



**UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CATALUÑA**  
Escuela Técnica Superior de Ingeniería Industrial de Barcelona  
Departamento de Ingeniería Mecánica

Tesis Doctoral

**APORTE AL DISEÑO DE ENGRANAJES NO CIRCULARES  
CILÍNDRICOS RECTOS**

Presentada por

**HÉCTOR FABIO QUINTERO RIAZA**

Directores

**Dr. Salvador Cardona Foix**  
**Dra. Lluïsa Jordi Nebot**

Barcelona, 2006

## **CAPÍTULO 6**

### **FUERZAS EN LOS ENGRANAJES NO CIRCULARES**

En este capítulo se realiza el estudio dinámico de un mecanismo de doble manivela y de un engranaje no circular con igual ley de desplazamiento. Las dimensiones de los eslabones del mecanismo articulado se eligen tal que cumplan las condiciones de Grashoff; la síntesis de la ley de desplazamiento del engranaje no circular se realiza mediante un procedimiento de optimización, basado en los algoritmos genéticos, que minimiza la diferencia entre las leyes de desplazamiento de manera que los dos mecanismos sean cinemáticamente equivalentes. A pesar de tener una solución analítica de la ley de desplazamiento del cuadrilátero articulado, se decide aproximarla con una curva de Bézier y obtener las ordenadas de los nodos de control de la curva de Bézier empleando algoritmos genéticos para probar tanto la bondad de este método de optimización como las ventajas de utilizar las curvas de Bézier en la definición de la ley de desplazamiento.

Se presenta la dinámica de ambos mecanismos bajo iguales condiciones de operación. En el análisis dinámico del engranaje no circular se utiliza el teorema de la energía y los teoremas vectoriales; en el caso del mecanismo articulado, se utilizan los teoremas vectoriales. Una vez resuelta la dinámica de ambos mecanismos se realiza la comparación de las reacciones en los apoyos fijos y de la fluctuación del par motor.

#### **6.1. ANÁLISIS CINETOSTÁTICO EN LOS ENGRANES NO CIRCULARES**

En el análisis dinámico del engranaje no circular se obtienen las reacciones en los pivotes fijos del engranaje al bastidor, la fuerza generada por el contacto entre los dientes de las ruedas dentadas y el par requerido en el eje de la rueda conductora; este estudio se realiza bajo la condición de velocidad angular constante en la rueda conductora y un par resistente constante en el eje de la rueda conducida.

Utilizando el teorema de la energía aplicado al engranaje no circular se calcula el par requerido en el eje de la rueda conductora para operar bajo las condiciones establecidas. Similarmente, aplicando este teorema a la rueda conducida, se obtiene la fuerza generada por el contacto entre los dientes de las ruedas conductora y conducida, que pasa por el centro instantáneo de rotación relativo entre las ruedas dentadas, y su dirección es la del vector tangente a las curvas primitivas en el centro instantáneo de rotación. Las reacciones del engranaje en las articulaciones fijas se determinan mediante la utilización de los teoremas vectoriales en las ruedas conductora y conducida.

En el análisis cinetostático del engranaje no circular se suponen las siguientes condiciones de operación:

- La velocidad angular de la rueda conductora  $-\omega_1-$  es constante.
- Existe un par resistente que actúa sobre el eje de la rueda conducida  $-\Gamma_D-$  de magnitud constante.

### 6.1.1 Par en el eje de la rueda conductora

En la figura (6.1) se presentan los pares y fuerzas exteriores y cuya potencia no es nula que actúan sobre el engranaje no circular. Adicionalmente, se representan las velocidades angulares de las ruedas dentadas y las velocidades de sus respectivos centros de masa.

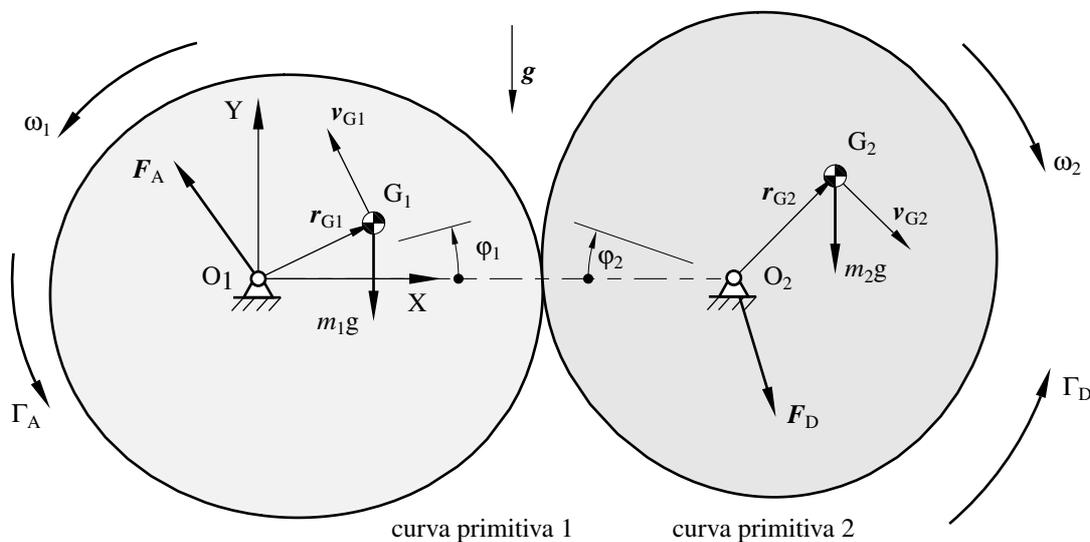


Figura 6.1 Pares y fuerzas exteriores que actúan en el engranaje no circular

$\Gamma_A$  es el par requerido en el eje de la rueda conductora;  $\Gamma_D$  es el par debido a las cargas que actúan sobre el eje de la rueda conducida;  $m_1$  y  $m_2$  son, respectivamente, las masas de las ruedas conductora y conducida;  $v_{G1}$  y  $v_{G2}$  son las velocidades de los centros de masa de la rueda conductora y conducida;  $g$  es la aceleración de la gravedad,  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ ; la ubicación de los centros de masa de las ruedas conductora y conducida  $-G_1$  y  $G_2$ , tomando como referencia su correspondiente centro de rotación, están dados por los vectores  $r_{G1}$  y  $r_{G2}$ ;  $\omega_1$  y  $\omega_2$  son, respectivamente, las velocidades angulares de las ruedas conductora y conducida. El par requerido en el eje de la rueda conductora  $-\Gamma_A-$  se obtiene mediante el análisis de las potencias que actúan en las ruedas dentadas:

$$\frac{d}{dt} E_C = P \quad (6.1)$$

siendo  $E_C$  la energía cinética total del engranaje y  $P$  la potencia de las fuerzas y momentos externos que actúan sobre el engranaje. La energía cinética del conjunto es la suma de la energía cinética de la rueda conductora y de la rueda conducida:

$$E_C = \frac{1}{2} J_{01} \omega_1^2 + \frac{1}{2} J_{02} \omega_2^2 \quad (6.2)$$

siendo  $J_{0,1}$  y  $J_{0,2}$ , respectivamente, los momentos de inercia de las ruedas conductora y conducida con respecto a sus respectivos ejes de rotación. La velocidad angular de la rueda conducida se determina mediante la relación de transmisión  $-\tau-$  dada por la expresión (3.48). Al derivar la expresión (6.2) y teniendo en cuenta que la velocidad angular de la rueda conductora  $-\omega_1-$  es constante se obtiene la variación con respecto al tiempo de la energía cinética de las ruedas no circulares:

$$\frac{d}{dt} E_C = J_{02} \omega_2 \alpha_2 \quad (6.3)$$

siendo  $\alpha_2$  la aceleración angular de la rueda conducida; ésta se obtiene al derivar la velocidad angular de la rueda conducida:

$$\alpha_2(\varphi_1) = \frac{d(\tau(\varphi_1) \omega_1)}{dt} = \frac{d\tau(\varphi_1)}{d\varphi_1} \frac{d\varphi_1}{dt} \omega_1 = f''(\varphi_1) \omega_1^2 \quad (6.4)$$

