

3.6 La influència de la Lluna en la transferència

Els resultats de la transferència obtinguts mitjançant el problema restringit, són prou esperançadors com per aquesta es pugui realitzar mitjançant l'ús de la varietat estable d'alguna òrbita halo seguida d'una maniobra de "patinatge" per la família fins arribar a l'òrbita objectiu. Abans però de passar a estudiar el cas real, sembla però oportú veure en quina mesura la Lluna influeix en la transferència. Les principals raons que porten a considerar aquest fet són les següents:

- i) El punt L_1 , i per tant l'òrbita halo, es troba aproximadament a 1500000 km de la Terra, i la Lluna a uns 380000 km. Movent-se dins aquest marge de distància, la Lluna afecta considerablement l'entorn de la Terra, i també, encara que en menor mesura, a l'òrbita halo.
- ii) En el problema restringit hem considerat que la Terra i la Lluna les tenim agrupades formant el primari petit, situat en el que podríem dir centre de masses Terra-Lluna. El fet real de que aquestes dues masses estan separades i girant al voltant del seu centre de masses, fa que la Terra tingui un moviment oscil·latori en la direcció y , d'una amplitud propera als 4600 km, que aprofitat de forma adequada ens pot fer agafar la varietat estable d'una òrbita halo més propera a l'objectiu.
- iii) Considerant les coordenades de posició de les varietats estables i l'òrbita de la Lluna, és clar que es produiran col·lisions, de la mateixa manera que altres òrbites de les varietats passaran molt prop de la Lluna i es veuràn sensiblement pertorbades. En cas de trobar òrbites, que pertorbades de manera raonable, arribin a la Terra, es podria considerar la possibilitat de realitzar la transferència amb l'ajut gravitacional lunar.

Per aquests motius ha semblat important considerar un model senzill que posés de manifest la presència de la Lluna. La manera més senzilla de fer aixó és mitjançant l'anomenat problema bicircular.

3.6.1 El problema bicircular

En el nostre problema bicircular, la Terra, la Lluna i el Sol estan sempre en un mateix pla. El baricentre Terra-Lluna es mourà en òrbita circular al voltant del Sol, i la Lluna en òrbita circular al voltant de la Terra.

Per a comparar els resultats que obtindrem respecte dels obtinguts utilitzant el problema restringit, es convenient que busquem les equacions del nostre nou model com una pertorbació de les equacions del RTBP.

Recordem que les equacions del RTBP són:

$$\begin{aligned}\ddot{x} - 2\dot{y} &= \Omega_x, \\ \ddot{y} + 2\dot{x} &= \Omega_y, \\ \ddot{z} &= \Omega_z,\end{aligned}$$

amb

$$\Omega = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} + \mu(1-\mu),$$

$$r_1^2 = (x - \mu)^2 + y^2 + z^2, \quad r_2^2 = (x - \mu - 1)^2 + y^2 + z^2,$$

on hem suposat que el Sol es troba a $(\mu, 0, 0)$ amb massa $m_1 = 1 - \mu$ i la Terra (incloent la Lluna) a $(\mu - 1, 0, 0)$ amb massa μ .

Com que volem tenir em compte les diferents forces degudes a la Terra i a la Lluna, ens cal dividir el terme μ/r_2 en dues parts. Per aixó considerarem la Terra i la Lluna movent-se en òrbita circular al voltant del seu centre de masses.

Sigui θ l'angle, contat en sentit contrari a les agulles del rellotge, entre els vectors $\overrightarrow{\text{baricentre Terra-Lluna, Terra}}$ i $\overrightarrow{\text{baricentre Terra-Lluna, Sol}}$.

Si notem per n_l al moviment mig de la Lluna al voltant de la Terra en unitats del problema restringit:

$$n_l = \frac{\text{moviment mig de la Lluna al voltant de la Terra}}{\text{moviment mig baricentre Terra-Lluna al voltant del Sol}}$$

tenim que $\theta = n_1 t + \theta_0$, on θ_0 és la fase inicial.

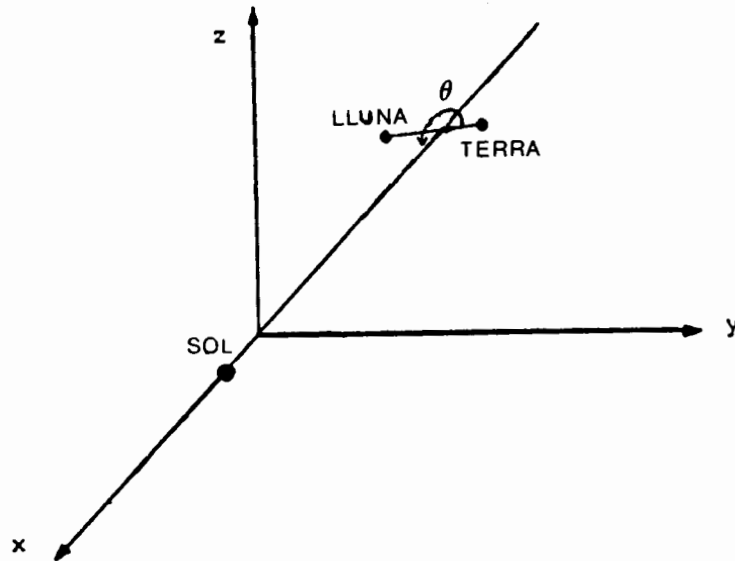


Figura 3.36. El problema bicircular.

Ens cal introduir també $\ell = \frac{\text{distància mitja Terra-Lluna}}{\text{distància mitja baricentre (Terra-Lluna)-Sol}}$,

i $\delta = \frac{\text{massa de la Lluna}}{\text{massa de la Lluna} + \text{massa de la Terra}}$.

Aleshores, la posició de la Terra i de la Lluna són:

$$\text{Terra : } (\mu - 1 + \ell\delta \cos \theta, \ell\delta \sin \theta, 0) := (x_E, y_E, 0),$$

$$\text{Lluna : } (\mu - 1 - \ell(1 - \delta) \cos \theta, -\ell(1 - \delta) \sin \theta, 0) := (x_M, y_M, 0),$$

i el terme $\frac{\mu}{r_2}$ el descomponem com:

$$\frac{\mu\delta}{r_3} + \frac{\mu(1 - \delta)}{r_4} = \mu\left(\frac{\delta}{r_3} + \frac{1 - \delta}{r_4}\right),$$

amb:

$$r_3^2 = (x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 + z^2, \quad r_4^2 = (x - x_E)^2 + (y - y_E)^2 + z^2.$$

Les equacions del model bicircular queden llavors iguals que les del RTBP però amb la nova Ω :

$$\Omega = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1 - \mu}{r_1} + \mu\left(\frac{\delta}{r_3} + \frac{1 - \delta}{r_4}\right) + \mu(1 - \mu).$$

La següent taula resumeix els valors que hem pres en els càlculs:

$$\begin{aligned} \mu &= 3.040357143 \times 10^{-6}, & \text{Unitat de distància} &= 1.49597871411 \times 10^8 \text{ km}, \\ \delta &= 0.012150298, & \text{Unitat de velocitat} &= 29784.7358 \text{ m/s}, \\ \ell &= 2.57245638 \times 10^{-3}, & \text{Unitat de temps} &= 58.1301004 \text{ dies}, \\ n_l &= 13.36411007. \end{aligned}$$

El problema bicircular és lleugerament no coherent: la Terra, la Lluna i el Sol, no satisfan les equacions de Newton.

A fi d'integrar les equacions variacionals, notem que el model bicircular, a diferència del problema restringit, ja no és un sistema autònom. Per tant ens cal afegir l'equació $\dot{t} = 1$ al sistema de 6 equacions que defineixen el moviment per a tenir un sistema autònom.

Si ara definim $(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) := (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$, el sistema d'equacions diferencials que obtenim és:

$$\begin{aligned} \dot{t} &= 1 \\ \dot{x}_1 &= x_4 \\ \dot{x}_2 &= x_5 \\ \dot{x}_3 &= x_6 \\ \dot{x}_4 &= 2x_5 + \Omega_x \\ \dot{x}_5 &= -2x_4 + \Omega_y \\ \dot{x}_6 &= \Omega_z \end{aligned}$$

Així doncs, en principi les equacions variacionals són 49:

$$(\bar{X})^\bullet = D(\bar{X}),$$

amb

$$D = \left(\begin{array}{c|ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & & 1 & 0 & 0 \\ 0 & & \circ & & 0 & 1 & 0 \\ 0 & & & & 0 & 0 & 1 \\ \hline \Omega_{xt} & \Omega_{xx} & \Omega_{xy} & \Omega_{xz} & 0 & 2 & 0 \\ \Omega_{yt} & \Omega_{yx} & \Omega_{yy} & \Omega_{yz} & -2 & 0 & 0 \\ \Omega_{zt} & \Omega_{zx} & \Omega_{zy} & \Omega_{zz} & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Degut al fet que la primera fila de D és zero, tota la primera fila de les variables variacionals romandrà constant al llarg de la integració. Podem així estalviar-nos 7 equacions a més de la $\dot{t} = 1$, que evidentment no cal integrar.

Resumint doncs, l'ordre total del sistema d'equacions diferencials a integrar és 48. Sis equacions associades amb $x_1 \dots x_6$ i quaranta-dues amb les variacionals.

Si tenim en compte que les equacions variacionals les necessitem per a calcular la matriu variacional a cada revolució, i aquesta matriu l'hem d'inicialitzar amb la matriu identitat a l'instant inicial de cada revolució, les 42 equacions variacionals que hem d'integrar les podem escriure com:

$$\begin{pmatrix} x_7 \\ x_8 \\ \dots \\ \dots \\ x_{12} \end{pmatrix} \bullet = \tilde{D} \begin{pmatrix} x_7 \\ x_8 \\ \dots \\ \dots \\ x_{12} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \Omega_{x_1 t} \\ \Omega_{x_2 t} \\ \Omega_{x_3 t} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x_{13} & x_{19} & \dots & \dots & x_{43} \\ x_{14} & x_{20} & \dots & \dots & x_{44} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{18} & x_{24} & \dots & \dots & x_{48} \end{pmatrix} \bullet = \tilde{D} \begin{pmatrix} x_{13} & x_{19} & \dots & \dots & x_{43} \\ x_{14} & x_{20} & \dots & \dots & x_{44} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{18} & x_{24} & \dots & \dots & x_{48} \end{pmatrix},$$

on:

$$\tilde{D} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} & & & 1 & 0 & 0 \\ & \circ & & 0 & 1 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 \\ \hline \Omega_{x_1 x_1} & \Omega_{x_1 x_2} & \Omega_{x_1 x_3} & 0 & 2 & 0 \\ \Omega_{x_2 x_1} & \Omega_{x_2 x_2} & \Omega_{x_2 x_3} & -2 & 0 & 0 \\ \Omega_{x_3 x_1} & \Omega_{x_3 x_2} & \Omega_{x_3 x_3} & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

3.6.2 Obtenció de l'òrbita quasiperiòdica per tir paral·lel

Degut al caràcter no autònom del problema bicircular, les òrbites periòdiques en general deixen d'existir. S'han de substituir per òrbites quasiperiòdiques (QPO). El propòsit d'aquesta secció, es veure com es poden calcular aquestes òrbites quasiperiòdiques, o, més concretament com calcular una òrbita numèrica del problema bicircular que es comporti com una òrbita quasiperiòdica i que estigui prop d'una òrbita halo del problema restringit durant un període de temps equivalent a varis anys.

En primer lloc definirem l'aplicació de Poincaré, \mathcal{P} , associada a la superfície de secció $y = 0$ per a cada mitja volta de la quasiperiòdica seguint el flux quan el temps,

t , creix:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(t, x, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) &= (\bar{t}, \bar{x}, \bar{z}, \bar{\dot{x}}, \bar{\dot{y}}, \bar{\dot{z}}) := \\ &:= (\mathcal{P}_1(t, x, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \dots, \mathcal{P}_6(t, x, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})). \end{aligned}$$

Degut al fet que el sistema d'equacions diferencials és no autònom, s'ha de conservar el temps en la representació d'un punt inicial o final.

Denotarem per $Q_i = (t_i, x_i, z_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i)$ a la i -èssima component d'un cert vector Q , que es referirà a l' i -èssim punt de la partició de l'interval on farem el tir paral·lel. Si el tir paral·lel l'apliquem a N subintervalls, llavors $i = 0, \dots, N$.

Tenim en principi $6(N+1)$ variables lliures. Hem de tenir en compte que escollim a partir de quin temps hem de calcular l'òrbita quasiperiòdica, i a més el que de fet fem és millorar una òrbita periòdica halo del problema restringit d'una amplitud donada. Per tant fixarem t_0 i z_0 al principi del tir paral·lel³. Tenim així que el nombre de variables lliures (les components de Q) són $6N + 4$.

Calen doncs $6N + 4$ equacions per a determinar aquestes variables.

Els mètodes de tir paral·lel han de complir les condicions de solapament:

$$F_{6i+j}(Q) = \mathcal{P}_j(Q_i) - (Q_{i+1})_j = 0, \quad j = 1, \dots, 6, \quad i = 0, \dots, N-1,$$

on hem notat per F el vector de $6N + 4$ equacions que haurà de satisfer la variable Q .

Les condicions de solapament donen $6N$ equacions. Les quatre que falten es poden imposar de diferents maneres, i s'obtidran diferents aproximacions de l'òrbita quasiperiòdica. Les escollides en aquest cas han estat:

$$\begin{aligned} F_{6N+1} &= x_0 - x_N = 0, \\ F_{6N+2} &= \dot{x}_{\text{halo}} - \dot{x}_N = 0, \\ F_{6N+3} &= \dot{y}_{\text{halo}} - \dot{y}_N = 0, \\ F_{6N+4} &= \dot{z}_{\text{halo}} - \dot{z}_N = 0. \end{aligned}$$

³Degut al fet que la dependència en el temps del problema bicircular és periòdica amb freqüència el moviment mig de la Lluna al voltant de la Terra, n_l , sempre escollirem $t_0 = 0$ al principi del tir paral·lel i fixarem la fase inicial, θ_0 , a un cert valor.

La matriu B_N és una matriu 4×4 , amb tots els valors iguals a zero llevat de l'element de la primera fila i columna que val 1.

La matriu A_N es una matriu 4×6 que té la següent estructura:

$$A_N = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Hem fet un programa que calcula les òrbites quasiperiòdiques del problema bicircular utilitzant aquest procés de tir paral·lel. Al cap de poques iteracions (4 ó 5) convergeix amb $\|F\|_\infty < 10^{-10}$, mesurant totes les components de F en unitats adimensionals.

A la taula 3.5 presentem alguns resultats quan el tir paral·lel s'ha subdividit en 16 subintervalls de mitja revolució. El que equival a un interval de temps aproximat d'uns 1420 dies.

INITIAL SUN-EARTH-MOON ANGLE: 100 (degrees).

	(T)	(X)	(Z)	(X dot)	(Y dot)	(Z dot)
0	.0000000000D+00	-.9888359509D+00	-.8957025715D-03	-.5310084450D-05	-.8954198176D-02	-.4536795321D-04
1	.1529837204D+01	-.9916276025D+00	.7173232953D-03	-.5524925861D-05	.9805461093D-02	.5277787669D-04
2	.3059627044D+01	-.9888372130D+00	-.8900959605D-03	-.7215839885D-06	-.8954834326D-02	-.4045625563D-04
3	.4589536661D+01	-.9916282534D+00	.7129525302D-03	-.3257791500D-05	.9811624109D-02	.4686862619D-04
4	.6119353067D+01	-.9888367406D+00	-.8852422240D-03	-.9091069897D-07	-.8956754804D-02	-.3544968652D-04
5	.7649301795D+01	-.9916279292D+00	.7094280069D-03	-.6248244351D-05	.9810272825D-02	.3931443146D-04
6	.9179145392D+01	-.9888363359D+00	-.8810539989D-03	-.2570885027D-06	-.8958798741D-02	-.2959390344D-04
7	.1070908446D+02	-.9916284833D+00	.7062019726D-03	-.3184442902D-05	.9815343133D-02	.3308189628D-04
8	.1223895533D+02	-.9888360024D+00	-.8776348577D-03	.4377703330D-06	-.8960055615D-02	-.2417480107D-04
9	.1376892856D+02	-.9916281551D+00	.7038463891D-03	-.6833476905D-05	.9814024279D-02	.2487257271D-04
10	.1529881574D+02	-.9888357417D+00	-.8749159783D-03	.1868974665D-06	-.8961527593D-02	-.1798379140D-04
11	.1682876869D+02	-.9916286405D+00	.7018401764D-03	-.3028195072D-05	.9817908640D-02	.1847028988D-04
12	.1835867977D+02	-.9888355527D+00	-.8730151433D-03	.9544512296D-06	-.8962118219D-02	-.1230398304D-04
13	.1988866109D+02	-.9916283136D+00	.7007118810D-03	-.7092293097D-05	.9816674627D-02	.9836222853D-05
14	.2141857771D+02	-.9888354409D+00	-.8718304425D-03	.6012598128D-06	-.8962974768D-02	-.5927977078D-05
15	.2294852772D+02	-.9916287339D+00	.6999707155D-03	-.2811725291D-05	.9819298734D-02	.3413007697D-05
16	.2447848598D+02	-.9888359509D+00	-.8714798694D-03	.0000000000D+00	-.8962321000D-02	-.3583006231D-26

Taula 3.5. Òrbita halo d'amplitud $z \beta = 0.08$ refinada pel problema bicircular. La taula conté les diferents components per cada mitja volta quan $y = 0$.

3.6.3 La varietat estable

Pel cas de les òrbites periòdiques halo del problema restringit es poden calcular els valors propis de la matriu de monodromia. Pel cas d'una òrbita quasiperiòdica com que els punts inicial i final són diferents, la matriu de monodromia pròpiament no existeix i tampoc els valors propis associats. De fet, l'òrbita quasiperiòdica no es troba massa lluny de l'òrbita halo, així doncs hem utilitzat la matriu variacional al llarg d'una volta com si fos la matriu de monodromia per a globalitzar la varietat estable.

La taula 3.6 mostra el valor propi i vector propi associat a la varietat estable per a les diferents voltes de l'òrbita quasiperiòdica de la taula 3.5.

Un cop es té seleccionada una revolució⁵, la part de varietat estable associada a aquesta revolució es pot calcular de la següent manera:

Sigui η el valor propi de l'aplicació de Poincaré associat a la varietat estable de la volta seleccionada i $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5,)$ el seu vector propi, les components del qual estan associades amb $t, x, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ respectivament.

Siguin $X0 = (t_0, x_0, 0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$ les condicions inicials de l'òrbita quasiperiòdica de la volta seleccionada, FAC un factor de desplaçament i $v = (\omega_0, \omega_1, 0, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5)$. Podem obtenir condicions inicials $XW = (t_\omega, x_\omega, y_\omega, z_\omega, \dot{x}_\omega, \dot{y}_\omega, \dot{z}_\omega)$ aproximant la part lineal de la varietat mitjançant:

$$XW = X0 + FAC * (\eta)^\lambda * v \quad \text{amb } \lambda \in [0, 1].$$

Degut al fet que la varietat s'apropa de manera exponencial vers l'òrbita quasiperiòdica, agafant els punts equiespaiats en λ a $[0, 1]$, es produiran els punts més o menys equiespaiats a la gràfica de la varietat.

El factor de desplaçament FAC cal escollir-lo petit, en valor absolut, per a obtenir les condicions inicials prop de l'òrbita quasiperiòdica on la part lineal és una bona aproximació. Però no massa petit tampoc ja que η ho és força. Pels càlculs hem

⁵Entenem per revolució seleccionar un punt de la quasiperiòdica amb $y = 0$, z positiu o negatiu, i completar la volta fins tornar obtenir $y = 0$ amb el mateix signe de z .

INITIAL SUN-EARTH-MOON ANGLE: 100 (degrees)			
NUMBER OF HALF REVOLUTIONS: 16			
1	.5771021951D-03		
1	.9968138998D+00	.2660530529D-01	-.7685536832D-03
	-.6925282401D-01	-.2850160913D-01	.6732068377D-02
2	.5780640037D-03		
2	.9990553698D+00	-.1138588782D-01	-.4268095454D-03
	.3643466173D-01	.2073076443D-01	-.1139375275D-02
3	.5768063841D-03		
3	.9968098433D+00	.2661877527D-01	-.7560035656D-03
	-.6930084276D-01	-.2852488014D-01	.6688042366D-02
4	.5754835603D-03		
4	.9990496702D+00	-.1139288377D-01	-.4287946439D-03
	.3659172577D-01	.2072681579D-01	-.1104233819D-02
5	.5767137328D-03		
5	.9968080350D+00	.2662830556D-01	-.7435875690D-03
	-.6932440932D-01	-.2853087638D-01	.6651100515D-02
6	.5779517973D-03		
6	.9990532026D+00	-.1139068973D-01	-.4298993180D-03
	.3646877123D-01	.2077293205D-01	-.1131237247D-02
7	.5766892248D-03		
7	.9968054711D+00	.2663706147D-01	-.7304584093D-03
	-.6935626056D-01	-.2854358635D-01	.6615055101D-02
8	.5755155362D-03		
8	.9990486418D+00	-.1139607162D-01	-.4326565136D-03
	.3660812043D-01	.2074578365D-01	-.1100714290D-02
9	.5766334432D-03		
9	.9968042418D+00	.2664386941D-01	-.7183333438D-03
	-.6937142803D-01	-.2854982661D-01	.6588173526D-02
10	.5777780570D-03		
10	.9990509064D+00	-.1139480353D-01	-.4349757449D-03
	.3651092101D-01	.2080721245D-01	-.1126097508D-02
11	.5766151565D-03		
11	.9968022616D+00	.2665002845D-01	-.7057223622D-03
	-.6939726024D-01	-.2855664877D-01	.6562552669D-02
12	.5756632897D-03		
12	.9990476680D+00	-.1139846104D-01	-.4384641332D-03
	.3662461080D-01	.2076209693D-01	-.1101351192D-02
13	.5765876092D-03		
13	.9968015289D+00	.2665407421D-01	-.6942200494D-03
	-.6940506353D-01	-.2856341739D-01	.6546644691D-02
14	.5775682311D-03		
14	.9990486550D+00	-.1139801561D-01	-.4418987174D-03
	.3655768576D-01	.2083137047D-01	-.1124425774D-02
15	.5765306541D-03		
15	.9968002780D+00	.2665746818D-01	-.6824426349D-03
	-.6942304854D-01	-.2856386634D-01	.6531863906D-02

Taula 3.6. Valors propis i vectors propis de la diferencial de Poincaré, per les revolucions associades a l'òrbita quasiperiòdica de la taula 3.5.

escollit $FAC = \pm 10^{-4}$, el signe depèn de la revolució. Cal triar el que produeix apropaments de la varietat estable cap a la Terra quan integrem temps enrera.

Un cop s'haurà calculat una òrbita quasiperiòdica per a una època inicial, amplitud i durada determinades, a fi de poder-la aprofitar és clar que la inserció del satel·lit en aquesta òrbita s'haurà de fer en una de les primeres revolucions. Ara bé, per tal de comprovar la "homogeneïtat" de l'òrbita, hem realitzat les exploracions d'aquesta secció i les de la propera utilitzant totes les revolucions. El resultat ha estat que el comportament de la varietat és essencialment el mateix s'agafi la revolució que s'agafi. La diferència entre una i altra és essencialment una translació deguda a que l'angle de fase θ_0 a l'inici de cada revolució és diferent. Tant sols la primera i segona volta (aquesta darrera en molta menor mesura) difereixen més de les altres degut a les condicions de frontera que s'han imposat al tir paral·lel. Per aquest motiu és aconsellable calcular l'òrbita quasiperiòdica amb una revolució més a cada extrem del que cal en realitat, i considerar llavors només la part central per a propòsits pràctics. Evitem d'aquesta manera el comportament "poc natural" que pot tenir l'òrbita en els seus extrems.

Les figures 3.37 i 3.38 representen la distància mínima en km des de la Terra a les òrbites de la varietat estable, per a una òrbita quasiperiòdica d'amplitud $\beta = 0.08$ (120000 km), havent escollit una certa revolució i unes certes configuracions inicials Terra-Lluna-Sol. El mínim de cada gràfica representa la mínima distància de la varietat estable a la Terra. El paràmetre XLA representa el valor de λ .

Es fàcil de veure la influència de la Lluna, blegant la gràfica en alguns punts en els que apareix una forta oscil·lació. Aquesta és la principal diferència entre el problema bicircular i el restringit. Algunes òrbites passen prop de la Lluna i la gràfica es blega. Cal notar que la gràfica té una discontinuïtat només en el cas de que l'òrbita de la varietat tingui col·lisió amb la Lluna.

