

ESTUDI I UTILITZACIÓ DE VARIETATS INVARIANTS EN  
PROBLEMES DE MECÀNICA CELESTE.

Josep Joaquim Masdemont i Soler.


Memòria presentada per a aspirar al grau de  
Doctor.


Departament de Matemàtica Aplicada I,  
Universitat Politècnica de Catalunya.

Barcelona, Agost del 1991.

---

Membres del Tribunal:

  
Carles Poello  
(President)

  
Joan Llobregat  
(Vocal)



Regina Martínez  
(Vocal)



Joaquim Font  
(Vocal)



Mercè Oller  
(Secretari)

QUALIFICACIÓ: APTA CUM LAUDE

Barcelona 9 d'Octubre de 1991.

El Cap de Departament,



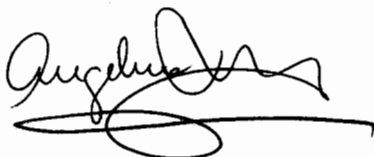
Francesc Panjella.

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA  
ADMINISTRACIÓ D'ASSUMPTES ACADÈMICS

Aquesta Tesi ha estat enregistrada  
a la pàgina 37 amb el número 346

Barcelona, 7 de Novembre 1991

L'ENCARREGAT DEL REGISTRE,



  
UPC  
UNIVERSITAT  
POLITÈCNICA  
DE CATALUNYA



*Primera edició 13-Set-1991,  
Segona edició 19-Set-1991.*

CERTIFICO que la present memòria ha estat realitzada per Josep Masdemont i Soler, i dirigida per mi, al Departament de Matemàtica Aplicada I de la Universitat Politècnica de Catalunya i al Departament de Matemàtica Aplicada i Anàlisi de la Universitat de Barcelona.

Barcelona, Agost del 1991.  
Dr. Gerard Gómez Muntané.

El meu fort agraïment al Dr. Gerard Gómez que amb molt d'encert ha sabut introduir-me i guiar els meus primers passos en el món de la Mecànica Celeste.

Així mateix vull donar les gràcies als meus companys, matemàtics i no matemàtics, que en tot moment s'han mostrat interessats pels progressos i incidències d'aquesta tesi.

*Als meus pares*

# Índex

<b>1</b>	<b>Introducció. Sistemes de Referència i Unitats</b>	<b>4</b>
1.1	Introducció . . . . .	4
1.2	El problema restringit. Utilitats . . . . .	8
1.3	Sistemes de referència i equacions del moviment al sistema solar . . .	12
1.3.1	Sistemes de referència . . . . .	12
1.3.2	Equacions del moviment . . . . .	15
1.3.3	El model JPL . . . . .	24
<b>2</b>	<b>Solucions homoclíniques i heteroclíniques associades als punts <math>L_4</math> i <math>L_5</math></b>	<b>26</b>
2.1	Introducció . . . . .	26
2.2	Estudi local de les varietats invariants dels punts d'equilibri triangulars	27
2.3	Globalització numèrica de les varietats invariants . . . . .	30
2.4	Òrbites homoclíniques i heteroclíniques . . . . .	38
<b>3</b>	<b>Transferència a òrbites halo</b>	<b>50</b>
3.1	Introducció . . . . .	50
3.2	Disseny de la missió i òrbites halo . . . . .	50
3.2.1	Òrbites de Lissajous . . . . .	52
3.2.2	Òrbites halo . . . . .	55
3.2.3	Mètodes d'obtenció de la família d'òrbites halo . . . . .	57
3.3	Magnituds geomètriques associades a les òrbites halo . . . . .	64
3.3.1	Teoria de Floquet per a les òrbites halo . . . . .	64

3.3.2	Posició nominal i factors de projecció . . . . .	68
3.4	Estudi de la transferència utilitzant el problema restringit . . . . .	70
3.4.1	Introducció . . . . .	70
3.4.2	Model i òrbites halo . . . . .	71
3.4.3	Generació de la varietat estable . . . . .	75
3.4.4	Comparació dels resultats obtinguts amb els de la transferència del satèl.lit ISEE-3 . . . . .	83
3.5	Transferència entre òrbites halo del RTBP . . . . .	87
3.5.1	Òrbita nominal WS . . . . .	95
3.5.2	Rendiment de la maniobra de salt . . . . .	98
3.6	La influència de la Lluna en la transferència . . . . .	102
3.6.1	El problema bicircular . . . . .	103
3.6.2	Obtenció de l'òrbita quasiperiòdica per tir paral.lel . . . . .	106
3.6.3	La varietat estable . . . . .	110
3.6.4	Elements orbitals prop de la Terra . . . . .	116
3.7	Obtenció de la QPO amb el model JPL . . . . .	118
3.7.1	Càlcul de la matriu de la diferencial $DF(Q)$ . . . . .	119
3.7.2	Càlcul de l'aplicació de Poincaré i de la seva diferencial . . . . .	120
3.7.3	Resultats numèrics . . . . .	125
3.8	Transferència des de la Terra a una òrbita halo en el sistema solar real	132
3.8.1	Aproximació local de la varietat estable . . . . .	133
3.8.2	Globalització de la varietat . . . . .	139
3.8.3	Selecció de passades prop de la Terra . . . . .	143
3.8.4	Intervals de la varietat adequats per la transferència . . . . .	149
3.8.5	Característiques de les òrbites prop de la Terra . . . . .	156
3.9	Exploracions numèriques . . . . .	160
3.10	Transferència entre òrbites halo del sistema solar . . . . .	179
3.10.1	Un nou mètode de tir paral.lel . . . . .	179
3.10.2	Implementació del mètode de transferència . . . . .	181
3.10.3	Exemples de resultats obtinguts . . . . .	186



**Bibliografia**

**194**

**Apèndix**

**197**

# Capítol 1

## Introducció. Sistemes de Referència i Unitats

### 1.1 Introducció

Dins d'aquesta memòria tractem essencialment dos problemes. El primer d'ells, contingut en el capítol 2, és un problema "acadèmic" que té els seus orígens en els treballs de Strömberg (1935) sobre òrbites periòdiques del problema restringit de tres cossos. En aquell temps era conegut que algunes famílies d'òrbites periòdiques finalitzen en una "òrbita" formada per un parell d'òrbites heteroclíniques que connecten els dos punts triangulars d'equilibri. Strömberg, pel valor del paràmetre de masses  $\mu = 0.5$ , va trobar cinc d'aquestes òrbites heteroclíniques. Posteriorment, entre els anys 1960 i 1975, quan de nou va prendre importància el seguiment de les famílies d'òrbites periòdiques del problema restringit, Danby, Nacozy, Szebehely i Van Flandern van trobar famílies d'òrbites periòdiques que finalitzen en un parell d'òrbites heteroclíniques a les quals acabem de referir-nos.

Dins d'aquesta part de la memòria donem una classificació de les òrbites homoclíniques i heteroclíniques atenint-nos al nombre de vegades que tallen l'eix  $x$ , així com un mètode que ens les permet calcular. Recuperem els resultats obtinguts per Strömberg i fem un seguiment de les òrbites heteroclíniques al variar el paràmetre de masses. Durant aquest seguiment, s'arriba a un punt en el qual el nombre d'òrbites heteroclíniques que tallen una vegada l'eix  $x$  esdevé infinit. En aquest moment, els

resultats numèrics són poc clars i per aquest motiu es donen dues proposicions que expliquen el mecanisme de generació d'aquests tipus d'òrbites i que clarifiquen els resultats numèrics.

El segon problema, que tractem en el capítol 3, és un dels anomenats problemes de la "vida real" del qual n'hem de treure resultats pràctics i està dedicat a l'estudi d'alguns aspectes de l'anàlisi de missió del satèl·lit SOHO.

Durant l'any 1995, l'Agència Espacial Europea (ESA) conjuntament amb la nord-americana (NASA), tenen previst el llançament d'un satèl·lit científic anomenat SOHO (Solar and Heliospheric Observatory). Durant un període de temps entre sis i vuit anys, el SOHO ha de dur a terme programes relacionats amb l'observació solar. Estudiarà les capes més superficials del Sol, les oscil·lacions de la seva lluminositat, i la mesura del vent solar entre d'altres coses. Una missió semblant va ser duta a terme pel satèl·lit nord-americà ISSE-3 en el període de temps comprès entre els anys 1978 i 1982 (veure [6]).

El desenvolupament d'una missió espacial està essencialment condicionada per restriccions tècniques degudes tant a la tecnologia del moment com a raons de tipus econòmic. Així per exemple:

- La fiabilitat de les components del satèl·lit encareix de manera notable el seu preu. Aquest problema s'agreuja si la fiabilitat la demanem per períodes de temps llargs.
- L'elecció del tipus de motor (hidrazina, gas fred, etc.) que ha de dur el satèl·lit per a realitzar les maniobres de transferència entre òrbites o de manteniment en estació, al mateix temps que ha de ser prou potent per realitzar-les, també està molt condicionada al tipus d'aparells que duu el satèl·lit. Un motor d'hidrazina permet fer maniobres grans, però contamina l'entorn del satèl·lit durant un cert temps i potser això impedeix les observacions durant aquest període. Un motor de gas fred no contamina, però les seves maniobres poden ser tant sols d'uns pocs centímetres per segon.

- El tipus d'antena per mantenir les comunicacions amb la Terra també és essencial, sobre tot en missions llunyanes. Una antena fixa és més econòmica i segura ja que estalvia els aparells d'encarament. Una antena mòbil té les característiques oposades però potser serà inevitable depenent de l'elecció d'òrbita que es faci.

Tenint en compte totes aquestes restriccions, l'anàlisi de missió s'ocupa, entre d'altres coses, de les següents qüestions:

- Estudi de les possibilitats de les diferents òrbites nominals en les quals podem posar el satèl.lit per a dur a terme la missió encomanada. En aquest pas, a més dels lligams tècnics, cal tenir en compte els requeriments científics de l'observació i la facilitat de seguiment del satèl.lit des de la Terra. D'entre el ventall de possibilitats cal escollir una òrbita nominal i fer-ne una determinació acurada.
- Un cop determinada l'òrbita nominal cal trobar les finestres de llançament. És a dir, el moment i les condicions amb les que s'ha de llançar el satèl.lit des de la Terra per tal que arribi a l'òrbita nominal. També cal calcular i optimitzar les maniobres que s'han de realitzar tan per realitzar la transferència des de la Terra a l'òrbita nominal com pel manteniment del satèl.lit en la seva òrbita nominal.

En el capítol 3 d'aquesta memòria es tracta essencialment el problema de la transferència d'un satèl.lit artificial des de la Terra a una determinada òrbita heliocèntrica del sistema solar, anomenada de tipus halo, que es troba entre l'òrbita de la Terra i el Sol. Per a aquest fet, estudiem la geometria del problema utilitzant eines de la teoria general dels sistemes dinàmics. El funcionament essencial del procés està basat en el fort caràcter hiperbòlic de les òrbites halo. Aquest fet fa que si s'aconsegueix inserir el satèl.lit en la seva varietat estable, aquest arribarà en un temps raonable a l'òrbita halo escollida, estalviant-nos la maniobra d'inserció ja que la varietat s'acosta asimptòticament a l'òrbita halo. Aquest propòsit s'estudia seguint els següents passos:

- En primer lloc es duen a terme un seguit d'exploracions on s'utilitza el problema restringit de tres cossos, que malgrat la seva simplicitat, dona una bona llum a la manera en que es pot assolir la transferència. Es considera el Sol com a primari gran i el baricentre Terra-Lluna amb la seva massa corresponent actuant com a primari petit. Malgrat que la forma de les òrbites de transferència que s'obtenen són molt semblants a la que es va utilitzar pel satèl·lit ISEE-3 utilitzant mètodes de "prova i error" totalment diferents, en principi no sembla possible (encara que més endavant veurem que sí) aconseguir la transferència des de la Terra fins l'òrbita halo escollida, evitant la maniobra d'inserció a l'òrbita halo un cop el satèl·lit arriba a aquesta. Les primeres exploracions amb el problema restringit de tres cossos mostren que la varietat estable de l'òrbita escollida com a nominal passa relativament lluny de la Terra. Com que varietats estables d'altres òrbites de la mateixa família sí passen prop de la Terra i fins i tot col·lisionen amb aquesta, dissenyem una estratègia de canvi d'òrbita halo, es a dir un mètode de transferència entre òrbites halo utilitzant també el problema restringit.
- En una segona fase posem de manifest la importància que té la Lluna en el problema de la transferència. Per això modelitzem de nou el problema, aquesta vegada utilitzant un model bicircular pels moviments del Sol, La Terra i la Lluna. Calculem l'òrbita halo nominal utilitzant aquest model i globalitzem la seva varietat estable. Ja en aquest estadi de l'estudi es veu que la Lluna té una influència decisiva. Amb una petita ajuda gravitacional per part de la Lluna, es pot aconseguir realitzar la transferència directament des de la Terra fins l'òrbita halo objectiu, sense ser necessària la transferència entre les òrbites halo.
- En una tercera fase utilitzem el model de sistema solar real proporcionat per les efemèrides del JPL. D'una manera anàloga al problema bicircular obtenim l'òrbita nominal i definitivament es posa de manifest que la Lluna és essencialment l'únic cos del sistema solar, apart clar està de la Terra i el Sol, que juga

un paper fonamental. Utilitzant aquest model, el mètode ens dóna totes les possibles òrbites de transferència des de la Terra fins l'òrbita halo escollida. Apliquem aquest mètode per a diferents òrbites halo fent especial èmfasi en el comportament de les òrbites de transferència prop de la Terra, ja que això determina les finestres de llançament. Els resultats mostren que és possible, tal com passa pel problema bicircular, aconseguir la transferència des de la Terra fins l'òrbita halo objectiu d'una manera directa amb un cost lleugerament inferior al del ISEE-3 en la sortida de la Terra i evitant la maniobra d'inserció a l'òrbita halo objectiu. Aquest estalvi és el veritablement important, ja que en altres estudis que s'han fet pel projecte SOHO estan al voltant de 45 m/s de mitjana (veure [13]), i per tant evitar aquest salt de velocitats pot suposar poder utilitzar un motor amb menys potència per fer les maniobres.

La memòria finalitza amb la implementació de l'estratègia de transferència entre òrbites halo utilitzant també el model de sistema solar real. Tal com es posa de manifest en la part anterior, dedicada a la transferència del satèl.lit des de la Terra fins a l'òrbita halo, això en principi no és necessari, però pot ser-ho si per qualsevol motiu es fa necessari el canvi d'òrbita un cop el satèl.lit ja ha arribat a la família d'òrbites halo o bé perquè no ha estat possible inserir el satèl.lit en la varietat estable de l'òrbita halo que ha de ser la nominal.