Después del análisis de la potencia del sistema ilustrado en la figura (6.1), se obtiene:

$$P = \sum \Gamma_i \omega_i + \sum \mathbf{F}(P_i) \cdot \mathbf{v}(P_i) = \Gamma_A \omega_1 - \Gamma_D \omega_2 + m_1 \mathbf{g} \cdot \mathbf{v}_{G1} + m_2 \mathbf{g} \cdot \mathbf{v}_{G2} \quad (6.5)$$

siendo  $\mathbf{F}(P_i)$  la fuerza aplicada en el punto  $P_i$  y  $\mathbf{v}(P_i)$  la velocidad del punto; en este análisis no se consideran las resistencias pasivas. El lado izquierdo de la expresión (6.1) se obtiene al reemplazar la aceleración angular en la expresión (6.3); después de igualar con la expresión anterior se obtiene:

$$J_{02} f'(\varphi_1) \omega_1 f''(\varphi_1) \omega_1^2 = \Gamma_A \omega_1 - \Gamma_D \omega_2 + m_1 \mathbf{g} \cdot \mathbf{v}_{G1} + m_2 \mathbf{g} \cdot \mathbf{v}_{G2} \quad (6.6)$$

Las velocidades de los centros de masa de la rueda conductora y conducida se obtienen, respectivamente, mediante las siguientes expresiones:

$$\mathbf{v}_{G1} = \omega_1 \mathbf{r}_{G1} e^{j\pi/2}; \quad \mathbf{v}_{G2} = \omega_2 \mathbf{r}_{G2} e^{-j\pi/2} \quad (6.7)$$

Organizando términos y después de reemplazar la definición de la relación de transmisión en la expresión (6.6) se obtiene el par requerido en el eje de la rueda conductora:

$$\Gamma_A(\varphi_1) = \left( J_{02} \omega_1^2 f''(\varphi_1) + \Gamma_D - m_2 \mathbf{g} \cdot (\mathbf{r}_{G2} e^{-j(\pi/2)}) \right) \tau(\varphi_1) - m_1 \mathbf{g} \cdot (\mathbf{r}_{G1} e^{j(\pi/2)}) \quad (6.8)$$

### 6.1.2 Fuerza generada en el contacto entre los dientes de las ruedas dentadas

La fuerza realizada por la rueda conductora a la rueda conducida  $-\mathbf{F}_{12}$  debido al contacto entre los dientes, se determina mediante el análisis de potencias en la rueda conducida. Esta fuerza pasa por el centro instantáneo de rotación relativo entre las ruedas dentadas y su dirección es la del vector tangente a las curvas primitivas en el centro instantáneo de rotación. En la figura (6.2) se presentan las fuerzas y los pares que actúan sobre la rueda conducida así como la aceleración normal y tangencial de su centro de masa. La derivada de la energía cinética de la rueda conducida viene dada por:

$$\frac{d}{dt} E_C = J_{0,2} \omega_2 \alpha_2 \quad (6.9)$$

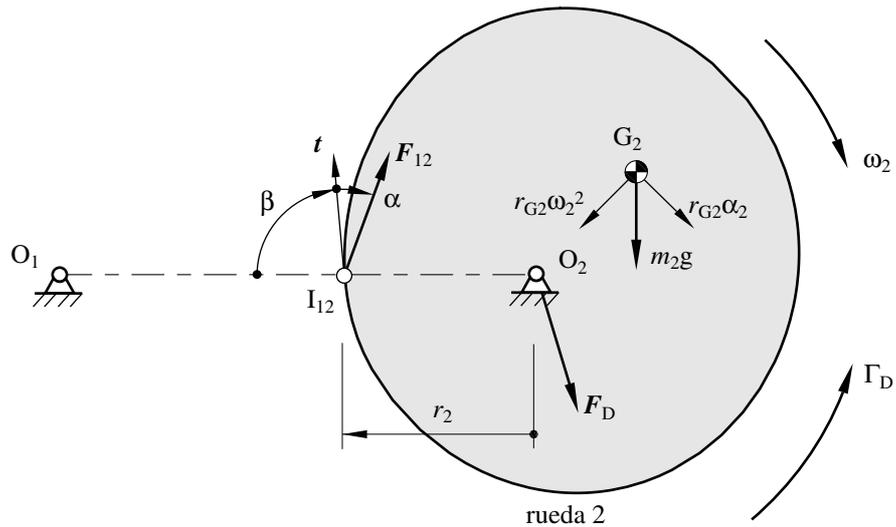


Figura 6.2 Fuerzas y momentos en la rueda conducida

La potencia de las fuerzas y pares que actúan sobre la rueda conducida es la suma de la potencia de las cargas externas que actúan en el eje de la rueda conducida, la potencia de la fuerza generada por el contacto entre los dientes de las ruedas dentadas y la potencia del peso propio de la rueda:

$$P = -\Gamma_D \omega_2 + m_2 \mathbf{g} \cdot \mathbf{v}_{G_2} + F_{12} \sin(\beta + \alpha) \omega_2 r_2 \quad (6.10)$$

Agrupando las dos últimas expresiones, se obtiene la magnitud de la fuerza transmitida entre las ruedas dentadas mediante el contacto entre los dientes:

$$J_{02} \omega_2 \alpha_2 = -\Gamma_D \omega_2 + m_2 \mathbf{g} \cdot (\omega_2 \mathbf{r}_{G_2} e^{j(\pi/2)}) + F_{12} \sin(\beta + \alpha) r_2 \omega_2 \quad (6.11)$$

Después de organizar términos, se obtiene:

$$F_{12} = \frac{J_{02} \alpha_2 + \Gamma_D - m_2 \mathbf{g} \cdot (\mathbf{r}_{G_2} e^{j(\pi/2)})}{r_2 \sin(\beta + \alpha)} \quad (6.12)$$

La fuerza dada por la expresión (6.12) es la fuerza resultante debida al contacto entre los pares de dientes. Cuando dos pares de dientes están simultáneamente en contacto, la fuerza generada por el contacto en cada par de dientes tienen igual dirección y son colineales, ya que la línea de presión pasa por el centro instantáneo de rotación relativo.

### 6.1.3 Reacciones en los pivotes fijos de las ruedas dentadas

La reacción en el apoyo de la rueda conducida, representada por  $F_D$  en la figura (6.2), se determina mediante la aplicación de los teoremas vectoriales a la rueda conducida:

$$F_D + F_{12} + m_2 \mathbf{g} = m_2 \mathbf{a}_{G_2} = m_2 \left[ r_{G_2} \alpha_2 e^{-j\pi/2} - r_{G_2} \omega_2^2 \right] \quad (6.13)$$

De acuerdo con el principio de acción y reacción, la fuerza que ejerce la rueda conducida sobre el bastidor  $-F_{20}$  se calcula mediante la siguiente expresión:

$$F_{20} = -F_D = F_{12} + m_2 \mathbf{g} - m_2 \left[ r_{G_2} \alpha_2 e^{-j\pi/2} - r_{G_2} \omega_2^2 \right] \quad (6.14)$$

En la figura (6.3) se presentan las fuerzas y los pares que actúan sobre la rueda conductora.

