



**UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CATALUÑA**  
Escuela Técnica Superior de Ingeniería Industrial de Barcelona  
Departamento de Ingeniería Mecánica

Tesis Doctoral

**APORTE AL DISEÑO DE ENGRANAJES NO CIRCULARES  
CILÍNDRICOS RECTOS**

Presentada por

**HÉCTOR FABIO QUINTERO RIAZA**

Directores

**Dr. Salvador Cardona Foix**  
**Dra. Lluïsa Jordi Nebot**

Barcelona, 2006

## CAPÍTULO 4

### PERFIL DEL DIENTE

En este capítulo se estudian las relaciones cinemáticas que permiten generar el perfil completo del diente mediante un proceso analítico que utiliza el ángulo de giro de la rueda conductora como única variable de entrada independiente. El método se basa en la simulación del proceso de corte del diente de las ruedas dentadas en un engranaje no circular cilíndrico recto utilizando como herramienta de corte una cremallera estándar, tal como se ilustra en la figura (4.1); las coordenadas del perfil del diente se obtienen en un sistema coordenado fijo a la rueda.

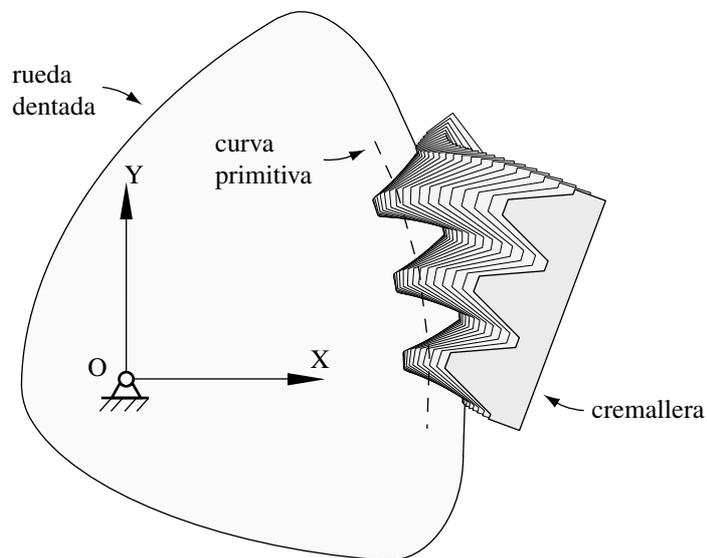


Figura 4.1 Corte del diente de una rueda cilíndrica no circular

Para dimensionar el diente, se utilizan dos curvas –que se corresponden con las curvas de addendum y de dedendum– donde se ubican, respectivamente, la cabeza y el pie del diente.

Ambas curvas se toman como curvas offset de la curva primitiva. Con el propósito de garantizar un adecuado mecanizado, el pie del diente se redondea con un arco circular tangente a los flancos adyacentes de los dos dientes consecutivos.

Como casos de estudio se presentan las ruedas dentadas que cumplen las leyes de desplazamiento que se analizan en el capítulo 3 y en el caso de las ruedas que cumplen la ley de Bézier del apartado (3.3) se muestran las ruedas mecanizadas.

En el proceso de generación del diente, es necesario limitar la altura del pie del diente ya que si es muy alta no se obtendría esta altura y se formaría un punto singular en el pie del diente, que se caracteriza por la formación de un segundo ramal en el flanco del diente. Con el propósito de justificar la necesidad de limitar la altura del pie del diente, a continuación se supone que en el proceso de generación se obtiene un diente de la rueda conductora con un segundo ramal en el pie del diente. Aunque el segundo ramal en el pie del diente de la rueda conductora sería eliminado en el proceso de corte, la cabeza del diente correspondiente de la rueda conducida penetraría el pie del diente de la rueda conductora y por ende debilitaría al diente; este segundo ramal también dificultaría el corte de la rueda mediante control numérico y la creación del arco circular del pie del diente.

Al determinar la curva base –definido como el lugar geométrico donde se generan los puntos singulares en el pie del diente– se limita la máxima altura del pie del diente con que se puede generar el perfil sin irregularidades; esta máxima altura se denominará en esta tesis como *altura permisible del diente*. Con la menor de estas alturas se estima el mínimo número de dientes requerido en cada rueda para evitar la formación de puntos singulares en el pie del diente.

En este capítulo se estudian las condiciones en las que se generan los puntos singulares sobre el pie del diente en los flancos derecho e izquierdo y se obtiene la curva base de ambos flancos en las ruedas conductora y conducida. También se estudia la influencia del radio de curvatura de la curva primitiva sobre la altura permisible del diente. Como casos de estudio se consideran las ruedas dentadas que satisfacen las leyes de desplazamiento del capítulo 3. Para estas ruedas dentadas también se estima el mínimo número de dientes requerido con el que se obtendrían dientes sin irregularidades en el pie del diente.

### 4.1 PRINCIPIO DE DISEÑO

Los dientes se generan de la simulación del proceso de corte utilizando como herramienta de corte dos cremalleras de dientes rectos simétricas conjugadas, mostradas en la figura (4.2.a). Conceptualmente, cada cremallera engrana con una de las ruedas de modo que se mantiene la tangencia entre las cuatro curvas primitivas y cada cremallera corta el diente de la respectiva rueda conjugada. Además, cada cremallera rueda sin deslizar sobre la curva primitiva de la respectiva rueda conjugada; así pues, la curva primitiva de las cremalleras gira de acuerdo con la orientación del vector tangente de la curva primitiva que pasa por el centro instantáneo de rotación relativo.

Se elige una cremallera normalizada –tal como se ilustra en la figura (4.2.b)– como herramienta de corte de los dientes. La geometría básica de la cremallera consiste en dos flancos rectos que forman un ángulo de presión  $\alpha$  con respecto a la curva primitiva de la cremallera.

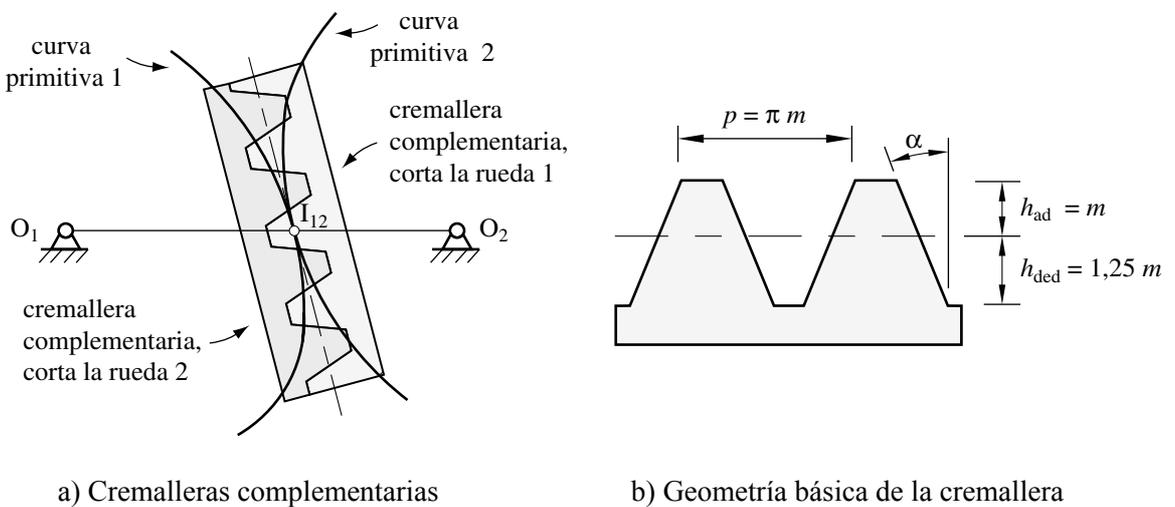


Figura 4.2 Principio de diseño del engranaje no circular

### 4.2 GENERACIÓN DEL PERFIL DEL DIENTE

El perfil del diente se obtiene de la simulación de un movimiento de rodadura sin deslizamiento de la curva primitiva de la cremallera sobre la curva primitiva de la respectiva rueda conjugada. El perfil del diente de la rueda es la curva que envuelve al perfil del diente

de la cremallera cuando, en el proceso de corte, ésta rueda sin deslizar sobre la curva primitiva de la rueda. La curva evolvente es tangente al flanco del diente de la cremallera que corta el diente de la rueda y la normal común de los perfiles en el punto de contacto intercepta el centro instantáneo de rotación relativo.

El perfil del diente puede darse por medio de una expresión matemática de la curva evolvente generada desde una curva primitiva o mediante una simulación del proceso de corte en el que se determinan la posición del centro instantáneo de rotación relativo entre la cremallera y la rueda, y la orientación de las curvas primitivas de la cremallera y de la rueda cuando se corta un diente. El segundo método es más simple y más fácil de entender que el primero por lo que en esta tesis se prefiere para obtener un modelo que genere el perfil del diente. El proceso con el que se genera el perfil del diente para ambas ruedas es muy similar, por esto, solo se presenta el caso de la rueda conductora.

En la descripción del modelo que genera el perfil del diente, se utilizan dos sistemas coordenados: un sistema global fijo  $O_0X_0Y_0$  y un sistema  $O_1X_1Y_1$  fijo a la rueda, tal como se presenta en la figura (4.3). Las coordenadas del perfil del diente se obtienen al observar el contacto entre la cremallera y la rueda en el sistema  $O_1X_1Y_1$ . La figura (4.3) presenta una posición inicial de referencia del modelo.

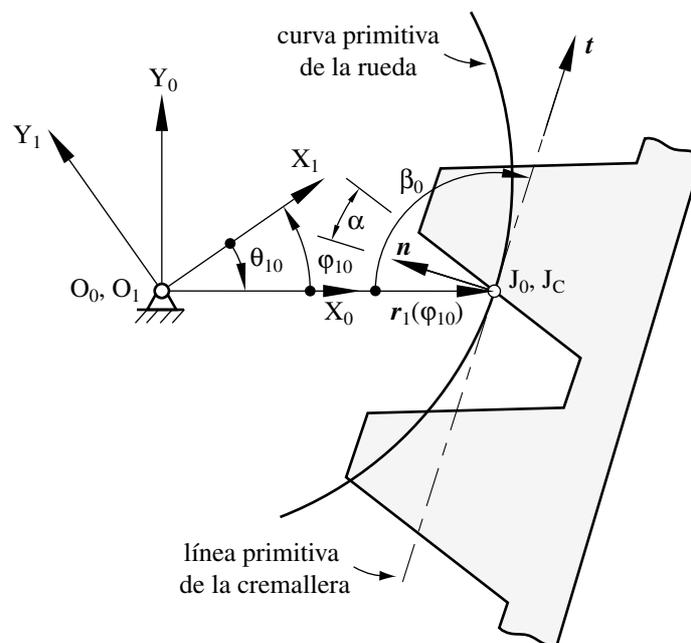


Figura 4.3 Configuración inicial para el proceso de corte

El punto  $J_0$  es el punto de contacto inicial entre la rueda y la cremallera que corresponde con un ángulo de giro de la rueda conductora  $\varphi_{10}$ . Este punto se localiza sobre la curva primitiva de la rueda y la posición angular del vector  $\mathbf{O}_1\mathbf{J}_0$ , referenciada al sistema  $O_1X_1Y_1$ , es  $\theta_{10}$ ; el punto  $J_0$  es el centro instantáneo de rotación relativo en la posición mostrada. El punto  $J_C$  es un punto geométrico fijo coincidente con el punto  $J_0$  en la posición inicial.

Para garantizar un corte adecuado del diente, la línea primitiva de la cremallera debe ser en todo instante coincidente con el vector tangente de la curva primitiva de la rueda en el centro instantáneo de rotación relativo entre la cremallera y la rueda; la orientación del flanco del diente de la cremallera se determina mediante el ángulo de presión de la cremallera. Con esta condición se garantiza que la normal del perfil del diente en el punto de contacto entre la cremallera y la rueda pase por el centro instantáneo de rotación relativo, ya que el perfil del diente de la cremallera es tangente al perfil del diente de la rueda. El ángulo  $\beta_0$  establece la orientación inicial de la línea primitiva de la cremallera respecto al vector  $r(\varphi_{10})$ .

La figura (4.4) presenta una segunda posición en el proceso de generación; esta posición se corresponde con la rueda después de girar el ángulo  $\varphi_{aux}$  en sentido antihorario desde la posición inicial de referencia.

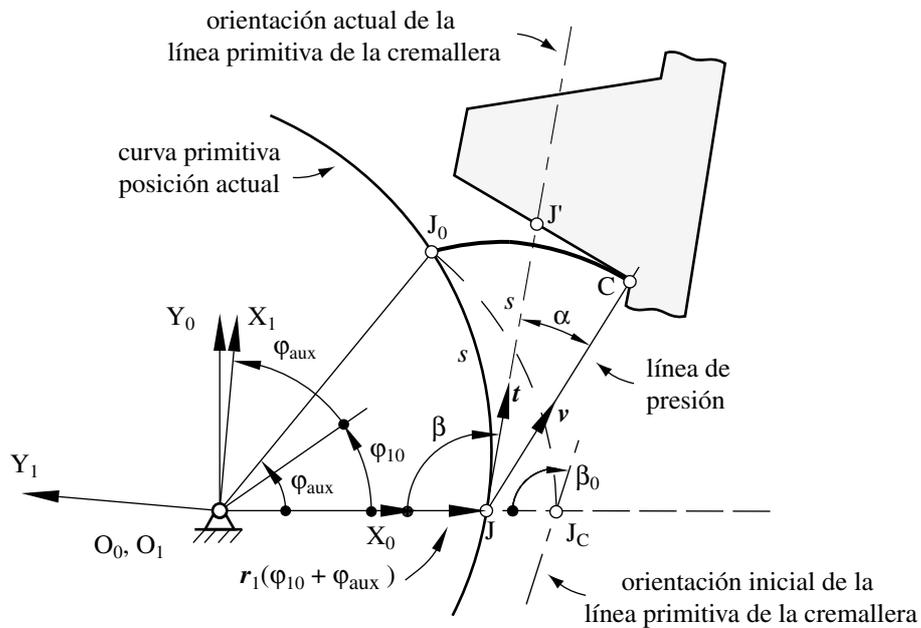


Figura 4.4 Geometría durante el corte del diente

El centro instantáneo de rotación relativo entre la cremallera y la rueda cambia continuamente; si dicho cambio se observa en el sistema  $O_1X_1Y_1$  fijo a la rueda, ocurre sobre la curva primitiva desde el punto  $J_0$  hasta el punto  $J$ ; por otra parte, si se observa en el sistema  $O_0X_0Y_0$ , el centro instantáneo de rotación cambia a lo largo de la línea de centros desde el punto  $J_C$  hasta el punto  $J$ . Para conservar la tangencia respecto a la curva primitiva, la cremallera cambia su orientación con respecto a la línea de centros desde el ángulo  $\beta_0$  hasta el ángulo  $\beta$ .

