

Capítulo 5

CONTRASTACIÓN ANALÍTICA Y EXPERIMENTAL

5.1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo se procede a la contrastación del modelo desarrollado mediante la utilización de resultados procedentes de soluciones analíticas, de otros programas y de ensayos experimentales.

Se pretende verificar el buen funcionamiento, tanto del modelo en sí mismo como de su implementación en un programa de cálculo. En los ejemplos escogidos y en el análisis de los resultados se ha tenido siempre en cuenta esta doble finalidad.

Puesto que en el análisis diferido de estructuras de hormigón intervienen una gran cantidad de factores que ocasionan respuestas que los modelos y sistemas de cálculo actuales no siempre son capaces de reproducir con la misma precisión, los casos presentados se han analizado con distintos procedimientos, para poner de manifiesto la variabilidad que se observa entre distintos métodos. A lo anterior habría que añadir la dificultad en la determinación de las propiedades del hormigón y los distintos valores que proponen los diferentes códigos. Por otra parte, siendo una de las principales aportaciones del modelo su aptitud para considerar el efecto del hormigón traccionado entre fisuras, tanto para situaciones de carga instantánea como permanente, se ha hecho hincapié en la consideración de este fenómeno en las diversas situaciones presentadas.

En el desarrollo del capítulo, se ha realizado en primer lugar la validación del comportamiento seccional, tomando en consideración secciones no fisuradas, totalmente fisuradas y teniendo en cuenta el efecto de *tension stiffening*. Verificada la idoneidad para el análisis seccional se ha procedido a comprobar la respuesta estructural a nivel de barra. Finalmente se han contrastado los resultados obtenidos mediante el modelo comparándolos con los de una base de pruebas de referencia (*Benchmark*) y con los obtenidos por otros procedimientos propuestos en diferentes manuales y códigos.

5.2. CONTRASTACIÓN ANALÍTICO-NUMÉRICA DEL COMPORTAMIENTO SECCIONAL

5.2.1. Introducción

En este apartado se pretende contrastar el funcionamiento del modelo de análisis seccional y verificar que su implementación en un programa informático se ha realizado de manera satisfactoria. Para ello se comparan los resultados numéricos con valores obtenidos por métodos que puedan ser considerados correctos y que sean comúnmente aceptados por la comunidad científica.

Los ejemplos desarrollados son relativamente simples, sin embargo esta misma sencillez es la que posibilita una resolución analítica que permite validar los resultados numéricos y la correcta implementación del modelo.

5.2.2. Sección no fisurada

Se analiza el comportamiento instantáneo y diferido de una sección rectangular con las dimensiones especificadas en la Figura 5.1. El armado consiste en una capa de acero pasivo con un área de 600 mm^2 . Se trata de la sección central de una viga simplemente apoyada de 5 m de longitud con una carga repartida de 15 kN/m , correspondiéndole, por tanto, un momento flector $M = 46875 \text{ kN}\cdot\text{m}$.

Los módulos de deformación del hormigón E_c y del acero E_s , así como los coeficientes de fluencia ϕ , de envejecimiento χ y de retracción ε_{cs} , son los siguientes

$$E_c = 30160 \text{ MPa}$$

$$\phi(t, t_0) = 2.294$$

$$\varepsilon_{cs}(t, t_0) = 0.0$$

$$E_s = 206000 \text{ MPa}$$

$$\chi(t, t_0) = 0.841$$

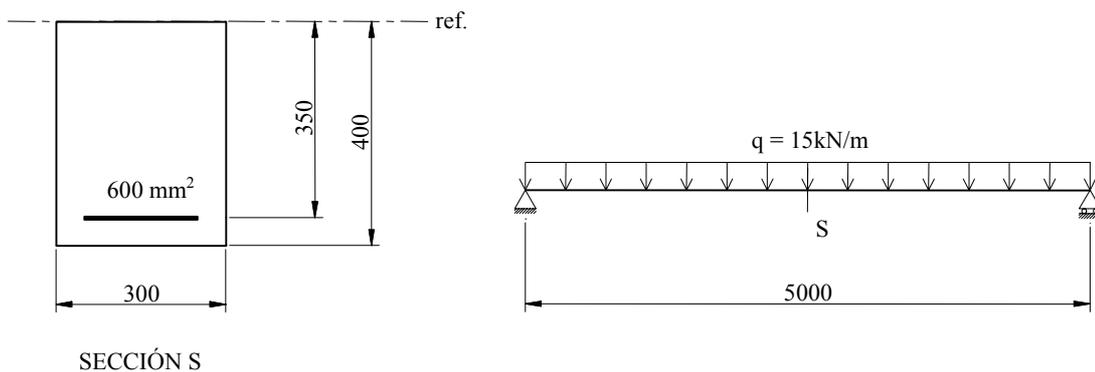


Figura 5.1 – Sección analizada

Tal como se ha visto en el Capítulo 3, las ecuaciones básicas que rigen el comportamiento de una sección sometida a un momento flector M y a un esfuerzo normal N , son las siguientes

$$\varepsilon = \varepsilon_0 - yC \quad \sigma_i = E_i(\varepsilon_0 - yC) \quad (5.1)$$

$$\varepsilon_0 = \frac{BM + IN}{E_c(AI - B^2)} \quad C = \frac{AM + BN}{E_c(AI - B^2)} \quad (5.2)$$

donde (5.2) se obtiene de desarrollar la ecuación (3.23) para carga instantánea suponiendo la sección homogeneizada a hormigón. La deformación en la fibra de referencia ε_0 y la curvatura C se hallan a partir del área, momento estático y momento de inercia de la sección homogeneizada A, B, I y el módulo de deformación del hormigón E_c .

Para la determinación analítica del comportamiento diferido se usará el Método del Módulo Efectivo Actualizado con la Edad (AAEMM), aproximación que permite prescindir del procedimiento de cálculo paso a paso, combinado con un procedimiento de relajación tal como se propone en las referencias [119,107,111].

Inicialmente se supone que los materiales de la sección con comportamiento diferido pueden deformarse libremente. A continuación, para mantener la compatibilidad y el equilibrio, se aplican consecutivamente unas tensiones de restricción σ_r y unos esfuerzos de restitución ΔN , ΔM , que producen unos incrementos de tensión entre t_0 y t de valor $\Delta\sigma$.

$$\bar{E}_c = \frac{E_c}{1 + \chi\phi} \quad (5.3)$$

$$\sigma_r = -\bar{E}_c[\phi(\varepsilon_0 - yC) + \varepsilon_{cs}] \quad (5.4)$$

$$\Delta N = \bar{E}_c[\phi(A_c\varepsilon_0 - B_cC) + \varepsilon_{cs}A_c] \quad \Delta M = \bar{E}_c[\phi(B_c\varepsilon_0 + I_cC) + \varepsilon_{cs}B_c] \quad (5.5)$$

$$\Delta\sigma = \sigma_r + \bar{E}_c(\Delta\varepsilon_0 - y\Delta C) \quad (5.6)$$

$$\sigma_r = -\bar{E}_c[\phi(\varepsilon_0 - Cy) + \varepsilon_{cs}] \quad (5.7)$$

donde intervienen las propiedades geométricas del área de hormigón A_c , B_c , I_c , el módulo efectivo actualizado con la edad \bar{E}_c y los coeficientes de fluencia ϕ , de envejecimiento χ y de retracción ε_{cs} , entre t y t_0 .

