

## Capítulo 2

# Simulación de la población de enanas blancas del disco

### 2.1. Construcción de la muestra

El ingrediente principal de cualquier método Monte Carlo es un generador de números aleatorios. En nuestras simulaciones hemos utilizado el algoritmo descrito en James (1990). Este algoritmo proporciona una densidad de probabilidad uniforme en el intervalo  $(0, 1)$ , a la vez que, posee un período de repetición  $\gtrsim 10^{18}$ , lo cual puede considerarse prácticamente infinito en nuestras simulaciones. Para obtener las diversas distribuciones de probabilidad requeridas hemos utilizado diferentes técnicas: el algoritmo de Box-Muller para distribuciones de probabilidad gaussianas, transformación de variables, etc.

En la Figura 2.1 hemos representado, mediante un diagrama de bloques, los pasos seguidos en la determinación de las variables que intervienen en la simulación de la población de enanas blancas del disco. Las elipses denotan cálculos en los que se ha utilizado el generador de números aleatorios, mientras que en los rectángulos los cálculos se han realizado de manera analítica.

Dado un Ritmo de Formación Estelar (SFR) obtenemos la cantidad total de masa generada por intervalo de tiempo. En cada uno de estos intervalos generamos aleatoriamente el instante de nacimiento de cada estrella ( $t_b$ ). La masa ( $M$ ) de cada estrella en la secuencia principal la obtenemos también de manera aleatoria siguiendo una distribución dada por la Función Inicial de Masa (IMF). La IMF que hemos adoptado en nuestras simulaciones es la de Scalo (1998):

$$m\phi(m) = \begin{cases} m^{-0,2}, & 0,1 < m \leq 1, \\ m^{-1,7}, & 1 < m \leq 10, \\ 0,4m^{-1,3}, & 10 < m \leq 100, \end{cases}$$

donde las masas están expresadas en masas solares. Mientras que para el SFR hemos

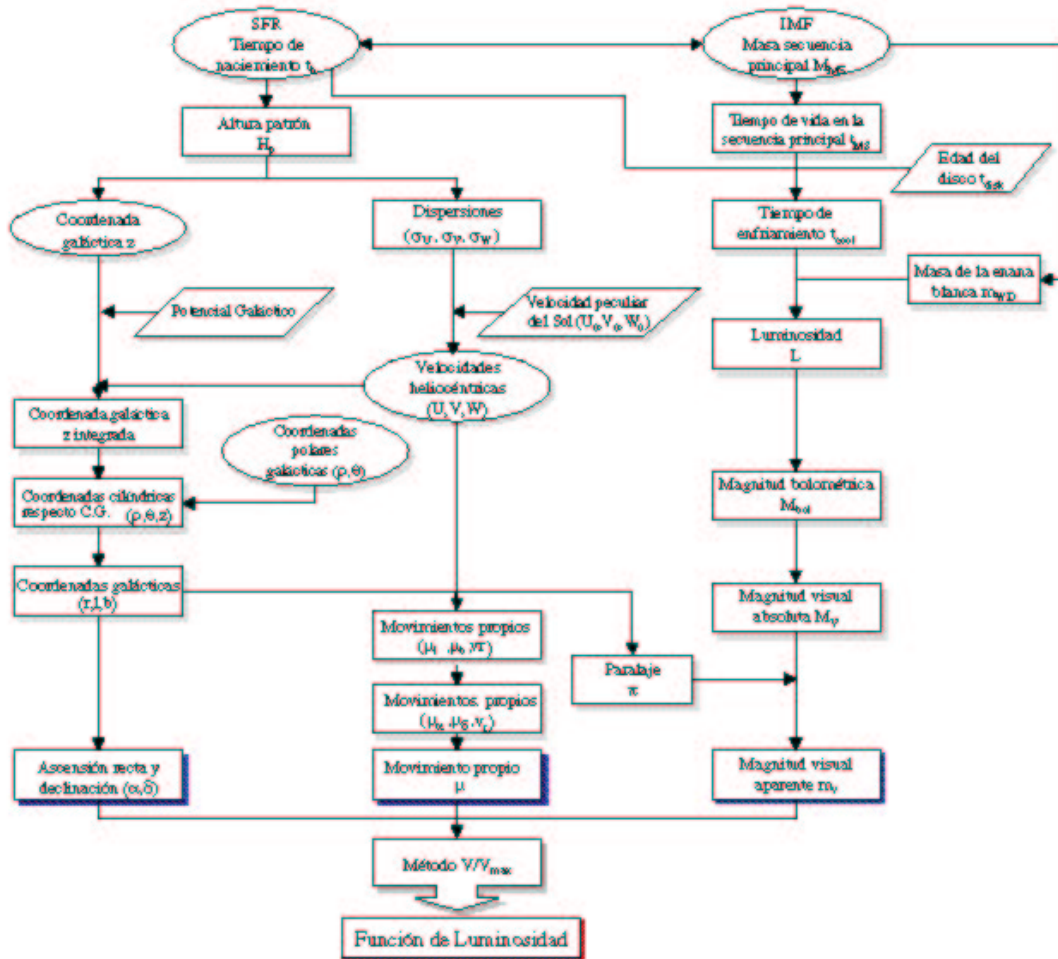


Figura 2.1: Diagrama de bloques del código de nuestra simulación Monte Carlo.

tomado un ritmo de formación exponencialmente decreciente por unidad de tiempo y de superficie:  $\psi \propto e^{-t/\tau_s}$ . Cabe decir, que esta forma para el SFR es completamente consistente con los modelos actuales de evolución química de la Galaxia — véase para ello, Bravo, Isern & Canal (1993). Una vez que tenemos el tiempo en el que nació cada estrella, podemos obtener la coordenada galáctica  $z$  generando un número aleatorio de acuerdo a una distribución exponencial del disco. La altura patrón que hemos adoptado para las estrellas recién formadas es la siguiente:  $H_p(t) = z_i e^{-t/\tau_h} + z_f$ . Se trata de una función exponencial decreciente con el tiempo y, pese a que en esencia esta elección es arbitraria, se puede considerar como una opción natural. De todas formas, cuando adoptamos las prescripciones anteriores, tanto para el ritmo de formación estelar como para la ley de la altura patrón, obtenemos un ajuste perfecto al calcular la función de luminosidad teórica de las enanas blancas y compararla con los datos observacionales — véase Isern et al. (1995a,b) y la Sección 2.3 — mientras que no entramos en modo alguno en contradicción con la cinemática observada de las enanas blancas (véase la Sección 2.2). Por último, los valores adoptados para los parámetros libres del SFR y de la ley de altura patrón se han tomado de Isern et al. (1995a,b):  $\tau_s = 24$  Gyr,  $\tau_h = 0,7$  Gyr,  $z_i/z_f = 485$ .

Si siguiendo el esquema de bloques de la Figura 2.1 observamos que para obtener las coordenadas espaciales de cada estrella, necesitamos generar dos números aleatorios para las coordenadas polares galactocéntricas ( $r, \theta$ ). Hemos supuesto una densidad superficial de materia constante en el entorno solar, y puesto que la muestra que generamos no se extiende más allá de 200 pc del Sol en la dirección del plano de nuestra Galaxia, podemos despreciar las variaciones radiales de densidad de la Galaxia. Una vez que ya tenemos las coordenadas espaciales, conjuntamente con la distribución de alturas patrones, podemos pasar a calcular las componentes cinemáticas de cada estrella. Hemos adoptado el sistema de coordenadas heliocéntrico *B3*, donde ( $U, V, W$ ) representan las velocidades hacia el centro de la galaxia, en la dirección de rotación y hacia el polo norte galáctico, respectivamente. Para calcular tales componentes hemos generado tres números aleatorios de acuerdo con las siguientes distribuciones normales:

$$\begin{aligned} n(U) &\propto e^{-(U-U'_0)^2/\sigma_U^2} \\ n(V) &\propto e^{-(V-V'_0)^2/\sigma_V^2} \\ n(W) &\propto e^{-(W-W'_0)^2/\sigma_W^2} \end{aligned} \quad (2.1)$$

donde ( $U'_0, V'_0, W'_0$ ) tiene en cuenta tanto la rotación diferencial del disco (Ogorodnikov 1965), como la velocidad peculiar del Sol, ( $U_\odot, V_\odot, W_\odot$ ), para la cual hemos adoptado los valores (10, 5, 7) km s<sup>-1</sup> (Dehnen & Binney 1998). Dada una muestra de estrellas, las tres componentes de la dispersión de velocidades, ( $\sigma_U, \sigma_V, \sigma_W$ ), y la velocidad de rezagamiento,  $V_0$ , no son independientes de la altura patrón. Mihalas & Binney (1981) obtuvieron a partir de un recuento de estrellas de la secuencia principal las siguientes relaciones, donde las velocidades se expresan en km s<sup>-1</sup> y la altura

patrón se expresa en kpc:

$$\begin{aligned}
 U_0 &= 0 \\
 V_0 &= -\sigma_U^2/120 \\
 W_0 &= 0 \\
 \sigma_V^2/\sigma_U^2 &= 0,32 + 1,67 \cdot 10^{-5} \sigma_U^2 \\
 \sigma_W^2/\sigma_U^2 &= 0,50 \\
 H_p &= 6,52 \cdot 10^{-4} \sigma_W^2
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

que son las relaciones que hemos utilizado en la construcción de nuestra muestra. Cabe señalar el importante papel que juega la ley de alturas patrones, puesto que, como podemos observar de las ecuaciones anteriores, la mayoría de propiedades cinemáticas dependen de ésta.

Puesto que las enanas blancas son objetos estelares de vida muy larga, los efectos que pudiera ocasionar el potencial galáctico, tanto en las posiciones como en los movimientos de éstas, podrían llegar a ser muy grandes. Estos efectos se revelarían de manera más notoria entre las enanas blancas más viejas, que son precisamente los objetos que conforman la cola de la función de luminosidad. En consecuencia, hemos integrado la coordenada  $z$  utilizando para ello el potencial galáctico propuesto por Flynn, Sommer-Larsen & Christensen (1996). Este potencial galáctico incluye las contribuciones del disco, del bulbo y del halo y reproduce de manera muy exacta tanto la densidad superficial local del disco, como la curva de rotación de nuestra Galaxia. Por otro lado, no hemos creído necesario considerar los efectos del potencial galáctico sobre las coordenadas  $r$  y  $\theta$ , lo cual es equivalente a suponer que el número de enanas blancas que entran en el sector que estamos considerando en nuestra simulación (la columna local) es, en promedio, igual al número de enanas blancas que lo abandonan. Evidentemente, con esta aproximación estamos despreciando los posibles efectos de un flujo radial de materia, y en consecuencia, los posibles efectos de difusión a través del disco. Sin embargo, las observaciones cinemáticas hasta el presente sugieren que la difusión radial es sólo efectiva hasta distancias mucho más grandes que la distancia máxima utilizada en nuestras simulaciones (Carney, Latham & Laird 1990).

Una vez que se han obtenido las posiciones y las velocidades heliocéntricas de todas las estrellas de la muestra ( $\sim 200\,000$ ) podemos determinar cuáles serán sus paralajes y sus movimientos propios. Por otro lado, introduciendo una edad del disco ( $t_{\text{disk}}$ ), podemos determinar cuantas de estas estrellas han tenido tiempo suficiente como para convertirse en enanas blancas y, en consecuencia, dada una serie de secuencias de enfriamiento (Salaris et al. 1997), obtener cuáles serán sus luminosidades. El conjunto de secuencias de enfriamiento que hemos utilizado incluye los efectos de separación de fase del carbono y del oxígeno por cristalización, conjuntamente con

cálculos en los que se ha tenido en cuenta perfiles muy detallados de la mezcla binaria carbono-oxígeno, presente ésta en la mayoría de los interiores de las enanas blancas. Tales perfiles químicos se han obtenido utilizando los tratamientos más actualizados de los efectos de un ritmo de reacción nuclear alto para la reacción  $^{12}\text{C}(\alpha, \gamma)^{16}\text{O}$ .

Obviamente necesitaremos, por un lado, una relación entre la masa de la estrella en la secuencia principal y la masa de la enana blanca resultante, y por otro, una relación entre el tiempo de vida en la secuencia principal y la masa. Para ambas relaciones hemos utilizado las propuestas por Iben & Laughlin (1989):

$$M_{\text{WD}} = 0,49e^{0,095M_{\text{MS}}} \quad (2.3)$$

y

$$t_{\text{MS}} = 10(M_{\text{MS}}/M_{\odot})^{-3,5} \quad (2.4)$$

donde  $M_{\text{WD}}$  es la masa de la enana blanca,  $M_{\text{MS}}$  la masa de su progenitora en la secuencia principal y  $t_{\text{MS}}$  el tiempo de vida en la secuencia principal.

Llegados a este punto, disponemos ya de una muestra de enanas blancas, que a partir de ahora denominaremos muestra “original”, cuyo tamaño es aproximadamente del orden de  $\sim 60\,000$  objetos. Por último, calculamos, para todas las enanas blancas pertenecientes a este conjunto, sus correspondientes correcciones bolométricas mediante interpolación en las tablas atmosféricas de Bergeron, Wesemael & Beauchamp (1995), a partir de las cuales podemos obtener la magnitud visual  $V$ , suponiendo previamente que todas las enanas blancas son del tipo no-DA (véase la explicación al respecto en la Sección 2.1).

