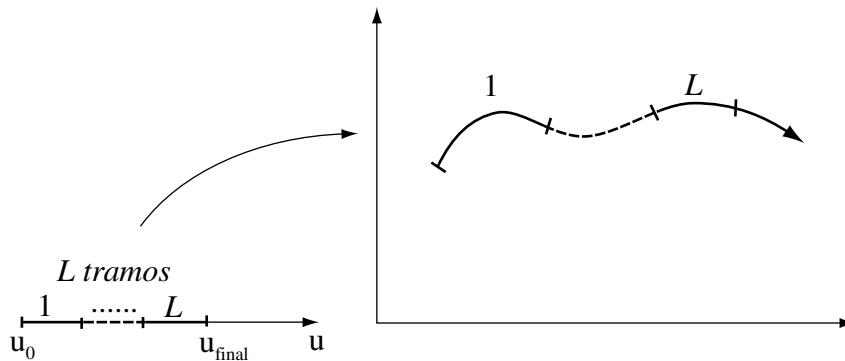


Fig. 2.4 Curva B-spline

Los números reales u_i que delimitan los intervalos o tramos $[u_i, u_{i+1}]$ se llaman *nodos*. Los nodos forman una secuencia denominada *vector* o *secuencia de nodos*. Si un nodo está repetido r veces en esta secuencia entonces se dice que es de multiplicidad r y si no está repetido es un nodo simple. En los extremos de la curva se utilizan nodos con multiplicidad $r = n$, para que la curva pase por los puntos de control inicial y final.

La curva B-spline puede definirse de manera no paramétrica para modelar funciones polinómicas definidas a trozos $y = y(x = u)$ (Figura 2.5).

Una *curva B-spline no paramétrica* de L tramos –algunos de los cuales pueden ser de longitud nula si hay nodos repetidos– está asociada a un polígono de control que tiene $L + n$ puntos de control $\mathbf{d}_i = (\xi_i, d_i)$, las coordenadas de los puntos de control tienen ordenadas d_i de libre elección y *abscisas de Greville* ξ_i determinadas por la secuencia de nodos:

$$\xi_i = \frac{1}{n}(u_i + \dots + u_{i+n-1}); \quad i = 0, \dots, L + n - 1 \quad (2.8)$$

Los puntos de control \mathbf{d}_i del polígono que controla la forma de la curva B-spline determinan la posición de los puntos de control \mathbf{b}_i de las curvas de Bézier componentes, garantizando en las uniones la continuidad deseada por el usuario.

En los nodos de multiplicidad r la curva presenta al menos continuidad C^{n-r} . De la Ec. 2.8 se deduce que si un nodo tiene multiplicidad $r = n$, entonces $\xi_i = u_i = u_{i+1} = u_{i+n-1}$, así la abscisa del punto de control coincide con el valor del nodo. En ese caso la curva pasa por dicho punto de control (Figura 2.5).

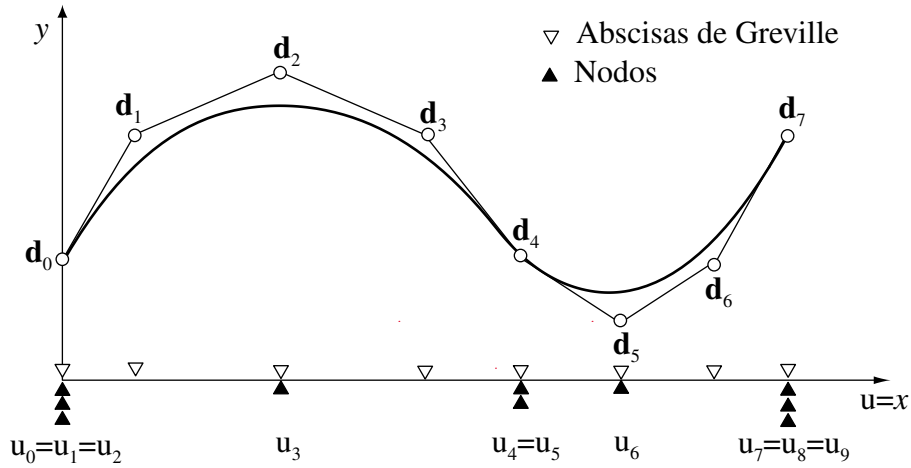


Fig. 2.5 Curva B-spline no paramétrica de grado $n = 3$

La expresión de una curva B-spline no paramétrica $y(u)$ es:

$$y(u) = \sum_{i=0}^{L+n-1} d_i N_i^n(u), \quad x(u) = u, \quad (2.9)$$

donde d_i son las ordenadas de los puntos de control –de libre elección– y $N_i^n(u)$ son las funciones base, definidas de forma recursiva como:

$$N_i^n(u) = \frac{u - u_{i-1}}{u_{i+n-1} - u_{i-1}} N_i^{n-1}(u) + \frac{u_{i+n} - u}{u_{i+n} - u_i} N_{i+1}^{n-1}(u), \quad (2.10)$$

$$N_i^0(u) = \begin{cases} 1 & \text{si } u_{i-1} \leq u \leq u_i \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Estas funciones base presentan las siguientes propiedades:

- Tienen soporte local:

$$N_i^n(u) \neq 0 \text{ sólo si } u \in [u_{i-1}, u_{i+n}] \quad (2.11)$$

La consecuencia de esta propiedad es el control local sobre la curva B-spline. Cada punto de control está relacionado con una función base, y por tanto, el cambio de posición de un punto de control sólo modifica la parte de la curva que está en su entorno. En la Figura 2.6 se observa que al mover el punto d_3 se ha modificado sólo un trozo de la curva, que está

comprendido entre los nodos u_2 y u_5 , tramo que tiene como soporte a la función base N_3^2 relacionada con dicho punto de control.

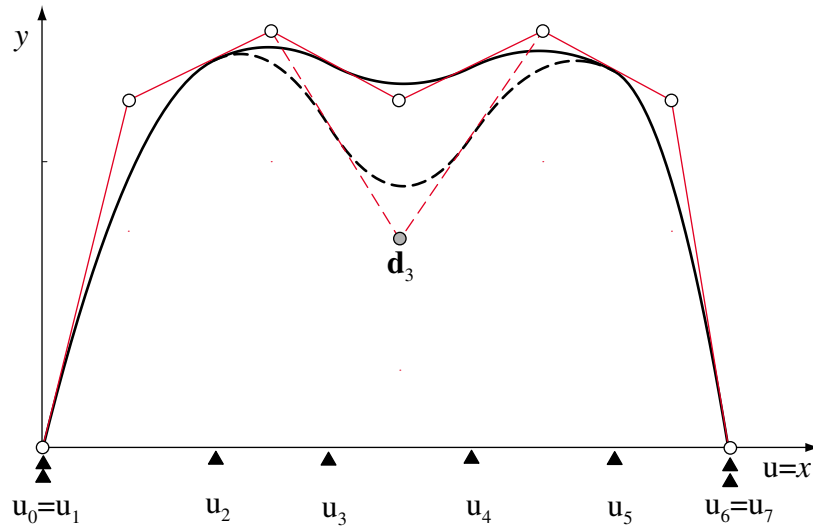


Fig. 2.6 Control local en una curva B-spline

- Son una partición de la unidad:

$$\sum_{i=0}^{L+n-1} N_i^n(u) = 1 \quad (2.12)$$

- Positividad: cada función base es no negativa en un intervalo correspondiente a su soporte –tramo donde se define– $N_i^n(u) \geq 0$; $u \in [u_{n-1}, \dots, u_{L+n-1}]$. Así, la curva está contenida en el dominio convexo de los puntos de control.

En el esquema B-spline representado la curva pasa por los puntos de control inicial y final del polígono (\mathbf{d}_0 , \mathbf{d}_{n+L-1}) y es tangente al polígono de control en estos puntos. Esta propiedad y las anteriores mencionadas facilitan el diseño y modificación de una curva B-spline.

La derivada $y'(u)$ de una curva B-spline no paramétrica es otra curva B-spline no paramétrica. La derivación de una curva B-spline se puede obtener a partir del polígono de control de la curva.

Las nuevas ordenadas d_i' de los puntos de control de la curva derivada se calculan según:

$$d_i' = n \frac{d_{i+1} - d_i}{u_{i+1} - u_i}; \quad i = 0, \dots, n' + L - 1 \quad (2.13)$$

donde el grado de la curva derivada es $n' = n - 1$. En cada derivación el grado n de la curva y la multiplicidad de los nodos extremos disminuye en 1. En los extremos de la curva la derivada r -ésima ($0 \leq r \leq n$) sólo depende de los $r + 1$ puntos de control más cercanos.

Las propiedades más importantes de una curva B-spline de grado n son las siguientes:

- Un B-spline es el resultado de la unión de L tramos polinomiales de Bézier.
- En los puntos de la curva la abscisa de los cuales coincide con un nodo, la continuidad es, como mínimo C^{n-r} .
- Un B-spline definido con una secuencia de nodos no periódica donde la multiplicidad de los nodos extremos es igual al grado n de la curva pasa en los extremos por los puntos de control y es tangente al polígono de control.

Reyes [2000] plantea que las curvas B-spline ofrecen una alternativa eficiente que permite diseñar cualquier ley de desplazamiento del palpador por compleja que sea. Este autor señala que si se necesita aproximar una ley de gran complejidad, especialmente aquellas que presentan tramos rectos con pendientes no nulas, este es el esquema idóneo.

En esta investigación se utilizan –además de las curvas de Bézier antes mencionadas– curvas B-splines no paramétricas para diseñar la ley de desplazamiento del palpador. En la Figura 2.7 se muestra un ejemplo de una ley formada por dos curvas B-splines de grado $n = 3$.

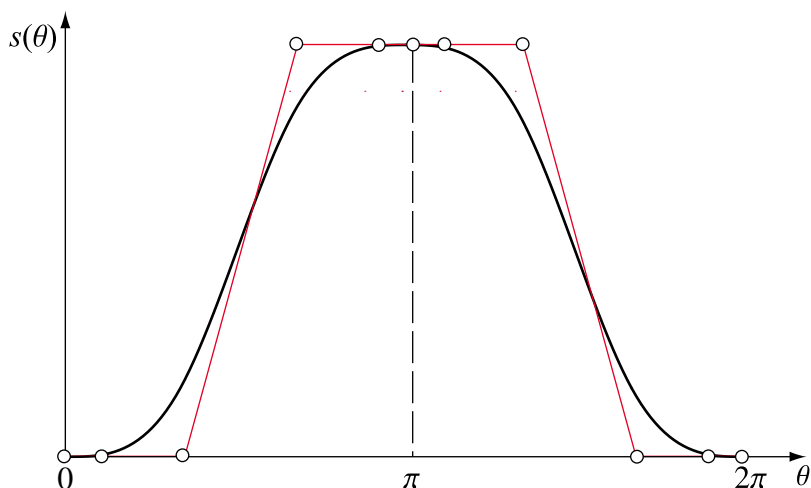


Fig. 2.7 Ley de desplazamiento diseñada con curvas B-splines

2.2 Métodos de obtención del perfil de levas

Los métodos de obtención del perfil de levas se dividen en gráficos y analíticos. Muchos de los autores consultados hacen referencia a ambos métodos cuando explican el proceso de generación del perfil, dentro de ellos podemos citar a Rohtbart [1956]; Chen [1982]; Mabie y Reinholtz [1987]; Wilson y Sadler [1993]; Erdman y Sandor [1998], otros exponen sólo los métodos gráficos, como por ejemplo, Kozhevnikov [1981]; Calero y Carta [1999] y algunos sólo exponen los métodos analíticos [Shigley y Uicker, 1988; Koloc y Vlácavík, 1993; González-Palacios y Angeles, 1993; Norton, 1995; Cardona y Clos, 2001].