El punto del flanco del diente de la cremallera que inicialmente estaba en contacto con la rueda, se encuentra sobre la línea primitiva de la cremallera, que coincide con el vector tangente  $-\mathbf{t}$ . De acuerdo con la condición de rodadura sin deslizamiento la distancia entre los puntos  $J$  y  $J'$  es la longitud del arco de la curva primitiva entre los puntos  $J_0$  y  $J$ . El flanco del diente de la rueda es tangente al flanco activo del diente de la cremallera, por lo tanto, el nuevo punto de contacto entre la cremallera y la rueda –punto  $C$  en la figura (4.4)– se localiza sobre la dirección del vector unitario  $-\mathbf{v}$  que se obtiene al girar al vector tangente unitario  $-\mathbf{t}$  el ángulo de presión de la cremallera  $-\alpha$  alrededor del centro instantáneo de rotación relativo  $J$ ; de esta forma se garantiza la perpendicularidad entre la normal del perfil del diente de la rueda y el flanco del diente de la cremallera. La dirección de la fuerza de contacto entre los dientes es en la dirección del vector  $\mathbf{v}$ ; por ende a la recta  $JC$  se le denomina *línea de presión*. La posición del nuevo punto de contacto con respecto al sistema  $O_1X_1Y_1$ , que se define por el vector  $\mathbf{O}_1\mathbf{C}$ , se obtiene mediante la siguiente expresión:

$$\mathbf{O}_1\mathbf{C} = \mathbf{O}_1\mathbf{J} + (s \cos\alpha)\mathbf{v} \quad (4.1)$$

El vector  $\mathbf{O}_1\mathbf{J}$  es el vector  $r_1(\varphi_{10} + \varphi_{\text{aux}})$ , el parámetro  $s$  es la longitud del arco de la curva primitiva entre los puntos  $J_0$  y  $J$ , el vector  $\mathbf{v}$  se obtiene del vector tangente,  $\mathbf{v} = \mathbf{t} e^{-j\alpha}$ . En este trabajo se utiliza la notación compleja en la descripción de un vector debido a sus propiedades en las operaciones matemáticas. La longitud del arco se obtiene mediante una operación integral:

$$s = \left| \int_{\varphi_{10}}^{\varphi_{10} + \varphi_{\text{aux}}} \sqrt{r_1^2 + (r_1')^2} d\varphi_1 \right| \quad (4.2)$$

Los puntos del perfil del diente que se localizan entre las curvas de dedendum y primitiva requieren una modificación del anterior planteamiento, ya que su generación ocurre en una

posición de giro previa a la posición angular inicial de referencia  $\varphi_{10}$ . La figura (4.5) presenta la geometría que permite obtener el modelo para la generación de estos puntos.

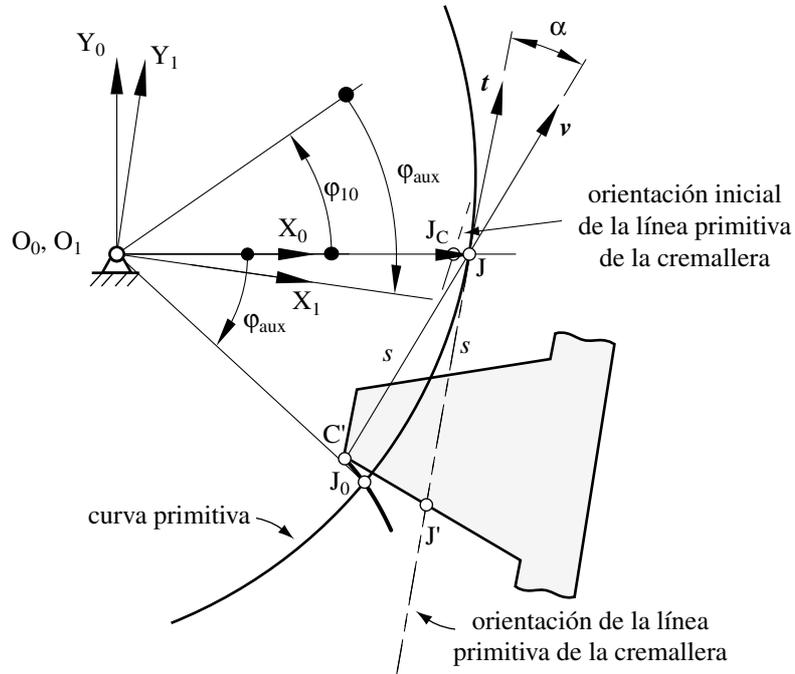


Figura 4.5 Generación del perfil del diente para puntos por debajo de la curva primitiva

La posición del punto de contacto entre el diente de la rueda dentada y el diente de la cremallera –punto  $C'$  de la figura (4.5)– observado en el sistema  $O_1X_1Y_1$ , se obtiene mediante la siguiente expresión:

$$\mathbf{O}_1\mathbf{C}' = \mathbf{O}_1\mathbf{J} - (s \cos\alpha)\mathbf{v} \quad (4.3)$$

donde  $s$  se calcula mediante la integral de línea dada por la expresión (4.2) evaluado entre los límites  $\varphi_{10}$  y  $\varphi_{10} - \varphi_{aux}$ .

A partir de una posición inicial de referencia, posición en la que el punto de contacto se encuentra sobre la línea de centros que corresponde a la posición  $\varphi_{10}$ , se obtiene el perfil del diente del flanco izquierdo mediante las expresiones (4.1), (4.2) y (4.3).

El flanco derecho se genera mediante un proceso similar. La figura (4.6) presenta una posición inicial de referencia en el proceso de generación del flanco derecho en la que el punto de contacto entre la rueda y la cremallera está sobre la línea de centros. La posición inicial de referencia de la rueda se corresponde con la que se obtiene después de girar  $\varphi_{10}$ ; el punto  $J_0$  es el punto del flanco derecho del diente que se encuentra sobre la curva primitiva de la rueda. En este planteamiento se utiliza a  $\varphi_{10}$  como posición inicial de referencia en el modelo para generar ambos flancos, sin embargo la posición de referencia en cada flanco diente son diferentes y debe determinarse –apartado (4.5).

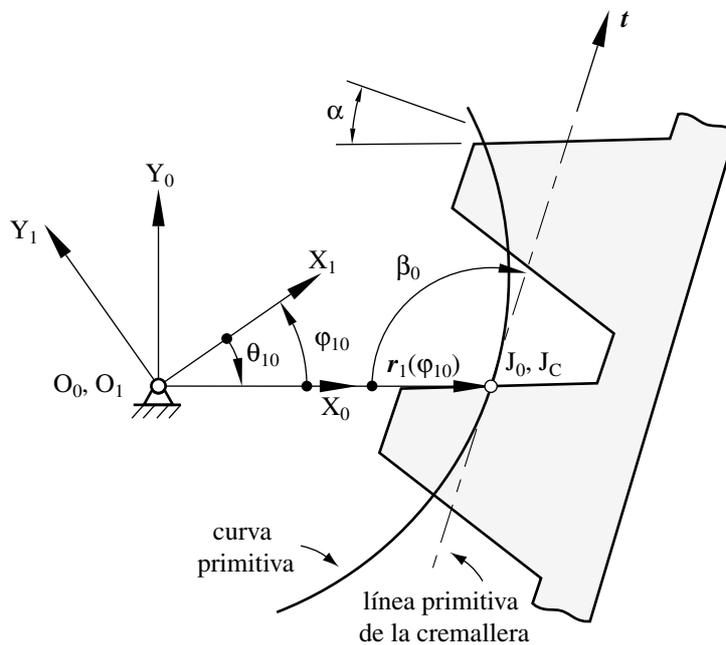


Figura 4.6 Posición inicial en la generación del flanco derecho del diente

La figura (4.7) muestra la geometría entre la línea primitiva de la cremallera y la curva primitiva de la rueda en una segunda posición que se corresponde con la que se obtiene cuando la rueda gira  $\varphi_{aux}$  en sentido horario desde la posición inicial de referencia; se establecerán las expresiones del flanco derecho del diente basándose en esta geometría. El centro instantáneo de rotación relativo entre la cremallera y la rueda se encuentra en  $J$  y el punto  $C$  es el nuevo punto de contacto; este punto se localiza sobre el flanco derecho del diente de la cremallera sobre la dirección del vector unitario  $\mathbf{v}_r$ , que se obtiene después de girar al vector tangente  $-\mathbf{t}$  el ángulo de presión de la cremallera en sentido antihorario alrededor del punto  $J$ ,  $\mathbf{v}_r = \mathbf{t} e^{j\alpha}$ . El punto inicial de contacto de la cremallera se localiza en el

punto  $J'$ ; la distancia sobre la línea primitiva de la cremallera entre los puntos  $J$  y  $J'$  es la longitud del arco de la curva primitiva  $-s-$  entre los puntos  $J_0$  y  $J$ , debido a la condición de rodadura pura entre la rueda y la cremallera.

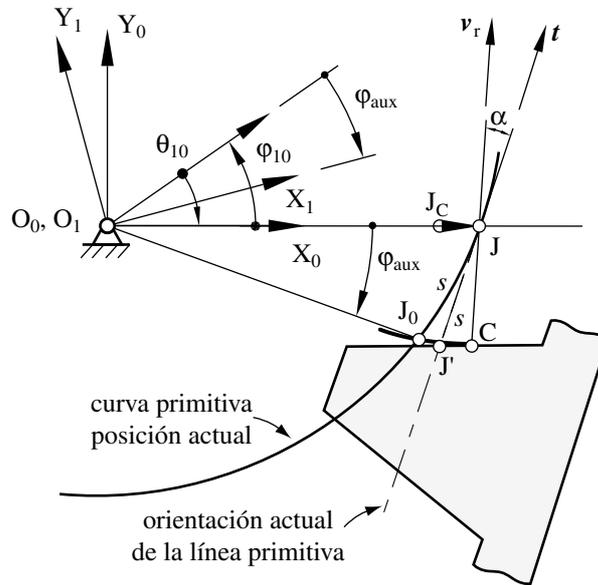


Figura 4.7 Geometría del flanco derecho del diente

Las expresiones con las que se obtiene el flanco derecho del diente son:

Para los puntos del diente que se localizan entre las curvas de addendum y primitiva:

$$\mathbf{O}_1\mathbf{C} = \mathbf{O}_1\mathbf{J} - (s \cos \alpha) \mathbf{v}_r \tag{4.4}$$

Para los puntos del diente que se localizan entre las curvas de dedendum y primitiva:

$$\mathbf{O}_1\mathbf{C} = \mathbf{O}_1\mathbf{J} + (s \cos \alpha) \mathbf{v}_r \tag{4.5}$$

siendo  $s$  la longitud de la curva primitiva desde el centro instantáneo de rotación relativo inicial  $-J_0-$  entre la cremallera y la rueda y el centro instantáneo de rotación relativo actual  $-J-$ ; esta longitud se calcula mediante:

$$s = \left| \int_{\varphi_{10}}^{\varphi_{10} \mp \varphi_{aux}} \sqrt{r_1^2 + (r_1')^2} d\varphi_1 \right| \tag{4.6}$$

El signo negativo en el límite superior de la integral dada por (4.6) se corresponde con la generación de la cabeza del diente –expresión (4.4)– y el positivo con la generación del pie del diente –expresión (4.5).

Dado el punto del diente sobre la curva primitiva  $J_0$ , con una posición angular de referencia  $\theta_{10}$  del vector  $\mathbf{O}_1\mathbf{J}_0$ , referido al sistema coordenado  $O_1X_1Y_1$ , que se corresponde con un ángulo de giro de la rueda conductora  $\varphi_{10}$ , se obtienen las coordenadas del flanco derecho del diente de la rueda conductora mediante (4.4), (4.5) y (4.6). En estas expresiones  $\mathbf{O}_1\mathbf{J}$  representa al vector  $r_1(\varphi_{10} \pm \varphi_{aux})$  dado por la expresión (3.53), el signo negativo se corresponde con (4.4) y el positivo con (4.5); la longitud de la curva primitiva depende de los términos  $r_1$  y  $r_1'$  y se determinan, respectivamente, mediante la expresión (3.51) y de su primera derivada con respecto a  $\varphi_1$ . El vector tangente de la curva primitiva de la rueda conductora se obtiene mediante la expresión (3.81).

El método de generación de los dientes de la rueda conducida es similar al de la rueda conductora. En este caso, el vector  $\mathbf{O}_2\mathbf{J}$  representa al vector  $r_2(\varphi_{10} \pm \varphi_{aux})$  dado por la expresión (3.55); la longitud del arco de la curva primitiva de la rueda conducida se calcula de manera similar al cálculo de la longitud de la curva primitiva de la rueda conducida mediante la integral de línea dada por (3.90), con la modificación respectiva de sus límites; el vector tangente  $t_2$  se determina mediante la expresión (3.83). La coordenada angular del vector  $\mathbf{O}_2\mathbf{J}$ , representada como  $\theta_2$  en la figura (3.1), referido a un sistema coordenado  $O_2X_2Y_2$  fijo a la rueda conducida, es el argumento de la expresión (3.55).

### 4.3 CURVAS DE ADDENDUM Y DE DEDENDUM

Para obtener las dimensiones del diente se utiliza la curva primitiva como curva de referencia; de esta forma se mide la altura de la cabeza del diente y la altura del pie del diente desde la curva primitiva y sobre la dirección del vector normal de la curva primitiva. En la figura (4.8) se presenta el procedimiento con que se obtienen las coordenadas de la cabeza del diente –punto  $C_{ad}$ – durante el proceso de generación. El punto  $J_{ad}$  de la curva primitiva es el punto de referencia para el punto  $C_{ad}$  del flanco del diente, y  $\mathbf{n}$  es el vector normal de la curva primitiva en  $J_{ad}$ .

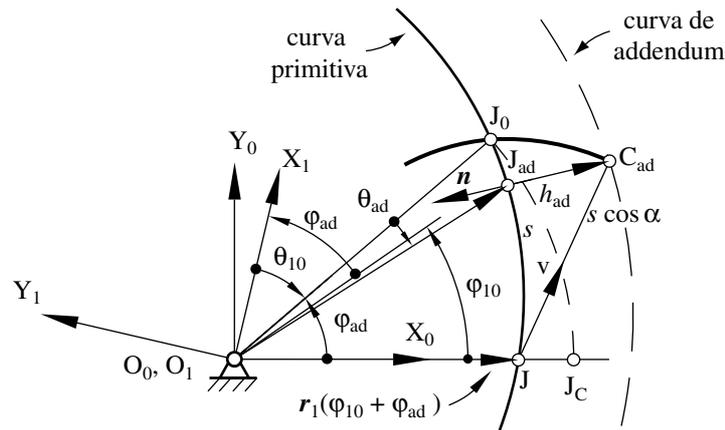


Figura 4.8 Curva de addendum

El punto  $J_0$  de la curva primitiva es el punto inicial de contacto en el proceso de generación y coincide con el punto geométrico  $J_C$  en la posición inicial –que corresponde a un ángulo de giro de la rueda  $\varphi_{10}$ ; el punto  $J$  es el centro instantáneo de rotación relativo entre la rueda y la cremallera para la posición mostrada. Las variables angulares utilizadas en la descripción del modelo son:  $\varphi_{ad}$  ángulo de rotación de la rueda desde la posición inicial de referencia que se requiere para generar la cabeza del diente;  $\theta_{ad}$  ángulo que forman los vectores  $\mathbf{O}_1\mathbf{J}_0$  y  $\mathbf{O}_1\mathbf{J}_{ad}$ . La cabeza del diente se obtiene cuando en el proceso de generación se cumple:

$$\mathbf{O}_1\mathbf{J} + (s \cos\alpha)\mathbf{v} = \mathbf{O}_1\mathbf{J}_{ad} - h_{ad}\mathbf{n} \quad (4.7)$$

La expresión (4.7) es una ecuación vectorial, por lo tanto, debe cumplirse en magnitud y argumento. En esta expresión,  $s$  es la longitud del arco de la curva primitiva cubierto por el ángulo  $\varphi_{ad}$  entre los ángulos  $\varphi_{10}$  y  $\varphi_{10} + \varphi_{ad}$ ;  $\varphi_{ad}$  es una de las incógnitas. La coordenada angular del vector  $\mathbf{O}_1\mathbf{J}_{ad}$  referido al sistema coordenado  $O_1X_1Y_1$  es  $\theta_{10} + \theta_{ad}$ ; la segunda incógnita de la ecuación vectorial (4.7) es  $\theta_{ad}$ . Para un diente cuya posición inicial de referencia se corresponde con un ángulo de giro  $\varphi_{10}$  se implementa un procedimiento numérico que determina las variables  $\varphi_{ad}$  y  $\theta_{ad}$  que satisfacen la ecuación (4.7). Se genera el perfil del diente hasta que se cumple la condición anterior.

