



**UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CATALUÑA**  
Escuela Técnica Superior de Ingeniería Industrial de Barcelona  
Departamento de Ingeniería Mecánica

Tesis Doctoral

**APORTE AL DISEÑO DE ENGRANAJES NO CIRCULARES  
CILÍNDRICOS RECTOS**

Presentada por

**HÉCTOR FABIO QUINTERO RIAZA**

Directores

**Dr. Salvador Cardona Foix**  
**Dra. Lluïsa Jordi Nebot**

Barcelona, 2006

# CAPÍTULO 1

## INTRODUCCIÓN

### 1.1 MOTIVACIÓN

La presente Tesis Doctoral, titulada *Aporte al diseño de engranajes no circulares cilíndricos rectos*, se enmarca en la línea de investigación Teoría de Máquinas y Mecanismos que se desarrolla en el Departamento de Ingeniería Mecánica de la Universidad Politécnica de Cataluña.

El interés del tema se debe a la importancia que tienen los procedimientos de síntesis y análisis de mecanismos dentro del diseño de máquinas, que apoyados en los medios actuales de cálculo, permiten proyectar los mecanismos y simular su funcionamiento para evaluarlos. Así, se pueden seleccionar los elementos y su disposición más adecuada antes de la fabricación con las consiguientes ventajas tanto desde el punto de vista económico como funcional.

Los engranajes sirven para transmitir par de torsión y velocidad angular en una amplia variedad de aplicaciones. El engranaje cilíndrico recto, el tipo más simple, se diseña para funcionar sobre ejes paralelos. Otros tipos de engranajes como el helicoidal, el cónico y el tornillo sinfin, operan en ejes no paralelos; el engranaje helicoidal también funciona sobre ejes paralelos. Los engranajes son uno de los más eficientes medios para la transmisión de movimiento, ya que el deslizamiento entre los dientes es limitado por el tamaño de los dientes por lo que presentan pares y fuerzas de fricción pequeñas.

La utilización de los engranajes en la industria responde a las restricciones económicas que conducen a la adopción de soluciones simples con un nivel de buen comportamiento, estandarización en su cálculo y del control de su proceso de manufactura. En muchas aplicaciones en que se requiere tamaño compacto, garantizar el balanceo y la exactitud en la

transmisión, los engranajes representan la única o la mejor solución de diseño. Adicionalmente, los engranajes son uno de los más eficientes medios para la transmisión de movimiento, ya que el deslizamiento entre los dientes es limitado por el tamaño de los dientes por lo que presentan pares y fuerzas de fricción pequeñas.

La transmisión del movimiento de rotación es necesaria por motivos tales como:

- La existencia de ejes no coincidentes por razones funcionales. Este es el caso de un diferencial de un vehículo con motor longitudinal, necesario para transmitir el movimiento de salida de la caja de cambios a las ruedas.
- La necesidad de establecer una relación de velocidad precisa entre dos ejes. Por ejemplo, el ciclo termodinámico de un motor de 4 tiempos impone que el árbol de levas gire exactamente a la mitad de la velocidad del eje del cigüeñal.
- La necesidad de invertir el sentido de giro de un eje. Es el caso del mecanismo que permite a una motonave invertir el sentido de giro de la hélice para maniobrar.
- La adecuación de la velocidad del motor a las características de la carga. Por ejemplo, la turbina de un avión de turbohélice gira a una velocidad demasiado elevada para poderse conectar directamente con la hélice con un rendimiento aceptable; se ha de interponer un reductor entre ellos. Otro ejemplo es el de un aerogenerador en el que las palas giran demasiado lento para accionar al generador eléctrico; se ha de interponer un multiplicador.

En multitud de aplicaciones, es de interés obtener relaciones de transmisión variables a lo largo de un ciclo de rotación del eslabón conductor. Éstas pueden obtenerse mediante distintos mecanismos, entre ellos los engranajes no circulares. Éstos permiten la obtención de cualquier ley de desplazamiento o relación de transmisión entre la velocidad angular del eje conducido y del eje conductor siempre que cumpla con las condiciones requeridas de continuidad, de periodicidad y de curvatura exigidas a las curvas primitivas de las ruedas.