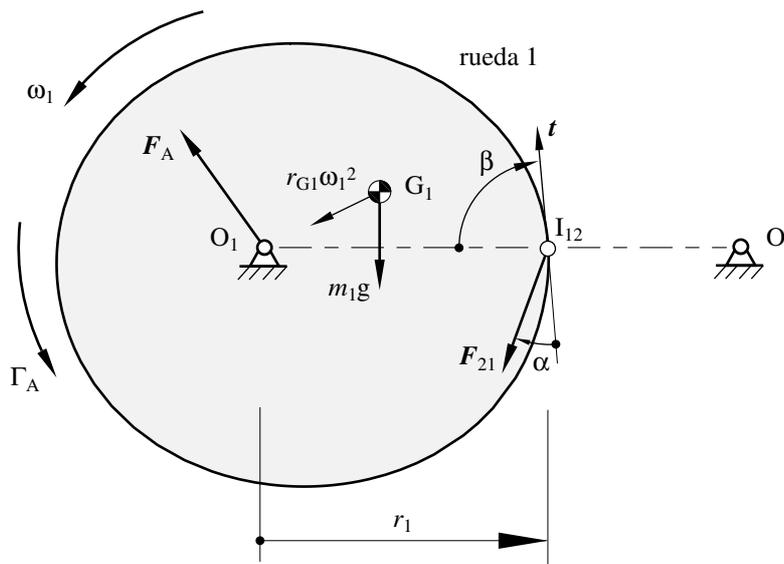


Figura 6.3 Fuerzas y pares de la rueda conductora

Del equilibrio de fuerzas en la rueda conductora, se obtiene la reacción en el apoyo fijo de la rueda conductora  $-F_A$ :

$$F_A + F_{21} + m_1 \mathbf{g} = m_1 \mathbf{a}_{G_1} = m_1 \left[ -r_{G_1} \omega_1^2 \right] \quad (6.15)$$

La fuerza que la rueda conductora ejerce sobre el bastidor  $-F_{10}$  es:

$$F_{10} = -F_A = -F_{12} + m_1 \mathbf{g} + m_1 r_{G1} \omega_1^2 \quad (6.16)$$

## 6.2 ANÁLISIS CINETOSTÁTICO DEL MECANISMO DE DOBLE MANIVELA

En la figura (6.4) se muestra un mecanismo de doble manivela donde el eslabón 1 es la manivela, el eslabón 2 es el acoplador, el eslabón 3 representa el eslabón conducido y 4 representa al bastidor. Para satisfacer la condición de Grashoff de un mecanismo de doble manivela [71, 72], se eligen las siguientes dimensiones del mecanismo articulado:  $L_1 = 75 \text{ mm}$ ;  $L_2 = 75 \text{ mm}$ ;  $L_3 = 100 \text{ mm}$ ;  $L_4 = 25 \text{ mm}$ .

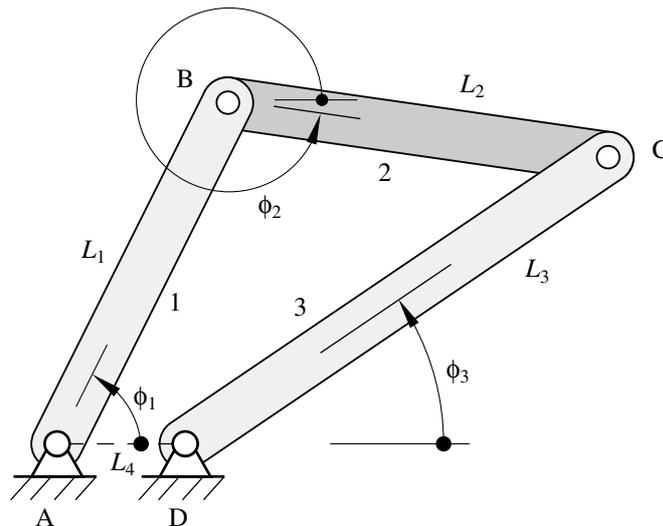


Figura 6.4 Mecanismo de doble manivela

### 6.2.1 Análisis cinemático del mecanismo de doble manivela

El vector  $\mathbf{q} = \{\phi_1, \phi_2, \phi_3\}^T$  es el vector de coordenadas generalizadas y proporciona la configuración del mecanismo. La ecuación vectorial de enlace  $-\mathbf{f}(\mathbf{q}) = 0$  es el conjunto de ecuaciones que imponen las restricciones geométricas del mecanismo articulado:

$$\begin{aligned} f_1(\mathbf{q}) &= L_1 \cos \phi_1 + L_2 \cos \phi_2 - L_3 \cos \phi_3 - L_4 = 0 \\ f_2(\mathbf{q}) &= L_1 \sin \phi_1 + L_2 \sin \phi_2 - L_3 \sin \phi_3 = 0 \end{aligned} \quad (6.17)$$

El vector  $\mathbf{q}$  usualmente se divide en un vector de coordenadas independientes  $-\{q_i\} = \{\phi_1\}$ – y en un vector de coordenadas dependientes  $-\{q_d\} = \{\phi_2, \phi_3\}^T$ . La posición angular del eslabón conducido  $-\phi_3$ – en función de la posición angular del eslabón conductor  $-\phi_1$ – se obtiene mediante la siguiente expresión [59]:

$$\tan \frac{\phi_3}{2} = \frac{2\text{sen}\phi_1 \pm \sqrt{(2\text{sen}\phi_1)^2 - 4(c_1 + c_4 - \cos\phi_1(1 + c_3))(-c_1 + c_4 + \cos\phi_1(1 - c_3))}}{2(-c_1 + c_4 + \cos\phi_1(1 - c_3))} \quad (6.18)$$

En esta expresión los parámetros  $c_1$ ,  $c_3$  y  $c_4$  son relaciones adimensionales entre las longitudes de los eslabones:  $c_1 = L_4 / L_1$ ,  $c_3 = L_4 / L_3$ ,  $c_4 = (L_1^2 - L_2^2 + L_3^2 + L_4^2) / (2L_1L_3)$ .

El análisis de velocidades se obtiene al derivar el sistema de ecuaciones de enlace geométricas  $\mathbf{f}(\mathbf{q})$  con respecto al tiempo; de esta manera se obtiene un sistema de expresiones cinemáticas lineales para las velocidades generalizadas:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{f}(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} = 0; \quad \mathbf{J}_q \dot{\mathbf{q}} = 0 \quad (6.19)$$

siendo  $\mathbf{J}_q = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_i}{\partial q_j} \end{bmatrix}$  la matriz jacobiana del sistema de expresiones:

$$\mathbf{J}_q = \begin{bmatrix} -L_1 \sin\phi_1 & -L_2 \sin\phi_2 & L_3 \sin\phi_3 \\ L_1 \cos\phi_1 & L_2 \cos\phi_2 & -L_3 \cos\phi_3 \end{bmatrix} \quad (6.20)$$

Para determinar todas las velocidades generalizadas, conocida la velocidad generalizada independiente en una cierta configuración accesible del mecanismo, se resuelve este sistema de ecuaciones lineales que tiene tantas incógnitas como velocidades generalizadas dependientes y tantas ecuaciones como ecuaciones de enlace. Para resolver el sistema de ecuaciones, se procede a hacer una partición del conjunto de velocidades generalizadas en un vector de velocidades generalizadas independientes  $-\{\dot{\mathbf{q}}_i\} = \{\omega_{\phi_1}\}$ – y en un vector de velocidades generalizadas dependientes  $-\{\dot{\mathbf{q}}_d\} = \{\omega_{\phi_2}, \omega_{\phi_3}\}^T$ .