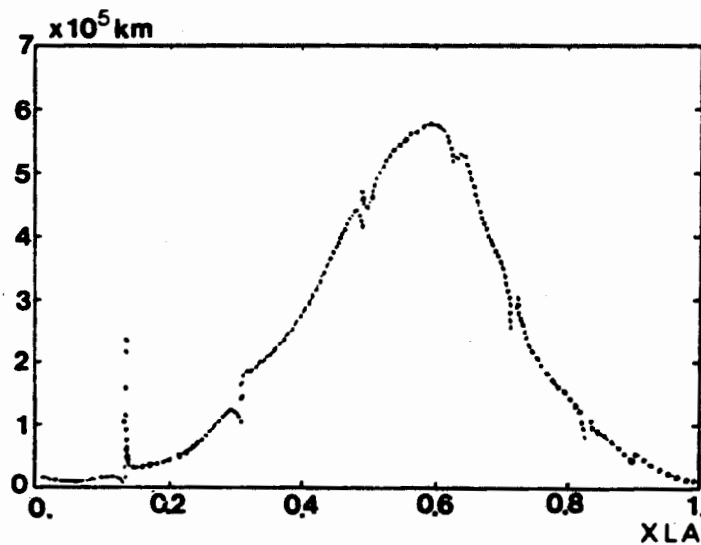


Figura 3.37. Distància en km des de la varietat estable al centre de la Terra per la revolució 5 de l'òrbita quasiperiòdica d'amplitud $\beta = 0.08$ i $\theta_0 = 30$ graus.

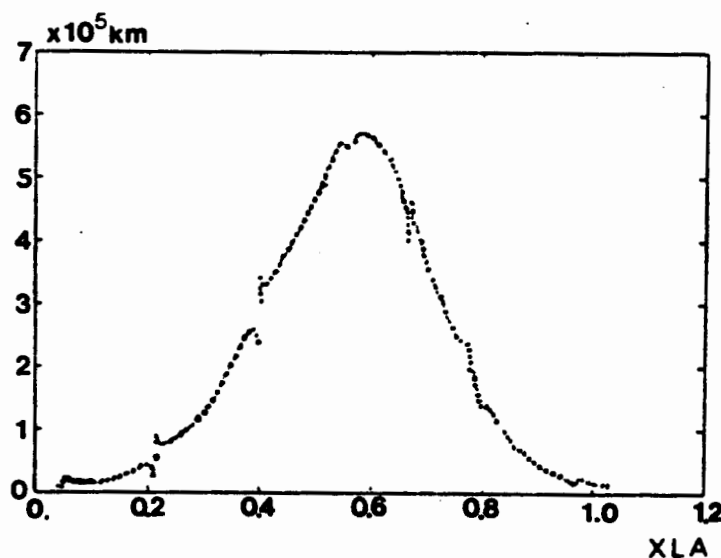


Figura 3.38. Distància en km des de la varietat estable al centre de la Terra per la revolució 5 de l'òrbita quasiperiòdica d'amplitud $\beta = 0.08$ i $\theta_0 = 200$ graus.

Tal com es pot veure en la figura d'ampliació 3.39 algunes d'aquestes oscil·lacions estan prop dels mínims que apareixen en el problema restringit. El seu desplaçament en alguns cassos és prou gran per que la varietat col·lisió amb la Terra dins un

marge acceptable del paràmetre λ , i al mateix temps, no passen excessivament prop de la Lluna (figura 3.40).

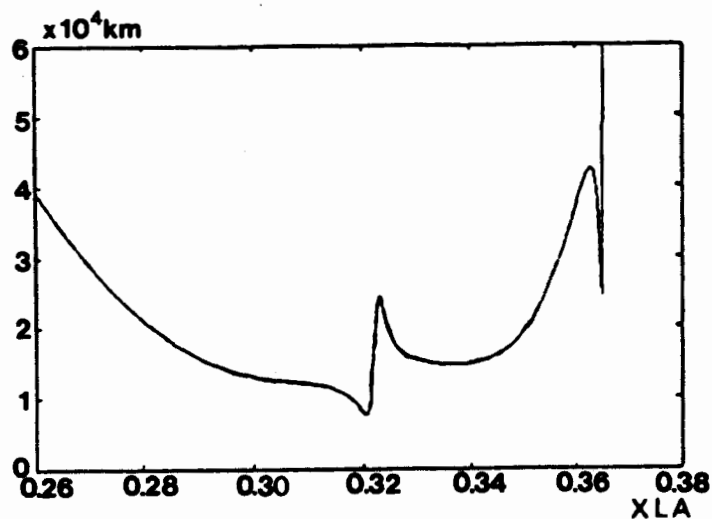


Figura 3.39. Ampliació d'una oscil.lacio.

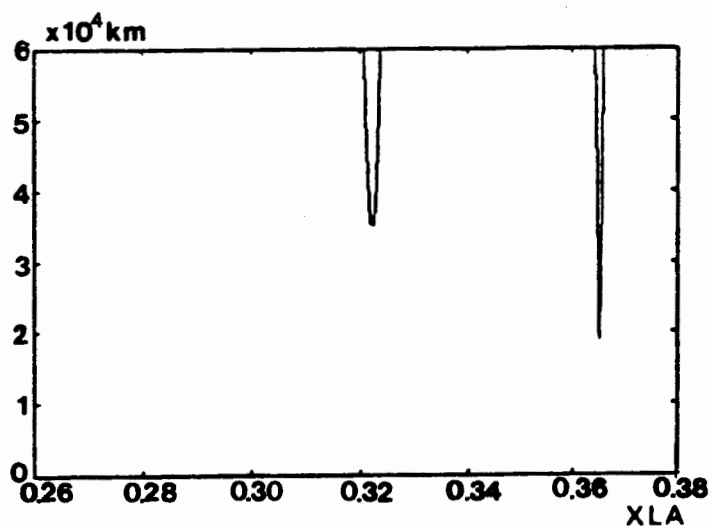


Figura 3.40. Distància en km desde la varietat estable al centre de la Lluna per les òrbites de la figura 3.39.

Durant les exploracions, s'han trobat també altres oscil.lacions lluny del mínim del problema restringit que donen també col.lisió amb la Terra en una estreta franja del paràmetre λ . Aquestes parts de la varietat no poden ser considerades ja que la

forta oscil·lació és deguda a un fort apropament a la Lluna (de fet la majoria de les òrbites col·lisionarien amb la superfície de la Lluna). D'ara en endavant, tots els resultats d'aquesta secció, venen de l'estudi de la varietat prop del mínim del problema restringit.

El desplaçament i posició de les oscil·lacions dins la gràfica de la varietat depèn de l'angle de fase θ_0 entre la Terra i la Lluna vist des del Sol en el moment inicial en que es comença a calcular l'òrbita quasiperiòdica.

Les figures 3.41 i 3.42 mostren el canvi d'algunes magnituds importants quan l'angle θ_0 varia de 0 a 360 graus. Tal com ja hem dit, deixant de banda translacions, el comportament és el mateix per a totes les revolucions.

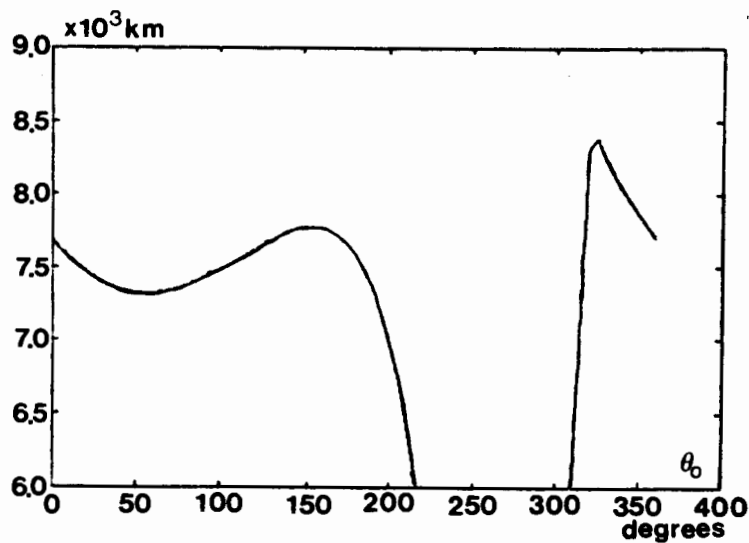


Figura 3.41. Distàncies mínimes des de la varietat estable al centre de la Terra considerant la volta 4 de les òrbites quasiperiòdiques d'amplitud $\beta = 0.08$.

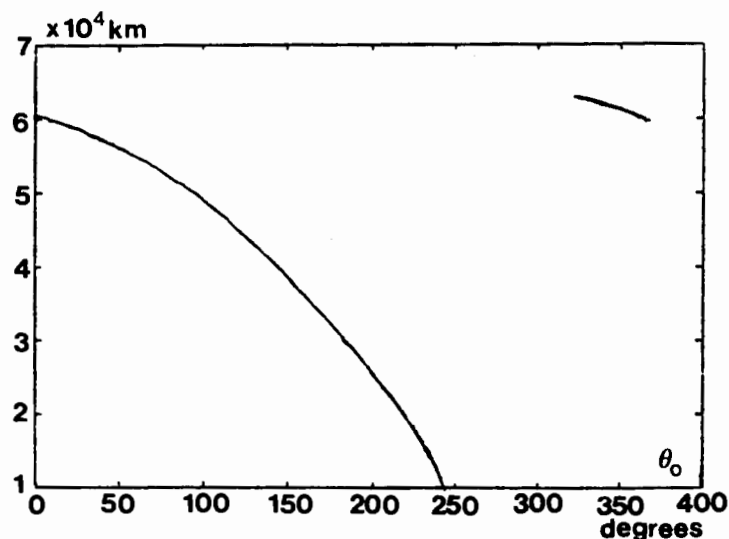


Figura 3.42. Distàncies des de la varietat al centre de la Lluna per a les mateixes òrbites quasiperiòdiques de la figura 3.41.

3.6.4 Elements orbitals prop de la Terra

Prop de la Terra és possible obtenir informació de l'òrbita mitjançant elements orbitals ja que en aquest moment les pertorbacions degudes als altres cossos del sistema solar són molt febles comparades amb el camp terrestre. Per tant gairebé tenim un problema de dos cossos i els elements orbitals, calculats suficientment prop de la Terra, romandran gairebé constants. D'altra banda els elements orbitals són molt indicatius de com s'acosta l'òrbita a la Terra.

Per tal de veure si és factible d'aconseguir la transferència utilitzant algunes d'aquestes òrbites pertorbades per la Lluna, hem calculat els elements orbitals així com les mínimes distàncies a la Lluna i a la Terra i la velocitat relativa a la Terra.

Alguns dels resultats obtinguts els recollim a la taula 3.7. Corresponen a la volta número 5 d'una òrbita quasiperiòdica d'amplitud-z normalitzada 0.08 i 70 graus d'angle de fase θ_0 inicial entre el Sol la Terra i la Lluna. Tots els angles estan mesurats en graus, les distàncies en km i les velocitats en m/s. Les inclinacions

estan mesurades respecte del pla de l'eclíptica.

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
0.148507	7270.765	10419.2	0.980	24.8	.29D+05
0.148614	6751.616	10815.4	0.981	25.7	.27D+05
0.148722	6554.471	10977.6	0.982	26.8	.26D+05
0.148829	6414.460	11097.0	0.983	28.2	.25D+05
0.148936	6462.957	11053.9	0.985	29.7	.23D+05
0.149044	6199.372	11287.7	0.986	31.7	.22D+05
0.149151	6495.623	11023.7	0.988	34.0	.21D+05
0.149258	6423.329	11084.9	0.989	37.1	.20D+05
0.149366	6492.712	11023.5	0.990	41.0	.18D+05
0.149473	6722.119	10830.3	0.992	46.2	.17D+05
0.149581	6372.335	11125.1	0.993	53.4	.16D+05
0.149688	6573.512	10949.8	0.994	63.6	.14D+05
0.149795	6521.865	10991.5	0.995	77.8	.13D+05
0.149903	6603.527	10920.1	0.995	95.9	.12D+05
0.150010	6418.619	11075.5	0.994	115.	.10D+05
0.150117	6374.898	11110.9	0.992	132.	.94D+04
0.150225	6434.840	11054.9	0.986	145.	.82D+04
0.150332	6359.881	11116.9	0.977	154.	.69D+04

Taula 3.7. Algunes magnituds de les òrbites de la varietat prop de la Terra.

- (1) Distància al centre de la Terra. (No necessàriament la mínima).
- (2) Velocitat relativa a la Terra.
- (3) Excentricitat.
- (3) Inclinació respecte del pla de l'eclíptica.
- (4) Distància al centre de la Lluna.

3.7 Obtenció de la QPO amb el model JPL

Agafant com a punt de partida l'òrbita halo quasiperiòdica que en el treball [7] es veu que es pot obtenir a partir de les equacions del moviment en el sistema solar real desenvolupades a la secció (1.3.2), el nostre objectiu és calcular una òrbita numèrica quasiperiòdica, o al menys que es comporti d'una manera quasiperiòdica durant un interval de temps fixat, utilitzant les efemèrides del JPL pel moviment dels cossos del sistema solar.

Procedint d'una manera anàloga al cas del problema bicircular, en el sistema de referència normalitzat direm que una òrbita quasiperiòdica té amplitud- z β si prové del refinat d'una òrbita halo d'amplitud- z β . De la mateixa manera també utilitzem el mètode del tir paral·lel pel refinat numèric.

Utilitzant el canvi de coordenades vist a la secció (1.3.1), el mètode del tir paral·lel es veu d'una manera idèntica al cas del problema bicircular. Cal tenir només en compte que en el problema bicircular comencem les integracions amb $t = 0$ i fixem el valor de l'angle θ_0 al principi de la integració. Ara en lloc d'això comencem a partir d'un cert t_0 mesurat en dies julians modificats.

També a diferència del cas bicircular, les quatre equacions que queden per imposar en el mètode de tir paral·lel un cop s'han imposat les condicions de solapament i s'han fixat t_0 i z_0 al principi del tir paral·lel, les triem de la següent manera:

$$\begin{aligned} F_{6N+1} &= x_0 - x_0^t - (x_N - x_N^t) &&= 0, \\ F_{6N+2} &= z_N - z_N^t &&= 0, \\ F_{6N+3} &= \pi_4(\dot{x}_0 - \dot{x}_0^t) + \pi_5(\dot{y}_0 - \dot{y}_0^t) + \pi_6(\dot{z}_0 - \dot{z}_0^t) &&= 0, \\ F_{6N+4} &= \pi_4(\dot{x}_N - \dot{x}_N^t) + \pi_5(\dot{y}_N - \dot{y}_N^t) + \pi_6(\dot{z}_N - \dot{z}_N^t) &&= 0, \end{aligned}$$

on el superíndex t denota que el valor ha estat agafat de l'òrbita quasiperiòdica analítica i π_4, π_5, π_6 són les tres últimes components dels factors de projecció sobre la component inestable. Per tant el que venim a demanar és que l'òrbita que obtinguem no es "dispersi" molt per l'eix x (equació $6N + 1$), que l'amplitud- z final sigui la mateixa que la que té l'òrbita analítica (equació $6N + 2$) i que el vector diferència de velocitats entre l'òrbita obtinguda i l'analítica no tingui component inestable ni

on A_i , $i = 1, 2, \dots, N$ denoten les matrius 6×6 $DP(Q_i)$, i A_0 és la matriu 6×4 que s'obté de $DP(Q_0)$ traient les columnes 1 i 3 (relacionades amb t_0 i z_0 que no varien).

La matriu B_N és una matriu 4×4 amb tots els valors iguals a zero llevat de $b_{11} = 1$.

La matriu A_N és una matriu 4×6 amb la següent estructura:

$$A_N = \begin{pmatrix} a_1 & -1 & a_5 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & a_6 & -1 & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & a_7 & 0 & -1 & 0 \\ a_4 & 0 & a_8 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

on $a_1 = \frac{\partial x_N^t}{\partial t_N}$, $a_2 = \frac{\partial \dot{x}_N^t}{\partial t_N}$, $a_3 = \frac{\partial y_N^t}{\partial t_N}$, $a_4 = \frac{\partial \dot{y}_N^t}{\partial t_N}$, $a_5 = \frac{\partial x_N^t}{\partial z_N}$, $a_6 = \frac{\partial \dot{x}_N^t}{\partial z_N}$, $a_7 = \frac{\partial y_N^t}{\partial z_N}$ i $a_8 = \frac{\partial \dot{y}_N^t}{\partial z_N}$.

Les derivades a_1, \dots, a_8 s'han calculat utilitzant diferenciació numèrica.

3.7.2 Càlcul de l'aplicació de Poincaré i de la seva diferencial

Siguin $\vec{r}, \vec{r}_1, \dots, \vec{r}_k$ les coordenades eclíptiques amb origen el centre de masses del sistema solar del satèl·lit i dels cossos $1 \dots k$ del sistema solar. Incloent la falta de coherència del model i la pressió de radiació en les masses dels corresponents cossos, les equacions del moviment del satèl·lit les podem escriure com:

$$\ddot{\vec{r}} = - \sum_{i=1}^k Gm_i \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{d_i^3},$$

on m_i és la massa del cos i -èssim, G és la constant de gravitació i $d_i = |\vec{r} - \vec{r}_i|$.

L'aplicació de Poincaré la tenim expressada en coordenades normalitzades. Per tant donades unes condicions inicials $t, x, y = 0, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$, abans de poder-les integrar usant les equacions de Newton cal convertir el temps a dies i les posicions i velocitats a coordenades eclíptiques. Un cop fet això, la integració es duu a terme durant un temps una mica inferior al semiperíode de la part halo de l'òrbita quasiperiòdica analítica (passat a dies és clar), a partir de llavors a cada pas de la

integració numèrica realitzem el canvi de coordenades eclíptiques a normalitzades buscant un canvi de signe en el valor y per a trobar el tall amb la secció $y = 0$. Quan aquest canvi de signe s'ha detectat, apliquem el mètode de Newton amb $\Delta t = -y/\dot{y}$ per a obtenir el temps final, $\mathcal{P}_1(t, x, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$, per l'aplicació de Poincaré. En aquest moment, les altres variables $x, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ donen les altres cinc components de la imatge de l'aplicació de Poincaré.

Per a obtenir la diferencial, $D\mathcal{P}$, de l'aplicació de Poincaré, ens cal integrar les equacions variacionals simultàniament amb les equacions del moviment. Degut al fet que el sistema d'equacions diferencials és no autònom es tenen també variacions respecte del temps inicial, per a tenir un sistema autònom afegirem l'equació $\dot{t} = 1$.

Si notem per $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ les posicions i velocitats eclíptiques i per $\dot{x}_0 = 1$ a l'anterior equació $\dot{t} = 1$, tenim que el sistema d'equacions autonomitzades que regeixen el moviment són:

$$\begin{aligned}\dot{x}_0 &= 1, \\ \dot{x}_1 &= x_4, \\ \dot{x}_2 &= x_5, \\ \dot{x}_3 &= x_6, \\ \dot{x}_4 &= -\sum_{i=1}^k Gm_i \frac{x_1 - x_{i,1}}{d_i^3}, \\ \dot{x}_5 &= -\sum_{i=1}^k Gm_i \frac{x_2 - x_{i,2}}{d_i^3}, \\ \dot{x}_6 &= -\sum_{i=1}^k Gm_i \frac{x_3 - x_{i,3}}{d_i^3}.\end{aligned}$$

Tenim així que les equacions variacionals es poden escriure de la forma $\dot{V} = D \cdot V$, on V i D són matrius 7×7 i V s'inicialitza com la matriu identitat.

La matriu D té la següent estructura per blocs:

$$D = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & 1 & 0 & 0 \\ 0 & & \circ & 0 & 1 & 0 \\ 0 & & & 0 & 0 & 1 \\ \hline g_1 & h_{11} & h_{12} & h_{13} & 0 & 0 & 0 \\ g_2 & h_{21} & h_{22} & h_{23} & 0 & 0 & 0 \\ g_3 & h_{31} & h_{32} & h_{33} & 0 & 0 & 0 \end{array} \right),$$

on:

$$\begin{aligned} g_1 &= -\sum_{i=1}^k \frac{Gm_i}{d_i^3} \left(-x_{i,1} + \frac{3q_i(x_1 - x_{i,1})}{d_i^2} \right), \\ g_2 &= -\sum_{i=1}^k \frac{Gm_i}{d_i^3} \left(-x_{i,2} + \frac{3q_i(x_2 - x_{i,2})}{d_i^2} \right), \\ g_3 &= -\sum_{i=1}^k \frac{Gm_i}{d_i^3} \left(-x_{i,3} + \frac{3q_i(x_3 - x_{i,3})}{d_i^2} \right), \\ q_i &= (x_1 - x_{i,1})\dot{x}_{i,1} + (x_1 - x_{i,2})\dot{x}_{i,2} + (x_1 - x_{i,3})\dot{x}_{i,3}, \\ h_{11} &= -\sum_{i=1}^k \frac{Gm_i}{d_i^3} \left(1 - \frac{3(x_1 - x_{i,1})^2}{d_i^2} \right), \\ h_{12} &= -\sum_{i=1}^k \frac{Gm_i}{d_i^3} \left(-\frac{3(x_1 - x_{i,1})(x_2 - x_{i,2})}{d_i^2} \right), \\ h_{13} &= -\sum_{i=1}^k \frac{Gm_i}{d_i^3} \left(-\frac{3(x_1 - x_{i,1})(x_3 - x_{i,3})}{d_i^2} \right), \\ h_{21} &= h_{12}, \\ h_{22} &= -\sum_{i=1}^k \frac{Gm_i}{d_i^3} \left(1 - \frac{3(x_2 - x_{i,2})^2}{d_i^2} \right), \\ h_{23} &= -\sum_{i=1}^k \frac{Gm_i}{d_i^3} \left(-\frac{3(x_2 - x_{i,2})(x_3 - x_{i,3})}{d_i^2} \right), \\ h_{31} &= h_{13}, \\ h_{32} &= h_{23}, \\ h_{33} &= -\sum_{i=1}^k \frac{Gm_i}{d_i^3} \left(1 - \frac{3(x_3 - x_{i,3})^2}{d_i^2} \right). \end{aligned}$$

Així doncs, les equacions variacionals són 49, però per a la implementació pràctica podem tenir en compte que degut al fet que la primera fila de D es zero, tota la primera fila de les variables variacionals romandrà constant durant la integració. Podem així estalviar-nos d'integrar set equacions a més, naturalment, de la $\dot{t} = \dot{x}_0 = 1$. Tal com succeeix pel problema bicircular, sistema d'equacions variacionals que integrem és:

$$\begin{pmatrix} x_7 \\ x_8 \\ \dots \\ \dots \\ x_{12} \end{pmatrix} \cdot = \tilde{D} \begin{pmatrix} x_7 \\ x_8 \\ \dots \\ \dots \\ x_{12} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x_{13} & x_{19} & \dots & \dots & x_{43} \\ x_{14} & x_{20} & \dots & \dots & x_{44} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{18} & x_{24} & \dots & \dots & x_{48} \end{pmatrix} \cdot = \tilde{D} \begin{pmatrix} x_{13} & x_{19} & \dots & \dots & x_{43} \\ x_{14} & x_{20} & \dots & \dots & x_{44} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{18} & x_{24} & \dots & \dots & x_{48} \end{pmatrix},$$

on:

$$\tilde{D} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} & & & 1 & 0 & 0 \\ & \circ & & 0 & 1 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 \\ \hline h_{11} & h_{12} & h_{13} & 0 & 0 & 0 \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & 0 & 0 & 0 \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Les condicions inicials a prendre són $x_j = 0$ des de $j = 1$ fins 48 llevat $x_{13} = x_{20} = \dots = x_{48} = 1$.

Un cop hem acabat la integració de les equacions variacionals i tenim la matriu variacional V de l'òrbita podem fer dues coses:

1. Obtenir la diferencial de l'aplicació de Poincaré, \mathcal{P} , en coordenades normalitzades.
2. Obtenir, també en coordenades normalitzades, la matriu de les derivades parcials de $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}$ i \dot{z} al temps t_{i+1} respecte dels valors de $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}$ i \dot{z} al temps t_i . En el cas d'una òrbita halo això seria la matriu de monodromia.

El segon punt no el necessitem pel tir paral·lel, però és necessari si es volen calcular els factors de projecció numèrics.