En este capítulo se exponen ambos métodos de generación del perfil. El método gráfico se muestra considerando que facilita la comprensión de dicho proceso. Se comentan los diferentes enfoques de los métodos analíticos según distintos autores, que son los que se han impuesto en la actualidad debido al desarrollo de los ordenadores y a sus evidentes ventajas y se explica en detalle el enfoque analítico presentado por Cardona y Clos [2001], por considerarlo el más comprensible y concreto de los analizados.

2.2.1 Métodos gráficos de obtención del perfil

Para determinar gráficamente un perfil de leva, se realiza una inversión cinemática del mecanismo leva-palpador, en la cual la leva se considera fija y la guía o articulación del palpador móvil. La inversión cinemática no afecta el movimiento relativo entre la leva y el palpador. El perfil de la leva es la envolvente del haz de curvas correspondientes a las distintas posiciones del palpador en una vuelta de la leva.

Chen [1982] es, dentro del conjunto de autores consultados, quien mejor expone los procedimientos gráficos de obtención del perfil de leva, aunque no lo hace para el caso de palpadores puntuales.

Los ejemplos que se muestran a continuación representan los procedimientos de perfilado típico en el diseño gráfico de levas. Para los ejemplos que se exponen, se utiliza el mismo diagrama de desplazamiento $s(\theta)$ para todos los casos de palpador con movimiento de translación y el mismo $\varphi(\theta)$ para todos los casos de palpador con movimiento de rotación.

– Leva de disco con palpador circular con movimiento de translación

El perfil de la leva se obtiene a partir del diagrama de desplazamiento $s(\theta)$ del palpador mostrado en la Figura 2.8. El procedimiento gráfico de obtención del perfil (Figura 2.9) es el siguiente:

1. Dividir los 360° de las abscisas del gráfico de desplazamiento del palpador en un número definido de partes iguales. En ejemplo de la Figura 2.8 se utilizan diez partes.
2. Selección de un punto **O** en el plano y haciendo centro en éste, dibujar la circunferencia base de la leva, de radio R_b –este es un parámetro a definir por el diseñador– y dibujar la circunferencia primaria de radio $R_p = R_b + R_r$. Dividir la circunferencia base en el mismo número de partes iguales que el diagrama de desplazamiento y trazar líneas radiales por cada división señalada.
3. Transferir los desplazamientos $s(\theta_0)$, $s(\theta_1)$, etc., del diagrama de desplazamiento del palpador a las líneas radiales correspondientes midiendo desde la circunferencia primaria.

4. Dibujar una circunferencia, de radio R_r , correspondiente al rodillo sobre cada una de las líneas radiales, según correspondan.
5. Trazar una curva suave tangente a cada una de las circunferencias dibujadas. Esta curva es una aproximación al perfil de la leva.

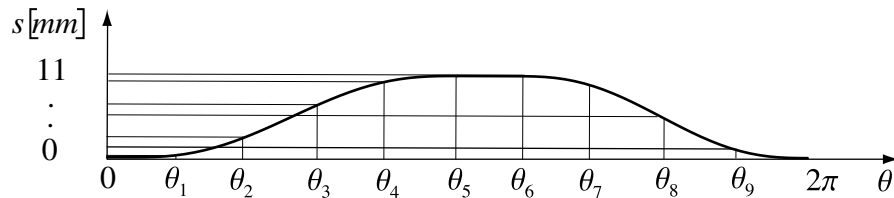


Fig. 2.8 Ley de desplazamiento para palpador translatorio

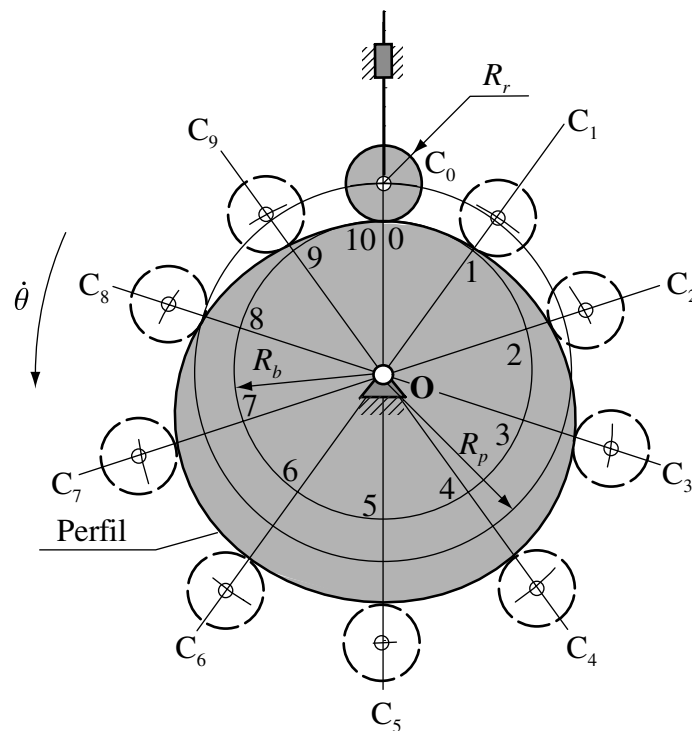


Fig. 2.9 Obtención del perfil de leva con palpador circular de translación

- Leva de disco con palpador circular excéntrico con movimiento de translación

Se parte del gráfico de desplazamiento mostrado en la Figura 2.8. Los pasos a seguir durante el procedimiento gráfico de obtención del perfil (Figura 2.10) son los siguientes:

1. Selección de un punto **O** en el plano y haciendo centro en éste, dibujar la circunferencia primaria de radio R_p y una circunferencia con radio igual al valor de excentricidad ε .

Trazar respecto a la circunferencia de radio ϵ una tangente vertical que indica la dirección del movimiento del palpador.

2. Dividir la circunferencia de radio ϵ en el mismo número de partes iguales que el diagrama de desplazamiento. Trazar tangentes a dicha circunferencia por cada de las divisiones señaladas.
3. Transferir los desplazamientos $s(\theta_0)$, $s(\theta_1)$, etc., del diagrama de desplazamiento a las líneas tangentes correspondientes midiendo desde la circunferencia primaria.
4. Dibujar una circunferencia, de radio R_r , correspondiente al rodillo sobre cada una de las tangentes trazadas, según correspondan.
5. Trazar una curva suave tangente a cada uno de las circunferencias dibujadas. Esta curva se aproxima al perfil de la leva.

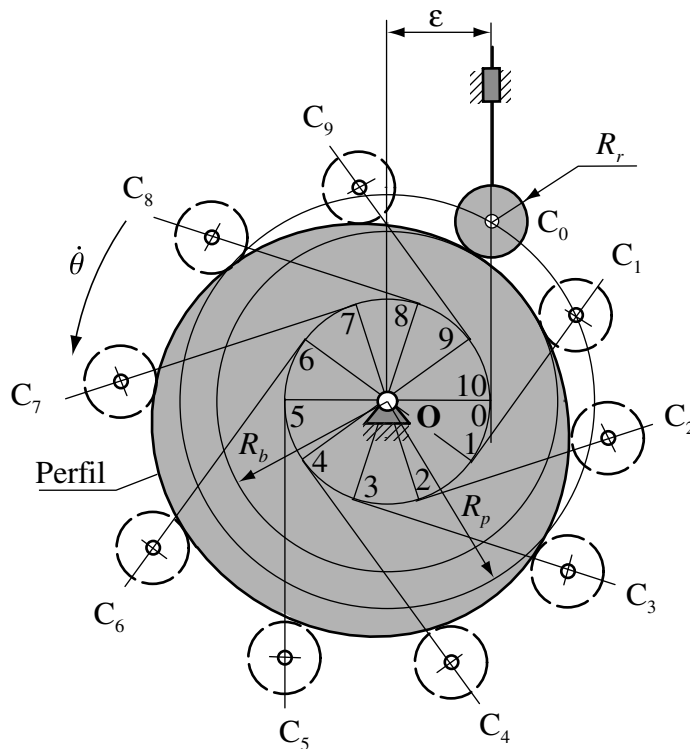


Fig. 2.10 Obtención del perfil de leva con palpador circular de translación y excéntrico

- Leva de disco con palpador puntual con movimiento de translación ($R_r = 0$)

El perfil de la leva se obtiene a partir del diagrama de desplazamiento $s(\theta)$ del palpador mostrado en la Figura 2.8. Los pasos a seguir durante el procedimiento gráfico de obtención del perfil (Figura 2.11) son los siguientes:

1. Selección de un punto **O** en el plano y haciendo centro en este dibujar la circunferencia base de la leva, de radio R_b . Dividir esta circunferencia en el mismo número de partes

iguales que el diagrama de desplazamiento y trazar líneas radiales por cada división señalada.

2. Dibujar el palpador en su posición inicial –el vértice del palpador coincide con el punto de intersección del círculo base y el eje de la guía .
3. Transferir los desplazamientos $s(\theta_0)$, $s(\theta_1)$, etc., del diagrama de desplazamiento del palpador a las líneas radiales correspondientes midiendo desde la circunferencia base. En el ejemplo se obtienen los puntos 0, " ,...,9" ,10.
4. Trazar una curva suave a través de los puntos señalados sobre las líneas radiales, en ejemplo: 0, " ,...,9" ,10, para obtener el perfil de la leva.

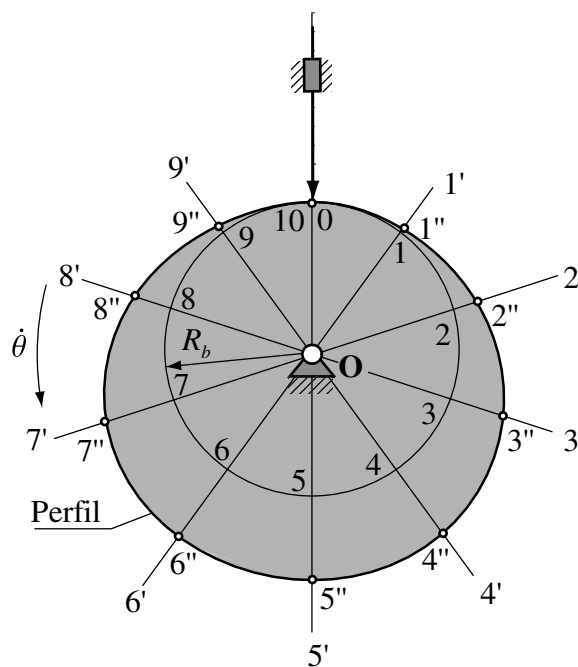


Fig. 2.11 Obtención del perfil de leva con palpador puntual de translación

– Leva de disco con palpador plano con movimiento de translación

Se parte del gráfico de desplazamiento mostrado en la Figura 2.8. El procedimiento gráfico de obtención del perfil (Figura 2.12) es el siguiente:

1. Selección de un punto **O** en el plano y haciendo centro en éste, dibujar la circunferencia base de la leva, de radio R_b . Dividir esta circunferencia en igual número de partes que el diagrama de desplazamiento y trazar líneas radiales por cada división señalada.
2. Dibujar el palpador en su posición inicial tangente a la circunferencia base.
3. Transferir los desplazamientos $s(\theta_0)$, $s(\theta_1)$, etc., desde el diagrama de desplazamiento a las líneas radiales correspondientes midiendo desde la circunferencia de base y trazar líneas perpendiculares a las líneas radiales en los puntos correspondientes.

4. Trazar una curva suave tangente a cada uno de las caras del palpador dibujadas. Esta curva se aproxima al perfil de la leva.

