

Apéndice A

Sistemas de Referencia

Con objeto de describir las variables cinemáticas y dinámicas de las diversas simulaciones que hemos realizado de la población de enanas blancas, tanto del disco como del halo, hemos utilizado diferentes sistemas de referencia. A continuación describiremos tales sistemas de referencia y los cambios de coordenadas efectuados entre ellos.

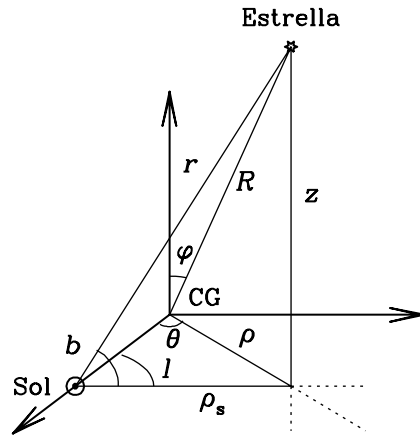


Figura A.1: Sistemas de coordenadas cilíndricas y galactocéntricas.

En la Figura A.1 presentamos un esquema de la relación entre coordenadas cilíndricas (ρ, θ, z) y coordenadas galactocéntricas (r, l, b) , donde hemos tomado la posición del centro galáctico (CG) en el origen de coordenadas y la posición del Sol en coordenadas cilíndricas queda como $(R_{\odot}, 0, 0)$, con $R_{\odot} = 8,5$ kpc. La longitud galáctica l se mide en sentido antihorario con respecto al centro de la galaxia (en Sagittarius, $\alpha = 17^{\text{h}}42,4^{\text{m}}$, $\delta = -28^{\circ}55'$), mientras que la latitud galáctica b se

mede desde el plano galáctico en sentido positivo hacia el norte. La relación entre el sistema de referencia en coordenadas cilíndricas y en coordenadas galactocéntricas viene determinada mediante el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$r = \sqrt{\rho_s^2 + z^2} \quad (\text{A.1})$$

$$l = \arcsin \left[\frac{\rho}{\rho_s} \sin \theta \right] \quad (\text{A.2})$$

$$b = \arctan \frac{z}{\rho_s} \quad (\text{A.3})$$

donde $\rho_s^2 = R_\odot^2 + \rho^2 - 2R_\odot \rho \cos \theta$.

Las coordenadas ecuatoriales (α, δ) en función de las coordenadas galactocéntricas vienen determinadas por las siguientes relaciones de trigonometría esférica (Green, 1985):

$$\begin{cases} \sin \delta = \sin \delta_0 \sin b + \cos \delta_0 \cos b \cos(\theta - l) \\ \cos \delta \sin(\alpha - \alpha_0) = \cos b \sin(\theta - l) \\ \cos \delta \cos(\alpha - \alpha_0) = \cos \delta_0 \sin b - \sin \delta_0 \cos b \cos(\theta - l) \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

donde θ es el ángulo paralático y (α_0, δ_0) son las coordenadas ecuatoriales del polo norte galáctico. Los valores adoptados para los tres parámetros anteriores para la época 1950.0 son:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= 12^{\text{h}}49^{\text{m}} \\ \delta_0 &= 27^\circ,4 \\ \theta &= 123^\circ \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

La relación entre la velocidad heliocéntrica, (U, V, W) , y los movimientos propios en coordenadas galácticas, (μ_1, μ_b, v_r) , viene dada por la expresión matricial

$$\begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 r & b_1 r & c_1 \\ a_2 r & b_2 r & c_2 \\ a_3 r & b_3 r & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_b \\ v_r \end{pmatrix} \quad (\text{A.6})$$

donde

$$\begin{cases} a_1 = -k \cos b \sin l \\ b_1 = -k \sin b \cos l \\ c_1 = \cos l \cos b \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

$$\begin{cases} a_2 = k \cos b \cos l \\ b_2 = -k \sin b \sin l \\ c_2 = \sin l \cos b \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

y

$$\begin{cases} a_3 = 0 \\ b_3 = k \cos b \\ c_3 = \sin b \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

donde (l, b, r) son las coordenadas galactocéntricas y $k = 4,74 \text{ km año}^{-1} \text{ s pc}$.

Finalmente, la relación entre los movimientos propios en coordenadas galactocéntricas y en coordenadas ecuatoriales corresponde con una rotación cuyo ángulo es el ángulo paralático θ

$$\begin{pmatrix} \mu_\alpha \\ \mu_\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta & -\cos \theta \\ \cos \theta & \sin \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_l \\ \mu_b \end{pmatrix} \quad (\text{A.10})$$

El movimiento propio en función de las componentes en coordenadas ecuatoriales, (α, δ) , resulta

$$\mu = \sqrt{\mu_\alpha^2 \cos^2 \delta + \mu_\delta^2} \quad (\text{A.11})$$

Apéndice B

Rotación galáctica

En nuestra modelización de la dinámica del disco galáctico hemos utilizado como referencia el modelo de rotación de Oort–Lindblad. Pese a que se trata de un modelo sencillo es suficientemente preciso para describir la dinámica del disco en la vecindad solar, tal y como es nuestro caso. Presentamos aquí las características más importantes de dicho modelo y remitimos al lector a Ogorodnikov (1965), Mihalas y Routly (1968) y a Binney y Merrifield (1998) para una discusión más detallada.

El modelo de Oort–Lindblad supone que la Galaxia se comporta como un fluido en rotación, donde las partículas del fluido son en este caso estrellas. En cada punto del espacio, el fluido tiene una cierta velocidad media, siendo ésta la media de las velocidades individuales de las estrellas que pasan por ese punto. El modelo de Oort–Lindblad supone además que esta rotación media del fluido cumple dos condiciones:

- Presenta simetría cilíndrica respecto al eje de rotación de la Galaxia.
- No depende de la altura sobre el plano galáctico.

De la primera condición se deduce que la velocidad media del fluido en todos los puntos será una velocidad circular, mientras que de la segunda deducimos que esta velocidad circular, \mathbf{V}_c , sólo depende de la distancia, R , al eje de rotación de la galaxia. En consecuencia, la velocidad angular de rotación, ω , no es constante para todos los puntos de la Galaxia, tal y como sería el caso de un sólido rígido, sino que varía en función de su distancia al eje de rotación, esto es lo que se denomina rotación diferencial de la Galaxia. Así pues tenemos que: $\mathbf{V}_c = \omega(R) \times \mathbf{R}$, y dado que la velocidad circular se encuentra en el plano galáctico y es en todo momento perpendicular al vector de rotación angular, podemos escribir la siguiente relación entre los módulos:

$$V_c = R\omega(R) \tag{B.1}$$

Por otra parte, puesto que nuestro modelo de rotación se limita a la vecindad solar podemos hacer un desarrollo en serie de potencias de $\omega(R)$ en torno de la

posición galactocéntrica del sol, R_\odot :

$$\omega(R) = \omega(R_\odot) + (R - R_\odot) \left(\frac{d\omega}{dR} \right)_{R_\odot} + \frac{1}{2}(R - R_\odot)^2 \left(\frac{d^2\omega}{dR^2} \right)_{R_\odot} + \dots \quad (\text{B.2})$$