La generación del punto del pie del diente se determina de manera similar al caso de la generación de la cabeza del diente. En la figura (4.9) se representa la situación en la que se genera el pie del perfil del diente; ésta se obtiene después que la rueda gire el ángulo  $\varphi_{ded}$  en sentido horario desde la posición inicial de referencia; el ángulo de giro de la rueda en la

posición inicial de referencia es  $\varphi_{10}$ . El punto  $C_{\text{ded}}$ , ubicado sobre la curva de dedendum, se obtiene a partir del punto  $J_{\text{ded}}$  de la curva primitiva en la dirección de su vector normal,  $\mathbf{n}$ ; este punto se genera cuando se establece la siguiente condición:

$$\mathbf{O}_1\mathbf{J} - (s \cos\alpha)\mathbf{v} = \mathbf{O}_1\mathbf{J}_{\text{ded}} + h_{\text{ded}}\mathbf{n} \quad (4.8)$$

siendo  $s$  la longitud del arco de la curva primitiva entre los puntos  $J$  y  $J_{\text{ded}}$  que se calcula mediante la integral de línea dada por (4.2) entre los ángulos  $\varphi_{10}$  y  $\varphi_{10} - \varphi_{\text{ded}}$ .

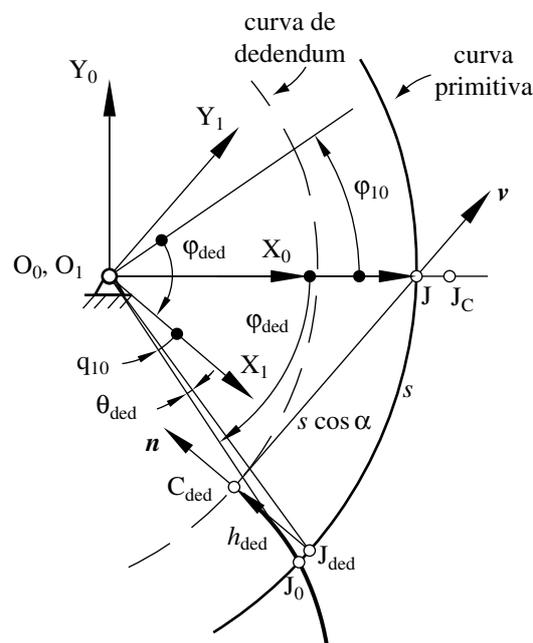


Figura 4.9 Curva de dedendum

La expresión (4.8), de manera similar a la expresión (4.7), es una ecuación vectorial con dos incógnitas. El ángulo  $\varphi_{\text{ded}}$ —ángulo de giro necesario para generar el pie del diente— es una de las incógnitas. La coordenada angular del vector  $\mathbf{O}_1\mathbf{J}_{\text{ded}}$  referido al sistema coordenado  $O_1X_1Y_1$  es  $\theta_1 - \theta_{\text{ded}}$ ; la segunda incógnita de la ecuación (4.8) es  $\theta_{\text{ded}}$ .

De la misma manera que para la cabeza del diente, se implementa un procedimiento numérico que determina las variables  $\varphi_{\text{ded}}$  y  $\theta_{\text{ded}}$  que satisfacen la expresión vectorial (4.8). Para un diente con  $\varphi_{10}$  como posición de referencia, se genera el perfil del diente desde que se cumple la condición dada por (4.8).

Es posible definir las ruedas dentadas mediante una serie de puntos para su posterior mecanizado por fresado en una máquina CNC. El proceso de corte de los dientes requiere del redondeo del pie del diente tal que permita la trayectoria adecuada de la fresa durante el mecanizado. El redondeo del pie de diente se toma mediante un arco circular aproximadamente tangente a los flancos adyacentes de los dos dientes consecutivos. En la figura (4.10) se presentan las relaciones geométricas que permiten su construcción.

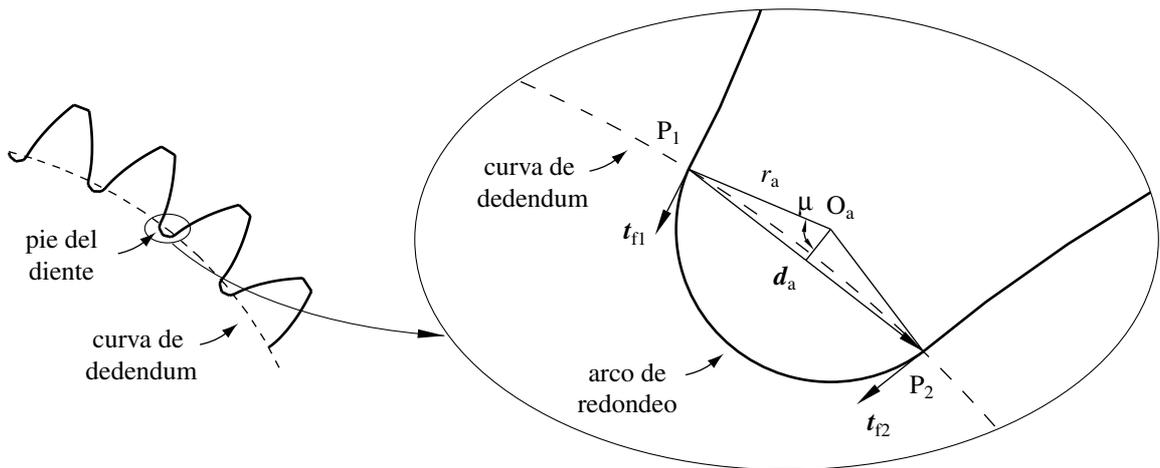


Figura 4.10 Redondeo del pie del diente

Los puntos  $P_1$  y  $P_2$  son los puntos de cada uno de los flancos localizados sobre la curva de dedendum y  $d_a$  es el vector entre ambos puntos. Los vectores  $t_{f1}$  y  $t_{f2}$  son tangentes al flanco sobre la curva de dedendum y se obtienen de la orientación del flanco de la cremallera en contacto con el flanco del diente. En el punto medio de la línea que une los puntos  $P_1$  y  $P_2$ , se traza una línea perpendicular sobre la que se ubica el centro  $O_a$ ; este punto se ubica de tal forma que la línea  $O_a P_1$  sea, perpendicular al vector  $t_{f1}$ ; el ángulo  $\mu_1$  sería el ángulo entre el vector  $t_{f1}$  y el vector  $d_a$ ; se puede encontrar el ángulo  $\mu_2$  entre los vectores  $t_{f2}$  y  $(-d_a)$  y tomar  $\mu$  como el promedio de los dos ángulos. La distancia entre los puntos  $O_a$  y  $P_1$  es  $r_a = (d_a/2)/\sin\mu$  y su dirección se obtiene al girar el vector  $d_a$  el ángulo  $(\pi/2 - \mu)$ .

Al promediar los ángulos  $\mu$  el arco de redondeo no es tangente a ninguno de los dos flancos en los puntos  $P_1$  ó  $P_2$ ; sin embargo, con esta aproximación el cambio entre la dirección del vector tangente del arco circular y la del vector tangente del flanco del diente en estos puntos es muy pequeño, ya que la diferencia entre los dos ángulos  $\mu$  es muy pequeña.

Adicionalmente esta región no es una zona de trabajo por lo que no se requiere de un procedimiento constructivo relativamente complejo para generar el arco circular de redondeo.

#### 4.4 RADIO DE CURVATURA DEL PERFIL DEL DIENTE

Los puntos del diente de la rueda se obtienen mediante las expresiones (4.1) y (4.3), para el flanco izquierdo, y (4.4) y (4.5) para el flanco derecho. Estas expresiones pueden agruparse mediante:

$$\begin{aligned} r_f &= r(\varphi_1) \pm (s \cos \alpha) t e^{-j\alpha} \\ r_f &= r(\varphi_1) \mp (s \cos \alpha) t e^{j\alpha} \end{aligned} \quad (4.9)$$

La primera expresión se corresponde con el flanco izquierdo y la segunda con el derecho, con el signo superior se obtienen los puntos del diente entre las curvas primitiva y addendum, con el signo inferior los puntos entre las curvas primitiva y dedendum. La variable  $r_f$  es equivalente a  $\mathbf{O}_1\mathbf{C}$  en las expresiones (4.1) y (4.3) y a  $\mathbf{O}_1\mathbf{C}'$  de las expresiones (4.4) y (4.5); los vectores  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{v}_r$  se reemplazan por su notación compleja. La expresión (4.9) tiene como única variable de entrada el ángulo de giro de la rueda conductora; así pues, el radio de curvatura del flanco del diente se expresa mediante:

$$\rho_f = \frac{|r_f'(\varphi_1)|^3}{|r_f''(\varphi_1) \times r_f'(\varphi_1)|} \quad (4.10)$$

En la figura (4.11) se presenta la variación del radio de curvatura del flanco izquierdo del diente de la rueda conductora del engranaje que cumple la curva de Bézier del apartado (3.3) como ley de desplazamiento, en una posición de referencia  $\varphi_{10} = 1$  rad. En esta figura,  $\varphi_1$  representa el ángulo de giro durante el proceso de generación del flanco del diente. Se observa un valor cero del radio de curvatura del flanco de este diente; en un engranaje circular, el radio de curvatura del punto del flanco del diente localizado sobre la circunferencia base es cero [1]. Esta particularidad está relacionada con la obtención de un punto singular y con la formación de un segundo ramal en el flanco del diente. En el apartado (4.6) se profundizan las condiciones en las que se genera este punto singular del pie del diente.

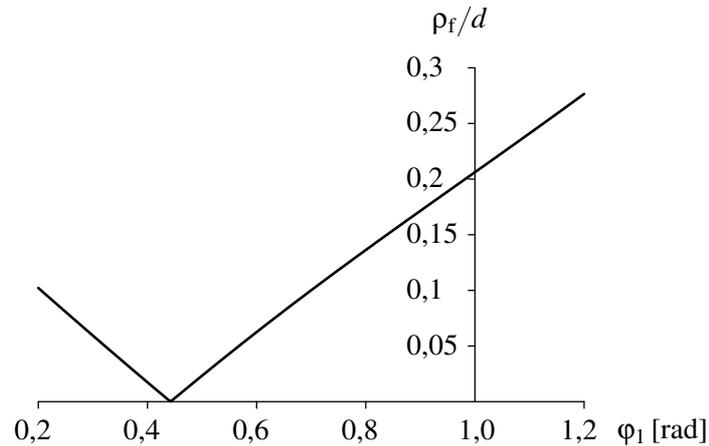


Figura 4.11 Ejemplo de la variación del radio de curvatura del flanco de un diente

#### 4.5 UBICACIÓN DEL DENTADO

En el diseño de engranajes no circulares con curvas primitivas cerradas, se debe cumplir que el perímetro de la curva primitiva debe ser un múltiplo del paso circular dado que debe ubicarse un número entero de dientes; de lo contrario, se tendría un diente incompleto en la rueda dentada. Las longitudes de las dos curvas primitivas se calculan mediante una operación integral, descrita en el apartado (3.10). Ambas longitudes, por razones evidentes, deben ser iguales en el caso en que los periodos de rotación sean iguales; en caso contrario, la relación de longitudes debe ser igual a la relación entre los periodos de rotación.

Para fijar la ubicación de los dientes, se requiere definir el número de dientes del engranaje, con lo que se calcula el paso,  $p = L_1 / z_1 = L_2 / z_2$ . Las longitudes de las curvas primitivas de las ruedas conductora y conducida  $-L_1$  y  $L_2$  se determinan mediante las expresiones (3.88) y (3.90),  $z_1$  y  $z_2$  son, respectivamente, el número de dientes de las ruedas conductora y conducida.

En la metodología propuesta, se requiere la ubicación de los dos flancos de cada uno de los dientes sobre la curva primitiva. El espesor del diente sobre la curva primitiva es la mitad del paso,  $p/2$ . Para colocar todos los flancos de la rueda conductora se requiere determinar el conjunto de ángulos  $\varphi_{11i}$  para los que el punto de contacto entre las curvas primitivas avanza medio paso iniciando desde  $\varphi_{111} = 0$ . Para ello debe cumplirse:

$$\frac{p}{2} = \int_{\varphi_{11i}}^{\varphi_{11(i+1)}} |d\mathbf{r}_1| \quad (4.11)$$

La posición angular de los dos flancos de cada diente de la rueda conductora, definida en el sistema  $O_1X_1Y_1$ , viene dada por la relación:  $\theta_{1i} = -\varphi_{11i}$ . El conjunto de ángulos  $\varphi_{11i}$  son los ángulos iniciales de referencia para la generación de cada flanco; para el diente  $i$ ,  $\varphi_{11(2i-1)}$  es la posición angular inicial de referencia del flanco izquierdo y con  $\varphi_{11(2i)}$  se obtienen las del flanco derecho.

Para el cálculo de la posición angular de los flancos de los dientes de la rueda conducida se tiene en cuenta que cada diente está situado entre dos dientes de la rueda conductora; así pues, se determina el conjunto de ángulos  $\varphi_{12i}$  de la rueda conducida equivalente al anterior tomando el avance sobre la curva primitiva desplazada medio paso. La posición angular de estos flancos, definida en el sistema  $O_2X_2Y_2$ , viene dada por la relación  $\theta_{2i} = \pi + f(\varphi_{12i})$ . En el conjunto de ángulos de referencia para la generación de cada flanco  $-\varphi_{12i}$  de la rueda conducida, para el diente  $i$ ,  $\varphi_{12(2i-1)}$  es la posición angular inicial de referencia del flanco derecho y  $\varphi_{12(2i)}$  es la del flanco izquierdo.

#### 4.6 OBTENCIÓN DE LA CURVA BASE

La figura (4.12) muestra el perfil de un conjunto de dientes de una rueda no circular que se generan tal como se describe en el apartado (4.2). Se observa que si no se limita el proceso de generación del perfil del diente se crea un segundo ramal de dicho perfil generándose un punto singular.

En esta tesis se define la curva base como el lugar geométrico de los puntos singulares del pie del diente; en la figura (4.12) se observa que cada flanco tiene una curva base diferente. Para la determinación de la condición en que se obtiene la curva base de la rueda conductora, en la figura (4.13.a) se presentan las relaciones geométricas en una configuración en la que se obtiene el punto singular del flanco izquierdo. Ya que la curva base del flanco derecho se obtiene con un procedimiento similar, solo se estudia el primer caso.