Puesto que el objetivo final es calcular la función de luminosidad de las enanas blancas utilizando el método  $1/V_{\text{max}}$  (Schmidt 1968), necesitaremos para ello un conjunto de restricciones. De esta manera seleccionaremos un subconjunto de enanas blancas que, en principio, es representativo del total de la población. Los criterios que hemos adoptado en nuestras simulaciones son los siguientes:  $m_V \leq 18,5^{\text{mag}}$  y  $\mu \geq 0,16'' \text{ yr}^{-1}$  (Oswalt et al. 1996). Así mismo, hemos eliminado todas las enanas blancas con paralajes muy pequeños ( $\pi \leq 0,005''$ ) puesto que sería poco probable encontrarse con estrellas de este tipo en una muestra observacional mínimamente realista. Por el contrario, hemos incluido todas las enanas blancas con magnitud más brillante que  $M_V \leq 13^{\text{mag}}$ , independientemente de su movimiento propio, dado que la función de luminosidad de las enanas blancas calientes se ha obtenido a partir de un catálogo de enanas blancas indentificadas espectroscópicamente (Green 1980; Fleming et al. 1986), el cual se considera completo. Adicionalmente, hemos descartado todas las enanas blancas con velocidades tangenciales superiores a  $250 \text{ km s}^{-1}$  (Liebert, Dahn & Monet 1989; Torres 1999), puesto que tales objetos serían clasificados con toda probabilidad como miembros de la población del halo. Todas las restricciones anteriormente mencionadas determinarán el tamaño final de la muestra (que a partir de ahora denominaremos muestra “restringida”) y que típicamente

es del orden de unas  $\sim 200$  enanas blancas. Por último, normalizaremos la densidad total de enanas blancas obtenida en nuestra simulación al valor observado en la vecindad solar (Oswalt et al. 1996).

En la Figura 2.2 mostramos un resumen de los resultados más relevantes para una edad del disco de 13 Gyr. En el panel superior tenemos la distribución de masa para aquellas estrellas que han llegado a convertirse en enanas blancas (línea sólida, escala de la izquierda) y de aquellas enanas blancas que han sido seleccionadas para calcular la función de luminosidad (línea punteada, escala de la derecha). Como podemos ver, ambas distribuciones tienen el mismo comportamiento, con un máximo cerca de  $0,55 M_{\odot}$  y, por lo tanto, ajustándose muy bien a los valores observacionales (Bergeron, Saffer & Liebert 1992). En este sentido podemos decir que la muestra restringida es representativa del total de la población de enanas blancas.

En el panel central hemos representado una distribución global de la luminosidad de las estrellas de la muestra original (línea sólida, escala de la izquierda) y de la muestra restringida (línea punteada, escala de la derecha). Las diferencias entre ambas distribuciones son, en este caso, bastante aparentes: la muestra restringida tiene un pico amplio centrado en  $\log(L/L_{\odot}) \sim -3,5$  mientras que la muestra original muestra un pico mucho más estrecho y centrado en una luminosidad más pequeña (0.6 dex). Obviamente, puesto que la muestra restringida ha sido seleccionada cinemáticamente — véase el panel inferior de la Figura 2.2, donde se muestra la distribución para movimientos propios de ambas distribuciones — se ha acabado descartando aquellas enanas blancas débiles y con movimientos propios pequeños. Se puede, pues, afirmar que la muestra restringida presenta un sesgo hacia luminosidades superiores y, por consiguiente, también cabe esperar que el corte de la función de luminosidad observacional esté sesgado hacia luminosidades superiores. De todas formas, es importante recalcar que sólo el  $\sim 0,6\%$  del número total de enanas blancas con  $\log(L/L_{\odot}) > -4,0$  pasa a formar parte de la muestra restringida y, en consecuencia, es utilizado para calcular la función de luminosidad. Este número llega a decrecer incluso hasta el  $\sim 0,04\%$  si consideramos la parte más débil de la función de luminosidad, es decir, aquellas con luminosidades  $\log(L/L_{\odot}) < -4,0$ , que es además el lugar donde podemos encontrar la mayor parte de información concerniente a las fases iniciales de formación de nuestra galaxia. La distribución de movimientos propios (panel inferior de la Figura 2.2) indica que, tanto para la muestra original como para la muestra restringida, la mayoría de las enanas blancas presentan movimientos propios inferiores a  $0,4'' \text{ yr}^{-1}$ . No obstante, la muestra restringida presenta un pico muy pronunciado en  $\mu \sim 0,3'' \text{ yr}^{-1}$ , así como un clarísimo déficit de enanas blancas con movimientos propios pequeños, cosa que cabía esperar para una muestra seleccionada cinemáticamente. La muestra original, por el contrario, decrece suavemente conforme aumenta el movimiento propio.

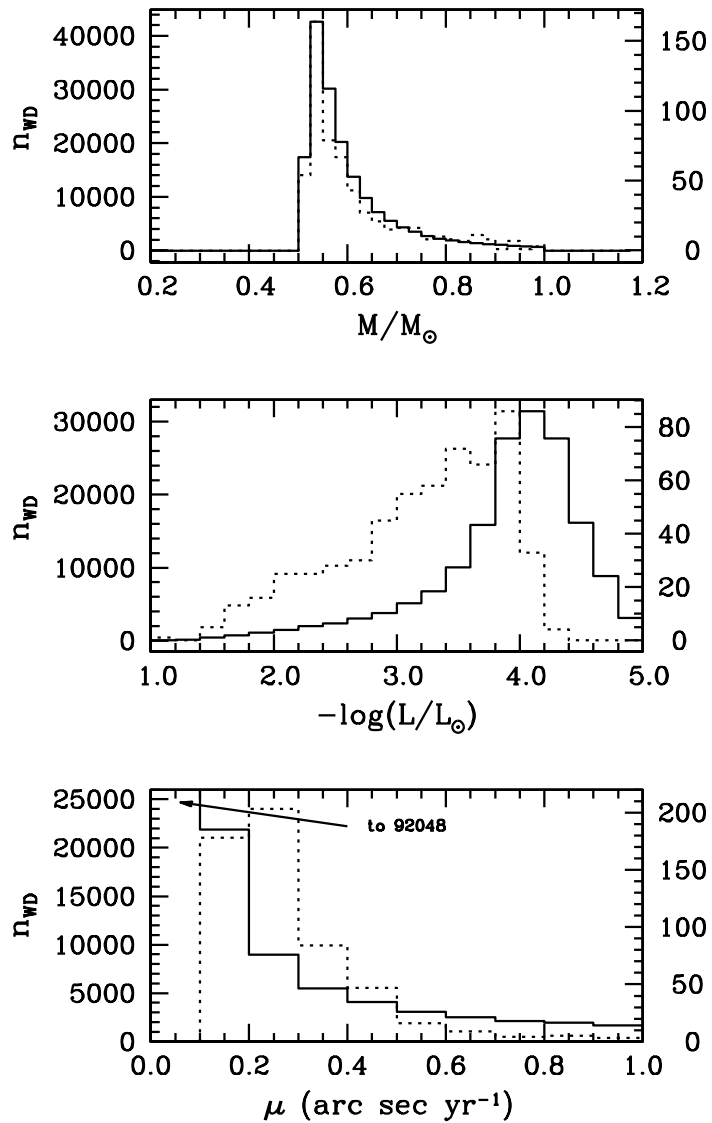


Figura 2.2: Algunas de las distribuciones más relevantes obtenidas a partir de una única simulación Monte Carlo; las líneas continuas representan la muestra original, mientras que las punteadas corresponden a la muestra restringida. Por su parte, la escala de la izquierda corresponde a la muestra original y la de la derecha a la muestra restringida.

## 2.2. Propiedades cinemáticas de la población de enanas blancas

Desde los trabajos iniciales de Sion & Liebert (1977), se han realizado muy pocos estudios de la cinemática de las enanas blancas, siendo el más relevante en este sentido el trabajo de Sion et al. (1988); a pesar de que, tal y como acabamos de ver, la región más débil de la función de luminosidad se calcula a partir de una muestra seleccionada cinemáticamente. En estos dos estudios, los autores utilizaron un subconjunto específico de la muestra de movimientos propios de enanas blancas identificadas espectroscópicamente para determinar cinemáticamente diversos subgrupos espectroscópicos y comprobar así diferentes escenarios representativos de los distintos canales de producción de enanas blancas. Sin embargo, una de las mayores desventajas de este subconjunto de la población de enanas blancas estriba en el hecho de que las tres componentes de la velocidad provienen tan sólo de la velocidad tangencial, puesto que resulta enormemente difícil la determinación de la velocidad radial para las enanas blancas, especialmente para las más frías. Resultaría mucho mejor, obviamente, disponer de la descripción completa del espacio de movimientos de la muestra. Pese a todo, contamos con los dos tercios del espacio de movimientos disponibles para compararlo con nuestras muestras simuladas y, por tanto, poder dar cuenta del sesgo observacional.

La muestra de Sion et al. (1988) está constituida por 626 estrellas con velocidades tangenciales y distancias conocidas; de las cuales 421 enanas blancas pertenecen al tipo espectral DA, mientras que las 205 restantes son de otros tipos espectrales. De esta muestra cinemática de enanas blancas podemos calcular las masas, radios y temperaturas efectivas de 523 de ellas — véase Sion et al. (1988) para los detalles del cálculo — de las cuales 372 tienen masas mayores que  $0.5 M_{\odot}$  y por tanto, es de esperar que tengan núcleos de carbono-oxígeno. En este último grupo de enanas blancas existen 305 pertenecientes al tipo espectral DA y 67 a otros tipos espectrales. Hemos calculado las edades de enfriamiento para la muestra anterior utilizando para ello las secuencias de enfriamiento de Salaris et al. (1997) y además, dada una relación entre la masa inicial en la secuencia principal y la masa final de la enana blanca (Iben & Laughlin 1989), hemos podido asignar un tiempo de vida en la secuencia principal (Iben & Laughlin 1989) y, por último determinar la edad de nacimiento de sus progenitores. No obstante, cabe señalar que los errores cometidos en la determinación de la masa del progenitor pueden producir errores considerables en la determinación de la edad total para las enanas blancas con masas pequeñas. Así, para una enana blanca de masa típica  $0.6 M_{\odot}$ , un error en la determinación de ésta de  $0.05 M_{\odot}$  conlleva un error en el tiempo de enfriamiento de  $\sim 0.3$  Gyr para  $\log(L/L_{\odot}) = -2.0$ , y de  $\sim 0.8$  Gyr para  $\log(L/L_{\odot}) = -4.0$ , mientras que el error en la determinación del tiempo de vida en la secuencia principal es de  $\sim 2$  Gyr. Por tanto, la dependencia de las secuencias de enfriamiento en la masa es relativamente pequeña, mientras que



por el contrario, la dependencia de los tiempos de vida de la secuencia principal en la masa es muy grande. Por último señalaremos que, puesto que esta muestra incluye enanas blancas tanto del tipo DA como del tipo no DA, convendría utilizar secuencias de enfriamiento apropiadas para cada tipo. No obstante, los errores introducidos al determinar los tiempos de enfriamiento de enanas blancas del tipo DA utilizando para ello una secuencia de enfriamiento inadecuada (es decir, utilizar secuencias de enfriamiento de enanas blancas con una envoltura dominada por He) son despreciables si los comparamos con los errores cometidos al calcular la edad de las enanas blancas debidos a una estimación grosera de la masa de éstas. Por lo tanto, cualquier característica que podamos obtener del comportamiento temporal de la muestra de Sion, deberá tomarse con suma precaución, no teniendo, además, ninguna garantía de que tal muestra sea representativa de la población total de enanas blancas; dado que se trata a todas luces de una muestra incompleta. Para ser más precisos, la muestra de Sion et al. (1988) consta de muy pocas enanas blancas de baja luminosidad; de hecho, esta muestra consta sólo de 12 enanas blancas pertenecientes a la muestra de bajas luminosidad de Liebert et al. (1988), de las cuales sólo cuatro poseen masas, velocidades tangenciales y temperaturas efectivas conocidas. En consecuencia, hemos añadido a esta muestra — a la que denominaremos muestra “observacional” — tres enanas blancas adicionales provenientes de la muestra de Liebert et al. (1988) de las cuales se puede encontrar una estimación de sus masas (Díaz-Pinto et al. 1994). De todas formas, la muestra observacional consituye una oportunidad única para comprobar los resultados obtenidos a partir de nuestra muestra simulada de enanas blancas.

### 2.2.1. Propiedades cinemáticas generales de las muestras

En primer lugar comparamos las propiedades cinemáticas generales de la muestra simulada con la muestra observacional de enanas blancas, independientemente de la edad de nacimiento de sus progenitores. En la Figura 2.3 mostramos las distribuciones de velocidades tangenciales y radiales para ambas muestras simuladas: original y restringida. La distribución de velocidades tangenciales para la muestra original puede encontrarse en el panel superior izquierdo, mientras que la correspondiente distribución para la muestra restringida se halla en el panel superior derecho (línea sólida y escala de la izquierda). La muestra restringida, que recordemos ha sido seleccionada cinemáticamente, presenta una dispersión de la velocidad tangencial ( $\sigma_{\text{tan}} \sim 80 \text{ km s}^{-1}$ ) inferior a la muestra original ( $\sigma_{\text{tan}} \sim 100 \text{ km s}^{-1}$ ); donde hemos definido la dispersión, por motivos únicamente de cálculo, como el ancho completo a la mitad del máximo de las distribuciones. Resulta muy significativo el hecho de que ambas distribuciones presentan un máximo para diferentes velocidades tangenciales:  $V_{\text{tan}} \sim 45 \text{ km s}^{-1}$  para la muestra original y  $V_{\text{tan}} \sim 65 \text{ km s}^{-1}$  para la muestra restringida, mostrando claramente como la muestra restringida está sesgada hacia velocidades tangenciales mayores, como cabría esperar de una muestra seleccionada a