La aproximación a primer orden de $\omega(R)$ suele darse en función de las *constantes de Oort*, definidas de la siguiente forma:

$$A = -\frac{1}{2}R_\odot \left(\frac{d\omega}{dR} \right)_{R_\odot} \quad (\text{B.3})$$

$$B = -\omega(R_\odot) - \frac{1}{2}R_\odot \left(\frac{d\omega}{dR} \right)_{R_\odot} \quad (\text{B.4})$$

por lo que, finalmente, obtenemos para el módulo de la velocidad de rotación la siguiente expresión:

$$V_c(R) = \left[\left(3 - \frac{2R}{R_\odot} \right) A - B \right] R \quad (\text{B.5})$$

Cabe señalar que a partir de las definiciones fundamentales anteriores se obtienen las relaciones de importante valor práctico:

$$\omega_0 = \frac{v_c(R_\odot)}{R_\odot} = A - B \quad \text{y} \quad \left(\frac{dv_c}{dr} \right)_{R_\odot} = -(A + B) \quad (\text{B.6})$$

Una estimación de los valores de A y B es la de Kerr y Lyden–Bell (1986),

$$A = 14,4 \pm 1,2 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}, \quad B = -12,0 \pm 2,8 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1} \quad (\text{B.7})$$

aunque Feast y Whitelok (1997) han obtenido recientemente una estimación más precisa de las constantes de Oort a partir de los movimientos propios de las Cefeidas medidos por el satélite Hipparcos: movimientos propios de las Cefeidas medidos por el satélite Hipparcos:

$$A = 14,8 \pm 0,8 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}, \quad B = -12,4 \pm 0,6 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1} \quad (\text{B.8})$$

Estos valores de las constantes de Oort implican una ligera ralentización de la velocidad circular, mientras que proporcionan un valor actual de $V_c(R_\odot) = 232 \text{ km s}^{-1}$.

Para proseguir con nuestro análisis de la rotación galáctica conviene definir los siguientes términos:

- **Estándar galáctico de reposo (EGR):** un punto ideal, en reposo respecto a un hipotético sistema de referencia inercial y situado en el centro de la Galaxia, respecto al cual mediremos la rotación del “fluido de estrellas”.

- **Estándar de reposo:** un punto que se mueve respecto al EGR con la velocidad media del “fluido de estrellas” en una posición dada.
- **Estándar local de reposo (ELR):** estándar de reposo en la posición del sol. No obstante, por el importante papel que juega el ELR en la cinemática galáctica caben dos posibilidades en cuanto a su definición:
 - *Definición cinemática del ELR.* Las componentes del ELR quedan definidas como las medias de la velocidades de las estrellas de la vecindad solar medidas respecto de un sistema de referencia ideal.
 - *Definición dinámica del ELR.* El ELR se toma como un punto de la vecindad solar con una velocidad circular exactamente igual a la que se deduciría de las fuerzas gravitatorias que actúan en ese punto.

Ambas definiciones concuerdan bastante bien, excepto en los valores para la velocidad tangencial de rotación. El promedio de la velocidad tangencial de rotación suele ser menor que el de la velocidad circular de rotación, por lo que el ELR definido cinemáticamente se *retrasa* con respecto del ELR dinámico.

- **Velocidad peculiar de una estrella:** velocidad de una estrella respecto al ER del punto en que se encuentra.

A partir de las definiciones anteriores, la velocidad de una estrella respecto del EGR puede ser descrita como la suma de la velocidad del ER en el punto en el que se encuentra la estrella más la velocidad peculiar de la estrella

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_{\text{ER}} + \mathbf{V}_p \quad (\text{B.9})$$

La velocidad del ER corresponde con la velocidad circular, \mathbf{V}_c , dada en B.5, mientras que la velocidad peculiar, por su parte, es distinta de estrella a estrella y se distribuye aleatoriamente. De manera habitual, suele tomarse una distribución gaussiana para cada una de las componentes de la velocidad peculiar. Dicha distribución es el denominado elipsoide de Schwarzschild

$$\phi(U_p, V_p, W_p) \propto \exp \frac{1}{2} \left(-\frac{U_p^2}{\sigma_U^2} - \frac{V_p^2}{\sigma_V^2} - \frac{W_p^2}{\sigma_W^2} \right) \quad (\text{B.10})$$

donde se cumple que

$$\frac{U_p^2}{\sigma_U^2} + \frac{V_p^2}{\sigma_V^2} + \frac{W_p^2}{\sigma_W^2} = 1 \quad (\text{B.11})$$

Conviene señalar que, puesto que la distribución de velocidades anterior es respecto al ER y no respecto al Sol, la media de las tres componentes de la velocidad resulta por definición nula.

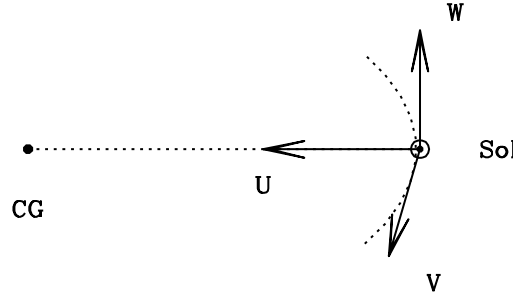


Figura B.1: Base B3 en la posición del Sol. U está dirigido hacia el centro de la Galaxia, V en el sentido de rotación y W hacia el polo norte galáctico.

Una vez hechas estas consideraciones pasaremos a estudiar la velocidad heliocéntrica de la estrella. Para ello utilizaremos como sistema de coordenadas la denominada base B3 en la posición del sol. En la Figura B.1 tenemos una representación de sus ejes, donde U está dirigido hacia el centro de la galaxia, V en el sentido de rotación galáctico y W hacia el polo norte galáctico. Así pues, para determinar la velocidad heliocéntrica de una estrella, además de tener en cuenta su propia velocidad respecto al EGR debemos también considerar la velocidad del Sol respecto a éste. Por lo tanto la velocidad heliocéntrica de una estrella resulta

$$\mathbf{V} = (U, V, W) = \mathbf{V}_{\text{ER}} + \mathbf{V}_{\text{p}} - \mathbf{V}_{\text{ELR}} - \mathbf{V}_{\odot} \quad (\text{B.12})$$

donde cada uno de los términos, y teniendo en cuenta la Figura B.2, resulta

- $\mathbf{V}_{\text{ER}} = (V_c(R) \sin \theta, V_c(R) \cos \theta, 0)$, velocidad del ER en la posición de la estrella.
- $\mathbf{V}_{\text{p}} = (U_{\text{p}}, V_{\text{p}}, W_{\text{p}})$, velocidad peculiar de la estrella.
- $\mathbf{V}_{\text{ELR}} = (0, V_c(R_{\odot}), 0)$, velocidad del ELR (definición dinámica).
- $\mathbf{V}_{\odot} = (U_{\odot}, V_{\odot}, W_{\odot})$, velocidad peculiar del Sol.