Per a expressar la matriu 7×7 , V , en coordenades normalitzades, V_n , ens cal fer un canvi de variable $V_n = DT_2 \cdot V \cdot DT_1$, on DT_1 és la matriu diferencial de la transformació T_1 de variables normalitzades a eclíptiques,

$$T_1(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = (t_d, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6),$$

avaluada la punt inicial, i DT_2 és la diferencial de la transformació inversa, T_2 , avaluada al punt final,

$$T_2(\bar{t}, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4, \bar{x}_5, \bar{x}_6) = (\bar{t}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{\dot{x}}, \bar{\dot{y}}, \bar{\dot{z}}).$$

Les variables amb la barra a sobre indiquen les variables de la imatge per l'aplicació de Poincaré, i t_d indica el temps expressat en dies julians modificats respecte 1950.0 en lloc del temps en unitats adimensionals (o normalitzades).

Les diferencials DT_1 i DT_2 s'avaluen per diferenciació numèrica, usant fórmules de segon ordre respecte del pas h que s'ha pres igual a 10^{-6} .

Quan disposem de V_n , la matriu de variacionals que indiquem a 2) s'obté sencillament traient la primera fila i la primera columna que estan associades a la variable temps. Per a calcular la diferencial de l'aplicació de Poincaré que indiquem a 1) calen uns quants càlculs més. Per això posem:

$$V_n \begin{pmatrix} \Delta t \\ \Delta x \\ 0 \\ \Delta z \\ \Delta \dot{x} \\ \Delta \dot{y} \\ \Delta \dot{z} \end{pmatrix} + \delta t \begin{pmatrix} 1 \\ \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix}_f = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \end{pmatrix}.$$

El valor δt el deixem lliure a fi i efecte de tenir $c_2 = 0$.

Si notem per V_{nij} , $i, j = 0, \dots, 6$ a l'element (i, j) de la matriu V_n , aleshores δt es determina per l'equació:

$$V_{n20}\Delta t + V_{n21}\Delta x + V_{n23}\Delta z + V_{n24}\Delta \dot{x} + V_{n25}\Delta \dot{y} + V_{n26}\Delta \dot{z} + \delta t \cdot \dot{y} = 0.$$

Si llavors aquest valor de δt el substituïm a les expressions de c_0 , c_1, \dots, c_6 , obtenim:

$$\begin{aligned}
 c_0 &= V_{n00}\Delta t + V_{n01}\Delta x + V_{n03}\Delta z + V_{n04}\Delta \dot{x} + V_{n05}\Delta \dot{y} + V_{n06}\Delta \dot{z} - \\
 &\quad - \left(\frac{1}{\dot{y}}\right)_f (V_{n20}\Delta t + V_{n21}\Delta x + V_{n23}\Delta z + V_{n24}\Delta \dot{x} + V_{n25}\Delta \dot{y} + \\
 &\quad + V_{n26}\Delta \dot{z}) \\
 &= \left(V_{n00} - \frac{V_{n20}}{\dot{y}}\right)_f \Delta t + \dots + \left(V_{n06} - \frac{V_{n26}}{\dot{y}}\right)_f \Delta \dot{z}, \\
 \dots &\quad \dots \\
 c_6 &= V_{n60}\Delta t + V_{n61}\Delta x + V_{n63}\Delta z + V_{n64}\Delta \dot{x} + V_{n65}\Delta \dot{y} + V_{n66}\Delta \dot{z} - \\
 &\quad - \left(\frac{\ddot{z}}{\dot{y}}\right)_f (V_{n20}\Delta t + V_{n21}\Delta x + V_{n23}\Delta z + V_{n24}\Delta \dot{x} + V_{n25}\Delta \dot{y} + \\
 &\quad + V_{n26}\Delta \dot{z}) \\
 &= \left(V_{n60} - \frac{\ddot{z}V_{n20}}{\dot{y}}\right)_f \Delta t + \dots + \left(V_{n66} - \frac{\ddot{z}V_{n26}}{\dot{y}}\right)_f \Delta \dot{z}.
 \end{aligned}$$

les components de c_0, c_1, \dots, c_6 (mirats com a formes lineals) ens donen la matriu \mathcal{P} :

$$\begin{aligned}
 (D\mathcal{P})_{11} &= \left(V_{n00} - \frac{V_{n20}}{\dot{y}}\right)_f, \\
 \dots &\quad \dots \\
 (D\mathcal{P})_{66} &= \left(V_{n66} - \frac{\ddot{z}V_{n26}}{\dot{y}}\right)_f.
 \end{aligned}$$

3.7.3 Resultats numèrics

Utilitzant aquests algorismes, s'han calculat moltes òrbites quasiperiòdiques per a fer l'estudi de la transferència. Seguidament donem un exemple típic dels resultats que produeix el programa que calcula aquestes òrbites quasiperiòdiques numèriques.

Els resultats numèrics provenen del refinat d'una òrbita halo d'amplitud-z normalitzada $\beta = 0.08$ seguint les següents característiques:

- La secció del satel.lit dividida per la seva massa és $\text{SPCSM} = 0.01$. (Aquest

número té impòrtància per calcular la força deguda a la pressió de radiació solar sobre el satèl.lit).

- S'ha considerat tot el sistema solar, IPA=1 1 11 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 0 0.
- L'òrbita està calculada al sistema Terra+Lluna-Sol (ICO=2).
- L'amplitud-z normalitzada (ZO) és 0.08.
- L'època inicial, donada en dies julians modificats respecte 1950.0, en la qual comencem la integració numèrica és T0= 16587.0 (1-VI-1995).
- El nombre de mitges voltes (NIT) en les quals s'ha partit el tir paral.lel és 40 (l'òrbita està calculada per uns 10 anys).
- Els intervals de tir paral.lel corresponen a mitges voltes (NHR=1), es podrien haver fet també de volta sencera (NHR=2). Degut a la inestabilitat és molt millor utilitzar mitges voltes.
- El paràmetre β s'ha agafat amb el mateix signe que z_0 (IBETA=1) donant lloc a una òrbita de la classe 1. Es podria haver agafat amb signe canviat (IBETA=-1) i així obtindríem una òrbita de la classe 2.
- La cota pel màxim error a les equacions, utilitzat com a criteri de parada pel tir paral.lel és BOUND1= 2×10^{-9} .
- La cota per la màxima correcció, utilitzada com a criteri de parada en el procés de Newton del tir paral.lel és BOUND2= 3×10^{-10} .
- El nombre màxim d'iteracions permeses en el mètode de Newton és NUMIT= 12.
- El pas de diferenciació numèrica pel càlcul de la diferencial dels canvis de coordenades és EPS= 10^{-6} .

Amb aquests valors, el programa que calcula les òrbites quasiperiòdiques ha necessitat 6 iteracions per a obtenir-la. L'error final màxim a les equacions del tir paral·lel ha estat $2.8927 \cdot 10^{-10}$.

A les dues pàgines següents donem una part de la sortida. S'ha dividit en dos trossos. A la primera tenim les coordenades normalitzades de les interseccions de l'òrbita quasiperiòdica numèrica obtinguda amb la superfície de secció $y = 0$ (VECTOR XS). A la segona tenim les èpoques en les quals tenen lloc aquestes interseccions, en diferents unitats: normalitzades, dies julians modificats 1950.0 i dies del calendari.

La sortida del programa conté també les matrius de variacionals, que corresponen a cada interval del tir paral·lel, i que ens caldran per fer els càlculs de la transferència o del control si s'escaigués. Degut a que aquesta part és molt extensa hem decidit només incloure la part més rellevant a les taules 3.8 i 3.9. La sortida completa d'aquest mateix exemple es pot trobar a l'apèndix sota el nom `gqtps1.dat`.

Finalment, la figures 3.43 3.44 i 3.45 mostren les projeccions de l'òrbita quasiperiòdica obtinguda en els diferents plans coordenats en coordenades normalitzades.

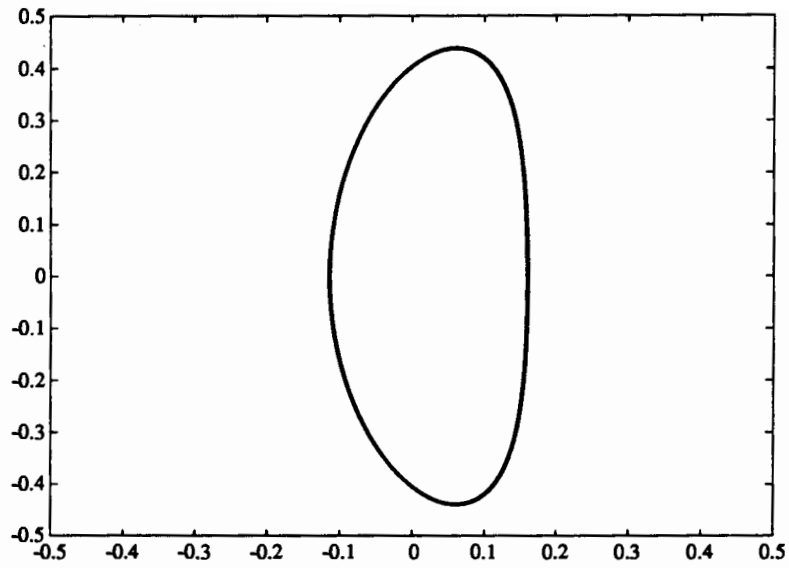


Figura 3.43. Projecció XY en coordenades normalitzades de l'òrbita quasiperiòdica obtinguda.

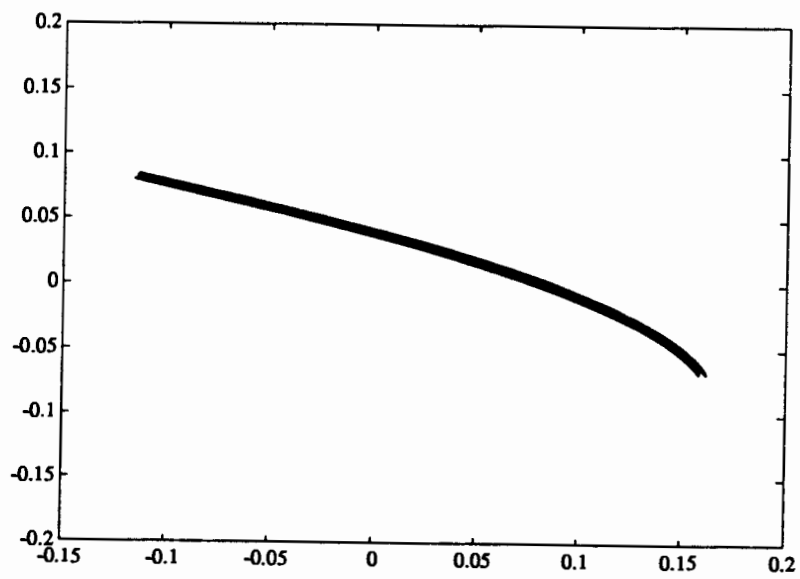


Figura 3.44. Projecció XZ en coordenades normalitzades de l'òrbita quasiperiòdica obtinguda.

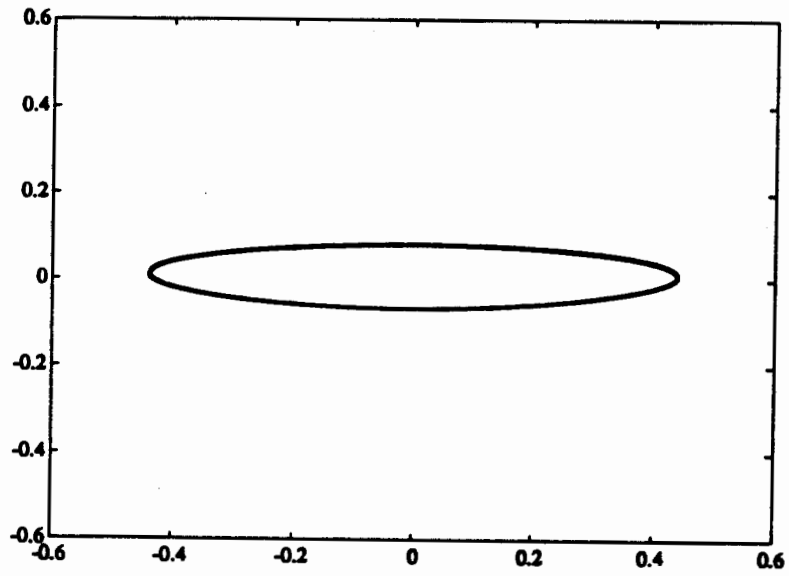


Figura 3.45. Projectió YZ en coordenades normalitzades de l'òrbita quasiperiòdica obtinguda.

3.8 Transferència des de la Terra a una òrbita halo en el sistema solar real

Dins aquesta secció descriurem com s'ha implementat el software que calcula les òrbites de transferència des de la Terra fins a una òrbita halo situada entre la Terra i el Sol, utilitzant el model de sistema solar donat per les efemèrides del JPL comentades a la secció (1.3.3). En essència el mètode ja ha estat descrit a les seccions (3.4.3) i (3.6.3), ara però, interessa aplicar-lo al cas real i obtenir resultats de tipus pràctic.

Per motius d'eficiència, el mètode que hem proposat l'hem partit i implementat seguint varis passos. D'aquesta manera, si és necessari, l'usuari pot tornar enrera sense necessitat de refer tots els càlculs des del principi.

Els passos del mètode són els següents:

- Obtenir les òrbites halo quasiperiòdiques del sistema solar que volem explorar. Aquest punt l'hem descrit a la secció (3.7).
- Obtenir l'aproximació local de la varietat estable prop de les òrbites quasiperiòdiques seleccionades.
- Globalitzar mitjançant integració numèrica la varietat estable a partir de l'aproximació local obtinguda en l'apartat anterior.
- Explorar la varietat obtinguda, buscant les passades que té prop de la Terra.
- Obtenir, a partir de la recerca del pas anterior, els rangs de la varietat que poden servir per a la transferència.
- Estudiar les característiques de les òrbites que estan contingudes en els rangs que hem calculat en el punt anterior.

3.8.1 Aproximació local de la varietat estable

El que anem a fer en aquesta secció és calcular l'aproximació lineal de la varietat estable de l'òrbita halo quasiperiòdica.

Sabem que si una òrbita és periòdica, els vectors propis de la matriu variacional calculada sobre un període de l'òrbita, així és la matriu de monodromia, donen les direccions dels espais tangents a les varietats invariants en el punt inicial. Vista des del sistema de coordenades adimensional normalitzat, la nostra òrbita no és periòdica sinó que és quasiperiòdica amb petites desviacions respecte de l'òrbita periòdica halo que tindriem en el problema restringit. Per tant, en aquest sistema de referència, el vector propi associat al valor propi de mòdul mínim de la matriu variacional calculada al llarg d'una revolució (dues passades successives pel pla $y = 0$ en coordenades adimensionals), aproxima bastant bé la direcció estable quan l'òrbita talla a $y = 0$.

Com que volem utilitzar les òrbites calculades a la secció (3.7) com a òrbites nominals per a una missió que durarà un cert interval de temps, pel que refereix a la transferència, estem interessats en la varietat estable associada a les revolucions inicials. Degut a les possibles deformacions, que es poden produir en la varietat com a conseqüència de les condicions de contorn que imposem en el càlcul de l'òrbita en el tir paral·lel, la primera revolució és rebutjada i calcularem la varietat estable des del començament de la segona⁶. Des d'aquest punt calcularem les direccions estables en un conjunt de punts de l'òrbita halo que normalment els agafarem equiespaiats dins la revolució⁷. Això ho farem de la següent manera.

A diferència del que fèiem pel cas bicircular, en lloc de calcular la direcció estable associada a la revolució seleccionada, utilitzant la seva matriu variacional associada, i a fi d'evitar les petites discontinuïtats que apareixen en la direcció estable al passar d'una revolució a la següent, la matriu variacional \bar{A} associada a tota l'òrbita quasiperiòdica l'hem agafada com a matriu de monodromia. Recordem que la ma-

⁶Aixó com veurem en els resultats que presentem es correspon amb el fet que agafem $NVO = 3$, la qual cosa significa que comencem el càlcul de la varietat estable en el tercer tall de l'òrbita amb $y = 0$.

⁷En els nostres càlculs el nombre de punts que normalment agafem és de 250.

triu \bar{A} és una matriu 7×7 ja que el temps va ser afegit a les equacions del moviment a fi i efecte de tenir un sistema autònom. Així doncs la forma de la matriu \bar{A} és:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{c|cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline g_1 & & & & & & \\ g_2 & & & & & & \\ g_3 & & & A & & & \\ g_4 & & & & & & \\ g_5 & & & & & & \\ g_6 & & & & & & \end{array} \right),$$

on A es la submatriu de la matriu \bar{A} associada a les posicions i velocitats. Notem que si v és un vector propi de la matriu A , llavors $(0, v)$ és un vector propi de \bar{A} . Calcularem així les direccions estables a partir de la matriu 6×6 A .

Suposem que A_i és la matriu 6×6 associada a posicions i velocitats d'una certa matriu variacional \bar{A}_i corresponent a la i -èssima revolució d'una òrbita halo quasiperiòdica numèrica formada per N revolucions. Aleshores tindrem:

$$A = A_N \times A_{N-1} \times \dots \times A_1.$$

Degut als possibles "overflows" i errors d'arrodoniment a l'hora de calcular el valor propi mínim de la matriu A , tot això pel fet que el valor propi de cada A_i associat a la component inestable és de l'ordre de 1700, el producte de matrius anterior no es pot fer.

Utilitzant el mètode de la potència aplicat a la matriu

$$A^{-1} = A_1^{-1} \times A_2^{-1} \times \dots \times A_N^{-1},$$

podem calcular el vector propi v_1 de la matriu A associat a la varietat estable. Un cop fet això, les direccions pròpies al començament de cada j -èssima revolució les calculem mitjançant:

$$v_j = \frac{A_j^{-1} v_{j+1}}{|A_j^{-1} v_{j+1}|}, \quad j = N, \dots, 2,$$

on $v_{N-1} = v_1$. La "contracció"⁸ corresponent a la direcció estable associada a la j -èssima revolució és:

$$\delta_j = |A_j^{-1} v_{j+1}|^{-1}.$$

⁸Valor propi en el cas d'òrbita periòdica.

Quan tenim la direcció de la varietat estable al començament de cada revolució, podem obtenir la direcció estable a qualsevol punt intermig de la revolució transportant aquest vector mitjançant la matriu 6×6 corresponent a les coordenades de posició i velocitat de la diferencial de flux. Es a dir, si $v_j(t_0) = v_j$ és el vector inicial al temps t_0 , tenim

$$v_j(t) = A_j(t)v_j(t_0),$$

on $A_j(t) = Id$.

Essencialment aquesta és la manera en que obtenim les direccions estables. Donat el vector $v_j(t_0)$ en coordenades normalitzades, corresponent a la direcció estable en el punt inicial $p_j(t_0)$ d'una certa revolució a l'espai de fases en coordenades normalitzades, convertim el punt $p_j(t_0)$ a coordenades eclíptiques, alhora que calculem la matriu diferencial, D_{ne} , del canvi de variables de normalitzades a eclíptiques en el temps t_0 . Tenim així que la direcció estable en coordenades eclíptiques, $v_j^e(t_0)$, en el punt imatge, $p_j^e(t)$, es calcula mitjançant

$$v_j^e(t_0) = D_{ne}v_j(t_0).$$

D'ara en endavant, tots els càlculs els farem en coordenades eclíptiques.

La diferencial del flux, $D_j(t)$, la tenim per la integració de les equacions variacionals que hem adjuntat a les equacions del moviment. Per tant la direcció estable en coordenades eclíptiques a qualsevol punt de la revolució seleccionada es pot obtenir per

$$v_j^e(t) = D_j(t)v_j^e(t_0).$$

Les principals dades de la sortida d'aquest estudi són $v_j^e(t)$ a diferents punts de l'òrbita quasiperiòdica. Els hem escalat de manera que el vector format per les tres primeres components d'aquests vectors, corresponents a les posicions, tinguin norma euclídea igual a u. Per tant el que escrivim és:

$$\bar{v}_j^e(t) = \frac{v_j^e(t)}{\sqrt{(v_j^e)_x^2 + (v_j^e)_y^2 + (v_j^e)_z^2}}.$$

D'aquesta manera, si volem agafar condicions inicials a una distància física seleccionada del punt $p_j^e(t)$ que es troba a l'òrbita quasiperiòdica, només ens cal multiplicar $\bar{v}_j^e(t)$ per la distància seleccionada mesurada en kilòmetres i amb el signe adequat.

Exemples de resultats

Partint d'una òrbita quasiperiòdica calculada tal com dèiem a la secció (3.7), la taula 3.10 mostra una part dels resultats obtinguts. Els resultats complets corresponents a aquest cas poden trobar-se a l'apèndix sota el nom de `vecws1.dat`.

Les dades que apareixen a l'arxiu de resultats es corresponen amb:

- El nom de l'arxiu que conté l'òrbita o òrbites quasiperiòdiques analitzades: `gqtps1.dat`.
- Els paràmetres que defineixen el model de sistema solar i el valor de la secció del satèl·lit dividida per la seva massa: IPA, ICO i SPCSM. Per coherència, aquests valors haurien de ser els mateixos que s'han fet servir pel càlcul de l'òrbita quasiperiòdica.
- El valor que apareix a la línia que segueix a SPCSM indica el següent: Si val 1 s'ha arribat al final de l'arxiu, si val zero per sota d'ell l'arxiu conté informació d'una altra varietat estable d'una òrbita quasiperiòdica. És un indicador que utilitzen els programes que llegeixen aquest arxiu.
- Les dues línies següents contenen informació general dels càlculs realitzats.

L'òrbita quasiperiòdica té una amplitud-z normalitzada $Z0 = 0.08$, i l'època inicial del refinament numèric que s'ha agafat és $T0 = 16587$.

$NVO = 3$ indica que la revolució seleccionada pel càlcul de les direccions estables ha estat la segona. L'òrbita quasiperiòdica està formada per un cert nombre de mitges revolucions, i en aquest exemple les dues primeres han estat descartades.

La segona revolució dura 175.716... dies, i el factor de compressió de la direcció estable al llarg d'aquesta revolució és 0.0005890...

El nombre de punts, NPT, que s'han agafat al llarg de la segona revolució per a calcular les direccions estables són 250.

L'interval de temps entre dos dels punts d'abans, igualment espaiats respecte al temps en l'òrbita quasiperiòdica, és DDIA= 0.702864...

- Les següents línies s'han d'anar considerant en grups de tres. A la primera línia de cada grup hi apareix el dia julià modificat i la component del vector direcció estable associada amb el temps, aquesta darrera sempre és zero ja que utilitzem la matriu de variacionals per a fer els càlculs.

La segona línia dona la posició i velocitat, en coordenades eclíptiques (km i km/dia), del punt de l'òrbita quasiperiòdica corresponent a l'època que apareix a la primera línia.

La tercera línia conté les coordenades de la direcció estable associades amb les posicions i velocitats. Estan donades en coordenades eclíptiques i escalades de tal manera que la norma euclídea del vector format per les seves tres primeres components és u.

A l'exemple només donem els 10 primers grups d'un total de 251 (el zero s'ha també d'incloure).

3.8.2 Globalització de la varietat

Un cop disposem dels punts i de les seves direccions estables associades que hem calculat a l'apartat anterior, globalitzarem la varietat estable a partir de tots els punts, o d'una part d'ells.

Donat un desplaçament en kilòmetres, D , del punt de l'òrbita seleccionat en la direcció que dóna el vector de la varietat estable, que produeix apropaments a la Terra quan integrem temps enrera, i tenint en compte que les direccions estables les tenim en coordenades eclíptiques, escalades tal com diem a la secció anterior, les condicions inicials, X_{ws}^0 , en coordenades eclíptiques sobre l'aproximació lineal de la varietat estable les obtindrem mitjançant:

$$X_{ws}^0 = X_{qpo} + D \cdot V_{ws},$$

on X_{qpo} és el punt seleccionat sobre l'òrbita quasiperiòdica i V_{ws} és la direcció estable escalada en aquest punt. Tot en coordenades eclíptiques.

Cal notar que la magnitud D no pot ser massa petita, en valor absolut, a fi de prevenir els errors d'arrodoniment i més llargs intervals de temps d'integració al globalitzar la varietat. Tampoc pot ser massa gran ja que l'aproximació lineal és bona prop del punt X_{qpo} . Hem fet varies proves per a escollir aquest valor. Malgrat el fet que el caràcter atractiu de la varietat vers l'òrbita quasiperiòdica es posava de manifest per a valors de D prou grans, tenint també en compte els temps d'integració per a la globalització de la varietat, els valors al voltant de 200 o 250 km són els aconsellables. En els nostres càlculs hem agafat $D = 200$. Aixó vol dir que quan diem que arribem a l'òrbita quasiperiòdica volem dir que estem a 200 km del punt nominal X_{qpo} que es troba sobre l'òrbita quasiperiòdica. Recordem que arribar a l'òrbita en principi no té sentit degut al comportament asimptòtic de la varietat.