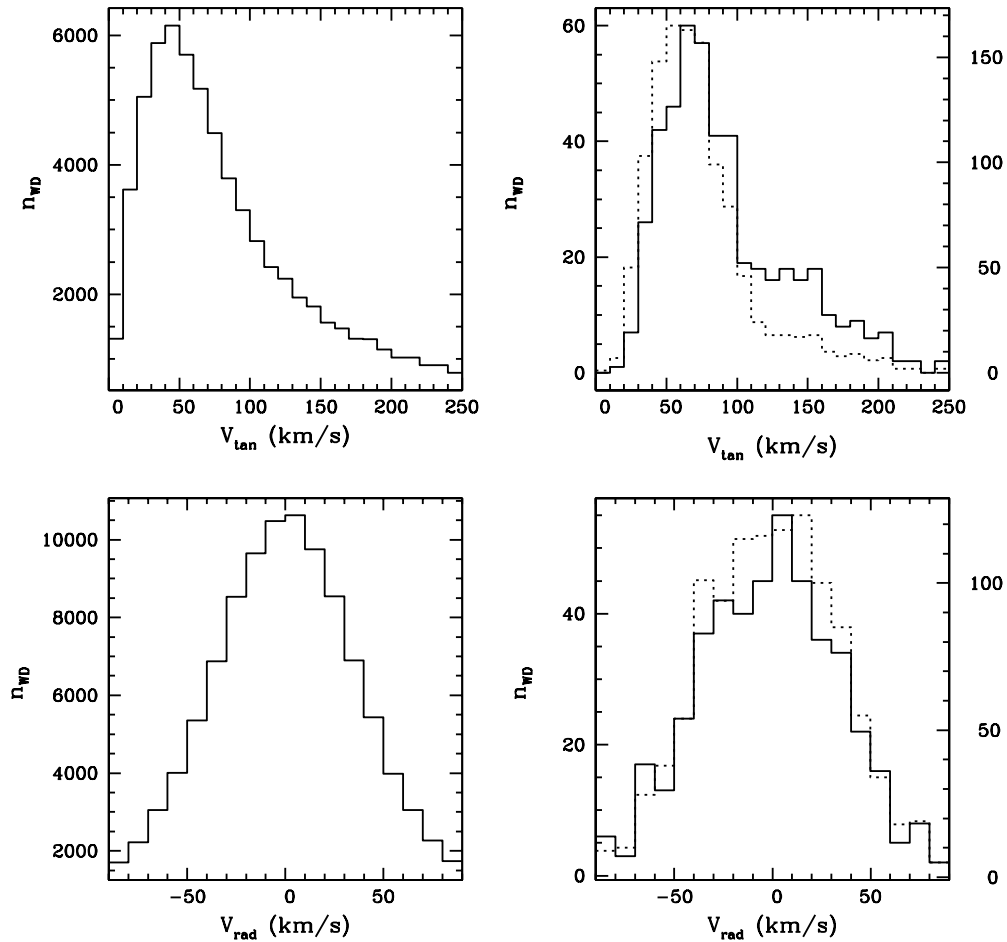


Figura 2.3: Distribución de velocidades tangenciales (panel superior izquierdo) y radiales (panel inferior izquierdo) para la muestra original, y las correspondientes distribuciones para la muestra restringida (paneles superior e inferior derecho, respectivamente). Mediante una línea discontinua se representan las correspondientes distribuciones de la muestra restringida calculadas con una restricción más débil en movimientos propios (ver el texto principal para más detalles).

partir de sus movimientos propios. De hecho, la velocidad tangencial más probable de la muestra restringida es prácticamente un tercio mayor que la que cabría esperar de la muestra total de enanas blancas. Este sesgo cinemático es así mismo muy evidente en el comportamiento de la distribución para velocidades pequeñas, donde la muestra restringida presenta un claro déficit de estrellas de este tipo. Nótese, también, la existencia de una cola muy extendida para velocidades tangenciales altas, indicativo este hecho de la presencia de enanas blancas con movimientos propios altos, consecuencia, como en los casos anteriores, del criterio de selección en movimientos propios. En dicha figura también mostramos la distribución de velocidades radiales para la muestra original en el panel inferior izquierdo y para la muestra restringida en el panel inferior derecho, utilizando una línea continua y la escala de la derecha. En este caso, ambas distribuciones presentan valores de la dispersión similares ( $\sigma_{\text{rad}} \sim 90 \text{ km s}^{-1}$ ), como así mismo un comportamiento muy parecido y centradas prácticamente en  $V_{\text{rad}} = 0$ ; cosa que era de esperar pues no existe ninguna restricción con respecto a las velocidades radiales en la muestra restringida.

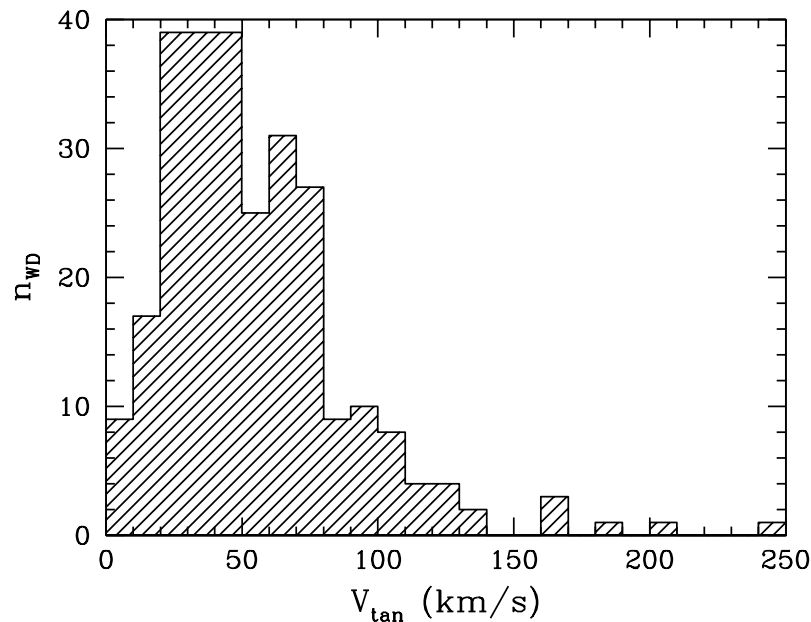


Figura 2.4: Distribución de las velocidades tangenciales para la muestra de Sion et al. (1988).

En la Figura 2.4 mostramos la distribución de velocidades tangenciales para la muestra observacional de Sion et al. (1988). Si comparamos las distribuciones de velocidades tangenciales de la Figura 2.3 (paneles superiores) con la de la Figura 2.4, podemos asegurar que la muestra observacional no posee un sesgo cinemático claro, puesto que no presenta ningún déficit evidente de enanas blancas con velocidades tangenciales pequeñas — la razón entre la altura del máximo y la altura del intervalo

de velocidades más pequeñas es la misma para ambas distribuciones, la original y la observacional, siendo su valor aproximadamente de  $1/4$  — ni tampoco existe ninguna cola de objetos con velocidades tangenciales altas, a diferencia de lo que ocurre en la muestra restringida. Otra semejanza más entre la muestra original y la observacional se encuentra en el hecho de que el máximo de la velocidad tangencial para la primera se halla en  $V_{\text{tan}} \sim 40 \text{ km s}^{-1}$ , mientras que el máximo de la muestra original (que, recordemos, no ha sido seleccionada cinemáticamente) se encuentra para un valor muy similar al anterior, ( $V_{\text{tan}} \sim 45 \text{ km s}^{-1}$ ). Sin embargo, por lo que respecta a la dispersión de la velocidad tangencial, ésta es para la muestra observacional ( $\sigma_{\text{tan}} \sim 60 \text{ km s}^{-1}$ ), aproximadamente un tercio más pequeña que la correspondiente dispersión de la muestra original. Tal resultado podría deberse a la ausencia de enanas blancas de baja luminosidad en la muestra observacional. Nótese que las enanas blancas intrínsecamente más débiles se seleccionan sobre la base de movimientos propios altos y, por lo tanto, es de esperar que presenten en promedio velocidades tangenciales altas, incrementándose de esta forma la dispersión de velocidades. Para comprobar el razonamiento anterior hemos ejecutado nuestro código Monte Carlo utilizando una restricción en movimientos propios mucho más relajada ( $\mu \geq 0,08'' \text{ yr}^{-1}$ ). Los resultados obtenidos se muestran en los paneles derechos de la Figura 2.3 en forma de una línea punteada y utilizando la escala de la derecha. A pesar de que el número de objetos seleccionados aumenta de  $\sim 85$  hasta prácticamente 250, el valor de la dispersión de la velocidad tangencial decrece desde  $\sigma_{\text{tan}} \sim 80 \text{ km s}^{-1}$  hasta  $\sigma_{\text{tan}} \sim 60 \text{ km s}^{-1}$ , en concordancia con la dispersión de velocidades de la muestra observacional. Podemos finalmente realizar un último test imponiendo una condición más restrictiva sobre las magnitudes visuales ( $m_V \leq 15,5^{\text{mag}}$ ). La muestra resultante es ahora más pequeña — 58 enanas blancas — como era de esperar, mientras que la dispersión de la velocidad tangencial decrece hasta  $\sigma_{\text{tan}} \sim 40 \text{ km s}^{-1}$  y la velocidad tangencial más probable permanece prácticamente constante ( $V_{\text{tan}} \sim 40 \text{ km s}^{-1}$ ). En cambio, la distribución de velocidades radiales — línea punteada y escala de la derecha en el panel inferior derecho de la Figura 2.3 — resulta prácticamente indistinguible de la muestra anterior, seleccionada ésta con un criterio más restrictivo. Para resumir, las diferencias encontradas entre la muestra observacional y las muestras simuladas pueden considerarse como menores, razón por la cual podemos concluir que la población simulada es en buena medida representativa de la población real de enanas blancas.

### 2.2.2. Comportamiento temporal de las muestras

Hasta el momento hemos comparado las características cinemáticas globales de las muestras simuladas con aquellas de la muestra de Sion et al. (1988). No obstante, una de las mayores ventajas de esta última muestra se encuentra en el hecho de que las determinaciones de las masas se han obtenido utilizando el mismo procedimiento y consecuentemente, en este sentido, la muestra es relativamente homogénea. Por

lo tanto, podemos tratar de obtener las variaciones temporales de las propiedades cinemáticas como una función de la edad de nacimiento de los progenitores de las enanas blancas pertenecientes a la muestra observacional y compararlas luego con las propiedades de las muestras simuladas.

A tal respecto, en la Figura 2.5 mostramos los histogramas correspondientes a las distribuciones de tiempos de nacimiento para las enanas blancas de la muestra observacional (histograma sombreado) y de la muestra restringida (histograma sin sombrear). También se especifica en la parte superior de cada intervalo el número de objetos en cada uno de ellos. Los intervalos de tiempo se han escogido de manera tal que la distribución de enanas blancas de la muestra observacional sea la más eficiente. Nótese que la escala de tiempos decrece hacia la derecha y que, por tanto, los objetos más viejos están localizados en la parte izquierda del diagrama, mientras que los objetos más jóvenes contribuyen en los intervalos de la derecha del diagrama. Es importante recalcar que los intervalos con objetos más antiguos incluyen datos cinemáticos provenientes tanto de enanas blancas brillantes y poco masivas, como de enanas blancas débiles pero masivas. El primer intervalo de tiempos corresponde a objetos con edades superiores a 7 Gyr y contiene sólo cinco estrellas, la mayoría de ellas pertenecientes a la muestra de Liebert et al. (1988). El último intervalo corresponde a objetos con edades inferiores a 1 Gyr. Los restantes intervalos están equiespaciados en tiempo y corresponden a los progenitores de las enanas blancas con edades variando desde 1 hasta 7 Gyr en intervalos de 2 Gyr. Todos los intervalos se han centrado a la edad promedio correspondiente, es decir,  $\sim 7, 5.9, 3.7, 1.9$  y  $0.5$  Gyr, respectivamente.

Puesto que el intervalo de tiempo más reciente corresponde a los objetos más brillantes, es de esperar que este intervalo sea razonablemente completo en la muestra observacional. Motivo por el cual hemos tomado el número total de estrellas en las muestras simuladas de manera tal que el número de objetos del intervalo más reciente de la muestra restringida sea comparable con el de la muestra observacional. Puesto que no hay ninguna restricción clara en las edades de las enanas blancas pertenecientes a la muestra restringida, podemos fácilmente valorar la fiabilidad estadística de los restantes intervalos de tiempo de la muestra observacional. Nótese la diferencia entre el número de enanas blancas de la muestra restringida y de la muestra observacional para los intervalos más viejos de la Figura 2.5, pues la completitud de la muestra observacional decrece drásticamente conforme la edad de nacimiento aumenta. También hemos representado en la Figura 2.5 (mediante una línea continua) el porcentaje ( $\eta$ ) de enanas blancas ausentes en la muestra observacional como una función del tiempo de nacimiento de sus progenitores, considerando que el intervalo de tiempos más reciente de la muestra restringida es completo. Si consideramos como razonable que para hacer una estimación adecuada de las propiedades temporales de la muestra observacional necesitamos tener por lo menos un tercio de las enanas blancas que cabría esperar en cada intervalo, llegamos a la conclusión de que debemos restringirnos a tiempos de nacimiento inferiores a 3.7 Gyr. Es decir, los únicos

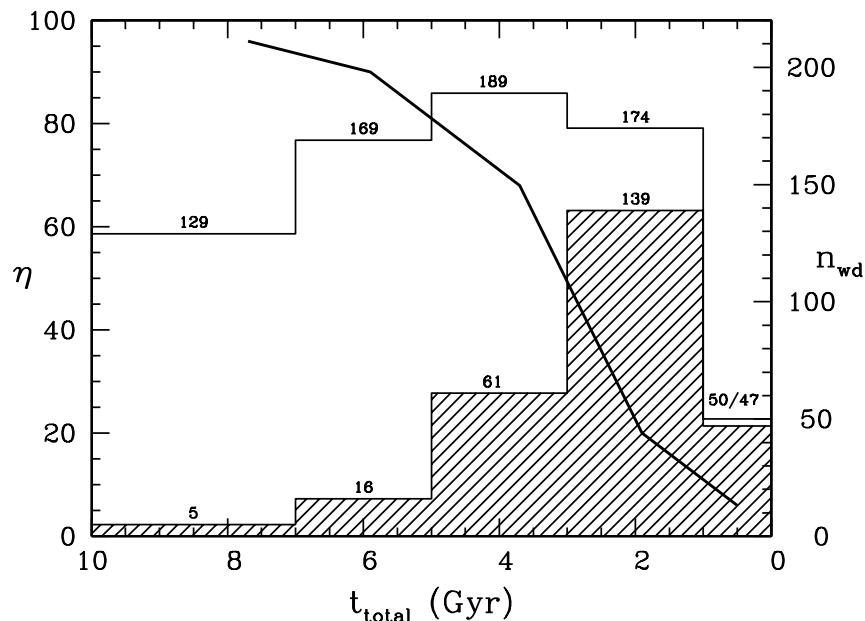


Figura 2.5: Distribución del tiempo total de enfriamiento de la muestra restringida (histograma sin sombreado) y de la muestra observacional (histograma sombreado) junto con el porcentaje de enanas blancas perdidas en la muestra observacional. El número total de objetos en cada intervalo de tiempo se muestra en la parte superior del mismo.

intervalos de tiempo que vamos a considerar como estadísticamente significativos son los tres intervalos más recientes.