Análisis instantáneo

Tomando como referencia la fibra superior, las propiedades de la sección homogeneizada son

$$n = \frac{206000}{30160} = 6.83$$

$$A = 123498 \text{ mm}^2 \quad B = -2.5224 \times 10^7 \text{ mm}^3 \quad I = 6.8285 \times 10^9 \text{ mm}^4$$

con lo que las deformaciones

$$\begin{aligned} \varepsilon_0(t_0) &= -189.3 \times 10^{-6} \\ \varepsilon_s(t_0) &= 135.1 \times 10^{-6} \\ C(t_0) &= 0.927 \times 10^{-6} \text{ mm}^{-1} \end{aligned}$$

y las tensiones

$$\begin{aligned} \sigma_0(t_0) &= 30160(-189.3 \times 10^{-6}) = -5.7 \text{ MPa} \\ \sigma_s(t_0) &= 2.06 \times 10^6 (135.1 \times 10^{-6}) = 27.8 \text{ MPa} \end{aligned}$$

Análisis diferido

El módulo efectivo y el factor de homogeneización ajustados con la edad son

$$\bar{E}_c = \frac{30160}{1 + 0.841 \times 2.294} = 10296.1 \text{ MPa}$$

$$\bar{n} = \frac{206000}{10296.1} = 20.0$$

y las propiedades del área de hormigón y de la sección homogeneizada ajustada con la edad

$$\begin{aligned} A_c &= 119400 \text{ mm}^2 & B_c &= -23.79 \times 10^6 \text{ mm}^3 & I_c &= 6.3265 \times 10^9 \text{ mm}^4 \\ \bar{A} &= 131400 \text{ mm}^2 & \bar{B} &= -27.99 \times 10^6 \text{ mm}^3 & \bar{I} &= 7.7965 \times 10^9 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

siendo los esfuerzos de restitución

$$\begin{aligned} \Delta N &= 10296.1 [2.294 (119400(-189.3) + 2.379 \times 10^7 \times 0.927)] 10^{-6} = -13.0 \text{ kN} \\ \Delta M &= 10296.1 [2.294 (-2.379 \times 10^7(-189.3) + 6.3265 \times 10^9 \times 0.927)] 10^{-6} = 32134 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

y los incrementos de deformaciones y tensiones

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon_0(t, t_0) &= -403.5 \times 10^{-6} & \Delta C(t, t_0) &= 1.849 \times 10^{-6} \\ \Delta \sigma_0(t, t_0) &= 0.32 \text{ MPa} & \Delta \sigma_s(t, t_0) &= 50.2 \text{ MPa} \end{aligned}$$

resultando

$$\varepsilon_0(t) = 592.8 \times 10^{-6} \quad C(t) = 2.776 \times 10^{-6} \text{ mm}^{-1} \quad \sigma_0(t) = -5.4 \text{ MPa} \quad \sigma_s(t) = 78.0 \text{ MPa}$$

Los valores iniciales y finales de tensiones y deformaciones se ilustran en la Figura 5.2.

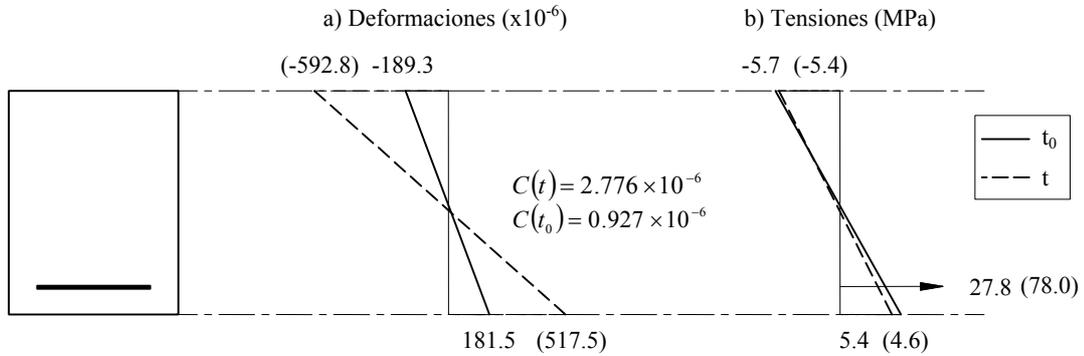


Figura 5.2 – Solución analítica: diagramas de tensiones y deformaciones

Análisis con modelo numérico

Para efectuar el análisis comparativo usando el modelo implementado, se ha dividido la sección en 50 capas y se han considerado 11 subetapas en el tiempo.

Si bien se puede obtener un listado de la situación tensodeformacional en todas las capas, para simplificar la presentación se muestran los resultados en las fibras extremas y en el acero.

***** RESULTADOS ANÁLISIS SECCIONAL *****

**SECCIÓN = 1 **INSTANTE = 1

**Efectos instantáneos

Axil = .0
 Momento = 46875.0

Def. total fibra referencia = -.18939E-03 Curvatura total (m^{-1}) = .92723E-03

HORMIGÓN

TRAP	CAPA	Y	DEF.TOTAL	DEFM	DEFNM	DTRAC	SIGMA	EC
1	1	-.396	.17779E-03	.17779E-03	.00000E+00	.00000E+00	5.362	3016E+11
1	50	-.004	-.18569E-03	-.18569E-03	-.14552E-10	.00000E+00	-5.600	3016E+11

CAPAS ACERO

NUM.	Y	DEF. TOTAL	SIGMA	ES
1	-.350	.13514E-03	27.838	.206E+12

```

**SECCIÓN = 1      **INSTANTE = 12
-----
**Efectos diferidos

Axil = .0
Momento = 46875.0

Def. total fibra referencia = -.59295E-03   Curvatura total (m-1)= .27761E-02

**HORMIGÓN**
TRAP  CAPA  Y   DEF.TOTAL  DEFM    DEFNM    DTRAC    SIGMA    EC
1      1    -396  .50637E-03  .15077E-03  .35560E-03  .00000E+00  4.547  .3016E+11
1      50   -004  -.58184E-03  -.17552E-03  -.40632E-03  .00000E+00  -5.294  .3016E+11

**CAPAS ACERO**
NUM.  Y   DEF. TOTAL  SIGMA  ES
1     -350  .37867E-03  78.007  .206E+12

*****

```

En el listado anterior quedan indicadas la deformación unitaria total de cada capa *DEF. TOTAL*, la deformación mecánica *DEFM*, la no mecánica *DEFNM*, la deformación de tracción *DTRAC* (corresponde a ϵ_{tr} definida en el Capítulo 3), la tensión *SIGMA* y la posición respecto de la fibra de referencia *Y*.

Como se puede ver hay una absoluta concordancia para deformación y curvatura entre los resultados del modelo numérico y los analíticos.

5.2.3. Sección fisurada

Se analiza el comportamiento instantáneo y diferido de la sección indicada, pero suponiendo una resistencia a la tracción en el hormigón de valor nulo.

En el estudio analítico se van a utilizar las ecuaciones (5.1) a (5.7). La posición de la línea neutra depende de las características de la sección y de la excentricidad del axil aplicado M/N , obteniéndose, en general, una ecuación de tercer grado (5.8). Para el caso de axil nulo, la línea neutra pasa por el baricentro de la sección homogeneizada, planteándose una ecuación de segundo grado (5.9) que proporciona la posición de dicha línea.

$$\frac{\int_{y_n}^{y_c} y(y_n - y) dA + n \Sigma [A_s y_s (y_n - y_s)]}{\int_{y_n}^{y_c} (y_n - y) dA + n \Sigma [A_s (y_n - y_s)]} - \frac{M}{N} = 0 \quad (5.8)$$

$$\int_{y_n}^{y_c} (y_n - y) dA + n \Sigma [A_s (y_n - y_s)] = 0 \quad (5.9)$$

En las ec. (5.8) y (5.9) los valores de y_c , y_n son las ordenadas de la fibra más comprimida y de la línea neutra respecto del eje de referencia y A_s , y_s son el área y posición de las capas de acero, respectivamente.

Hay que tener en cuenta, además, que los efectos diferidos provocan un desplazamiento de la línea neutra, que en un estudio analítico puede considerarse o no, según la rigurosidad que se pretenda. En el caso que nos ocupa se han usado tres posibles procedimientos para solucionar la sección, comparándolos entre ellos y con los resultados proporcionados por el programa implementado.