Nótese que, por definición, ni \mathbf{V}_{ELR} ni \mathbf{V}_{ER} tienen componente en la dirección perpendicular al plano galáctico. Dehnen y Binney (1998a) han realizado una estimación reciente del valor de la velocidad peculiar del Sol a partir de observaciones realizadas por el satélite Hipparcos sobre estrellas de la secuencia principal, resultando ser:

$$\mathbf{V}_{\odot} = (U_{\odot}, V_{\odot}, W_{\odot}) = (10,0 \pm 0,4, 5,2 \pm 0,6, 7,2 \pm 0,4) \text{ km s}^{-1} \quad (\text{B.13})$$

Así pues, el Sol se mueve hacia el centro galáctico, alejándose del plano de la Galaxia en dirección hacia el polo norte galáctico y girando en torno del centro galáctico a

mayor velocidad que la correspondiente a una órbita circular. Respecto de esta componente, la componente tangencial de la velocidad peculiar del Sol, se ha observado un incremento, $V_{\odot} + V^*$, conforme se analiza una población de estrellas con mayor edad. Este fenómeno, denominado deriva asimétrica, implica que el valor medio de la velocidad de una determinada población estelar en la vecindad solar se atrasa con respecto del movimiento del LSR. Esta velocidad de ralentización, V^* , se relaciona con la dispersión según la componente radial, mediante la expresión (Dehnen y Binney, 1998a):

$$V^* = \frac{\sigma_U^2}{80 \pm 5 \text{ km s}^{-1}} \quad (\text{B.14})$$

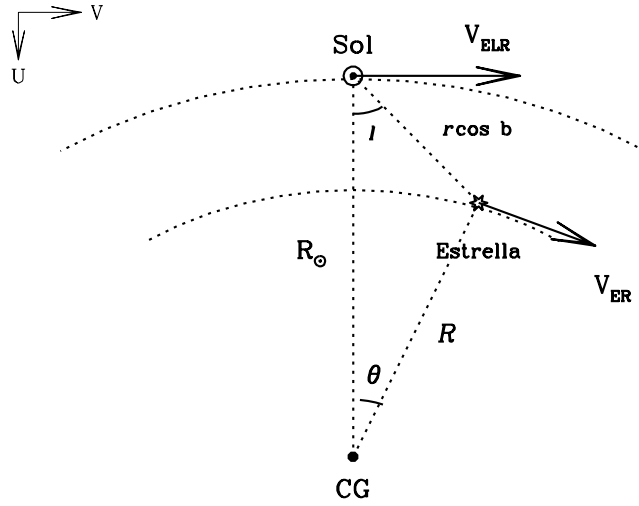


Figura B.2: Proyección del ELR y del ER sobre el plano galáctico.

Prosiguiendo con nuestro análisis de la velocidad heliocéntrica, utilizando las expresiones anteriores y denominando a $(U_{\odot}, V_{\odot}, W_{\odot}) \equiv (-U_0, -V_0, -W_0)$ para mayor comodidad, resulta que dicha velocidad la podemos escribir como:

$$\mathbf{V} = (U_p + U_0 + V_c(R) \sin \theta, V_p + V_0 + V_c(R) \cos \theta - V_c(R_{\odot}), W_p + W_0) \quad (\text{B.15})$$

de donde resulta útil definir dos nuevas cantidades, expresando la velocidad circular, V_c , según lo obtenido en la expresión B.5

$$U'_0 \equiv U_0 + \left[\left(3 - \frac{2R}{R_{\odot}} \right) A - B \right] R \sin \theta \quad (\text{B.16})$$

$$V'_0 \equiv V_0 + \left[\left(3 - \frac{2R}{R_{\odot}} \right) A - B \right] R \cos \theta - (A - B) R_{\odot} \quad (\text{B.17})$$

con lo que finalmente podemos expresar la velocidad heliocéntrica como:

$$\mathbf{V} = (U_p + U'_0, V_p + V'_0, W_p + W_0) \quad (\text{B.18})$$

A partir de este resultado podemos afirmar que la función de distribución de las velocidades heliocéntricas es un elipsoide de Schwarzschild para cada posición, (r, l, b) fijada, puesto que únicamente estamos sumando un término dependiente de la posición a las componentes de la velocidad peculiar. La media de las tres componentes no será cero en este caso, sino (U'_0, V'_0, W_0) , y por lo tanto:

$$\phi(U, V, W) \propto \exp \frac{1}{2} \left(-\frac{(U - U'_0)^2}{\sigma_U^2} - \frac{(V - V'_0)^2}{\sigma_V^2} - \frac{(W - W_0)^2}{\sigma_W^2} \right) \quad (\text{B.19})$$

Para concluir esta sección conviene aclarar que en el modelo anterior se han realizado de forma implícita dos aproximaciones. La primera consiste en suponer que las dispersiones del elipsoide de velocidades son las mismas en cualquier punto del espacio. La segunda atañe a la diferente orientación de los ejes del elipsoide de velocidades para cada localización, fenómeno éste conocido como la desviación del vértice. No obstante, estos efectos son de menor orden de magnitud y de escasa relevancia cuando se analizan las propiedades globales de la cinemática del entorno solar.

Apéndice C

Potencial gravitatorio galáctico

Representaremos el potencial galáctico $\Phi(R, z)$ en coordenadas cilíndricas, donde R es la distancia sobre el plano galáctico y z la distancia perpendicular a dicho plano. El potencial total lo escribimos como la suma de tres componentes (Flynn et al. 1996) que son, respectivamente, el halo de materia oscura, Φ_H , la componente central, Φ_C , y el disco, Φ_D , de forma que se tiene:

$$\Phi = \Phi_H + \Phi_C + \Phi_D \quad (\text{C.1})$$

El potencial del halo, Φ_H , viene dado por la expresión:

$$\Phi_H = \frac{1}{2}V_H^2 \ln(r^2 + r_0^2) \quad (\text{C.2})$$

donde r es el radio galactocéntrico, $r^2 = R^2 + z^2$, r_0 es el radio del núcleo y V_H es la velocidad circular. La componente central esta formada por el bulbo y halo estelar y por la componente del núcleo interno:

$$\Phi_C = -\frac{GM_{C_1}}{\sqrt{r^2 + r_{C_1}^2}} - \frac{GM_{C_2}}{\sqrt{r^2 + r_{C_2}^2}} \quad (\text{C.3})$$

donde G es la constante de gravitación universal, M_{C_1} y r_{C_1} son la masa y el radio del término del bulbo y halo estelar, y M_{C_2} y r_{C_2} , representan la masa y el radio del núcleo interno. El potencial del disco resulta de la composición de tres potenciales, Miyamoto–Nagai (1975)

$$\Phi_D = \Phi_{D_1} + \Phi_{D_2} + \Phi_{D_3} \quad (\text{C.4})$$

donde

$$\Phi_{D_i} = \frac{GM_{D_i}}{\sqrt{R^2 + (a_i + \sqrt{z^2 + b^2})^2}} \quad (\text{C.5})$$

Cuadro C.1: Parámetros utilizados en el modelo de potencial galáctico.