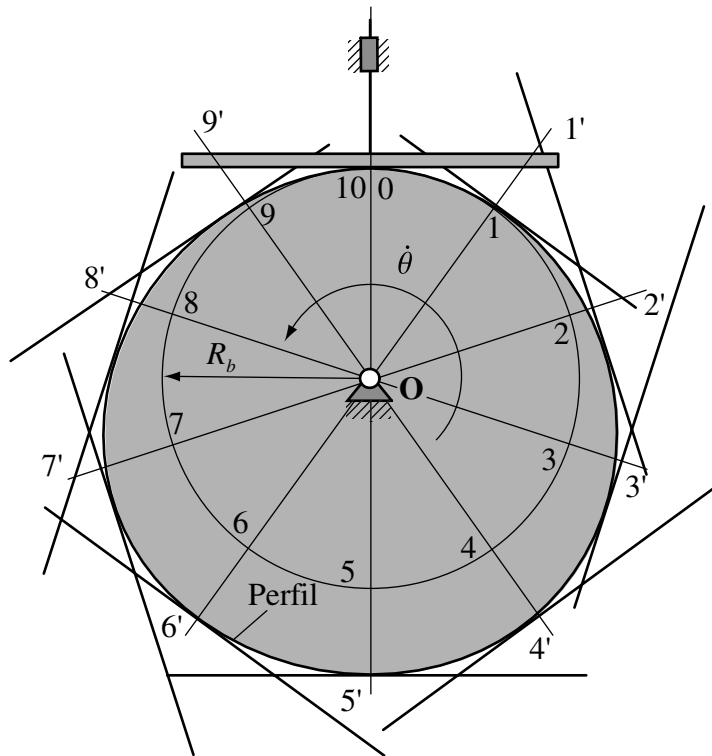


Fig. 2.12 Obtención del perfil de leva con palpador plano de translación

– Leva de disco con palpador circular con movimiento de rotación

Para este caso se parte del diagrama de desplazamiento $\varphi(\theta)$ del palpador mostrado en la Figura 2.13. El procedimiento gráfico de obtención del perfil (Figura 2.15) es el siguiente:

1. Selección de un punto O en el plano y haciendo centro en éste, dibujar la circunferencia primaria, de radio $R_p = R_b + R_r$. Dividir la circunferencia primaria en igual número de partes que el diagrama de desplazamiento y trazar líneas radiales por cada división señalada.
2. Dibujar la circunferencia pivote, de radio OO' , con centro en O y localizar sobre ésta los puntos pivotes –en el ejemplo: $1' \dots 9'$ – en la intercepción de las líneas radiales con dicha circunferencia.
3. Determinar el ángulo γ , a partir del cual comienza a desplazarse el palpador.
4. Medir a partir de las líneas radiales, los ángulos $\gamma + \varphi(\theta_i)$ del palpador, tomando los desplazamientos $\varphi(\theta_i)$ del diagrama de desplazamiento. Dibujar con centro de rotación en los puntos pivotes, el palpador en las posiciones correspondientes.
5. Trazar una curva suave tangente a cada una de las circunferencias correspondientes al rodillo del palpador. Esta curva se aproxima al perfil de la leva.

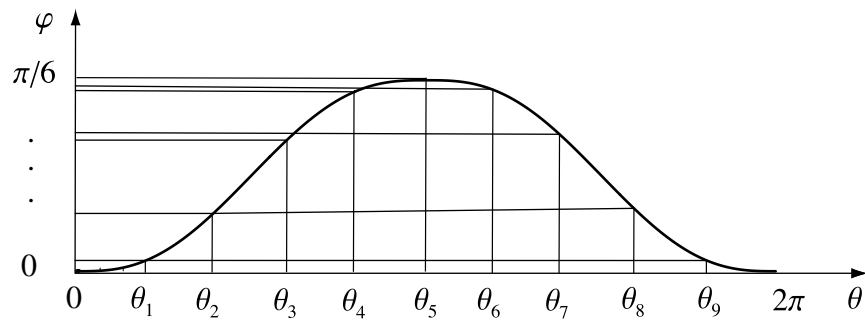


Fig. 2.13 Ley de desplazamiento para palpador de rotación

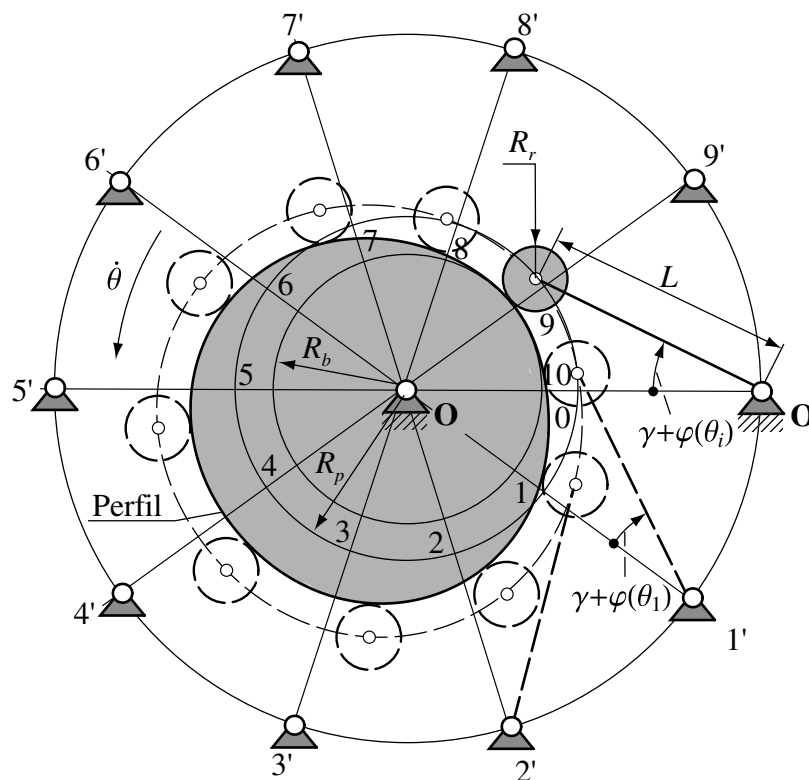


Fig. 2.14 Obtención del perfil de leva con palpador circular de rotación

– Leva de disco con palpador puntual con movimiento de rotación

En este caso se asume que el palpador tiene su geometría en forma de L, lo que permite el contacto del extremo del mismo con la superficie de la leva –que puede tener tramos cóncavos y convexos– durante la rotación completa de ésta.

Se parte del diagrama de desplazamiento $\varphi(\theta)$ del palpador mostrado en la Figura 2.13. El procedimiento gráfico de obtención del perfil (Figura 2.15) es el siguiente:

1. Selección de un punto O en el plano y haciendo centro en éste, dibujar la circunferencia base de la leva, de radio R_b . Dividir dicha circunferencia en igual número de partes que el diagrama de desplazamiento y trazar líneas radiales por cada división señalada.
2. Dibujar la circunferencia pivote, de radio OO' , con centro en O y localizar sobre ésta los puntos pivotes –en el ejemplo: $1' \dots 9'$ – en la intercepción de las líneas radiales con dicha circunferencia.
3. Determinar el ángulo γ , a partir del cual comienza a desplazarse el palpador.
4. Medir a partir de las líneas radiales, los ángulos $\gamma + \varphi(\theta_i)$ del palpador, tomando los desplazamientos $\varphi(\theta_i)$ del diagrama de desplazamiento. Dibujar con centro de rotación en los puntos pivotes, el palpador en las posiciones correspondientes.
5. Trazar una curva suave a través del vértice del palpador en las sucesivas posiciones del mismo. Esta curva se aproxima al perfil de la leva.

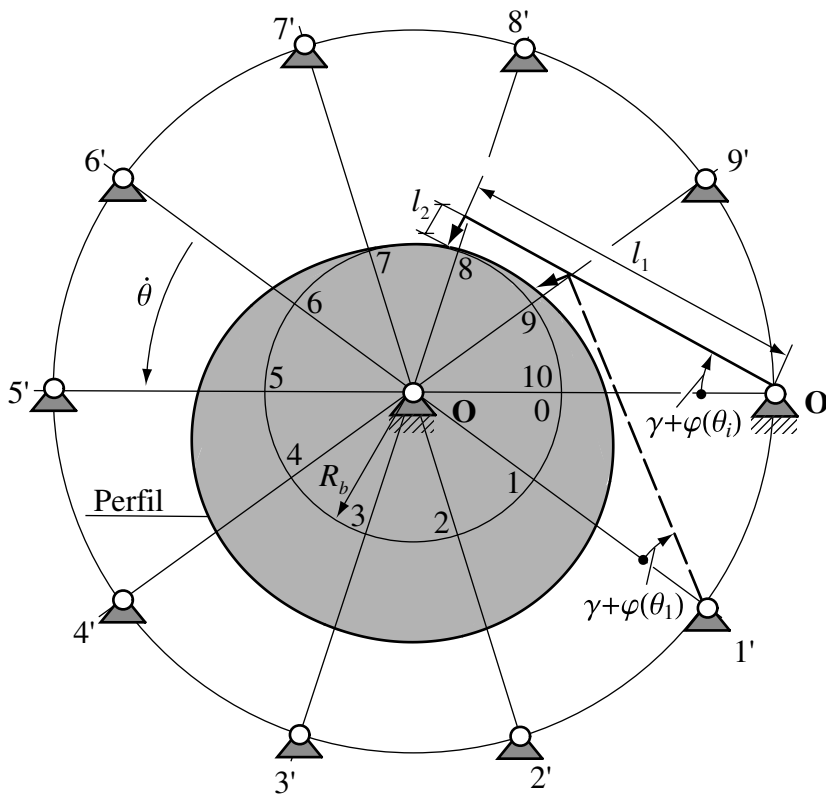


Fig. 2.15 Obtención del perfil de leva con palpador puntual de rotación

– Leva de disco con palpador plano con movimiento de rotación

Se parte del diagrama de desplazamiento $\varphi(\theta)$ del palpador mostrado en la Figura 2.13. El procedimiento gráfico de obtención del perfil (Figura 2.16) es el siguiente:

1. Selección de un punto O en el plano y haciendo centro en éste, dibujar la circunferencia base de la leva, de radio R_b . Dividir dicha circunferencia en igual número de partes que el diagrama de desplazamiento y trazar líneas radiales por cada división señalada.
2. Dibujar la circunferencia pivote, de radio OO' , con centro en O y localizar sobre ésta los puntos pivotes –en el ejemplo: $1' \dots 9'$ – en la intercepción de las líneas radiales con dicha circunferencia.
3. Determinar el ángulo γ , a partir del cual comienza a desplazarse el palpador.
4. Medir a partir de las líneas radiales, los ángulos $\gamma + \varphi(\theta_i)$ del palpador, tomando los desplazamientos $\varphi(\theta_i)$ del diagrama de desplazamiento. Dibujar con centro de rotación en los puntos pivotes, el palpador en las posiciones correspondientes.
5. Trazar una curva suave, tangente a cada una de las caras del palpador dibujadas. Esta curva se aproxima al perfil de la leva.