Análisis instantáneo

Tomando como referencia la fibra superior, lo cual la posición de la línea neutra y las propiedades de la sección homogeneizada son

$$\begin{aligned} n &= 6.83 & y_n &= -85.07 \text{ mm} \\ A &= 29619 \text{ mm}^2 & B &= -2519836 \text{ mm}^3 & I &= 563.56 \times 10^6 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

con (5.1) y (5.2) se hallan las deformaciones y las tensiones

$$\begin{aligned} \varepsilon_0(t_0) &= -378.7 \times 10^{-6} & \varepsilon_s(t_0) &= 1179.2 \times 10^{-6} & C(t_0) &= 4.451 \times 10^{-6} \text{ mm}^{-1} \\ \sigma_0(t_0) &= -11.4 \text{ MPa} & \sigma_s(t_0) &= 242.9 \text{ MPa} \end{aligned}$$

Análisis diferido

Primer método

Mediante este método, expuesto por Ghali [107], Gilbert [49] y Ghali y Favre [111], entre otros, se supone que el área efectiva de hormigón se mantiene constante en el tiempo, lo cual permite calcular los efectos instantáneos y diferidos por separado y obtener el resultado final aplicando el principio de superposición, de forma similar a lo que se hizo en la sección no fisurada. En general la fluencia y la retracción causarán un desplazamiento de la línea neutra de manera que aumenta el área de hormigón comprimido. El error cometido con este planteamiento suele ser de poca importancia debido a la pequeña magnitud de la resultante en la zona no considerada, redundando, en cambio, en una simplificación importante del problema.

Las propiedades del área de hormigón y de la sección homogeneizada ajustada con la edad

$$\begin{aligned} \bar{E}_c &= 10296.1 \text{ MPa} & \bar{n} &= 20.0 \\ A_c &= 25521 \text{ mm}^2 & B_c &= -1.086 \times 10^6 \text{ mm}^3 & I_c &= 61.564 \times 10^6 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

$$\bar{A} = 37521 \text{ mm}^2 \quad \bar{B} = -5.285 \times 10^6 \text{ mm}^3 \quad \bar{I} = 1.5316 \times 10^9 \text{ mm}^4$$

los esfuerzos de restitución

$$\Delta N = -11.4 \text{ kN} \quad \Delta M = 3237.9 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

y las deformaciones y tensiones

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon_0(t, t_0) &= -518.8 \times 10^{-6} & \Delta C(t, t_0) &= 1.585 \times 10^{-6} \\ \Delta \sigma_0(t, t_0) &= 3.6 \text{ MPa} & \Delta \sigma_s(t, t_0) &= 7.4 \text{ MPa} \end{aligned}$$

$$\varepsilon_0(t) = 897.4 \times 10^{-6} \quad C(t) = 6.036 \times 10^{-6} \text{ mm}^{-1} \quad \sigma_0(t) = -7.8 \text{ MPa} \quad \sigma_s(t) = 250.3 \text{ MPa}$$

Los valores de tensiones y deformaciones se muestran en la Figura 5.3.

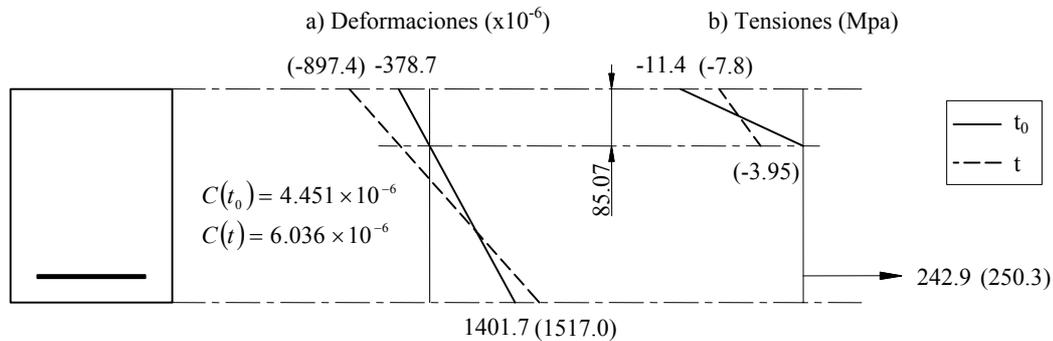


Figura 5.3 – Solución analítica (1): diagramas de tensiones y deformaciones

Segundo método

Para efectuar un análisis más estricto, el área de hormigón comprimido debería modificarse de acuerdo con la nueva posición de la línea neutra. Para tener en cuenta este efecto Ghali [107] y Ghali y Elbadry [108] proponen un método iterativo que considera como área resistente de hormigón, en el análisis diferido, la que se obtiene por la prolongación recta del diagrama de tensiones hasta el valor cero. Para el cálculo de los esfuerzos de restitución se sigue tomando el área inicial comprimida en el análisis instantáneo. El cálculo debe repetirse hasta que el valor de la posición de la línea neutra usado en el cálculo coincida con el diagrama de tensiones final.

Siguiendo el procedimiento indicado, se parte de los resultados obtenidos en el cálculo anterior, de acuerdo con el esquema de la Figura 5.4.

Con cuatro iteraciones se llega a los siguientes resultados, representados en la Figura 5.5

$$\varepsilon_0(t) = -767.8 \times 10^{-6} \quad C(t) = 5.895 \times 10^{-6} \quad \sigma_0(t) = -6.5 \text{ MPa} \quad \sigma_s(t) = 266.8 \text{ MPa}$$

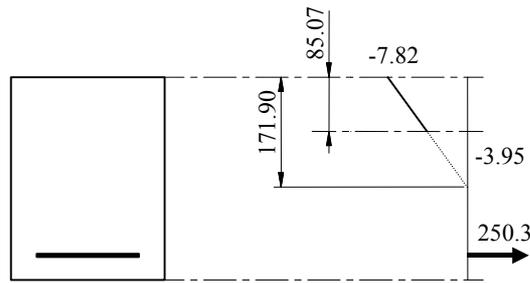


Figura 5.4 – Solución analítica (2): Primera iteración

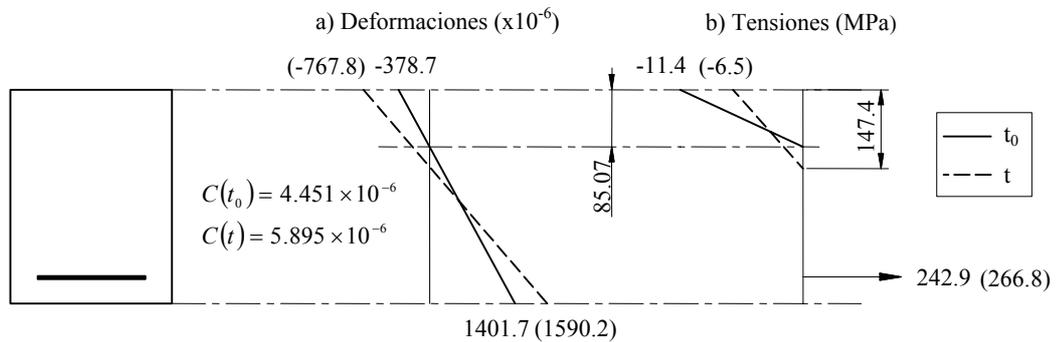


Figura 5.5 – Solución analítica (2): diagramas de tensiones y deformaciones

Tercer método

Otro procedimiento que permite tener en cuenta el desplazamiento de la línea neutra y posibilita la aplicación de un incremento de carga posterior, consiste en resolver la sección por el primer método expuesto, aplicar unos esfuerzos instantáneos (N , M), que anulen las tensiones en el hormigón (similaramente a un cálculo de esfuerzos de descompresión) y volverlos a aplicar como carga instantánea restableciendo el equilibrio inicial. Este procedimiento es el que utiliza el programa CRACK [110], cuando se aplica una segunda etapa de carga con valores nulos de los esfuerzos.

Los valores de N y M que anulan las tensiones en el hormigón se determinan mediante las siguientes expresiones [111]

$$N = (-A\sigma_0 + B\gamma) \quad M = (B\sigma_0 - I\gamma) \quad (5.10)$$

donde A , B , I , son las propiedades de la sección homogeneizada respecto de la fibra de referencia, σ_0 la tensión en la fibra de referencia y γ la pendiente del diagrama de tensiones en el hormigón.