En la Figura 2.6 representamos la variación de las componentes de la velocidad tangencial en función del tiempo total de enfriamiento (tiempo de enfriamiento de la enana blanca más el tiempo de vida en la secuencia principal de la estrella progenitora) para las enanas blancas de la muestra restringida (paneles de la izquierda) y para las de la muestra observacional (paneles de la derecha). Tal y como hemos argumentado anteriormente, no hemos tenido en cuenta los datos para  $t_{\text{total}} > 3,7$  Gyr, por considerar que la muestra observacional es incompleta para estos valores del tiempo. No obstante, para mayor claridad, hemos representado mediante una línea discontinua tales datos. La línea fina vertical corresponde a  $t_{\text{total}} = 3,7$  Gyr. Como puede verse en esta figura, el comportamiento general para los objetos más jóvenes es muy similar para ambas muestras. En particular, tanto la muestra restringida como la observacional poseen velocidades negativas a través del plano galáctico,  $W \sim -10 \text{ km s}^{-1}$ , ambas presentan un rezagamiento con respecto al Sol en el plano galáctico muy similar,  $V \sim -25 \text{ km s}^{-1}$  y  $-20 \text{ km s}^{-1}$ , respectivamente, y por último, ambas muestras poseen una velocidad radial del orden de  $U \sim 20 \text{ km s}^{-1}$ . Además, hemos comparado los promedios temporales para los valores de las velocidades de la Figura 2.6, obte-

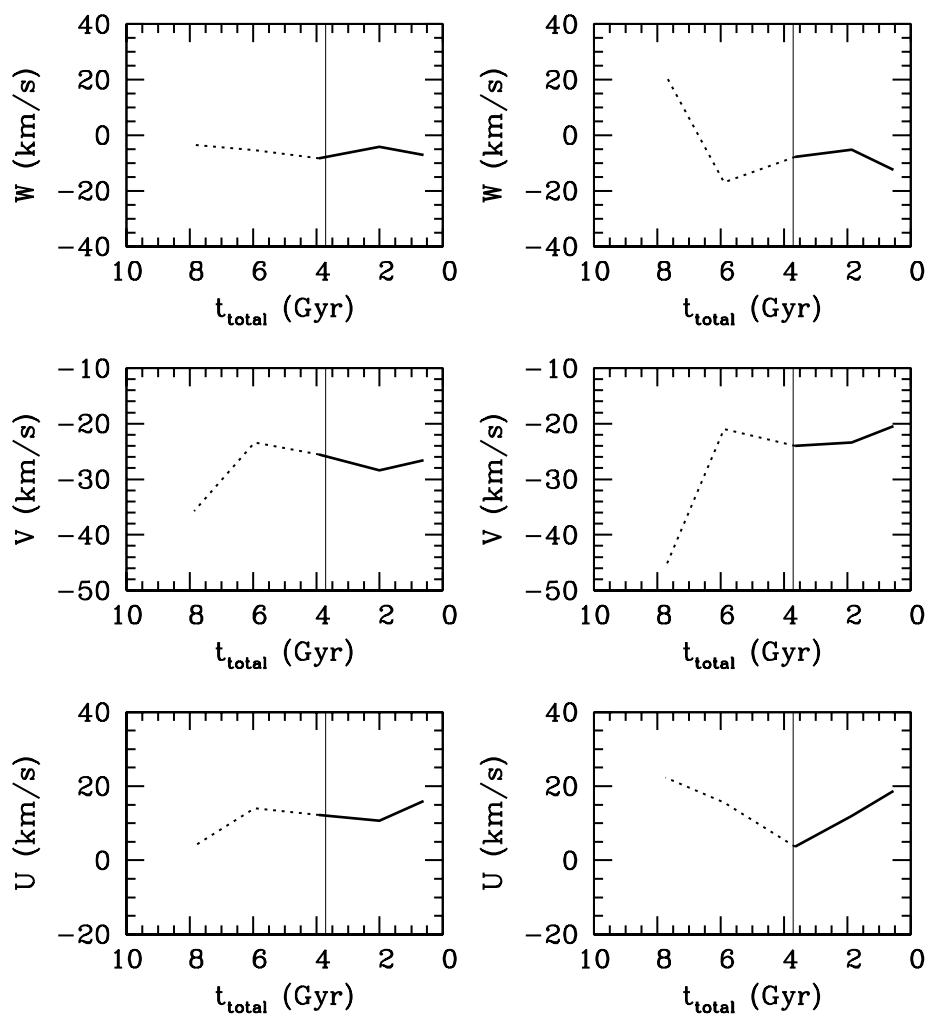


Figura 2.6: Componentes de la velocidad tangencial en función del tiempo de nacimiento de los progenitores de las enanas blancas para la muestra restringida (paneles de la izquierda) y de la muestra observacional (paneles de la derecha); ver texto para más detalles.

niendo los siguientes resultados:  $\langle U \rangle \sim 10$  y  $12 \text{ km s}^{-1}$ ,  $\langle V \rangle \sim -28$  y  $-23 \text{ km s}^{-1}$ , y  $\langle W \rangle \sim -8$  y  $-7 \text{ km s}^{-1}$ , para las muestras restringida y observacional, respectivamente. También hemos calculado los promedios temporales para las dispersiones de la velocidades de la muestra restringida y observacional:  $\langle \sigma_U \rangle \sim 41$  y  $42 \text{ km s}^{-1}$ ,  $\langle \sigma_V \rangle \sim 27$  y  $30 \text{ km s}^{-1}$ , y  $\langle \sigma_W \rangle \sim 25$  y  $25 \text{ km s}^{-1}$ , encontrando, al igual que en el caso anterior, que los resultados de ambas muestras se hallan en buen acuerdo.

Tal y como se hizo notar con anterioridad en la Sección 2.1, el ingrediente principal para ajustar de manera adecuada la cinemática de las enanas blancas es la forma concreta de la ley de altura patrón. De hecho, la función de luminosidad (ver Sección 2.3) es únicamente sensible a la relación entre la altura patrón inicial y final,  $(z_i/z_f)$ , y al valor de la escala de tiempo de la formación del disco,  $(\tau_h)$ , pero no es sensible, pongamos por caso, al valor concreto de  $z_f$ . Sin embargo, cuando lo que se considera es la cinemática de la muestra, es cierto lo contrario. Es decir, la cinemática de las muestras simuladas es muy sensible a los valores concretos adoptados para la altura patrón final. Tal situación se puede apreciar claramente en la Tabla 2.1, donde mostramos los promedios temporales de las tres componentes de la velocidad tangencial y sus respectivas dispersiones, para diferentes valores adoptados de la altura patrón final, pero manteniendo constante la relación anteriormente mencionada entre la altura patrón inicial y final.

Cuadro 2.1: Valores promedio de las tres componentes de la velocidad tangencial y sus correspondientes dispersiones (expresadas todas ellas en  $\text{km s}^{-1}$ ) para diferentes valores de  $z_f$  (en kpc).

VELOCIDAD HELIOCÉNTRICA Y DISPERSIÓN EN FUNCIÓN DE  $z_f$

$z_f$	$\langle U \rangle$	$\langle V \rangle$	$\langle W \rangle$	$\langle \sigma_U \rangle$	$\langle \sigma_V \rangle$	$\langle \sigma_W \rangle$
0.05	11.93	-13,87	-3,54	12.33	7.43	8.03
0.10	12.77	-16,60	-5,42	20.42	11.09	10.85
0.20	12.00	-19,86	-4,02	27.84	15.25	16.06
0.30	9.40	-24,95	-5,16	31.52	19.54	20.70
0.40	10.13	-24,93	-7,33	36.57	21.40	24.08
0.50	9.34	-27,77	-7,70	41.38	26.75	24.74
0.60	11.45	-29,90	-5,83	41.92	26.98	30.63

Como podemos ver en la tabla, tanto el promedio temporal de la componente radial de la velocidad tangencial,  $\langle U \rangle$ , como el promedio temporal de la componente perpendicular de la velocidad tangencial,  $\langle W \rangle$ , no son muy sensibles al valor elegido para  $z_f$ , mientras que el promedio para la velocidad de rezagamiento sí es muy sensible a tal elección. Con respecto a las dispersiones de las velocidades, las tres componentes son sensibles a  $z_f$ . Con el proposito de reproducir los resultados de las Figura 2.5 y 2.6 hemos tomado un valor para  $z_f$  de 500 pc, que es un valor típico para la población



del disco viejo. Con esta elección ajustamos de la mejor manera posible los promedios de la muestra simulada a los datos observacionales. Es importante recalcar aquí que si aumentamos (disminuimos) el valor de  $z_f$  por un factor 2 sin mantener constante la relación  $(z_i/z_f)$ , se dobla (se divide por 2) el número de objetos del intervalo de tiempos más recientes (recordemos que es el más fidedigno), haciendo, por tanto, incompatible las muestras simuladas con la muestra observacional. De manera similar si aumentamos  $\tau_h$  en un factor 2 apreciamos un cambio drástico en el comportamiento de la velocidad de rezagamiento, puesto que varía para el intervalo de objetos más jóvenes, de  $\sim -20$  a  $\sim -10$  km s<sup>-1</sup>. Concluimos, en consecuencia, que la ley de altura patrón no entra en conflicto con las características cinemáticas observadas de la población de enanas blancas.

### 2.2.3. Una observación final sobre la fiabilidad de las muestras

Resulta interesante comparar los resultados del análisis cinemático de la muestra observacional con las predicciones obtenidas a partir del recuento de estrellas de la secuencia principal tal y como expresábamos mediante la ecuación (2). En la Figura 2.7 mostramos las correlaciones entre la componente  $V$  de la velocidad tangencial (panel superior), la relación  $\sigma_V/\sigma_U$  (panel central), y la relación  $\sigma_W/\sigma_U$  (panel inferior) como una función de la dispersión de la velocidad radial,  $\sigma_U$ , obtenidas estas correlaciones a partir de los datos de la enanas blancas compilados por Sion et al. (1988).

Excepto para el último intervalo la concordancia entre los datos obtenidos de la muestra de enanas blancas y los obtenidos de las estrellas de la secuencia principal, es bastante buena ( $\sigma_V^2/\sigma_U^2 \sim 0,3$ ,  $\sigma_W^2/\sigma_U^2 \sim 0,5$  y  $V/\sigma_U^2 \sim -20$ ). De todas formas, conviene mencionar, que los datos del último intervalo han sido obtenidos, tal y como mencionábamos anteriormente, con tan sólo cinco estrellas. Por otra parte, todos estos objetos pertenecen a la muestra de estrellas de baja luminosidad de Liebert et al. (1988), la cual se encuentra fuertemente sesgada hacia velocidades tangenciales altas. Además, los errores sistemáticos que afectan tanto las determinaciones de masa y radio como las determinaciones de luminosidades (las correcciones bolométricas utilizadas en el trabajo anterior son altamente inciertas) pueden enmascarar el comportamiento real de la muestra.

Finalmente, podemos realizar un último test para comprobar la validez de las asunciones adoptadas para derivar la muestra simulada. El test consite en comparar los resultados de esta sección con el análisis cinemático de una muestra de estrellas F y G de la secuencia principal (Edvardsson et al. 1993). Estos autores han medido las distancias, los movimientos propios y las velocidades radiales (entre otras magnitudes) para una muestra de 189 estrellas del tipo F y G. Así mismo consiguieron asignar edades individuales para todas las estrellas de la muestra a partir de ajustes en el plano  $T_{\text{eff}} - \log g$ . Esta misma muestra de estrellas ha sido reanalizada recientemente por Ng y Bertelli (1988), utilizando distancias basadas en los

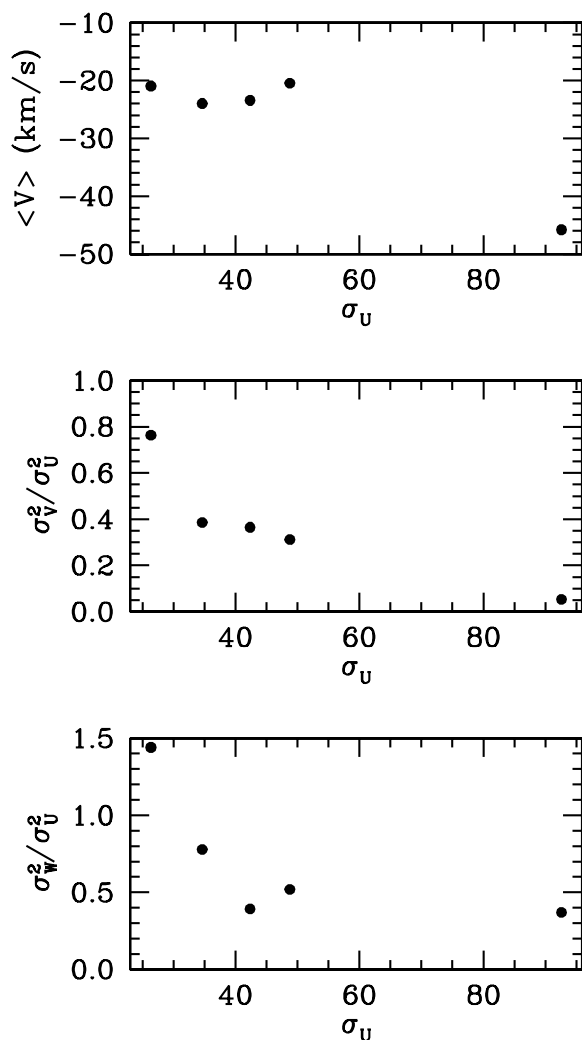


Figura 2.7: Propiedades cinemáticas de la muestra observacional.

paralajes tomados por *Hipparcos* junto con un juego de isocronas más modernas. Remitimos al lector al trabajo anterior para un análisis detallado de los errores e incertidumbres involucradas en la datación de los objetos individuales. A pesar de que podríamos realizar un análisis similar al efectuado en la Sección 2.2.2, para ser concisos nos referiremos aquí tan sólo a los valores medios de las tres componentes de la velocidad tangencial y sus correspondientes dispersiones. Para tal propósito mostramos en la Tabla 2.2 los valores promedio de las tres componentes de la *velocidad tangencial* y sus correspondientes dispersiones para la muestra restringida de nuestra simulación Monte Carlo (etiquetada como MC), la muestra observacional (etiquetada como WD) y las tres componentes de la *velocidad* y sus dispersiones para la muestra de Edvardsson et al. (1993) — etiquetada como E93 —. Tal y como

Cuadro 2.2: Valores promedio de las velocidades tangenciales y sus correspondientes dispersiones (ambas en  $\text{km s}^{-1}$ ) para la simulación Monte Carlo, la muestra observacional y la muestra de Edvardsson et al. (1993).