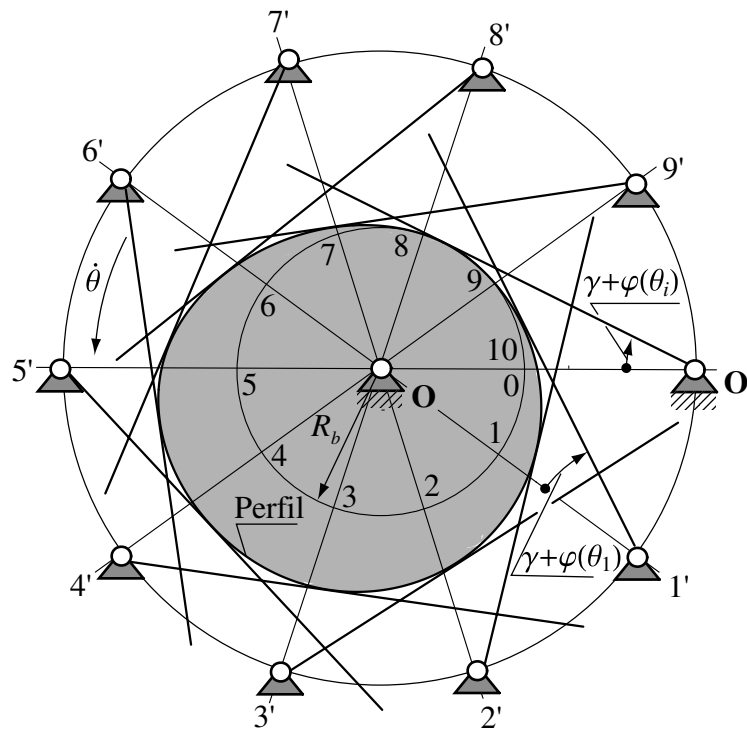


Fig. 2.16 Obtención del perfil de leva con palpador plano de rotación

2.2.2 Métodos gráficos de obtención del perfil en mecanismos leva-palpador desmodrómicos

En la bibliografía consultada sólo Rothbart [1956] expone los métodos gráficos de obtención de los perfiles de levas pertenecientes a mecanismos leva-palpador desmodrómicos. Este autor explica la obtención de un perfil de anchura constante –con doble palpador plano de translación– y diámetro constante –con doble palpador circular de rotación–, donde no se obtiene un perfil exacto. También expone la obtención de los perfiles de levas que forman un

mecanismo de levas conjugadas que accionan un doble palpador circular de translación. Los procedimientos que expone carecen de claridad.

A continuación se explican los procedimientos propuestos por Rothbart [1956] para los casos de leva de anchura constante con doble palpador plano de translación y de levas conjugadas con doble palpador circular de translación, introduciendo –por considerarlo necesario– ciertas modificaciones con el objetivo de facilitar la comprensión de los métodos gráficos de obtención del perfil de leva en estos casos.

No se expone la solución gráfica de leva de diámetro constante con doble palpador circular de rotación expuesta por Rothbart [1956], por considerarse errónea.

– Leva de anchura constante con doble palpador plano con movimiento de translación

Rothbart [1956] presenta el diagrama de desplazamiento del palpador que utiliza para explicar el método gráfico de obtención del perfil de una leva de anchura constante, sin especificar todas las características de la ley de desplazamiento.

En el tercer capítulo de la presente investigación se expone el análisis de un mecanismo de leva de anchura constante determinando que características presenta la ley desplazamiento $s(\theta)$, que permite obtener el perfil de leva de anchura constante y de diámetro constante.

Aquí se utiliza la ley de desplazamiento mostrada en la Figura 2.17, para explicar la obtención del perfil, el procedimiento es el siguiente:

1. Dividir los 360° de las abscisas del gráfico de desplazamiento del palpador en un número definido de partes iguales. En ejemplo de la Figura 2.17 se utilizan diez partes.
2. Selección de un punto **O** en el plano y haciendo centro en éste, dibujar la circunferencia base de la leva, de radio R_b . Dividir esta circunferencia en igual número de partes que el diagrama de desplazamiento y trazar líneas radiales por cada división señalada.
3. Dibujar el doble palpador en su posición inicial, siendo el palpador superior tangente a la circunferencia base. La distancia constante que separa a los palpadores superior e inferior es $d_c = 2R_b + s_{m\acute{a}x}(\theta)$.
4. Transferir los desplazamientos correspondiente al evento de subida del doble palpador –para el ejemplo que se toma son los desplazamiento de $s(\theta_1) \dots s(\theta_5)$ – desde el diagrama de desplazamiento a las líneas radiales correspondientes midiendo desde la circunferencia base y dibujar líneas perpendiculares –que representan la cara de palpador– a las líneas radiales en los puntos correspondientes.
5. Desde las líneas que representan la cara del palpador superior trazar líneas paralelas a ellas separadas una distancia d_c , las cuales interceptan a las líneas radiales correspondientes.

6. Trazar una curva suave tangente a cada una de las caras del palpador dibujadas. Esta curva se aproxima al perfil de la leva de anchura constante.

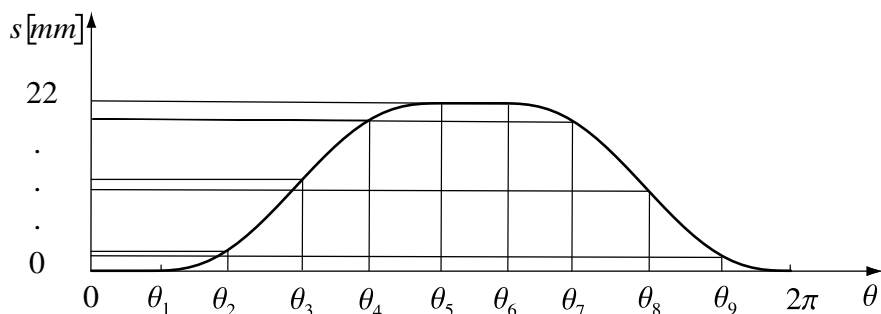


Fig. 2.17 Ley de anchura constante para doble palpador plano de translación

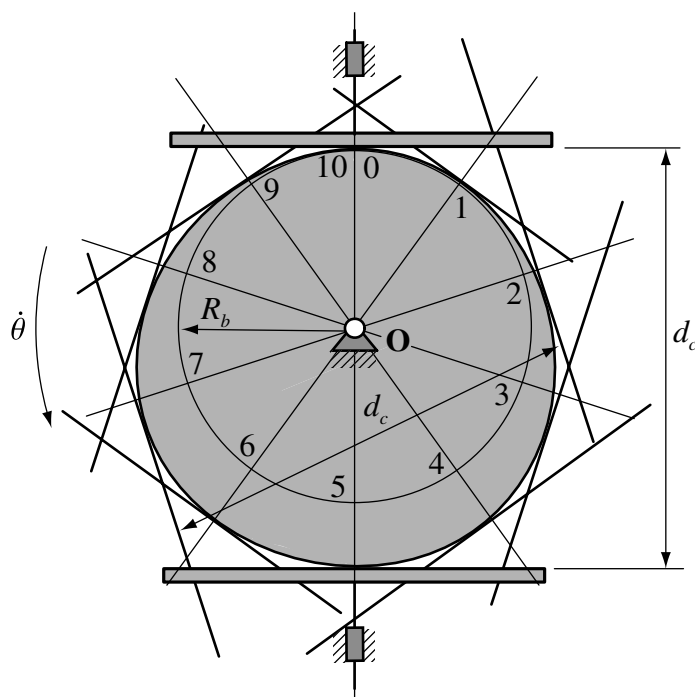


Fig. 2.18 Obtención del perfil de leva de anchura constante con doble palpador plano de translación

- Levas conjugadas con doble palpador circular con movimiento de translación

Se parte del gráfico de desplazamiento $s(\theta)$ del palpador mostrado en la Figura 2.19.

Los pasos a seguir durante el procedimiento gráfico de obtención del perfil (Figura 2.20) son los siguientes:

1. Aplicar el procedimiento ya explicado de obtención del perfil de leva en el caso de un palpador circular de translación. De este modo se obtiene una aproximación del primero de los perfiles de las levas conjugadas, es decir el perfil que impulsa al palpador superior.

2.2.3 Métodos analíticos de obtención del perfil de levas

En la actualidad los métodos gráficos de diseño de levas han sido sustituidos por los métodos de diseño analítico. Este proceso ha sido facilitado por el uso de los ordenadores, obteniéndose ventajas respecto al diseño gráfico. La primer ventaja es que una vez se han programado las expresiones para la generación de los perfiles de levas se pueden obtener los perfiles y otras informaciones del diseño en un tiempo mucho menor que con el método gráfico. Además el proceso iterativo de diseño para obtener el perfil con las características geométricas deseadas se hace más rápido, simulando el comportamiento de los mecanismos antes de fabricarlos. Una segunda ventaja es la precisión numérica del ordenador, la cual es muy superior a la precisión lograda con el método de diseño gráfico, lo que contribuye a disminuir el error del diseño final de la leva. Una tercer ventaja es que el ordenador utilizado para diseñar la leva también puede suministrar la información necesaria para la fabricación de la misma con máquinas de control numérico.

El método analítico del perfilado de levas utiliza al igual que el método gráfico la inversión cinemática del mecanismo, ya explicada en el apartado 1.5.4 de esta tesis.

Los métodos analíticos para la obtención del perfil son presentados de diferentes formas según el autor que los trata. Dichos métodos de acuerdo a como se deducen las expresiones que permiten obtener el perfil de la leva se han clasificado en: el método analítico-geométrico –en el cual se resuelve analíticamente el problema geométrico de contacto, utilizando los parámetros geométricos y las coordenadas generalizadas que permiten deducir las ecuaciones del perfil– y el método analítico-vectorial –en el cual la deducción de las expresiones de cálculo del perfil se hace a partir de un análisis vectorial, que permite establecer la expresión matemática del radio vector del punto de contacto leva-palpador. A continuación se comentan de manera general los enfoques analíticos según diferentes autores consultados.

Un primer enfoque es el presentado por Rothbart [1956], y por Erdman y Sandor [1998], en él se utiliza el método analítico-geométrico, dibujando los mecanismos leva-palpador y colocando en los mismos los ángulos y las distancias requeridos según el tipo de mecanismo que se analiza, deduciendo las expresiones para la determinación de las coordenadas cartesianas o polares del perfil de leva. Se exponen casos de mecanismos de levas con palpadores planos y circulares.

Chakraborty y Dhande [1977] muestran un enfoque donde se emplea el método analítico-vectorial. Los autores utilizan un conjunto de sistemas de coordenadas tridimensionales para analizar la geometría de las superficies en contacto, basado en conceptos de curvatura desde el punto de vista de la geometría diferencial. En el cálculo se establecen matrices de transformación de coordenada que permiten obtener la expresión del perfil de la leva.

Chen [1982] y Wilson y Sadler [1993], utilizan también el método analítico-geométrico y se basan en la teoría de la envolvente para obtener las expresiones matemáticas que definen el perfil de leva.

González-Palacios y Angeles [1993] exponen un método analítico-vectorial para la síntesis de las superficies de mecanismos de levas planos y espaciales, basado en la teoría del tornillo. En su trabajo utilizan unas magnitudes llamadas duales –escalares, vectores, matrices– y las superficies de los elementos se obtienen a través de la aplicación de la geometría de superficies regladas.

Otro enfoque analítico-vectorial es el presentado por Koloc y Vlácavík [1993]. En él se utilizan coordenadas polares para definir el radio vector de posición del punto de contacto leva-palpador, luego se define la inversión cinemática del mecanismo y a partir de aquí se hallan unas expresiones complicadas que permiten definir el perfil de la leva y sus características geométricas como por ejemplo su radio de curvatura. En el cálculo se utiliza profusamente el producto vectorial lo cual conlleva a utilizar bases tridimensionales incluso para el estudio de un perfil de leva plano. Es un método complicado.

Shigley y Uicker [1988] y Norton [1995], utilizan el método analítico-vectorial. En su análisis colocan dos vectores ortogonales que definen las coordenadas cartesianas del punto de contacto leva-palpador con respecto a un sistema de coordenadas de eje rotatorio incrustado en la leva. En su trabajo expresan dos ecuaciones de lazo vectorial que se igualan para definir las coordenadas de los puntos del perfil como función del ángulo de giro de la leva y se aplica para el caso de palpadores de geometría sencilla: circular y plano.

El último enfoque estudiado es el presentado por Cardona y Clos [2001], el cual utiliza el método analítico-vectorial. En él se expone el método analítico general para obtener el perfil de la leva teniendo el palpador cualquier perfil. Para los palpadores usuales: puntual, plano y circular, se presenta un método, basado en el análisis cinemático, que proporciona la expresión explícita del perfil. Este enfoque con relación a los antes mencionados presenta un desarrollo matemático menos complicado y más concreto.