## 1.2 El problema restringit. Utilitats

En una primera aproximació, el moviment d'un satèl.lit en el sistema solar, que no s'aparti excessivament de la Terra, es pot modelar de la següent manera:

- Suposar que les úniques forces gravitacionals que actuen sobre el satèl.lit són les degudes al Sol i a la Terra (que en el nostre cas cal considerar Terra + Lluna).
- Suposar que el camp gravitatori originat per la massa del satèl.lit no influeix en el moviment ni del Sol ni de la Terra.

- I finalment, suposar que la Terra (que la considerarem col·locada en el bari-centre Terra-Lluna) i el Sol es mouen descrivint una òrbites circulars planes al voltant del seu centre de masses.

Les desviacions d'aquest model respecte la situació real entre d'altres són les següents:

- Si el satèl·lit es mou entre les òrbites de la Terra i de la Lluna, o en una regió propera a aquesta, el fet que en el nostre model la Terra i la Lluna, estiguin agrupats en un sol cos pot portar-nos a resultats erronis.
- El satèl·lit, la Terra i el Sol també estan sotmesos a pertorbacions degudes als camps gravitatoris dels altres cossos del sistema solar, així com a possibles forces d'origen diferent com són per exemple les degudes a la pressió de radiació solar.
- Malgrat tenir una excentricitat baixa (al voltant de 0.0167), l'òrbita de la Terra no és circular, ni tampoc plana degut a les pertorbacions d'altres planetes.

Malgrat aquestes desviacions, el model proposat que en unes coordenades adequades s'anomena model restringit espacial de tres cossos (Sol, Terra+Lluna, satèl·lit) o RTBP, ha demostrat ser un bon model en molts problemes pràctics de la mecànica celeste.

Com que el nostre objectiu es descriure la trajectòria del satèl·lit, cal un sistema de coordenades que clarifiqui la visió el màxim possible, utilitzem per a aquest fi el sistema de coordenades anomenat sinòdic, l'obtenció completa del qual es pot trobar a [19] i que apuntem breument.

En el sistema sinòdic es normalitzen les unitats de temps, massa i longitud. Així, una volta del primari petit (la Terra), al voltant del primari gran (el Sol) triga  $2\pi$  unitats adimensionals de temps (es a dir, es fa amb moviment mig igual a a unitat), la distància entre els primaris val la unitat (per tant la unitat astronòmica és la unitat de longitud), i finalment, la suma de les masses dels primaris és també la unitat.

A més, el sistema de referència és giratori (i per tant no inercial) amb origen el centre de masses dels primaris, de tal manera que aquests prenen posicions fixes sobre l'eix X.

En el nostre model RTBP adoptat hem posat la Terra a la part negativa de l'eix X, en el punt  $(\mu - 1, 0, 0)$  i amb massa  $\mu$ , mentre que el Sol es troba en el punt  $(\mu, 0, 0)$  i amb massa  $1 - \mu$ .

El valor de  $\mu$  i les conversions d'unitats adimensionals en unitats físiques són les següents (segons [15]):

$$\mu = 3.040357143 \times 10^{-6} = \frac{\text{massa Terra-Lluna}}{\text{massa Terra-Lluna} + \text{massa Sol}}$$

unitat adimensional de longitud = 1 AU =  $1.4959787141 \times 10^8$  km.

unitat adimensional de temps = 58.132355281521 dies solars mitjos.

unitat adimensional de velocitat = 29784.73582435 m/s.

Les equacions que regeixen el moviment del satèl·lit resulten ser:

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2\dot{y} &= \Omega_x \\ \ddot{y} + 2\dot{x} &= \Omega_y \\ \ddot{z} &= \Omega_z \end{aligned} \tag{1.1}$$

on

$$\Omega(x, y, z) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1 - \mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} + \frac{1}{2}\mu(1 - \mu),$$

i

$$r_1^2 = (x - \mu)^2 + y^2 + z^2 \quad r_2^2 = (x - \mu + 1)^2 + y^2 + z^2.$$

Aquestes equacions tenen una integral primera anomenada Integral de Jacobi que ve donada per:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = 2\Omega(x, y, z) - C$$

on  $C$  és la constant de Jacobi que es conserva al llarg de cada òrbita.



És ben conegut que les equacions (1.1) tenen cinc punts d'equilibri, tres d'ells col·lineals amb els primaris, anomenats  $L_1$ ,  $L_2$  i  $L_3$ , situats respectivament entre els primaris, a l'esquerra del primari petit i a la dreta del primari gran. Els altres dos restants anomenats  $L_4$  i  $L_5$ , estan situats en el pla  $z = 0$  formant un triangle equilàter amb els primaris (veure la figura 1.1).

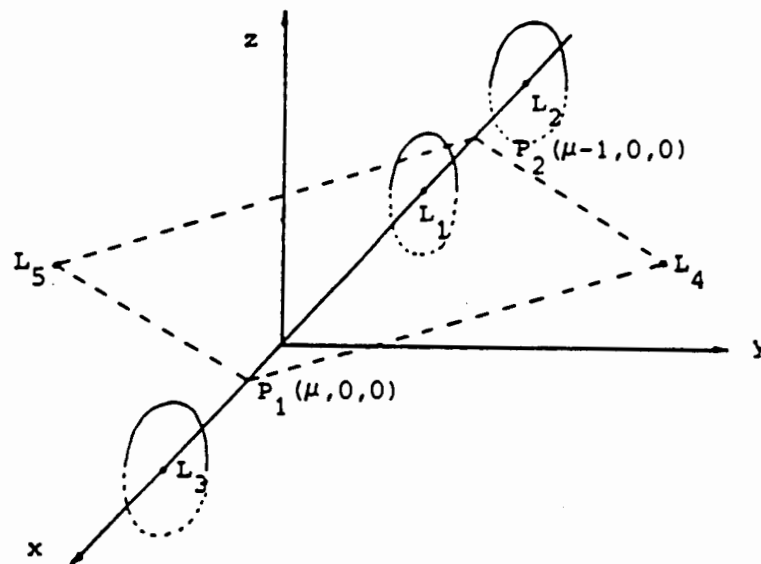


Figura 1.1. Problema restringit espacial i punts d'equilibri

Aquests punts d'equilibri per  $\mu = 3.040357143 \times 10^{-6}$  tenen per coordenades:

	X	Y
$L_1$	-0.989986054887962	0
$L_2$	-1.010075126632794	0
$L_3$	1.000001266815476	0
$L_4$	-0.499996959642857	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$L_5$	-0.499996959642857	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$

Mirats a l'espai físic aquests punts d'equilibri representen òrbites circulars en les quals l'atracció dels dos primaris es veu compensada per la força centrífuga, alhora que es manté la seva posició relativa.

En el sistema solar hi ha alguns exemples que confirmen la utilitat del problema restringit. Si prenem el Sol i Júpiter com a primaris, uns grups d'asteroides

anomenats Troians i Aqueus es mouen en les proximitats dels punts triangulars que defineixen aquests dos primaris. Si prenem la Terra i el Sol com a primaris, al voltant del punt d'equilibri  $L_2$  hi ha una certa concentració de pols interplanetari que es detecta per reflectir la llum solar i donar lloc al fenomen anomenat Gegenschein.

Malgrat ser inestables, els punts col·lineals estan en una immillorable posició a efectes de comunicació amb satèl·lits que estudiïn el Sol, ja que la seva posició relativa a la Terra es manté fixa i a més, el fet que la posició relativa al Sol també és fixa, evita l'haver de fer maniobres d'encarament dels aparells d'estudi. Així per exemple,  $L_1$  és un bon lloc d'observació solar, ja que a més de tenir-se sempre la superfície del Sol a l'abast, està relativament lluny de la Terra (aprox.  $1.5 \times 10^6$  km) i per tant del soroll que pot causar aquesta (mirar [4] i [6]). El punt  $L_2$  podria ser un bon lloc per a l'observació d'eclipses solars, encara que aquest punt té major importància en el sistema Terra-Lluna on esdevé una immillorable posició per a l'establiment de comunicacions amb una possible base translunar. El punt  $L_3$  torna a ser un bon punt d'observació solar, a l'estar més prop del Sol podrien fer-se estudis de la superfície solar i dels seus canvis.

## 1.3 Sistemes de referència i equacions del moviment al sistema solar

### 1.3.1 Sistemes de referència

Per a l'estudi de la transferència en el cas real, cal utilitzar diferents sistemes de referència. Essencialment són dos, el primer d'ells és un sistema de referència eclíptic amb origen el centre de masses instantani del sistema solar, i el segon és adimensional, extensió natural del sistema de referència del problema restringit i que serveix al mateix temps per a comparar i representar els resultats que obtenim, de manera anàloga a la que ho fem en el problema restringit.

Si notem per  $\vec{e}$  i per  $\vec{a}$  les coordenades espacials d'un punt en el sistema eclíptic i en el sistema adimensional respectivament, podem passar d'un sistema a l'altre via

una transformació del tipus:

$$\vec{e} = kC\vec{a} + \vec{b},$$

on  $k$  és un factor de canvi d'escala,  $C$  una matriu ortogonal i  $\vec{b}$  una translació.

Un cop hem seleccionat dos primaris, per exemple el baricentre Terra-Lluna i el Sol, el vector  $\vec{b}$  és la posició del centre de masses d'aquests dos cossos respecte la posició del centre de masses del sistema solar. Evidentment  $\vec{b}$ , així com les altres magnituds que apareixen a l'equació que defineix la transformació, són funcions del temps.

Notem per  $\vec{R}_p$  i  $\vec{R}_s$  les posicions dels dos primaris (el primari i el secundari) en el sistema de referència eclíptic, per  $\vec{R}_b$  la posició del baricentre i per  $\vec{V}_s$  la velocitat del secundari respecte del primari.

Com que en el sistema de referència sinòdic, el baricentre el tenim fixat a l'origen del sistema de coordenades resulta que  $\vec{b} = \vec{R}_b$ .

Al mateix temps, com que en el sistema adimensional d'unitats els primaris estan fixats en els punts  $(\mu, 0, 0)$  i  $(\mu - 1, 0, 0)$ , on  $\mu$  és el paràmetre de masses, resulta que  $k = |\vec{R}_p - \vec{R}_s|$ .

Si  $\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3$  denoten els tres vectors columna de la matriu  $C$ , aleshores prenem:

$$\begin{aligned}\vec{c}_1 &= \frac{\vec{R}_p - \vec{R}_s}{k}, \\ \vec{c}_3 &= \frac{(\vec{R}_s - \vec{R}_p) \wedge \vec{V}_s}{|(\vec{R}_s - \vec{R}_p) \wedge \vec{V}_s|}, \\ \vec{c}_2 &= \vec{c}_3 \wedge \vec{c}_1.\end{aligned}$$

Aquesta elecció ve determinada pels següents fets. En la determinació de  $\vec{c}_1$  estem demanant que al fer el canvi de coordenades al sistema sinòdic, el primari gran estigui situat a  $(\mu, 0, 0)$  i el petit a  $(\mu - 1, 0, 0)$ . Seleccionem llavors  $\vec{c}_3$  de tal manera que el pla  $(x, y)$ , en coordenades adimensionals, contingui en cada moment el vector velocitat del primari petit respecte del gran. Finalment determinem  $\vec{c}_2$  de manera que completi una referència ortonormal orientada positivament.

Les transformacions de coordenades per les velocitats i acceleracions s'obtenen a partir de l'anterior derivant. Degut al fet de que el canvi de coordenades per

les posicions depèn de la velocitat del primari petit respecte del gran, pel canvi de coordenades dels vectors velocitats i acceleració, necessitem de l'acceleració i de la sobreacceleració del primari petit respecte del gran, respectivament.

Un altre sistema de coordenades que cal utilitzar és el normalitzat. Aquest sistema s'agafa de tal manera que si eliminem totes les pertorbacions, les equacions del moviment es redueixen a la formulació donada per Richardson en el problema restringit (veure secció (3.2.3) i [16]). Per això ens cal definir uns punts en el sistema adimensional amb les mateixes relacions geomètriques que defineixen els punts d'equilibri en el problema restringit, malgrat el fet que el sistema pertorbat no té punts d'equilibri.

Sigui  $L_i$  un d'aquests punts definits de manera geomètrica. Per passar del sistema adimensional al normalitzat, fem una translació de l'origen de coordenades al punt  $L_i$  i escollim la unitat de distància igual a la distància des del primari gran a  $L_3$ , en el cas de prendre coordenades normalitzades en aquest punt, o bé igual a la distància del primari petit a  $L_1$  (resp.  $L_2$ ) si les coordenades normalitzades les prenem a  $L_1$  (resp.  $L_2$ ). Pel cas de  $L_1$  i  $L_2$  la direcció positiva dels eixos  $x$  i  $y$  canvien de signe. En cas de prendre coordenades normalitzades en el punt  $L_4$  o  $L_5$  només cal fer la translació, no cal cap canvi d'escala ja que la distància d'aquests punts als primaris és  $u$ .

Ens cal dir només com cal canviar el temps al passar d'un sistema de referència a un altre. Pel cas dels sistemes de referència adimensional i normalitzat la unitat de temps és la mateixa. La definim de tal manera que el temps mig que el primari petit triga a donar una volta al voltant del gran en el sistema eclíptic passa a ser  $2\pi$  en les unitats adimensionals. En el sistema Terra+Lluna-Sol això vol dir que l'anomalia mitjana del Sol és  $u$ .

Arribat a aquest punt apareix un problema de coherència. Nosaltres volem expressar les equacions del moviment com una pertorbació del problema restringit. Si considerem els primaris, el Sol i el baricentre Terra-Lluna, aquest haurien de complir la tercera llei de Kepler  $n^2 a^3 = G(m_p + m_s)$ . En aquesta relació  $n$  és el moviment mig associat amb la longitud mitjana del primari petit al voltant del gran

i  $a$  és la distància mitjana entre els primaris. Resulta que aquesta equació no es satisfà. Per a tal que es compleixi el que es fa és modificar (poc) la massa del primari gran de manera que la tercera llei de Kepler es verifiqui i llavors la resta de la massa es considera com una pertorbació més situada en el lloc del primari gran.

### 1.3.2 Equacions del moviment

En aquesta secció anem a veure com es poden desenvolupar les equacions del moviment en el sistema solar real, de manera que es puguin estudiar els moviments pertorbats al voltant dels punts geomètricament definits a partir dels punts d'equilibri del problema restringit.