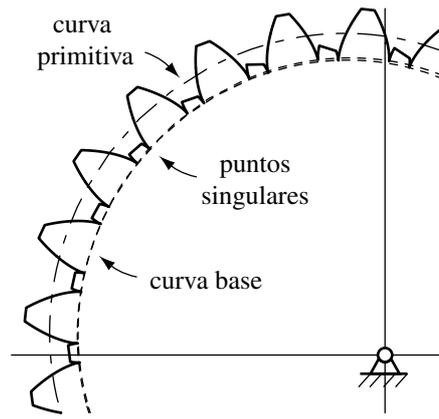


Figura 4.12 Formación de puntos singulares

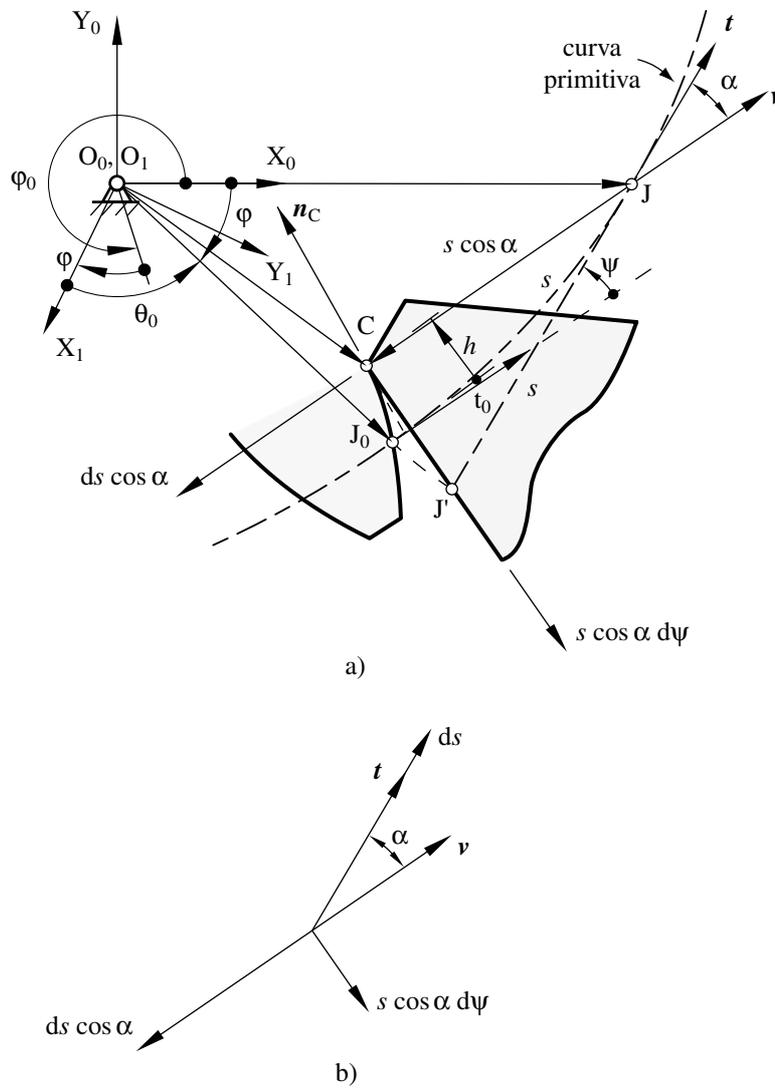


Figura 4.13 Relación en el proceso de generación

En la figura (4.13.a) el punto  $J_0$  es el punto del diente sobre la curva primitiva que sirve como punto de referencia y se genera con un ángulo de giro de referencia de la rueda conductora  $\varphi_0$ ; el punto  $J$  es el centro instantáneo de rotación relativo cuando se corta el punto  $C$  del diente;  $s$  es el arco de la curva primitiva comprendida entre los puntos  $J$  y  $J_0$ ;  $\varphi$  es el ángulo de giro en sentido horario de la rueda conductora, desde la posición de referencia, en la que se genera el punto  $C$ . La altura del pie del diente  $-h-$  se mide en la dirección del vector normal  $-\mathbf{n}_C-$  de la curva primitiva que pasa por el punto de corte, punto  $C$  de la figura (4.13.a), y se mide desde la curva primitiva hasta este punto;  $\psi$  representa el cambio de orientación del vector tangente de la curva primitiva en el centro instantáneo de rotación en el proceso de corte. El vector  $\mathbf{O}_1\mathbf{C}$  representa la posición del punto de contacto.

La condición de generación del punto singular se obtiene de la observación de la velocidad relativa entre la cremallera y la rueda; concretamente, cuando la velocidad relativa de la cremallera con respecto a la rueda es cero, ya que en esta posición se inicia un movimiento de retroceso del diente de la cremallera con respecto al diente de la rueda.

La velocidad del punto de contacto de la cremallera con respecto a la rueda se obtiene mediante:

$$\frac{d\mathbf{O}_1\mathbf{C}}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \left( \frac{d\mathbf{O}_1\mathbf{J}}{d\varphi} + \frac{d\mathbf{J}\mathbf{C}}{d\varphi} \right) \frac{d\varphi}{dt} \quad (4.12)$$

Esta expresión es cero si se cumple:

$$\frac{d\mathbf{O}_1\mathbf{C}}{d\varphi} = \frac{d\mathbf{O}_1\mathbf{J}}{d\varphi} + \frac{d\mathbf{J}\mathbf{C}}{d\varphi} = 0 \quad (4.13)$$

o

$$d\mathbf{O}_1\mathbf{C} = d\mathbf{O}_1\mathbf{J} + d\mathbf{J}\mathbf{C} = 0 \quad (4.14)$$

El vector  $\mathbf{O}_1\mathbf{J}$  representa la curva primitiva referido al sistema coordenado  $O_1X_1Y_1$  fijo a la rueda y coincide con el vector  $\mathbf{r}(\varphi)$ . Así pues, su variación es tangente a la curva primitiva y se expresa en la dirección del vector tangente:

$$d \mathbf{O}_1 \mathbf{J} = d \mathbf{r}(\varphi) = ds \mathbf{t} \tag{4.15}$$

La variación del vector  $\mathbf{JC}$  es el resultado de la suma de la variación de su módulo y la variación debida al cambio de la orientación del vector tangente:

$$d \mathbf{JC} = ds \cos \alpha (-\mathbf{v}) + s \cos \alpha d\psi (-\mathbf{v} e^{i\pi/2}) \tag{4.16}$$

En la figura (4.13.b) se representan los diferenciales de la expresión (4.16) y su orientación. De la suma de componentes de los diferenciales en la dirección del vector  $\mathbf{v}$  se obtiene una expresión trivial:

$$ds \cos \alpha - ds \cos \alpha = 0 \tag{4.17}$$

Esta expresión confirma la validez de la representación vectorial de los términos de (4.13). De la suma de componentes en la dirección perpendicular al vector  $\mathbf{v}$  se obtiene:

$$ds \sin \alpha - s \cos \alpha d\psi = 0 \tag{4.18}$$

El diferencial  $d\psi$  se obtiene a partir de la variación de la orientación del vector tangente de la curva primitiva. En la figura (4.14) se representa la aproximación de 2º orden de la curva primitiva alrededor del punto J.

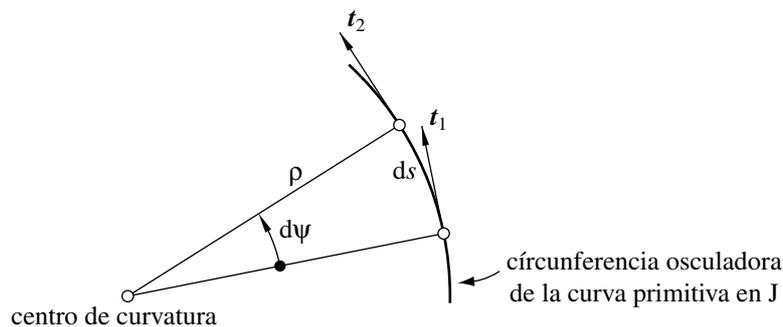


Figura 4.14 Diferencial  $d\psi$

De la figura puede observarse que la relación entre estos diferenciales es:



término ( $s \cos \alpha$ ) de la expresión (4.21), representado por la distancia  $JC_i$  en la figura (4.15), siendo  $s$  la longitud de la curva primitiva desde el punto inicial  $J_0$  hasta el punto  $J$ .

Basado en la figura (4.15) se obtienen las relaciones que permiten obtener la curva base en los dos flancos del diente. Los puntos de la curva base del flanco izquierdo se obtienen mediante la siguiente expresión:

$$\mathbf{r}_{b,I} = \mathbf{r} - \rho \sin \alpha \mathbf{t} e^{j\alpha} = \mathbf{r} - \rho \sin \alpha \mathbf{v} \quad (4.22)$$

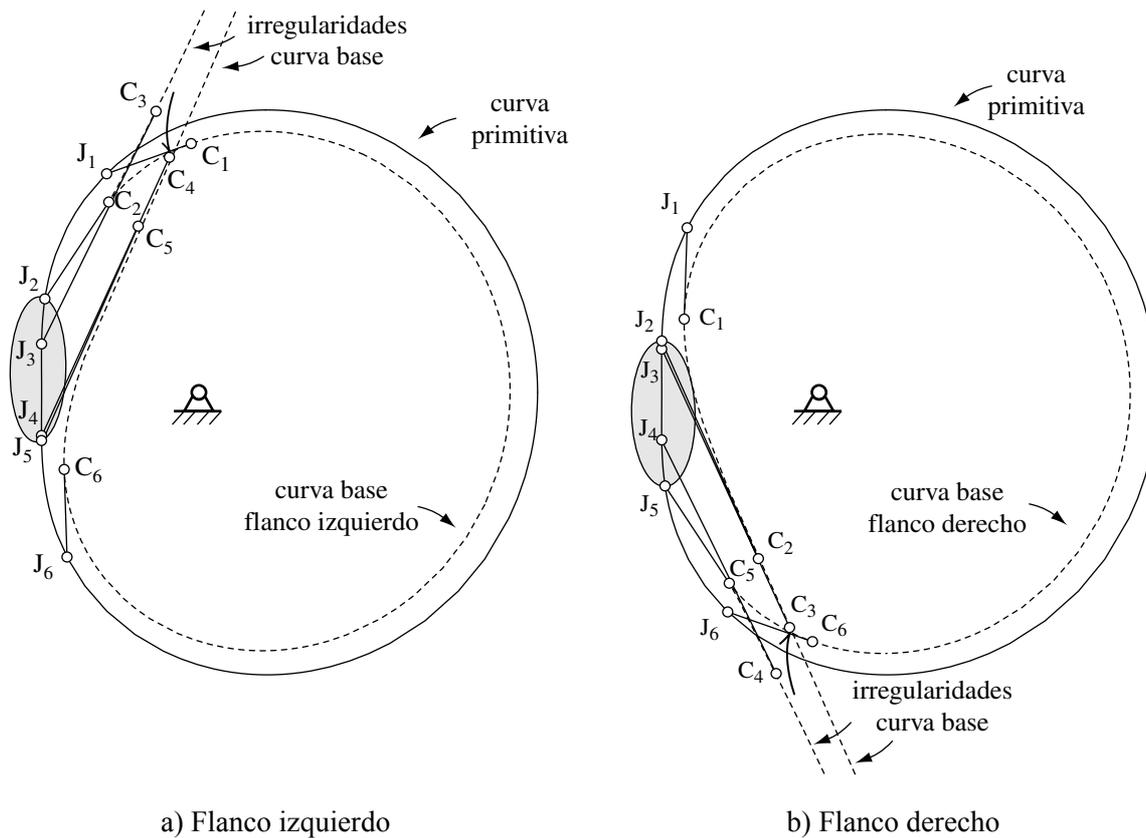
Similarmente, los puntos de la curva base del flanco derecho se obtienen mediante la siguiente expresión:

$$\mathbf{r}_{b,D} = \mathbf{r} + \rho \sin \alpha \mathbf{t} e^{j\alpha} = \mathbf{r} + \rho \sin \alpha \mathbf{v}_r \quad (4.23)$$

En este método gráfico, con un punto  $J$  de la curva primitiva se obtiene un punto  $C$  en cada uno de las curvas base de los dos flancos del diente mediante las expresiones (4.22) y (4.23); estas expresiones se derivan del cumplimiento de la expresión (4.21). Sin embargo, no todos los puntos de la curva primitiva generan puntos de la curva base al utilizar este procedimiento.

En la figura (4.16) se presentan las curvas base de los flancos izquierdo y derecho de la rueda conductora, que se obtienen mediante las expresiones (4.22) y (4.23), del engranaje que cumple la ley de desplazamiento dada por la ley armónica del apartado (2.2). En la figura (4.16.a) se presentan unas líneas de presión del flanco izquierdo  $J_i C_i$ , con  $i = 1, 2, \dots, 6$ , en la que el punto  $J_i$  es un punto de la curva primitiva y el punto  $C_i$  es el punto correspondiente de la curva base del flanco izquierdo que se obtiene mediante la expresión (4.22); también se muestra un flanco izquierdo generado tal que se forme un segundo ramal en este flanco. En la figura (4.16.b) se presenta algunas líneas de presión, un flanco derecho y la curva base del flanco derecho.

La región resaltada en gris en la figura (4.16.a), es un tramo de la curva primitiva con radios de curvatura muy grandes. En los puntos  $C_2$  y  $C_5$  se observan dos ramales con puntos generados por este método que tienden hacia el infinito; los puntos obtenidos mediante (4.22) que se localizan sobre estos ramales no son puntos singulares de ningún flanco y por ende, no pertenecen a la curva base del flanco izquierdo.



a) Flanco izquierdo

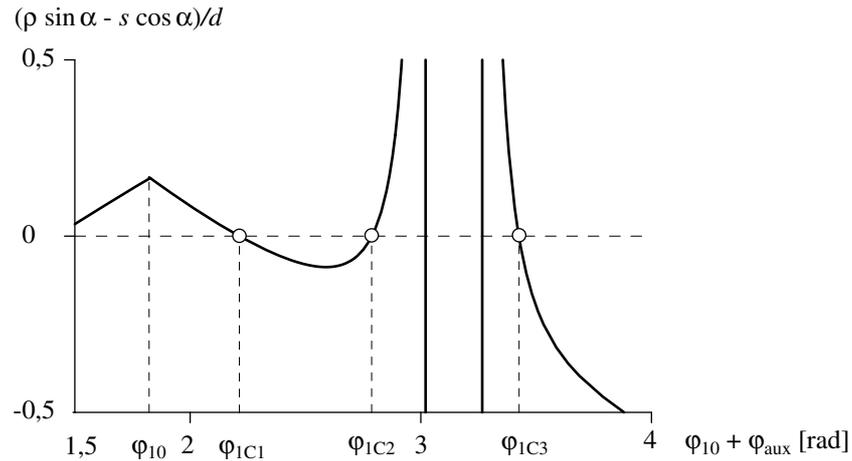
b) Flanco derecho

Figura 4.16 Curvas base de la rueda conductora mediante las expresiones (4.22) y (4.23)

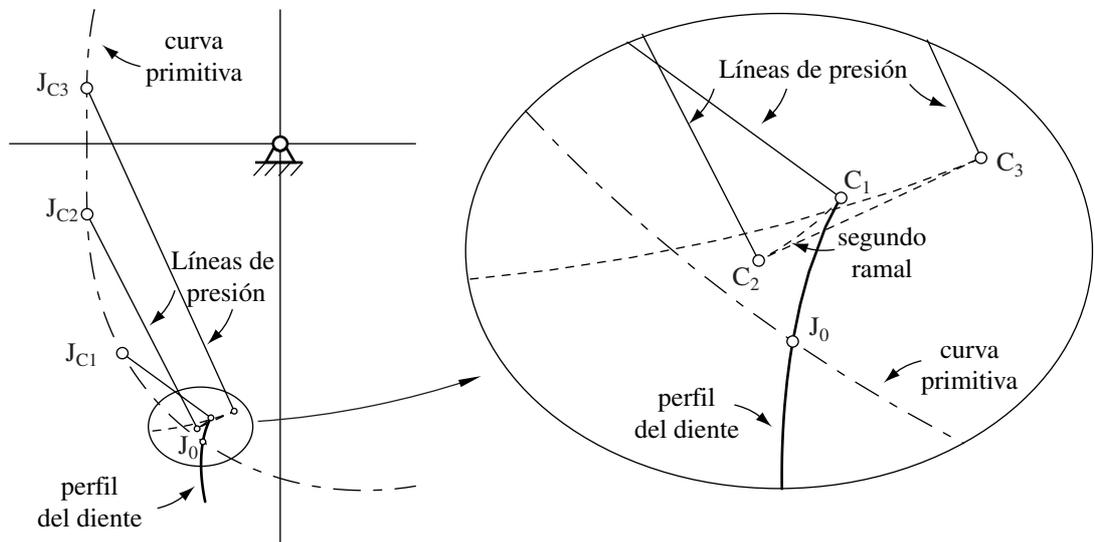
Por ejemplo el punto  $C_4$ , localizado por debajo del tramo de la curva base entre los puntos  $C_1$  y  $C_2$ , se genera con el punto  $J_4$  como centro instantáneo de rotación relativo entre la cremallera y la rueda. Este punto no es un punto de la curva base ya que, en el proceso de generación, antes se obtendría un punto singular localizado sobre la curva base entre los puntos  $C_1$  y  $C_2$ , tal como se observa con el flanco izquierdo de la figura (4.16.a); para este flanco, el centro instantáneo de rotación relativo entre la cremallera y la rueda cuando se genera el punto singular, se encuentra sobre la curva primitiva entre los puntos  $J_1$  y  $J_2$  por lo que se obtendría antes de que el centro instantáneo de rotación relativo entre la cremallera y la rueda se encuentre en  $J_4$ .