PARÁMETROS DEL POTENCIAL GALÁCTICO		
Componente	Parámetro	Valor
Halo Oscuro	r_0	8.5 kpc
	V_H	220 km/s
Componente Central	r_{C_1}	2.7 kpc
	M_{C_1}	$3 \cdot 10^9 M_\odot$
	r_{C_2}	0.42 kpc
	M_{C_2}	$1,6 \cdot 10^9 M_\odot$
Disco	b	0.3 kpc
	M_{D_1}	$6,6 \cdot 10^{10} M_\odot$
	a_1	5.81 kpc
	M_{D_2}	$-2,9 \cdot 10^{10} M_\odot$
	a_2	17.43 kpc
	M_{D_3}	$3,3 \cdot 10^9 M_\odot$
	a_3	34.86 kpc

donde b está relacionado con la altura patrón, a_i con la longitud patrón y M_{D_i} son las masas de las tres componentes. En la Tabla B.1 resumimos los valores adoptados para los diferentes parámetros del potencial galáctico.

A partir del potencial galáctico podemos calcular la componente de la fuerza en la dirección perpendicular al plano galáctico, $F_z = -\frac{\partial\Phi}{\partial z}$, (en nuestro caso, puesto que se trata del potencial por unidad de masa, obtenemos la aceleración). Para cada componente del potencial utilizado obtenemos:

$$F_H = -\frac{\partial\Phi_H}{\partial z} = -V_H^2 \frac{z}{r^2 + r_0^2} \quad (C.6)$$

$$F_C = -\frac{\partial\Phi_C}{\partial z} = -Gz \left[\frac{M_{C_1}}{\sqrt{(r^2 + r_{C_1}^2)^3}} + \frac{M_{C_2}}{\sqrt{(r^2 + r_{C_2}^2)^3}} \right] \quad (C.7)$$

$$F_{D_i} = -\frac{\partial\Phi_{D_i}}{\partial z} = -\frac{GM_{D_i}}{\sqrt{[R^2 + (a_i + \sqrt{z^2 + b^2})^2]^3}} \left(\frac{a_i}{\sqrt{z^2 + b^2}} + 1 \right) z \quad (C.8)$$

donde la fuerza total en la dirección z resulta

$$F_z = F_H + F_C + F_D \quad (C.9)$$

En la Figura B.1 hemos representado el potencial gravitatorio total, así como sus diferentes componentes y sus aceleración según la componente z .

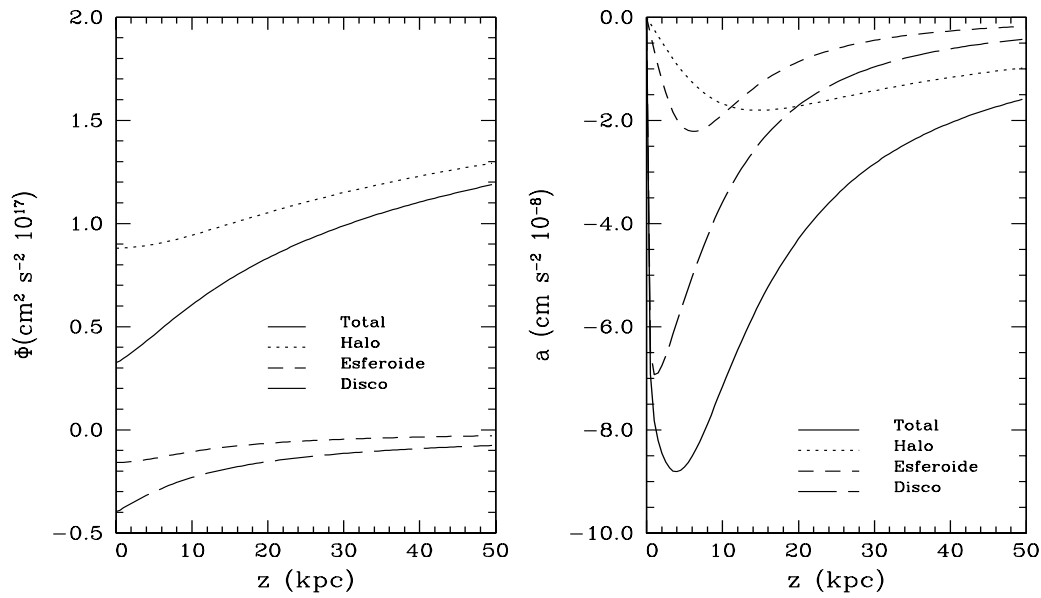


Figura C.1: Potencial gravitatorio galáctico y aceleración en la dirección z para las diferentes componentes del modelo utilizado.

Por último determinamos las trayectorias perpendiculares al plano galáctico. En primer lugar, discretizamos la segunda ley de Newton mediante el método de Euler, obteniendo de manera directa un sistema de dos ecuaciones

$$\begin{cases} \xi_1^{n+1} &= \xi_1^n + h\xi_2^n \\ \xi_2^{n+1} &= \xi_2^n + hF_z(\xi_1^n) \end{cases} \quad (\text{C.10})$$

donde $\xi_1 = z$, $\xi_2 = \frac{dz}{dt}$ y $h = t^{n+1} - t^n$. Finalmente, determinamos las trayectorias a partir de la solución del sistema de ecuaciones anterior, utilizando para ello un método de Runge–Kutta de cuarto orden.

Apéndice D

Microlentes gravitacionales

En este apéndice describiremos las características más importantes del fenómeno de microlentes gravitacionales, así como el formalismo necesario para describir las observaciones de dicho fenómeno (Roulet & Mollerach, 1997). En particular, haremos referencia a los fenómenos de microlentes debidos a MACHOs¹ en nuestra galaxia.

Un suceso de microlente consta básicamente de una fuente puntual de luz (típicamente una estrella), un objeto puntual masivo, denominado deflector (en nuestro caso un MACHO), y un observador. Si el objeto masivo se interpone en la línea de visión entre el observador y la estrella se produce, de acuerdo con la Teoría General de la Relatividad, una deflexión de la luz de la fuente. El ángulo de deflexión, α , viene dado por

$$\alpha = \frac{4GM}{c^2 b} \quad (\text{D.1})$$

donde M es la masa del objeto deflector y b el denominado parámetro de impacto, el cual suponemos que es mucho mayor que el radio de Schwarzschild, $R_S \equiv 2GM/c^2$, del objeto deflector. Este fenómeno de deflexión conduce a la formación de una segunda imagen más débil de la fuente que aparecería en la dirección opuesta del objeto deflector. La geometría del proceso se describe en la Figura D.1.