En primer lloc a partir de les idees de Richardson i de Farquhar a [7] es desenvolupen les equacions del moviment al voltant dels tres punts col·lineals en el sistema Terra+Lluna-Sol de tal manera que:

1. S'adapten ràpidament a l'anàlisi de pertorbacions.
2. Tots els termes no lineals fins qualsevol ordre del desenvolupament es poden obtenir utilitzant relacions de recurrència que es poden implementar en un ordinador.
3. Les equacions tenen la mateixa forma que les obtingudes per Richardson en el problema restringit més pertorbacions.

Estem estudiant el moviment d'un satèl·lit en el sistema solar format pel Sol, la Terra, la Lluna i varis planetes  $P_1, \dots, P_k$ .

En primer lloc considerem un sistema de referència inercial amb origen el centre de masses del sistema solar i els eixos paral·lels als eclíptics. El temps  $t$  el mesurem en dies julians modificats 1950.0 (temps uniforme contat en dies a partir del començament del dia u de gener de 1950) i les distàncies en kilòmetres.

Siguin  $\vec{R}, \vec{R}_S, \vec{R}_E, \vec{R}_M, \vec{R}_B$  i  $\vec{R}_{P_i}$  (resp.  $O, S, E, M, B, P_i$ ) els vectors posició respecte el sistema de referència inercial (resp. les masses) del satèl·lit, Sol, Terra,

Lluna, baricentre Terra-Lluna i l'*i*-èssim planeta, respectivament. Les equacions del moviment del satèl·lit les podem escriure com:

$$\ddot{\vec{R}} = G \sum_{A \in \{S, E, M, P_1, \dots, P_k\}} \frac{A(\vec{R}_A - \vec{R})}{|\vec{R}_A - \vec{R}|^3},$$

on  $G$  es la constant de gravitació i els punts denoten les derivades respecte el temps  $t$ .

Sigui  $\alpha$  la pressió de radiació solar, mesurada en Newtons/metre<sup>2</sup>, a una unitat astronòmica de distància, és a dir:  $\alpha = 4.51 \cdot 10^{-6}$ . Si notem per  $m$  (mesurada en kilos) i per  $\sigma$  (mesurada en metres quadrats) a la massa i a la secció efectiva a la pressió de radiació del satèl·lit, tenim que la contribució de la pressió de radiació a les equacions del moviment és:

$$-\tilde{\alpha} \frac{\vec{R}_S - \vec{R}}{|\vec{R}_S - \vec{R}|^3},$$

on

$$\tilde{\alpha} = \frac{149597870.66^2 \times 86400^2 \alpha \sigma}{1000m} \frac{\text{kilometres}^3}{(\text{dies julians modificats})^2}.$$

Notem per  $a_B$  al semieix major, i per  $n_B$ , al moviment mig del baricentre Terra-Lluna al voltant del Sol. Aquest moviment mig té en compte els termes seculars en l'argument de periheli eclíptic i en l'anomalia mitjana, deguts a l'efecte dels planetes. Degut a la tercera llei de Kepler tenim que  $n_B^2 a_B^3$  és proper a  $G(S + E + M)$ . A fi de que aquesta llei es compleixi, introduïm una massa modificada del Sol,  $\bar{S}$ , mitjançant

$$n_B^2 a_B^3 = G(\bar{S} + E + M).$$

Aleshores si tenim en compte a més la pressió de radiació, les equacions del moviment del satèl·lit les podem escriure de la següent manera:

$$\ddot{\vec{R}} = \frac{G\bar{S}(\vec{R}_S - \vec{R})}{|\vec{R}_S - \vec{R}|^3} + \frac{G\tilde{S}(\vec{R}_S - \vec{R})}{|\vec{R}_S - \vec{R}|^3} + \sum_{A \in \{E, M, P_1, \dots, P_k\}} \frac{GA(\vec{R}_A - \vec{R})}{|\vec{R}_A - \vec{R}|^3},$$

on  $\tilde{S} = S - \bar{S} - \tilde{\alpha}/G$ . A la contribució de  $S - \bar{S}$  a  $\tilde{S}$  en les equacions anteriors li direm el terme de coherència (o el terme de coherència de Kepler).

Si tenim en compte que el Sol satisfà l'equació

$$\ddot{\vec{R}}_S = \sum_{A \in \{E, M, P_1, \dots, P_k\}} \frac{GA(\vec{R}_A - \vec{R}_S)}{|\vec{R}_A - \vec{R}_S|^3},$$

llavors si notem per  $\vec{r} = \vec{R} - \vec{R}_S$ , tenim que les equacions del moviment del satèl·lit respecte del sistema de referència eclíptic amb origen al Sol són

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{G\bar{S}\vec{r}}{|\vec{r}|^3} - \frac{G\tilde{S}\vec{r}}{|\vec{r}|^3} + \sum_{A \in \{E, M, P_1, \dots, P_k\}} GA \left( \frac{\vec{r}_{SA} - \vec{r}}{|\vec{r}_{SA} - \vec{r}|^3} - \frac{\vec{r}_{SA}}{|\vec{r}_{SA}|^3} \right),$$

on  $\vec{r}_{SA}$  denota el vector que va de  $S$  a  $A$ .

Podem notar ara que les equacions anteriors es corresponen amb les equacions de Lagrange donades pel Lagrangiana

$$L = \frac{1}{2} \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} + \frac{G\bar{S}}{|\vec{r}|} + \frac{G\tilde{S}}{|\vec{r}|} + \sum_{A \in \{E, M, P_1, \dots, P_k\}} GA \left( \frac{1}{|\vec{r}_{SA} - \vec{r}|} - \frac{\vec{r}_{SA} \cdot \vec{r}}{|\vec{r}_{SA}|^3} \right),$$

o el que és el mateix

$$L = \frac{1}{2} \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} + K \left( \frac{1 - \mu_B}{|\vec{r}|} + \frac{\mu_{\tilde{S}}}{|\vec{r}|} \right) + K \sum_{A \in \{E, M, P_1, \dots, P_k\}} \mu_A \left( \frac{1}{|\vec{r}_{SA} - \vec{r}|} - \frac{\vec{r}_{SA} \cdot \vec{r}}{|\vec{r}_{SA}|^3} \right),$$

on  $K = G(\bar{S} + E + M)$  i  $\mu_A = A(\bar{S} + E + M)^{-1}$  per  $A \in \{\bar{S}, \tilde{S}, E, M, P_1, \dots, P_k\}$ .  
Notem també que  $\mu_{\bar{S}} = 1 - \mu_B$  on  $\mu_B = (E + M)(\bar{S} + E + M)^{-1}$ .

La geometria pel punt d'equilibri  $L_1$  pel cas Sol i baricentre Terra+Lluna està

representada a la figura 1.2.

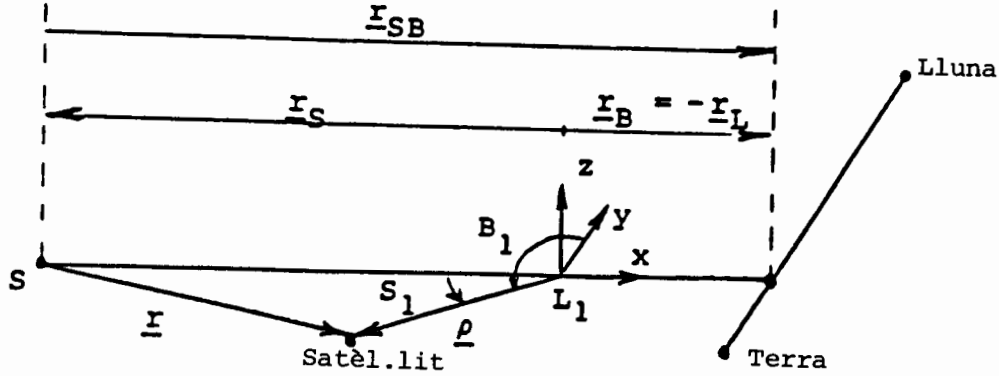


Figura 1.2. Geometria al voltant del punt d'equilibri  $L_1$ .

La geometria pels altres punts d'equilibri és semblant i es segueix de la definida pel cas del problema restringit. Suposant que  $L_i$  (per  $i = 1, 2, 3$ ) està localitzat respecte del baricentre Terra+Lluna mitjançant el vector  $\vec{r}_L$ , l'expressió que determina  $\vec{r}_L$  és

$$\frac{\vec{r}_L}{|\vec{r}_{SB}|^3} - \frac{\mu_B \vec{r}_L}{|\vec{r}_L|^3} = (1 - \mu_B) \left( \frac{\vec{r}_S}{|\vec{r}_S|^3} - \frac{\vec{r}_{SB}}{|\vec{r}_{SB}|^3} \right).$$

Aquesta equació és equivalent a la quintica d'Euler que determina els punts col·lineals en el problema restringit. Si  $\gamma_1 = r_{L_1} r_{SB}^{-1}$ ,  $\gamma_2 = r_{L_2} r_{SB}^{-1}$ ,  $\gamma_3 = r_{L_3} r_{SB}^{-1}$ , les localitzacions dels punts col·lineals  $L_i$  s'obtenen a partir de les solucions de les quintiques:

$$\begin{aligned} \gamma_1^5 - (3 - \mu_B)\gamma_1^4 + (3 - 2\mu_B)\gamma_1^3 - \mu_B\gamma_1^2 + 2\mu_B\gamma_1 - \mu_B &= 0, \\ \gamma_2^5 + (3 - \mu_B)\gamma_2^4 + (3 - 2\mu_B)\gamma_2^3 - \mu_B\gamma_2^2 - 2\mu_B\gamma_2 - \mu_B &= 0, \\ \gamma_3^5 + (2 + \mu_B)\gamma_3^4 + (1 + 2\mu_B)\gamma_3^3 - (1 - \mu_B)\gamma_3^2 - 2(1 - \mu_B)\mu_B\gamma_3 - (1 - \mu_B) &= 0. \end{aligned}$$

Ara realitzem una translació del nostre sistema de referència posant l'origen al punt  $L_i$  del sistema Terra+Lluna-Sol. Sigui doncs  $\vec{\rho} = \vec{r} - \vec{r}_{SL}$  el vector posició del satèl·lit en el sistema de referència eclíptic amb origen  $L_i$ . Les posicions del Sol, la



Terra, la Lluna, un planeta  $P_i$  i el baricentre Terra-Lluna respecte de  $L_i$ ; els denotem per  $\vec{r}_S, \vec{r}_E, \vec{r}_M, \vec{r}_{P_i}$ , i  $\vec{r}_B$  respectivament.

En aquest nou sistema de referència el Lagrangiana s'escriu com

$$L = \frac{1}{2} \dot{\vec{\rho}} \cdot \dot{\vec{\rho}} - \dot{\vec{\rho}} \cdot \dot{\vec{r}}_S + K \left( \frac{1 - \mu_B}{|\vec{r}_S - \vec{\rho}|} + \mu_B \left( \frac{1}{|\vec{r}_B - \vec{\rho}|} - \frac{\vec{r}_{SB} \cdot \vec{\rho}}{|\vec{r}_{SB}|^3} \right) \right) + \frac{K \mu_S}{|\vec{r}_S - \vec{\rho}|} + K \sum_{A \in \{E, M, P_1, \dots, P_k, B\}} i(A) \mu_A \left( \frac{1}{|\vec{r}_A - \vec{\rho}|} - \frac{\vec{r}_{SA} \cdot \vec{\rho}}{|\vec{r}_{SA}|^3} \right),$$

on hem omès del Lagrangiana els termes que només depenen del temps i

$$i(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } A \in \{E, M, P_1, \dots, P_k\}, \\ -1 & \text{si } A = B. \end{cases}$$

Aquest Lagrangiana es pot rescriure de la forma

$$L = \frac{1}{2} \dot{\vec{\rho}} \cdot \dot{\vec{\rho}} - \dot{\vec{\rho}} \cdot \dot{\vec{r}}_S + K(1 - \mu_B) \left( \frac{1}{|\vec{r}_S - \vec{\rho}|} - \frac{\vec{r}_S \cdot \vec{\rho}}{|\vec{r}_S|^3} \right) + K \mu_B \left( \frac{1}{|\vec{r}_B - \vec{\rho}|} - \frac{\vec{r}_B \cdot \vec{\rho}}{|\vec{r}_B|^3} \right) + K \left( (1 - \mu_B) \frac{\vec{r}_S \cdot \vec{\rho}}{|\vec{r}_S|^3} + \mu_B \left( \frac{\vec{r}_B \cdot \vec{\rho}}{|\vec{r}_B|^3} - \frac{\vec{r}_{SB} \cdot \vec{\rho}}{|\vec{r}_{SB}|^3} \right) \right) + \frac{K \mu_S}{|\vec{r}_S - \vec{\rho}|} + K \sum_{A \in \{E, M, P_1, \dots, P_k, B\}} i(A) \mu_A \left( \frac{1}{|\vec{r}_A - \vec{\rho}|} - \frac{\vec{r}_{SA} \cdot \vec{\rho}}{|\vec{r}_{SA}|^3} \right).$$

Utilitzant les definicions de  $L_i$  tenim

$$(1 - \mu_B) \frac{\vec{r}_S}{|\vec{r}_S|^3} + \mu_B \frac{\vec{r}_B}{|\vec{r}_B|^3} = \frac{\vec{r}_B - (1 - \mu_B) \vec{r}_{SB}}{|\vec{r}_{SB}|^3},$$

per tant

$$\begin{aligned} (1 - \mu_B) \frac{\vec{r}_S \cdot \vec{\rho}}{|\vec{r}_S|^3} + \mu_B \left( \frac{\vec{r}_B \cdot \vec{\rho}}{|\vec{r}_B|^3} - \frac{\vec{r}_{SB} \cdot \vec{\rho}}{|\vec{r}_{SB}|^3} \right) &= \\ = \left( \frac{\vec{r}_B - (1 - \mu_B) \vec{r}_{SB}}{|\vec{r}_{SB}|^3} - \frac{\mu_B \vec{r}_{SB}}{|\vec{r}_S|^3} \right) \cdot \vec{\rho} &= \\ = \frac{\vec{r}_S \cdot \vec{\rho}}{|\vec{r}_{SB}|^3}, & \end{aligned}$$

i llavors el Lagrangiana queda com

$$\begin{aligned}
L = & \frac{1}{2} \dot{\vec{\rho}} \cdot \dot{\vec{\rho}} - \dot{\vec{\rho}} \cdot \dot{\vec{r}}_S + K(1 - \mu_B) \left( \frac{1}{|\vec{r}_S - \vec{\rho}|} - \frac{\vec{r}_S \cdot \vec{\rho}}{|\vec{r}_S|^3} \right) + \\
& + K\mu_B \left( \frac{1}{|\vec{r}_B - \vec{\rho}|} - \frac{\vec{r}_B \cdot \vec{\rho}}{|\vec{r}_B|^3} \right) + \\
& + \frac{K\vec{r}_S \vec{\rho}}{|\vec{r}_{SB}|^3} + \frac{K\mu_S}{|\vec{r}_S - \vec{\rho}|} + \\
& + K \sum_{A \in \{E, M, P_1, \dots, P_k, B\}} i(A) \mu_A \left( \frac{1}{|\vec{r}_A - \vec{\rho}|} - \frac{\vec{r}_{SA} \cdot \vec{\rho}}{|\vec{r}_{SA}|^3} \right).
\end{aligned}$$

El proper pas és expressar el Lagrangiana en coordenades normalitzades. En primer lloc considerem un sistema de referència amb origen el punt d'equilibri  $L_i$ , l'eix  $x$  apunta en la direcció de la línia formada pels dos primaris (el Sol i el baricentre Terra-Lluna) amb el sentit del primari gran al petit, el pla  $(x, y)$  coincideix amb el pla instantani de moviment dels primaris, i l'eix  $z$  completa un sistema de coordenades positivament orientat.