Con los puntos de la curva primitiva resaltados en gris no se obtienen puntos singulares lo que produce una discontinuidad en la curva base, y por ende un salto brusco de la curva base entre los puntos  $C_2$  y  $C_5$ . En la curva base del flanco derecho –figura (4.16.b)– se observan las mismas características en su geometría si se obtiene mediante (4.23).

Como se mencionó antes, con este método geométrico se obtiene un punto de la curva base cuando se satisface la condición dada por la expresión (4.21). En la figura (4.17) se presenta la evaluación del término  $(\rho \sin \alpha - s \cos \alpha) / d$  en un flanco derecho, generado en una posición inicial de referencia  $\varphi_{10} = 1,82$  rad. Se observa en la figura (4.17.a), que existen tres posiciones en el proceso de generación  $-\varphi_{1C1}$ ,  $\varphi_{1C2}$  y  $\varphi_{1C3}$  en la que se satisface (4.21).



a) Evaluación de la condición (4.21), ejemplo 1



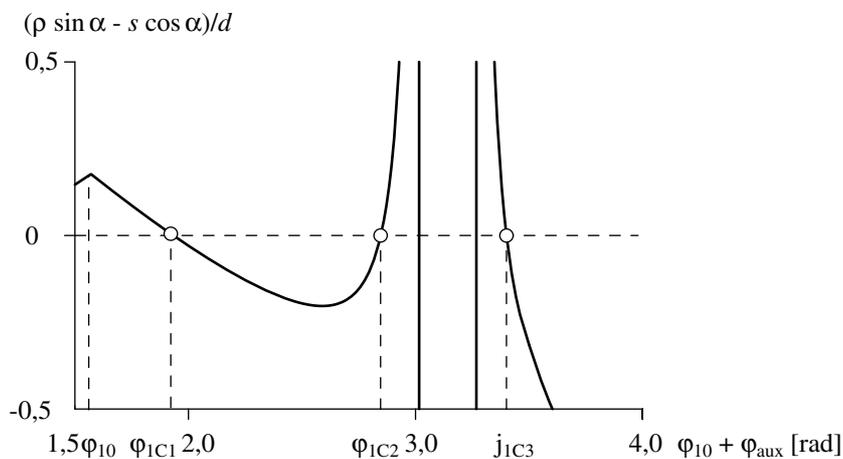
b) Generación de múltiples puntos que satisfacen (4.21) del ejemplo 1

Figura 4.17 Puntos generados en un perfil que satisfacen la condición (4.21), ejemplo 1

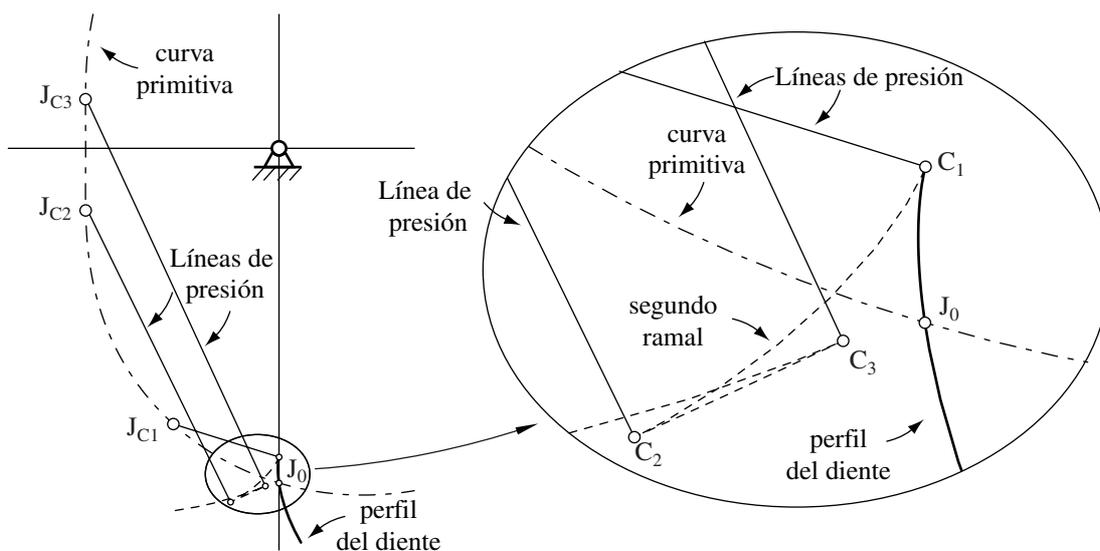
En la figura (4.17.b) se presenta el flanco generado con  $\varphi_{10} = 1,82$  rad como posición angular de referencia, los puntos  $J_{C1}$ ,  $J_{C2}$  y  $J_{C3}$  son los centros instantáneos de rotación entre la

cremallera y la rueda correspondientes cuando la rueda se encuentra en la posición angular de generación  $\varphi_{1C1}$ ,  $\varphi_{1C2}$  y  $\varphi_{1C3}$ , respectivamente; los puntos  $C_1$ ,  $C_2$  y  $C_3$  son los puntos generados correspondientes. El punto  $C_1$  es el único punto de la curva base ya que el proceso debe detenerse antes que se genere este punto; los puntos  $C_2$  y  $C_3$  se localizan sobre los dos ramales que tienden hacia el infinito de la figura (4.16.b).

En la figura (4.18) se presenta un segundo ejemplo de un flanco derecho que se genera en una posición inicial de referencia  $\varphi_{10} = \pi/2$  rad. Para este flanco, se observa en la figura (4.18.a) que existen tres posiciones de generación del flanco que cumplen con (4.21).



a) Evaluación de la condición (4.21), ejemplo 1



b) Generación de múltiples puntos que satisfacen (4.21) del ejemplo 1

Figura 4.18 Puntos generados en un perfil que satisfacen la condición (4.21), ejemplo 2

En la figura (4.18.b) se presenta el flanco generado correspondiente; en este caso los otros dos puntos generados, y que no pertenecen a la curva base, se ubican por fuera de la curva primitiva.

Si el radio de curvatura de la curva primitiva en J es muy grande o infinito, las curvas base que se obtienen por el método gráfico presentan irregularidades en su geometría. Con el fin de evitar estas irregularidades en la obtención de la curva base, debidas al reemplazo del radio de curvatura infinito en (4.22) y (4.23), a continuación se presenta un procedimiento alternativo que depende de variables finitas, concretamente del radio de la curva primitiva con sus dos primeras derivadas y de la longitud de un segmento de la curva primitiva, para las ruedas dentadas con radios de curvatura de la curva primitiva muy grandes o infinitos.

Reemplazando en la expresión (4.20) el radio de curvatura de la curva primitiva dado por la expresión (3.65) y el diferencial ds por

$$ds = \left( (r')^2 + r^2 \right)^{1/2} d\varphi \quad (4.24)$$

se obtiene simplificando el resultado:

$$\sin\alpha \left( (r')^2 + r^2 \right)^{1/2} d\varphi - s \cos\alpha \left( \frac{-r''r + r^2 + 2(r')^2}{(r')^2 + r^2} \right) d\varphi = 0 \quad (4.25)$$

ó:

$$\sin\alpha \left( (r_1')^2 + r_1^2 \right)^{1/2} - s \cos\alpha \left( \frac{-r_1''r_1 + r_1^2 + 2(r_1')^2}{(r_1')^2 + r_1^2} \right) = 0 \quad (4.26)$$

Se generan puntos singulares en el perfil del diente cuando en el proceso de generación se cumple la expresión (4.26). Este procedimiento alternativo al método gráfico propuesto por Litvin, tiene la ventaja que se basa en el proceso de generación y que busca el punto de la curva primitiva J más cercano al punto de generación de referencia  $J_0$  en el que se cumple la expresión (4.26). Este planteamiento no toma los otros puntos de la curva primitiva en que se satisfacen esta condición y, por ende, descarta el tramo de la curva primitiva con radios de curvatura muy altos que no generan puntos singulares; en el método gráfico se utilizan todos los puntos de la curva primitiva para obtener un punto de la curva base.

El punto de la curva base del flanco derecho se obtiene mediante un procedimiento similar utilizando la expresión (4.26). Dado un ángulo de referencia  $\varphi_{10}$ , se genera un punto singular del flanco izquierdo cuando la rueda gira  $\varphi_{b,I}$  en sentido horario; la longitud de la curva primitiva  $-s-$  de la expresión (4.26) se evalúa en el intervalo  $[\varphi_{10}, \varphi_{10} - \varphi_{b,I}]$ . En el flanco derecho, el punto singular se genera después que la rueda gira  $\varphi_{b,D}$  en sentido antihorario y la longitud de la curva se evalúa entre  $\varphi_{10}$  y  $\varphi_{10} + \varphi_{b,D}$ .

En el proceso de generación de la rueda conducida, la primera y segunda derivadas son con respecto a  $\varphi_2$ , en el capítulo 3 se presentan estas derivadas dadas por las expresiones (3.69) y (3.70). Después de reemplazar (3.69) y (3.70) en (4.25) se obtiene la condición de generación de los puntos singulares en la rueda conducida.

$$\sin\alpha \left( \left( \frac{r_2'}{f'} \right)^2 + r_2^2 \right)^{1/2} - s \cos\alpha \left( \frac{-r_2 \left( \frac{r_2''}{(f')^2} - \frac{r_2' f''}{(f')^3} \right) + r_2^2 + 2 \left( \frac{r_2'}{f'} \right)^2}{\left( \frac{r_2'}{f'} \right)^2 + r_2^2} \right) = 0 \quad (4.27)$$

La curva base se puede determinar, en forma aproximada, a partir de la distancia del punto del pie del diente generado a la curva primitiva. La figura (4.19) presenta la variación de la altura de flanco izquierdo del diente, con  $\varphi_{10} = 1$  rad como posición de referencia, de la rueda conductora del engranaje que cumple la curva de Bézier del apartado (3.3) como ley de desplazamiento.

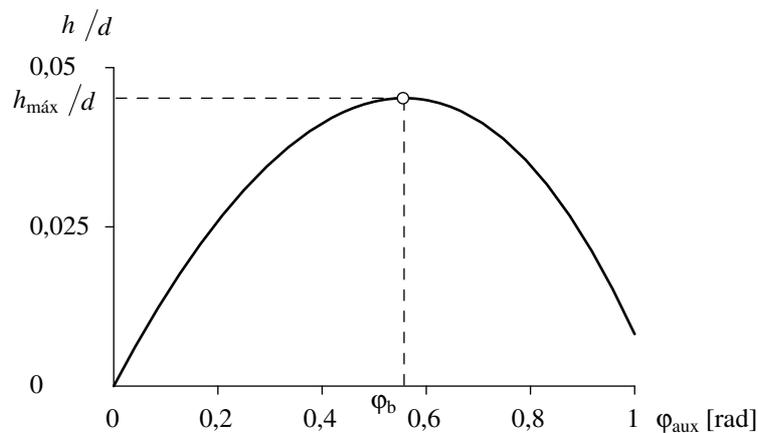


Figura 4.19 Altura de algunos puntos del pie del diente

En la figura (4.19), el ángulo  $\varphi_b$  es el ángulo de giro de la rueda, desde la posición de referencia  $\varphi_{10}$ , necesario para obtener el punto singular en el perfil del diente;  $h_{\max}$  es la altura permisible del diente. En el apartado (4.3) se describe el procedimiento con el que se genera el pie del diente. En el procedimiento de generación, se toma una posición inicial de referencia,  $\varphi_{10}$ , a partir de la cual la rueda gira el ángulo  $\varphi_{\text{aux}}$ . Si en el modelo se continúa con la generación del diente después de alcanzar la condición de punto singular, la distancia del punto generado hasta la curva primitiva disminuye.

#### 4.7 INFLUENCIA DEL RADIO DE CURVATURA SOBRE LAS CURVAS BASE

La altura permisible del diente varía dependiendo del punto sobre la curva primitiva que se utilice como referencia para su generación. En la región con menor radio de curvatura de la curva primitiva se producen las menores alturas permisibles de los dientes. Si en esta región ocurre una variación alta del radio de curvatura, la disminución de la altura permisible será más crítica, lo que demanda un mayor número de dientes para evitar puntos singulares en los dientes que se generen.

En la figura (4.20) se presenta un punto de la curva primitiva –J– alrededor del cual ocurre una gran variación del radio de curvatura de la curva primitiva y se comparan la altura permisible del pie del diente para los flancos derecho e izquierdo al generar ambos flancos en esta posición. Los puntos  $J_D$  y  $J_I$  pertenecen a la curva primitiva y son aquellos con los que se generan los puntos correspondientes de la curva base de los flancos derecho e izquierdo. Los puntos  $O_b$ ,  $O_{b,D}$  y  $O_{b,I}$  son, respectivamente, los centros de curvatura de la curva primitiva en  $J$ ,  $J_D$  y  $J_I$ ; los radios de curvatura de la curva primitiva en estos puntos son  $\rho$ ,  $\rho_D$  y  $\rho_I$ , respectivamente.

Es importante resaltar que en la generación del punto singular del flanco izquierdo en el punto  $J$ , el radio de curvatura de la curva primitiva en el punto  $J_I$  – $\rho_I$ – es el que influye en el proceso y no el correspondiente radio de curvatura en el punto  $J$  – $\rho$ –; esto es equivalente a un desplazamiento hacia la derecha de la influencia del radio de curvatura de la curva primitiva en el proceso de obtención del punto singular. En el caso del flanco derecho, influye el radio de curvatura de la curva primitiva en el punto  $J_D$  – $\rho_D$ –.