Denominamos θ_i ($i = 1, 2$) a los ángulos formados por las dos imágenes de la fuente con respecto a la línea de visión entre el observador y la lente, y β al ángulo que formaría la posición real de la fuente. A partir de la Figura D.1, utilizando que $D_{\text{os}}(\theta_i - \beta) = D_{\text{ls}}\alpha_i$, es fácil obtener una expresión para la separación angular de las imágenes:

$$\theta_{1,2} = \frac{1}{2} \left[\beta \pm \sqrt{\left(\frac{2R_E}{D_{\text{ol}}}\right)^2 + \beta^2} \right] \quad (\text{D.2})$$

¹MACHO es el acrónimo inglés de MAssive Compact Halo Object.

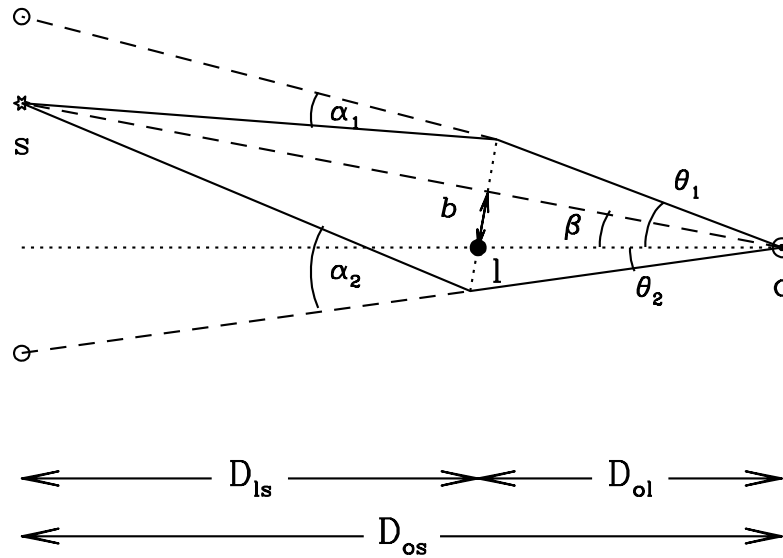


Figura D.1: Trayectorias de los rayos de luz en el plano que contiene la fuente (s), la lente (l) y el observador (o), conjuntamente con las variables angulares y distancias características del suceso.

$$\theta_{1,2} = \frac{1}{2} \left[\beta \pm \sqrt{\left(\frac{2R_E}{D_{ol}}\right)^2 + \beta^2} \right] \quad (D.3)$$

donde R_E es el denominado radio de Einstein y cuya expresión es

$$R_E \equiv 2\sqrt{\frac{GM D_{ol} D_{ls}}{c^2 D_{os}}} \quad (D.4)$$

mientras que para uso práctico resulta útil la siguiente expresión numérica:

$$R_E = 9,0 \text{ AU} \sqrt{\frac{D_{os}}{10 \text{ kpc}} \frac{M}{M_{\odot}} x(1-x)} \quad (D.5)$$

donde $x \equiv D_{ol}/D_{os}$.

Si la fuente se encuentra con respecto a la línea de visión justo detrás del objeto masivo se observa un anillo cuyo radio es el radio de Einstein y la separación angular de este radio, es el denominado ángulo de Einstein, $\theta_E = R_E/D_{ol}$. Si por el contrario, el objeto deflector se encuentra separado una cierta distancia angular, $\beta = b/D_{ol}$, el anillo se separa en dos arcos. En consecuencia, el radio de Einstein caracteriza

el tamaño del parámetro de impacto para el cual el fenómeno de deflexión es importante. No obstante, si realizamos una sencilla estimación para una distancia a la fuente de 50 kpc y un objeto deflector a 10 kpc con una masa de $1 M_{\odot}$ obtenemos un valor típico de la separación angular del orden de $\sim 10^{-6}$ arcsec. Claramente esta separación angular es irresoluble con los telescopios actuales, por lo que el término “microlente” parece apropiado. Sin embargo, pese a que la observación de la imagen en dos arcos resulta impracticable, el hecho de que un objeto masivo cruce por delante de la posición de una estrella conlleva otro efecto que sí resulta detectable. Este efecto consiste en un aumento de la intensidad de luz proveniente de la fuente.

La suma combinada de luz de las dos imágenes producida por la lente gravitatoria causa una amplificación neta que viene dada por la siguiente expresión (Paczynski 1996):

$$A = \frac{u^2 + 2}{u\sqrt{u^2 + 4}} \quad (\text{D.6})$$

donde

$$u = \left(\frac{b^2 + v_t^2(t - t_0)^2}{R_E^2} \right)^{1/2} \quad (\text{D.7})$$

y v_t es la velocidad del objeto masivo ortogonal a la línea de visión. Tal y como vemos, la amplificación es una función del tiempo, $A[u(t)]$, obteniéndose su valor máximo, A_{\max} , para u mínimo, u_{\min} : $A_{\max} = A(u = u_{\min} = b/R_E)$. En particular se obtiene $A_{\max} = 1,34$ si $u_{\min} = 1$, mientras que A_{\max} diverge si $u_{\min} \rightarrow 0$.

Cabe señalar que, pese a la existencia de numerosos fenómenos astronómicos variables, existen tres características que diferencian los episodios de microlentes del resto de fenómenos de este tipo:

- Puesto que la probabilidad de que una estrella se vea afectada por un microlente es pequeña (véase más adelante la definición de la profundidad óptica) sólo cabe esperar un fenómeno de microlente por estrella.
- La deflexión de la luz es independiente de su longitud de onda, por lo que la estrella no cambiará su color durante el episodio de amplificación.
- Las curvas de luz quedan bien descritas mediante la teoría: ecuaciones D.5 y D.6.

En la Figura D.2 podemos observar varias curvas de luz para diversos fenómenos de microlentes observados por el equipo MACHO en la dirección de la Nube Grande de Magallanes. Los paneles superior e inferior para cada objeto representan las exposiciones observadas utilizando un filtro azul y rojo, respectivamente. Tal y como puede apreciarse el ajuste con los modelos teóricos es muy bueno, así como el alto grado de acromaticidad.