Se parte de los resultados obtenidos con el primer método, y el cálculo de M y N según las ecuaciones (5.10) proporciona los siguientes valores

$$N = 117.1 \text{ kN}$$

$$M = -5903.8 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

***** RESULTADOS ANÁLISIS SECCIONAL *****

**SECCIÓN = 1 **INSTANTE = 1

**Efectos instantáneos

Axil = .0
 Momento = 46875.0

Def. total fibra referencia = -.37893E-03 Curvatura total (m⁻¹)= .44525E-02

HORMIGÓN

TRAP	CAPA	Y	DEF.TOTAL	DEFM	DEFNM	DTRAC	SIGMA	EC
1	1	-.396	.13842E-03	.13842E-03	.00000E-00	.13842E-02	0.000	3016E+11
1	50	-.004	-.36118E-03	-.36118E-03	.00000E-00	.00000E+00	-10.893	3016E+11

CAPAS ACERO

NUM.	Y	DEF. TOTAL	SIGMA	ES
1	-.350	.11794E-02	242.953	.206E+12

**SECCIÓN = 1 **INSTANTE = 12

**Efectos diferidos

Axil = .0
 Momento = 46875.0

Def. total fibra referencia = -.81504E-03 Curvatura total (m⁻¹)= .59155E-02

HORMIGÓN

TRAP	CAPA	Y	DEF.TOTAL	DEFM	DEFNM	DTRAC	SIGMA	EC
1	1	-.396	.15275E-02	.15275E-02	.00000E+00	.15275E-02	0.000	.3016E+11
1	50	-.004	-.79139E-03	-.23048E-03	-.56091E-03	.00000E+00	-6.951	.3016E+11

CAPAS ACERO

NUM.	Y	DEF. TOTAL	SIGMA	ES
1	-.350	.12554E-02	258.604	.206E+12

Los diagramas de tensiones y deformaciones obtenidos son

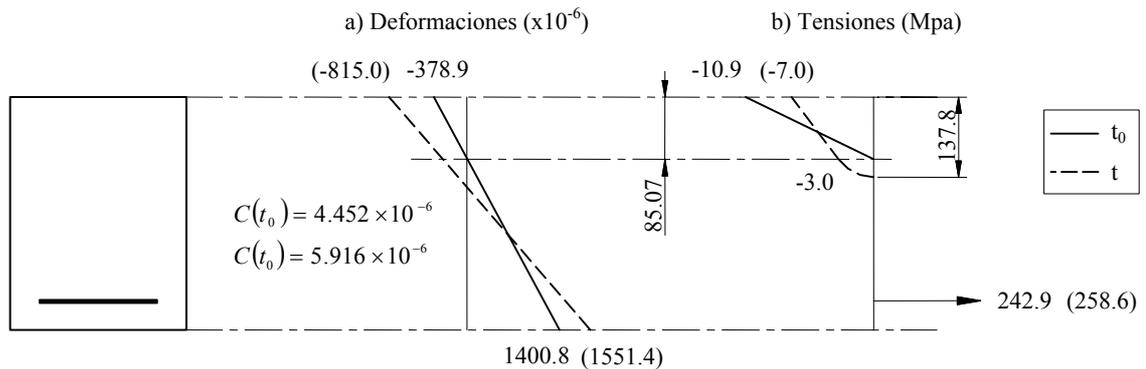


Figura 5.7 – Solución numérica: diagramas de tensiones y deformaciones

Resumen análisis diferido

Los resultados obtenidos por los diversos métodos empleados en el análisis diferido de la sección fisurada se exponen en la Tabla 5.1.

Método	Numérico	1		2		3	
	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>b/a</i>	<i>c</i>	<i>c/a</i>	<i>d</i>	<i>d/a</i>
$\varepsilon_0(t) \times 10^{-6}$	-815.0	-897.4	1.10	-767.8	0.94	-870.3	1.07
$C(t) \times 10^{-6} (mm^{-1})$	5.916	6.036	1.02	5.895	0.99	6.093	1.03
$\sigma_0(t) (MPa)$	-7.0	-7.8	1.11	-6.5	0.93	-7.0	1.00
$\sigma_s(t) (MPa)$	258.6	250.3	0.97	266.8	1.03	260.0	1.01
$y_n (mm)$	137.8	-	-	147.4	1.07	148.5	1.08

Tabla 5.1 – Sección fisurada: Análisis diferido

Cabe señalar la buena coincidencia, en todos los casos, del valor de la curvatura, que es el parámetro a usar en el cálculo de flechas. Los demás resultados nos pueden dar una idea de las variaciones que cabe esperar como consecuencia del método de cálculo que se utilice.

5.2.4. Sección fisurada considerando *tension stiffening*

Si bien el estudio seccional de la influencia de la colaboración del hormigón traccionado entre fisuras se ha realizado de una manera exhaustiva en el Capítulo 4, en este apartado se pretende completar la verificación que se ha llevado a cabo para el caso de no fisurada y totalmente fisurada, incluyendo la consideración del efecto de *tension stiffening*.

Se ha optado por comparar el valor de las curvaturas mediante dos procedimientos suficientemente contrastados. En primer lugar usando el método de

interpolación expuesto en el MFD [59], y a continuación empleando el programa CRACK, desarrollado por los profesores Ghali y Elbadry [110]. Se considera una resistencia a tracción del hormigón de 2.19 MPa.

Método MFD

Se basa en interpolar los valores de sección no fisurada (estado I) y totalmente fisurada (estado II₀), usando las ecuaciones (4.12) en flexión simple, con lo cual

$$C_m = (1 - \zeta)C_1 + \zeta C_2 \quad \zeta = 1 - \beta_1 \beta_2 \left(\frac{M_f}{M} \right)^2 \quad (5.10)$$

siendo C_m la curvatura media, C_1 y C_2 las curvaturas para los estados I y II₀, M y M_f los momentos actuante y de fisuración respectivamente, β_1 igual a 1 para barras de alta adherencia y β_2 igual a 1 para carga instantánea y 0.5 para carga de larga duración.

A partir de los resultados calculados en los apartados anteriores, tomando para $C_2(t)$ el valor obtenido con el primero de los métodos descritos anteriormente, tenemos las curvaturas instantáneas a tiempo t_0 y totales a tiempo t

$$\begin{aligned} C_1(t_0) &= 0.927 \times 10^{-6} \text{ mm}^{-1} & C_2(t_0) &= 4.451 \times 10^{-6} \text{ mm}^{-1} \\ C_1(t) &= 2.766 \times 10^{-6} \text{ mm}^{-1} & C_2(t) &= 6.036 \times 10^{-6} \text{ mm}^{-1} \end{aligned}$$

el momento de fisuración

$$M_f = W_1 f_{ct} = 8.564 \times 2.19 = 18.76 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

el coeficiente de interpolación

$$\begin{aligned} t = t_0 \quad \zeta &= 1 - 1 \left(\frac{18.76}{46.875} \right)^2 = 0.8398 \\ t = t \quad \zeta &= 1 - 0.5 \left(\frac{18.76}{46.875} \right)^2 = 0.9199 \end{aligned}$$

y las curvaturas medias

$$\begin{aligned} t = t_0 \quad C_m &= (1 - 0.8398)0.927 \times 10^{-6} + 0.8398 \times 4.451 \times 10^{-6} = 3.887 \times 10^{-6} \text{ mm}^{-1} \\ t = t \quad C_m &= (1 - 0.9199)2.766 \times 10^{-6} + 0.9199 \times 6.036 \times 10^{-6} = 5.775 \times 10^{-6} \text{ mm}^{-1} \end{aligned}$$

Si para el cálculo de C_1 y C_2 se usan las tablas incluidas en el MFD (aplican unos coeficientes correctores a la curvatura de la sección bruta) se obtienen valores prácticamente idénticos con unos resultados finales de $C_m(t_0) = 3.887 \times 10^{-6} \text{ mm}^{-1}$ y $C_m(t) = 5.841 \times 10^{-6} \text{ mm}^{-1}$.

Programa CRACK

Se trata de un programa en código FORTRAN suficientemente contrastado [107,110,112,113] desarrollado en la *Universidad de Calgary* (Alberta, Canadá). Se halla la curvatura media efectuando la interpolación de los valores para los estados I y II₀.