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{q,d} & \mathbf{J}_{q,i} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_d \\ \dot{\mathbf{q}}_i \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{q,d} \end{bmatrix} \{\dot{\mathbf{q}}_d\} + \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{q,i} \end{bmatrix} \{\dot{\mathbf{q}}_i\} = 0 \\
 \{\dot{\mathbf{q}}_d\} &= -\begin{bmatrix} \mathbf{J}_{q,d} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{q,i} \end{bmatrix} \omega_{\phi 1} \\
 \begin{Bmatrix} \omega_{\phi 2} \\ \omega_{\phi 3} \end{Bmatrix} &= -\begin{bmatrix} -L_2 \sin \phi_2 & L_3 \sin \phi_3 \\ L_2 \cos \phi_2 & -L_3 \cos \phi_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -L_1 \sin \phi_1 \\ L_1 \cos \phi_1 \end{bmatrix} \omega_{\phi 1}
 \end{aligned} \tag{6.21}$$

El análisis de aceleraciones del mecanismo articulado, una vez hecho el análisis de velocidades, se obtiene al derivar con respecto al tiempo las velocidades generalizadas. Por lo que se vuelve a derivar con respecto al tiempo la expresión (6.19) con lo que se obtiene:

$$\dot{\mathbf{J}}_q \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{J}_q \ddot{\mathbf{q}} = 0 \tag{6.22}$$

Para resolver el sistema de ecuaciones, se procede a hacer una partición del conjunto de aceleraciones en un vector de aceleraciones generalizadas independientes  $-\{\ddot{\mathbf{q}}_i\} = \{\alpha_{\phi 1}\}$  y en un vector de aceleraciones generalizadas dependientes  $-\{\ddot{\mathbf{q}}_d\} = \{\alpha_{\phi 2}, \alpha_{\phi 3}\}^T$ .

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{q,d} \end{bmatrix} \{\ddot{\mathbf{q}}_d\} + \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{J}}_{q,d} \end{bmatrix} \{\dot{\mathbf{q}}_d\} + \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{J}}_{q,i} \end{bmatrix} \{\dot{\mathbf{q}}_i\} &= 0 \\
 \{\ddot{\mathbf{q}}_d\} &= -\begin{bmatrix} \mathbf{J}_{q,d} \end{bmatrix}^{-1} \left( \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{J}}_{q,d} \end{bmatrix} \cdot \{\dot{\mathbf{q}}_d\} + \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{J}}_{q,i} \end{bmatrix} \{\dot{\mathbf{q}}_i\} \right) \\
 \begin{Bmatrix} \alpha_{\phi 2} \\ \alpha_{\phi 3} \end{Bmatrix} &= -\begin{bmatrix} -L_2 \sin \phi_2 & L_3 \sin \phi_3 \\ L_2 \cos \phi_2 & -L_3 \cos \phi_3 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \\
 &\left( \begin{bmatrix} -L_2 \cos \phi_2 \omega_{\phi 2} & L_3 \cos \phi_3 \omega_{\phi 3} \\ -L_2 \sin \phi_2 \omega_{\phi 2} & L_3 \sin \phi_3 \omega_{\phi 3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_{\phi 2} \\ \omega_{\phi 3} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -L_1 \cos \phi_1 \\ -L_1 \sin \phi_1 \end{bmatrix} \omega_{\phi 1}^2 \right)
 \end{aligned} \tag{6.23}$$

Mediante las expresiones (6.18), (6.21) y (6.23), se calculan la posición, velocidad y aceleración angular del eslabón conducido para cada una de las posiciones angulares de la manivela. La figura (6.5) presenta la posición, velocidad y aceleración angular del eslabón conducido asumiendo una velocidad angular de la manivela constante,  $\omega_1 = 1$  rad/s.

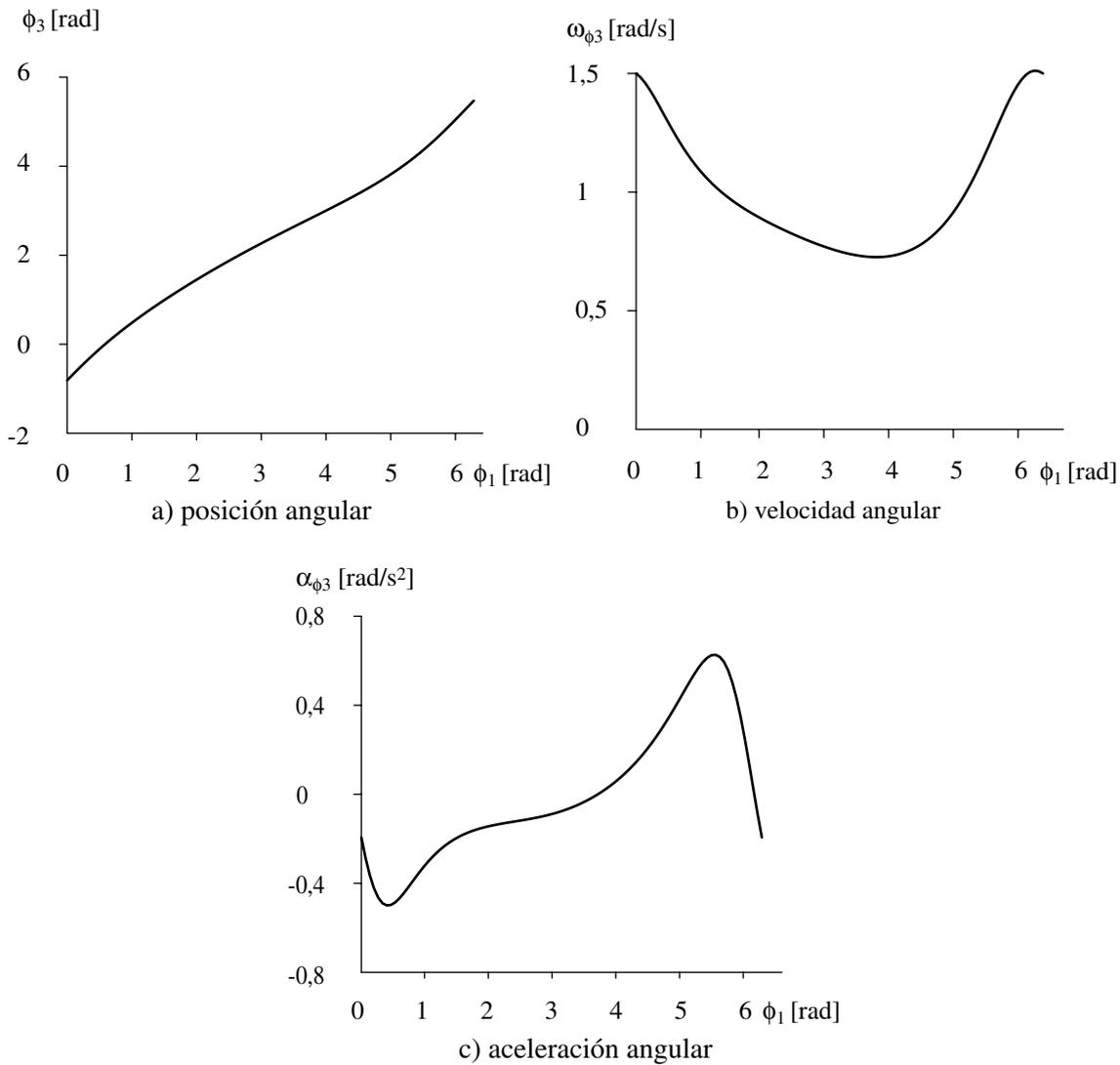
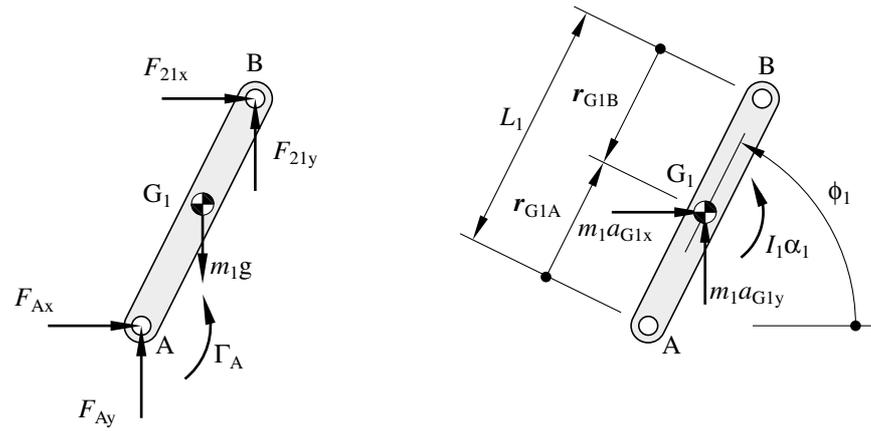