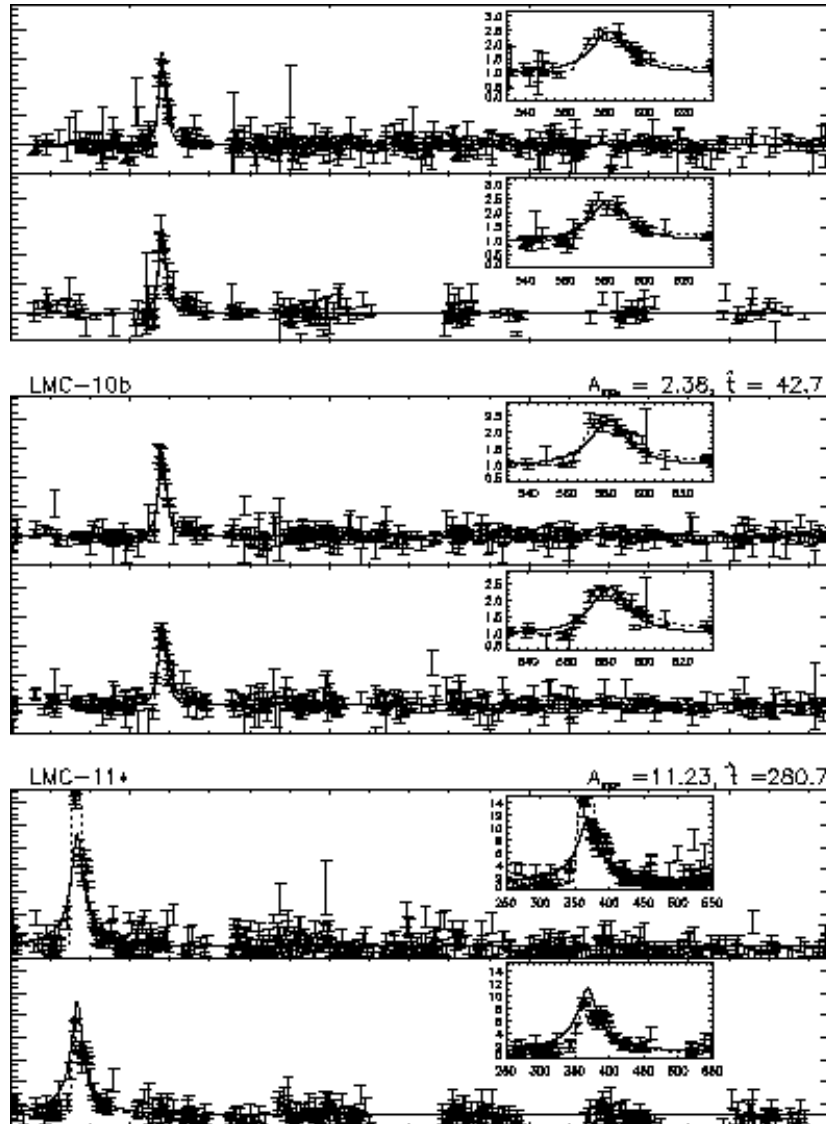


Figura D.2: Curvas de luz para tres candidatos a microlentes observados por Alcock et al. (2000). Para cada objeto se muestra la exposición obtenida para los filtros azul y rojo, paneles superior e inferior de cada figura, respectivamente.

Un parámetro que caracteriza el periodo de observación de un fenómeno de microlente es el denominado tiempo de Einstein, cuya definición viene dada por

$$T_E \equiv \frac{R_E}{v_t} \quad (\text{D.8})$$

El tiempo de Einstein es un magnitud observable y puede ser medida, una vez conocida la máxima amplificación de la curva de luz, como el intervalo de tiempo que transcurre entre dos amplificaciones que valgan la mitad de su valor máximo. El tiempo de Einstein se adopta generalmente como la definición de la duración del suceso de microlente. No obstante, el equipo MACHO utiliza en sus análisis la magnitud $\hat{t} \equiv 2T_E$, por lo que a T_E se le suele denominar el tiempo de paso del radio de Einstein, mientras que a \hat{t} el tiempo de paso del diámetro de Einstein. En cualquier caso, el tiempo de Einstein, junto con la amplitud máxima, son las únicas dos magnitudes medibles, mientras que el resto de parámetros (M , x , b , v_t) dependen de ellos. Por lo tanto, cualquier información concerniente al objeto masivo causante del suceso de microlente sólo puede ser obtenida a partir del análisis estadístico de un número suficientemente grande de casos.

Una magnitud que resulta de gran importancia en el análisis de los microlentes es la denominada profundidad óptica, τ . La profundidad óptica se define como la probabilidad de que en un tiempo dado una estrella pueda sufrir un fenómeno de microlente con una amplificación tal que $A > 1,34$ para $u_{\min} < 1$. Matemáticamente la profundidad óptica viene dada por la expresión:

$$\tau = \pi \int_0^{D_{\text{os}}} \frac{\rho(D_{\text{ol}})}{M} R_E^2 dD_{\text{ol}} \quad (\text{D.9})$$

donde ρ es la distribución de densidad de microlentes. Puesto que $R_E \propto \sqrt{M}$, mientras que para una ρ dada la densidad numérica de microlentes es $\propto M^{-1}$, la profundidad óptica resulta independiente de las masas individuales de los microlentes. En consecuencia, la profundidad óptica depende exclusivamente del perfil de densidades de microlentes, y no de sus masas o velocidades individuales.

Experimentalmente resulta de gran utilidad práctica utilizar la siguiente expresión (Alcock et al. 2000) para determinar la profundidad óptica a partir de magnitudes observables:

$$\tau = \frac{1}{E} \frac{\pi}{4} \sum_i \frac{\hat{t}_i}{\varepsilon(\hat{t}_i)} \quad (\text{D.10})$$

donde E es la exposición total, que se determina como el número de objetos multiplicado por el tiempo de exposición, \hat{t}_i es el tiempo de paso del diámetro de Einstein para el suceso i -ésimo, y $\varepsilon(\hat{t}_i)$ es la función de eficiencia de detección (ver más detalles en la Sección 5.1).

Bibliografía

Abrikosov, A. A., 1960, *Soviet Phys. JETP* 12, 1254

Adams, F., Laughlin, G., 1996, *ApJ*, 468, 586

Alcock, C., Allsman, R.A., Alves, D., Axelrod, T.S., Becker, A.C., Bennett, D.P., Cook, K.H., Freeman, K.C., Griest, K., Guern, J., Lehner, M.J., Mashall, S.L., Peterson, B.A., Pratt, M.R., Quinn, P.J., Rodgers, A.W., Stubbs, C.W., Sutherland, W., Welch, D.L., 1997, *ApJ*, 486, 697

Alcock, C., Allsman, R.A., Alves, D., Axelrod, T.S., Becker, A.C., Bennett, D.P., Cook, K.H., Dalal, N., Drake, A. J., Freeman, K.C., Geha, M., Griest, K., Lehner, M.J., Mashall, S.L., Minniti, D., Nelson, C. A., Peterson, B.A., Popowski, P., Pratt, M.R., Quinn, P.J., Stubbs, C.W., Sutherland, W., Tomaney, A. B., Vandehei, T., Welch, D.L., 200, *ApJ*, 542, 281

Avni, Y., Bahcall, J.N., 1980, *ApJ*, 235, 694

Bahcall, J. N., 1984a, *ApJ*, 276, 156

Bahcall, J. N., 1984b, *ApJ*, 276, 169

Bahcall, N. A., Cen, R., Davé, R., Ostriker, J. P., & Yu, Q., 2000, *ApJ*, 541, 1