Los resultados obtenidos, introduciendo los datos de la sección considerada y el momento aplicado son

$$C_m(t_0) = 3.886 \times 10^{-6} \text{ mm}^{-1} \qquad C_m(t) = 5.673 \times 10^{-6}$$

Análisis con modelo numérico

Según lo indicado en el Capítulo 4, ec. (4.40), se consideran unos coeficientes $\alpha_1 = 0.40$ y $\alpha_2 = 17$ para la modelización de la rama de descarga del diagrama de tracción del hormigón.

Los resultados obtenidos mediante la utilización del programa implementado son

$$C_m(t_0) = 3.940 \times 10^{-6} \text{ mm}^{-1} \qquad C_m(t) = 5.654 \times 10^{-6}$$

Vemos, pues, que hay una buena concordancia entre los resultados del modelo y los obtenidos mediante los dos procedimientos anteriores.

5.3. CONTRASTACIÓN ANALÍTICO-NUMÉRICA DEL COMPORTAMIENTO ESTRUCTURAL

5.3.1. Introducción

Como ya se ha comentado en el Capítulo 3, la utilización de la Formulación Matricial Generalizada en elementos tipo barra, no presupone ninguna aproximación de las leyes de esfuerzos o desplazamientos como ocurriría con el Método de los Elementos Finitos. Si el comportamiento seccional es correcto (véase apartado anterior), el posible error respecto del comportamiento teórico se producirá como consecuencia de la discontinuidad de las funciones a integrar numéricamente (ec. (3.36), (3.39)).

Para mostrar el orden de magnitud de este tipo de errores y los factores que influyen en ellos se presenta el ejemplo del comportamiento instantáneo de una barra sometida a dos casos de carga repartida que producen niveles de fisuración distintos. Se realizará el análisis empleando distinto número de puntos de integración y teniendo en cuenta o prescindiendo del efecto de *tension stiffening*.

5.3.2. Tension stiffening no considerado

Se parte de la viga y sección detalladas en la Figura 5.1, realizando el análisis para carga instantánea, con dos valores distintos de la misma: $q=7$ kN/m, $q=15$ kN/m.

Para los cálculos que se exponen a continuación se supone que las zonas no fisuradas corresponden a secciones en estado I y las fisuradas a secciones en estado II₀ ($f_{ct} = 0$).

En la Figura 5.8 se muestra la forma del diagrama momento curvatura correspondiente al caso analizado y el diagrama de curvaturas a lo largo de la viga.

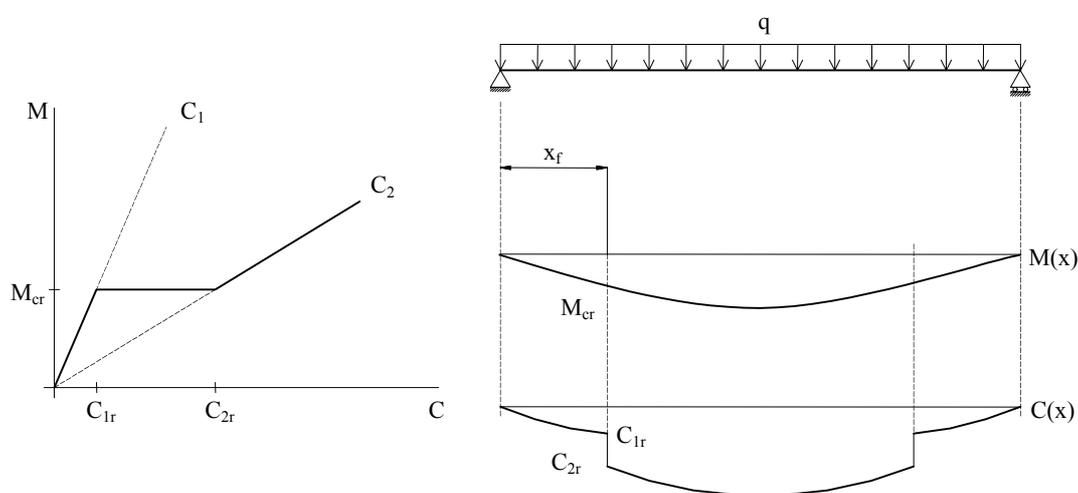


Figura 5.8 – Curvaturas para el caso de secciones fisuradas en estado II₀

Cálculo analítico

Las características resistentes de la sección para los estados I y II₀ son

$$I_1 = 1.676 \times 10^9 \text{ mm}^4$$

$$EI_1 = 50562 \text{ kN} \cdot \text{m}^2$$

$$I_2 = 0.3491 \times 10^9 \text{ mm}^4$$

$$EI_2 = 10531 \text{ kN} \cdot \text{m}^2$$

Para el momento de fisuración calculado previamente ($M_f = 18.76$ kN·m), los valores de abscisas en que se produce la fisuración de la viga serán

$$q = 7 \text{ kN/m}$$

$$x_f = 1.56\text{m}, 3.44\text{m}$$

$$q = 15 \text{ kN/m}$$

$$x_f = 0.56\text{m}, 4.44\text{m}$$

Considerando la barra dividida en tres partes, aplicando el método de la viga conjugada se obtiene una flecha máxima su centro de

$$q = 7 \text{ kN/m}$$

$$v_{max} = 4.13 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$q = 15 \text{ kN/m}$$

$$v_{max} = 11.44 \times 10^{-3} \text{ m}$$

Análisis numérico

Se considera una barra con tres nudos y dos elementos. Cada uno de los elementos puede dividirse en una serie de partes de integración en las cuales se definen unos puntos de integración (secciones de control).

No se pretende realizar un análisis exhaustivo del problema sino simplemente mostrar el orden de magnitud del error “matemático” y su variación al incrementar el número de puntos de integración en este caso concreto.

El programa puede realizar la integración definiendo las partes de integración y el número de puntos de Simpson o de Gauss-Legendre. Cuando la sección es constante, como en el caso que se analiza, se obtiene el mismo resultado al realizar la integración por Simpson (puntos equidistantes) definiendo una o varias partes de igual longitud. No ocurre lo mismo con la integración por Gauss-Legendre en el que los puntos de integración se sitúan en ejes normalizados dentro de cada parte y una división diferente del elemento puede dar lugar a resultados distintos.

Para cada uno de los dos estados de carga se calculan y se representan gráficamente las desviaciones respecto de los valores analíticos, que se han tomado como la solución “exacta”. Se han considerado 4 casos con un número creciente de puntos de integración, correspondientes al cálculo por Simpson o por Gauss-Legendre dividiendo cada elemento en una, dos, o tres partes de igual longitud, en cada una de las cuáles se incluyen de dos a seis puntos de integración, con un mínimo de tres por elemento (Figura 5.9).

En las Figuras 5.10 y 5.11 se muestran los resultados para $q = 7 \text{ kN/m}$ y $q = 15 \text{ kN/m}$, respectivamente.



Figura 5.9 – Esquema de la viga para el análisis numérico

De los resultados expuestos se desprende que para una barra como la presentada, en un análisis instantáneo en el que se consideren las secciones totalmente fisuradas (estado II₀), pueden producirse errores de diversa magnitud en el cálculo de la flecha debido a la integración incorrecta de la curvatura discontinua. Estos errores tienen tendencia a disminuir al aumentar el número de puntos de integración, como por ejemplo de 31.2 % a 0.7 % en el caso de Simpson en $q = 7 \text{ kN/m}$. Asimismo los errores disminuyen de forma importante cuando el nivel de fisuración aumenta ya que también