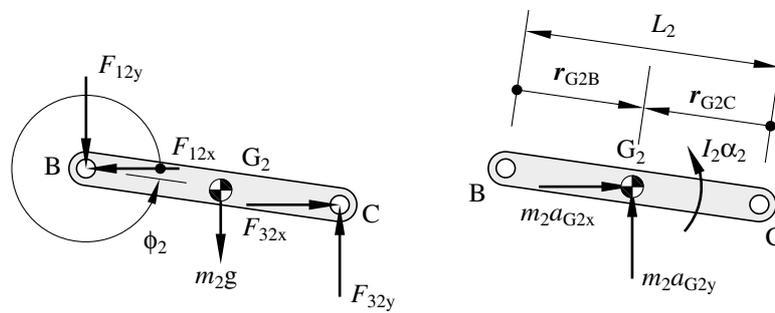
Figura 6.5 Cinemática del eslabón conducido del mecanismo de doble manivela

### 6.2.2 Análisis cinetostático del mecanismo de doble manivela

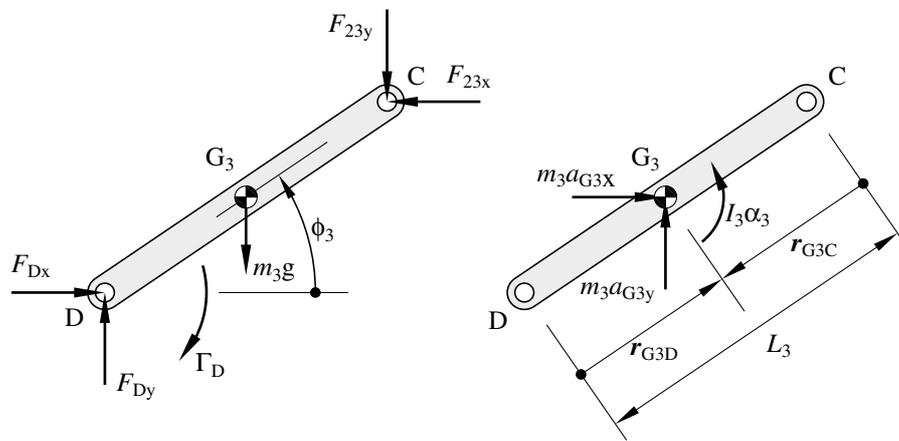
Una vez resuelta la configuración del mecanismo y obtenidas las velocidades y aceleraciones de los eslabones en función de la coordenada generalizada independiente  $-\phi_1-$  se procede a realizar el análisis cinetostático del mecanismo articulado. De la aplicación de los teoremas vectoriales a cada uno de los eslabones del mecanismo de doble manivela, se obtienen las reacciones en las articulaciones y el par motor requerido para cada una de las configuraciones del mecanismo. En la figura (6.6) se presentan las fuerzas y pares que actúan sobre cada uno de los eslabones.



a) Manivela



b) Acoplador



c) Eslabón conducido

Figura 6.6 Aplicaciones de los teoremas vectoriales sobre el mecanismo de doble manivela

De la aplicación de los teoremas vectoriales sobre la manivela se obtiene:

$$F_{Ax} + F_{21x} = m_1 a_{G1x}$$

$$F_{Ay} + F_{21y} - m_1 g = m_1 a_{G1y}$$

$$\Gamma_A + r_{G1A} F_{Ax} \operatorname{sen} \phi_1 - r_{G1A} F_{Ay} \cos \phi_1 - r_{G1B} F_{21x} \operatorname{sen} \phi_1 + r_{G1B} F_{21y} \cos \phi_1 = I_1 \alpha_1 \quad (6.24)$$

De la aplicación de los teoremas vectoriales al acoplador se obtienen las siguientes expresiones:

$$-F_{12x} + F_{32x} = m_2 a_{G2x}$$

$$-F_{12y} + F_{32y} - m_2 g = m_2 a_{G2y}$$

$$-r_{G2B} F_{12x} \operatorname{sen} \phi_2 + r_{G2B} F_{12y} \cos \phi_2 - r_{G1C} F_{32x} \operatorname{sen} \phi_2 + r_{G1C} F_{32y} \cos \phi_2 = I_2 \alpha_2 \quad (6.25)$$

De la aplicación de los teoremas vectoriales al eslabón conducido, se obtienen las siguientes expresiones:

$$-F_{23x} + F_{Dx} = m_3 a_{G3x}$$

$$-F_{23y} + F_{Dy} - m_3 g = m_3 a_{G3y}$$

$$r_{G3C} F_{23x} \operatorname{sen} \phi_3 - r_{G3C} F_{23y} \cos \phi_3 + r_{G1D} F_{Dx} \operatorname{sen} \phi_3 - r_{G3D} F_{Dy} \cos \phi_3 - \Gamma_D = I_3 \alpha_3 \quad (6.26)$$

Al aplicar el principio de acción y reacción en el conjunto de expresiones dadas por (6.24), (6.25) y (6.26), se reduce el número de incógnitas ya que:

$$\mathbf{F}_{jk} = -\mathbf{F}_{kj} \quad (6.27)$$

En el conjunto de las nueve expresiones existen 9 incógnitas; así pues se tiene un sistema de ecuaciones cuya solución da las fuerzas que actúan en las articulaciones del mecanismo y el par requerido en el eje del eslabón conductor.