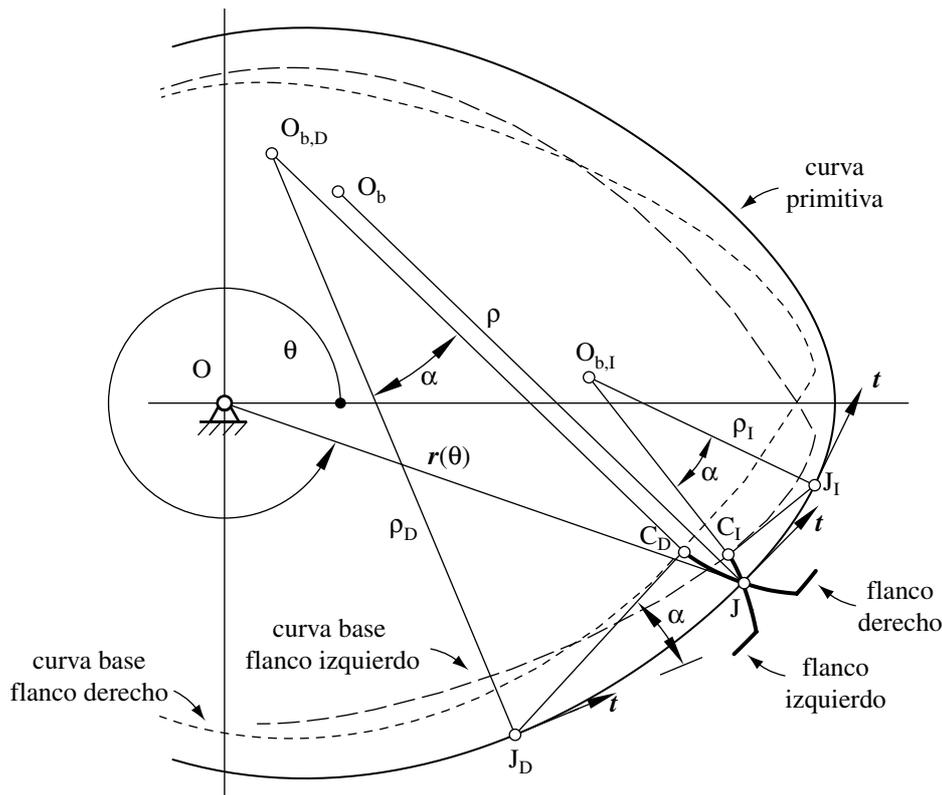


Figura 4.20 Formación de los puntos singulares

El punto de la curva base del flanco izquierdo  $-C_I-$  se encuentra más cercano a la curva primitiva que el punto de la curva base del flanco derecho  $-C_D-$  por lo que la altura permisible del pie del diente es menor en el flanco izquierdo.

Si el radio de curvatura decrece entre los puntos  $J$  y  $J_I$ , el flanco izquierdo puede tener una altura permisible relativamente pequeña; esto se justifica porque el punto del flanco que se ubica sobre la curva primitiva, punto  $J$ , tiene un radio de curvatura mayor  $-\rho-$  que el radio de curvatura  $-\rho_I-$  del punto de la curva primitiva  $-J_I-$  con el que se obtiene el punto sobre la curva base del flanco izquierdo.

El flanco derecho tiene una altura permisible relativamente alta cuando el radio de curvatura del punto  $J_D$   $-\rho_D-$  es mayor que el radio de curvatura del punto  $J$ . Si el radio de curvatura se incrementa entre los puntos  $J$  y  $J_I$  y disminuye entre los puntos  $J$  y  $J_D$ , el punto de la curva base del flanco derecho puede estar más cerca de la curva primitiva que el punto base del flanco izquierdo.

El radio de curvatura mínimo influye sobre la localización de los puntos singulares más cerca a la curva primitiva. Si en la región de la curva primitiva en la que se genera el flanco izquierdo, ocurre una disminución del radio de curvatura cuando se incrementa la coordenada angular, el flanco puede tener una altura permisible del diente pequeña; este diente puede tener la menor altura permisible si el punto de la curva base se obtiene con el punto de la curva primitiva con menor radio de curvatura.

Si se genera el flanco derecho en una región de la curva primitiva en la que disminuye el radio de curvatura cuando disminuye la coordenada angular, este flanco puede tener una altura permisible pequeña; este diente presenta la menor altura permisible si el punto de la curva base se obtiene con el punto de la curva primitiva con menor radio de curvatura.

#### 4.8 MÍNIMO NÚMERO DE DIENTES

En este apartado se presenta una metodología para estimar el mínimo número de dientes considerando la distancia que existe entre la curva base y la curva primitiva. Para el flanco de un diente, la altura permisible del diente es la máxima altura que puede tener el pie del diente sin que en éste se presente un punto singular. Con la menor de las alturas permisibles del pie del diente se puede calcular el mínimo número de dientes del engranaje, para su correcto mecanizado, utilizando la definición del paso:

$$p = \frac{L}{z} = \pi m \quad (4.28)$$

siendo  $L$  la longitud de la curva primitiva,  $p$  el paso y  $z$  el número de dientes de la rueda. La altura del pie del diente se toma como 1,25 veces el modulo,  $h_D = 1,25 m$ , ya que es usual en los engranajes circulares; después de reemplazar la altura del pie del diente en función de su módulo se obtiene:

$$\frac{L}{z} = \pi \frac{h_D}{1,25} \quad (4.29)$$

siendo  $h_D$  la altura del pie del diente. El mínimo número de dientes se calcula al reemplazar en (4.29) la menor de las alturas permisibles en todos los flancos de las rueda:

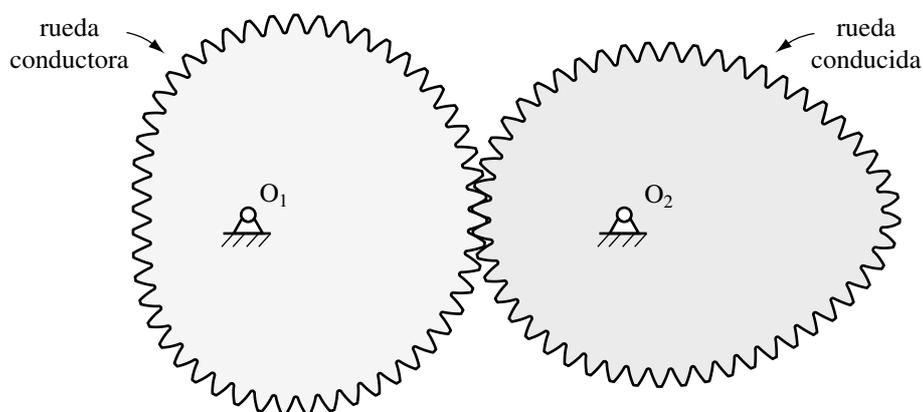
$$z_{\min} = \frac{1,25L}{\pi h_{D,\min}} \quad (4.30)$$

siendo  $h_{D,\min}$  la mínima distancia entre la curva primitiva y la curva base, en dirección del vector normal de la curva primitiva. Se pueden cortar los dientes sin que un diente coincida con la posición en que se tiene la menor altura permisible del diente; esto permite cortar la rueda con un número de dientes menor al que se obtiene mediante la expresión (4.30).

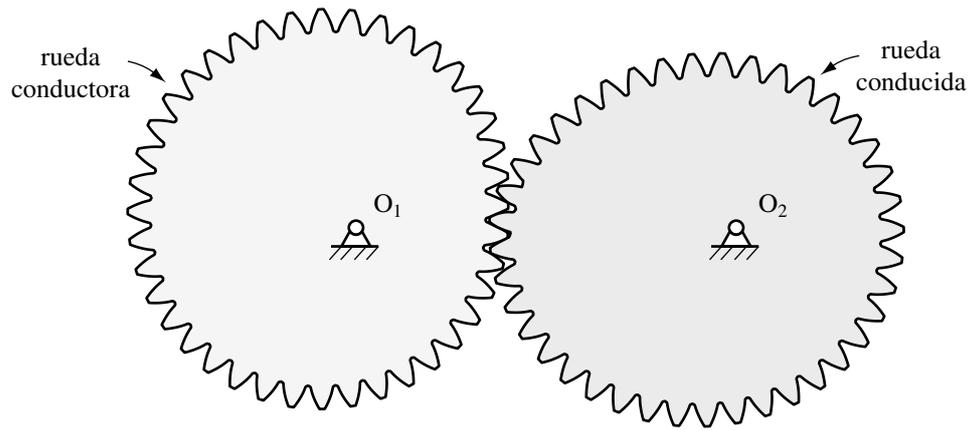
## 4.9 CASOS DE ESTUDIO

### 4.9.1 Ruedas dentadas

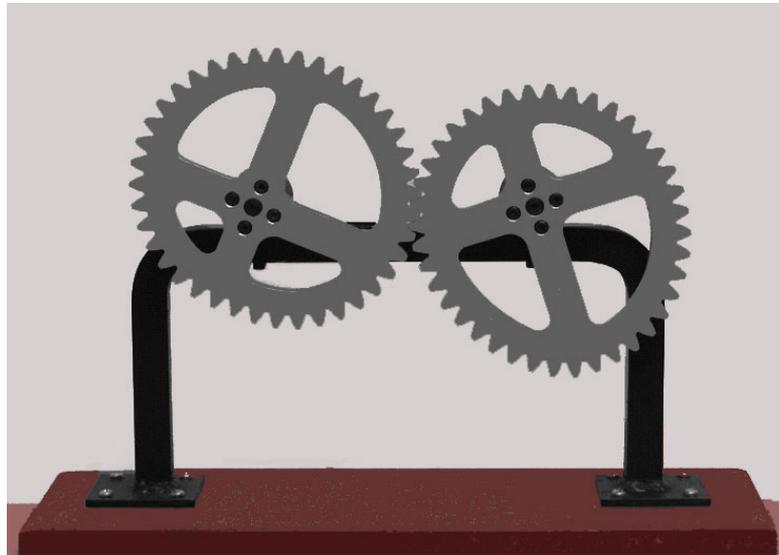
En la figura (4.21) se presentan las ruedas dentadas que satisfacen las leyes de desplazamiento consideradas en el capítulo 3. El número de dientes del engranajes que cumple la ley de desplazamiento dada por la curva de Bézier del apartado (3.3) y las ruedas elípticas del apartado (3.5) es de 40; los engranajes que cumplen la ley armónica del apartado (3.2) y la dada por la curva B-spline del apartado (3.4), se generan con 50 dientes; las ruedas conductora y conducida del engranaje con relación de periodos doble tienen, respectivamente, 64 y 32 dientes. En el modelo con el que se genera el dentado, se utiliza un ángulo de presión de la cremallera de 25°. En la figura (4.21.c) se muestran las ruedas dentadas que cumplen la ley de Bézier del apartado (3.3) mecanizadas por un proceso de fresado.



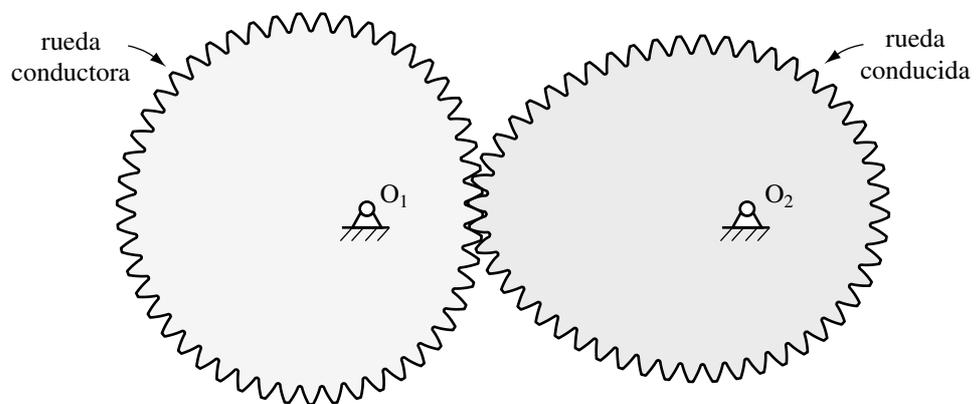
a) Ruedas que cumplen la función armónica del apartado 3.2



b) Ruedas que cumplen la curva de Bézier del apartado 3.3



c) Ruedas mecanizadas que cumplen la ley de Bézier del apartado 3.3



d) Ruedas que cumplen la curva B-spline del apartado 3.4

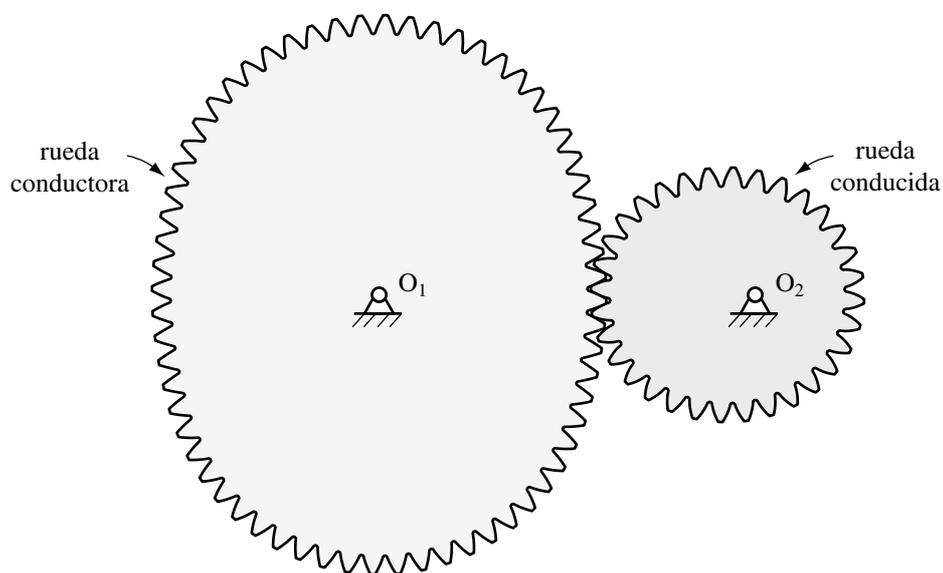
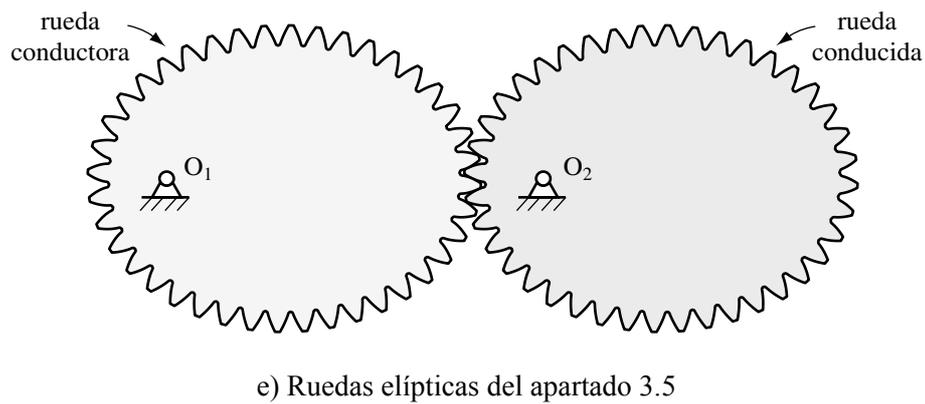


Figura 4.21 Ruedas dentadas

#### 4.9.2 Estudio de la curva base

En este apartado se presentan la curva base de los flancos derecho e izquierdo, la formación de puntos singulares y la influencia del radio de curvatura de la curva primitiva sobre la altura permisible del flanco del diente de las ruedas dentadas que cumplen las leyes de desplazamiento estudiadas en el capítulo 3.

Como primer ejemplo se estudian las ruedas conductora y conducida del engranaje que cumplen como ley de desplazamiento la curva B-spline del apartado (3.4). La figura (4.22)

presenta las curvas base de ambas ruedas en las cuales se observa que cada flanco del diente tiene una curva base diferente. Los dientes se generan de tal forma que se observe la formación de un segundo ramal y por ende la formación de los puntos singulares en el pie del diente sobre la curva base. El número de dientes de cada rueda es de 20; se toman pocos dientes para mostrar con mejor claridad la formación del segundo ramal en el punto singular del pie del diente.