Caso 1: $q = 7 \text{ kN/m}$

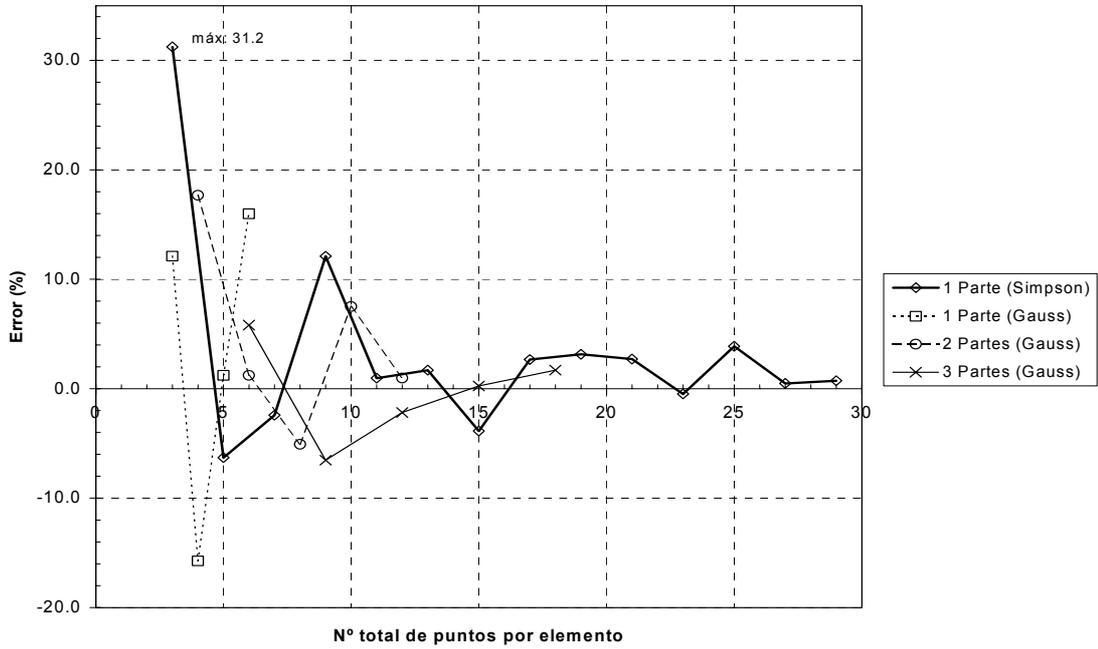


Figura 5.10 - Errores según el sistema de integración para $q = 7 \text{ kNm}$

Caso 2: $q = 15 \text{ kN/m}$

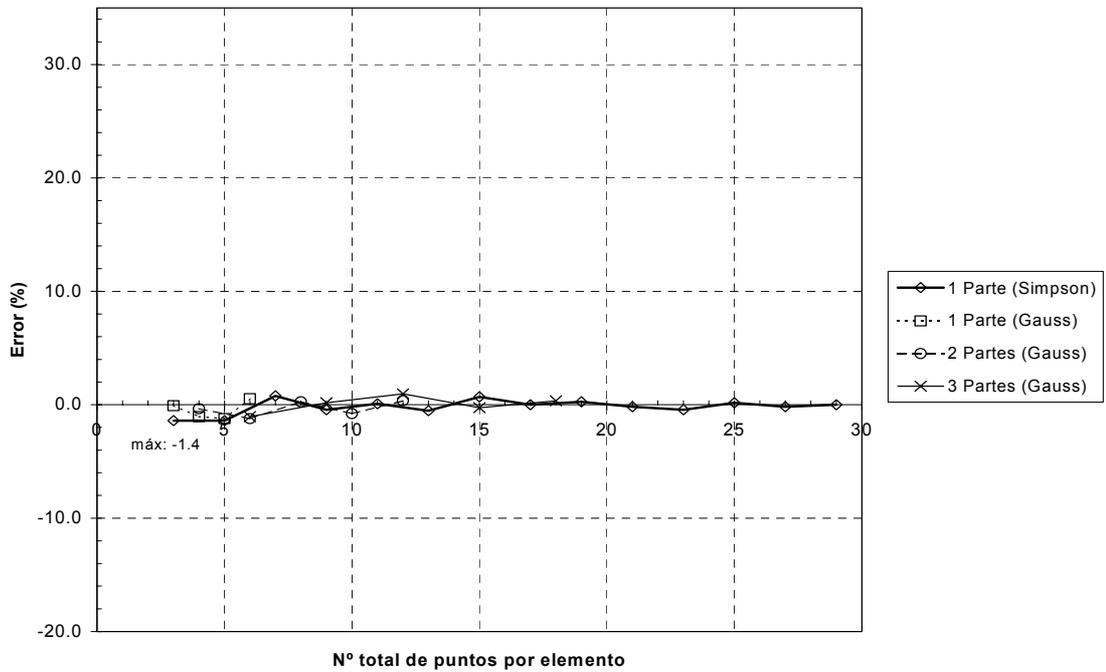


Figura 5.10 - Errores según el sistema de integración para $q = 15 \text{ kNm}$

lo hace la zona fisurada (con disminución de la no fisurada) que tiene un gran peso en el resultado final. Observamos que la máxima desviación es solamente de 1.4%, empleando 3 puntos de integración, para el caso de $q = 15 \text{ kN/m}$. Para el mismo número de puntos totales, no se observa una mejora evidente de la precisión en función del sistema empleado, aun siendo Gauss-Legendre un método de mayor orden.

Si se efectúa un análisis dividiendo el elemento en dos partes definidas por las zonas en estado I y estado II₀ (se calculan previamente) se elimina la discontinuidad en la integración y los resultados obtenidos con el programa coinciden con los analíticos $v_2 = 4.13 \text{ mm}$ y $v_2 = 11.44 \text{ mm}$, corroborando lo indicado en 5.3.1. Sin embargo, éste no es el caso usual, puesto que inicialmente se desconoce la zona fisurada.

Si en las secciones fisuradas se toma un cierto valor de la resistencia a tracción ($f_{ct} \neq 0$), los diagramas momento curvatura para análisis instantáneo apenas varían. Su aplicación al ejemplo anterior proporciona diferencias de un 2 % para valores próximos al momento de fisuración, que tienden a ser prácticamente nulas para valores mayores. Ello conduce a conclusiones análogas a las indicadas para secciones en estado II₀.

5.3.3. Consideración del efecto de *tension stiffening*

En este caso no se dispone de un cálculo analítico “patrón” que pueda proporcionar una solución considerada exacta. Sin embargo a la vista de las conclusiones del apartado anterior, puede tomarse como valor de referencia el obtenido al realizar un análisis numérico dividiendo la viga en zona fisurada y no fisurada, aumentando el número de puntos de integración hasta lograr una convergencia en la solución. Con este planteamiento se obtiene $v_2 = 1.86 \text{ mm}$ y $v_2 = 9.43 \text{ mm}$, para los dos casos de carga que se han contemplado.

La Figura 5.11 muestra la variación de curvaturas a lo largo de la barra en el supuesto considerado.

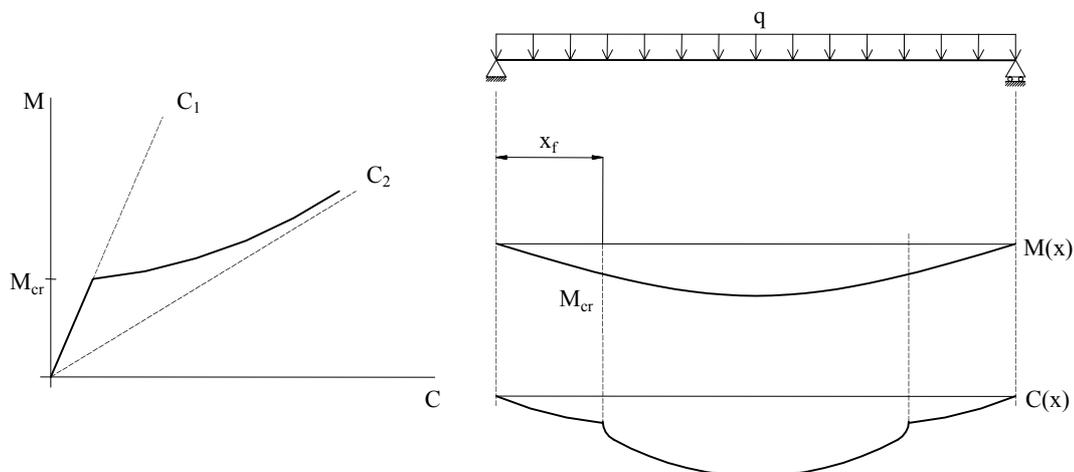


Figura 5.11 – Curvaturas para el caso de secciones con *tension stiffening*

En las Figuras 5.12 y 5.13, se muestran los errores que se obtienen utilizando diferentes criterios en la integración numérica.