Siguin  $\theta$  i  $\delta$  la longitud i la latitud del baricentre Terra-Lluna en coordenades eclíptiques centrades al Sol. Tenim llavors que el vector unitari en la direcció de l'eix  $x$  és

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{r}_{SB}}{|\vec{r}_{SB}|},$$

el vector unitari en la direcció de l'eix  $z$

$$\vec{e}_3 = \frac{\vec{r}_{SB} \wedge \dot{\vec{r}}_{SB}}{|\vec{r}_{SB} \wedge \dot{\vec{r}}_{SB}|},$$

i el vector unitari en la direcció de l'eix  $y$  és  $\vec{e}_2 = \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1$ . Sigui  $C$  la matriu formada pels vectors  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  posats en columnes:

$$C = \begin{pmatrix} \cos \delta \cos \theta & -T(\sin \theta + R \sin \delta \cos \theta) & T(-\cos \theta \sin \delta + R \sin \theta) \\ \cos \delta \sin \theta & T(\cos \theta - R \sin \delta \sin \theta) & -T(\sin \theta \sin \delta + R \cos \theta) \\ \sin \delta & TR \cos \delta & T \cos \delta \end{pmatrix},$$

on  $R = \dot{\delta}(\dot{\theta} \cos \delta)^{-1}$  i  $T = (1 + R^2)^{-1/2}$ . Notem que la matriu  $C$  és ortogonal.

Anem ara a considerar el canvi de variables del sistema de referència eclíptic amb origen  $L_i$ ,  $\vec{\rho}$ , al sistema de referència normalitzat amb origen a  $L_i$ ,  $\vec{a} = (x, y, z)$ , donat per

$$\vec{\rho} = kC\vec{a},$$

on el factor d'escala s'agafa  $k = r_{L_i} = \gamma_i r_{SB}$  per a  $L_{1,2}$  i com  $k = r_S = \gamma_i r_{SB}$  per a  $L_3$ .

En el sistema  $(x, y, z)$ , les unitats de massa, temps i distància les agafem de la següent manera (hem canviat  $\gamma_i$  per  $\gamma$  a fi d'abreujar):

- La unitat de temps l'agafem com  $\gamma$  vegades el semieix major  $a_B$  del baricentre Terra-Lluna al voltant del Sol.
- La nova unitat de temps  $s$  és el temps  $t$  mesurat en dies julians modificats i escalat per  $\gamma^{3/2}$ . Per tant  $s = \gamma^{3/2}t$ . D'ara en endavant les primes denoten derivades respecte de  $s$ .
- La unitat de massa l'agafem de manera que

$$K = G(\bar{S} + E + M) = n_B^2 a_B^3 = 1,$$

on  $n_B$  és el moviment mig del baricentre Terra-Lluna al voltant del Sol.

El sistema  $(x, y, z)$  amb aquestes noves unitats és el sistema normalitzat centrat a  $L_1$ .

Notem que en aquests moments el pas de coordenades eclíptiques a normalitzades es fa realitzant primer la translació a  $L_i$ .

Si es tenen en compte les propietats de la matriu  $C$  i desenvolupant els darrers termes de Lagrangiana utilitzant els polinomis de Legendre, el nou Lagrangiana esdevé:

$$\begin{aligned} L = & \frac{1}{2} \{ k^2 (x'^2 + y'^2 + z'^2) + 2kk'(xx' + yy' + zz') + \\ & + 2k^2 (E(xy' - yx') + F(yz' - zy')) + k'^2 (x^2 + y^2 + z^2) + \\ & + k^2 (Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxz) \} - \\ & - k'^2 x_S x - kk' x_S x' - k^2 (Ax_S x + Dx_S z) - k^2 E x_E y' + \\ & + Kk^{-1} \sum_{n \geq 2} c_n a^n P_n\left(\frac{x}{a}\right) + Kk^{-1} x_S x + \\ & + Kk^{-1} \gamma^{-3} \frac{\mu_S}{\bar{r}_S} \sum_{n \geq 1} \left(\frac{a}{\bar{r}_S}\right)^n P_n(\cos S_1) + \\ & + Kk^{-1} \gamma^{-3} \sum_{A \in \mathcal{P}} i(A) \mu_A \left( -\frac{a \cos A_2}{\bar{r}_{SA}^2} + \frac{1}{\bar{r}_A} \sum_{n \geq 1} \left(\frac{a}{\bar{r}_A}\right)^n P_n(\cos A_1) \right), \end{aligned}$$

on  $\mathcal{P} = \{E, M, P_i, B\}$  i els vectors normalitzats s'han distingit amb una titlla. Recordem que en coordenades normalitzades  $\vec{r}_E$  i  $\vec{r}_S$  només tenen components en  $x$ . L'angle  $A_1$  (resp.  $A_2$ ) és l'angle entre  $\vec{r}_A$  (resp.  $\vec{r}_{SA}$ ) i  $a$ .

Els coeficients A, B, C, D, E, i F , així com les seves derivades són funcions de la longitud  $\theta$  i de la latitud  $\delta$  del baricentre Terra-Lluna i es defineixen com

$$\begin{aligned}
 A &= \theta'^2 \cos^2 \delta + \delta'^2, \\
 B &= \frac{(\cos^2 \delta + \sin^2 \delta R^2)\theta'^2 + (2 + R^2)\delta'^2 + (R' + \sin \delta \theta')^2}{(1 + R^2)} - \\
 &\quad - \frac{R^2 R'^2}{(1 + R^2)^2}, \\
 C &= \frac{R^2 \theta'^2 - \delta'^2 + (R' + \sin \delta \theta')^2}{(1 + R^2)} - \frac{R^2 R'^2}{(1 + R^2)^2}, \\
 D &= -\sin \delta \cos \delta \theta'^2 (1 + R^2)^{1/2} - \frac{\cos \delta \theta' R'}{(1 + R^2)^{1/2}}, \\
 E &= \frac{\theta' \cos \delta + \delta' R}{(1 + R^2)^{1/2}}, \\
 F &= \theta' \sin \delta + \frac{R'}{(1 + R^2)},
 \end{aligned}$$

on

$$R = \frac{\delta'}{\theta' \cos \delta}.$$

A partir del Lagrangiana les equacions del moviment es poden escriure com (veure els detalls a [7]):

$$\begin{aligned}
 x'' &= 2y' + (1 + 2c_2)x + \sum_{n \geq 2} (n+1)c_{n+1}a^n P_n\left(\frac{x}{a}\right) + \\
 &\quad + C(0) \sum_{n \geq 2} n c_n a^{n-1} P_n\left(\frac{x}{a}\right) + \\
 &\quad + C(1)x + C(2)y + C(3)z + C(4)x' + C(5)y' + C(7) + \\
 &\quad + Kk^{-3}\gamma^{-3}\mu_S(x - x_S) \sum_{n \geq 2} \frac{a^{n-2}}{x_S^{n+1}} \bar{P}_n(\cos S_1) + \\
 &\quad + Kk^{-3}\gamma^{-3} \sum_{A \in \mathcal{P}} i(A)\mu_A \left( -\frac{x_{SA}}{r_{SA}^3} + (x - x_A) \sum_{n \geq 2} \frac{a^{n-2}}{r_A^{n+1}} \bar{P}_n(\cos A_1) \right), \\
 y'' &= -2x' + (1 - c_2)y + y \sum_{n \geq 3} c_n a^{n-2} \bar{P}_n\left(\frac{x}{a}\right) + \\
 &\quad + C(0)y \sum_{n \geq 2} c_n a^{n-2} \bar{P}_n\left(\frac{x}{a}\right) + \\
 &\quad + C(11)x + C(12)y + C(13)z + C(14)x' + C(15)y' + C(16)z' +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +C(17) + Kk^{-3}\gamma^{-3}\mu_S y \sum_{n \geq 2} \frac{a^{n-2}}{x_S^{n+1}} \overline{P}_n(\cos S_1) + \\
& + Kk^{-3}\gamma^{-3} \sum_{A \in \mathcal{P}} i(A)\mu_A \left( -\frac{y_{SA}}{\tilde{r}_{SA}^3} + (y - y_A) \sum_{n \geq 2} \frac{a^{n-2}}{\tilde{r}_A^{n+1}} \overline{P}_n(\cos A_1) \right), \\
z'' = & -c_2 z + z \sum_{n \geq 3} c_n a^{n-2} \overline{P}_n\left(\frac{x}{a}\right) + \\
& + C(0)z \sum_{n \geq 2} c_n a^{n-2} \overline{P}_n\left(\frac{x}{a}\right) + \\
& + C(21)x + C(22)y + C(23)z + C(25)y' + C(26)z' + C(27) + \\
& + Kk^{-3}\gamma^{-3}\mu_S z \sum_{n \geq 2} \frac{a^{n-2}}{x_S^{n+1}} \overline{P}_n(\cos S_1) + \\
& + Kk^{-3}\gamma^{-3} \sum_{A \in \mathcal{P}} i(A)\mu_A \left( -\frac{z_{SA}}{\tilde{r}_{SA}^3} + (z - z_A) \sum_{n \geq 2} \frac{a^{n-2}}{\tilde{r}_A^{n+1}} \overline{P}_n(\cos A_1) \right),
\end{aligned}$$

on  $\mathcal{P} = \{S, M, P_1, \dots, P_k\}$ ,  $\overline{P}_n(\alpha) = -d(P_{n-1}(\alpha))/d\alpha$ , i

$$\begin{aligned}
C(0) &= Kk^{-3} - 1, \\
C(1) &= A - 1 - k''k^{-1}, \\
C(2) &= 2k'k^{-1}E + E', \\
C(3) &= D, \\
C(4) &= -2k'k^{-1}, \\
C(5) &= 2(\theta' - \theta'^2 + E - 1), \\
C(7) &= (k''k^{-1} - A + Kk^{-3})x_S, \\
C(12) &= B - 1 - k''k^{-1}, \\
C(13) &= 2k'k^{-1}F + F', \\
C(16) &= 2F, \\
C(23) &= C - k''k^{-1}.
\end{aligned}$$

i  $C(11) = -C(2)$ ,  $C(14) = -C(5)$ ,  $C(15) = C(4)$ ,  $C(17) = x_S C(2)$ ,  $C(21) = C(3)$ ,  
 $C(22) = -C(13)$ ,  $C(25) = -C(16)$ ,  $C(26) = C(4)$ ,  $C(27) = -x_S C(3)$ .

### 1.3.3 El model JPL

El model que utilitzarem per a fer els càlculs de la transferència en el cas real és el model JPL. Hem implementat a l'ordinador un arxiu d'accés directe amb les efemèrides JPL DE-118. Aquest arxiu conté 790 registres de 5960 bytes, i cada registre conté dades dels cossos del sistema solar per a 32 dies. Les dades poden ser utilitzades a l'interval comprés entre el 10-12-1959 (3630 MJD1950)<sup>1</sup> i el 21-01-2022 (26318 MJD1950).

Aquest arxiu no conté les coordenades dels planetes (dia a dia per exemple) sinó els coeficients dels desenvolupaments, en termes dels polinomis de Chebyshev, per a diferents intervals de temps (típicament són 32 dies llevat per Mercuri que són 8 dies, la Terra 16 dies i la Lluna 4 dies).

Utilitzant la següent fórmula recursiva per la avaluació dels polinomis de Chebyshev:

$$\begin{aligned}P_0(x) &= 0 \\P_1(x) &= x \\P_{n+1}(x) &= 2xP_n(x) - P_{n-1}(x), \quad n \geq 1,\end{aligned}$$

es poden calcular fàcilment les posicions, velocitats, acceleracions i sobreacceleracions dels cossos. Totes les coordenades dels planetes estan donades en el sistema equatorial mig 1950.0 amb origen el centre de masses del sistema solar, llevat de la Lluna que és geocèntrica. Les unitats que hem escollit per a les posicions, velocitats, acceleracions i sobreacceleracions són Km, Km/dia, Km/(dia)<sup>2</sup> i km/(dia)<sup>3</sup> respectivament.

Les constants que hem adoptat pel càlcul de trajectòries són també les del JPL:

Unitat Astronòmica (AU) : 149597870.66 Km.

Relació de masses Terra/Lluna : 81.300587.

Coefficient de pressió de radiació solar :  $4.51 \times 10^{-9}$  Kg Km / (m s)<sup>2</sup> (és la força que actua per unitat de superfície a una unitat astronòmica).

---

<sup>1</sup>MJD1950 Indica dies julians modificats 1950.0 i correspon al temps, comptat en dies, que ha passat des del començament de l'u de gener de l'any 1950.

Potencials gravitacionals dels cossos en AU<sup>3</sup> / dia<sup>2</sup>:

Mercuri	$0.49125474514508 \times 10^{-10}$
Venus	$0.72434562096328 \times 10^{-9}$
Terra+Lluna	$0.89970116585573 \times 10^{-9}$
Mars	$0.95495289422241 \times 10^{-10}$
Júpiter	$0.28253421034459 \times 10^{-6}$
Saturn	$0.84594685048307 \times 10^{-7}$
Urà	$0.12888162381380 \times 10^{-7}$
Neptú	$0.15321124812843 \times 10^{-7}$
Plutó	$0.22762477518637 \times 10^{-11}$
Lluna	$(\text{Terra} + \text{Lluna}) / 82.300587$
Sol	$0.29591220828559 \times 10^{-3}$

## Capítol 2

# Solucions homoclíniques i heteroclíniques associades als punts $L_4$ i $L_5$

### 2.1 Introducció

Ja des del temps de Strömngren [18] és ben conegut que algunes famílies d'òrbites periòdiques del problema restringit i pla finalitzen en una "òrbita" formada per un parell d'òrbites heteroclíniques que connecten els dos punts triangulars d'equilibri. De fet, pel valor del paràmetre de masses igual a 0.5, Strömngren va calcular cinc òrbites heteroclíniques simètriques, que combinades per parelles, algunes d'elles eren límit de famílies d'òrbites periòdiques simètriques ben conegudes (veure [19]). Algunes òrbites homoclíniques (o òrbites periòdiques asimptòtiques d'acord amb la nomenclatura clàssica) també van ser calculades per Strömngren. Famílies d'òrbites periòdiques que finalitzen en algunes d'aquestes darreres foren donades per Danby [2], Szebehely i Nacozy [20] i per Szebehely i Van Flandern [21] pel paràmetre de masses igual a 0.5.