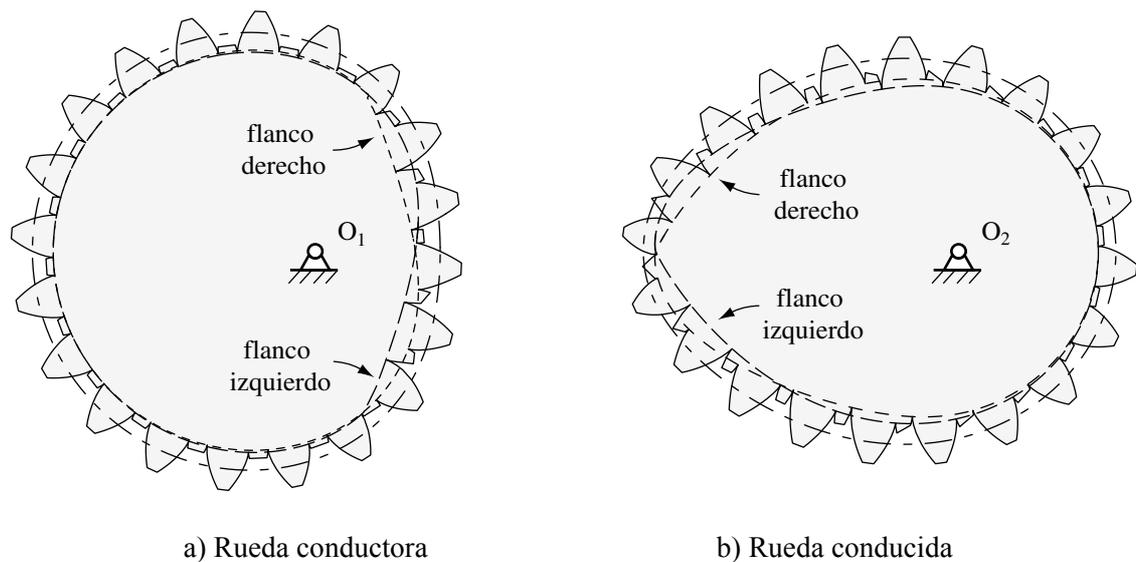


Figura 4.22 Curva base del engranaje que cumple la curva B-spline del apartado 3.4 como ley de desplazamiento

Se genera un punto singular en el pie del diente si en el proceso de generación se cumple la condición dada por (4.26) para la rueda conductora o por (4.27) para la rueda conducida. En el apartado (3.11.3) se presenta –figura (3.15)– el radio de curvatura de las curvas primitivas del engranaje que cumple la ley de desplazamiento dada por la curva B-spline que se estudió en el apartado (3.4).

En cada rueda se determina la altura permisible del pie diente para los dos flancos. La altura permisible del pie del diente se obtiene en la dirección del vector normal de la curva primitiva que pasa por el punto singular, y se mide desde la curva primitiva hasta el punto singular del diente; este procedimiento se describe en el apartado (4.6) –figura (4.13). La figura (4.23) presenta las alturas del pie del diente del flanco derecho e izquierdo en las ruedas conductora y conducida.

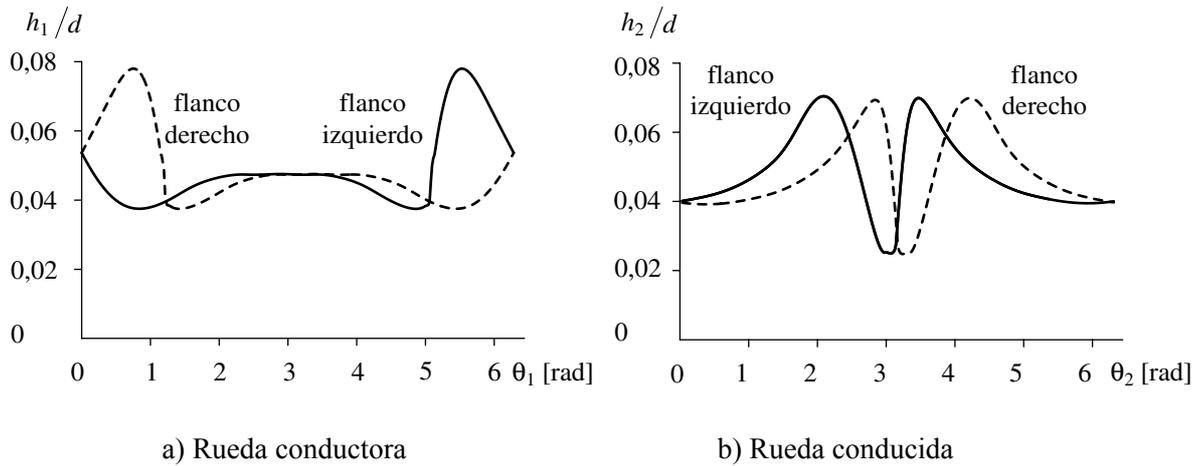


Figura 4.23 Altura permisible máxima del pie del diente

En cada rueda, el comportamiento de la altura permisible es muy similar al del radio de curvatura de la respectiva curva primitiva, solo que el flanco derecho e izquierdo presentan un desplazamiento, respectivamente, hacia la derecha e izquierda; este desplazamiento está acorde con la influencia del radio de curvatura sobre la curva base que se estudia en el apartado (4.7).

En el apartado (3.11.3) se resaltan los cambios bruscos del radio de curvatura de la curva primitiva de la rueda conductora del engranaje que cumple como ley de desplazamiento, la curva B-spline que se estudia en el apartado (3.4). Este cambio brusco se presenta en las posiciones  $\theta_1=0\text{rad}$  y  $\theta_1=2\pi\text{rad}$ . La variación en las alturas permisibles de ambos flancos es continuo; sin embargo, se observa una variación alta en las alturas para ambos flancos; en el flanco derecho esta variación ocurre a la derecha de  $\theta_1=0\text{rad}$  y en el flanco izquierdo ocurre a la izquierda de  $\theta_1=2\pi\text{rad}$ .

El radio de curvatura de la rueda conducida, figura (3.15.c), presenta un cambio brusco en la posición  $\theta_2=\pi\text{rad}$  y sus valores mínimos se encuentran cerca de esta posición. Los valores mínimos de las alturas permisibles de ambos flancos están desplazados con respecto al radio de curvatura mínimo. A diferencia de su radio de curvatura, las alturas permisibles de la rueda conducida no presentan singularidades.

De acuerdo con los comentarios de los párrafos anteriores, se observa una suavización en el comportamiento de las alturas permisibles del pie del diente de ambos flancos con respecto al

comportamiento del radio de curvatura. En el procedimiento para determinar la condición en la que se genera el punto de singular intervienen: i) la longitud de la curva primitiva desde el punto inicial de contacto hasta el punto de la curva primitiva con que se genera el punto singular, ii) el radio de la curva primitiva y sus derivadas en el punto que genera el punto singular. La longitud de la curva primitiva sirve de filtro para eliminar las singularidades del radio de curvatura ya que su longitud depende del comportamiento en un intervalo y no en valores evaluados en un solo punto.

#### 4.9.2.1 Curva base: Ley armónica

En el apartado (3.11.1) se presentan el radio de curvatura de las curvas primitivas de las ruedas conductora y conducida del engranaje que cumple, como ley de desplazamiento, la curva armónica que se estudia en el apartado (3.2) –figuras (3.11.b) y (3.11.c). En el caso del radio de curvatura de la rueda conductora, en  $\theta_1 = \pi$  rad se obtiene un radio de curvatura infinito y en la zona alrededor de este punto se presenta una región con radios de curvatura muy altos que se corresponden con un tramo plano en la curva primitiva.

En el apartado (4.6) se obtienen las expresiones (4.22) y (4.23) con las que se obtienen los puntos de la curva base, de los dos flancos, tomando un punto de la curva primitiva. Sin embargo, como se menciona previamente, con las zonas de la curva primitiva con radios de curvatura muy altos o infinitos se obtiene una curva base con irregularidades en su geometría. Por esto se desarrolla el método alternativo mediante las expresiones (4.26) y (4.27) para obtener las curvas base de las ruedas conductora y conducida, respectivamente.

En la figura (4.24), se presenta la formación de puntos singulares de las ruedas conductora y conducida obtenidas mediante las expresiones (4.26) en el caso de la rueda conductora y (4.27) en el de la rueda conducida. En la curva primitiva de la rueda conductora, se observa el salto brusco de las curvas base de los flancos derecho e izquierdo debido al tramo de la curva primitiva con radios de curvatura muy grandes que no generan puntos de la curva base, tal como se menciona en el apartado (4.6). Con el procedimiento propuesto, se eliminan los tramos que tienden hacia el infinito de la figura (4.16) que se obtienen con el método gráfico presentado en el apartado (4.6).

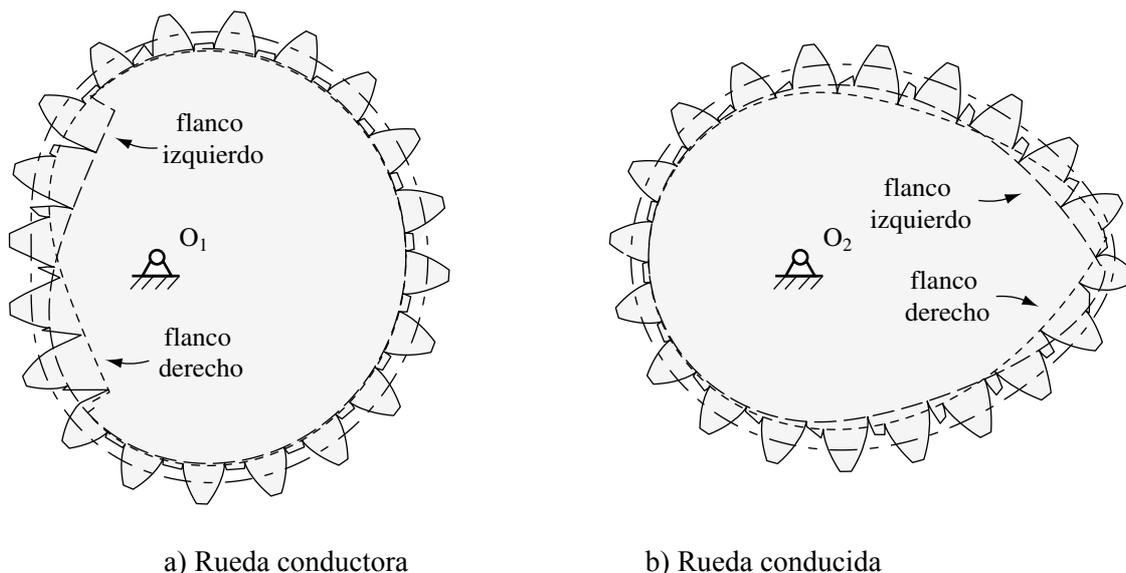


Figura 4.24 Curvas base de las ruedas del engranaje que satisface la curva armónica del apartado 3.2 como ley de desplazamiento

En la figura (4.25) se presentan las alturas permisibles del pie del diente en ambos flancos de las dos ruedas dentadas. En la rueda conductora, el cambio brusco en la altura permisible del pie del diente de ambos flancos están acorde con los cambios bruscos en ambas curvas base observados en la figura (4.24). La variación de las alturas permisibles de ambos flancos tiene un comportamiento similar a la variación del radio de curvatura de su curva primitiva, a excepción del valor infinito en la posición  $\theta_1 = \pi$  rad; la altura permisible del flanco derecho presenta un desplazamiento hacia la derecha y la del flanco izquierdo hacia la izquierda.

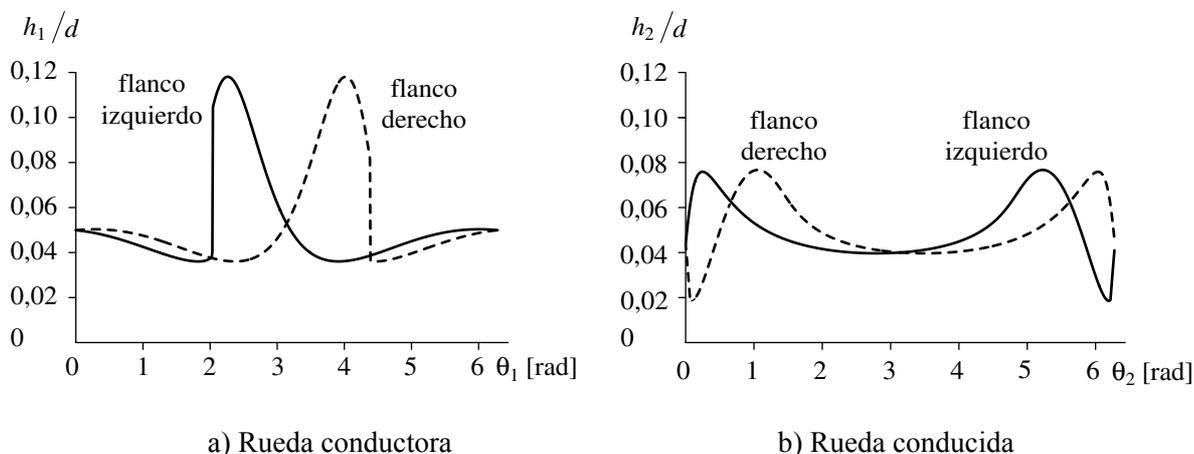


Figura 4.25 Alturas permisibles del pie del diente para las ruedas del engranaje que satisface la curva armónica del apartado 3.2 como ley de desplazamiento

En el caso de la rueda conducida, se presenta un radio de curvatura mínimo en  $\theta_2 = 0$  rad y en  $\theta_2 = 2\pi$  rad, figura (3.11.c). En el flanco derecho se observa un valor mínimo de la altura permisible del pie del diente desplazada a la derecha de  $\theta_2 = 0$  rad y en el izquierdo desplazada a la izquierda con respecto a  $\theta_2 = 2\pi$  rad. Estas alturas mínimas están acordes con la influencia del radio de curvatura mínimo sobre la curva base estudiada en el apartado (4.7).

#### 4.9.2.2 Curva base: Curva de Bézier

En el apartado (3.11.2) se presentan el radio de curvatura de las curvas primitivas de las ruedas conductora y conducida del engranaje que cumple como ley de desplazamiento la curva de Bézier que se estudia en el apartado (3.3) –figuras (3.13.b) y (3.13.c). En la figura (4.26) se muestra la formación de puntos singulares en los flancos derecho e izquierdo de las ruedas conductora y conducida de este engranaje; también se muestran las curvas bases de los dos flancos en cada una de las ruedas dentadas.