Bazell, D., & Peng, Y., 1998, *ApJS*, 116, 47

Bergeron, R., Leggett, S. K., Ruiz, M. T., 2001, *ApJS*, 133, 413

Bergeron, P., Saffer, R. A., Liebert, J., 1992, *ApJ*, 394, 228

Bergeron, P., Wesemael, F., Beauchamp, A., 1995, *PASP*, 107, 1047

Binney, J., & Merrifield, M., 1998, *Galactic Astronomy* (Princeton: Princeton University Press)

Binney, J., Tremain, H., 1987, *Galactic Dynamics* (Princeton: Princeton Univ. Press)

- Boss, L., 1910, *Preliminary General Catalogue* (Washington: Carnegie Institution)
- Bravo, E., Isern, J., Canal, R., 1993, *A&A*, 270, 288
- Canal, R., Isern, J., Ruiz-Lapuente, P., 1997, *ApJ*, 488, L35
- Carney, B.W., Latham, D.W., Laird, J.B., 1990, *AJ*, 99, 572
- Chabrier, G., Ségretain, L., Méra, D., 1996, *ApJ*, 468, L21.
- Chandrasekhar, S. 1931, *ApJ*, 74, 81
- D'Antona, F., & Mazzitelli, I., 1989, *ApJ*, 347, 934
- Dehnen, W., & Binney, J. J., 1998a, *MNRAS*, 294, 429
- Dehnen, W., & Binney, J. J., 1998b, *MNRAS*, 298, 387
- Díaz-Pinto, A., García-Berro, E., Hernanz, M., Isern, J., Mochkovitch, R., 1994, *A&A*, 282, 86
- Edvardsson, B., Andersen, J., Gustafsson, B., Lambert, D. L., Nissen, P. E., Tomkin, J., 1993, *A&A*, 275, 101
- Felten, J.E., 1976, *A&AS*, 207, 700
- Fields, B. D., Mathews, G. J., & Schramm, D. N., 1996, *ApJ*, 483, 625
- Fleming, T.A., Liebert, J.W., Green, R.F., 1986, *ApJ*, 308, 176
- Flynn, C., Gould, A., Bahcall, J.N., 1996, *ApJ*, 466, L55
- Flynn, C., Sommer-Larsen, J., Christensen, P.R., 1996, *MNRAS*, 281, 1027
- Fowler, R. H., 1926, *MNRAS*, 87, 114
- García-Berro, E., Hernanz, M., Isern, J., Mochkovitch, R., 1988b, *Nature*, 333, 642
- García-Berro, E., Hernanz, M., Mochkovitch, R., Isern, J., 1988a, *A&A*, 193, 141
- García-Berro, E., Torres, S., 1997, *White Dwarfs*, Eds.: J. Isern, M. Hernanz & E. García-Berro (Kluwer Academic Publishers), 97
- García-Berro, E., Torres, S., Isern, J., Burkert, A., 1999, *MNRAS*, 302, 173-188
- Gatewood, G. D., & Gatewood, C. V., 1978, *ApJ*, 255, 191
- Giclas, H. L., Burnham, R. Jr., & Thomas, N. G., 1980, *Lowell Obs. Bull. No.* 166
- Gould, A., Flynn, C., & Bahcall, J. N., 1998, *ApJ*, 503, 798

- Green, R. F., 1980, *ApJ*, 238, 685
- Green, R. F., Schmidt, M., & Liebert, J., 1986, *ApJS*, 61, 305
- Green, R. M., 1985, *Spherical Astronomy*, (Cambridge & New York: Cambridge University Press)
- Gyuk, G., Dalal, N., & Griest, K., 2000, *ApJ*, 535, 90
- Hansen, B.M.S., 1999, *ApJ*, 520, 680
- Hernández-Pajares, M., Floris, J., 1994, *MNRAS*, 268, 444
- Hernanz, M., García-Berro, E., Isern, J., Mochkovitch, R., Segretain, L., Chabrier, G., 1994, *ApJ*, 434, 652
- Hodgkin, S.T., Oppenheimer, B.R., Hambly, N.C., Jameson, R.F., Smartt, S.J., Steele, I.A., 2000, *Nature*, 403, 57
- Holberg, J.B., Oswalt, T.D., Sion, E.M., 2001, *AJ*, in press (astro-ph/0102120)
- Humanson, M. L., & Zwicky, F., 1947, *ApJ*, 105, 85
- Ibata, R.A., Gilmore, G., Irwin, M. J., 1994, *Nature*, 370, 194
- Ibata, R. A., Irwin, M., Bienaymé, O., Scholz, R., & Guibert, J., 2000, *ApJ*, 532, L41
- Ibata, R., Richer, H., Gilliland, R., & Scott, D., 1999, *ApJ*, 524, L95
- Iben, I., & Laughlin, G., 1989, *ApJ*, 341, 312
- Iben, I., & Tutukov, A. V., 1984, *ApJ*, 282, 615
- Iben, I., & Tutukov, A. V., 1985, *ApJS*, 58, 661
- Isern, J., García-Berro, E., Hernanz, M. & Mochkovitch, R., 1989, in IAU coll. 11, *White Dwarfs* Ed.: G. Wegner (Springer-Verlag: Berlin) 278
- Isern, J., García-Berro, E., Hernanz, M., Mochkovitch, R., Burkert, A., 1995a, *White Dwarfs*, Ed.: D. Koester & K. Werner (Springer Verlag), 19
- Isern, J., García-Berro, E., Hernanz, M., Mochkovitch, R., Burkert, A., 1995b, *The Formation of the Milky Way*, Eds.: E. J. Alfaro & A. J. Delgado (Cambridge University Press), 19
- Isern, J., García-Berro, E., Hernanz, M., Mochkovitch, R., Torres, S., 1998, *ApJ*, 503, 239