### 6.3 COMPARACIÓN DE LAS REACCIONES EN LOS APOYOS Y DEL PAR ENTRE UN MECANISMO ARTICULADO Y UN ENGRANAJE NO CIRCULAR CON IDÉNTICA LEY DE MOVIMIENTO

Con el propósito de comparar la fluctuación del par motor o las fuerzas que se ejercen sobre el bastidor por un mecanismo articulado y por un engranaje no circular, bajo idénticas condiciones de operación, se diseña un engranaje no circular con la misma ley de desplazamiento que la del mecanismo de doble manivela con las dimensiones dadas en el apartado (6.2).

A pesar de tener solución analítica de la ley de desplazamiento del mecanismo articulado, tal como se pone de manifiesto en la expresión (6.18), se decide tomar una curva de Bézier que la aproxime. Las ordenadas de los puntos de control de la curva de Bézier, que definen la ley de desplazamiento, se obtienen mediante un proceso de optimización, basado en los algoritmos genéticos, que minimiza una función objetivo. La función objetivo se define, en este caso, como la suma de: i) el valor absoluto de la diferencia entre la ley de desplazamiento del mecanismo articulado y del engranaje no circular evaluadas en un conjunto de ángulos de giro del eslabón conductor, ii) el valor absoluto de la diferencia entre la primera derivada de la ley de desplazamiento de ambos mecanismos evaluadas en el conjunto de ángulos y iii) el valor absoluto de la diferencia entre la segunda derivada de la ley de desplazamiento de ambos mecanismos evaluadas en el conjunto de ángulos. En el anexo (A.1) se describe el proceso mencionado.

En el diseño de la ley de desplazamiento, se elige una curva de Bézier de grado 15 y con continuidad  $C^3$  entre tramos adyacentes con lo que se obtiene el grado de continuidad adecuado para este tipo de aplicaciones. Por lo tanto, la ley de desplazamiento del engranaje no circular requiere 16 puntos de control para su completa definición; las abscisas de los puntos de control están uniformemente distribuidos en el intervalo  $\varphi_1 = \{0, 2\pi\}$ .

De acuerdo con las propiedades de las curvas de Bézier, las primeras y últimas 3 ordenadas del vector de ordenadas se eligen para satisfacer los valores de la ley de desplazamiento, de la velocidad y aceleración del eslabón conducido en  $\varphi_1 = 0$  rad y en  $\varphi_1 = 2\pi$  rad; estos valores se obtienen del análisis cinemático del mecanismo articulado –figura (6.5). La satisfacción adicional del grado de continuidad  $C^3$  de la ley de desplazamiento depende de las ordenadas 4ª y 13ª; de esta forma se puede, por ejemplo, elegir arbitrariamente la 13ª ordenada y calcular

la 4ª ordenada. Por lo tanto, 7 de las 16 ordenadas, las primeras 4 y las últimas 3, son valores conocidos o dependientes. Las restantes 9 son los genes de cada uno de los individuos que conforman la población en el proceso de optimización basado en los algoritmos genéticos y conforman el conjunto de ordenadas de diseño de la ley de desplazamiento del engranaje no circular.

Para realizar el estudio de las reacciones en los apoyos y el momento requerido en el eje del eslabón conductor en ambos mecanismos bajo iguales condiciones de operación, se toma una velocidad angular constante en el eje conductor y un momento resistivo constante en el eje conducido:

$$\omega_1 = 13,82 \text{ rad/s}; \Gamma_D = 2 \text{ Nm}$$

En las tablas (6.1) y (6.2), se presenta la masa, el momento de inercia y la ubicación del centro de masa de los eslabones que conforman, respectivamente, el mecanismo articulado y el engranaje no circular. El mecanismo articulado se equilibra aplicando el método de los vectores linealmente independientes descrito ampliamente en [59, 71] –ver anexo (A.2).

Tabla 6.1 Propiedades de los eslabones del mecanismo de doble manivela

| Eslabón   | Masa<br>[kg] | Momento de Inercia,<br>respecto al centro de masa<br>[kg mm <sup>2</sup> ] | Ubicación del<br>centro de masa<br>[mm] |
|-----------|--------------|----------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------|
| Manivela  | 0,208        | 483,8                                                                      | (0, -12,8)                              |
| Acoplador | 0,073        | 59,57                                                                      | (37,5, 0)                               |
| Conducido | 0,270        | 928,7                                                                      | (0, -13,1)                              |

Tabla 6.2 Propiedades de las ruedas dentadas del engranaje

| Rueda dentada | Masa<br>[kg] | Momento de Inercia,<br>respecto al centro de rotación<br>[kg mm <sup>2</sup> ] | Ubicación del<br>centro de masa<br>[mm] |
|---------------|--------------|--------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------|
| Conductora    | 0,460        | 2053,05                                                                        | (6,48, -1,86)                           |
| Conducida     | 0,453        | 2027,77                                                                        | (7,05, 0,13)                            |

La ubicación del centro de masas de los eslabones del cuadrilátero articulado son referenciados al sistema coordenado de la figura (A.2.2) del anexo (A.2). En el caso de las ruedas dentadas, la ubicación de su centro de masas está referenciada con respecto al sistema coordenado fijo a la respectiva rueda.

En la figura (6.7) se presenta la comparación del momento requerido en el eje conductor, tanto del engranaje no circular como del mecanismo articulado, para funcionar bajo las condiciones dadas.

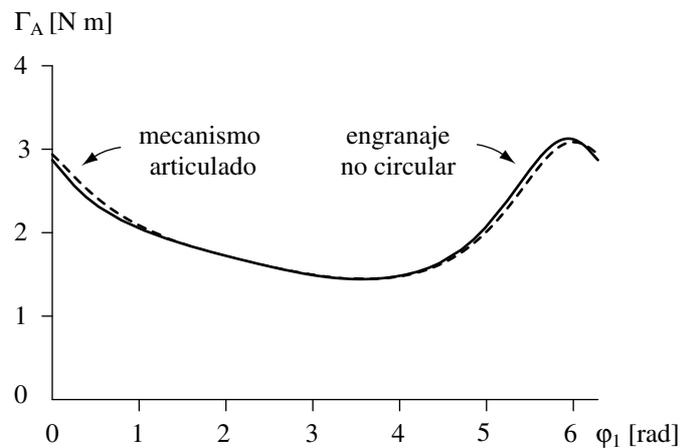


Figura 6.7 Comparación de los pares en el eje conductor

En las figuras (6.8) y (6.9) se presentan la comparación de reacciones en los apoyos fijos de los eslabones conductor y conducido en ambos mecanismos. Las componentes vertical y horizontal de las reacciones en los apoyos presentan mayores oscilaciones por ciclo en el mecanismo articulado que las reacciones en el engranaje no circular. Los valores medio y eficaz de los pares y las reacciones en el engranaje y en el mecanismo articulado se resumen en la tabla (6.3). Las fluctuaciones del par motor en ambos mecanismos es muy similar; sin embargo las reacciones en los apoyos del mecanismo articulado presenta grandes variaciones, en el engranaje no circular las reacciones son más uniformes. En la figura (6.10) se tiene la representación polar de las reacciones de ambos mecanismos.