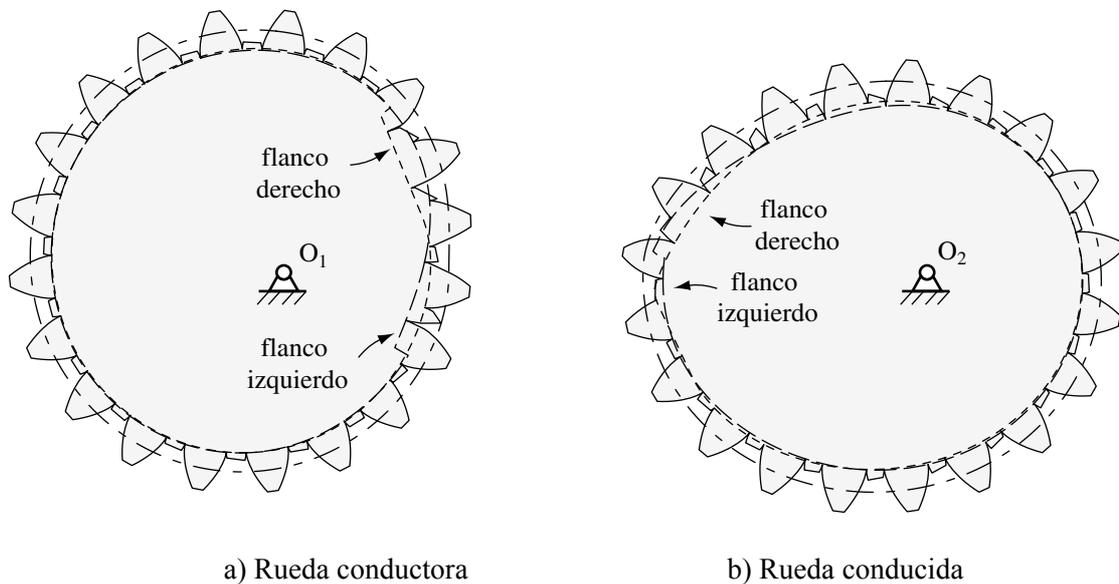


Figura 4.26 Curva base del engranaje con la curva de Bézier como ley de desplazamiento

En la curva base del flanco derecho e izquierdo de la rueda conductora, se observa un salto brusco debidos al descarte del tramo de la curva primitiva con radio de curvatura muy grande o infinito en el intervalo  $0 \text{ rad} < \theta_1 < 0,112 \text{ rad}$  como puntos de generación de la curva base en

ambos flancos, y debido también a la discontinuidad en el radio de curvatura en  $\theta_1 = 0$  rad y  $\theta_1 = 2\pi$  rad.

En la figura (4.27) se presentan las alturas permisibles del pie del diente en ambos flancos para cada una de las ruedas. Las alturas permisibles presentan un comportamiento similar al de su radio de curvatura con el correspondiente desplazamiento.

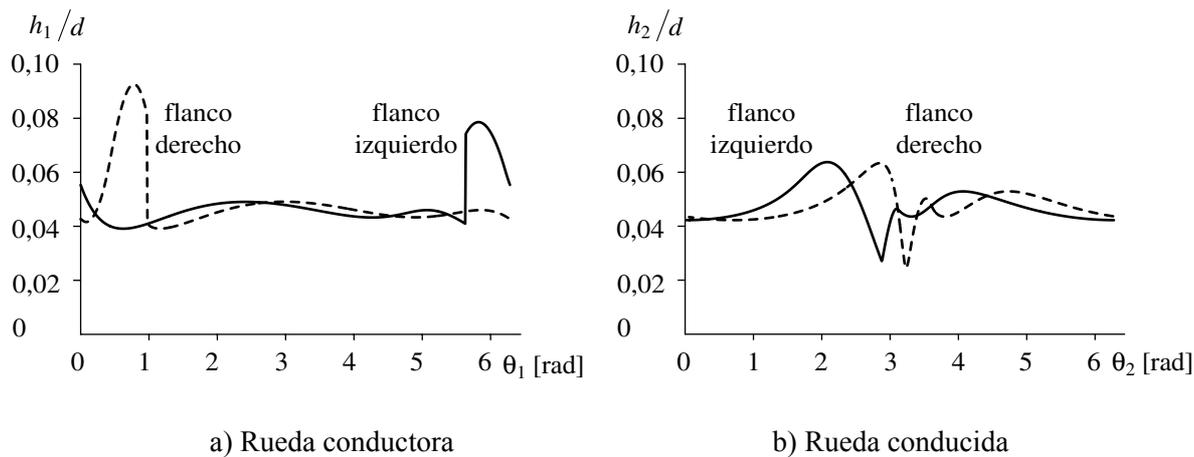


Figura 4.27 Alturas permisibles del pie del diente para las ruedas que cumple la curva de Bézier

El radio de curvatura de la rueda conductora es discontinuo en  $\theta_1 = 0$  rad y en  $\theta_1 = 2\pi$  rad, lo que produce el salto brusco observado en las alturas permisibles en ambos flancos. El radio de curvatura de la rueda conducida es discontinuo en  $\theta_2 = \pi$  rad y en esta coordenada presenta su radio de curvatura mínimo. Se observa que la discontinuidad del radio de curvatura se filtra en un cambio brusco en las alturas permisibles; las alturas permisibles mínimas de ambos flancos se encuentran alrededor del valor mínimo del radio de curvatura de su curva primitiva.

#### 4.9.2.3 Curva Base: Ruedas elípticas

En el apartado (3.11.4) se presenta el radio de curvatura de las curvas primitivas del engranaje elíptico que se estudia en el apartado (3.5). En la figura (4.28) se presentan las curvas base de ambas ruedas y la formación de los dientes en los que se observa la formación de los puntos singulares en el pie del diente.

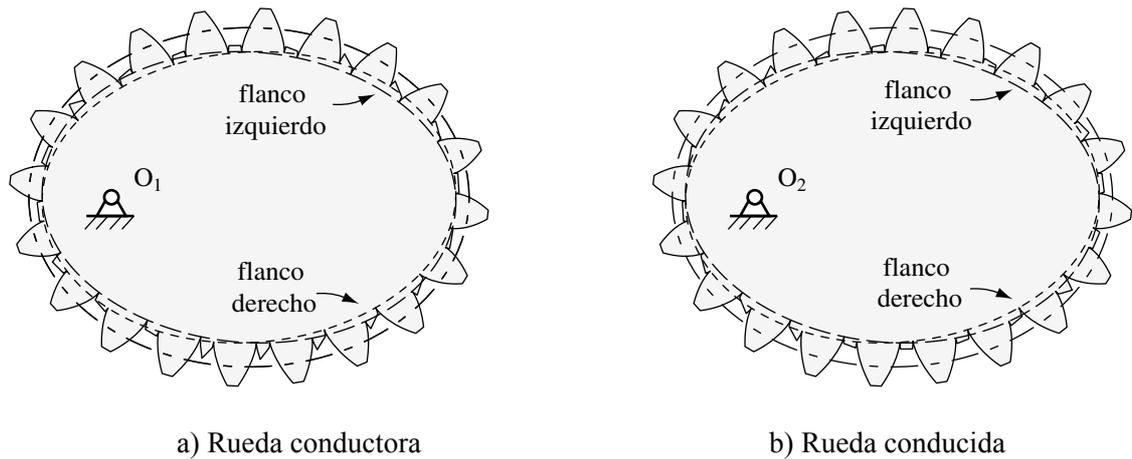


Figura 4.28 Curva base de las ruedas elípticas

En la figura (4.29) se presenta la altura permisible del pie del diente de ambos flancos de las ruedas conductora y conducida.

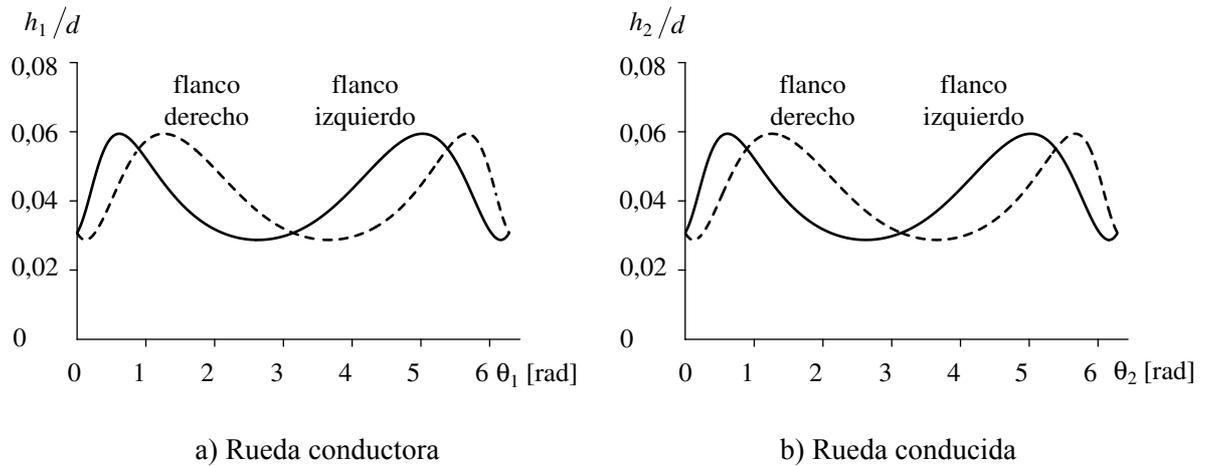


Figura 4.29 Altura permisible del pie del diente de las ruedas elípticas

El radio de curvatura de las curvas primitivas del engranaje elíptico es continuo como se observa en las figuras (3.17.b) y (3.17.c). Las alturas permisibles de ambos flancos tienen un comportamiento muy similar al de sus radios de curvaturas sólo con el desplazamiento en cada flanco antes mencionado.

#### 4.9.2.4 Curvas Base: Engranaje con relación de periodos de rotación doble

En el apartado (3.11.5) se presentan los radios de curvatura del engranaje en las que la relación de periodos de rotación entre la rueda conductora y conducida es doble. En la figura (4.30) se presentan las curvas base de ambas ruedas. Los números de dientes de la rueda conductora y conducida son, respectivamente, 24 y 12.

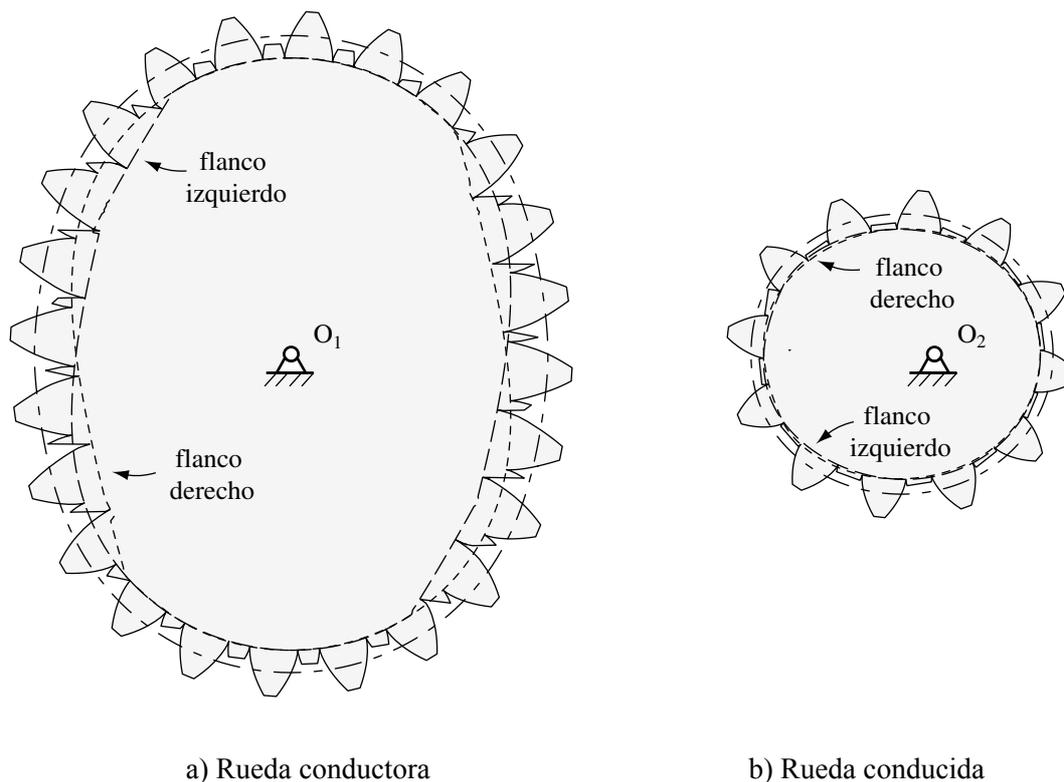


Figura 4.30 Curvas base de las ruedas con relación de periodos de rotación doble

En la figura (4.31) se presentan las alturas permisibles del pie del diente de ambos flancos del diente en las ruedas conductora y conducida. En las figuras (3.19.b) y (3.19.c) se presentan, respectivamente, los radios de curvatura de las curvas primitivas de las ruedas conductora y conducida.

El radio de curvatura de la rueda conductora presenta cambios bruscos en  $\theta_1 = 0$  rad, en  $\theta_1 = \pi$  rad y en  $\theta_1 = 2\pi$  rad. Estos cambios bruscos se observan en las alturas permisibles de ambos flancos.

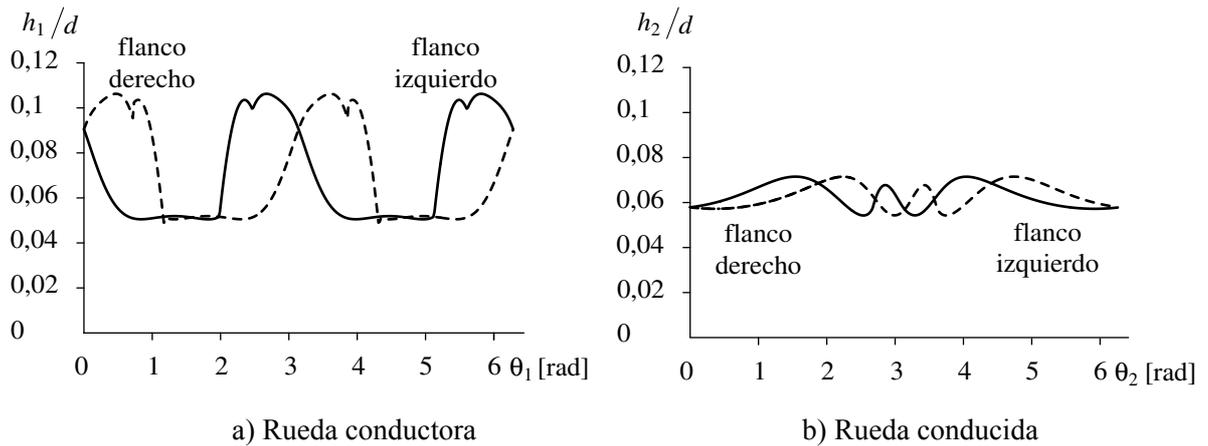


Figura 4.31 Altura permisible del pie del diente de las ruedas con relación de periodos de rotación doble

En las ruedas conductora y conducida, la variación de las alturas permisibles de ambos flancos, del mismo modo que en los casos previos, tiene un comportamiento similar a la variación del radio de curvatura de su respectiva curva primitiva.

#### 4.9.3 Mínimo número de dientes

En el apartado (4.8) se formulan las expresiones con las que se estima el mínimo número de dientes para cortar correctamente las ruedas. En la tabla (4.1) se presentan las longitudes de las curvas primitivas de las ruedas dentadas que cumplen las leyes de desplazamiento estudiadas en el capítulo 3 y las mínimas alturas permisibles del pie del diente. Las mínimas alturas permisibles de cada engranaje, es la menor altura permisible de los dos flancos de sus ruedas dentadas correspondientes que se muestran en el apartado (4.9.2).

Sin embargo, puede generarse los dientes con alturas del pie de diente mayores que la altura mínima permisible si se evita generar el flanco en las posiciones donde se genera el diente con la menor altura permisible del pie del diente. De esta forma, se pueden cortar los dientes con un número menor a los establecidos en la tabla (4.1). Si se toma un número menor al de la tabla, bastará con verificar si los dientes están libres de la formación de un segundo ramal antes de realizar su corte en una máquina CNC.

Tabla 4.1 Mínimo número de dientes

	$L/d$	$h_D/d$	$Z_{\min}$
Armónica	3,092	0,021	59
Bézier	3,111	0,0271	46
B-spline	3,063	0,0249	49
Elíptica	2,808	0,0287	39
Ruedas con relación de periodos de rotación doble	4,191	0,0507	33
	2,096	0,054	16