J. Henrard a [12] va demostrar la conjectura d'Strömngren, d'acord amb la qual una classe de parelles d'òrbites asimptòtiques són límit de famílies d'òrbites periòdiques. Resultats posteriors de Devaney a [3] demostren que aquest fenomen passa en els sistemes Hamiltonians i reversibles.

En aquesta primera part de la memòria fem un càlcul sistemàtic de les òrbites



homoclíniques i heteroclíniques associades amb els punts d'equilibri triangulars del problema restringit. Per a aquest propòsit, en primer lloc fem un estudi numèric preliminar de les varietats invariants, estable i inestable associades a aquests punts d'equilibri. Obtenim així resultats sobre el nombre i la forma de les òrbites homoclíniques i heteroclíniques al variar el paràmetre de masses.

Com a primer resultat del treball trobem que el nombre d'òrbites heteroclíniques simètriques per a  $\mu = 0.5$  que intersequen l'eix  $x$  només una vegada de forma perpendicular és quatre. Aquest resultat ja era conegut per Strömngren. Dues d'aquestes òrbites trobades són terminació natural de famílies d'òrbites periòdiques simètriques de les classes  $(k)$  i  $(l)$  d'acord amb la terminologia d'Strömngren (veure [19] pp. 484-5).

Al variar el valor del paràmetre de masses, el nombre d'òrbites heteroclíniques també varia. Els resultats numèrics són poc clars per a valors petits de  $\mu$ . En aquest cas mostrem sota quines condicions aquest nombre es fa infinit tant per les òrbites homoclíniques com per les heteroclíniques.

## 2.2 Estudi local de les varietats invariants dels punts d'equilibri triangulars

Si  $p$  és un punt d'equilibri d'un camp vectorial  $X$  definit en una certa varietat  $M$ , les varietats estable i inestable de  $p$  (les quals s'acostumen a representar per  $W^s(p)$  i  $W^u(p)$  respectivament) es defineixen com:

$$W^s(p) = \{x \in M, \varphi(t, x) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} p\}$$

$$W^u(p) = \{x \in M, \varphi(t, x) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} p\}$$

on  $\varphi(t, x)$  denota el flux associat al camp vectorial  $X$  que passa per  $x$ .

Si la varietat  $M$ , en la qual tenim definit  $X$ , es 4-dimensional, d'acord amb [3] el camp vectorial es diu  $R$ -reversible, si  $R$  és un difeomorfisme de  $M$  que satisfà:

- (i)  $R^2 = Id$ , ( $R$  és una involució),

(ii)  $\dim \text{Fix}(R) = 2$ , (on  $\text{Fix}(R) = \{p \in M, R(p) = p\}$ ),

(iii)  $DR(X) = -XR$ , (on  $D$  denota la diferencial).

És ben conegut (veure [19]) que el problema restringit és reversible amb:

$$R_1(q_1, q_2, p_1, p_2) = (q_1, -q_2, -p_1, p_2),$$

i pel cas de  $\mu = 1/2$  a més per:

$$R_2(q_1, q_2, p_1, p_2) = (-q_1, q_2, p_1, -p_2),$$

on  $q_i$  i  $p_i$  representen les posicions i moments del tercer cos respectivament.

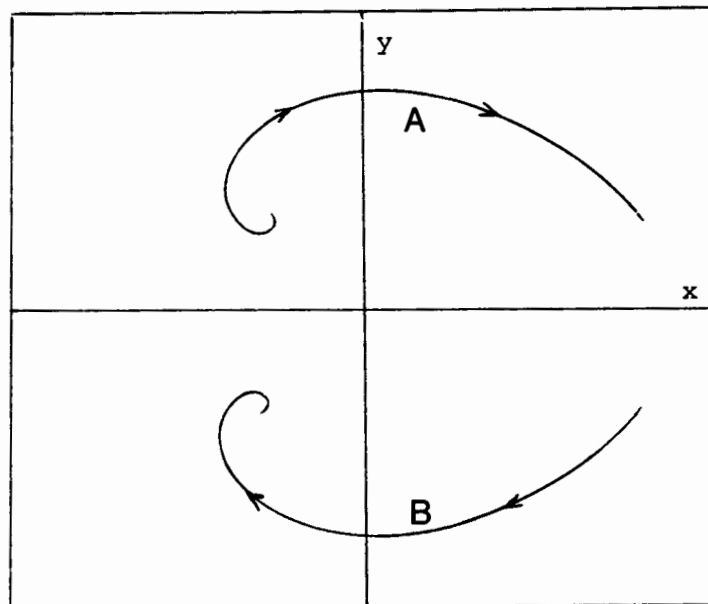


Figura 2.1. Simetria  $R_1$ . Si A és una òrbita recorreguda en el sentit indicat llavors B també ho és, i a l'inrevés.

Utilitzant aquestes simetries pel cas dels punts d'equilibri triangulars  $L_4$  i  $L_5$ , obtenim les següents relacions que ens són útils en els càlculs posteriors:

$$R_1(W^s(L_4)) = W^u(L_5),$$

$$R_1(W^u(L_4)) = W^s(L_5),$$

A més per a  $\mu = 1/2$ :

$$R_2(W^s(L_i)) = W^u(L_i), \text{ amb } i = 4, 5.$$

Si a les equacions del moviment del problema restringit els hi apliquem una translació que porti l'origen de coordenades a  $L_4$ , i després fem una rotació d'eixos d'angle  $\alpha$ , donat per  $\tan 2\alpha = 3^{1/2}(1 - 2\mu)$ , on  $\mu$  és el paràmetre de masses, les equacions del moviment queden normalitzades i amb el següent aspecte:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= 2\dot{y} + \bar{\lambda}_2 x + O(2), \\ \ddot{y} &= -2\dot{x} + \bar{\lambda}_1 y + O(2), \end{aligned} \quad (2.1)$$

on

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_1 &= \frac{3}{2}[1 + (1 - 3\mu(1 - \mu))^{1/2}], \\ \bar{\lambda}_2 &= \frac{3}{2}[1 - (1 - 3\mu(1 - \mu))^{1/2}]. \end{aligned}$$

Els valors propis de la part lineal de (1.1),  $DX(L_4)$ , al punt d'equilibri  $L_4$  són  $\pm(\alpha \pm i\beta)$  amb

$$\alpha = \frac{[27\mu(1 - \mu)^{1/2} - 1]^{1/2}}{2} \quad \text{i} \quad \beta = \frac{[27\mu(1 - \mu)^{1/2} + 1]^{1/2}}{2}.$$

Cal notar, que degut a la reversibilitat,  $DX(L_5)$  té els mateixos valors propis.

D'aquesta manera tenim que si  $\mu > \mu_R$ , on  $\mu_R$  es refereix a la relació de masses de Routh ( $\mu_R = 0.0385208965\dots$ ), el punt d'equilibri és hiperbòlic, i el fet que  $\beta \neq 0$  implica que les orbites espiralen al voltant seu.

La solució de la part lineal de (1.1) és:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{\alpha t}(a_1 \cos \beta t + a_2 \sin \beta t) + e^{-\alpha t}(a_3 \cos \beta t + a_4 \sin \beta t) \\ y(t) &= e^{\alpha t}(b_1 \cos \beta t + b_2 \sin \beta t) + e^{-\alpha t}(b_3 \cos \beta t + b_4 \sin \beta t) \end{aligned} \quad (2.2)$$

amb les següents relacions entre les  $a$ 's i les  $b$ 's:

$$\begin{aligned} b_1 &= a_1\alpha' + a_2\beta' \\ b_2 &= -a_1\beta' + a_2\alpha' \\ b_3 &= -a_3\alpha' + a_4\beta' \\ b_4 &= -a_3\beta' - a_4\alpha' \end{aligned}$$

on  $\alpha' = \frac{\alpha}{2|\lambda|^2}(|\lambda|^2 - \bar{\lambda}_2)$  i  $\beta' = \frac{\beta(|\lambda|^2 + \bar{\lambda}_2)}{2|\lambda|^2}$ .

Si seleccionem  $a_1 = a_2 = 0$  llavors tenim  $b_1 = b_2 = 0$ , i per tant en aquest cas les solucions de les equacions linealitzades donen una bona aproximació de  $W^s(L_4)$  si ens trobem suficientment prop de l'origen. D'una manera semblant si  $a_3 = a_4 = 0$  llavors  $b_3 = b_4 = 0$  i obtenim l'aproximació de  $W^u(L_4)$ .

## 2.3 Globalització numèrica de les varietats invariants

A fi de globalitzar numèricament les varietats  $W^s(L_4)$  i  $W^u(L_4)$  cal un bon conjunt de condicions inicials que ens doni les òrbites sobre aquestes varietats.

En la secció anterior hem vist que l'aproximació lineal de  $W^u(L_4)$  ve donada per:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{\alpha t}(a_1 \cos \beta t + a_2 \sin \beta t), \\ y(t) &= e^{\alpha t}(b_1 \cos \beta t + b_2 \sin \beta t). \end{aligned}$$

Tenint en compte que el sistema és autònom, les condicions inicials les podem prendre per  $t = 0$ . Aleshores si tenim en compte les relacions entre les  $a_i$  i les  $b_i$  obtenim:

$$\begin{aligned} x(0) &= a_1, \\ y(0) &= b_1 = a_1\alpha' + a_2\beta' \\ \dot{x}(0) &= a_1\alpha + a_2\beta, \\ \dot{y}(0) &= a_1(\alpha'\alpha - \beta'\beta) + a_2(\alpha\beta' + \alpha'\beta). \end{aligned}$$

on

$$\begin{aligned}\alpha' &= \frac{\alpha}{2|\lambda|^2}(|\lambda|^2 - \bar{\lambda}_2), \\ \beta' &= \frac{\beta(|\lambda|^2 + \bar{\lambda}_2)}{2|\lambda|^2}, \\ |\lambda| &= \frac{1}{\sqrt{2}}[27\mu(1-\mu)]^{1/4} = |\alpha + i\beta|, \\ \bar{\lambda}_2 &= \frac{3}{2}[1 - (1 - 3\mu(1-\mu))^{1/2}].\end{aligned}$$

Podem agafar un bon conjunt de condicions inicials pels nostres propòsits si triem  $a_1$  i  $a_2$  de tal manera que quan  $t = 0$  llavors  $(x(0), y(0))$  recorri un cercle,  $(r \cos \theta, r \sin \theta)$  prou petit al voltant del punt d'equilibri sobre la part lineal de la varietat. Aixó ho fem prenent:

$$\begin{aligned}a_1 &= r \cos \theta, \\ a_2 &= \frac{r \sin \theta - r\alpha' \cos \theta}{\beta'}.\end{aligned}$$

i variant la  $\theta$  a l'interval  $[0, 2\pi]$ . Com que les òrbites de la varietat espiralen vers l'origen, i la varietat té dimensió dos, podem assegurar que per a valors de  $r$  prou petits qualsevol òrbita que vagi cap l'origen té al menys un  $\theta$  associat.

Per les globalitzacions de  $W^s(L_4)$  procedim d'una manera semblant.

Després de fer algunes proves, hem dut a terme els càlculs agafant  $r = 10^{-4}$  i un conjunt finit de valors de  $\theta$  a l'interval  $[0, 2\pi]$ . Utilitzem un Runge-Kutta-Fehlberg(7-8) per la integració de les equacions del moviment (1.1) i regularitzem les passades prop de col·lisió amb els primaris utilitzant coordenades de Levi-Civita. Les variacions de la constant de Jacobi:

$$C = 2\Omega(x, y, z) - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

al llarg de les òrbites s'ha mantingut inferior a  $10^{-13}$  respecte del valor 3 que pren en el punt d'equilibri, i que ha de ser, clar està, el valor al llarg de totes les òrbites de les varietats invariants.

Utilitzant aquest mètode, hem calculat les primeres interseccions de  $W^u(L_4)$  i de  $W^s(L_4)$  amb l'eix  $x$  pels següents valors del paràmetre de masses:  $\mu = 0.5, 0.4, 0.3, 0.2, 0.1$ .

De fet, degut a les simetries mencionades anteriorment, per  $\mu = 0.5$  només cal calcular una de les varietats anteriors. Les varietats associades a  $L_5$  s'obtenen també per simetria en tots els cassos.

Les interseccions amb l'eix  $x$  es poden representar en el pla  $(x, \dot{x})$ . Degut al fet que en aquest moment  $y$  val 0 i el valor de  $\dot{y}$  es pot obtenir via la integral de Jacobi, la gràfica obtinguda determina la varietat al primer tall amb l'eix  $x$ . A les figures que van des de la 2.2 fins a la 2.11 estan representades aquestes corbes associades amb la primera intersecció, per a les varietats estable i inestable de  $L_4$ .

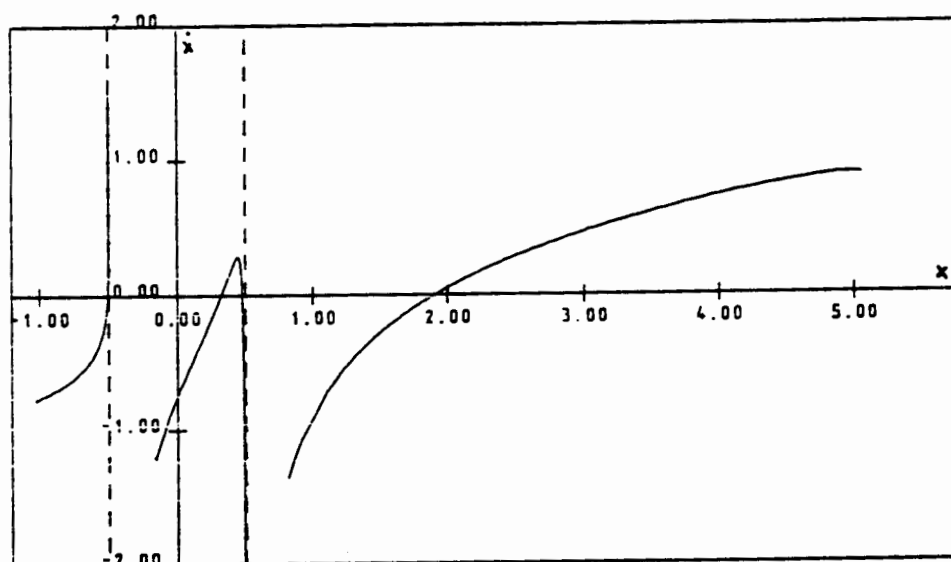


Figura 2.2.  $W^u(L_4)$  primera intersecció,  $\mu = 0.5$ .