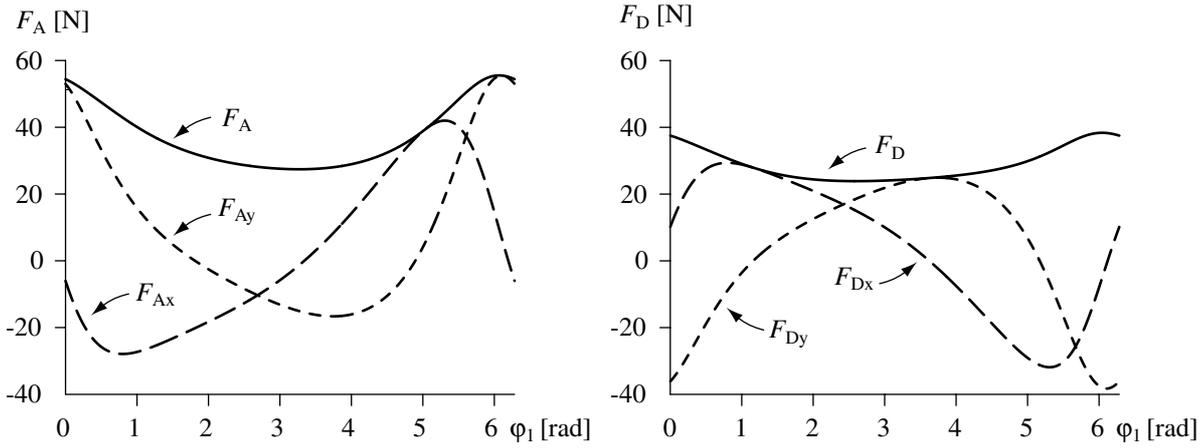


Figura 6.8 Reacciones en el mecanismo de doble manivela

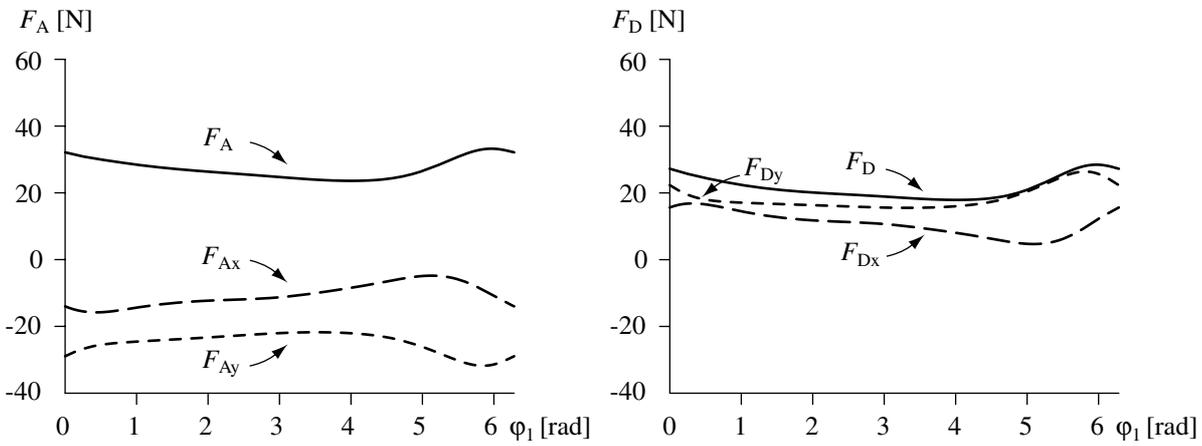


Figura 6.9 Reacciones en el engranaje no circular

Tabla 6.3 Variación del par motor y de las reacciones en los apoyos

|                            |          | Engranaje   |        | Mecanismo   |        |
|----------------------------|----------|-------------|--------|-------------|--------|
|                            |          | Valor medio | Eficaz | Valor medio | Eficaz |
| Par motor $\Gamma_A$ [N m] |          | 2           | 0,75   | 2           | 0,73   |
| $F_A$ [N]                  | $ F_A $  | 27,25       | 4,21   | 27,9        | 11,67  |
|                            | $F_{Ax}$ | -10,65      | 4,69   | 3,7         | 28,86  |
|                            | $F_{Ay}$ | -24,86      | 4,26   | -2,4        | 28,69  |
| $F_D$ [N]                  | $ F_D $  | 21,54       | 4,63   | 28,8        | 6,74   |
|                            | $F_{Dx}$ | 10,65       | 5,05   | -3,7        | 28,84  |
|                            | $F_{Dy}$ | 18,38       | 4,69   | -3          | 28,67  |

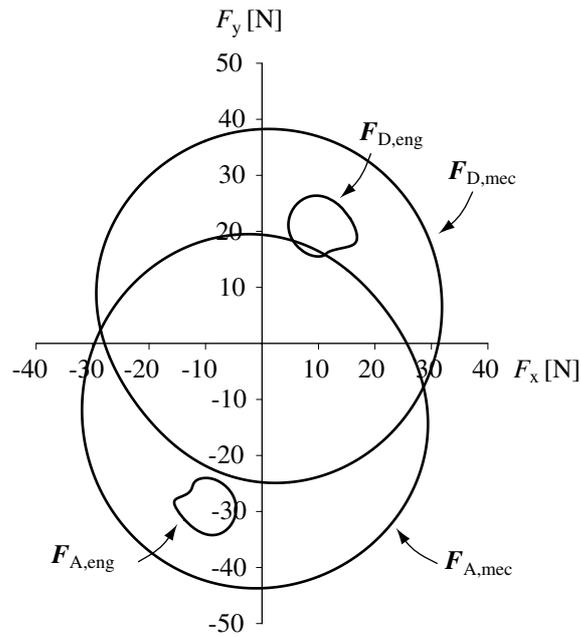


Figura 6.10 Representación polar de las reacciones en los apoyos en el engranaje no circular y en el mecanismo articulado

La gran variación en ambas componentes de las reacciones en los apoyos del mecanismo articulado, produce una mayor vibración y mayores esfuerzos de fatiga sobre los pivotes fijos que las reacciones del engranaje no circular. La magnitud de estas fuerzas en el engranaje no circular es del mismo orden que las del mecanismo articulado con la salvedad que la variación de sus componentes oscilatorias es significativamente menor.

La fuerza de contacto entre los dientes de las ruedas dentadas del engranaje no circular, es la principal causa de las reacciones en los apoyos fijos del engranaje no circular. Las fuerzas debidas a la inercia son pequeñas ya que las ruedas dentadas están prácticamente balanceadas y operan con velocidades bajas.

El punto de aplicación de la fuerza entre las ruedas dentadas es el punto de contacto entre los dientes, esta fuerza pasa por el centro instantáneo de rotación relativo entre las ruedas, ubicado sobre la línea de centros. La ubicación con respecto a los pivotes fijos se obtiene del radio de la curva primitiva de cada rueda y estos radios presentan en general variaciones pequeñas. Cuando la rueda conductora gira un ángulo  $\varphi_1$ , la distancia a lo largo de la línea de centros, desde el pivote fijo de la rueda conductora hasta el centro instantáneo de rotación relativo entre las ruedas es  $r_1(\varphi_1)$  –dado por la expresión (3.51).

La dirección de la fuerza de contacto varía al girar las ruedas dentadas ya que coincide con la del vector tangente a las curvas primitivas en el centro instantáneo de rotación relativo girado un ángulo, en sentido antihorario, igual al ángulo de presión de la cremallera  $-\alpha$ . El vector tangente forma un ángulo  $\beta_1$  –ver figura (4.4)– con la línea de centros con lo que la orientación de la fuerza de contacto entre dientes con respecto a dicha recta es  $\alpha + \beta_1$ , en la figura (6.11) se muestra la variación de este ángulo. Las curvas primitivas de las ruedas dentadas no presentan cambios bruscos en su geometría, por lo que el ángulo entre la línea de centros y el vector tangente  $-t$  presenta variaciones pequeñas.