Un cop tenim X_{ws}^0 , el que hem de fer és integrar aquesta condició inicial temps enrera fins trobar un mínim local prop de la Terra. En aquest procés, degut principalment a les col·lisions o passades molt properes a la Lluna i a la gran mida de la varietat, l'algorisme ha de tenir en compte alguns problemes que es poden presentar durant la integració.

Respecte a les òrbites que passen prop de la Terra, en les quals estem interessats, la integració es para quan arribem a una distància inferior als 6000 km del centre de la Terra. Es podria haver utilitzar el radi de la Terra com a criteri de parada, però un valor una mica inferior és millor pels programes que realitzen els càlculs següents.

Si l'òrbita no col·lisiona amb la Terra, s'utilitza un procés de Newton per a obtenir la mínima distància a la Terra buscant un zero de la funció

$$F(t) = \vec{r}_E(t) \cdot \dot{\vec{r}}_E(t),$$

on $\vec{r}_E(t)$ és el vector posició del satèl·lit respecte de la Terra a l'època t . Si el mínim és proper a la Terra (menor que 100000 km en els nostres càlculs), i durant la integració numèrica la distància de l'òrbita a la Lluna ha estat menor que una certa quantitat (100000 km en els nostres càlculs), un altre procés de Newton s'engega per a calcular la mínima distància a la Lluna. Com punt inicial del procediment, s'utilitza el valor trobat durant la integració.

Exemple de resultats

A partir de les direccions estables obtingudes en la secció anterior, es produeix un arxiu de resultats que parcialment podem veure a la taula 3.11 (el resultats complets poden trobar-se a l'apèndix amb el nom de `estws11.dat`). Les dades que conté són les següents:

- El nom de l'arxiu que conté les direccions estables: `vecsws1.dat`.
- Els paràmetres que defineixen el model de sistema solar i el valor de la secció del satèl·lit dividida per la seva massa: `IPA`, `ICO` i `SPCSM`. Per coherència, aquests valors haurien de ser els mateixos que s'han fet servir pel càlcul de l'òrbita quasiperiòdica.
- El valor que apareix a la línia següent a `SPCSM` té el mateix significat que a la secció (3.8.1).

- La següent línia conté informació general sobre els càlculs.

L'òrbita quasiperiòdica correspon a una amb amplitud-z normalitzada $Z0 = 0.08$, i l'època inicial de seu refinament numèric és el dia julià modificat 1950.0
 $T0 = 16587$.

$NV0 = 3$ indica que la revolució seleccionada pels càlculs ha estat la segona.

$NC1$, $NC2$ indiquen el rang de punts de l'òrbita quasiperiòdica que s'han estudiat desplaçant les condicions inicials al llarg de la direcció estable 200 km,
 $DESP = 200$.

- Les següents línies s'han de considerar agrupades en grups de quatre, numerades des de $NC1$ a $NC2$.

A la primera línia hi apareix un indicador que prové de la rutina que dona la mínima distància a la Terra i tres èpoques mesurades en dies julians modificats 1950.0, es corresponen amb el moment de sortida de l'òrbita quasiperiòdica (la integració es fa temps enrera), i al moment de mínima distància a la Lluna i a la Terra respectivament. Els dos darrers valors d'aquesta línia donen les mínimes distàncies del satèl.lit a la Lluna i a la Terra (les dues en km).

A cada una de les altres tres línies es donen posicions i velocitats en coordenades eclíptiques. Corresponen respectivament a les èpoques donades a la primera línia de cada grup.

A l'exemple que posem només hi ha els 5 primers grups.

A la figura 3.46 presentem la gràfica de les distàncies de la varietat estable a la Terra, mesurada en km, per les diferents òrbites de la part de varietat estable corresponent a la revolució $NV0 = 3$ d'una òrbita quasiperiòdica. Com veiem el comportament és essencialment el mateix que s'obté pel problema bicircular (figura 3.19), de la mateixa manera, en el cas real quan es varia el paràmetre $T0$ s'observen

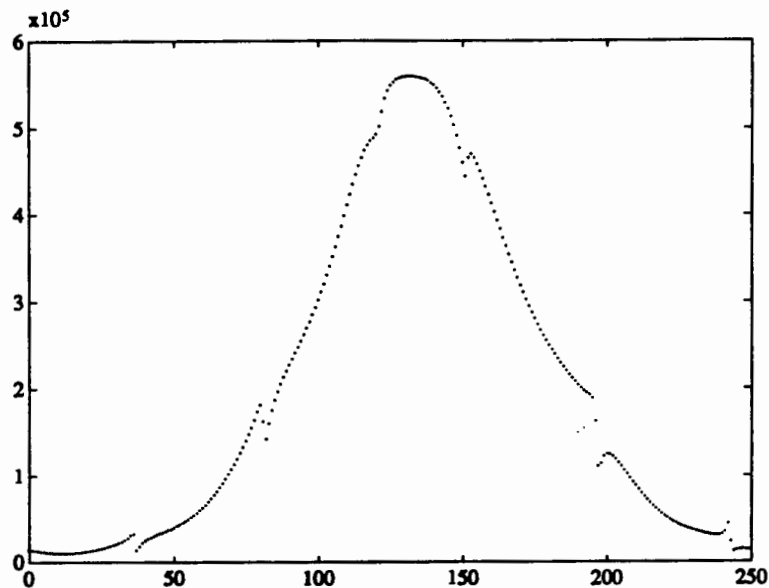


Figura 3.46. Distància de la varietat estable (km) a la Terra per les òrbites de la part de varietat estable corresponent a la segona revolució d'una òrbita halo quasiperiòdica del sistema solar real i d'amplitud $\beta = 0.08$. Les abscisses van de 0 a 250 i indiquen les òrbites preses sobre la varietat.

3.8.3 Selecció de passades prop de la Terra

Aquest pas constitueix una primera selecció dels mínims que presenta la gràfica de mínima distància de les òrbites de la varietat a la Terra. L'objectiu és una senzilla i alhora bona aproximació de l'adequació d'aquests mínims seleccionant-los de la gran quantitat d'informació que produïm a l'apartat anterior. Al mateix temps preparem les dades per a nous càlculs.

En principi tots els mínims locals de la gràfica de la varietat per sota d'un cert valor, donat en kilòmetres des del centre de la Terra⁹, són considerats i processats de la següent manera.

La varietat estable és una varietat dos dimensional que la podem parametritzar de la següent manera. Un cop el desplaçament D està seleccionat, un punt X_{qpo} de l'òrbita halo dona una condició inicial mitjançant la relació (3.8.2). Seguint el flux

⁹En els nostres càlculs hem agafat 100000 km.

endavant o enrera respecte el temps, obtenim tots els punts de la varietat associats a X_{qpo} i que estan a la part de la varietat que dona apropaments a la Terra. Així doncs podem pensar que X_{qpo} és un dels paràmetres que genera la varietat. Li direm el paràmetre al llarg de l'òrbita. L'altre paràmetre que ens falta és el temps emprat $t - t_0$ per anar de la condició inicial X_{ws}^0 al temps t_0 al punt X_{ws} en el moment t seguint el flux. A aquest paràmetre li direm el paràmetre al llarg del flux.

Notem que aquesta parametrització depèn de l'elecció de D i de la manera en que s'han escalat les direccions estables. Si les direccions estables les mantenim fixes, escalades com fins ara, un petit canvi en D produeix un efecte equivalent a un petit canvi del paràmetre al llarg de l'òrbita. És a dir, per mitjà d'un petit canvi en D podem obtenir les mateixes òrbites de la varietat que amb un petit canvi de X_{qpo} . Solament observariem un petit desplaçament del paràmetre al llarg del flux.

Com que en el nostre algorisme aturem la integració numèrica quan trobem un mínim de la distància de l'òrbita a la Terra, la globalització de la varietat que obtenim és, de fet, uniparamètrica. La gràfica de distàncies mínimes és una corba que depèn només del paràmetre al llarg del flux.

Suposem que u_n és un cert punt X_{qpo}^0 que porta associat un mínim en la gràfica de mínimes distàncies físiques de la varietat a la Terra. Degut a la discretització que hem fet, el punt u_n no es correspon exactament amb el valor del paràmetre al llarg de l'òrbita que dona la distància mínima (aquest estarà comprès entre u_{n-1} i u_{n+1}), i més endavant ens cal saber aquest valor exacte.

És clar que si volem calcular aquest valor exactament, podríem començar de nou els càlculs de l'aproximació de la varietat estable local prop de u_n , i per un procés iteratiu podríem anar refinant el paràmetre al llarg de l'òrbita fins aconseguir el mínim. Però en lloc de fer això, és millor, per simplicitat i rapidesa, que modifiquem el paràmetre al llarg de l'òrbita i mantinguem fix u_n i variem D . Obtenim així el mínim que està proper a u_n amb un procés iteratiu sobre D .

A la secció (3.8.2) diem que arribar a l'òrbita halo voldria dir arribar a $|D|$ kilòmetres del punt on s'ha calculat la direcció estable. Això no serà del tot exacte, però de qualsevol manera les variacions de D són molt petites si la discretització té

un nombre raonable de punts, i per a propòsits pràctics és indistingible.

La gràfica de la varietat pot estar molt blegada i amb algunes discontinuïtats degut a passades pròximes i col·lisions amb la Lluna. És necessari obtenir l'interval de paràmetre al llarg de l'òrbita, D , en el qual tenim localitzat el mínim local per a tal que els càlculs posteriors ja es puguin realitzar sobre aquest interval. Això ho farem de la següent manera.

Sigui D_n el valor del desplaçament D amb el qual hem globalitzat la varietat. Siguin v_{n-1} , v_n i v_{n+1} les direccions estables calculades a u_{n-1} , u_n i u_{n+1} respectivament. D'acord amb (3.8.2) tenim:

$$w_{n-1} = u_{n-1} + D_n v_{n-1} \quad \text{i} \quad w_{n+1} = u_{n+1} + D_n v_{n+1}.$$

Sabem que u_{n-1} , u_n i u_{n+1} són punts que estan sobre l'òrbita halo i que el flux va des de u_{n-1} a u_{n+1} quan el temps augmenta. Per a transformar aquests valors en els seus equivalents respecte del paràmetre D , agafem w_{n-1} i integrem aquesta condició inicial fins que talli la direcció $u_n + \lambda v_n$ per un cert valor de λ . Llavors el valor D_{n-1} és igual al valor de λ . D_{n+1} es calcula d'una manera semblant però integrant temps enrera. (Veure la figura 3.47).

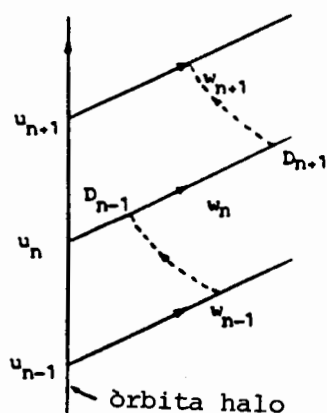


Figura 3.47. Canvi del paràmetre al llarg de l'òrbita.

Exemples de resultats

A la taula 3.12 donem una part del l'arxiu de resultats que es genera durant aquest procés. Un arxiu molt més complet corresponent a tot un interval d'èpoques T_0 pot trobar-se a l'apèndix sota el nom de `selws1.dat`. En ell hi trobem:

- Els noms dels arxius que s'han fet servir i que contenien l'aproximació local i la globalització de la varietat estable: `vecsws1.dat` i `estws11.dat` respectivament.
- Els paràmetres que defineixen el model de sistema solar i el paràmetre secció del satèl·lit dividida per la massa: `IPA`, `IC0`, i `SPCSM`. Per coherència, aquests valors haurien de coincidir amb els utilitzats en els càlculs anteriors.
- El zero que apareix sota `SPCSM` té el mateix significat que en els arxius anteriors.
- La següent línia conté informació general dels càlculs realitzats.

L'òrbita quasiperiòdica té una amplitud-z normalitzada $Z_0 = 0.08$, i l'època inicial del seu refinat numèric ha estat el dia julià modificat $1950.0 T_0 = 16587$.

Com en els arxius anteriors $NV_0 = 3$ indica que la revolució seleccionada pels càlculs és la segona.

`NC1`, `NC2` indica el rang de punts de l'arxiu `estws11.dat` que s'han explorat. El valor de desplaçament al llarg de la direcció estable és $DESP = 200$ km. Tal com era al generar l'arxiu `estws11.dat`.

`RTOL` és la cota que s'utilitza per a seleccionar els mínims de la varietat.

`NTR` és el nombre de mínims que s'han trobat.

`MAR` és un índex que permet realitzar canvis manuals a l'arxiu de resultats (veure [10]).

- Les següents línies s'han de considerar agrupades de dues en dues, numerats aquests grups des de 1 fins a `NTR`.

A la primera línia el primer enter es l'índex del punt corresponent a l'arxiu `estws11.dat`. Els següents dos nombres són les distàncies a la Lluna i a la Terra donades en km. Les tres dates de calendari que venen a continuació corresponen a l'època d'arribada a l'òrbita halo i a les èpoques en que s'ha tingut la mínima distància a la Lluna i a la Terra respectivament. Pot succeir, i de fet en alguns cassos passa, que les dues darreres èpoques siguin gairebé la mateixa. Això depèn de la situació de la Lluna en el moment que assolim la mínima distància a la Terra.

A la segona línia dels grups, els tres primers valors són els valors del paràmetre al llarg de l'òrbita, mesurat en el sentit de la direcció estable (paràmetre D), que defineix l'interval que conté la mínima distància a la Terra. Els darrers tres que queden són les corresponents distàncies a la Terra que es donen pels valors d'aquests paràmetres.

```

OUTPUT OF PROGRAM SELMS
If this file comes from program REFIN2 the variables MC2 and DESP are meaningless
If a manual change of the displacements is done, you must change the var. MAR according to IND
of routine MOTWSQ
INPUT FILES (OUTPUT OF PROGRAMS VECSMS AND ESTWS1): vecsws1.dat, estws1.dat
SPCSM- .10000000000E-01 IPA- 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 0 0 ICO- 2
EO-
0 .080000 TO- 16587.00000 NVO- 3 MC1- 0 MC2-250 DESP- 200.000 RTOL-100000.000 NTR- 5 MAR- 0
1 10 361174.285 11080.439 4.59-DES-1995 12.23-MAI-1995 12.23-MAI-1995 .111572355189E+05
1 .194300805609E+03 .20000000000E+03 .205935574332E+03 110800286972E+05 .110804394672E+05 .111572355189E+05
2 31 84528.700 14550.662 19.35-DES-1995 27.94-MAI-1995 25.64-MAI-1995 .166948398513E+05
2 .194461532603E+03 .20000000000E+03 .205759749881E+03 .177671630640E+05 .145506616514E+05 .166948398513E+05
3 72 72806.095 99156.134 17.17-GEN-1996 21.59-JUN-1995 18.55-JUN-1995 .114988892661E+06
3 .194483394618E+03 .20000000000E+03 .205776310617E+03 .123088301684E+06 .991561343137E+05 .114988892661E+06
4 230 181250.325 46974.104 7.22-MAI-1996 23.26-OCT-1995 19.51-OCT-1995 .469741044728E+05
4 .194224493588E+03 .20000000000E+03 .205942056417E+03 476282331465E+05 .469741044728E+05 .471197974987E+05
5 235 50459.782 17020.828 10.74-MAI-1996 24.91-OCT-1995 22.79-OCT-1995 .233260844425E+05
5 .194241982924E+03 .20000000000E+03 .205825575194E+03 .513442055243E+05 .170208280272E+05 .233260844425E+05
1

```

Taula 3.12. Resultats parcials corresponents a la selecció.

3.8.4 Interval·s de la varietat adequats per la transferència

El propòsit d'aquesta secció és obtenir els rangs de paràmetres al llarg de l'òrbita que poden ser adequats per a realitzar la transferència.

En primer lloc, tots els mínims locals que han estat seleccionats a la secció anterior són refinats usant un procés iteratiu amb interpolació quadràtica i agafant els valors de D_{n-1} , D_n i D_{n+1} , obtinguts en la secció anterior, com a punts inicials. Aquest procés iteratiu, al final ens donarà el valor del desplaçament D_m , en el sentit de la direcció estable, associada al punt u_n de l'òrbita halo, que correspon a un mínim local en la gràfica de la distància de la varietat a la Terra.

Un cop es tenen els mínims locals, escollim una distància més propera a la Terra, H_o , (en els nostres càlculs hem pres 7000 km), i seleccionem només els mínims trobats que estan per sota d'aquesta distància. Per a tots ells, calculem l'interval (D_l^o, D_r^o) , respecte del paràmetre D i contenint D_m de tal manera que D_l^o i D_r^o són els desplaçaments en el sentit de la direcció estable que aplicats a u_n dona les òrbites de la varietat estable que tenen com a mínima distància local a la Terra exactament el valor H_o kilòmetres.

En principi, totes les òrbites de l'interval (D_l^o, D_r^o) podrien ser adequades per a aconseguir la transferència, però degut al fet que la sortida des d'una òrbita geoestacionària de transferència és millor fer-la ortogonalment a una línia que contingui un radi de la Terra, la inserció del satèl·lit en l'òrbita de la varietat estable s'ha de fer just quan aquesta presenta el mínim local de distància a la Terra. Així doncs, si aquest mínim es presenta per sota una determinada alçada caldrà descartar l'òrbita.

Per a aquest segon propòsit, fixem una distància mínima al centre de la Terra, H_i , (en els nostres càlculs usualment hem pres el valor de 6400 km) i calculem D_l^i i D_r^i de la mateixa manera que hem calculat D_l^o i D_r^o . Obtenim així un altre interval (D_l^i, D_r^i) ¹⁰ que cal treure de (D_l^o, D_r^o) . Els intervals que obtenim, (D_l^o, D_l^i) i (D_r^i, D_r^o) , quan (D_l^i, D_r^i) és diferent del buit, o (D_l^o, D_r^o) , quan (D_l^i, D_r^i) es buit, ens dona els rangs de la varietat, en termes del paràmetre al llarg de l'òrbita, que són adequats

¹⁰Aquest interval és buit si H_i és menor que la mínima distància que dona D_m .

per la transferència.

Exemples de resultats

Amb les dades calculades anteriorment, el programa que refina els mínims produeix un arxiu el contingut del qual pot trobar-se parcialment a la taula 3.13. Una part més extensa d'aquest arxiu es pot veure a l'apèndix sota el nom de `afmin1.dat`. En ell hi trobem:

- El noms dels arxius que contenen les dades de processos anteriors. L'arxiu de l'aproximació local de la varietat estable, `vecsws1.dat`, i l'arxiu que conté la primera selecció de mínims, `selws1.dat`.
- Els paràmetres que defineixen el model de sistema solar utilitzat i el valor de la secció del satèl·lit dividit per la seva massa, `IPA`, `ICO` i `SPCSM` que per coherència cal pendre'ls iguals que en els càlculs precedents.
- El zero que apareix per sota de `SPCSM` té el mateix significat que en els arxius de resultats anteriors.
- La següent línia conté informació general relativa als càlculs.

L'òrbita quasiperiòdica que de la qual s'estudia la varietat té una amplitud-z normalitzada $Z0 = 0.08$, i l'època inicial del seu refinament numèric mesurada en dies julians modificats 1950.0 és $T0 = 16587$.

Com a les seccions anteriors $NVO = 3$ indica que la revolució seleccionada pels càlculs és la segona.

`MAR` és un indicador de lectura pel programa que vindrà a continuació i permet fer canvis manuals a l'arxiu (veure [10]).

- Les següents línies s'han de considerar agrupades en grups de vuit i cada grup numerat des de 1 fins a `NTR`.

A la primera línia apareix un indicador que prové de la rutina que calcula la mínima distància a la Terra. L'enter que segueix indica el punt de l'arxiu

`estws11.dat`, que conté la globalització de la varietat, a partir del qual s'ha refinat el mínim. Els tres següents nombres són les èpoques (mesurades en dies julians modificats 1950.0) corresponents a: arribada a l'òrbita halo, moment de mínima distància a la Lluna i moment de mínima distància a la Terra respectivament. Els dos darrers nombres de la línia són els valors corresponents a les mínimes distàncies de l'òrbita a la Lluna i la Terra respectivament, mesurades en kilòmetres.

A la segona línia, els tres primers nombres donen el darrer interval segons el paràmetre al llarg de l'òrbita que s'ha tractat en el procés iteratiu. D'aquests valors, el segon és el corresponent al mínim. Els tres darrers valors de la línia són les distàncies a la Terra assolides pels tres paràmetres anteriors respectivament.

A les següents tres línies apareixen les posicions i velocitats en coordenades eclíptiques (km i km/dia) associades respectivament a les tres èpoques donades a la primera línia.

Finalment, les tres darreres línies venen copiades de l'arxiu `vecsws1.dat`. Donen, l'època, posició i velocitat sobre l'òrbita halo i la direcció estable en aquell punt. Tot aixó es correspon amb el punt indexat a la primera línia. L'objectiu d'aixó és no haver d'utilitzar més en els càlculs següents l'arxiu `vecsws1.dat` que té una mida considerable.

Un cop es tenen calculats els mínims, es passen a calcular els intervals del paràmetre al llarg de l'òrbita que donen els rangs de la varietat que poden ser aptes per la transferència. Resultats parcials els podem veure a la taula 3.14 (resultats més extensos estan a l'apèndix sota el nom de `inter11.dat` i `inter21.dat`) i contenen la següent informació:

- El nom de l'arxiu que conté els mínims calculats anteriorment, `afmin1.dat`.
- Els paràmetres que defineixen el model de sistema solar i el valor de la secció del satèl·lit dividida per la seva massa, `IPA`, `ICO` i `SPCSM`, que per coherència haurien de ser els mateixos que en els arxius anteriors.
- L'alçada geocèntrica, mesurada en kilòmetres, que dóna l'interval de la varietat que serà considerat. Les òrbites de la varietat que no passin per sota aquesta alçada seran desestimades. El valor que s'ha pres a l'exemple, `RACT`, és 7000 km.
- El zero que apareix per sota la línia que conté la informació anterior té el mateix significat que en els arxius de resultats anteriors.
- La següent línia conté informació general relativa als càlculs.

L'òrbita halo de la qual estudiem la seva varietat estable té una amplitud-z normalitzada $Z0 = 0.08$ i l'època inicial del refinament numèric en dies julians modificats 1950.0 és $T0 = 16587$.

Com en els arxius anteriors `NVO = 3` indica que la revolució seleccionada pels càlculs és la segona.

`NTR` és el nombre d'intervals que s'han trobat.

- Les següents línies s'han de considerar agrupades de quatre en quatre, numerats els grups des de 1 fins `NTR`.

A la primera línia en primer lloc apareix un indicador procedent del càlcul de l'interval. El següent enter assenyalava el punt de l'arxiu `afmin.dat` del qual

provenim. Els següents dos valors, juntament amb la segona i tercera línies, són les mateixes que apareixen com a darreres tres línies, de cada grup, a l'arxiu `afmin1.dat` i d'aquí han estat copiades.

Els dos valors restants de la primera línia, són el valor del paràmetre al llarg de l'òrbita mesurat en el sentit de la direcció estable associat a la mínima distància a la Terra i el valor d'aquesta distància mesurada en km.

La quarta línia conté dos enters, indicadors del procés de càlcul dels extrems de l'interval. Els valors del paràmetre al llarg de l'òrbita en el sentit de la direcció estable que defineixen l'interval, i el valor de les distàncies a la Terra, mesurades en km, associades a aquests paràmetres (dins un marge de precisió raonable aquests dos valors haurien de ser RACT).

3.8.5 Característiques de les òrbites prop de la Terra

Finalment, el darrer pas de l'estudi és mirar quines són les característiques de les òrbites que estan contingudes en els intervals que hem calculat anteriorment, quan estan prop de la Terra.

Igual que feiem en el problema bicircular, calculem els elements orbitals d'aquestes òrbites, respecte de la Terra, ja que donen la informació necessària i suficient sobre l'òrbita en un entorn de la Terra. A més es mantenen gairebé constants prop de la Terra.

Altres magnituds com són l'alçada de perigeu, les èpoques d'inserció a l'òrbita de transferència i la distància d'aquesta a la Lluna també es calculen.

Una altra que seria bona de tenir en compte a l'hora de l'aplicació real seria utilitzar un model més realista del potencial gravitatori terrestre per quan les òrbites estan prop de la Terra. En els nostres càlculs tota la massa de la Terra se suposa concentrada en el seu centre.