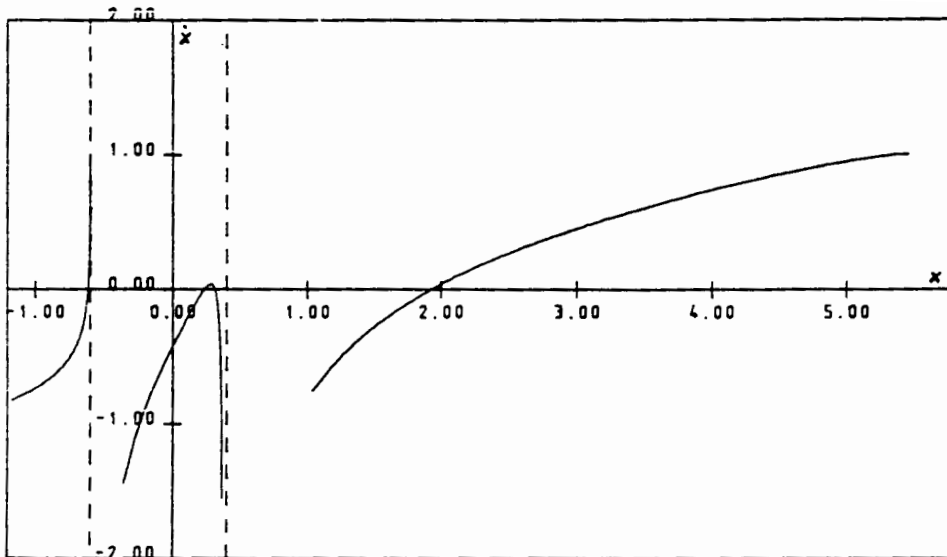


Figura 2.3.  $W^u(L_4)$  primera intersecció,  $\mu = 0.4$ .

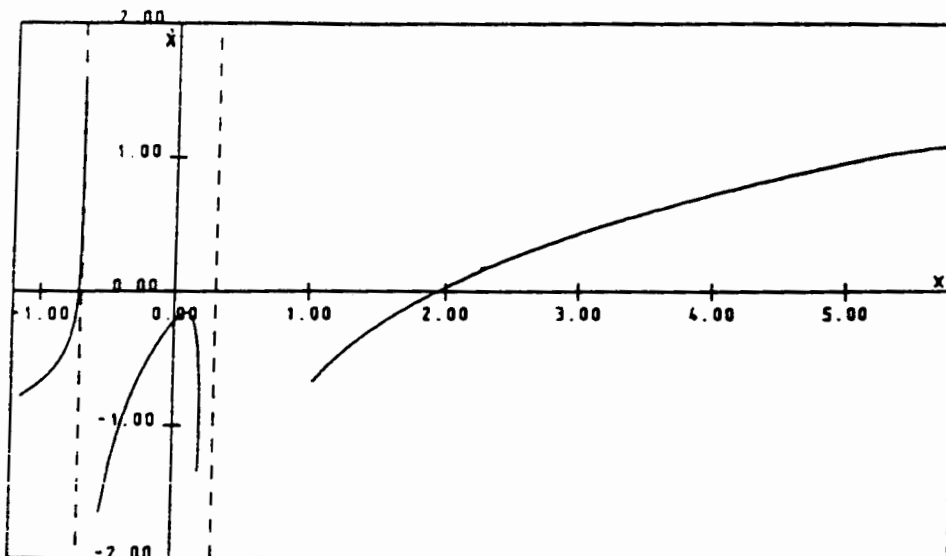


Figura 2.4.  $W^u(L_4)$  primera intersecció,  $\mu = 0.3$ .

Cal notar que aquestes corbes tenen dos tipus de discontinuïtats, una prop

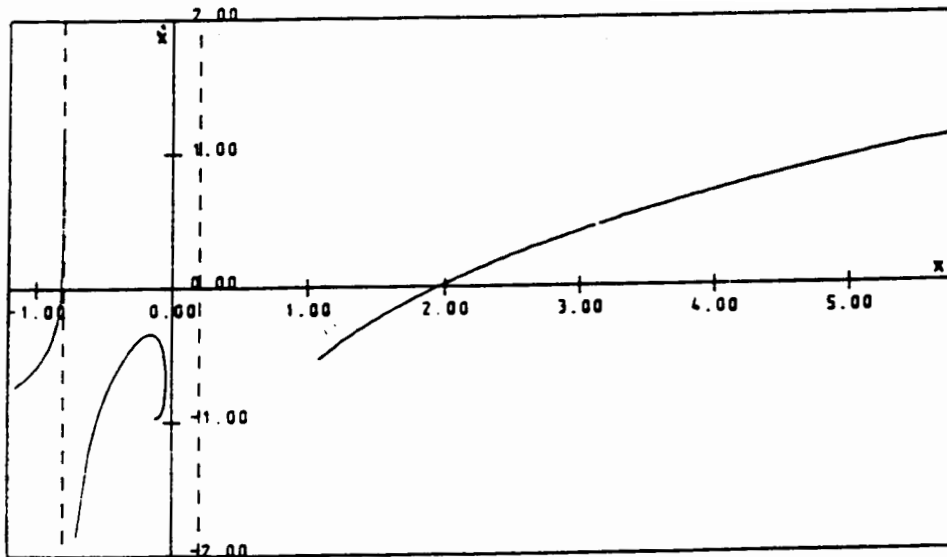


Figura 2.5.  $W^u(L_4)$  primera intersecció,  $\mu = 0.2$ .

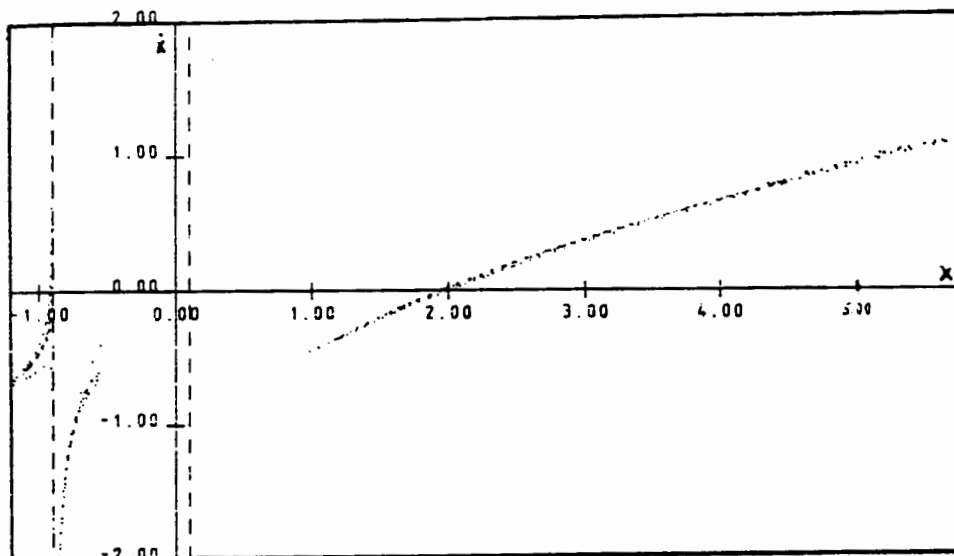


Figura 2.6.  $W^u(L_4)$  primera intersecció,  $\mu = 0.1$ .

dels primaris, deguda a les possibles òrbites de col·lisió, i una segona deguda al caràcter no global de  $y = 0$  com a superfície de secció. Degut a aquest darrer fet,



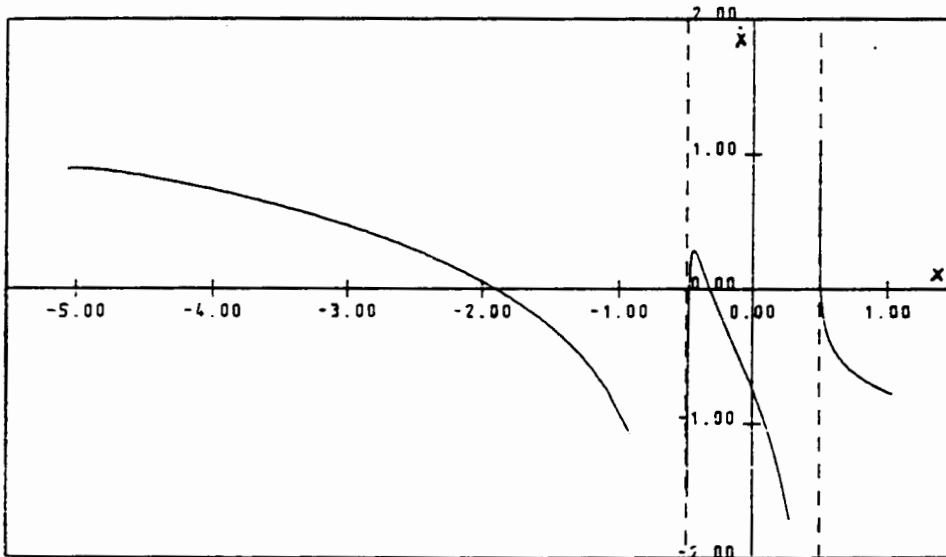


Figura 2.7.  $W^s(L_4)$  primera intersecció,  $\mu = 0.5$ .

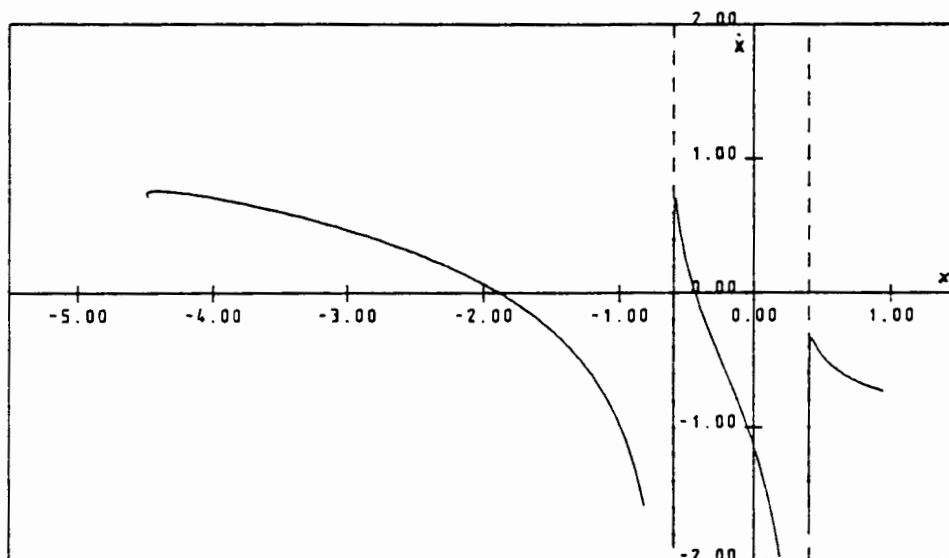


Figura 2.8.  $W^s(L_4)$  primera intersecció,  $\mu = 0.4$ .

una òrbita tangent produeix una discontinuïtat en la representació de la varietat, respecte condicions inicials properes tal com es pot veure a la figura 2.12. De totes maneres aquests fets no afecten de manera essencial els nostres propòsits.

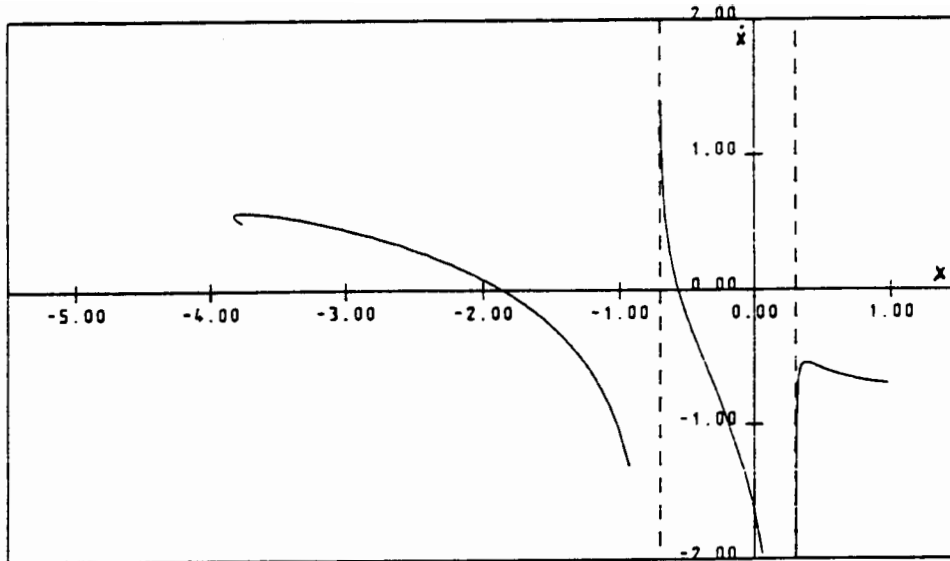


Figura 2.9.  $W^s(L_4)$  primera intersecció,  $\mu = 0.3$ .

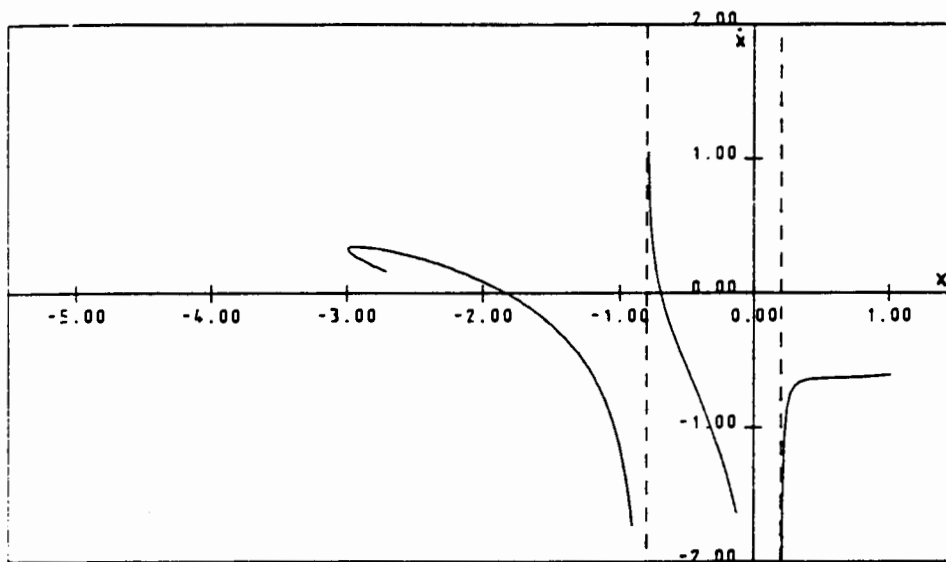


Figura 2.10.  $W^s(L_4)$  primera intersecció,  $\mu = 0.2$ .