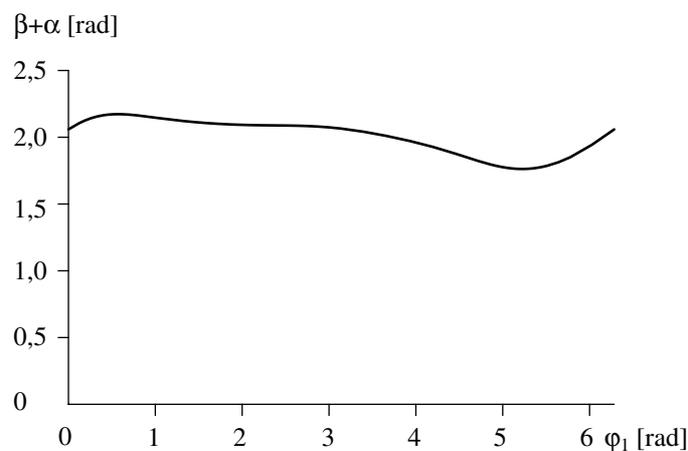


Figura 6.11 Dirección de la fuerza de contacto con respecto a la línea de centros

Al no variar excesivamente ni la dirección ni el punto de aplicación de la fuerza de contacto, su variación está muy ligada a la variación del par transmitido por el engranaje. En la aplicación estudiada este par es sensiblemente constante –par resistente más par de inercia de la rueda conducida– por lo que la fuerza de contacto y por ende las reacciones en los apoyos tienen poca variación.

En el mecanismo articulado –figura (6.4)– los puntos de aplicación de las fuerzas entre los eslabones son las articulaciones B y C que dan giros completos alrededor de los articulaciones fijas A y D, respectivamente. Dichas fuerzas tienen aproximadamente, si se desprecia la inercia del acoplador, la dirección de la recta BC. Así pues, en estas fuerzas varían extraordinariamente tanto la posición de su punto de aplicación como su dirección. Al igual que en la aplicación estudiada, el par transmitido es sensiblemente constante pero ahora ello

no condiciona que la variación de la fuerza entre los eslabones sea pequeña pues además de la variación de su dirección, con BC como su módulo, la dirección de la fuerza debe ajustarse para producir el momento adecuado.

En la figura (6.12) se muestran los ángulos de transmisión entre los eslabones del mecanismo articulado. En el análisis de la fuerza transmitida entre los eslabones, es importante estudiar tanto el ángulo de transmisión entre el acoplador y el eslabón conducido  $-\gamma-$  como el ángulo de transmisión entre el acoplador y el eslabón conductor  $-\gamma_{12}$ . Cuando estos ángulos son pequeños, la fuerzas entre los eslabones aumentan y una pequeña fricción puede causar que el mecanismo se bloquee [69]. En general, el ángulo de transmisión máximo debe ser menor a  $140^\circ$  y el mínimo mayor a  $40^\circ$  si en el mecanismo utilizado se generan fuerzas muy altas [69].

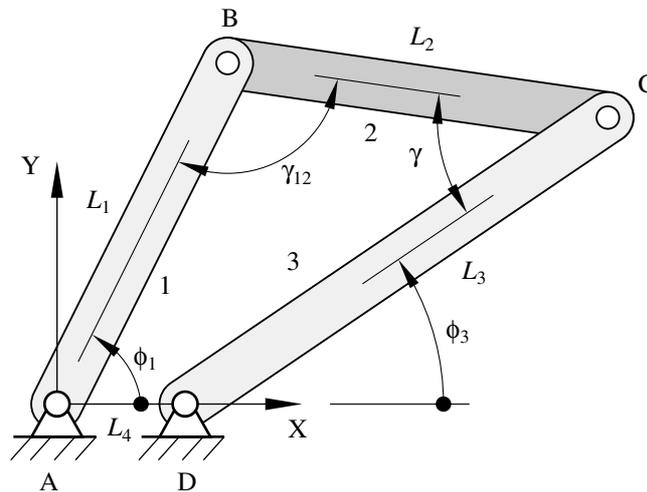


Figura 6.12 Ángulos de transmisión en el mecanismo articulado

El ángulo de transmisión entre el acoplador y el eslabón conducido se obtiene del análisis geométrico de la figura (6.12). Aplicando el teorema de coseno a los triángulos con vértices DAB y BCD se obtiene la siguiente relación:

$$\gamma = \arccos\left(\frac{L_2^2 + L_3^2 - L_1^2 - L_4^2 + 2L_1L_4\cos\phi_1}{2L_2L_3}\right) \quad (6.28)$$

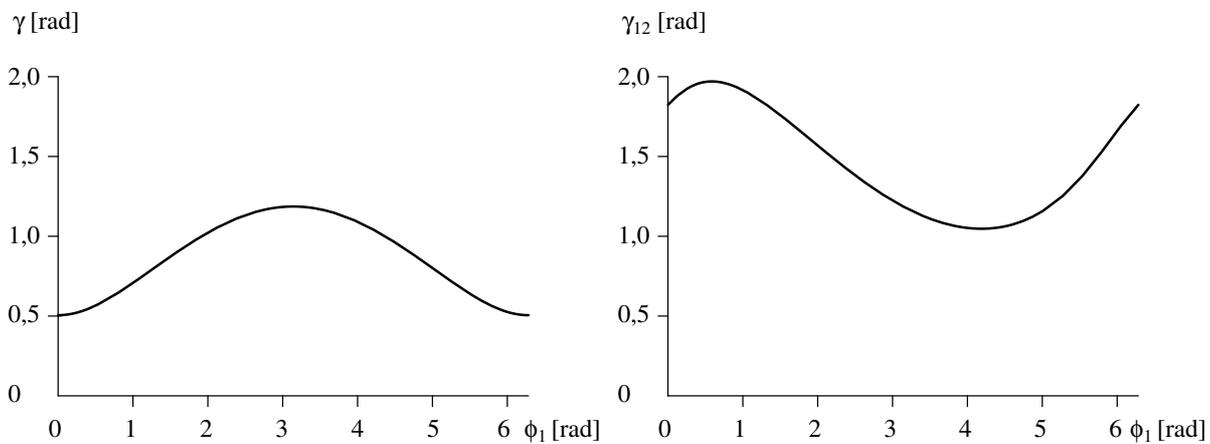
El ángulo de transmisión entre el acoplador y el eslabón conductor  $-\gamma_{12}-$  se determina teniendo en cuenta que en un cuadrilátero la suma de ángulos interiores es  $2\pi$ :

$$\phi_1 + (\pi - \phi_3) + \gamma + \gamma_{12} = 2\pi \tag{6.29}$$

ó

$$\gamma_{12} = \pi + \phi_3 - \phi_1 - \gamma \tag{6.30}$$

En la figura (6.13) se presentan la variación de los ángulos de transmisión en función de la posición angular del eslabón conductor y se observa una alta variación de los ángulos de transmisión entre los eslabones del cuadrilátero articulado.



a) Ángulo de transmisión entre el acoplador y el eslabón conducido

b) Ángulo de transmisión entre el acoplador y el eslabón conductor

Figura 6.14 Ángulos de transmisión en el mecanismo articulado

El ángulo de transmisión entre el acoplador y el eslabón conducido tiene valores muy bajos, con lo que el valor de la fuerza entre estos eslabones requiere de valores altos para compensar el par en el eje del eslabón conducido. La alta variación de los ángulos de transmisión, ocasiona una alta variación en la magnitud de la fuerzas entre los eslabones y por ende una mayor variación de la magnitud de las reacciones en los apoyos fijos del mecanismo articulado.