Exemple de resultats

A la taula 3.15 presentem parcialment un exemple de l'arxiu que es genera amb tota la informació anterior. L'arxiu complert es pot trobar a l'apèndix sota el nom de `finest1.dat`. La informació que contenen és la següent:

- Els noms dels arxius que contenen els intervals de màxima alçada i de mínima alçada: `inter11.dat` i `inter21.dat` respectivament.
- Els paràmetres que defineixen el model de sistema solar i el valor de la secció del satèl.lit dividida per la seva massa IPA, ICO i SPCSM. Per coherència aquests valors haurien de ser els mateixos que en els arxius anteriors.
- Les alçades geocèntriques, mesurades en kilòmetres, que defineixen els intervals als quals ens referiem en la secció anterior. Els valors presos són $RACT1 = 7000$ i $RACT2 = 6400$.

- L'alçada geocèntrica, en kilòmetres, on calculem els elements orbitals. $RCE = 7000$.
- El zero que apareix a la següent línia té el mateix significat que en els arxius anteriors.
- La següent línia conté informació general sobre els càlculs.

L'òrbita halo de la qual estudiem la seva varietat estable té una amplitud-z normalitzada $Z0 = 0.08$ i l'època inicial de refinat numèric en dies julians modificats 1950.0 és $T0 = 16587$.

Com en els arxius anteriors $NVO = 3$ vol dir que els càlculs es realitzen per la segona volta de l'òrbita quasiperiòdica numèrica.

NTR és el nombre d'interval·ls que s'han considerat.

- La següent línia conté: $IPUN$ que és un apuntador del punt inicial dins l'arxiu `estws11.dat`, que conté la globalització de la varietat, i que indica de quin punt d'aquest arxiu prové l'interval considerat. TW que és l'època d'arribada a l'òrbita halo i NSI que és el nombre de subinterval·ls en els quals està dividit cada interval, d'acord amb la secció anterior.
- D'acord amb el valor NSI , apareixen a continuació un o dos grans grups de resultats. Cada un conté a la primera línia l'interval del paràmetre al llarg de l'òrbita ($XLAI$, $XLAF$) i el nombre de punts presos dins aquest interval, JBN . Per a cada un d'aquests punts, es dona un grup de sis línies amb la següent informació:

A la primera línia un índex que va des de 1 fins NTR i l'índex JBN . L'època de passada pel perigeu, l'època de passada a 7000 km (RCE) i l'època de passada a mínima distància de la Lluna (totes elles en dies julians modificats 1950.0). L'alçada geocèntrica del perigeu i l'alçada geocèntrica on s'han calculat els elements orbitals (totes dues en km). L'impuls tangent de sortida, suposat donat des d'una òrbita geostacionària de transferència circular, en m/s. La

velocitat al perigeu i la velocitat a l'alçada geocèntrica RCE, ambdues en km/s i mesurades respecte de la Terra. La distància mínima de l'òrbita de transferència a la Lluna (en km), i l'angle entre els vectors Terra-Sol i Terra-Lluna en el moment de la sortida, donat en graus i positiu si la lluna està en quart creixent o negatiu si està en quart minvant.

La segona línia conté els elements keplerians en el moment que es té la distància geocèntrica RCE: El semi-latus rectum (en km), l'excentricitat, la inclinació, l'argument del node ascendent, l'argument de perigeu, i l'anomalia vertadera (tots els angles mesurats en graus).

La tercera línia dóna la posició (en km) i la velocitat (en km/dia) en el perigeu respecte al centre de la Terra.

La quarta línia dóna la posició i velocitat de la Terra a l'època en que el satèl.lit es troba en el perigeu (coordenades eclíptiques baricèntriques en km i km/dia respectivament).

La cinquena línia dóna la posició i velocitat del satèl.lit a l'època en que es té la mínima distància a la Lluna (coordenades baricèntriques eclíptiques en km i km/dia respectivament).

La sisena línia dóna la posició i velocitat de la Lluna a la mateixa època i en les mateixes coordenades de la cinquena línia.

3.9 Exploracions numèriques

Utilitzant els programes que hem fet per implementar els darrers algorismes, hem realitzat exploracions per a calcular les possibles òrbites de transferència especialment durant els primers mesos de l'any 1995. Les amplituds explorades essencialment són la de 0.08 de la classe 1 i 2, però també hem explorat alguns intervals de temps corresponents a les amplituds 0.06, 0.10, 0.15 i 0.20 de la classe 1 i 0.10 de la classe 2 a fi i efecte de veure com varien les propietats observades al canviar l'amplitud.

Les taules que van de la 3.16 fins a la 3.22 mostren els intervals de temps de llançament possibles per aquests cassos. Els valors T_i , T_f i ΔT indiquen respectivament el dia d'obertura de la finestra de llançament, el dia que es tanca i la durada que té en dies. DLm i DLM indiquen el rang de distàncies respecte el centre de la Lluna, en km, entre les quals passen les òrbites de transferència contingudes dins aquestes finestres.

T_i	T_f	ΔT	DLm	DLM
28.960-DES-1994	30.885-DES-1994	1.9247	7281.9	61455.3
26.690-GEN-1995	28.611-GEN-1995	1.9209	7262.8	57938.3

Taula 3.16. Finestres d'inserció per a òrbites halo d'amplitud $\beta = 0.06$, classe 1.

T_i	T_f	ΔT	DLm	DLM
29.394-DES-1994	30.958-DES-1994	1.5642	7457.5	63977.5
27.397-GEN-1995	29.424-GEN-1995	2.0274	7682.5	66672.2
25.698-FEB-1995	27.963-FEB-1995	2.2641	8088.9	69271.3
27.674-MAR-1995	29.474-MAR-1995	1.8000	13325.0	68589.6
21.324-SET-1995	22.713-SET-1995	1.3889	4411.6	18439.4
21.866-OCT-1995	22.582-OCT-1995	0.7164	8065.8	38402.8
20.269-NOV-1995	21.155-NOV-1995	0.8860	8272.3	44642.1
20.214-DES-1995	20.604-DES-1995	0.3902	20691.1	43822.8
18.645-GEN-1996	19.097-GEN-1996	0.4520	21248.4	48644.3

Taula 3.17. Finestres d'inserció per a òrbites halo d'amplitud $\beta = 0.08$, classe 1.

T_i	T_f	ΔT	DLm	DLM
29.727-DES-1994	31.024-DES-1994	1.2970	7217.1	66753.0
27.842-GEN-1995	29.499-GEN-1995	1.6571	7687.9	69918.5
26.279-FEB-1995	28.013-FEB-1995	1.7340	7878.4	71685.8
28.318-MAR-1995	29.428-MAR-1995	1.1101	22942.5	67477.9

Taula 3.18. Finestres d'inserció per a òrbites halo d'amplitud $\beta = 0.10$, classe 1.

T_i	T_f	ΔT	DLm	DLM
30.279-DES-1994	31.183-DES-1994	0.9040	11853.3	80673.7
28.529-GEN-1995	29.667-GEN-1995	1.1383	7880.6	84071.5

Taula 3.19. Finestres d'inserció per a òrbites halo d'amplitud $\beta = 0.15$, classe 1.

T_i	T_f	ΔT	DLm	DLM
12.533-DES-1994	16.465-DES-1994	3.9328	399609.6	401857.6
30.311-DES-1994	1.156-GEN-1995	1.8447	19219.3	148595.9
10.339-GEN-1995	14.428-GEN-1995	4.0883	396865.4	403471.7
28.684-GEN-1995	30.484-GEN-1995	1.7998	17160.6	142130.8
9.298-FEB-1995	11.901-FEB-1995	2.6031	394619.7	403561.9

Taula 3.20. Finestres d'inserció per a òrbites halo d'amplitud $\beta = 0.20$, classe 1.

T_i	T_f	ΔT	DLm	DLM
29.578-DES-1994	30.060-DES-1994	0.4820	7152.1	12395.8
28.155-GEN-1995	28.177-GEN-1995	0.0223	10603.8	11032.4
25.668-FEB-1995	26.835-FEB-1995	1.1670	5003.4	13436.1
28.465-MAR-1995	29.107-MAR-1995	0.6418	10095.2	20030.6
26.985-ABR-1995	28.108-ABR-1995	1.1233	7566.4	68322.5
26.172-MAI-1995	27.870-MAI-1995	1.6986	8906.7	78093.4
24.207-JUN-1995	26.529-JUN-1995	2.3213	9670.2	80785.6
23.402-JUL-1995	26.141-JUL-1995	2.7389	9622.5	79972.3
21.981-AGO-1995	24.710-AGO-1995	2.7293	9119.9	76185.8

Taula 3.21. Finestres d'inserció per a òrbites halo d'amplitud $\beta = 0.08$, classe 2.

T_i	T_f	ΔT	DLm	DLM
24.961-FEB-1995	27.207-FEB-1995	2.2466	3161.5	15515.1
27.106-MAR-1995	29.161-MAR-1995	2.0548	3829.6	21555.1
27.824-ABR-1995	28.058-ABR-1995	0.2341	26219.2	38243.3

Taula 3.22. Finestres d'inserció per a òrbites halo d'amplitud $\beta = 0.10$, classe 2.

Com a primer resultat que podem concloure d'aquestes taules, és que les finestres d'inserció s'obren essencialment a les mateixes èpoques tant per la classe 1 com per la classe 2, sempre que l'amplitud β no sigui molt gran. Això es degut a que pel rang d'amplituds al voltant de $\beta = 0.08$, tal com veiem usant el problema restringit, la varietat estable passa relativament lluny de la Terra i no proporciona col·lisió a menys que es vegi pertorbada per la Lluna tal com succeeix en el problema bicircular i en el cas real. Si volem inserir-nos a la varietat estable d'una òrbita halo d'amplitud petita, s'ha d'esperar que la Lluna estigui en un marge de posicions apropiat¹¹ per poder-nos ajudar gravitacionalment i això fa que només cada 30 dies aproximadament (el que ve a ser el període lunar) s'obri la finestra d'inserció tal com veiem a l'exemple de la figura 3.48. En canvi si l'amplitud halo és prou gran, la varietat estable ja passa per ella mateixa prop de la Terra i no cal l'ajut de la Lluna. Cassos com aquests els tenim per exemple si considerem la finestra que va del 12 al 16 de desembre o la del 10 al 14 de gener corresponent a l'òrbita halo d'amplitud $\beta = 0.20$ i classe 1.

Malgrat que en teoria la finestra de llançament s'obre aproximadament cada mes, una dada que cal tenir molt en compte és la distància respecte de la Lluna en la qual passa l'òrbita de transferència. Aquesta distància no pot ser molt petita ja que petits errors en la maniobra de sortida de la Terra s'amplifiquen fortament al passar prop de la Lluna, a més de l'existència el risc de col·lisió del satèl·lit amb la Lluna¹². Tenint en compte aquest fet, una distància de seguretat d'uns 20000 ó 25000 km és del tot recomenable a efectes pràctics. Observant les taules de que disposem, i tenint en compte aquesta constricció veiem que hi ha finestres que de

¹¹Aquest marge de posicions s'ha vist que està entre els 20 i 50 graus d'angle Sol-Terra-Lluna o entre -50 i -20 graus depenent si la Lluna esta en quart creixent o quart minvant respectivament.

¹²El radi de la Lluna és d'uns 1738 km.

fet no són aprofitables. Per exemple les que van del mes de desembre al mes de març per l'òrbita d'amplitud $\beta = 0.08$ i classe 2 o bé les que van del mes d'abril al mes de setembre¹³ per l'òrbita d'amplitud $\beta = 0.08$ i classe 1. Malgrat que les finestres semblen tancar-se cada sis mesos degut a aquest fet, si considerem les òrbites d'amplitud 0.08 tenim que sempre n'hi ha una d'oberta com a mínim, ja que s'alternen les de la classe 1 i classe 2 i per tant durant l'any 1995 és possible llençar el satèl·lit en intervals separats per uns 30 dies.

Les figures que van de la 3.48 a la 3.54 mostren algunes finestres amb informació referent a les òrbites de transferència tal com són èpoques, inclinacions de l'òrbita, distància mínima de l'òrbita de transferència a la Lluna i l'angle que formen el Sol la Terra i la Lluna en el moment de la inserció per un rang d'alçades de perigeu compreses entre 6400 i 7000 km. En principi, les finestres d'inserció han estat triades només tenint en compte les alçades de perigeu, és a dir la distància al centre de la Terra en el moment d'inserció. A tot això caldria afegir altres constriccions, com la distància mínima de la Lluna a que pot passar l'òrbita de transferència a fi d'evitar l'amplificació dels errors en la inserció, o bé la inclinació equatorial màxima que pot tenir l'òrbita geostacionària de transferència, o be les possibilitats de seguïment per les diferents estacions terrestres, entre d'altres. Algunes d'aquestes constriccions com pot ser la inclinació depèn en gran mesura del tipus de llançador que es faci servir (veure [13]), encara que per regla general ha de ser propera als 0° equatorials.

Les figures que van de la 3.55 a la 3.59 mostren un exemple d'algunes d'aquestes magnituds per la finestra del 27 de gener de l'òrbita d'amplitud $\beta = 0.08$ i classe 1, amb un perigeu igual a 6564.1 km, que és el que va tenir el satèl·lit nord-americà ISSE-3 en el moment de la inserció a l'òrbita de transferència. Tal com es veu a les figures de comparació posteriors, de la 3.60 a la 3.64, per òrbites halo d'amplitud petita la forma de les gràfiques essencialment no varia. Aquest comportament s'ha mantingut igual per a totes les òrbites explorades tant de la classe 1 com de la classe 2 sempre que hagin tingut un "moderat" ajut gravitacional lunar.

¹³Aquestes no han aparegut en la recerca degut a la proximitat del pas de les seves òrbites respecte de la Lluna.

Les figures que van de la 3.65 a la 3.70 mostren les gràfiques de les mateixes magnituds comparades per les òrbites halo d'amplitud $\beta = 0.08$ de les classes 1 i 2 per una mateixa finestra en el temps. Com ja hem dit, al menys a principis de l'any 1995, no tenim cap finestra en el temps que s'obri alhora per les classes 1 i 2 tenint en compte la distància de les òrbites de transferència a la Lluna. Per tant aixó no compara el comportament de les magnituds representades per a les possibles òrbites de transferència a la classe 1 i 2 que ja hem dit en l'apartat anterior que no varia, sinó que essencialment ens serveix per veure quan es pot estalviar en el moment de la sortida de la Terra aprofitant l'impuls gravitacional lunar fins al límit.

Finalment les figures 3.71 i 3.72 mostren una de les òrbites de transferència obtinguda en coordenades normalitzades.

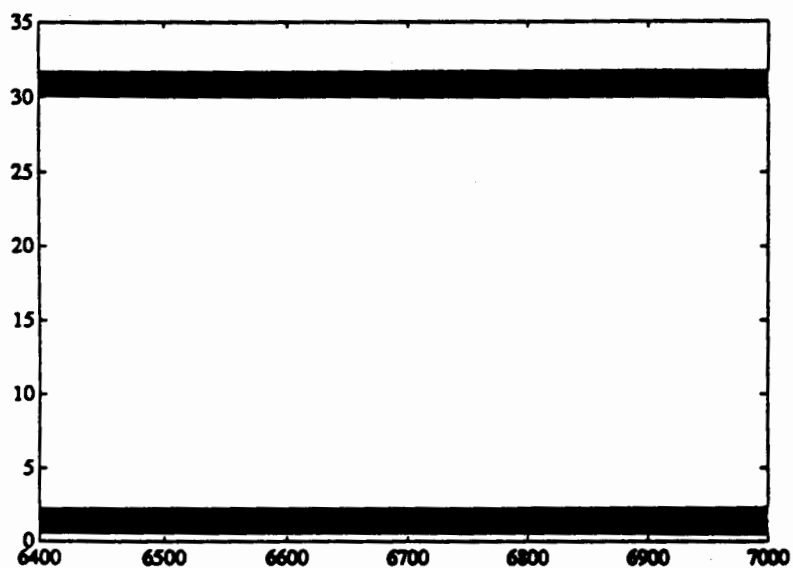


Figura 3.48. Finestres d'inserció. Les abscisses mostren els perigeus en km. Les ordenades estan expressades en dies julians modificats menys 16462 (27-GEN-1995). Per a cada perigeu la finestra d'inserció admissible consta de varis intervals. A la figura n'hi ha dos de representats. Els altres intervals venen separats per uns 30 dies.

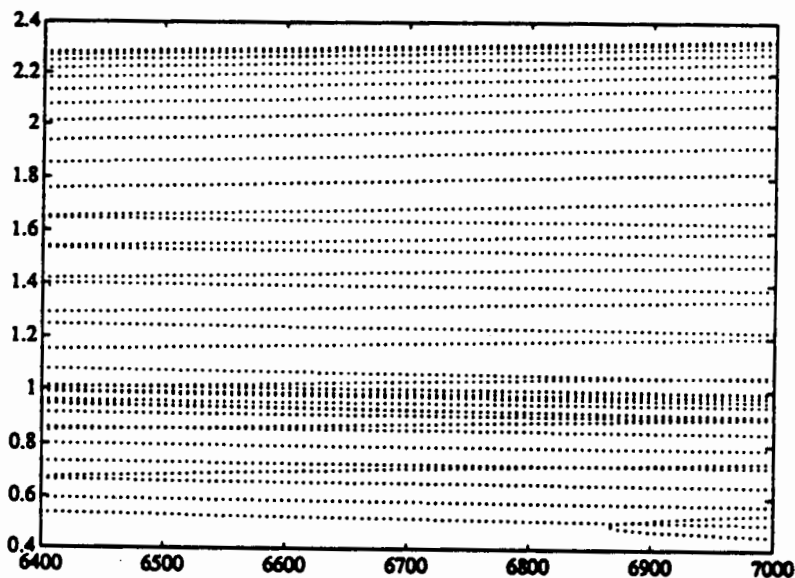


Figura 3.49. És el mateix que a la figura 3.48 però restringida a la part de sota. De fet, la banda compresa entre les corbes (puntejades) superior i inferior està plena de corbes.

Per conveniència només en representem unes quantes. Cada corba puntejada, aproximadament horitzontal, es correspon amb un valor t_0 de l'òrbita halo refinada. Al llarg de cada una d'aquestes corbes, els punts s'obtenen variant el paràmetre al llarg de l'òrbita. Remarquem, que donat un valor t_0 , la corba corresponent talla dues vegades el rang de perigeus entre 6400 i 7000 km. Per exemple, a la part inferior dreta de la figura podem veure el mínim de la distància de perigeu d'una d'aquestes corbes. Els mínims de les altres estan localitzats a l'esquerra de la figura, fora del rang d'interès.

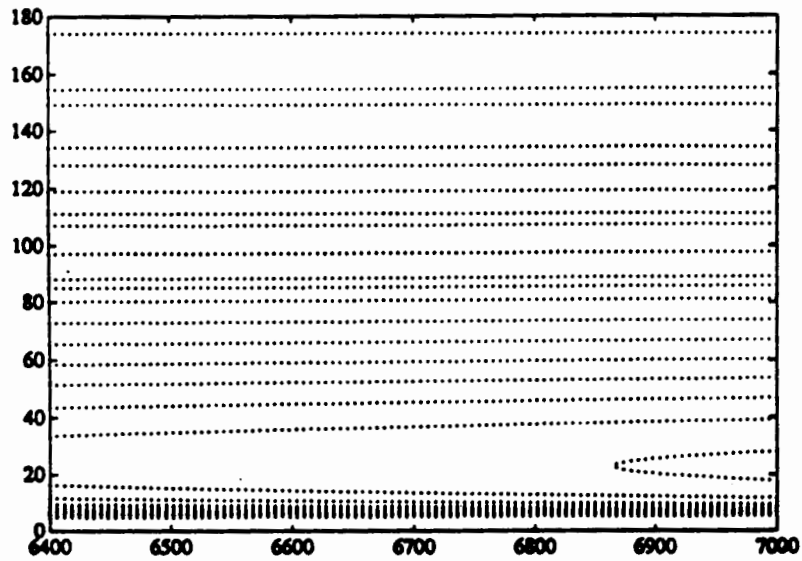


Figura 3.50. El mateix que a la figura 3.49 però a les ordenades es mostra la inclinació respecte del pla de l'eclíptica en lloc dels dies julians modificats.

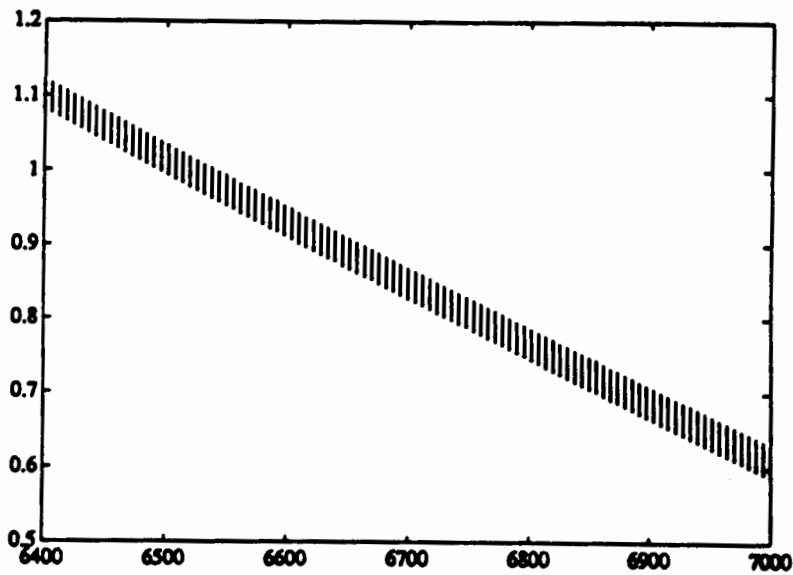


Figura 3.51. El mateix que a la figura 3.49 però a les ordenades es es mostra la velocitat respecte la Terra en el perigeu, mesurada en km/s menys 10 km/s.

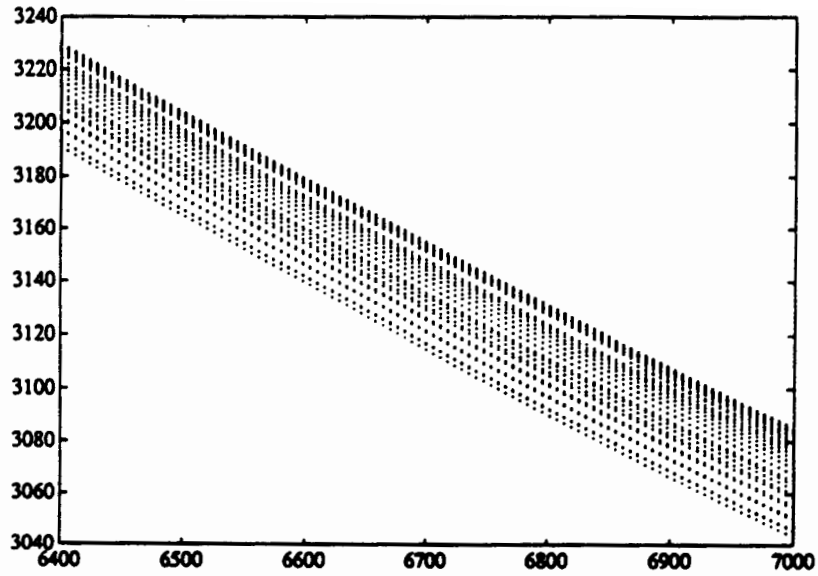


Figura 3.52. El mateix que a la figura 3.49 però a les ordenades es es mostra el Δv necessari per inserir el satèl·lit a l'òrbita de transferència des d'una òrbita d'aparcament circular. Està mesurat en m/s.

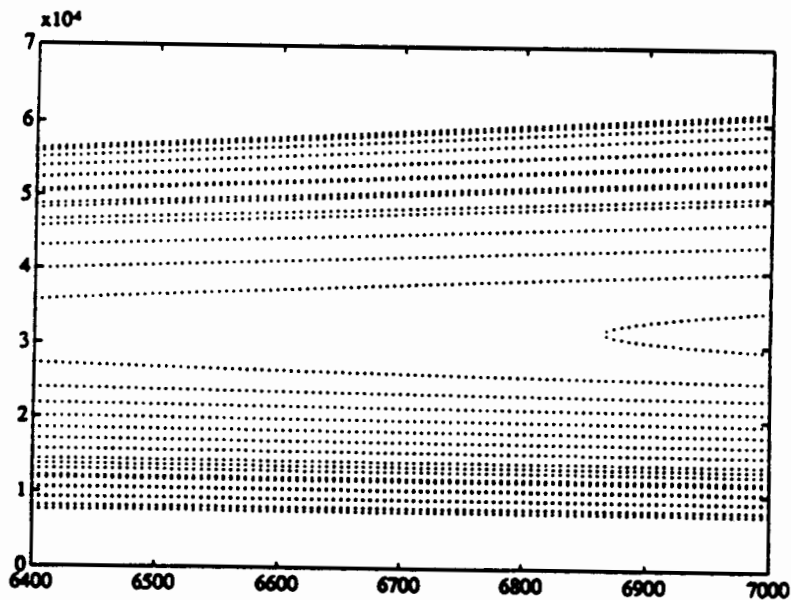


Figura 3.53. El mateix que a la figura 3.49 però a les ordenades es es mostra la distància mínima de l'òrbita de transferència a la Lluna mesurada en km.