En casi toda la bibliografía básica consultada los métodos analíticos de obtención del perfil se exponen utilizando como ejemplo los mecanismos de levas planos tradicionales, o sea, mecanismos con leva de disco con palpador plano o de rodillo, por la gran aplicación que tienen estos en la práctica, aunque Cardona y Clos [2001] incluyen en su trabajo a los palpadores puntuales. Sólo Chakraborty y Dhande [1977] presentan un ejemplo de perfilado analítico para un mecanismo de levas conjugadas con doble palpador de rotación, sin embargo el método utilizado es tedioso, basado en conceptos de geometría diferencial.

Dentro de la bibliografía consultada, se han encontrado pocos trabajos en los que autores analicen los mecanismos desmodrómicos. A continuación se comentan algunos de los trabajos más recientes, en los cuales se estudian básicamente las levas conjugadas y de anchura constante.

Huang [1993] analiza dos métodos de combinación de curvas de aceleración tradicionales –aceleración sinusoidal y aceleración cosenoidal. Estos métodos se utilizan para diseñar levas conjugadas utilizadas en los mecanismos de golpeteo en máquinas textiles. Aquí se realiza el

cálculo del ángulo de presión, utilizando este como parámetro indicador para la selección del método de combinación de curvas, y se propone desarrollar leyes avanzadas para el movimiento del palpador. Se plantea que lo ideal para los mecanismos de levas conjugadas son leyes en las cuales sean continuas las funciones desplazamiento, velocidad, aceleración y sobreaceleración.

Chang [1994] realiza el análisis y la síntesis de un mecanismo en el cual se introducen dos pares leva-rodillo como pares de movimiento, como solución al deslizamiento presente en el par formado por la biela y el pistón de un mecanismo de cuatro barras. Se plantea que los pares de leva-rodillo permiten obtener mayor eficiencia en el funcionamiento y se logra mayor vida útil del mecanismo. En el trabajo se determinan los desplazamientos de las barras de entrada y salida, se realiza el análisis de velocidades utilizando un mecanismo de 5 barras cinemáticamente equivalente al mecanismo con doble leva-rodillo; se estudian las fuerzas en el sistema, se analiza el ángulo de transmisión y se sintetizan las dimensiones de los elementos.

Chunhong, *et al.* [1996] exponen el diseño de un mecanismo de levas conjugadas utilizadas en el mecanismo tejedor usual de los telares. En este trabajo, se analiza los defectos de los mecanismos de levas conjugados tradicionales utilizados en el mecanismo tejedor y se propone un nuevo diseño de este tipo de levas conjugadas. Se muestra un mecanismo de levas conjugadas donde las levas están montadas en árboles diferentes accionando a un mismo palpador. El perfilado que se expone se hace para un mecanismo de levas conjugadas tradicional –montadas ambas sobre un mismo árbol–, se utiliza el método analítico-geométrico, aunque no se exponen explícitamente todas las expresiones de cálculo para cada leva.

Homg-Sen y Hung-Ming [1996] estudian los efectos de los errores de fabricación combinados con la flexibilidad del brazo oscilante y las superficies de las levas, para levas planas conjugadas con palpadores de rodillos con movimiento de rotación. Se establece un modelo generalizado de tres grados de libertad para analizar el comportamiento dinámico del mecanismo. El error de fabricación se divide en la desviación respecto al perfil teórico y la ondulación de la superficie, se concluye que tiene mayor influencia en el comportamiento dinámico del mecanismo las ondulaciones que quedan en la superficie de la leva respecto a la desviación, por lo que debe de controlarse más la ondulación durante el proceso de fabricación. Aquí se sugieren como leyes del movimiento del palpador para el diseño de levas conjugadas la ley del seno modificada y la polinomial 3-4-5.

Neamtu *et al.* [1996] plantean que resultaría una aplicación interesante el diseño de perfiles de levas de diámetro constante con la utilización de las curvas splines focales –curvas splines univaluadas en coordenadas polares–, las cuales son una clase de funciones racionales que presentan offset racionales.

Zhang y Bi [1997] exponen un ejemplo de diseño analítico de un mecanismo de levas conjugadas utilizadas en un tipo de accionamiento para los telares flexibles. Aquí se combina

un mecanismo levas conjugadas con un eslabonamiento de cinco barras para diseñar el accionamiento mencionado. Se hace una exposición oscura del cálculo del perfil las levas conjugadas utilizando el método analítico-geométrico para el caso que se analiza. En el trabajo se toma el movimiento armónico simple para el movimiento del palpador durante el diseño.

En los casos anteriores se expone el método analítico-geométrico para la generación del perfil para levas conjugadas, aplicado a mecanismos en los cuales el palpador tiene movimiento de rotación. Si bien con este enfoque se obtiene el perfil de las levas conjugadas en cada caso, el diseñador se ve involucrado en desarrollos matemáticos engorrosos y carece de un método general fácil de comprender.

Zayas y Cardona [2000] presentan en su trabajo un método analítico-vectorial general con el cual se obtienen los perfiles de las levas conjugadas y de anchura y de diámetro constante –como caso particular de las conjugadas– en mecanismos de leva-palpador desmodrómicos en los cuales el palpador tiene movimiento de translación.

A continuación se presenta el procedimiento analítico de obtención de perfil de leva, basado en el enfoque expuesto por Cardona y Clos [2001] para mecanismos de levas con palpadores puntual, circular y plano. El caso de palpador puntual con movimiento de translación se expone en el apartado 1.5.4 de la presente tesis.

– Leva de disco con palpador plano con movimiento de translación

En el caso en que los palpadores tienen movimiento de translación la ley general $d(\theta)$ de desplazamiento es:

$$d(\theta) = s(\theta) + d_o \quad (2.14)$$

donde $s(\theta)$ es la ley de desplazamiento especificada con métodos tradicionales o métodos adecuados para el CADG y d_o es un parámetro que en el caso de palpadores planos depende del radio básico R_b de la leva –cuando es recto– y además del valor de la excentricidad ε del palpador cuando este es plano inclinado (Figura 2.21).

Cuando el palpador es plano el perfil de la leva es la envolvente de un haz de rectas. Si el palpador es horizontal –ángulo de presión $\phi = 0$ –, el punto P de contacto leva-palpador se encuentra sobre la vertical al punto I –centro instantáneo de rotación relativo leva-palpador– y las componentes del vector de posición $\overline{\mathbf{OP}}(\theta)$ en la base 1, 2 solidaria a la guía, deducidas del análisis de velocidades son (Figura 2.22):

$$\{\overline{\mathbf{OP}}(\theta)\}_{1,2} = \begin{cases} d'(\theta) \\ d(\theta) \end{cases}_{1,2} \quad (2.15)$$

En la base x, y de orientación fija a la leva, la ecuación paramétrica del perfil es:

$$\{\overline{\mathbf{OP}}(\theta)\}_{x,y} = [S_\theta] \{\overline{\mathbf{OP}}(\theta)\}_{1,2} \quad [S_\theta] = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

donde $[S_\theta]$ es la matriz de cambio de la base 1, 2 a la base x, y correspondiente a una rotación θ en sentido antihorario.

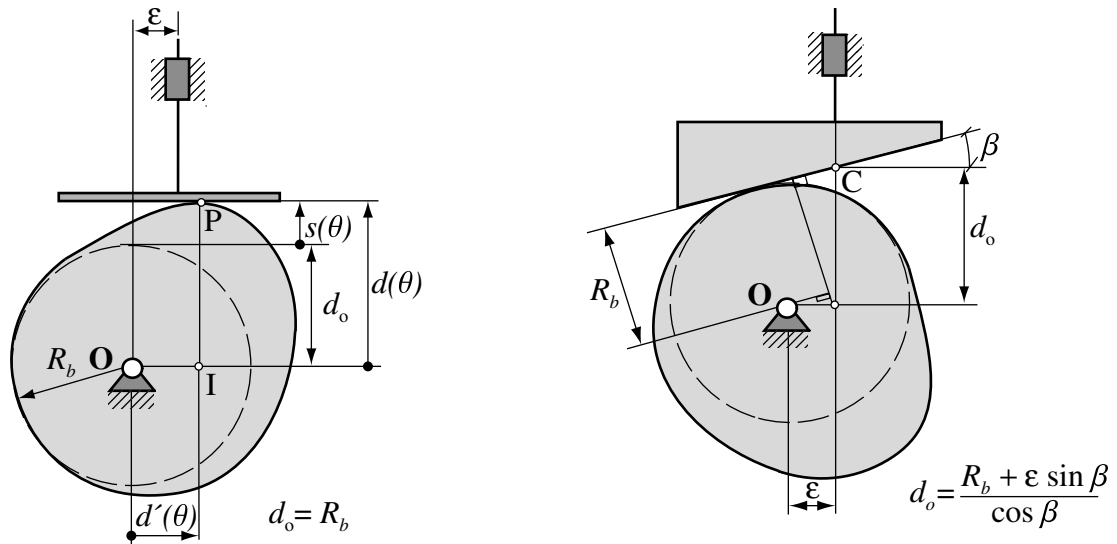


Fig. 2.21 Parámetro d_o en los mecanismos con palpadores planos –recto e inclinado–

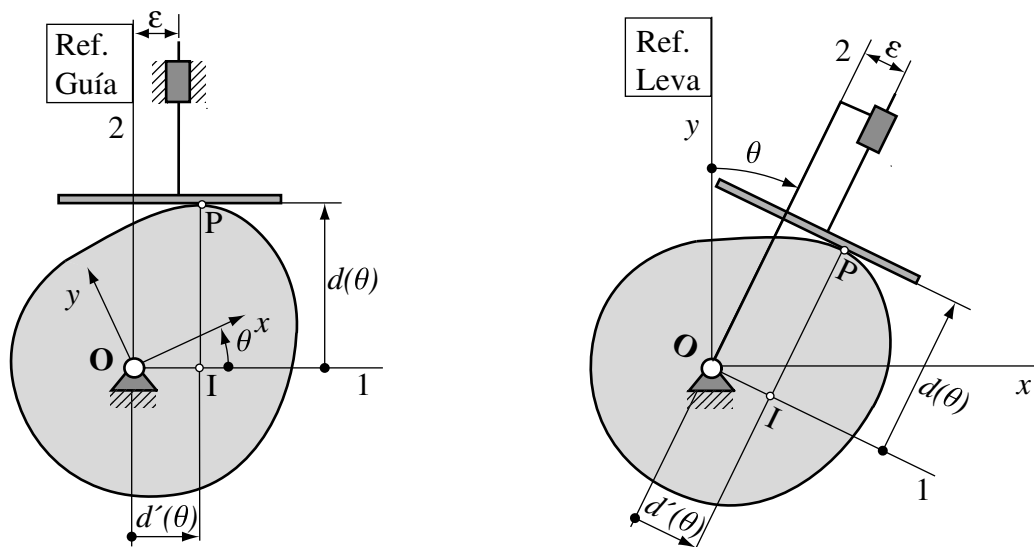


Fig. 2.22 Inversión cinemática del mecanismo con palpador plano

Para un palpador plano con inclinación arbitraria β , el perfil de la leva se deduce de manera análoga, a partir del vector de posición $\overline{\mathbf{OP}}(\theta)$ en la base móvil 1,2. Este vector se puede

descomponer como $\overline{OP} = \overline{OI} + \overline{IP}$, donde $\overline{IP} = \overline{ID} + \overline{AB}$ y al mismo tiempo $|\overline{IP}| = (d'(\theta) - \varepsilon) \sin \beta + d(\theta) \cos \beta$ (Figura 2.23), por lo tanto el resultado final es:

$$\{\overline{OP}(\theta)\}_{1,2} = \begin{Bmatrix} d'(\theta) \cos \beta \\ d(\theta) \cos \beta - \varepsilon \sin \beta \end{Bmatrix}_{1,2} \quad (2.17)$$