També cal dir que a les figures corresponents als paràmetres de masses que van de 0.5 a 0.2, els dos inclosos, la gràfica de la varietat està formada per tres branques

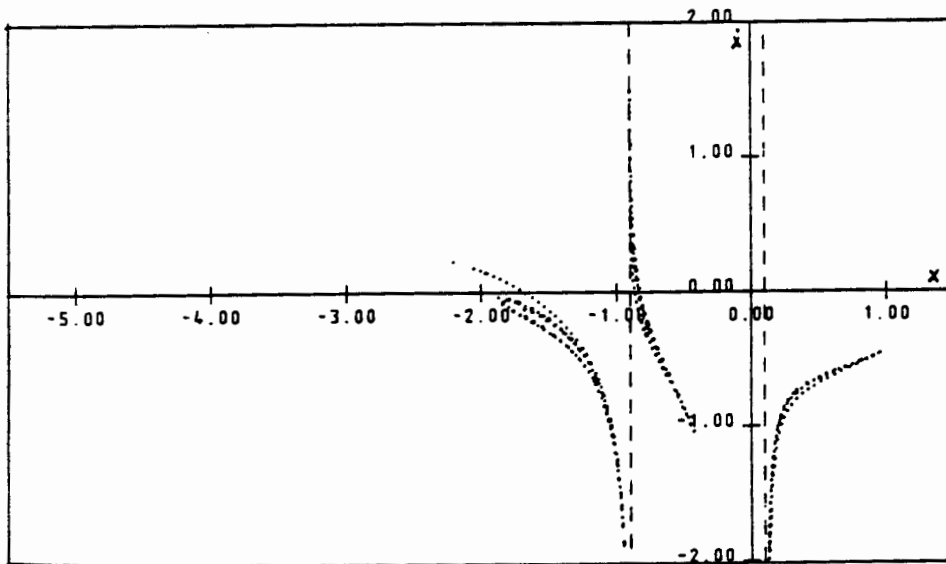


Figura 2.11.  $W^s(L_4)$  primera intersecció,  $\mu = 0.1$ .

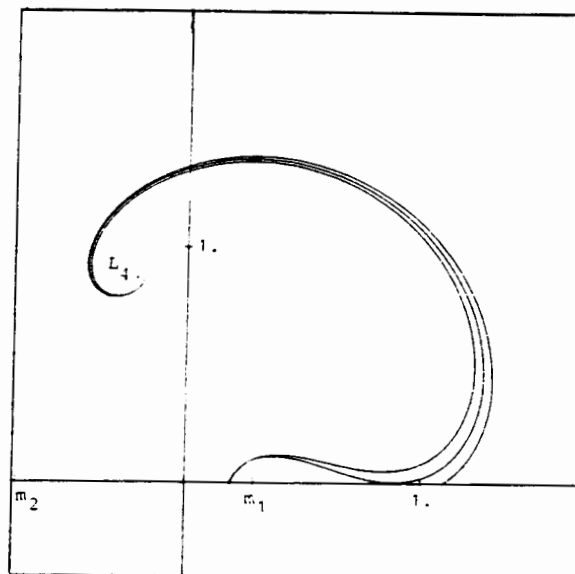


Figura 2.12. Comportament de les òrbites prop d'una tangent que produeix una discontinuïtat en la representació de la varietat invariant en el pla  $(x, \dot{x})$ .

contínues, mentre que per  $\mu = 0.1$  (figures 2.6 i 2.11) l'aparent difusió que s'observa en la representació de les varietats s'ha d'entendre com una acumulació de diferents branques. És molt difícil donar un bon dibuix que representi aquestes varietats juntant els punts calculats amb corbes suaus, per aixó hem preferit representar-les de manera puntejada. L'explicació del comportament d'aquestes varietats la donem a la propera secció.

## 2.4 Òrbites homoclíniques i heteroclíniques

Siguin  $p$  i  $q$  dos punts d'equilibri hiperbòlics d'un camp vectorial  $X$  com abans. Si  $x \in W^s(p) \cap W^u(p)$ , llavors l'òrbita que passa per  $x$  es diu homoclínica. Si  $x \in W^u(p) \cap W^s(q)$  llavors l'òrbita que passa per  $x$  es diu heteroclínica de  $p$  a  $q$ .

Una òrbita homoclínica,  $\gamma$ , es diu no degenerada si

$$\dim(TW^s(p) \cap TW^u(p)) = 1$$

on  $TW^s(p)$  i  $TW^u(p)$  són els espais tangents a  $W^s(p)$  i a  $W^u(p)$  respectivament en els punts de  $\gamma$ . Una definició anàloga es pot donar pel cas de les òrbites heteroclíniques, (veure [3] i [12] per a les seves propietats).

Hem classificat les òrbites homoclíniques i heteroclíniques tenint en compte el seu nombre d'interseccions amb l'eix  $x$ . D'aquesta manera, donada  $x \in W^u(L_i) \cap W^s(L_i)$ , amb  $i \in \{4, 5\}$ , direm que l'òrbita  $\gamma$  que passa per  $x$  és una òrbita  $2k$ -homoclínica, si la seva projecció  $(x, y)$  té  $2k$ -talls amb l'eix  $x$ ,  $k = 0, 1, \dots$ . Si l'òrbita té alguna tangència amb l'eix  $x$ , la seva multiplicitat es té en compte. D'una manera semblant podem definir òrbites  $(2k + 1)$ -heteroclíniques si agafem  $x \in W^u(L_i) \cap W^s(L_j)$ , amb  $i \neq j$ .

Si  $X$  és  $R$ -reversible i  $p$  és un punt d'equilibri de  $X$ , direm que  $p$  és *simètric* si  $p \in \text{Fix}(R)$ . Direm que una òrbita  $\gamma$  de  $X$  és *simètrica* si  $R(\gamma) = \gamma$ .

En el problema restringit, degut a la simetria esmentada a la secció anterior, tenim que:

$$W^s(L_5) = R_1(W^u(L_4)) \quad \text{i} \quad W^u(L_5) = R_1(W^s(L_4)),$$

per tant si volem calcular totes les òrbites 1-heteroclíniques de  $L_4$  a  $L_5$  (resp. de  $L_5$  a  $L_4$ ) hem de calcular totes les interseccions entre les gràfiques corresponents a  $W^u(L_4)$  (resp.  $W^s(L_4)$ ) i la seva simètrica respecte l'eix  $x$  ( $\dot{x} = 0$ ). Tenim doncs que un punt  $(x, \dot{x})$  sobre la gràfica de la varietat correspon a una òrbita 1-heteroclínica si el punt  $(x, -\dot{x})$  també és de la gràfica.

La següent proposició resumeix els resultats numèrics obtinguts per a les òrbites 1-heteroclíniques.

**PROPOSICIÓ.** *Per les relacions de masses estudiades, el nombre d'òrbites 1-heteroclíniques ve donada per la següent taula.*

$\mu$	$W^u(L_5) \cap W^s(L_4)$	$W^s(L_5) \cap W^u(L_4)$
0.5	4	4
0.4	3	4
0.3	2	2
0.2	2	2
0.1	?	?

**OBSERVACIONS:**

- 1) Pel valor del paràmetre de masses  $\mu = 0.1$  sembla que hi ha un nombre infinit d'òrbites 1-heteroclíniques. Els resultats de les proposicions que segueixen expliquen aquest resultat.
- 2) Les òrbites trobades pel cas  $\mu = 0.5$  eren ben conegudes per Strömberg (veure [18]).
- 3) Pels valors dels paràmetres de masses entre 0.5 i 0.2, la intersecció de les gràfiques de les varietats succeeix quan  $y = \dot{x} = 0$  i per tant totes les òrbites 1-heteroclíniques són simètriques. Per altres valors de  $\mu$  (per exemple  $\mu = 0.14$ ) apareixen altres òrbites 1-heteroclíniques  $L_5 \rightarrow L_4$ .

Des de la figura 2.13 fins a la 2.20 hem representat les òrbites heteroclíniques pels primers quatre valors del paràmetre de masses. Des de la figura 2.21 fins a la 2.24 presentem alguns casos típics d'òrbites heteroclíniques corresponents a  $W^u(L_4)$  pel

valor del paràmetre de masses  $\mu = 0.1$ . També representem una òrbita 0-homoclínica que com veurem té un paper fonamental.

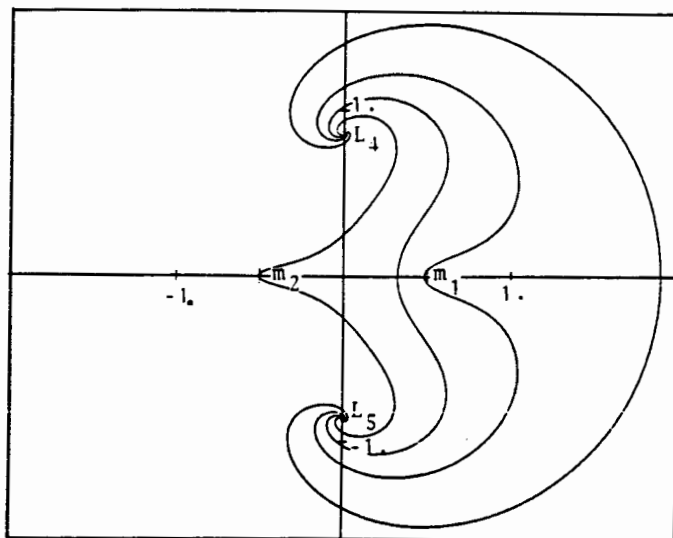


Figura 2.13. Òrbites 1-heteroclíniques  $L_4 \rightarrow L_5$  pel cas  $\mu = 0.5$ .

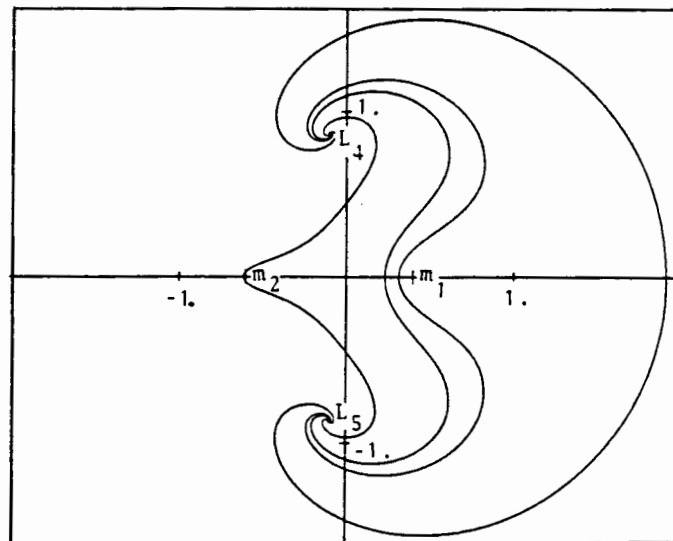


Figura 2.14. Òrbites 1-heteroclíniques  $L_4 \rightarrow L_5$  pel cas  $\mu = 0.4$ .

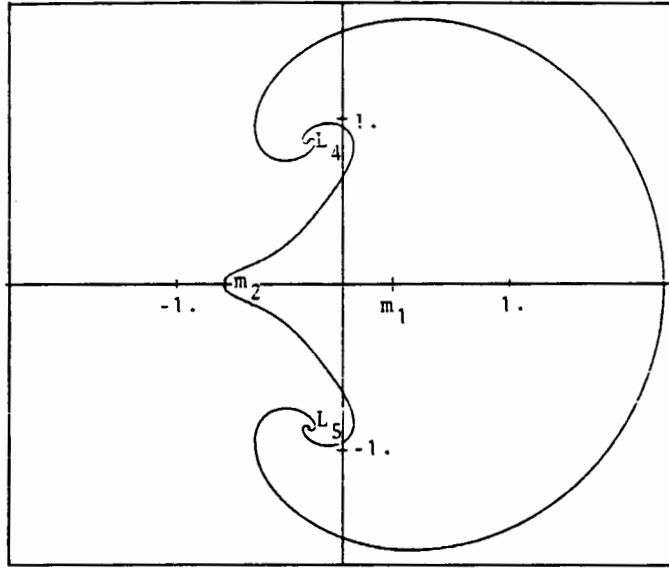


Figura 2.15. Òrbites 1-heteroclíniques  $L_4 \rightarrow L_5$  pel cas  $\mu = 0.3$ .

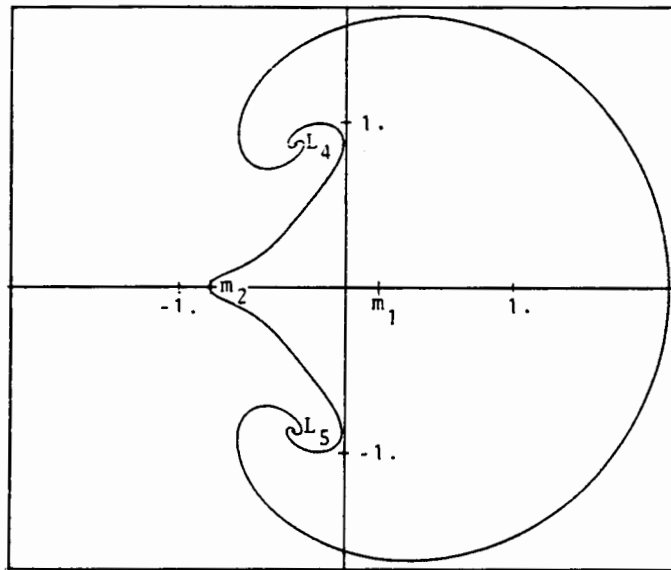


Figura 2.16. Òrbites 1-heteroclíniques  $L_4 \rightarrow L_5$  pel cas  $\mu = 0.2$ .