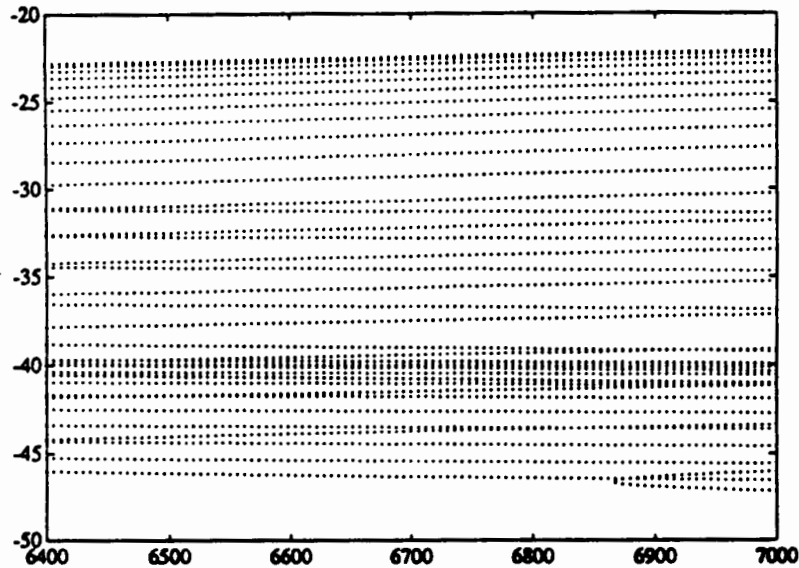


Figura 3.54. El mateix que a la figura 3.49 però a les ordenades es es mostra l'angle Sol-Terra-Lluna, mesurat en graus, en el moment d'inserció a l'òbita de transferència. El signe negatiu indica que la Lluna en aquest cas troba en quart minvant.

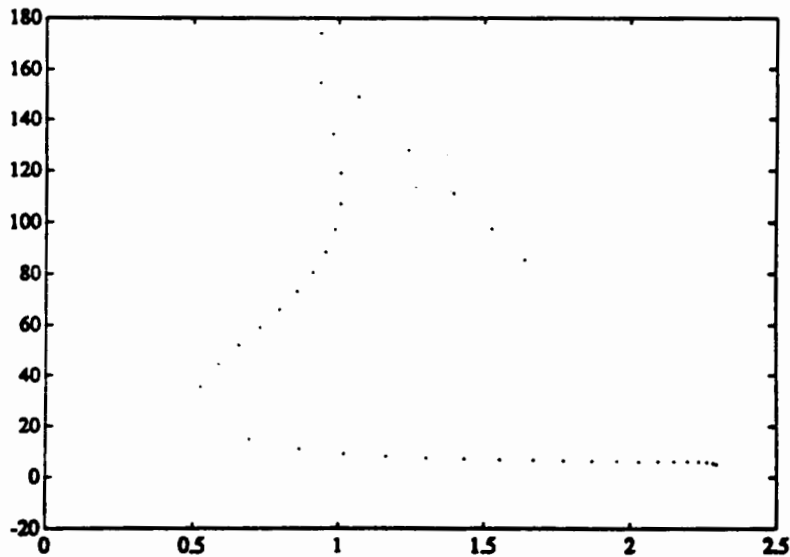


Figura 3.55. Havent seleccionat el perigeu igual a 6564.1 km (que fou el valor de la missió ISEE-3), representem a les abscisses els dies julians modificats menys 16462 (27-GEN-1995) i a les ordenades les inclinacions respecte l'eclíptica i mesurades en graus, que poden tenir les òrbites de transferència en el moment de la inserció.

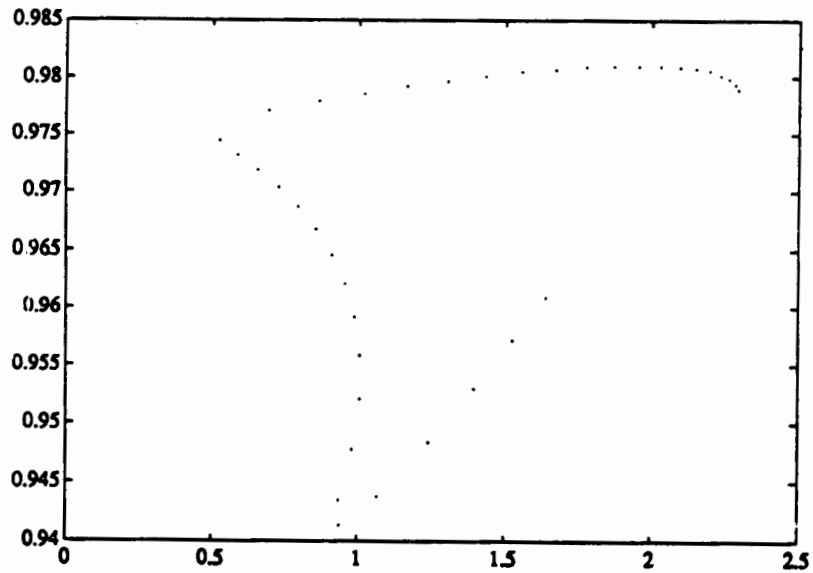


Figura 3.56. El mateix que a la figura 3.55 però a les ordenades es mostra la velocitat relativa a la Terra (en km menys 10 km/s).

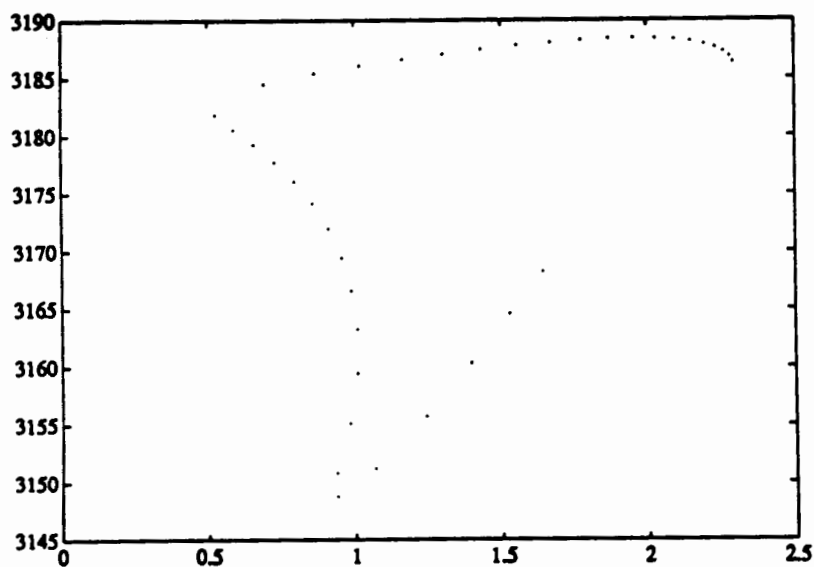


Figura 3.57. El mateix que a la figura 3.55 però a les ordenades es mostra el Δv necessari per a inserir el satèl·lit a l'òrbita de transferència des d'una òrbita d'aparcamment circular (en m/s).

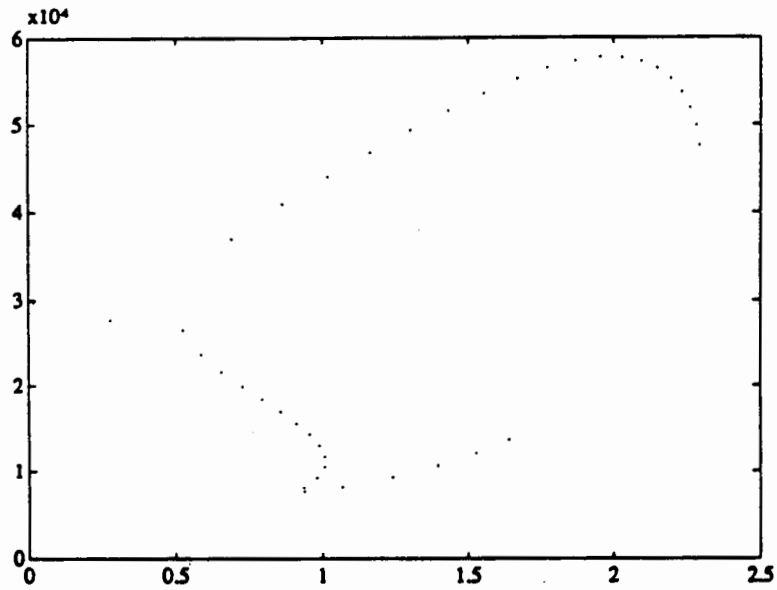


Figura 3.58. El mateix que a la figura 3.55 però a les ordenades es mostra la mínima distància de l'òrbita de transferència a la Lluna en km.

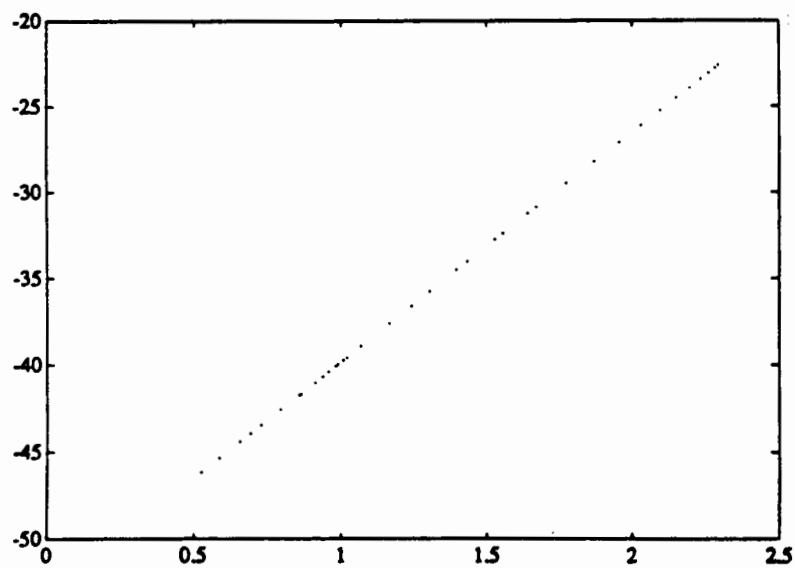


Figura 3.59. El mateix que a la figura 3.55 però a les ordenades es mostra l'angle en graus Sol-Terra-Lluna en el moment de la inserció. El signe negatiu indica que en aquest cas l'òrbita està en quart minvant.

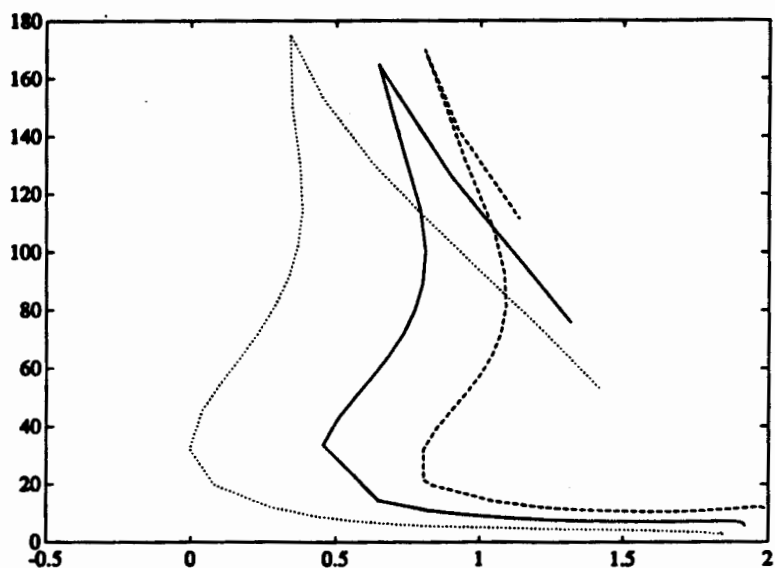


Figura 3.60. Havent seleccionat el perigeu igual a 6564.1 km, representem a les abscisses els dies julians modificats menys 16433 (29-DES-1994) i a les ordenades les inclinacions respecte l'eclíptica i mesurades en graus, per a les òrbites halo de la classe 1 i amplituds $\beta = 0.06$ (línia puntejada), $\beta = 0.08$ (línia contínua) i $\beta = 0.10$ (línia a traços) que poden tenir les òrbites de transferència en el moment de la inserció.

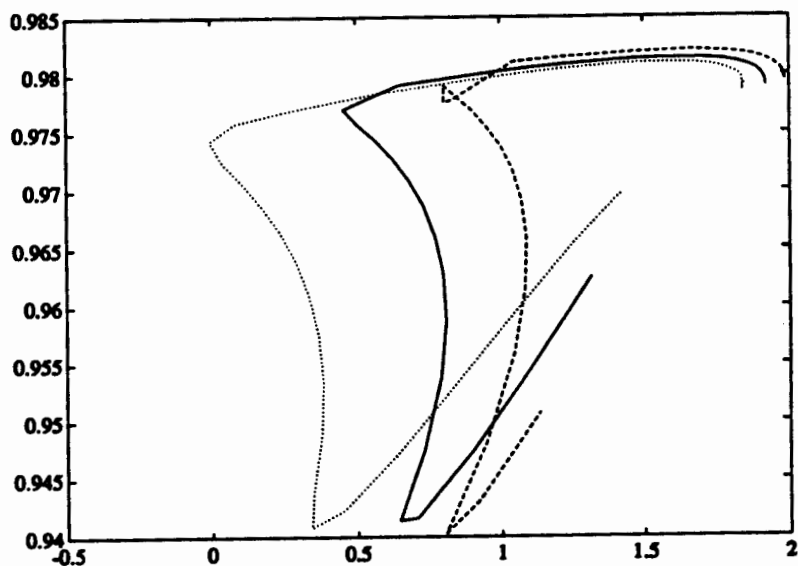


Figura 3.61. El mateix que a la figura 3.60 però a les ordenades es mostra la velocitat relativa a la Terra (en km menys 10 km/s).

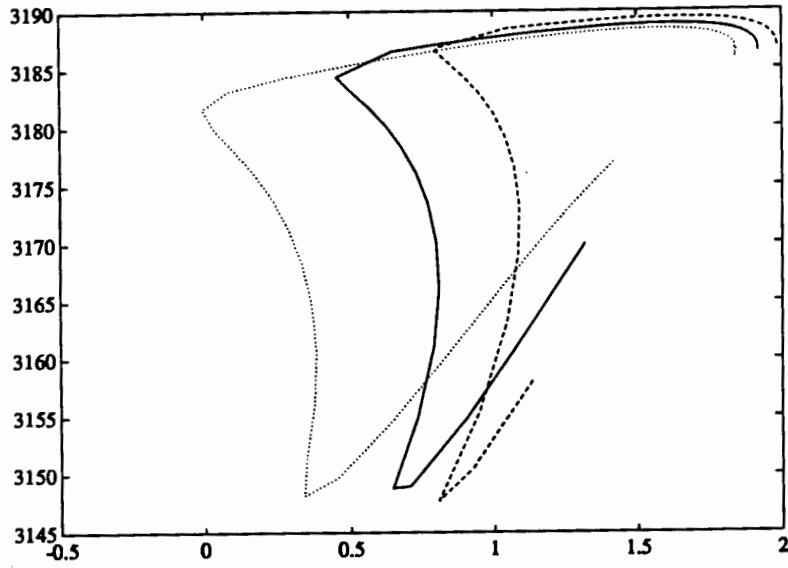


Figura 3.62. El mateix que a la figura 3.60 però a les ordenades es mostra el Δv necessari per a inserir el satèl.lit a l'òrbita de transferència des d'una òrbita d'aparcamnt circular (en m/s).

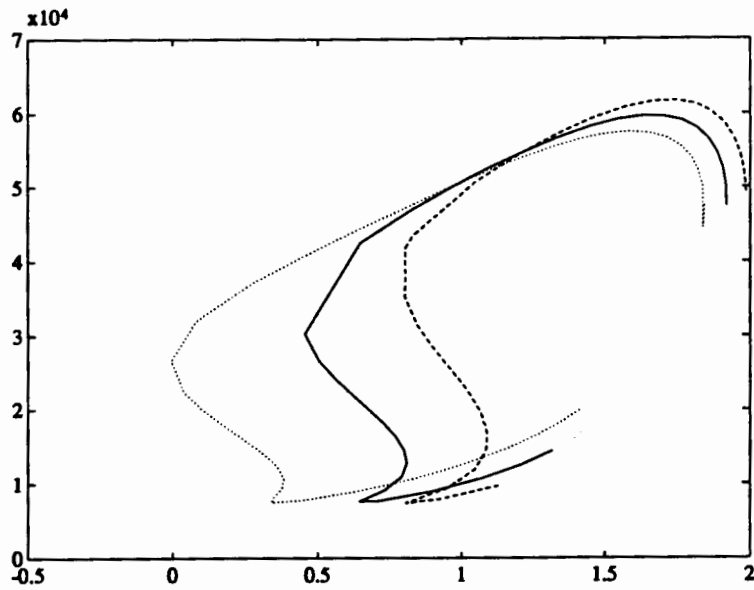


Figura 3.63. El mateix que a la figura 3.60 però a les ordenades es mostra la mínima distància de l'òrbita de transferència a la Lluna en km.

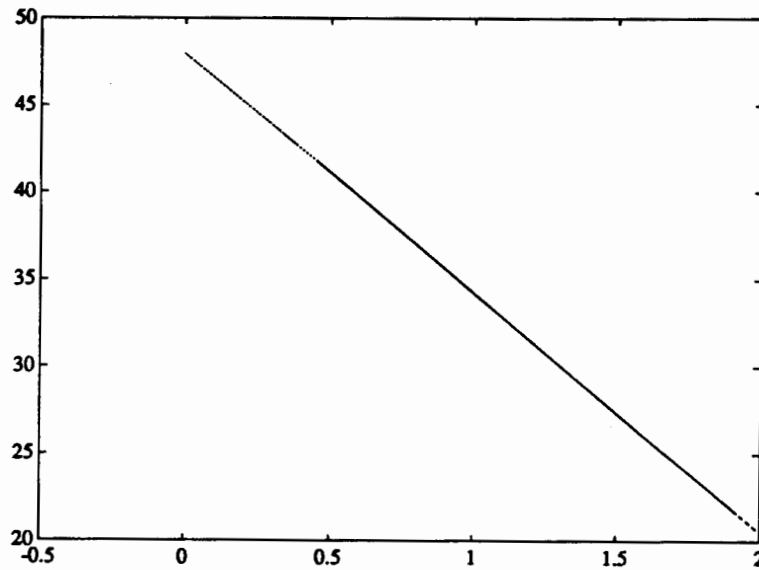


Figura 3.64. El mateix que a la figura 3.60 però a les ordenades es mostra l'angle en graus Sol-Terra-Lluna en el moment de la inserció. El signe positiu indica que en aquest cas l'òrbita està en quart creixent.

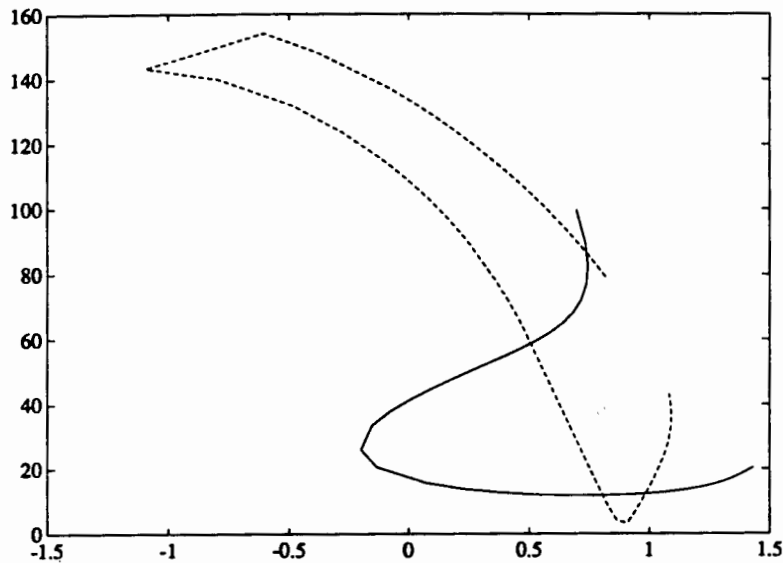


Figura 3.65. Havent seleccionat el perigeu igual a 6564.1 km, representem a les abscisses els dies julians modificats menys 16522 (28-MAR-1995) i a les ordenades les inclinacions respecte l'eclíptica i mesurades en graus, que poden tenir les òrbites de transferència en el moment de la inserció, per a les òrbites halo d'amplitud $\beta = 0.08$ classes 1 i 2.

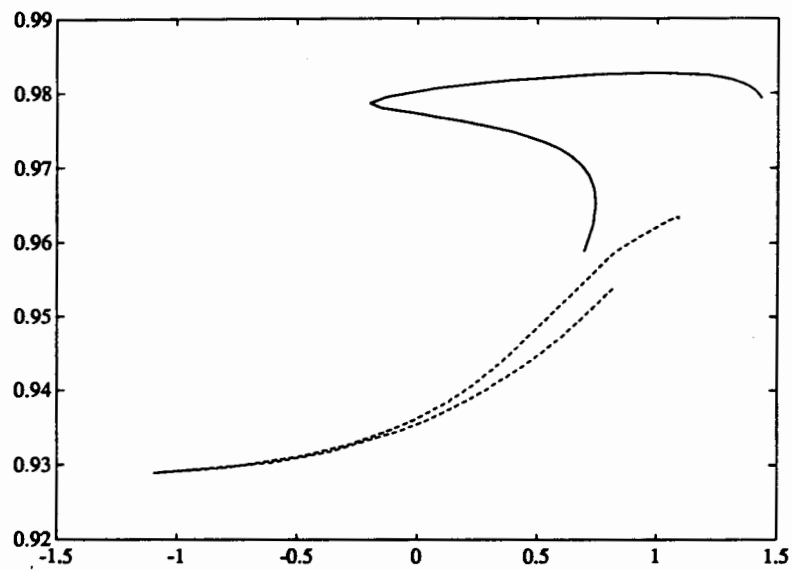


Figura 3.66. El mateix que a la figura 3.65 però a les ordenades es mostra la velocitat relativa a la Terra (en km menys 10 km/s).

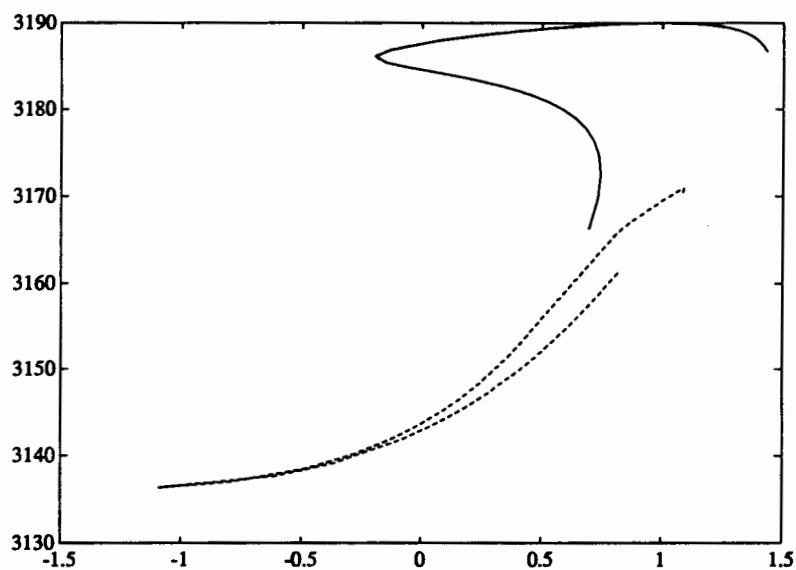


Figura 3.67. El mateix que a la figura 3.65 però a les ordenades es mostra el Δv necessari per a inserir el satèl·lit a l'òrbita de transferència des d'una òrbita d'aparcamment circular (en m/s).