VELOCIDADES HELIOCÉNTRICAS Y DISPERSIONES						
Sample	$\langle U \rangle$	$\langle V \rangle$	$\langle W \rangle$	$\langle \sigma_U \rangle$	$\langle \sigma_V \rangle$	$\langle \sigma_W \rangle$
MC	10	-28	-8	41	27	25
WD	12	-23	-7	42	30	25
E93	14	-21	-8	39	29	23

podimos comprobar en la Sección 2.2.2, la concordancia entre la simulación Monte Carlo y la muestra observacional es muy buena. Así mismo, si comparamos ambas muestras con la muestra de Edvardsson et al. (1993) comprobamos que el ajuste entre los valores promedio de las tres muestras es realmente bueno, a pesar de que el procedimiento de datación sea muy diferente en ambas muestras observacionales. Los mismos razonamientos se mantienen para los valores promedio de las tres componentes de la dispersión de velocidades. Por lo que concluimos que nuestra ecuación número (2) representa bastante bien las propiedades cinemáticas de la población de enanas blancas.

## 2.3. La función de luminosidad de las enanas blancas

### 2.3.1. Distribución espacial y completitud de la población de enanas blancas

El método  $1/V_{\text{max}}$  (Schmidt 1968; Felten 1976), aplicado a nuestra simulación de la población de enanas blancas, nos proporciona un estimador no sesgado de la función de luminosidad, siempre y cuando supongamos que nuestras muestras simuladas son completas en movimiento propio y en magnitud y que, por otro lado, la distribución espacial de estrellas es homogénea. Estas condiciones son, estrictamente hablando, equivalentes a que la distancia máxima a la que podemos encontrar un objeto perteneciente a la muestra sea independiente de la dirección. En nuestro caso, esto obviamente no es cierto — y, lo más probable, es que para una muestra real tampoco lo sea —, puesto que hemos construido las muestras simuladas suponiendo un perfil exponencial decreciente de estrellas a través del plano galáctico. Dado que la ley de alturas patrones decrece con el tiempo (ver Sección 2.1), es difícil decir a *priori* cuál será la configuración final de enanas blancas.

En el histograma de la Figura 2.8 mostramos la distribución logarítmica del número de enanas blancas como una función del valor absoluto de la coordenada  $z$  para la muestra original (escala de la derecha) y la muestra restringida (escala de

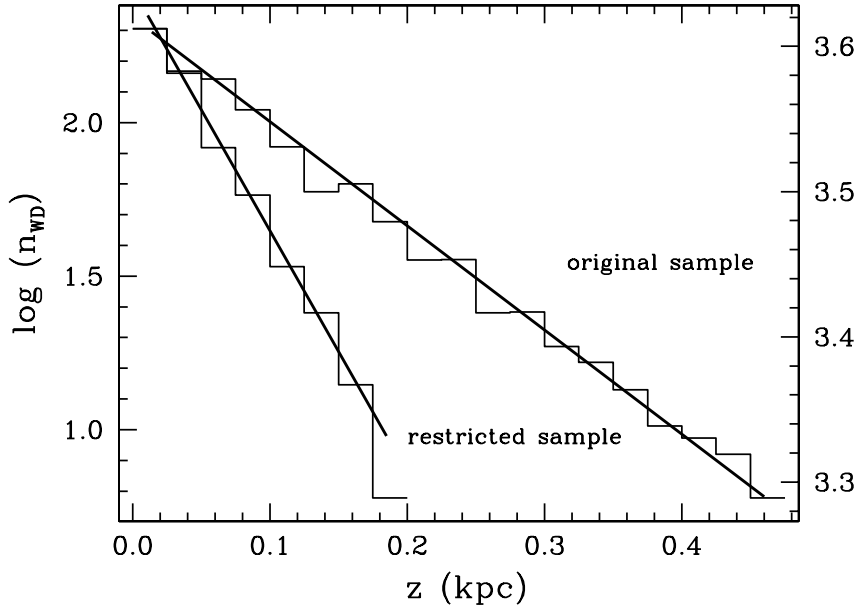


Figura 2.8: Histograma de la distribución de  $z$  para la muestra original (escala derecha) y la muestra restringida (escala izquierda).

la izquierda). Claramente, ambas distribuciones corresponden con perfiles exponenciales del disco con diferentes alturas patrones. En la Figura 2.8 también mostramos el mejor ajuste para cada distribución. Las correspondientes alturas patrones deducidas son  $\approx 1,3$  kpc para la muestra original, que es un valor típico para una población del disco grueso, mientras que para la muestra restringida obtenemos un valor sensiblemente menor de  $\approx 129$  pc, el cual puede ser considerado como un valor típico de una población del disco fino. Este resultado no es en modo alguno evidente puesto que, tal y como se explicó en la Sección 2.1, las poblaciones simuladas se adaptan de forma natural al hecho de que los objetos más viejos están distribuidos sobre volúmenes más grandes (es decir, con alturas patrones mayores y por tanto con dispersiones de velocidad perpendicular al plano de la galaxia también mayores) que los objetos jóvenes. Podríamos esperar, por consiguiente, que la distribución espacial final de la muestra restringida de enanas blancas — que ha sido seleccionada cinemáticamente — mostrase características intermedias de las poblaciones del disco grueso y del disco fino; sin embargo, éste no es el caso. Evidentemente, puesto que no hay ninguna restricción en lo que a distancias se refiere (dentro de la columna local) a la cual una enana blanca perteneciente a la muestra original puede ser observada, la altura patrón final esperada para esta muestra debería ser mayor, resultado con el que nuestras simulaciones muestran un buen acuerdo. Si observamos la muestra restringida, nuestros resultados nos indican claramente que estamos seleccionando para esta muestra enanas blancas situadas muy cerca del plano galáctico. Además,

si cambiamos  $z_f$  por un factor 2 tal y como explicamos en la Sección 2.2, la altura patrón final de la muestra restringida no cambia apreciablemente, mientras que la dispersión de la velocidad perpendicular al plano galáctico no se hallaría en acuerdo con los datos observacionales. En consecuencia, la altura patrón final de la muestra restringida se encuentra dominada claramente por el criterio de selección. Es importante resaltar que esta altura patrón, tomada en primera instancia, no es en modo alguno despreciable cuando se la compara con el valor de la distancia máxima a la cual es posible medir una paralaje con relativa buena precisión — la cual es típicamente de unos 200 pc. Esta situación impone un criterio de selección adicional (ver Sección 2.1) para las enanas blancas de la muestra restringida, que son, recordemos, las que se utilizarán en el proceso de determinación de la función de luminosidad. El método  $1/V_{\max}$  debe ser, en consecuencia, generalizado de manera tal que tenga en cuenta el gradiente espacial de densidad. Por esta razón hemos utilizado la ley de densidades de la Figura 2.8 para definir un nuevo elemento de volumen  $dV' = \rho(z) dV$  (Felten 1976; Avni & Bahcall 1980; Tinney, Reid & Mould 1993), siendo  $\rho(z)$  la ley de densidad obtenida de la Figura 2.8. Este nuevo estimador corregido proporciona una determinación más precisa de la función de luminosidad de las enanas blancas y, en consecuencia, un valor más realista de la densidad espacial de enanas blancas. En definitiva, podemos decir que para una elección razonable de la ley de la altura patrón los efectos de la misma sobre la función de luminosidad no se han de considerar en principio despreciables.

El segundo punto a considerar, y probablemente el más importante, es el de la completitud de las muestras utilizadas en la construcción de la función de luminosidad. Este es un punto clave, puesto que el método  $1/V_{\max}$  presupone la completitud de las muestras. No debemos olvidar que la muestra original es completa por construcción, puesto que consiste en todas las enanas blancas generadas por el código Monte Carlo, independientemente de sus distancias, movimientos propios, magnitudes aparentes y velocidades tangenciales, mientras que la muestra restringida se ha construido con enanas blancas escogidas de la muestra original de acuerdo con un conjunto de criterios de selección y que, por lo tanto su completitud ha de ser aún evaluada. En la Figura 2.9 estudiamos la completitud de la muestras simuladas. Para tal propósito, representamos en el panel superior izquierdo de la Figura 2.9 el diagrama acumulativo del recuento de estrellas enanas blancas de la muestra original con magnitud aparente menor que  $m_V$ , mientras que el correspondiente diagrama para la muestra restringida se muestra en el panel superior derecho. También representamos en la Figura 2.9 el recuento acumulativo de estrellas enanas blancas con movimientos propios superiores a  $\mu$  pertenecientes a la muestra original (panel inferior izquierda) y de la muestra restringida (panel inferior derecho).

Para una muestra completa con una distribución de densidad espacial homogénea, el logaritmo del recuento acumulativo de estrellas enanas blancas con magnitud aparente menor que  $m_V$  es proporcional a  $m_V$  con una pendiente de 0.6 (véase, por ejemplo, Mihalas & Binney 1981). Para facilitar la comprensión de nuestros

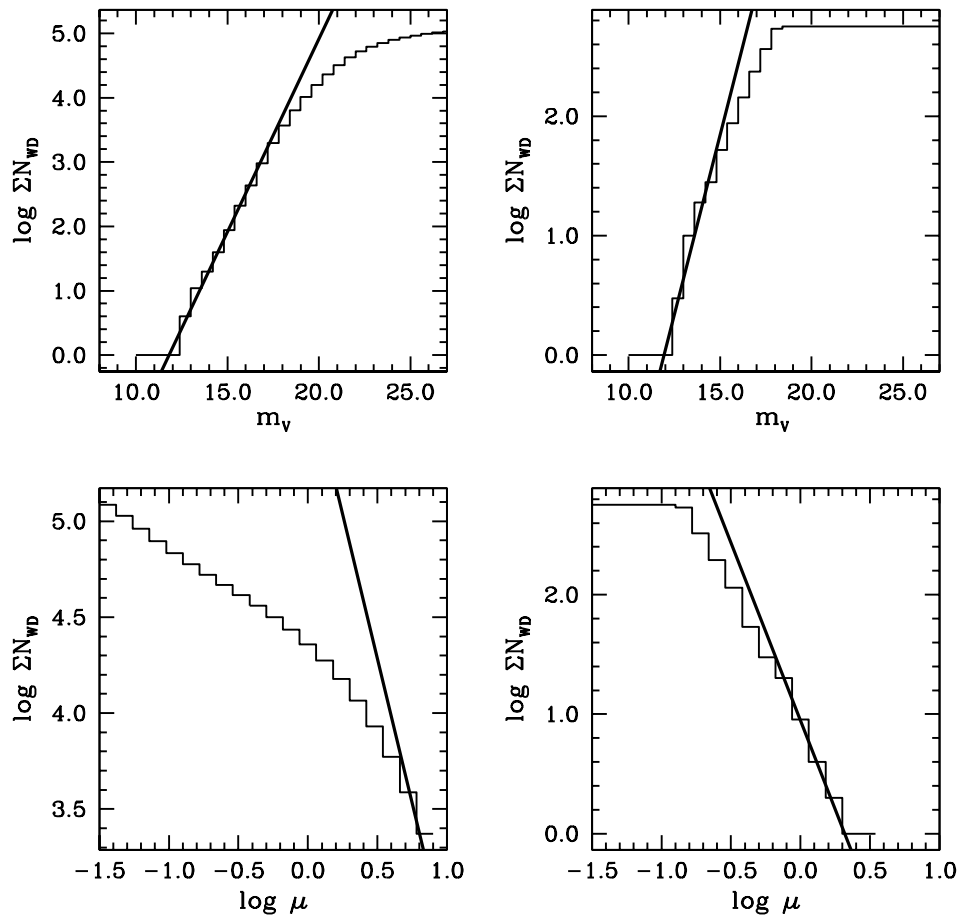


Figura 2.9: Histogramas acumulativos en magnitud aparente y movimiento propio para las muestras original y restringida.

razonamientos hemos dibujado en la Figura 2.9 una línea con tal pendiente. De la anterior discusión resulta evidente que nuestras muestras no están, en modo alguno, distribuidas homogéneamente. Nótese así mismo como los efectos de una ley de altura patrón resultan estar camuflados en el test estándar sobre completitud de las muestras. No obstante, los efectos de la ley de altura patrón pueden sacarse a la luz, puesto que resultan bastante aparentes en el diagrama acumulativo de estrellas de la muestra original, el cual es completo. Un vistazo al panel superior izquierdo de la Figura 2.9 revela que los efectos de la ley de altura patrón son evidentes para muestras con magnitud límite  $m_v \gtrsim 19^{\text{mag}}$ . Por lo tanto, nos hallamos ahora en condiciones de estimar la completitud en magnitud aparente de la muestra restringida, dado que el punto de desviación para esta muestra (véase el panel superior derecho de la Figura

2.9) ocurre sobre  $m_V \sim 17^{\text{mag}}$ . En consecuencia, los efectos de la altura patrón pueden ser completamente excluidos, y el valor anterior se puede tomar como un límite seguro para el cual la muestra restringida es completa en magnitud aparente.