Pasando a la base fija x, y se obtiene la ecuación paramétrica del perfil de la leva:

$$\{\overline{OP}(\theta)\}_{x,y} = [S_\theta] \{\overline{OP}(\theta)\}_{1,2} \quad (2.18)$$

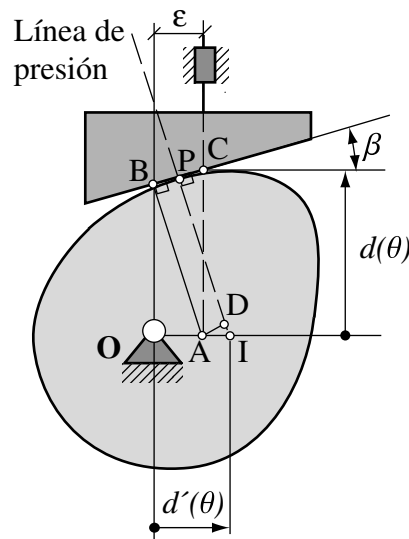


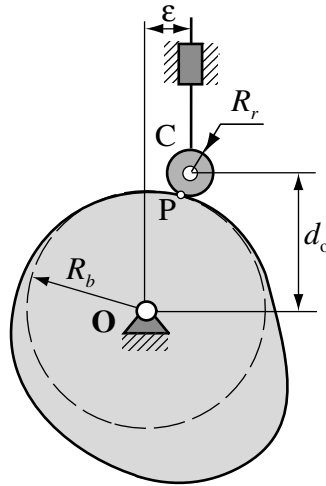
Fig. 2.23 Figura de análisis para un palpador inclinado

– Leva de disco con palpador circular con movimiento de translación

Para un palpador circular, el parámetro d_o que interviene en la función de desplazamiento $d(\theta)$ (Figura 2.24) es:

$$d_o = \sqrt{(R_b + R_r)^2 - \varepsilon^2} \quad (2.19)$$

En el caso particular de un palpador puntual $-R_r = 0-$, d_o sólo depende de R_b y de ε .

Fig. 2.24 Parámetro d_o en mecanismo con palpador circular

En el caso de un palpador circular de centro C y radio R_r , el perfil de la leva es la envolvente de un haz de circunferencias. La trayectoria que describen los centros de esas circunferencias es la curva de paso y su posición se calcula como (Figura 2.25):

$$\{\overline{\text{OC}}(\theta)\}_{1,2} = \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon \\ d(\theta) \end{array} \right\}_{1,2} \quad (2.20)$$

En la base fija x, y , la ecuación paramétrica de la curva de paso es:

$$\{\overline{\text{OC}}(\theta)\}_{x,y} = [S_\theta] \{\overline{\text{OC}}(\theta)\}_{1,2} = \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon \cos\theta + d(\theta)\sin\theta \\ -\varepsilon \sin\theta + d(\theta)\cos\theta \end{array} \right\}_{x,y} \quad (2.21)$$

El perfil de la leva $\overline{\text{OP}}(\theta)$, equivale al lugar geométrico de los puntos situados a una distancia R_r de la curva de paso en la dirección de su normal $\mathbf{n}(\theta)$ –interior– y dirigida hacia el área que encierra la curva, la ecuación paramétrica del perfil es:

$$\overline{\text{OP}}(\theta) = \overline{\text{OC}}(\theta) + R_r \cdot \mathbf{n}(\theta) \quad (2.22)$$

Para calcular la normal unitaria interior a la curva de paso, $\mathbf{n}(\theta)$, se necesita el vector tangente a la curva $\mathbf{t}(\theta)$, que se calcula de la siguiente manera:

$$\mathbf{t}(\theta) = \frac{d}{d\theta} \overline{\text{OC}}(\theta) = \left\{ \begin{array}{c} (d'(\theta) - \varepsilon)\sin\theta + d(\theta)\cos\theta \\ (d'(\theta) - \varepsilon)\cos\theta - d(\theta)\sin\theta \end{array} \right\} \quad (2.23)$$

Entonces:

$$\mathbf{n}(\theta) = \left[R_{-90^\circ} \right] \frac{\mathbf{t}(\theta)}{|\mathbf{t}(\theta)|} \quad (2.24)$$

donde $[R_{-90^\circ}]$ es la matriz de rotación:

$$[R_{-90^\circ}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

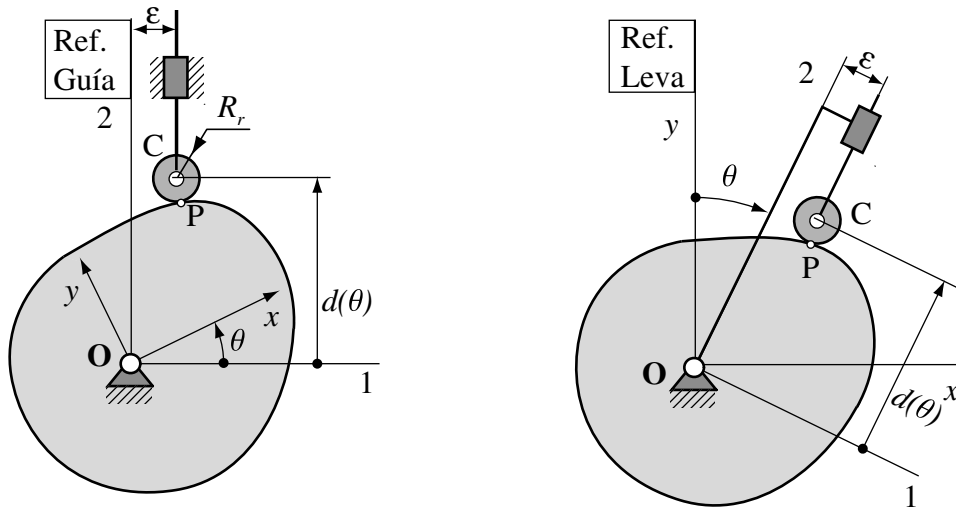


Fig. 2.25 Inversión cinemática del mecanismo con palpador circular

De la Ec. 2.22 se tiene, que el perfil de la leva es la curva *offset* a la curva de paso, la distancia entre ellas es $R_r = \text{constante}$. Si los diámetros de la herramienta de corte y del palpador circular fuesen iguales, se podría mecanizar la leva haciendo que el centro C de la herramienta se desplace según la trayectoria $\overline{OC}(\theta)$.

– Leva de disco con palpador plano con movimiento de rotación

Cardona y Clos [2001], realizan una aportación importante en el caso de obtención del perfil de leva en mecanismos con palpadores de rotación, pues establecen expresiones de cálculo sencillas –según el enfoque analítico-vectorial que utilizan– para los casos de palpadores plano y puntual. La ecuación paramétrica del perfil para palpador plano la obtienen del análisis de velocidades del mecanismo utilizando el concepto de centro instantáneo de rotación, en el caso de palpador de palpador puntual, se basan en la ecuación de cierre de lazo vectorial.

En esta investigación se añaden las expresiones de cálculo del perfil para el caso de palpador circular, utilizando el enfoque analítico-vectorial de los autores antes citados. También se colocan las expresiones para la determinación del ángulo a partir de cual comienza a desplazarse el palpador.

En el caso de palpadores con movimiento de rotación, cuyo desplazamiento es angular, la ley de desplazamiento total $d(\theta)$ será:

$$d(\theta) = \gamma + \varphi(\theta) \quad (2.26)$$

donde γ es el ángulo (Figura 2.26) a partir del cual comienza a desplazarse el palpador y $\varphi(\theta)$ es la ley de desplazamiento requerida para el palpador.

El valor del ángulo γ se determina según la expresión:

$$\gamma = \arcsin\left(\frac{R_b - l_2}{l_1}\right) \quad (2.27)$$

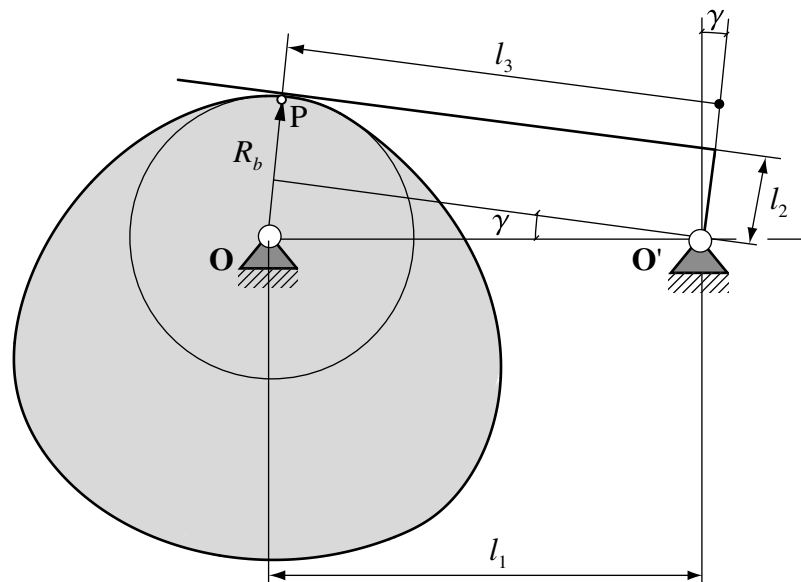


Fig. 2.26 Esquema de análisis para determinar el ángulo γ

En los mecanismos leva-palpador con movimiento de rotación del palpador el perfil de la leva se obtiene imaginando una inversión cinemática en la que el palpador gira alrededor de su articulación O' y ésta gira alrededor del centro de rotación O de la leva (Figura 2.27).

En las dimensiones de la leva influirán los parámetros: radio base de la leva R_b , distancia l_1 entre los centros de rotación O de la leva y O' del palpador y el valor del brazo l_2 del palpador medido a partir de su centro de rotación.

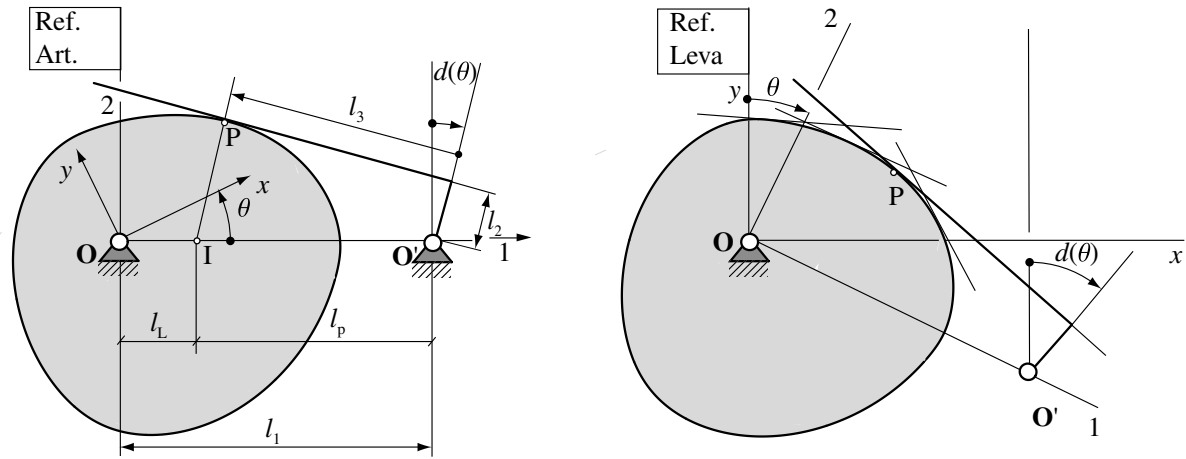


Fig. 2.27 Inversión cinemática de un mecanismo de leva con palpador plano de rotación

Para el caso de un palpador plano de rotación (Figura 2.27) a partir del análisis de velocidades se obtiene:

$$v(I) = v(I_1) = v(I_2)$$

$$\dot{\theta} l_L = \dot{d}(\theta) l_P$$

$$l_L = \frac{\dot{d}(\theta)}{\dot{\theta}} l_P = \frac{d[d(\theta)]}{dt} \frac{dt}{d\theta} l_P = d'(\theta) l_P$$

$$l_1 = l_L + l_P = d'(\theta) l_P + l_P$$

$$l_P = l_1 (d'(\theta) + 1)^{-1}$$

$$l_3 = l_P \cos[d(\theta)] = l_1 (d'(\theta) + 1)^{-1} \cos[d(\theta)] \quad (2.28)$$

donde:

$v(I)$ velocidad del centro instantáneo I de rotación relativo leva-palpador.