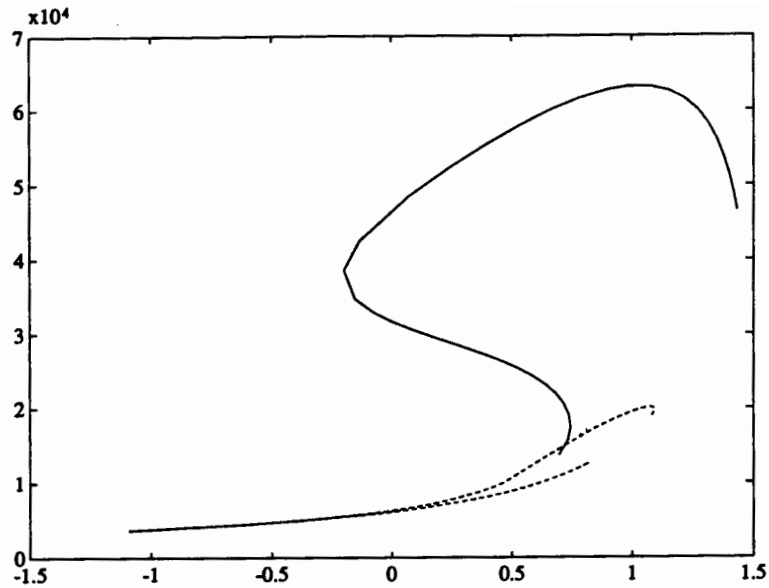


Figura 3.68. El mateix que a la figura 3.65 però a les ordenades es mostra la mínima distància de l'òrbita de transferència a la Lluna en km.

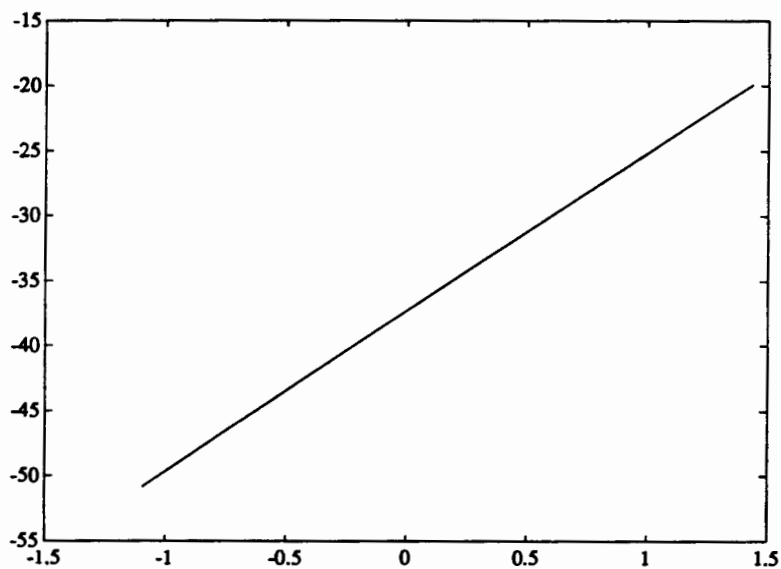


Figura 3.69. El mateix que a la figura 3.65 però a les ordenades es mostra l'angle en graus Sol-Terra-Lluna en el moment de la inserció. (Les dues figures queden superposades).

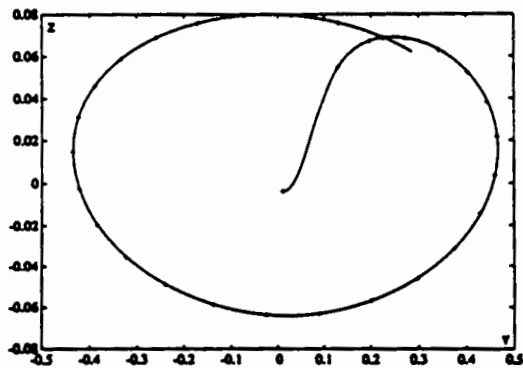
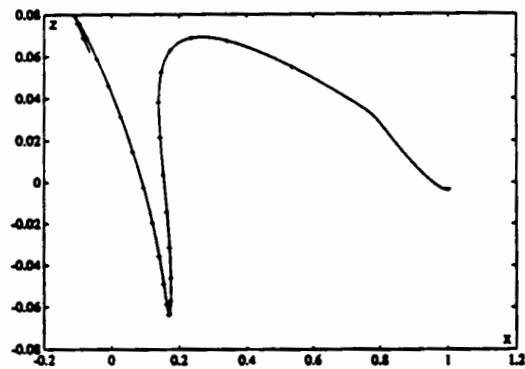
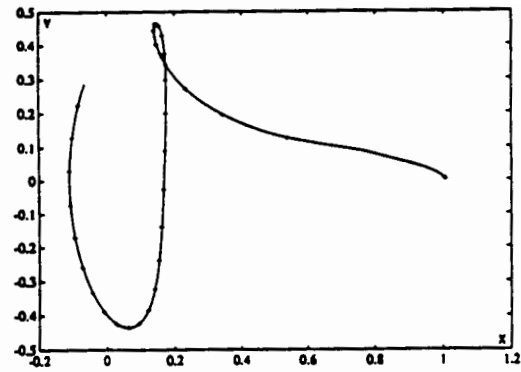


Figura 3.70. Òrbita de transferència a una òrbita halo amb $t_0 = 16470$ djm. i $\beta = 0.08$.

Época d'inserció a l'òrbita de transferència: 16462.4603 djm. (27.46-GEN-1995).

Arribada a 197.5 km de l'òrbita halo mesurats en el sentit de la direcció estable a l'època 16670.56 djm (23.56-AGO-1995). Les creus al llarg de l'òrbita marquen intervals de 7 dies començant a l'època d'inserció.

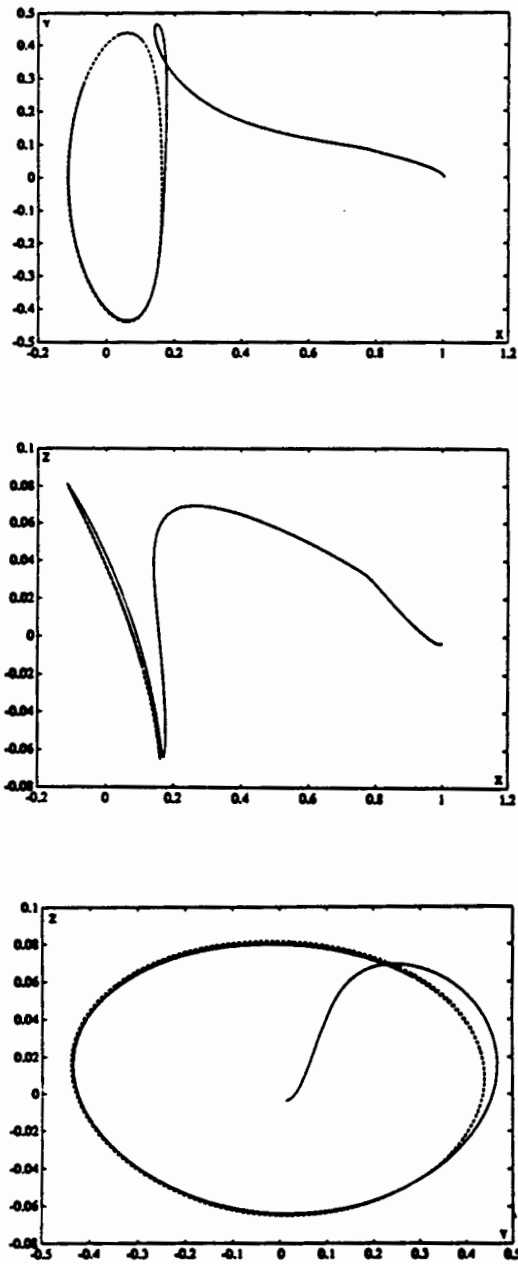


Figura 3.71. El mateix que a la figura 3.70 però continuant la integració durant més de 200 dies.

3.10 Transferència entre òrbites halo del sistema solar

Com a part final d'aquest capítol, hem considerant que seria interessant provar la tècnica de la transferència entre òrbites halo que hem desenvolupat pel problema restringit, malgrat que en el cas real tal com hem vist no és necessari. Degut però al fet que el sistema d'equacions diferencials que regeix el moviment en el cas real és no autònom i al fet de que l'òrbita halo no és periòdica, han estat necessàries unes modificacions i simplificacions en el mètode ja que sinó hagués estat impossible treballar amb el volum de dades que ens cal amb els nostres ordinadors.

3.10.1 Un nou mètode de tir paral·lel

Pel càlcul de les òrbites halo que calen per a simular la transferència hem utilitzat un nou mètode de tir paral·lel que si bé no millora el temps de càlcul ni el nombre d'iteracions necessàries per arribar a la solució, sí que produeix unes òrbites quasiperiòdiques una mica "més properes" a les òrbites halo en el sentit que la dispersió de l'òrbita quan es projecta sobre el pla YZ es veu més petita (si s'amplien les regions) que pel mètode de tir paral·lel donat a la secció (3.7), la qual cosa en principi és favorable degut a l'aplicació del mètode de transferència que farem.

La idea d'aquest nou mètode consisteix en utilitzar només les condicions de solapament per a resoldre el tir paral·lel. Com que això porta a un sistema d'equacions indeterminat ja que tenim més incògnites que equacions en el procés de Newton, entre totes les solucions possibles triem la que tingui norma euclídea mínima. És a dir, la que varia el mínim possible el vector solució a cada iteració del tir paral·lel.

Si imposem només les condicions de solapament en aquest mètode, resulta que el sistema d'equacions que obtenim pel mètode de Newton està molt mal condicionat i només convergeix per a intervals de temps de refinament molt curts. Per això el que hem fet ha estat fixar a més la z_0 i el t_0 al principi del tir paral·lel tal com veníem fent, la qual cosa és a més convenient ja que així assegurem que l'òrbita quasiperiòdica numèrica començarà en el moment seleccionat i amb l'amplitud z

Si imposem que $\| \Delta Q^{(j)} \|_2$ sigui mínim, tenim que els a_i s'obtenen resolent el sistema d'equacions lineal:

$$\begin{pmatrix} v_1 \cdot v_1 & v_1 \cdot v_2 & v_1 \cdot v_3 & v_1 \cdot v_4 \\ v_2 \cdot v_1 & v_2 \cdot v_2 & v_2 \cdot v_3 & v_2 \cdot v_4 \\ v_3 \cdot v_1 & v_3 \cdot v_2 & v_3 \cdot v_3 & v_3 \cdot v_4 \\ v_4 \cdot v_1 & v_4 \cdot v_2 & v_4 \cdot v_3 & v_4 \cdot v_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \cdot s \\ v_2 \cdot s \\ v_3 \cdot s \\ v_4 \cdot s \end{pmatrix}.$$

3.10.2 Implementació del mètode de transferència

Recordem que pel cas de la transferència en el problema restringit, degut a que les magnituds eren periòdiques, les hem desenvolupat en sèrie de Fourier i emmagatzemat els seus coeficients per a moltes òrbites halo variant l'amplitud, després obtenim el valor d'aquestes magnituds per a punts intermedis recuperant els valors propers a partir de les sèries de Fourier i interpolant.

Les magnituds necessàries per la transferència en el cas del problema restringit i desenvolupades en sèrie de Fourier són les següents:

- Les òrbites halo.
- Els factors de projecció sobre la component tangent a la família.
- Els controls unitaris de velocitat per anul·lar la component tangent a la família.
- La direcció varietat estable sobre les òrbites halo.

Aquestes magnituds que desenvolupades i guardades de la manera descrita ocupen relativament poc espai, inclús fent-ho per una xarxa d'òrbites espessa¹⁴, tenim que a l'haver de guardar les òrbites mitjançant taules augmenten considerablement la seva mida. A més, cal tenir en compte que en el cas real, com que el sistema d'equacions diferencials que regeix el moviment és no autònom, les òrbites quasiperiòdiques a més de variar segons l'amplitud z varien segons l'època inicial de refinat, t_0 , i per tant en lloc d'haver de considerar un "interval" d'òrbites s'ha de

¹⁴Ve a ser uns 15Kb per òrbita en total.

considerar una “malla” d’òrbites. Cosa que també cal aplicar-ho clar està a totes les magnituds que cal desenvolupar.

Com que en principi l’objectiu d’aquesta secció es veure si el mètode descrit a la secció (3.5) es aplicable al cas real, el que hem fet ha estat simplificar al màxim el problema i veure si malgrat les simplificacions és possible partir d’una òrbita i arribar a una altra.

La primera observació a fer prové de l’observació de la figura 3.41 a la secció (3.6.3) i també dels resultats `afmin.dat` de l’apèndix. Si considerem les òrbites d’amplitud $\beta = 0.08$ tant pel cas del problema bicircular com pel cas real, tenim que si variem el paràmetre t_0 de refinament durant un període lunar, dia a dia per exemple, com és el cas de l’arxiu `afmin.dat`, resulta que una tercera part o més de les òrbites halo tenen òrbites dins la varietat estable que col·lisionen amb la Terra. En canvi quan les èpoques de col·lisió les mirem prop de la Terra resulta que les finestres de llançament amb prou feines arriben a dos dies. Això que ens és desfavorable per la transferència, ja que ens disminueix la finestra de llançament, ens és favorable pels propòsits d’aquesta secció ja que el que ens està dient que fixada l’amplitud z , les òrbites halo al variar l’època de refinament es comporten essencialment una respecte de l’altra com si s’hagués aplicat una translació en el temps, al menys localment. Per aquest motiu quan una òrbita de la varietat estable d’una òrbita halo té col·lisió amb la Terra, de fet és aquesta mateixa òrbita de col·lisió la que torna a aparèixer al considerar la varietat estable d’una òrbita halo de la mateixa amplitud però amb un lleuger canvi del temps inicial de refinament, ha variat de fet només el paràmetre al llarg de l’òrbita que donava l’òrbita de col·lisió.

Aquest fet ha portat a considerar la simplificació més important. Hem fixat el t_0 , i com en el cas del problema restringit només considerem les òrbites variant l’amplitud z . Aquesta simplificació porta lligat el següent problema a l’hora de buscar els punts nominals.

Recordem que en el cas del problema restringit donat un estat del satèl·lit, que ve descrit per una posició i velocitat, associar un punt nominal a aquest estat era buscar un punt sobre la família d’òrbites halo que complís una certa condició. El

punt nominal queda caracteritzat per un angle i per una amplitud z . En el cas real, l'estat del satèl.lit ve donat per la posició, la velocitat i una època determinada, mentre que el punt nominal vindrà donat per la posició i velocitat sobre una òrbita halo a l'època determinada. Es a dir, hem de buscar l'òrbita halo, variant l'amplitud i el temps inicial de refinat numèric, de manera que la posició i velocitat donada sobre aquesta òrbita halo, en la mateixa època que la del satèl.lit, compleixi la condició que ha de complir per ser la nominal. El paper que feia l'angle en el cas del problema restringit ara el fa el t_0 . Com que no disposem de la "direcció" t_0 sembla que el punt nominal només el podrem buscar variant l'amplitud β . Fet d'aquesta manera es complica molt la situació ja que els algorismes que abans buscaven el punt nominal mirant el zero d'una certa funció, ara haurien de buscar el mínim d'aquesta funció sobre la direcció β , a més en molts cassos degut a la sensibilitat del punt nominal respecte de l'angle i de β conjuntament no s'arribarien a resultats satisfactoris. Per això, el que hem fet ha estat buscar el punt nominal respecte de β i respecte del temps en lloc de fer-ho respecte de t_0 que no tenim. Donada un estat del satèl.lit li assignem una òrbita halo (donada per una amplitud β) i un punt d'aquesta òrbita que seria el nominal si ho consideréssim en el problema restringit, però que no ho és exactament en el cas real ja que l'estat del satèl.lit i el punt nominal corresponen a èpoques diferents. La que realment seria la nominal es trobaria, segons els raonaments que hem fet, molt semblant en posició i velocitat però en una altra òrbita halo de la mateixa amplitud i t_0 defassat la diferència d'èpoques.

Aquest mètode en principi no el podríem aplicar amb seguretat si la diferència d'èpoques entre el punt nominal i la del satèl.lit fos molt gran. Afortunadament la diferència tal com és veu a la taula de seguiments 3.23 és molt petita, i de fet el punt nominal "fals" s'ha comportat com un vertader punt nominal ja que la maniobra d'inserció a la varietat estable és efectiva sense necessitat de canviar lleugerament l'època en que tenim el satèl.lit¹⁵.

¹⁵Per simular la inserció a l'òrbita halo amb el t_0 que no tenim, el que hauríem de fer seria canviar l'època d'inserció del satèl.lit, es a dir una "maniobra en el temps".

La segona observació que fem és que entre les magnituds necessàries per la transferència entre òrbites halo n'hi ha unes de "més importants" que d'altres, en el sentit que unes calen que siguin molt precises i altres no tant. Així per exemple les òrbites i les direccions estables s'han de calcular de manera precisa, ja que cal saber amb exactitud la posició on estem, alhora que la maniobra d'inserció a la varietat estable també cal fer-la de manera que sigui la més efectiva possible, ja que en cas contrari podríem perdre el control del satèl·lit.

D'altra banda, l'empenta tangent pot ser més imprecisa, ja que la seguretat del satèl·lit no està tant en joc. En cas d'emergència sempre podrem inserir-lo en la varietat estable d'alguna òrbita halo i tornar a recuperar el control.

Així doncs la segona simplificació que hem fet ha estat prendre les magnituds que tenen a veure amb l'empenta tangent directament de les que teníem del problema restringit, mentre que les òrbites halo i la magnitud necessària per la inserció a la varietat estable prenem les vertaderes.

La família d'òrbites halo l'hem calculada començant sempre per l'època de refinat numèric $t_0 = 16436.0$ (djm 1950.0). i variant l'amplitud des de $\beta = 0.05$ fins a $\beta = 0.25$ amb un pas $\Delta\beta = 0.005$. Per a cada òrbita hem generat una taula que conté la posició i velocitat de cada òrbita, en coordenades eclíptiques, dia a dia durant uns 500 dies a partir del dia 27.0-JUN-1995 (16613.0 djm 1950.0). També hem generat una taula anàloga contenint les sis components de la direcció estable en els punts de les òrbites halo anteriors. Les avaluacions per a punts intermedis les obtenim per interpolació.

Per a la realització de les empentes tangents, tal com hem dit utilitzem les magnituds del problema restringit, ara bé, el mètode de donar l'empenta tangent ha estat modificat per un altre que ha donat un resultat més satisfactori, en lloc de donar l'empenta tangent buscant una òrbita halo d'amplitud més petita que doni l'empenta desitjada a l'anul·lar la seva component tangent a la família, el que fem és donar un Δv de manera que l'estat resultant tingui només les components centrals respecte del punt nominal a mínima distància. L'empenta donada d'aquesta manera té un grau de llibertat, que el podem triar manera que es doni una empenta

tangent de la magnitud desitjada o bé de manera que la component tangent a la família dividida pel cost de l'empenta sigui màxima. Com que de la segona manera no s'aprecien avantatges respecte de la primera hem escollit donar les empentes tangents de la magnitud desitjada tal com fem en el cas del problema restringit.

Tenint aquestes consideracions en compte, la maniobra de salt funciona de la següent manera:

1. Donat un estat del satèl·lit, $S^s = (t^s, S_p^s, S_v^s)$, en coordenades eclíptiques, i que suposem en una òrbita halo del sistema solar, calculem S^r que és el mateix estat però en coordenades del problema restringit.
2. Calculem N^r , el punt nominal a mínima distància corresponent a S^r .
3. Fent un canvi en les components de velocitat d'aquest punt, N_v^r , de manera que el Δv aplicat tingui la magnitud desitjada a l'empenta tangent, obtenim un nou estat \bar{N}^r del problema restringit.
4. Apliquem el canvi de coordenades a \bar{N}^r , a l'època t^s i obtenim un nou estat \bar{S}^s en coordenades eclíptiques. Aquest estat difereix (llevat errors molt petits deguts al canvi de coordenades) de S^s només en les coordenades de velocitat i $\|S_v^s - \bar{S}_v^s\|_2$ és igual al Δv aplicat.
5. Canviem a S^s les seves tres components de velocitat S_v^s per \bar{S}_v^s i anotem el Δv aplicat al fer el canvi com a valor d'empenta tangent. A l'estat resultant el continuarem dient S^s .
6. Integrem les equacions del moviment seguint l'òrbita donada per S^s , utilitzant el model JPL. A cada pas de la integració busquem els punts nominals a mínima distància i WS sempre treballant amb coordenades eclíptiques.
7. Quan detectem un màxim de la funció rendiment de la maniobra de salt o bé quan ens allunyem massa de la família d'òrbites halo¹⁶ fem una maniobra d'inserció a la varietat estable de l'òrbita halo nominal WS utilitzant les

¹⁶Hem de tenir en compte que degut a que la maniobra d'empenta tangent es fa utilitzant el

direccions estables reals i de la mateixa manera que ho feiem pel problema restringit.

8. Continuem el seguiment del satèl·lit fins arribar prop de l'òrbita halo nominal WS. En aquest moment tornem a estar al pas 1. Podem anar repetint el procés fins arribar a l'òrbita halo d'amplitud desitjada.

3.10.3 Exemples de resultats obtinguts

A la taula 3.23 mostrem un seguiment d'una òrbita de transferència en el sistema solar havent donat una empenta de 5.13 m/s a la època 16615.0 (djm 1950.0) des de l'òrbita halo d'amplitud $\beta = 0.2$ i $t_0 = 16436$. El comportament és molt semblant al que s'observava pel problema restringit, al menys pels primers dies de la integració, no tant per si integrem sobre tota una volta ja que ara degut a les simplificacions fetes, el comportament inestable es posa molt més en evidència. Ara bé, com que la inserció a la varietat estable, tal com vam veure pel problema restringit s'ha de fer uns 40 dies després de la maniobra d'empenta tangent, passat aquest temps la inestabilitat encara no ha tingut temps d'actuar de manera acusada.

T	Nominal Mín. Dist			Nominal WS			C	R
	t	β	D2	t	β	D2		
16615.5000	16615.5000	0.1999	0.1387E+02	16615.5000	0.1999	0.1526E+02	5.129	0.1407E-04
16617.3176	16617.3177	0.1993	0.2518E+03	16617.3177	0.1993	0.2759E+03	5.168	0.6539E-04
16619.3176	16619.3177	0.1987	0.6251E+03	16619.3177	0.1987	0.6781E+03	5.232	0.1223E-03
16621.3176	16621.3178	0.1981	0.7429E+03	16621.3178	0.1981	0.8005E+03	5.317	0.1795E-03
16623.3176	16623.3178	0.1975	0.4007E+03	16623.3178	0.1975	0.4228E+03	5.425	0.2373E-03
16625.3176	16625.3179	0.1968	0.2867E+00	16625.3179	0.1968	0.7642E+00	5.559	0.2956E-03
16627.3176	16627.3180	0.1962	0.1161E+04	16627.3180	0.1962	0.1272E+04	5.721	0.3545E-03
16629.3176	16629.3182	0.1954	0.7555E+04	16629.3181	0.1954	0.8199E+04	5.915	0.4143E-03
16631.3176	16631.3183	0.1947	0.2606E+05	16631.3183	0.1947	0.2792E+05	6.144	0.4749E-03
16633.3176	16633.3185	0.1938	0.6833E+05	16633.3185	0.1938	0.7327E+05	6.415	0.5365E-03
16635.3176	16635.3187	0.1929	0.1531E+06	16635.3186	0.1929	0.1647E+06	6.736	0.5993E-03
16637.3176	16637.3189	0.1919	0.3095E+06	16637.3188	0.1919	0.3341E+06	7.116	0.6634E-03
16639.3176	16639.3191	0.1909	0.5821E+06	16639.3191	0.1907	0.6316E+06	7.569	0.7290E-03
16641.3176	16641.3194	0.1896	0.1038E+07	16641.3193	0.1895	0.1135E+07	8.114	0.7962E-03
16643.3176	16643.3197	0.1883	0.1780E+07	16643.3197	0.1880	0.1965E+07	8.776	0.8652E-03
16645.3176	16645.3201	0.1867	0.2966E+07	16645.3200	0.1862	0.3316E+07	9.592	0.9363E-03
16647.3176	16647.3205	0.1848	0.4843E+07	16647.3204	0.1841	0.5514E+07	10.62	0.1010E-02
16649.3176	16649.3210	0.1827	0.7810E+07	16649.3209	0.1815	0.9113E+07	11.93	0.1086E-02

problema restringit es possible que un cop fet el canvi de coordenades, i també a la gran inestabilitat de les òrbites halo, hi hagi una certa component inestable que allunyi el satèl·lit de la família d'òrbites halo abans del que succeeix pel problema restringit.

16651.3176	16651.3216	0.1802	0.1253E+08	16651.3216	0.1781	0.1514E+08	13.67	0.1164E-02
16653.3176	16653.3223	0.1771	0.2013E+08	16653.3224	0.1736	0.2557E+08	16.06	0.1246E-02
16655.3176	16655.3230	0.1736	0.3263E+08	16655.3235	0.1672	0.4468E+08	19.53	0.1332E-02

Taula 3.23. Seguiment d'una òrbita un cop se li ha donat una empenta tangent. Les característiques de l'empenta estan explicades al text. T correspon a l'època real. t es l'època en la qual es té el punt nominal. D2 és el quadrat de la distància (en km) d'on es troba el satèl·lit fins al punt nominal. C és el cost d'inserció a la varietat estable en m/s. i R és el rendiment que tindria la maniobra de salt en cas de fer

la inserció a la varietat estable.