De manera similar podemos estimar la completitud de la muestra restringida en movimientos propios. De nuevo, la asunción de una muestra homogénea y completa en movimiento propio nos conduce a la conclusión de que el logaritmo del recuento acumulativo de estrellas enanas blancas con movimiento propio superior a  $\mu$  debe ser proporcional a  $\mu$  con una pendiente de  $-3$  (véase, por ejemplo, Oswalt & Smith 1995). Un análisis del panel inferior izquierdo de la Figura 2.9 nos revela que la muestra original no se encuentra en estas condiciones. Es decir, puesto que la muestra original es completa por construcción, la hipótesis de una distribución homogénea en movimientos propios debe ser abandonada. Este es uno más, y quizás el más importante, de los efectos asociados con una ley de altura patrón puesto que recordemos, la cinemática de las muestras es extremadamente sensible a la elección de una ley de altura patrón (véase Sección 1, ecuación (2) y Tabla 2.1). Es necesario recalcar que los efectos de una ley de altura patrón son más evidentes en movimiento propio que en la distribución espacial, y este resultado puede ser directamente comprobado para una muestra real, obteniéndose así un prueba directa de la historia del ritmo de formación estelar por unidad de volumen. Por último, en el panel inferior derecho de la Figura 2.8 mostramos el diagrama del recuento acumulativo en movimiento propio de estrellas enanas blancas de la muestra restringida. Como era de esperar, los efectos de la ley de altura patrón son en este caso despreciables, ya que que estamos escogiendo enanas blancas con movimientos propios para los cuales la muestra original resulta razonablemente completa (véase el panel inferior izquierdo de la Figura 2.9). El valor exacto del punto de desviación es en este caso de  $\mu \sim 0,3'' \text{ yr}^{-1}$ , en justo acuerdo con los resultados de Wood & Oswalt (1998).

Queda bastante claro, a partir de la discusión anterior, que uno de los ingredientes que resulta ser esencial en la determinación de la función de luminosidad de las enanas blancas es la ley de alturas patrones utilizada. En principio cabe esperar dos tendencias en competición entre sí. Por un lado, los efectos de la ley de altura patrón deberían ser más destacados para objetos viejos, puesto que tales objetos presentan una dispersión de velocidades mayor (a pesar de que los efectos de la no homogeneidad espacial deberían resultar, así mismo, menos aparentes) y la cola de la función de luminosidad de las enanas blancas está predominantemente compuesta por este tipo de enanas blancas (objetos intrínsecamente débiles y con movimientos propios altos). En consecuencia, sería lógico esperar que el corte en la función de luminosidad se encuentre influido tanto por la distribución espacial de enanas blancas o por la distribución de velocidades, como por una combinación de ambos. Por otro lado, los objetos que conforman la cola de la función de luminosidad son objetos intrínsecamente débiles y, en consecuencia, para que resulten seleccionados para pertenecer a la muestra restringida deben ser objetos cercanos. Tal condición implica a su vez que la distancia media a la cual buscamos enanas blancas es pequeña y, por lo tanto, los

efectos de la altura patrón resultan ser menos apreciables. El razonamiento inverso resulta cierto para luminosidades moderadamente grandes. Resulta por lo tanto interesante determinar cuales son los efectos dominantes en función de la luminosidad. Para dicho propósito, en la Figura 2.10 mostramos diversas propiedades promedio de las enanas blancas de la muestra restringida como una función de su luminosidad para una simulación típica de nuestro Monte Carlo.

En el panel superior de la Figura 2.10 representamos la distancia media al plano galáctico de las enanas blancas de la muestra restringida. Como puede observarse, la distancia media al plano galáctico de las enanas blancas intrínsecamente brillantes puede llegar a ser incluso de 100 pc, la cual representa una fracción apreciable de la altura patrón de las enanas blancas. Consecuentemente, cabe esperar que los efectos de la distribución espacial no homogénea resulten más notorios para luminosidades altas. De manera inversa, la distancia media al plano galáctico para las enanas blancas cercanas al corte de la función de luminosidad es tan sólo de  $\sim 10$  pc. Por lo tanto, conforme la luminosidad decrece, estamos seleccionando regiones más pequeñas y es de esperar que los efectos de una distribución espacial no homogénea a bajas luminosidades, desde este punto de vista, sean también pequeños (no obstante, véase la discusión de la Sección 2.3.4).

En el panel central de la Figura 2.10 representamos la velocidad tangencial media para objetos pertenecientes a la muestra restringida como una función de la luminosidad. Mediante círculos sólidos mostramos los datos observacionales tomados de Liebert et al. (1988). La restricción adoptada por ellos en movimiento propio,  $\mu_0 = 0,80'' \text{ yr}^{-1}$ , es significativamente mayor que la adoptada por nosotros aquí,  $\mu_0 = 0,16'' \text{ yr}^{-1}$ , la cual es consistente con el corte en movimiento propio adoptado por Oswald et al. (1996). En consecuencia esperamos un valor promedio de la velocidad tangencial más pequeño. El acuerdo entre ambas muestras es bastante bueno puesto que, dada la relación entre los cortes en movimiento propio, nuestra velocidad tangencial media debería resultar del orden de un 20 por ciento más pequeña: si miramos con más detenimiento el panel central de la Figura 2.10 observamos que la velocidad tangencial media de la muestra de Liebert et al. (1988) es  $\sim 120 \text{ km s}^{-1}$ , mientras que nosotros obtenemos  $\sim 90 \text{ km s}^{-1}$ . Estos gráficos refuerzan la idea general de que nuestras simulaciones son perfectamente consistentes con la cinemática observada de la población de enanas blancas.

Finalmente, en el panel inferior de la Figura 2.10 mostramos la distribución de aquellas estrellas pertenecientes a la muestra restringida en función de la luminosidad. Como puede observarse, las enanas blancas con luminosidades bajas pertenecientes a la muestra restringida tienen, en promedio, movimientos propios grandes. Como era de esperar por la discusión de los dos paneles anteriores, la distribución de movimientos propios aumenta suavemente para luminosidades superiores a  $\sim 10^{-3} L_{\odot}$ : dado que el valor medio de la velocidad tangencial permanece aproximadamente constante, y los objetos que seleccionamos tienen distancias medias más pequeñas, el resultado neto es un aumento en el valor medio del movimiento



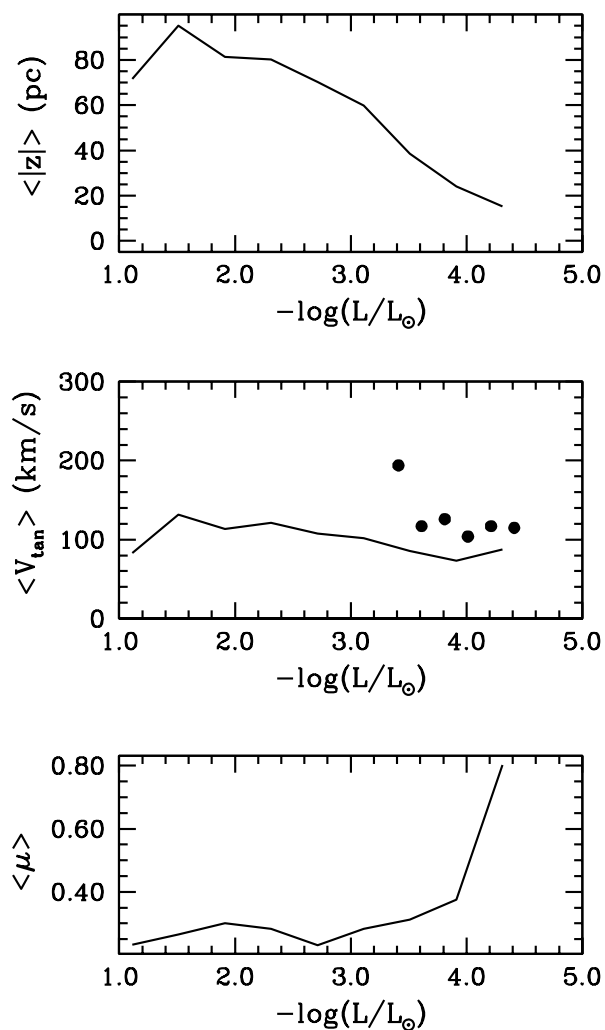


Figura 2.10: Propiedades promedio de la muestra restringida en función de la luminosidad. Panel superior: promedio de la coordenada  $z$  de las enanas blancas de la muestra restringida; panel central: promedio de la velocidad tangencial, los datos observaciones se han tomado de Liebert et al. (1988); y panel inferior: promedio del movimiento propio.

propio. Además, las enanas blancas pertenecientes a la porción de la función de luminosidad de bajas luminosidades se han extraído de la muestra original atendiendo preferentemente a sus movimientos propios altos. Este hecho es equivalente a decir que el criterio de selección principal es el de movimientos propios, mientras que el criterio en magnitudes aparentes tiene muy poco que hacer para estas luminosidades, de acuerdo con los resultados de Wood & Oswalt (1998). Como una consecuencia final, los efectos derivados de una distribución no homogénea en movimientos propios resultarían más evidentes a luminosidades altas, donde el movimiento propio promedio es más pequeño (véase la discusión sobre el panel inferior izquierdo de la Figura 2.9). De todas formas, los efectos de las inhomogeneidades en movimientos propios y en  $z$  son más prominentes a luminosidades altas, donde la función de luminosidad observacional ya tiene en cuenta tales efectos (Fleming et al. 1986).

### 2.3.2. Simulaciones de la función de luminosidad de las enanas blancas

En la Figura 2.11 mostramos, en una serie de paneles, las funciones de luminosidad obtenidas a partir de la realización de 10 simulaciones Monte Carlo diferentes. Para ello hemos escogido 10 valores distintos de la semilla inicial del generador de números aleatorios, obteniendo en consecuencia 10 realizaciones independientes de la función de luminosidad de las enanas blancas (de hecho, hemos calculado 20 realizaciones independientes, de las cuales sólo 10 se muestran en la Figura 2.11). La edad del disco adoptada en todos los casos es de  $t_{\text{disk}} = 13$  Gyr y el conjunto de restricciones utilizado para construir la función de luminosidad es el mencionado en la Sección 1, que es el mismo conjunto que el utilizado por Oswalt et al. (1996) para determinar la función de luminosidad observacional. Las funciones de luminosidad simuladas se han calculado utilizando el método  $1/V_{\text{max}}$  generalizado (Felten 1976; Tinney et al. 1993; Qin & Xie 1997), el cual tiene en cuenta los efectos de la altura patrón. Las barras de error de cada intervalo se han determinado de acuerdo con el procedimiento utilizado por Liebert et al. (1988): la contribución de cada estrella al error total en cada intervalo de luminosidad se puede estimar, de manera conservadora, como el mismo valor que la contribución a la densidad resultante; las contribuciones parciales de cada estrella en este intervalo se suman en cuadratura, siendo el error final la raíz cuadrada de este valor.

Hemos representando las funciones de luminosidad resultantes mediante cuadrados sólidos; también hemos unido cada punto por una línea continua como ayuda visual. Así mismo, hemos dibujado en cada uno de los paneles la función de luminosidad observacional de Oswalt et al. (1996) mediante círculos sólidos conectados por una línea de puntos. Para cada una de las realizaciones de la función de luminosidad de las enanas blancas mostramos en la esquina superior izquierda de cada panel el valor obtenido para  $\langle V/V_{\text{max}} \rangle$ . Finalmente, y por razones de completitud, mostramos en la Tabla 2.3 el número total de objetos de la muestra restringida,  $N_{\text{WD}}$ , y la distribución

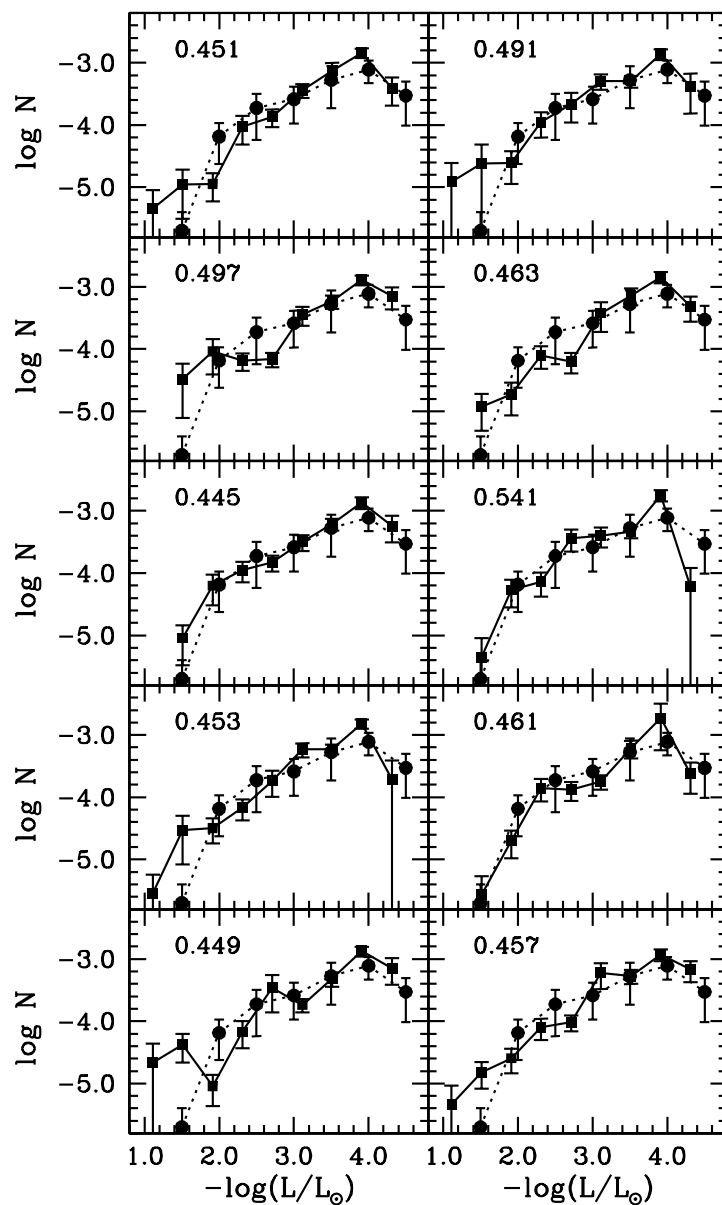


Figura 2.11: Panel donde se muestran diferentes simulaciones Monte Carlo de la función de luminosidad de las enanas blancas — cuadrados y línea sólida — comparada con la función de luminosidad observacional de Oswalt et al. (1996) — círculos y línea punteada.

de objetos,  $N_i$ , en cada intervalo de luminosidad,  $i$ , para las diferentes realizaciones de nuestro simulador Monte Carlo de la población de enanas blancas. El número total de enanas blancas pertenecientes a la muestra restringida es aproximadamente 200, que es el tamaño típico de las muestras actuales utilizadas para construir la función de luminosidad observacional. Este número es importante, puesto que las barras de error asignadas a cada intervalo de luminosidades dependen estrechamente del número de objetos en cada intervalo.