$v(I_1)$ velocidad del punto I_1 de la leva que coincide con el centro instantáneo relativo I.

$v(I_2)$ velocidad del punto I_2 del palpador que coincide con el centro instantáneo relativo I.

l_L distancia desde el centro de rotación O de la leva al centro instantáneo I de rotación relativo leva-palpador.

l_P distancia desde el centro de rotación O' del palpador al centro instantáneo I de rotación relativo leva-palpador.

l_3 distancia variable desde el brazo del palpador al punto P de contacto leva-palpador.

$d'(\theta)$ primera derivada de la ley de desplazamiento del palpador respecto al ángulo θ de giro de la leva .

$\dot{d}(\theta)$ primera derivada de la ley de desplazamiento del palpador respecto al tiempo.

La base x, y solidaria a la leva es fija y la base 1,2 solidaria a los centros de rotación \mathbf{O} de la leva y \mathbf{O}' del palpador es móvil (Figura 2.27). En la base 1,2 el vector $\overline{\mathbf{OP}}(\theta)$ tiene por componentes:

$$\{\overline{\mathbf{OP}}(\theta)\}_{1,2} = \begin{Bmatrix} l_1 + l_2 \sin[d(\theta)] - l_3 \cos[d(\theta)] \\ l_2 \cos[d(\theta)] + l_3 \sin[d(\theta)] \end{Bmatrix}_{1,2} \quad (2.29)$$

donde l_3 se calcula según la Ec. 2.28.

El vector $\overline{\mathbf{OP}}(\theta)$ en la base x, y se obtiene a partir de la Ec. 2.16.

– Leva de disco con palpador circular con movimiento de rotación

Cuando el palpador es circular, el perfil de la leva es la envolvente de un haz de circunferencias. La curva de paso $\overline{\mathbf{OC}}(\theta)$ (Figura 2.28) se calcula como:

$$\{\overline{\mathbf{OC}}(\theta)\}_{1,2} = \begin{Bmatrix} l_1 - l_3 \cos[d(\theta)] \\ l_3 \sin[d(\theta)] \end{Bmatrix}_{1,2} \quad (2.30)$$

En la base fija x, y , la ecuación paramétrica de la curva de paso es:

$$\{\overline{\mathbf{OC}}(\theta)\}_{x,y} = [S_\theta] \{\overline{\mathbf{OC}}(\theta)\}_{1,2} \quad (2.31)$$

De nuevo el perfil de la leva $\overline{\mathbf{OP}}(\theta)$ es la curva *offset* de la curva de paso $\overline{\mathbf{OC}}(\theta)$ y se obtiene aplicando la Ec. 2.22.

El vector tangente a la curva $\mathbf{t}(\theta)$ se calcula con la siguiente expresión:

$$\mathbf{t}(\theta) = \frac{d}{d\theta} \overline{\mathbf{OC}}(\theta) \quad (2.32)$$

$$\mathbf{t}(\theta) = \begin{Bmatrix} -l_1 \sin\theta + l_3 \sin[\theta + d(\theta)](1 + d'(\theta)) \\ -l_1 \cos\theta - l_3 \cos[\theta + d(\theta)](1 + d'(\theta)) \end{Bmatrix} \quad (2.33)$$

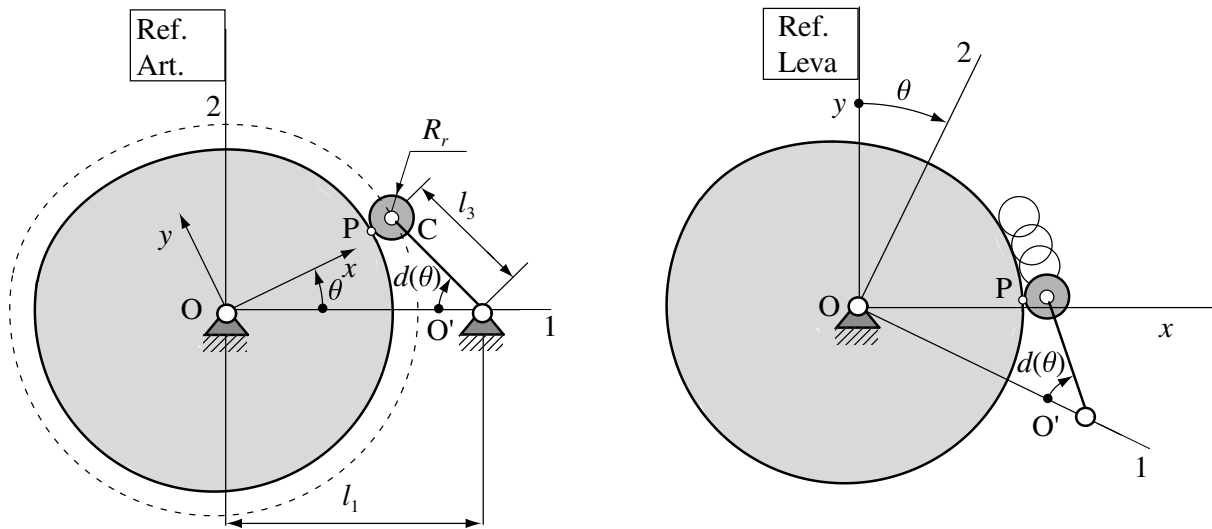


Fig. 2.28 Inversión cinemática de un mecanismo de leva con palpador circular de rotación

Del análisis de la Figura 2.29 se determina la expresión para el cálculo del ángulo γ a partir del cual comienza a desplazarse el palpador.

$$\gamma = \cos^{-1} \left[\frac{l_3^2 + l_1^2 - (R_b + R_r)^2}{2l_3l_1} \right] \quad (2.34)$$

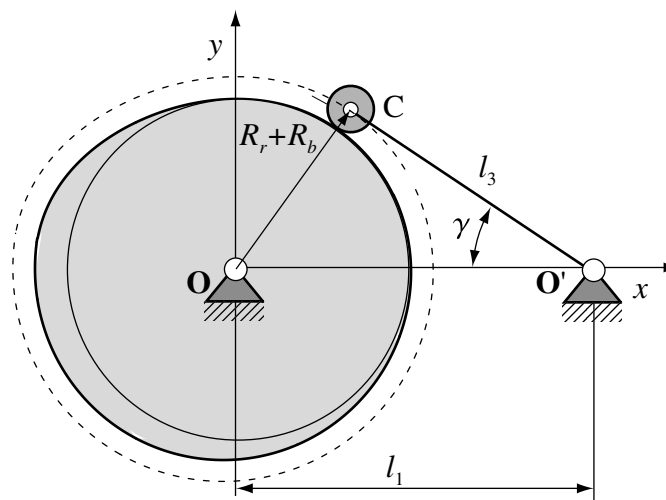


Fig. 2.29 Esquema de análisis para determinar el ángulo γ

– Leva de disco con palpador puntual con movimiento de rotación

El mecanismo leva-palpador donde este último es puntual es un caso particular de palpador circular donde $R_r = 0$. En este caso, el perfil de la leva será la curva que va dibujando el vértice P del palpador al imaginar la inversión cinemática del mecanismo (Figura 2.30).

En la base 1,2 indicada de orientación fija a los centros de rotación O y O' , el vector $\overline{OP}(\theta)$ tiene por componentes (Figura 2.30):

$$\{\overline{OP}(\theta)\}_{1,2} = \begin{Bmatrix} l_1 - l_3 \cos[d(\theta)] \\ l_3 \sin[d(\theta)] \end{Bmatrix}_{1,2} \quad (2.35)$$

Pasando a la base x, y de orientación fija a la leva, se obtiene la ecuación paramétrica del perfil de esta leva:

$$\{\overline{OP}(\theta)\}_{x,y} = [S_\theta] \{\overline{OP}(\theta)\}_{1,2} \quad (2.36)$$

Las expresiones para el cálculo del ángulo γ inicial, a partir del cual comienza a desplazarse el palpador son las mismas que para el palpador circular tomando $R_r = 0$.

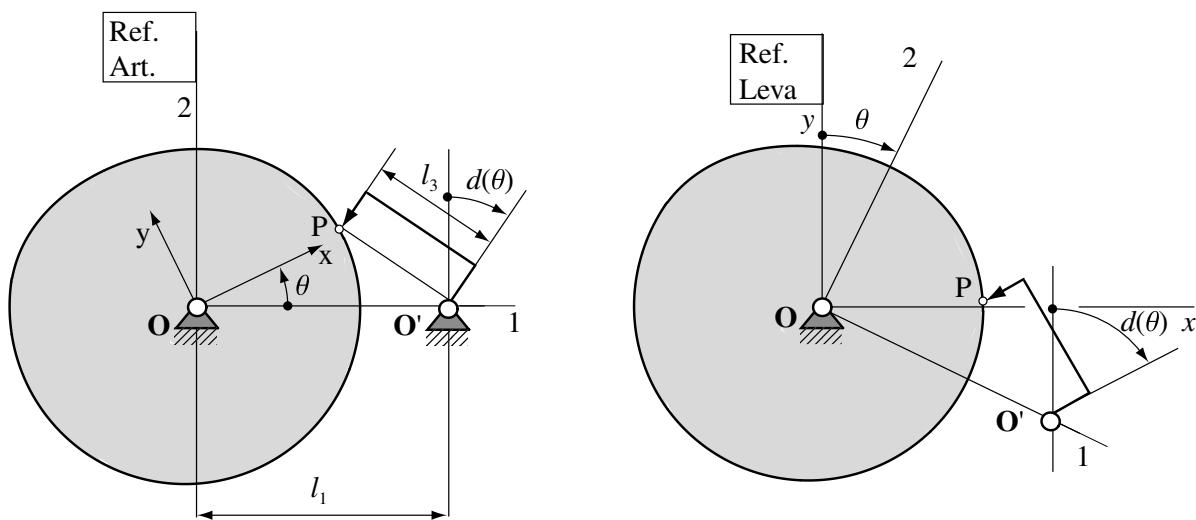


Fig. 2.30 Inversión cinemática de un mecanismo de leva con palpador puntual de rotación

2.3 Comprobación del perfil de leva

La comprobación del perfil constituye el último paso del proceso de diseño de una leva, para ello es necesario determinar el radio de curvatura del perfil. En función del tipo de enfoque utilizado por los diferentes autores para la determinación del perfil de la leva, se plantean también diferentes formas analíticas de determinar su radio de curvatura. Así, por ejemplo, Chen [1982] utiliza varios métodos – método del polo de velocidades, método de las variables complejas, y métodos de aproximado de Krasnikov–, obteniendo diferentes expresiones para el cálculo del radio de curvatura, analizando los casos de palpadores de translación y de rotación; Wilson y Sadler [1993] parten de sustituir en la expresión paramétrica –obtenida de cálculo diferencial– para el cálculo del radio de curvatura de una curva plana, las derivadas correspondientes de las expresiones para el cálculo de las coordenadas del perfil obteniendo las ecuaciones del radio de curvatura según el tipo de palpador; Shigley y Uicker [1988] y

Norton [1995], utilizan el mismo procedimiento –a través de dos ecuaciones de cierre vectorial– para llegar a las mismas expresiones de cálculo. Varios autores [Chen, 1982; Shigley y Uicker, 1988; Mabie y Reinholtz, 1993] establecen, para el caso de palpadores de rodillos translatorios, unos gráficos para encontrar los radios mínimos de curvatura del perfil en función de las leyes tradicionales –cicloidal, armónica simple y modificada– y del radio primario de la leva.