Finalment il·lustrem el funcionament del mètode amb dos exemples. En els dos cassos sortim de l'òrbita halo d'amplitud $\beta = 0.2$ el dia 16615.0 (29.0-JUN-1995) i arribem a la de $\beta = 0.08$.

En el primer cas hem fet dues maniobres de salt. Les empentes tangents han estat de 5.12 m/s i de 13.02 m/s sempre als 0° , i les d'inserció de 23.97 m/s i de 46.40 m/s donades prop dels 90° uns 45 dies després de la seva respectiva empenta tangent.

En el segon cas només hem fet una maniobra de salt. L'empenta tangent ha estat de 32 m/s als 0° i la d'inserció de 75.03 m/s també prop dels 90° uns 35 dies després d'haver donat l'anterior.

Les figures que van de la 3.72 a la 3.77 mostren com han anat variant algunes d'aquestes magnituds en funció del temps, mesurat en dies a partir de la sortida. Les figures que van de la 3.78 a la 3.83 mostren l'evolució de les òrbites de transferència.

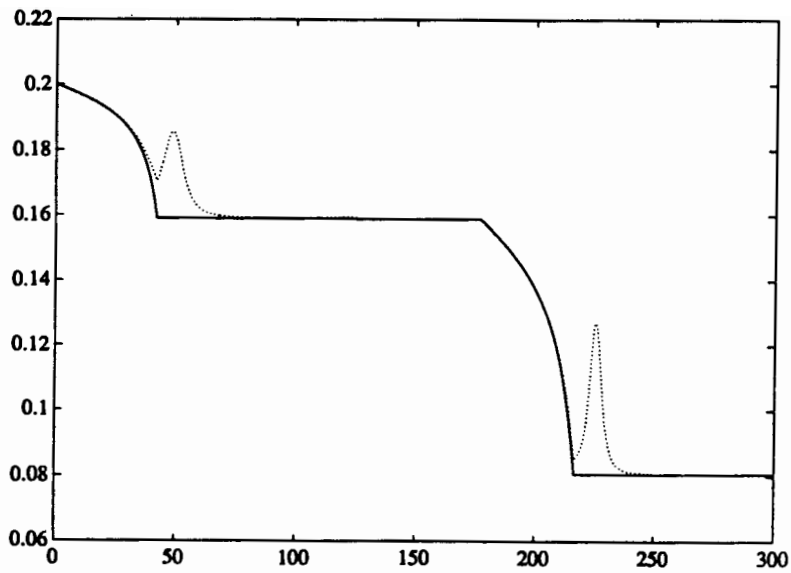


Figura 3.72. Seguiment de l'òrbita de transferència respecte de les amplituds nominals i pel cas esmentat de les dues maniobres de salt. Línia continua amplitud de l'òrbita nominal WS, línia puntejada amplitud de l'òrbita nominal a mínima distància.

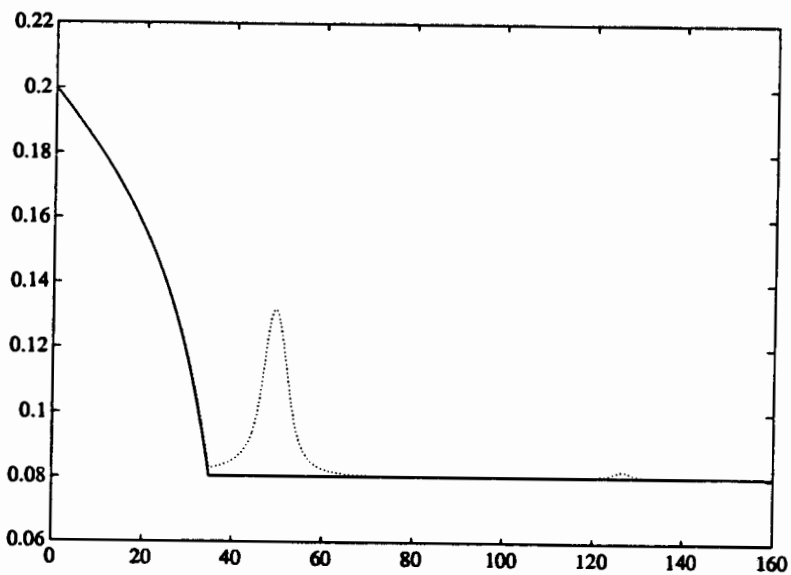


Figura 3.73. Idem de la figura 3.72 però pel cas esmentat d'una maniobra de salt.

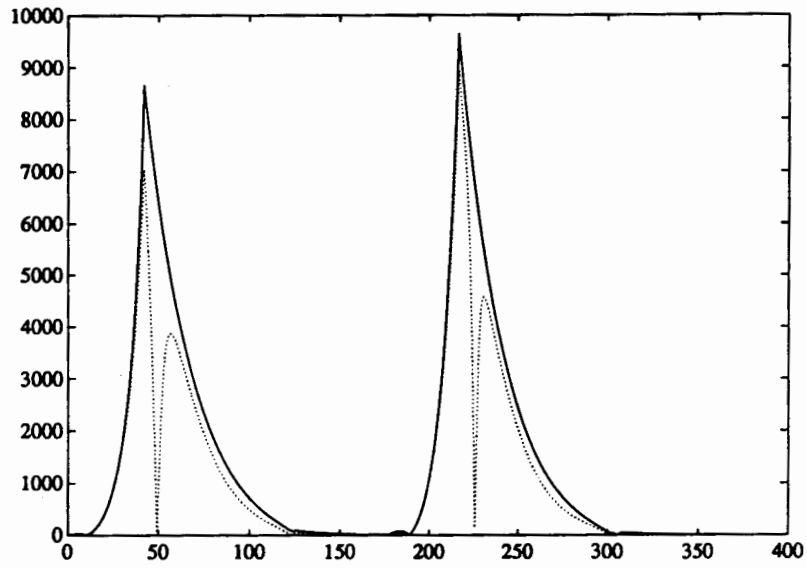


Figura 3.74. Seguiment de l'òrbita de transferència segons la distància a les òrbites nominals i pel cas esmentat de les dues maniobres de salt. Línia contínua distància en km a l'òrbita nominal WS, línia puntejada distància en km a l'òrbita nominal a mínima distància.

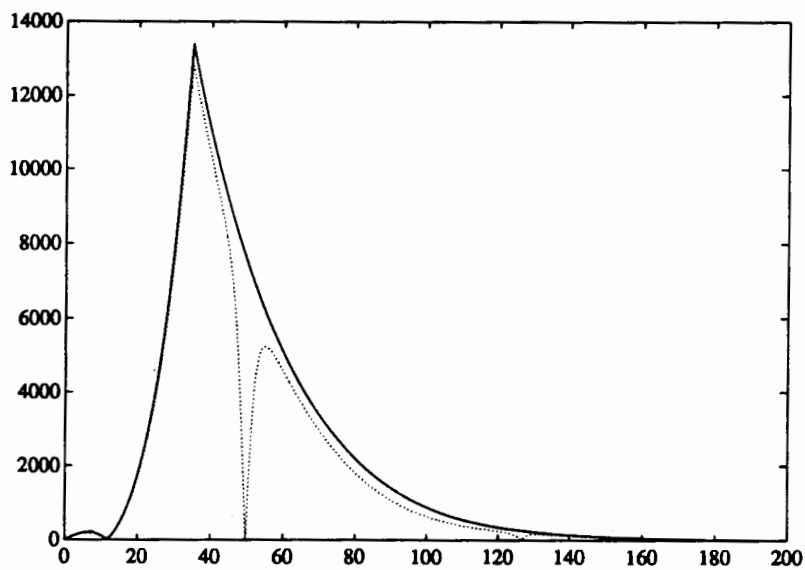


Figura 3.75. Idem de la figura 3.74 però pel cas esmentat d'una maniobra de salt.

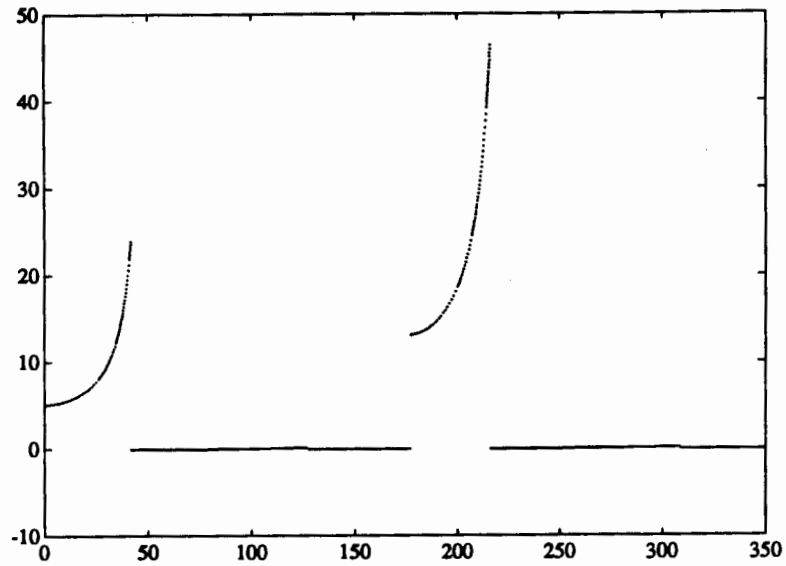


Figura 3.76. Cost d'inserció a l'òrbita nominal WS en m/s pel cas esmentat de les dues maniobres de salt. Les discontinuïtats de salt respecte del 0 corresponen a les maniobres realitzades.

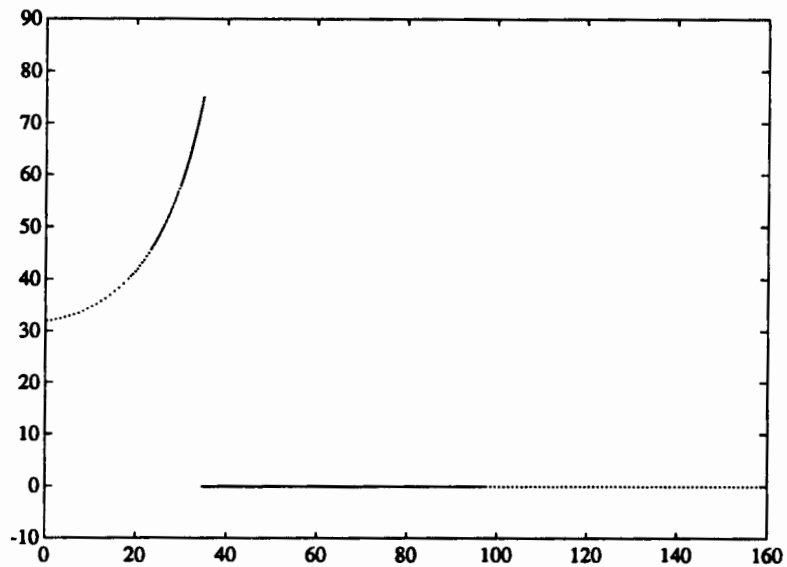


Figura 3.77. Idem de la figura 3.76 però pel cas esmentat d'una maniobra de salt.

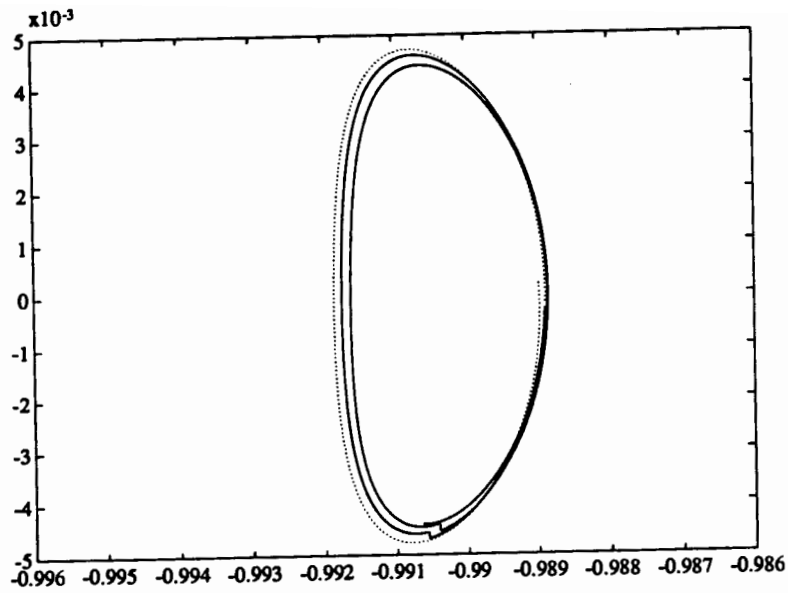


Figura 3.78. Òrbita de transferència (línia contínua) pel cas esmentat de dues maniobres de salt. Projectió XY en coordenades del problema restringit. La línia puntejada mostra l'òrbita de sortida d'amplitud $\beta = 0.20$.

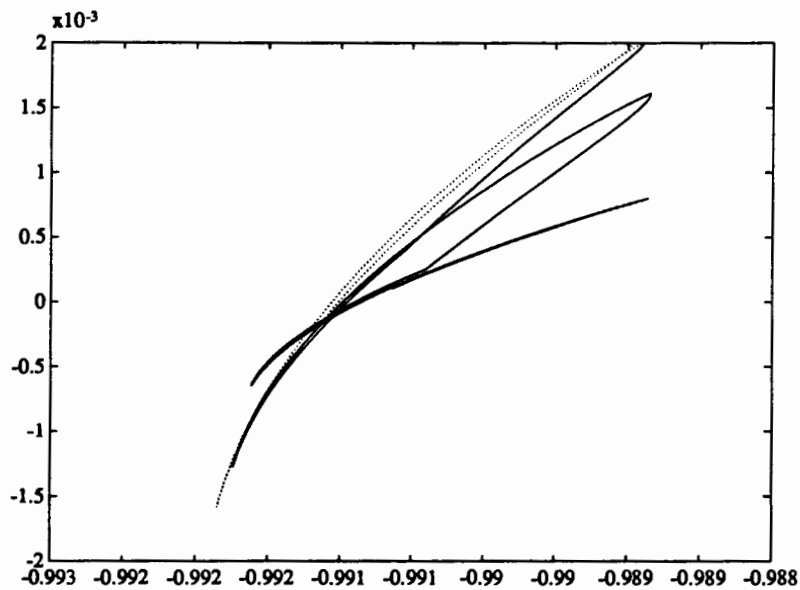


Figura 3.79. Idem de la figura 3.78 però la projecció XZ.

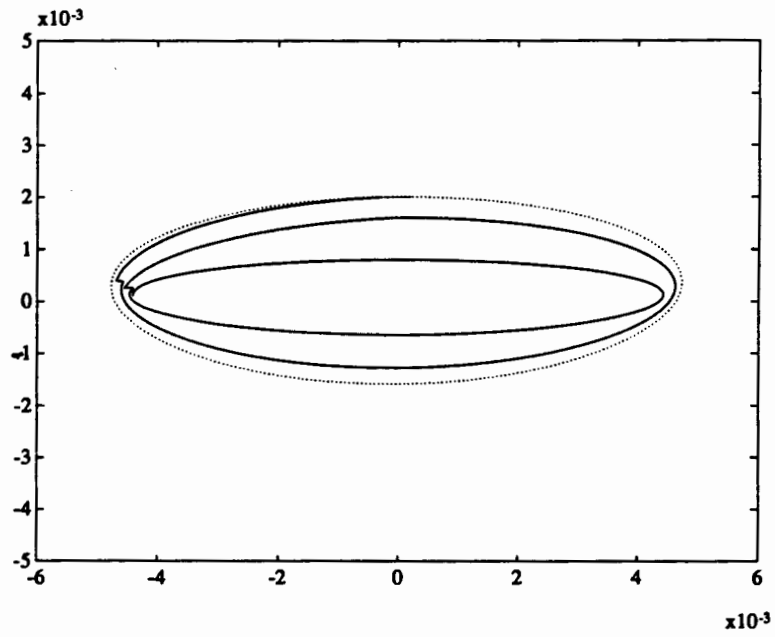


Figura 3.80. Idem de la figura 3.78 però la projecció YZ.

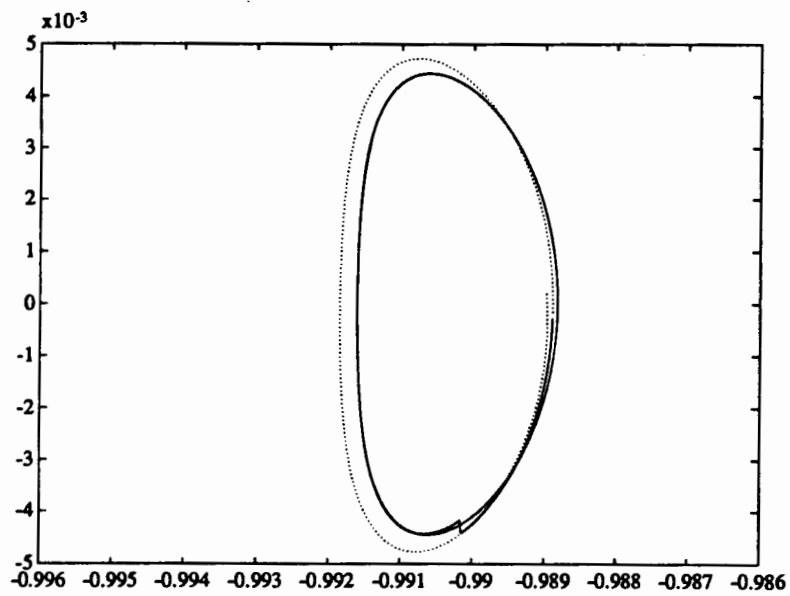


Figura 3.81. Idem de la figura 3.78 però pel cas esmentat d'una maniobra de salt.

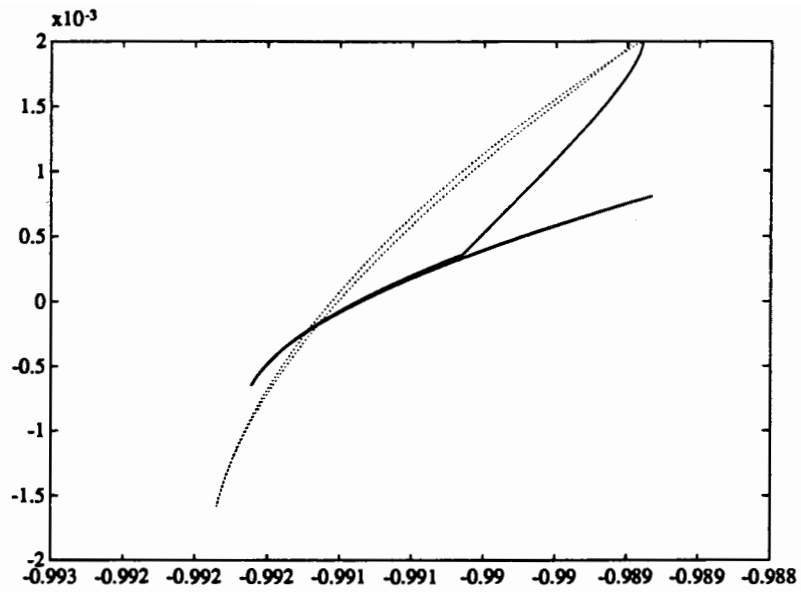


Figura 3.82. Idem de la figura 3.81 però la projecció XZ.

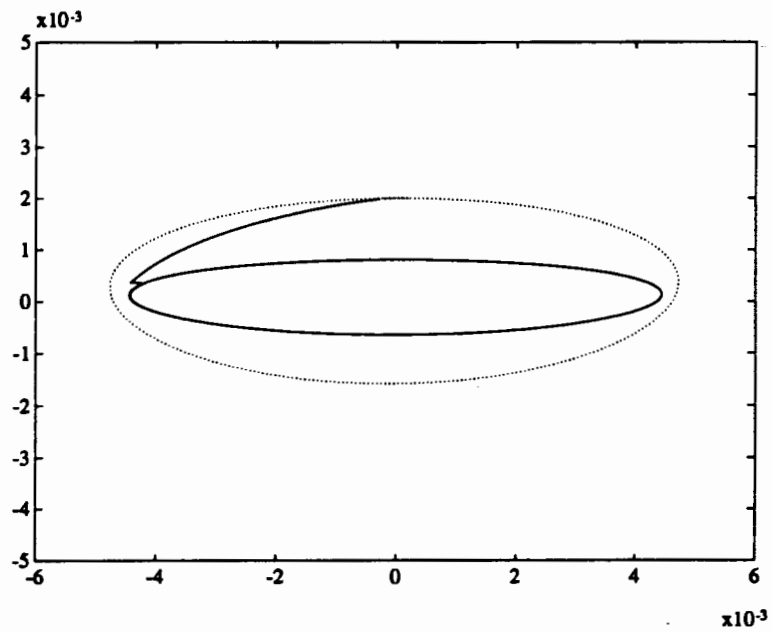


Figura 3.83. Idem de la figura 3.81 però la projecció YZ.

Bibliografia

- [1] Brower, D. and Clemence G.M.: Methods of celestial mechanics. Academic Press, 1961.
- [2] Danby, J.M.A. Orbits in the Copenhagen problem asymptotic at L_4 , and their genealogy. *Astronomical J.* 72 (1967), 198–201.
- [3] Devaney, R.L.: Blue sky catastrophes in reversible and hamiltonian systems. *Indiana Univ. Math. J.* 26 (1977), 247–263.
- [4] Farquhar, R.D.; Muhonen, D.P.; Richardson, D.L.: Mission design for a Halo Orbiter of the Earth. *J. Spacecraft* 14 (1976), 170–177.
- [5] Farquhar, R.D.: The control and use of libration point satellites. NASA TR-R 346 (1970).
- [6] Farquhar, R.D.; Muhonen, D.P.; Newman, C., Heuberger, H.: The first libration point satellite. Mission overview and flight history. AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference 1979.
- [7] Gómez, G.; Llibre, J.; Martínez, R. and Simó, C.: Station Keeping of Libration Point Orbits, ESOC Contract 5648/83/D/JS(SC), Final Report, xii+689 p., 1985.
- [8] Goudas, C.L.: Three dimensional periodic orbits and their stability, *Icarus* 2 (1963),1–18.

- [9] Gómez, G.; Jorba, A.; Masdemont, J. and Simó C.: Study Refinement of Semi-Analytical Halo Orbit Theory. ESOC Contract 8625/89/D/MD(SC), Final Report, 213 p., 1991.
- [10] Gómez, G.; Jorba, A.; Masdemont, J. and Simó, C.: Study Refinement of Semi-Analytical Halo Orbit Theory. ESOC Contract 8625/89/D/MD(SC), Users and Programmers Guide, 1991.
- [11] Hénon, M.: Vertical stability of periodic orbits in the restricted problem I. Equal masses, *Astron. Astroph.* **28** (1973), 415–426.
- [12] Henrard, J.: Proof of a Conjecture of E. Strömberg. *Celestial Mechanics*, **7** (1973), 449–457.
- [13] Hechler, M.: SOHO Mission Analysis L_1 Transfer Trajectory, MAO Working Paper No. 202, 1984.
- [14] Poincaré, E.: Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Celeste, Gauthier Villars, 1893.
- [15] Richardson, D.L.: Halo orbit formulation for the ISSE-3 mission. *J. Guidance and control* **3** (1980), 543–548.
- [16] Richardson, D.L.: A Note on the Lagrangian Formulation for Motion About the Collinear Points, *Celestial Mechanics* **22** (1980), 231–236.
- [17] Richardson, D.L.: Analytical construction of periodic orbits about the collinear points. *Celestial Mechanics* **22** (1980), 241–253.
- [18] Strömberg, E.: *Connaissance actuelle des orbites dans le problème des trois corps*. Copenhagen Obs. Publ. 100. (1935).
- [19] Szebehely, V.: Theory of orbits. Academic Press, 1967.
- [20] Szebehely, V. and Nacozy, P.: A class of E. Strömberg's direct orbits in the restricted problem. *Astronomical J.* **72** (1967), 184–190.

- [21] Szebehely, V. and Van Flandern, T.: A Family of retrograde orbits around the triangular equilibrium points. *Astronomical J.* 72, 373–379.
- [22] Zagouras, C.G.; Kazantzis, P.G.: Three-dimensional periodic oscillations generating from plane periodic ones around the collinear Lagrangian points, *Astroph. Space Science* 61 (1979), 389–409.