La posibilidad de elegir libremente las dos curvas primitivas, tal como ocurre en los sistemas leva palpador, permite la definición continua de la ley de desplazamiento, sin que ésta esté restringida al paso por unos pocos puntos de precisión, como ocurre con los mecanismos articulados. Aunque se utilizan mecanismos articulados para las aplicaciones que requieren movimiento con relación de transmisión variables, los engranajes no circulares presentan la ventaja de tener una transmisión precisa, definida de manera continua, ser de tamaño compacto y poder ser balanceados fácilmente. Los engranajes no circulares presentan la

ventaja, frente a las levas, de ser directamente mecanismos desmodrómicos y presentar velocidades de deslizamiento limitadas por el tamaño de los dientes.

La mayor parte de investigaciones realizadas sobre engranajes no circulares se centra en el diseño y en la aplicación de los engranajes elípticos. A pesar de ser muy utilizados, estos tipos de engranajes no garantizan el cumplimiento de cualquier ley de desplazamiento deseada entre sus eslabones. Es por ello que en la presente tesis doctoral se estudia el diseño de los engranajes no circulares que cumplan con una ley de desplazamiento deseada.

## 1.2 OBJETIVOS

Con el fin de estudiar y aportar nuevos conocimientos al análisis del diseño de los engranajes no circulares cilíndricos rectos, la presente tesis tiene unos objetivos generales y unos objetivos específicos.

### OBJETIVOS GENERALES

- Dar un tratamiento analítico al proceso de generación de las curvas primitivas.
- Generar analíticamente el perfil del diente.
- Realizar el análisis cinemático y dinámico de un engranaje no circular.

### OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Estudiar las características de continuidad y periodicidad requeridas por las leyes de desplazamiento.
- Describir analíticamente las leyes de desplazamiento.
- Formular un tratamiento analítico a la generación del perfil del diente.
- Obtener una descripción del perfil del diente apta para el mecanizado con control numérico.
- Obtener la curva base de los flancos derecho e izquierdo del diente.
- Establecer la influencia del radio de curvatura de la curva primitiva sobre la geometría de la curva base.
- Obtener un método analítico que defina las regiones con menores alturas permisibles del pie del diente.
- Determinar el recubrimiento del engranaje en función del ángulo de giro de la rueda conductora.

- Establecer la influencia del ángulo de presión y del número de dientes sobre el recubrimiento.
- Determinar la máxima curvatura relativa y la máxima velocidad de deslizamiento en un par de dientes.
- Estudiar las reacciones en los apoyos y la fluctuación del par motor en los engranajes no circulares en un ciclo de rotación de la rueda conductora, comparar estos resultados con los de un mecanismo articulado con idéntica ley de desplazamiento y bajo las mismas condiciones de operación.
- Comparar analítica y experimentalmente el comportamiento dinámico, mediante el análisis de la fluctuación del par motor entre un mecanismo articulado y un engranaje no circular cinemáticamente equivalente y bajo iguales condiciones de carga.

### 1.3 ESTRUCTURA DE LA TESIS

En esta tesis doctoral se presenta, en el capítulo 2, un resumen del estado del arte sobre los engranajes no circulares bajo tres aspectos: sus aplicaciones, el diseño del diente y los métodos de manufactura. En este capítulo se describen los trabajos publicados relacionados con las aplicaciones tradicionales y actuales de los engranajes no circulares en diferentes campos industriales; se hace una descripción de los principales métodos propuestos para el diseño del perfil del diente y de las curvas primitivas; finalmente se describen los métodos de manufactura que se utilizaron inicialmente así como los métodos modernos aprovechando el desarrollo del mecanizado con CNC.

En el capítulo 3 se estudian las propiedades de continuidad y periodicidad que deben cumplir las funciones para definir una ley de desplazamiento de un engranaje no circular en el que los periodos de rotación de las ruedas conductora y conducida son iguales; se definen leyes utilizando funciones armónicas y algunas funciones propias del diseño geométrico como las curvas de Bézier no paramétricas y las curvas B-spline no paramétricas. Debido a su amplia aplicación, se deducen las relaciones que permiten obtener la ley de desplazamiento de las ruedas elípticas; estas relaciones se obtienen con base a la geometría de una elipse. Adicionalmente, se estudian las condiciones de continuidad entre tramos adyacentes de las funciones que permiten definir una ley de desplazamiento donde los periodos de rotación de las ruedas conductora y conducida son diferentes.

Una vez que se define la ley de desplazamiento del engranaje, el paso siguiente consiste en obtener la curva primitiva y el dentado de cada rueda. En el capítulo 3 se propone un modelo para obtener las curvas primitivas de ambas ruedas a partir de la ley de desplazamiento. Por su importancia en la geometría de las curvas primitivas, se establecen las expresiones para calcular sus radios de curvatura; también se determinan las expresiones del vector tangente de la curva primitiva de la rueda conductora y conducida, dada su importancia en el proceso de generación del perfil. Finalmente se estudian las expresiones con las que se obtiene la longitud de la curva primitiva que junto con el número de dientes determinan el paso primitivo del engranaje, a partir del que se obtiene la ubicación del dentado y se dimensiona el tamaño del diente.