Cuadro 2.3: Número total de enanas blancas,  $N_{\text{WD}}$ , y enanas blancas en cada intervalo,  $N_i$ , para cada una de las 20 simulaciones de la función de luminosidad de las enanas blancas.

NÚMERO DE ENANAS BLANCAS TOTAL Y POR INTERVALOS

$i$	$N_{\text{WD}}$	$N_1$	$N_2$	$N_3$	$N_4$	$N_5$	$N_6$	$N_7$	$N_8$	$N_9$
1	200	1	8	5	14	42	38	42	44	6
2	216	1	6	11	18	29	48	49	53	1
3	203	0	4	8	22	36	39	45	43	6
4	176	0	6	6	17	18	35	41	44	9
5	210	1	5	8	17	24	49	48	53	5
6	191	1	7	10	23	24	37	44	37	8
7	202	0	3	12	29	27	42	50	35	4
8	222	0	1	16	18	38	41	50	57	1
9	197	0	5	12	20	22	34	51	47	6
10	198	1	1	9	16	28	44	49	47	3
11	204	0	5	10	21	25	38	44	53	8
12	198	1	3	14	20	33	36	50	35	6
13	175	0	3	14	20	23	32	44	37	2
14	182	0	6	9	15	28	40	43	35	6
15	185	2	6	6	19	30	31	44	43	4
16	213	1	3	16	21	33	31	45	56	7
17	189	2	2	11	25	22	32	43	44	8
18	207	1	4	7	17	33	38	41	61	5
19	217	1	10	10	28	17	47	55	42	7
20	210	0	4	13	19	31	38	46	55	4

Resulta importante resaltar el excelente ajuste en términos generales entre los datos simulados y la función de luminosidad observacional. No obstante, existen algunos aspectos que requieren un análisis más detallado. En primer lugar, observamos que las funciones de luminosidad simuladas son sistemáticamente mayores que la función de luminosidad observacional para luminosidades por encima de  $\log(L/L_{\odot}) = -2,0$ . Este comportamiento refleja los efectos de la no homogeneidad

espacial de las muestras simuladas. Es importante mencionar que la parte caliente de la función de luminosidad de Oswalt et al. (1996) se ha determinado sin tener en cuenta los efectos de la altura patrón, en contraste con el procedimiento adoptado por Fleming et al. (1986), donde estos efectos se han tenido en cuenta de manera adecuada. Cuando se compara la función de luminosidad obtenida en esta sección con la de Fleming et al. (1986), el ajuste es excelente.

También resulta interesante observar que la porción caliente de la función de luminosidad varía considerablemente para las diferentes realizaciones efectuadas. La razón para este comportamiento es que a luminosidades altas la evolución está dominada por las pérdidas por neutrinos, y es muy rápida. Por lo tanto, la probabilidad de encontrar dichas enanas blancas es relativamente pequeña por lo que la relevancia estadística de estos intervalos es baja. En consecuencia, la forma exacta de la función de luminosidad para  $\log(L/L_{\odot}) \geq -3,0$  depende en gran manera de la semilla inicial del generador de números aleatorios. Este hecho resulta confirmado si comparamos la segunda y tercera columna de la Tabla 2.3, donde se muestra el número total de objetos en la muestra restringida y el número de objetos en el primer intervalo de la función de luminosidad para cada una de las realizaciones de las simulaciones Monte Carlo. Como consecuencia, las barras de error reales que deberían asignarse a cada uno de los intervalos son presumiblemente mayores que las presentadas en la Figura 2.11. Además, cualquier intento de extraer el ritmo de formación estelar volumétrico utilizando los datos de los intervalos de altas luminosidades (Noh & Scalo 1990) se asienta sobre cimientos muy poco sólidos. Cabe también decir que la completitud de las muestras simuladas estimada a partir del valor de  $\langle V/V_{\max} \rangle$  es relativamente grande. De hecho, para una muestra completa y homogénea este valor es aproximadamente igual a 0.5; puesto que las muestras simuladas no son homogéneas, los valores aquí obtenidos pueden considerarse como razonables.

Finalmente, cabe mencionar que hemos realizado un test  $\chi^2$  para estudiar la compatibilidad de las muestras de Monte Carlo simuladas. En la Tabla 2.4 mostramos los resultados obtenidos, donde representamos la probabilidad de que un observador encuentre dos realizaciones independientes compatibles para cada par de simulaciones. Como puede observarse, esta probabilidad puede ser tan baja como 0.01, lo cual es equivalente a afirmar que las dos funciones de luminosidad correspondientes son completamente incompatibles, incluso partiendo del hecho que se han calculado a partir de un mismo conjunto de parámetros iniciales y criterios de selección. La conclusión, obviamente, es que para un número razonable de objetos en la muestra restringida, la función de luminosidad está dominada por los criterios de selección.



### 2.3.3. Análisis bayesiano de las muestras simuladas

Tal y como mencionamos anteriormente, si cambiamos la semilla inicial del generador de números aleatorios, nuestro código de Monte Carlo nos proporcionará diferentes realizaciones independientes de la función de luminosidad de las enanas blancas. Todas estas realizaciones son *a priori* igualmente buenas. Además, dado que el número de objetos utilizados para calcular la función de luminosidad es relativamente pequeño, es de preveer desviaciones importantes, especialmente para luminosidades relativamente altas para las cuales las escalas de tiempos de enfriamiento son pequeñas. Esto, a su vez, probablemente conlleva una subestimación de los errores asociados, especialmente a luminosidades mayores que  $\log(L/L_{\odot}) \gtrsim -3,0$ . En consecuencia, hemos utilizado métodos estadísticos bayesianos (Press 1996) para obtener una estimación realista de los errores involucrados y un valor más probable de la densidad de enanas blancas para cada intervalo de luminosidades.

El problema puede plantearse de la siguiente manera. Para una luminosidad dada,  $L$ , queremos saber el valor más probable de la función de luminosidad de las enanas blancas,  $N$ , dada una serie de  $N_i$  simulaciones, donde suponemos que todas las simulaciones son igualmente buenas. Para calcular  $N$ , debemos maximizar la distribución de probabilidad

$$P(N/N_i) \propto \prod_i \frac{1}{2} (P_{G_i} + P_{B_i}) \quad (2.5)$$

donde  $P_G$  y  $P_B$  son las probabilidades de que una simulación sea buena o mala, respectivamente. Podemos calcular estas probabilidades siguiendo las expresiones de Press (1996):

$$P_{G_i} = \exp \left[ - \frac{(N_i - N)^2}{2\sigma_i^2} \right] \quad (2.6)$$

$$P_{B_i} = \exp \left[ - \frac{(N_i - N)^2}{2S^2} \right]$$

donde  $\sigma_i$  es la barra de error de cada intervalo de la función de luminosidad, y  $S$  es un número grande pero finito que caracteriza la desviación máxima esperada en  $N_i$ . El valor que hemos adoptado es  $S \simeq 0,001 \text{ pc}^{-3} \text{ M}_{\text{bol}}^{-1}$ , el cual resulta una cota de error máximo razonable.

En la Figura 2.12 mostramos los resultados obtenidos mediante el método anterior, donde cada panel representa las distribuciones de probabilidad correspondientes a cada intervalo de luminosidades. En la esquina superior derecha de cada panel mostramos el logaritmo de la luminosidad en unidades solares. Todas las distribuciones de probabilidad, excepto aquellas de los intervalos de luminosidades más altas, tienen un comportamiento gaussiano. Que esto no sea así para los intervalos de luminosidades más altas es una consecuencia directa de la escasa fiabilidad estadística

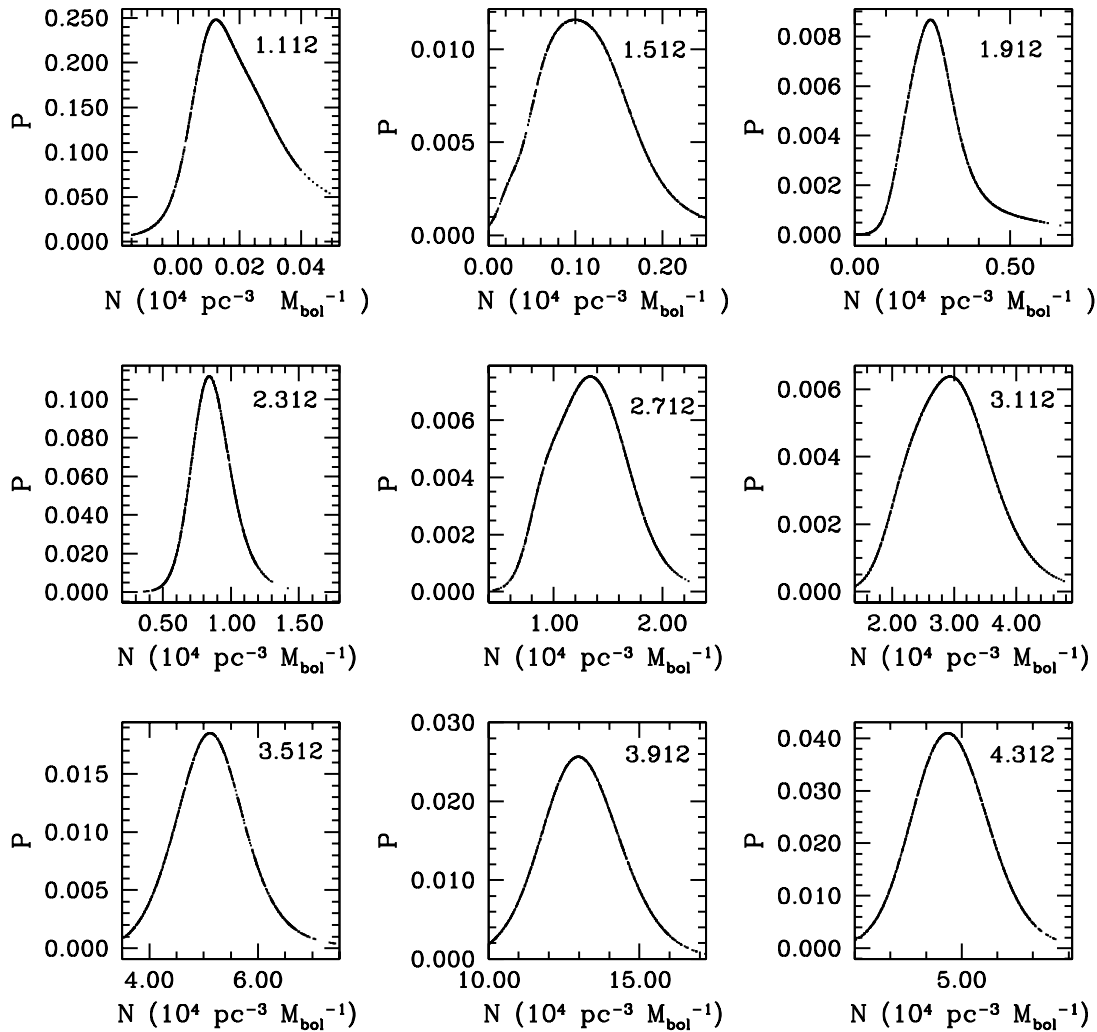


Figura 2.12: Funciones de distribución de probabilidad para cada intervalo de luminosidad.



de estos intervalos. Para producir estas funciones de distribución hemos realizado 20 simulaciones independientes. Este número resulta razonable, puesto que aumentar el número de simulaciones no aporta ninguna mejora substancial del peso estadístico del primer intervalo, que es el menos significativo. A partir de estas distribuciones de probabilidad se puede obtener una mejor estimación del error estadístico. Hemos estimado las barras de error resultantes suponiendo un grado de confianza conservador del 95 % (aproximadamente  $2\sigma$ ). En la Tabla 2.5 mostramos las desviaciones calculadas para cada una de las 20 simulaciones Monte Carlo de la función de luminosidad de las enanas blancas y la barra de error más probable determinada con un 95 % de nivel de confianza. Las barras de error obtenidas a partir del análisis bayesiano de las 20 simulaciones Monte Carlo se comparan, *grosso modo*, favorablemente bien con cada una de las simulaciones Monte Carlo individuales. De todas formas, para muestras en las que el número total de objetos es menor de 200 (las simulaciones presentadas aquí) los errores para cada intervalo de luminosidades resultan notablemente subestimados en comparación con los errores reales, especialmente para luminosidades bajas.