- Isern, J., Mochkovitch, R., García-Berro, E., & Hernanz, M., 1991, *A&A*, 241, L229
- Isern, J., Mochkovitch, R., García-Berro, E., & Hernanz, M., 1997, *ApJ*, 485, 308
- James, F., 1990, *Comput. Phys. Commun.*, 60, 329
- Kaplan, S. A., 1949, *Naukovy Zapiski (Sci. Notes Univ. Lwow)* 15, 109
- Kirzhnits, D. A., 1960, *Soviet Phys. JETP*, 11, 365
- Klypin, A., Kravtsov, A.Y., Valenzuela, O., Prada, F., 1999, *ApJ*, 522, 82
- Koester, D., & Schönberner, D. 1986, *A&A*, 154, 125
- Kohonen, T., 1990, *Proc. IEEE*, 78, No. 9, 1464
- Kohonen, T., 1997, *Self-Organizing Maps*, Springer Series in Information Sciences, Vol. 30 (Berlin: Springer)
- Lamb, D. Q., & Van Horn, H. M., 1975, *ApJ*, 200, 306
- Leggett, S. K., Ruiz, M. T., Bergeron, P., 1998, *ApJ*, 497, L294
- Liebert, J., Dahn, C.C., Monet, D.G., 1988, *ApJ*, 332, 891
- Liebert, J., Dahn, C. C., & Monet, D. G., 1989, in IAU coll. 114, *White Dwarfs* Ed.: G. Wegner (Berlin: Springer) 15
- Lucy, L., 2000, *MNRAS*, 318, 92
- Luyten, W. J., 1970, *White Dwarfs* (Minneapolis: University of Minnesota Press)
- Marković, D., Sommer-Larsen, J., 1997, *MNRAS*, 288, 733
- McCook, G.P., Sion, E.M., 1987, *ApJS*, 65, 603
- McCook, G.P., Sion, E.M., 1999, *ApJS*, 121, 1
- Méndez, R. A., Minnitti, D., De Marchi, G., Baker, A., & Couch, W. J., 1996, *MNRAS*, 283, 666
- Mestel, L., 1952, *MNRAS*, 112, 583
- Mihalas, D., Binney, J., 1981, *Galactic Astronomy* (W.H. Freeman & Co.)
- Mihalas, D., Routly, P. M., 1968, *Galactic Astronomy* (San Francisco: W. H. Freeman & Co.)
- Miyamoto, M., Nagai, R., 1975, *PASJ*, 27, 533

- Mochkovitch, R., 1983, A&A, 122, 212
- Mochkovitch, R., García-Berro, E., Hernanz, M., Isern, J., Panis, J.F., 1990, A&A, 233, 456
- Moore, B., Ghigna, F., Governato, F., Lake, G., Stadel, J., Tozzi, P., 1999, ApJ, 524, L19
- Murtagh, F., Heck, A., 1987, *Multivariate Data Analysis*, D. Reidel Publishing Company
- Naim, A., Lahav, O., Sodre, L., Storrie-Lombardi, M.C., 1995, MNRAS, 275, 567
- Ng, Y.K., Bertelli, G., 1998, A&A, 329, 943
- Noh, H.-R., Scalo, J., 1990, ApJ, 352, 605
- Ogorodnikov, K.F., 1965, *Dynamics of Stellar Systems* (Pergamon Press)
- Ostriker, J.P., 1990, in ASP Conf. Ser. Vol. 10, *Evolution of the Universe of Galaxies*, Ed.: R.G. Kron, Astron. Soc. Pac., San Francisco, p. 23
- Oswalt, T.D., Smith, J.A., 1995, in *White Dwarfs*, Eds.: D. Koester & K. Werner (Springer Verlag), 24
- Oswalt, T.D., Smith, J.A., Wood, M.A., Hintzen, P., 1996, Nature, 382, 692
- Press, W.H., 1996, *Unsolved problems in Astrophysics* (Princeton University Press)
- Press, W.H., Flannery, B.P., Teukolsky, S.A., Vetterling, W.T., 1986, *Numerical Recipes* (Cambridge University Press)
- Qin, Y.P., & Xie, G.Z., 1997, ApJ, 486, 100
- Roulet, E., Mollerach, S., 1997, Phys. Rept., 279, 67
- Ruiz, M. T., Maza, J., Wischnjewski, M. & Gonzáles, L. E., 1986, ApJ, 304, L25
- Salaris, M., Domínguez, I., García-Berro, E., Hernanz, M., Isern, J., Mochkovitch, R., 1997, ApJ, 486, 413
- Salaris, M., García-Berro, E., Hernanz, M., Isern, J., Saumon, D., 2000, ApJ, 544, 1036
- Salpeter, E.E., 1961, ApJ, 134, 669
- Saumon, D., Jacobson, S.B., 1999, ApJ, 511, L107

- Scalo, J., 1998, *The Stellar Initial Mass Function*, Eds.: G. Gilmore, I. Parry & S. Ryan (PASP Conference Series), in press
- Schatzman, E., 1956, *Astron. Zhur.* 33, 800
- Schatzman, E., 1958, *White Dwarfs* (Amsterdam: North-Holland)
- Shaviv, G., 1979, in IAU coll. 53, *White Dwarfs and Variable Degenerate Stars* Eds.: V. Weidemann and H. M. Van Horn, (University of Rochester Press) 11
- Schmidt, M., 1968, *ApJ*, 151, 393
- Serra-Ricart, M., Aparicio, A., Garrido, L., Gaitan, V., 1996, *ApJ*, 462, 221
- Sion, E. M., 1986, *Publ. Astron. Soc. Pacific* 98, 821
- Sion, E.M., Fritz, M.L., McMullin, J.P., Lallo, M.D., 1988, *AJ*, 96, 251
- Sion E.M., Liebert, J., 1977, *ApJ*, 213, 468
- Sommer-Larsen, J., Flynn, C., & Christensen, P. R., 1994, *MNRAS*, 271, 94
- Stevenson, D. J., 1980, *J. Physique Coll.* 41, C2 61
- Tamanaha, C.M., Silk, J., Wood, M.A., Winget, D.E., 1990, *ApJ*, 358, 164
- Tinney, C.G., Reid, I.N., Mould, J.R., 1993, *ApJ*, 414, 254
- Tóth, G., Ostriker, J.P., 1992, *ApJ*, 389, 5
- Torres, S., García-Berro, E., Isern, J., 1998, *ApJ*, 508, L71
- Van Horn, H. M., 1968, *ApJ*, 151, 227
- Van Horn, H. M., 1971, in IAU coll. 42, *White Dwarfs* Ed.: Luyten (Dordrecht: Reidel) 87
- Van Maanen, A., 1913, *Publ. Astron. Soc. Pacific* 29, 158
- Velázquez, H., White, S.D.M., 1999, *MNRAS*, 304, 254
- Weidemann, V., 1968, *Annu. Rev. Astron. Astrophys.* 6, 351
- Wielen, R., 1977, *A&A*, 60 263
- Winget, D.E., Hansen, C.J., Liebert, J., van Horn, H.M., Fontaine, G., Nather, R.E., Kepler, S.O., Lamb, D.Q., 1987, *ApJ*, 315, L77

- Winget, D. E., & Van Horn, H. M., 1987, in IAU coll. 95, *The Second Conference on Faint Blue Stars* Eds.: A. G. D. Philip, D. S. Hayes & J. Liebert (Schenectady: L. Davis Press) 363
- Wood, M.A., 1992, *ApJ*, 386, 539
- Wood, M.A., 1995, *White Dwarfs*, Eds.: D. Koester & K. Werner (Berlin: Springer), 41
- Wood, M.A., 1997, *White Dwarfs*, Eds.: J. Isern, M. Hernanz & E. García-Berro (Kluwer Academic Publishers), 105
- Wood, M.A., Oswalt, T.D., 1998, *ApJ*, 497, 870
- Wood, M.A., Winget, D.E., 1989, *White Dwarfs*, Ed.: G. Wegner (Berlin: Springer), 282
- Xu, Z. M., & Van Horn, H. M., 1992, *ApJ*, 387, 662