En el modelo de generación de los dientes se utilizan dos cremalleras de dientes rectos simétricas conjugadas manteniendo, conceptualmente, la tangencia entre las 4 líneas primitivas. En el capítulo 4 se formulan las relaciones geométricas entre la cremallera y la rueda conjugada que permiten generar el perfil del diente; la obtención de la curva primitiva y del perfil del diente se formulan mediante un método analítico que utiliza el ángulo de giro de la rueda conductora como única variable independiente de entrada. De esta forma, se puede implementar un algoritmo en un programa como *Matemática*© que integra el tratamiento simbólico y el cálculo numérico. Adicionalmente, se puede definir la rueda dentada mediante una serie de puntos para su posterior mecanizado en una máquina CNC. Las dimensiones del diente se obtienen a partir de la curva primitiva, de esta forma la cabeza y el pie del diente se localizan sobre curvas paralelas a la curva primitiva; con el fin de obtener el corte adecuado del diente, el espacio entre el pie de dos dientes consecutivos se obtiene mediante un arco tangente a los flancos respectivos.

En el capítulo 4 se estudian las condiciones en las que se genera la curva base y se analiza la influencia del radio de curvatura de la curva primitiva sobre la altura permisible del pie del diente. Se utilizan las funciones del capítulo 3 como leyes de desplazamiento y se generan los dientes con el propósito de presentar la formación del punto singular en el pie del diente; el objetivo es el de verificar la influencia del radio de curvatura de la curva primitiva sobre la geometría de la curva base y la máxima altura del pie del diente disponible.

En el capítulo 5 se estudia el periodo del contacto entre un par de dientes; para su determinación se establecen tanto las condiciones en las que se inicia el contacto como aquellas en las que finaliza. Una vez establecido el periodo de contacto de un diente es posible

calcular el recubrimiento del engranaje; se diferencian dos recubrimientos: el local y el promedio. Al estudiar el contacto entre cada par de dientes, se determina la línea de engrane para un par de dientes, entendiéndose por ésta la línea definida por el lugar geométrico de la sucesión de puntos de contacto entre cada par de dientes. Debido a su importancia en la determinación de los esfuerzos de contacto, desgaste y falla en los dientes, se determinan la máxima curvatura relativa entre los perfiles en contacto y la máxima velocidad de deslizamiento.

En el capítulo 6 se realiza el estudio dinámico del engranaje no circular en función del ángulo de giro de la rueda conductora. Bajo la hipótesis de operar con velocidad angular constante en la rueda conductora y con par constante sobre el eje de la rueda conducida, se determinan las reacciones en los apoyos fijos de las ruedas dentadas y el par motor requerido en la rueda conductora; también se estudia la fuerza debido al contacto entre las ruedas dentadas. Con el fin de comprobar la ventaja de los engranajes no circulares sobre los mecanismos articulados, desde el punto de vista dinámico, se compara la fluctuación del par motor requerido en el eslabón conductor y la variación de las reacciones en los apoyos fijos en ambos mecanismos bajo las mismas condiciones de operación.

En el capítulo 7 se presenta la comprobación experimental del par motor requerido en el funcionamiento del mecanismo articulado y en el engranaje no circular. Para esto, se utilizan dos motores de corriente continua que se instalan uno en el eje del eslabón conductor y el otro en el eje del eslabón conducido. El motor que se instala en el eje del eslabón conductor se alimenta con tensión constante, de esta forma el eslabón conductor gira con velocidad angular nominalmente constante; el motor del eje conducido se alimenta con intensidad constante, de esta forma se aplica un par nominalmente constante en el eje del eslabón conducido. Se describe el montaje de ambos mecanismos, los controladores que se utilizan y la instrumentación requerida para la toma de datos. Se realiza un estudio de las resistencias pasivas del sistema que son el resultado de la fricción en el motor y en el reductor. Finalmente se analizan los resultados obtenidos y se comparan con los resultados del estudio teórico.

En el capítulo 8 se presentan las conclusiones de la presente tesis, se dan algunas recomendaciones y se proponen posibles trabajos futuros relacionados con el diseño de los engranajes no circulares.