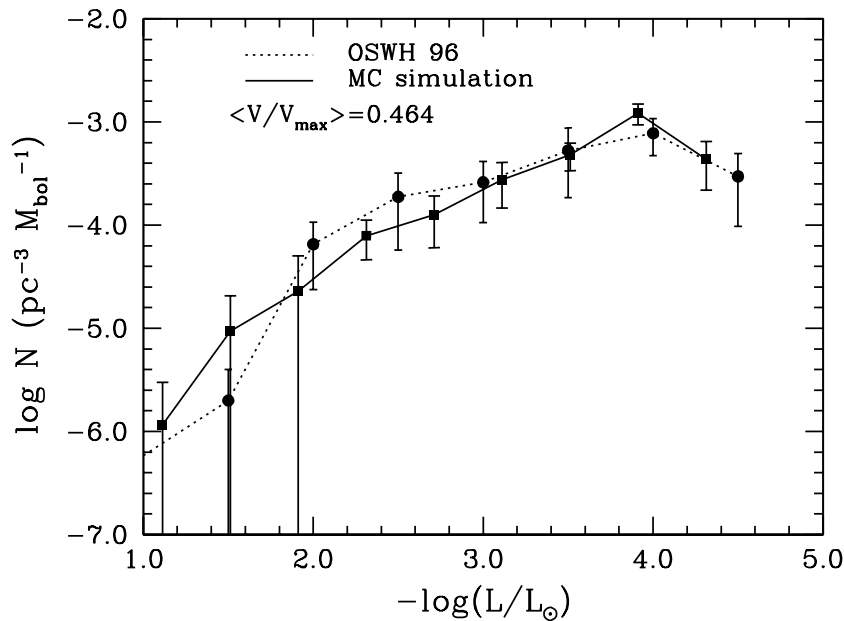


Figura 2.13: Función de luminosidad bayesiana.

En la Figura 2.13 mostramos la función de luminosidad más probable — que a partir de ahora denominaremos función de luminosidad bayesiana de las enanas blancas — con sus correspondientes barras de error, obtenida maximizando las distribuciones de probabilidad de la Figura 2.12. Excepto para luminosidades moderadamente altas — esto es, para luminosidades mayores que  $\log(L/L_{\odot}) = -2,0$  —

Cuadro 2.5: Barras de error de las 20 realizaciones Monte Carlo independientes de la función de luminosidad de las enanas blancas para cada intervalo de luminosidad y las mismas cantidades para la función de luminosidad bayesiana (última fila).

BARRAS DE ERROR DE LAS MUESTRAS SIMULADAS Y DE LA FUNCIÓN BAYESIANA									
$i$	$\Delta \log(n_1)$	$\Delta \log(n_2)$	$\Delta \log(n_3)$	$\Delta \log(n_4)$	$\Delta \log(n_5)$	$\Delta \log(n_6)$	$\Delta \log(n_7)$	$\Delta \log(n_8)$	$\Delta \log(n_9)$
1	1.000	0.484	0.517	0.464	0.597	0.238	0.261	0.180	0.454
2	1.000	0.718	0.432	0.368	0.446	0.253	0.179	0.163	1.000
3	0.000	0.631	0.514	0.363	0.283	0.285	0.215	0.216	0.453
4	0.000	0.877	0.537	0.524	0.393	0.272	0.224	0.190	0.525
5	1.000	0.723	0.476	0.481	0.319	0.256	0.347	0.171	0.474
6	1.000	0.461	0.431	0.376	0.285	0.447	0.251	0.210	0.372
7	0.000	0.974	0.474	0.392	0.340	0.262	0.316	0.699	0.517
8	0.000	1.000	0.473	0.417	0.385	0.353	0.213	0.206	1.000
9	0.000	0.590	0.539	0.387	0.362	0.500	0.304	0.205	0.439
10	1.000	1.000	0.541	0.440	0.496	0.275	0.213	0.195	0.628
11	0.000	0.763	0.577	0.312	0.258	0.338	0.245	0.177	0.381
12	1.000	0.746	0.441	0.446	0.404	0.240	0.435	0.201	0.429
13	0.000	0.618	0.450	0.362	0.373	0.270	0.306	0.191	0.775
14	0.000	0.741	0.644	0.486	0.281	0.344	0.195	0.190	0.425
15	0.768	0.887	0.560	0.409	0.292	0.357	0.423	0.178	0.824
16	1.000	0.890	0.450	0.326	0.335	0.344	0.214	0.332	0.458
17	0.785	0.965	0.446	0.318	0.497	0.324	0.203	0.171	0.408
18	1.000	0.537	0.496	0.536	0.349	0.254	0.197	0.161	0.484
19	1.000	0.383	0.517	0.478	0.362	0.319	0.393	0.259	0.411
20	0.000	0.710	0.347	0.376	0.350	0.273	0.262	0.262	0.550
B	$^{+0.574}_{-\infty}$	0.343	0.343	0.416	0.520	0.167	0.114	0.089	0.496

donde los efectos de las inhomogeneidades espaciales son más notorios, el ajuste entre la función de luminosidad observacional y la función de luminosidad bayesiana es excelente. Además, para la función de luminosidad bayesiana hemos estimado un valor de  $\langle V/V_{\max} \rangle$  como un promedio de los correspondientes valores de las 20 realizaciones ponderadas mediante la probabilidad de cada simulación obtenidas a partir de las funciones de probabilidad de la Figura 2.12. Hemos obtenido un valor de  $\langle V/V_{\max} \rangle = 0,464$ , que se encuentra muy cercano del valor canónico de  $\langle V/V_{\max} \rangle = 0,5$ , válido para una muestra completa y homogénea.

#### 2.3.4. La edad del disco

Uno de los resultados presentados aquí más sorprendentes por sí mismo es la edad de disco. Tal y como puede observarse en la Figura 2.13, el valor adoptado en nuestras simulaciones de 13 Gyr se ajusta perfectamente con los datos observacionales de Oswalt et al. (1996). Este valor es notoriamente menor que el adoptado por otros autores — Wood & Oswalt (1998) — y es consecuencia directa de la altura patrón escogida. De hecho, utilizando las mismas secuencias de enfriamiento y una aproximación convencional para calcular la función de luminosidad de las enanas blancas con un ritmo de formación estelar volumétrico constante, Salaris et al. (1997) determinaron una edad de la vecindad solar de 11 Gyr cuando el efecto de separación de fase por cristalización fue tenido en cuenta, y de 10 Gyr cuando la separación de fase no fue considerada. Por lo tanto la razón última del incremento en la edad de la vecindad solar no se debe a los detalles de las secuencias de enfriamiento escogidas. Por el contrario, este incremento puede ser fácilmente explicado en términos del modelo de evolución galáctica. Recordemos que la función de luminosidad de las enanas blancas determina el número de enanas blancas por parsec cúbico y por unidad de magnitud bolométrica. Por lo tanto, para determinar la función de luminosidad se requiere el ritmo de formación estelar volumétrico. En nuestro caso podemos definir el ritmo efectivo de formación estelar por parsec cúbico como  $\psi_{\text{eff}}(t) \approx \psi(t)/H_p(t)$ . Con las leyes adoptadas aquí para  $\psi(t)$  y  $H_p(t)$  es fácil verificar que el ritmo efectivo de formación estelar es significativo únicamente después de  $\sim 2$  Gyr (Isern et al. 1995a,b).

La manera más fácil y directa para determinar los errores asociados a la medida de la edad de la vecindad solar es reproducir el procedimiento estándar. Es decir, hemos ajustado la posición del corte “observacional” de cada una de las simulaciones Monte Carlo con una función de luminosidad teórica calculada utilizando el método estándar. En esta función de luminosidad hemos utilizado los mismos parámetros que los adoptados en las simulaciones Monte Carlo, excepto, obviamente, la edad del disco, que es en este caso el parámetro libre. En la Figura 2.14 mostramos los resultados obtenidos para 10 de las 20 simulaciones. Tal y como es habitual con la función de luminosidad observacional real, la función de luminosidad teórica se ha normalizado al intervalo con barra de error mínima. En la esquina superior izquierda

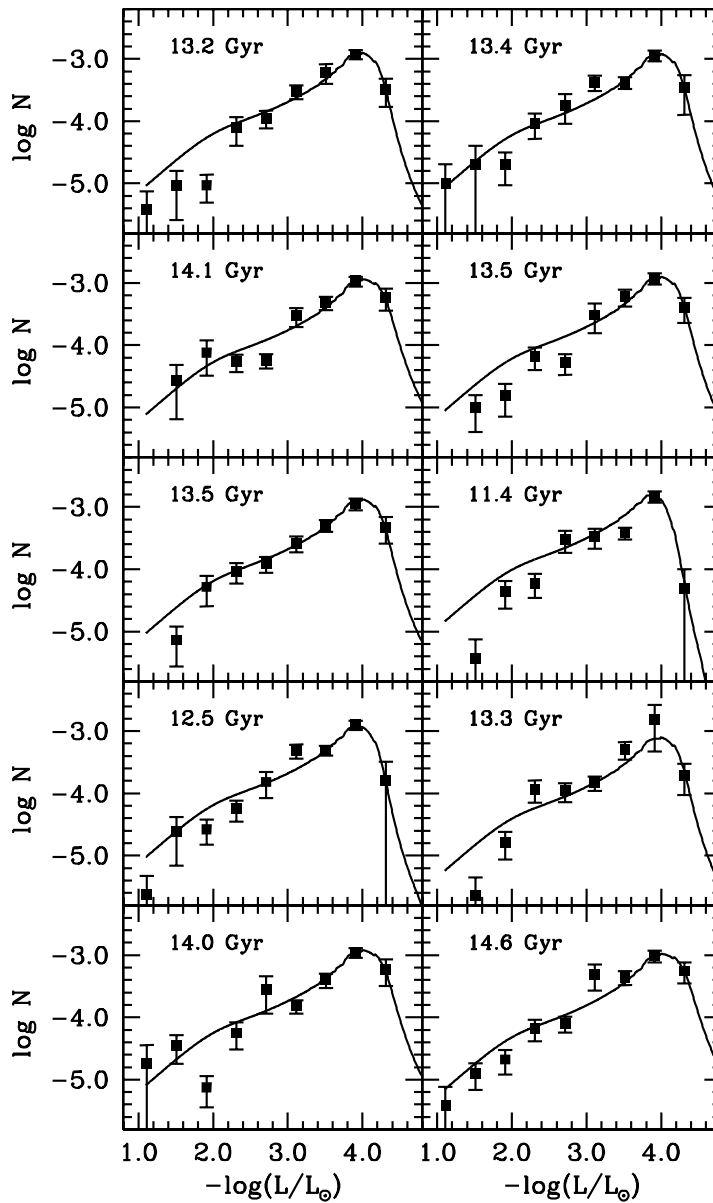


Figura 2.14: Panel donde se muestra las diferentes funciones de luminosidad simuladas (cuadrados sólidos) y sus correspondientes ajustes utilizando el método estándar.

de cada panel mostramos las edades del disco estimadas para cada una de las correspondientes simulaciones. Como puede observarse, existe un sesgo claro: las edades del disco determinadas son *sistemáticamente* mayores que la edad adoptada para el simulador Monte Carlo, siendo el valor medio de este sesgo de 0.5 Gyr. Este resultado es una consecuencia directa del procedimiento de distribución en intervalos, puesto que estamos agrupando enanas blancas pertenecientes al máximo de la función de luminosidad en el intervalo de luminosidades más débiles, pero puede evitarse utilizando la función de luminosidad acumulativa, la cual minimiza los efectos del procedimiento de distribución en intervalos.

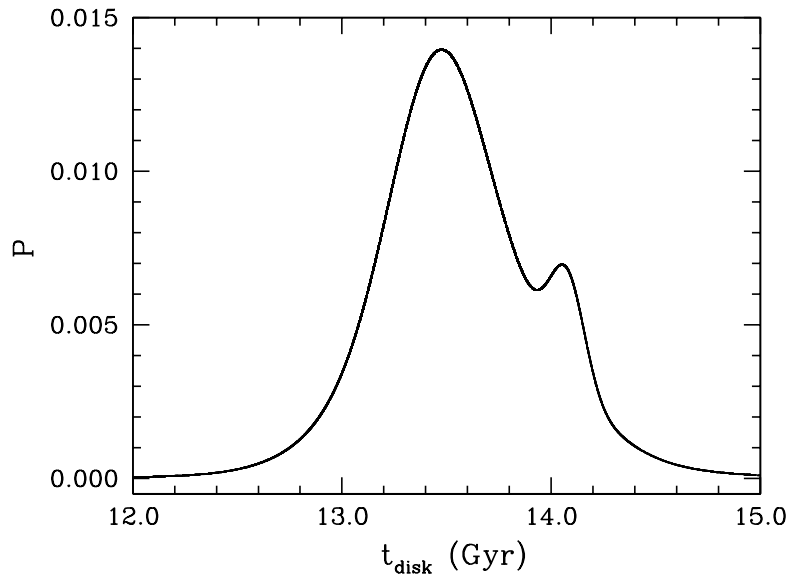


Figura 2.15: Estimación de la edad del disco mediante un análisis bayesiano.

Hemos utilizado las técnicas de inferencia bayesiana descritas en la Sección 2.3.3 para asignar un error puramente estadístico a nuestras estimaciones de la edad. Para lograr tal propósito, necesitamos asociar un error formal a cada una de las realizaciones independientes. Dado que el valor de  $\langle V/V_{\text{max}} \rangle$  es una buena medida de la calidad de una muestra (a pesar del hecho de que las muestras son inhomogéneas), hemos adoptado, pues, un error formal para cada simulación dado por  $\sigma_i = 2(0,5 - \langle V/V_{\text{max}} \rangle) t_{\text{disk}}$ . En la Figura 2.14 mostramos la correspondiente distribución de probabilidad, la cual nos proporciona una edad más probable del disco de  $t_{\text{disk}} = 13,5 \pm 0,8$  Gyr a un 95 % de nivel de confianza ( $2\sigma$ ). Esta incertidumbre está en justo acuerdo con los resultados de Wood & Oswalt (1998). Si se relaja el nivel de confianza a  $1\sigma$ , la barra de error asociada es entonces de  $\pm 0,4$  Gyr. No es menos importante volver a señalar que existe un incremento sistemático en la edad del disco inferida de  $\sim 5\%$ .