Caso 1: $q = 7 \text{ kN/m}$

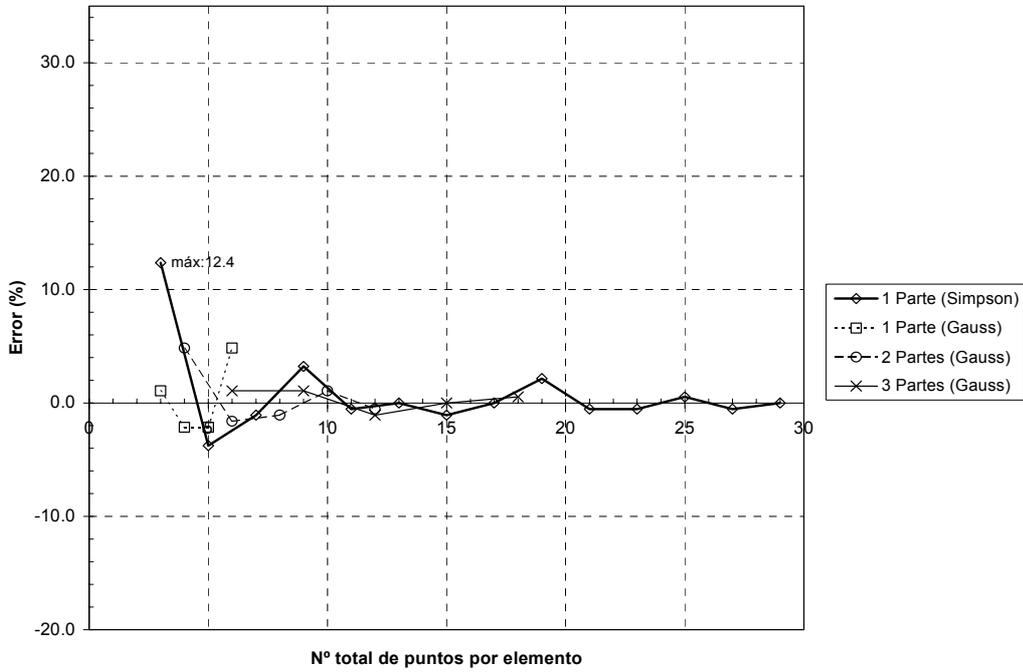


Figura 5.12 - Errores según el sistema de integración para $q = 7 \text{ kNm}$

Caso 2: $q = 15 \text{ kN/m}$

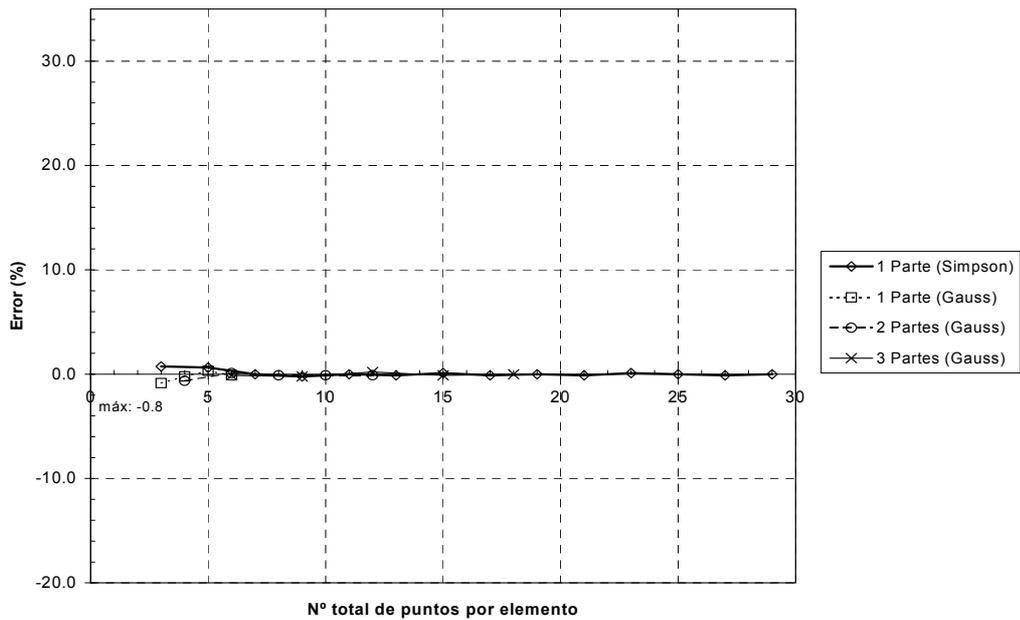


Figura 5.13 - Errores según el sistema de integración para $q = 15 \text{ kNm}$

Para $q = 7$ kN/m se advierten las mismas tendencias que en 5.3.2, aunque los errores son en este caso mucho menores y solamente para un número de puntos muy reducido serían de consideración. En este caso se observa que la utilización de la integración gaussiana y el aumento de número de partes disminuyen los valores para un mismo número total de puntos. Para $q = 15$ kN/m se aprecia un error prácticamente nulo para cualquier número de puntos, con un valor máximo de solamente 0.8 %.

Se observa que la inclusión del efecto del hormigón traccionado entre fisuras hace que las discontinuidades en el diagrama momento curvatura sean más suaves y por tanto que las desviaciones debidas a este fenómeno sean menores en todos los casos.

De todo ello puede concluirse que el modelo implementado reproduce con fiabilidad suficiente el comportamiento estructural, sobre todo si se añade el efecto de *tension stiffening* y no se toma un número de secciones de control (puntos de integración) muy reducido.

5.4. CONTRASTACIÓN CON DATOS EXPERIMENTALES

5.4.1. Introducción

En este apartado se van a contrastar los resultados obtenidos con el modelo con los de bases de datos experimentales de ensayos diferidos sobre vigas.

La validación de un modelo de análisis diferido suele estar sometida a numerosas incertidumbres y suele ser poco habitual que se conozcan con detalle las características de los materiales y datos ambientales. Existe una interacción entre los distintos fenómenos que intervienen como son la fisuración, la fluencia, o la retracción, que, además, pueden presentar un alto grado de variabilidad, lo cual dificulta la tarea propuesta. Todo ello debe hacer tomar conciencia de la importancia de tomar una base de datos suficientemente acreditada y del grado de exactitud pretendido.

5.4.2. Benchmarks propuestos por la RILEM

Esta base de datos experimentales, que ha sido propuesta por el Subcomité 3 del Comité Técnico TC 114 de la RILEM [79], cubre una gran variedad de problemas prácticos y teóricos y permite la contrastación de programas para análisis en el tiempo de estructuras de hormigón.

Concretamente se van usar los datos correspondientes al *Benchmark n° 1*: “*Vigas simplemente apoyadas de hormigón armado*”.

En este experimento se consideran siete vigas similares de hormigón armado (forjados unidireccionales) sometidas a cinco niveles de carga permanente diferentes. En dos de los niveles se ensayaron dos vigas para obtener información sobre la dispersión de los resultados. La carga consiste en el peso propio y dos fuerzas puntuales $P/2$ equidistantes del centro de la viga. Las características de los elementos ensayados

se indican en la Figura 5.14. El test consiste en la contrastación de la flecha en el centro de la viga. Los ensayos fueron realizados en el *Instituto Federal Suizo de Tecnología (Lausanne)* por Jaccoud y Favre entre 1979 y 1981 [137].

La RILEM destaca como característica interesante del *Benchmark* la variación del nivel de carga y la constatación de que la relación entre la flecha instantánea y la total $[a(t)/a(t_0)]$ no es independiente de dicho nivel de carga, cosa que no se refleja, por ejemplo, en el método propuesto por ACI-318 [73] (o por EHE [57]).