En el apartado 1.5.5 de esta investigación se exponen cuales son los problemas que puede presentar un perfil de leva que impiden un contacto correcto leva-palpador según Cardona y Clos [2001]. Se presenta además la Ec. 1.10 para cálculo del radio de curvatura basada en el enfoque analítico-vectorial presentado por los autores antes citados. A continuación se exponen, como ejemplo, las expresiones de cálculo del radio de curvatura en los casos de palpadores plano y circular con movimiento de translación.

2.3.1 Radio de curvatura para leva con palpador plano de translación

Para un palpador plano con $\beta = 0$, derivando la Ec. 2.15 del vector de posición $\overline{\mathbf{OP}}(\theta)$ respecto a θ en la base 1,2 móvil se obtiene:

$$\{\overline{\mathbf{OP}}(\theta)\}_{1,2} = \begin{Bmatrix} d'(\theta) \\ d(\theta) \end{Bmatrix} \xrightarrow{d/d\theta} \begin{Bmatrix} d(\theta) + d''(\theta) \\ 0 \end{Bmatrix} \xrightarrow{d/d\theta} \begin{Bmatrix} d'(\theta) + d'''(\theta) \\ -(d(\theta) + d''(\theta)) \end{Bmatrix} \quad (2.37)$$

La dirección normal a la curva es la del eje 2. Sustituyendo la Ec. 2.37 en la Ec. 1.10, la ecuación del radio de curvatura cuando el palpador es plano horizontal es:

$$r_c(\theta) = d(\theta) + d''(\theta) \quad \text{con} \quad d(\theta) = s(\theta) + d_o \quad (2.38)$$

Para un palpador plano con inclinación arbitraria $\beta > 0$, derivando la Ec. 2.17 respecto a θ en la base 1,2 móvil se obtiene:

$$\{\overline{\mathbf{OP}}(\theta)\}_{1,2} = \begin{Bmatrix} d'(\theta)\cos\beta \\ d(\theta)\cos\beta - \varepsilon\sin\beta \end{Bmatrix} \xrightarrow{d/d\theta} \begin{Bmatrix} (d(\theta) + d''(\theta))\cos\beta - \varepsilon\sin\beta \\ 0 \end{Bmatrix} \xrightarrow{d/d\theta} \begin{Bmatrix} (d'(\theta) + d'''(\theta))\cos\beta \\ -(d(\theta) + d''(\theta))\cos\beta - \varepsilon\sin\beta \end{Bmatrix} \quad (2.39)$$

Sustituyendo la Ec. 2.39 en la Ec. 1.10, la ecuación del radio de curvatura es:

$$r_c(\theta) = (d(\theta) + d''(\theta))\cos\beta - \varepsilon\sin\beta, \quad d(\theta) = s(\theta) + d_o \quad (2.40)$$

Al analizar el signo de la función $r_c(\theta)$, se deducen características importantes del perfil de la leva:

- Si siempre $r_c(\theta) > 0$, la leva es convexa y el palpador podrá acceder al punto teórico de contacto sin problemas.
- Cuando $r_c(\theta) = 0$, aparece un vértice o una punta en el perfil de la leva (Fig. 2.31), lo cual conduce a la presencia de presiones muy elevadas en el punto de contacto leva-palpador, aspecto no deseado.
- Un tramo $r_c(\theta) < 0$ entre dos puntos de retroceso $-r_c(\theta) = 0$ – corresponde a un rebaje en el perfil que, además de originar un pico, impide seguir la ley de desplazamiento especificada (Fig. 2.31).

Para palpadores planos el perfil de la leva es tal, que al ir avanzando por él con ángulos θ crecientes siguiendo la parametrización, el ángulo que forma la tangente respecto a una dirección fija a la leva es monótonamente decreciente, ya que es igual a $-\theta$. Así, por lo tanto, es imposible que una leva obtenida por generación presente puntos de inflexión, como en el caso que se muestra en la Figura 1.22 b.

Para eliminar los tramos problemáticos y asegurar que siempre $r_c(\theta) > 0$, es suficiente aumentar el radio de base R_b de la leva, ya que $r_c(\theta)$ es una función creciente de d_o , y d_o es una función creciente de R_b . Se ha de tener en cuenta que un valor muy elevado de R_b no es recomendable, pues al aumentar este valor aumentan las dimensiones de la leva y junto con ello la velocidad de deslizamiento entre la leva y el palpador.

Shigley y Uicker [1988], Norton [1995] y otros autores plantean que para evitar grandes esfuerzos de contacto entre la leva y el palpador, quizás se desee tener la seguridad de que el radio de curvatura $r_c(\theta)$ del perfil sea en todos sus puntos mayor que algún valor $r_{cmín}$ especificado. Riba [1996] expone que el radio de curvatura mínimo $r_{cmín}$ se evalúa a partir de las tensiones de Hertz y justifica que la tensión de Hertz máxima admisible del material con el cual se fabrican la leva y el palpador limita el valor de $r_{cmín}$.

Así, por ejemplo, para un palpador plano horizontal debe cumplirse:

$$r_c(\theta) = d(\theta) + d''(\theta) = R_b + s(\theta) + s''(\theta) > r_{cmín} \quad (2.41)$$

En la Ec. 2.41 los valores de $s(\theta)$ y R_b son siempre positivos y por tanto el mayor valor negativo de $s''(\theta)$ es el que puede provocar obtener un valor del $r_c(\theta)$ inadecuado. Denotando el valor mínimo de $s''(\theta)$ como $s''_{mín}(\theta)$, se establece la condición para establecer el valor del radio de base R_b de la leva que garantiza un radio de curvatura $r_c(\theta) > 0$.

$$R_b > r_{cmín} - s(\theta) - s''_{mín}(\theta) \quad (2.42)$$

Entonces, se puede decir que a partir de tener la ley de desplazamiento del palpador, sus derivadas y haber establecido un valor mínimo $r_{c\text{mín}}$ de radio de curvatura se puede definir un valor R_b que garantiza un perfil correcto, antes de realizar el proceso de obtención del perfil.

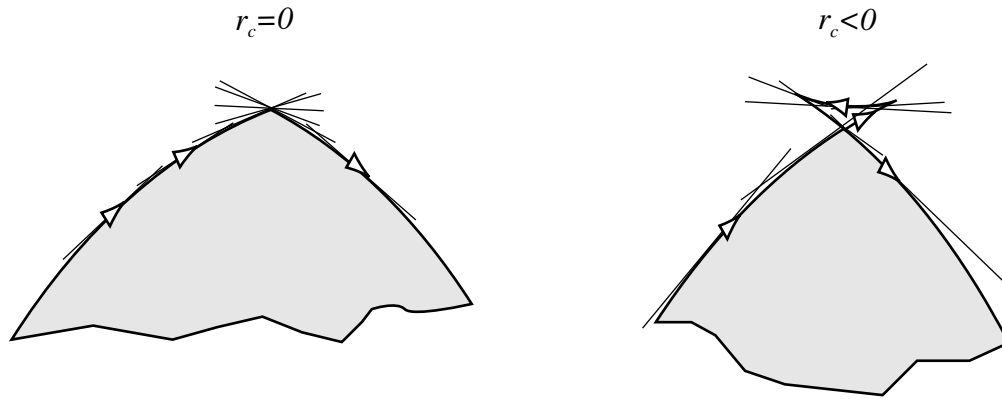


Fig. 2.31 Posibles problemas en el perfil de una leva con palpador plano.

2.3.2 Radio de curvatura para leva con palpador circular de translación

En el caso de una leva con palpador circular, el radio de curvatura $r_c(\theta)$ del perfil de la leva y el de la curva de paso $r_{cp}(\theta)$, difieren en el radio R_r del rodillo, ya que la primera es la curva *offset* de la segunda:

$$r_c(\theta) = r_{cp}(\theta) - R_r \quad (2.43)$$

Para calcular el radio de curvatura $r_{cp}(\theta)$ de la curva de paso se deriva la Ec. 2.20 respecto al parámetro θ en la base móvil 1,2:

$$\{\overline{\mathbf{OC}}(\theta)\}_{1,2} = \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ d(\theta) \end{Bmatrix} \xrightarrow{d/d\theta} \begin{Bmatrix} d(\theta) \\ d'(\theta) - \varepsilon \end{Bmatrix} \xrightarrow{d/d\theta} \begin{Bmatrix} 2d'(\theta) - \varepsilon \\ d''(\theta) - d(\theta) \end{Bmatrix} \quad (2.44)$$

Esta curva cerrada se ha parametrizado en sentido horario, de manera que la componente normal –hacia el interior– de la derivada se puede expresar como:

$$\overline{\mathbf{OC}}'' \Big|_n(\theta) = \frac{\overline{\mathbf{OC}}''(\theta) \times \overline{\mathbf{OC}}' \Big|_{\text{eje3}}}{|\overline{\mathbf{OC}}'(\theta)|} \quad (2.45)$$

$$\overline{\mathbf{OC}}'' \Big|_n(\theta) = (d'(\theta) - \varepsilon)(2d'(\theta) - \varepsilon) - d(\theta)(d''(\theta) - d(\theta))$$

Así, sustituyendo las Ec. 2.44 y Ec. 2.45, en la Ec. 1.10 se obtiene:

$$r_{cp}(\theta) = \frac{\left(d^2(\theta) + (d'(\theta) - \varepsilon)^2\right)^{3/2}}{(d'(\theta) - \varepsilon)(2d'(\theta) - \varepsilon) - d(\theta)(d''(\theta) - d(\theta))} \quad (2.46)$$

Los problemas que se pueden presentar en el contacto leva-palpador son los siguientes:

- Cuando $r_c(\theta) < 0$, hay tramos cóncavos en el perfil de la leva. Se ha de verificar que $|r_c(\theta)| > R_r$. En caso contrario, el rodillo no puede acceder al punto teórico de contacto leva-palpador (Figura 1.19 a).
- Si $r_{cp}(\theta) > 0$, hay tramos convexos de la curva de paso. Se debe de verificar que $r_{cp}(\theta) > R_r$. En el caso de $r_{cp}(\theta) = R_r$, se generaría un vértice $-r_c(\theta) = 0$ en el perfil de la leva. Si $r_{cp}(\theta) < R_r$, ocurriría el fenómeno del rebaje (Figura 2.31).

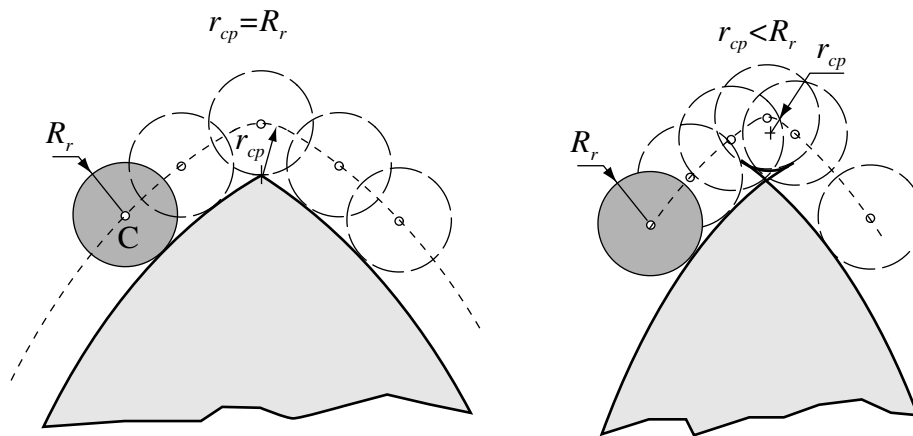


Fig. 2.31 Posibles problemas del perfil de una leva con palpador circular