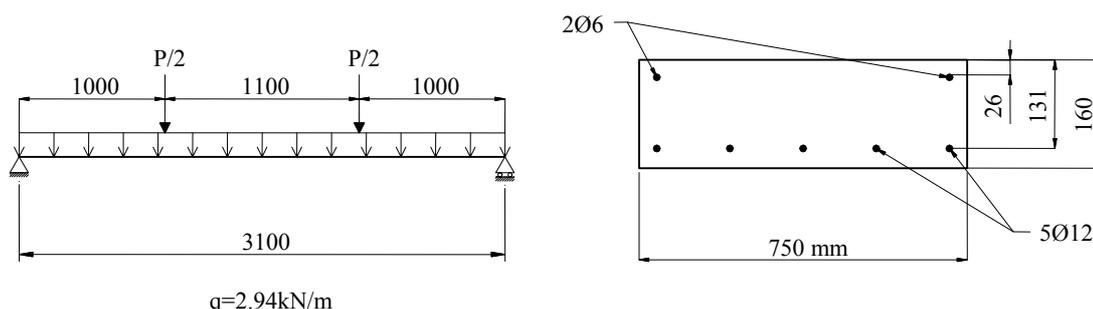


Figura 5.14 – Características dimensionales de las vigas

Como datos de partida se tienen las cargas aplicadas y la resistencia media del hormigón para cada una de las vigas con los valores indicados en la Tabla 5.2.

Viga	C15	C14	C24	C13	C12	C22	C11
P (kN)	31.45	25.04	25.04	18.61	12.19	12.19	5.77
f_{cm} (MPa)	29.3	29.4	32.0	30.9	29.4	32.9	28.8

Tabla 5.2 – Datos para cada viga

Las vigas fueron curadas hasta los siete días y luego mantenidas en condiciones de humedad (60 %) y temperatura constantes (20° C).

La carga se aplicó a los 28 días y se mantuvo hasta los 538 días (excepto en C11 y C22, en las que se llegó a 393 días). En la serie 2 (C12, C22) y en la serie 4 (C14, C24) se ensayaron dos vigas con la misma carga.

Según se indica en [79] la viga C11 teóricamente no se ha fisurado, las C12-22 están en zona de formación de fisuras, mientras que las demás vigas están fisuradas. La relación entre el momento aplicado y el momento último varía entre $0.2 \div 0.6$, aumentando en una décima para cada serie.

Para la aplicación del modelo se determinan las propiedades del hormigón a partir de las expresiones indicadas en el MC-90 [61] tomando como datos de partida la resistencia media del hormigón para las distintas vigas y las condiciones ambientales (para C14/24 y C12/22 se ha tomado el valor medio).

En la Figura 5.15 se muestran los resultados proporcionados por el cálculo numérico, juntamente con los de los ensayos.

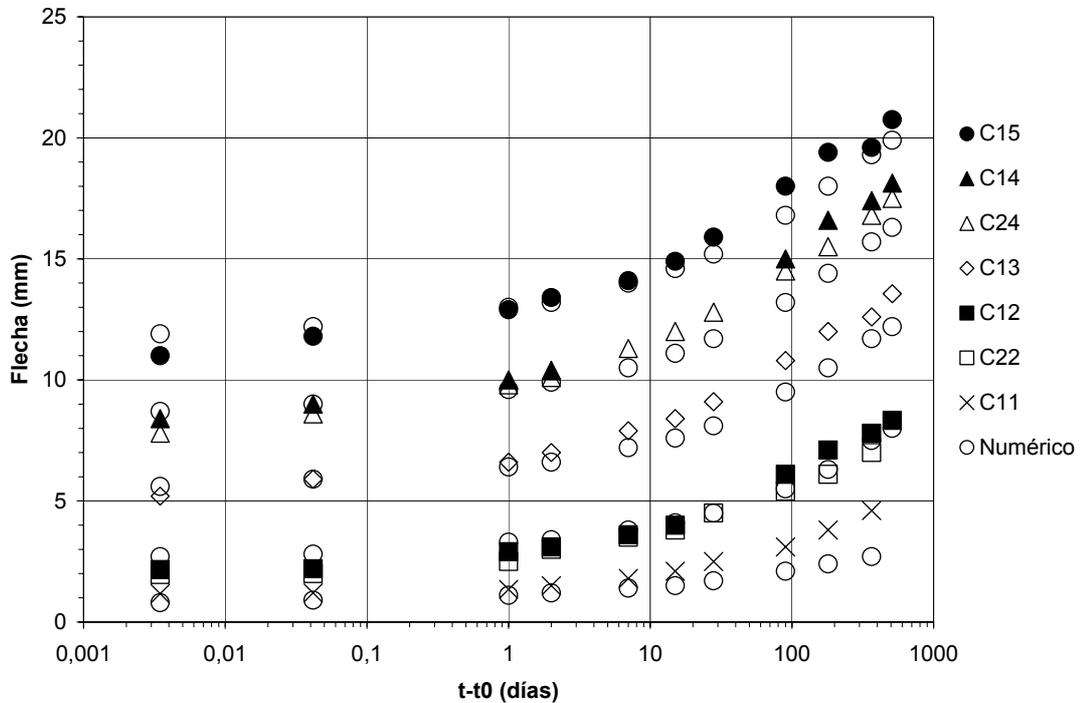


Figura 5.15 –Variación de la flecha con el tiempo

Se puede observar la variación de resultados debida a la dispersión en las características del material en las vigas C12-22 y C14-24. Asimismo se muestra la diferente relación entre $a(t)/a(t_0)$, para distintos niveles de carga. Por ejemplo, para C15 esta relación tiene un valor aproximado de 2, mientras que para C22 es de 3.5.

En la misma figura se puede apreciar la buena concordancia entre los resultados experimentales y los proporcionados por el modelo numérico, con tendencia a una ligera subestimación de la flecha para los valores a tiempo final. La mayor diferencia relativa se observa en el elemento C11, que sin embargo debiera ser el que menos problemas de precisión debería presentar, al estar teóricamente no fisurado. Cabe preguntarse por la correcta determinación de las propiedades mecánicas del hormigón o por si hubiera aparecido una ligera fisuración en la viga. En todo caso, análisis complementarios realizados con otros métodos (como el del MFD) conducen a resultados muy parecidos a los del modelo.

Finalmente, en la Tabla 5.3 se muestran los valores de cálculo que se obtendrían para la flecha a 538 días y se comparan con otros métodos comúnmente aceptados. Las dos primeras columnas indican los resultados experimentales y los del modelo propuesto, respectivamente. La tercera columna muestra las flechas obtenidas por Jaccoud y Favre [137] aplicando el método bilineal que ellos proponen, el cual fue incorporado al MFD y al Eurocodigo-2 [82]. La cuarta y quinta columnas corresponden

a los resultados obtenidos por Espion [80], aplicando el mencionado método bilineal (propiedades del hormigón de acuerdo con MC-78) y el método de ACI 318-83 [5]. Finalmente, la sexta columna corresponde a los valores que se obtienen de acuerdo con la Instrucción EHE [57].

	Experimental	Modelo numérico		Bilineal (Jaccoud y Favre [137])		Bilineal (Espion[80])		ACI (Espion [80])		EHE [57]	
	a	b	b/a	c	c/a	d	d/a	e	e/a	f	f/a
C15	20.75	20.21	0.97	19.39	0.93	18.58	0.90	21.32	1.03	18.56	0.89
C14	18.13	16.62	0.92	16.05	0.88	14.87	0.82	12.69	0.70	12.67	0.70
C24	17.50	15.88	0.91	16.05	0.92	14.71	0.84	12.13	0.69	11.19	0.64
C13	13.56	12.10	0.89	12.91	0.95	11.12	0.82	5.87	0.43	6.61	0.49
C12	8.33	8.37	1.00	9.05	1.09	8.22	0.99	3.57	0.43	2.89	0.36

Tabla 5.3 – Flechas a 538 días en mm. Diversos métodos

Puede observarse que el ajuste proporcionado por el modelo desarrollado en la presente tesis es satisfactorio si se compara con los otros procedimientos. Asimismo se pone de manifiesto la considerable desviación de ACI y EHE para niveles de carga intermedios o bajos, consecuencia de aplicar el mismo factor multiplicativo en todos los casos para obtener la flecha diferida.