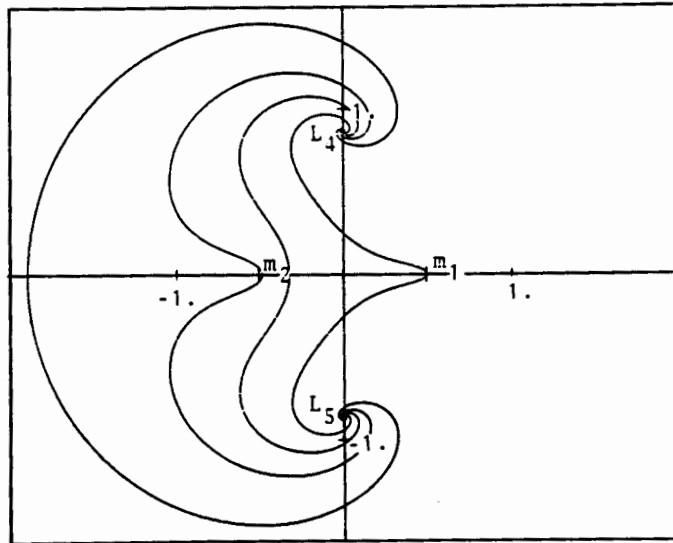


Figura 2.17. Òrbites 1-heteroclíniques  $L_5 \rightarrow L_4$  pel cas  $\mu = 0.5$ .

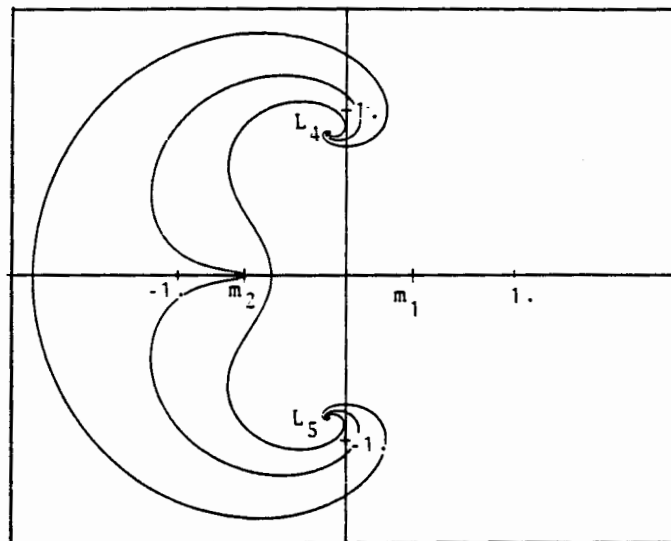


Figura 2.18. Òrbites 1-heteroclíniques  $L_5 \rightarrow L_4$  pel cas  $\mu = 0.4$ .



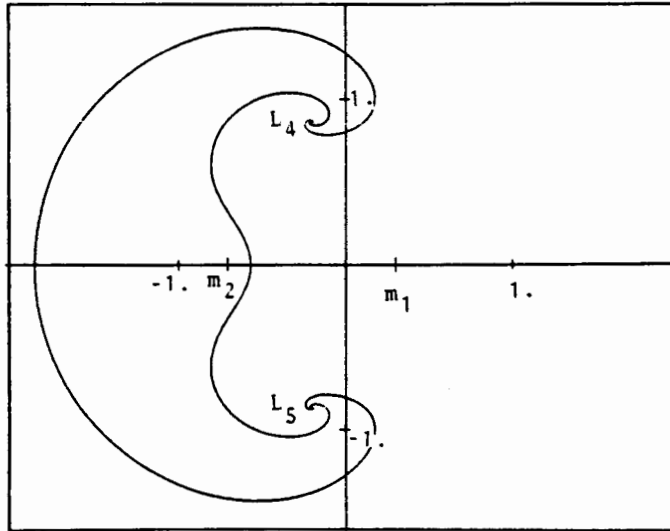


Figura 2.19. Òrbites 1-heteroclíniques  $L_5 \rightarrow L_4$  pel cas  $\mu = 0.3$ .

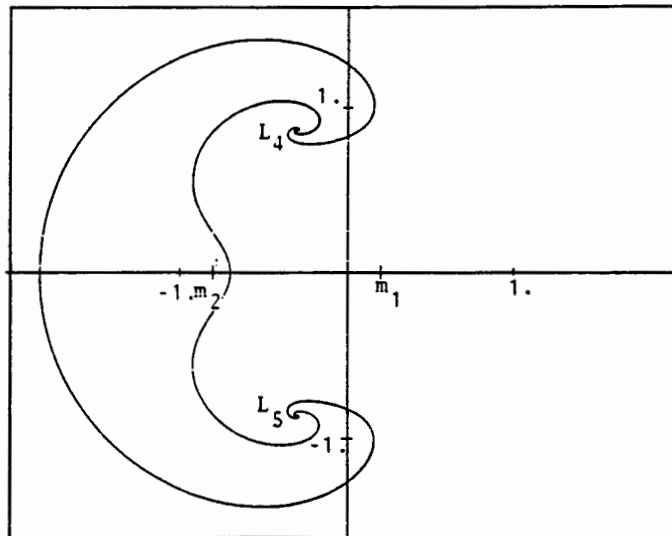


Figura 2.20. Òrbites 1-heteroclíniques  $L_5 \rightarrow L_4$  pel cas  $\mu = 0.2$ .

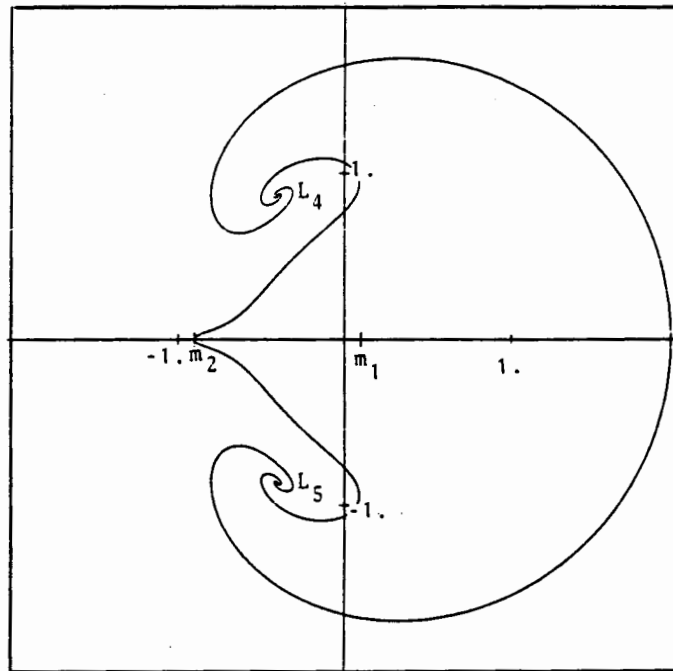


Figura 2.21. Les òrbites 1-heteroclíniques  $L_4 \rightarrow L_5$  més "simples" pel cas  $\mu = 0.1$ .

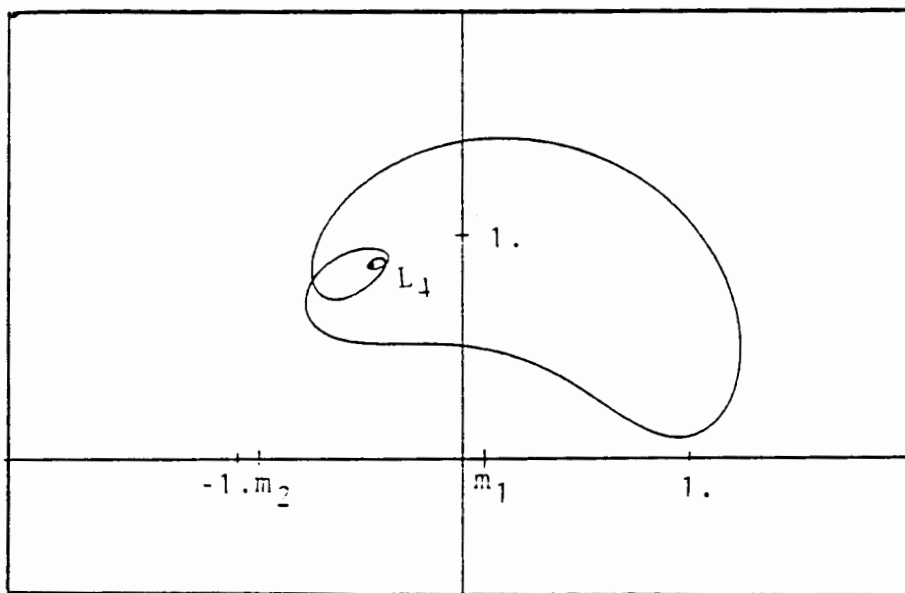


Figura 2.22. Òrbita 0-homoclínica  $L_4 \rightarrow L_4$  pel cas  $\mu = 0.1$ .

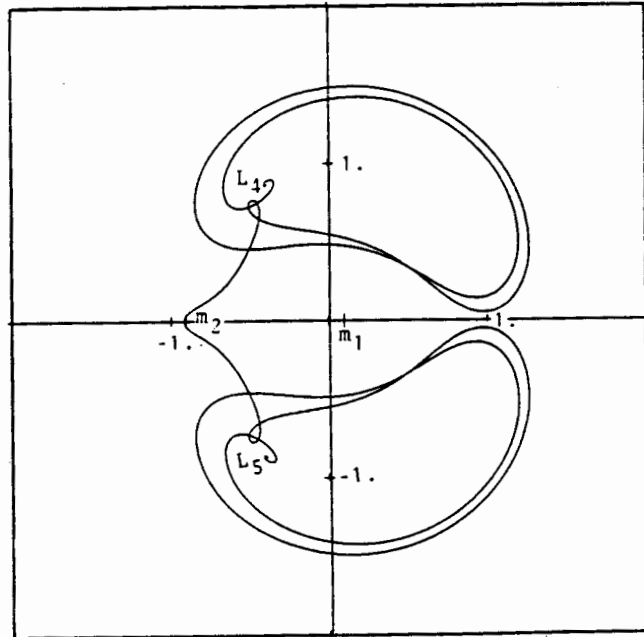


Figura 2.23. Òrbita 1-heteroclínica  $L_4 \rightarrow L_5$  involucrant la forma de l'òrbita 0-homoclínica de la figura 2.22 pel cas  $\mu = 0.1$ .

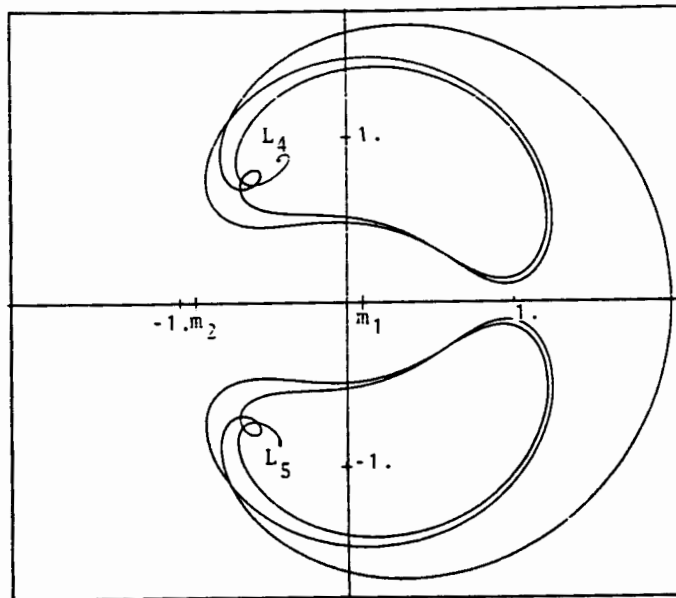


Figura 2.24. Òrbita 1-heteroclínica  $L_4 \rightarrow L_5$  involucrant la forma de l'òrbita 0-homoclínica 2.22 pel cas  $\mu = 0.1$ .

L'estudi numèric de la varietat inestable de  $L_4$  al segon tall, pel cas  $\mu = 0.5$ , (Figura 2.25) presenta dues parts ben diferenciades.

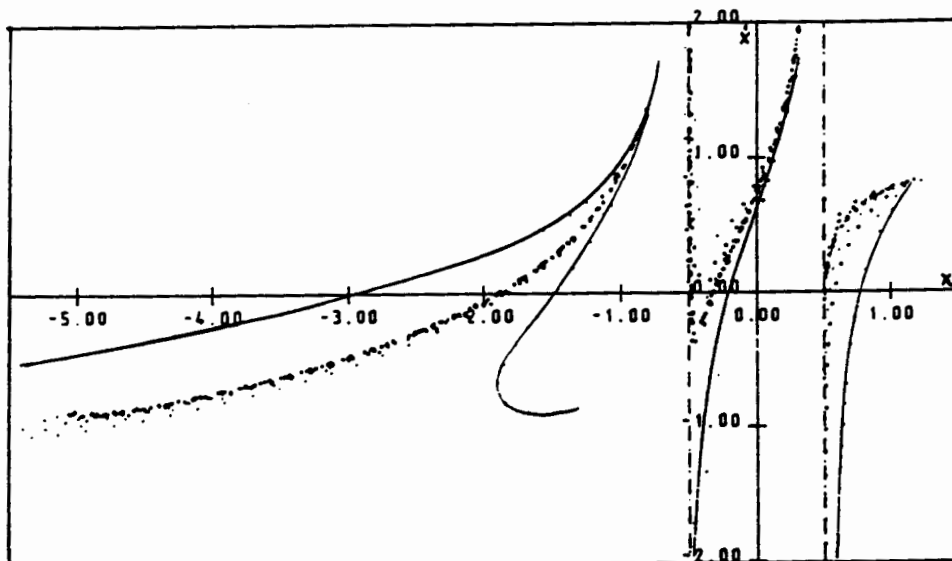


Figura 2.25.  $W^u(L_4)$  segona intersecció,  $\mu = 0.5$ .

Una part que podríem dir *pròpia* que està representada per les corbes contínues a trossos, i una segona que és una acumulació de branques (en el sentit al qual ens referíem en la secció anterior) vers la gràfica de la varietat inestable de  $L_5$  al primer tall (seria la figura simètrica de la 2.7). D'aquesta manera, pel cas de les òrbites 2-homoclíniques de  $L_4$  a  $L_5$  obtingudes amb la intersecció  $W_2^u(L_4) \cap W_1^s(L_5)$ , deixant-ne de banda un nombre finit de "pròpies", n'apareix un nombre infinit que "recorden" essencialment la forma d'un parell d'òrbites 1-heteroclíniques. Aquest fet ens porta a la següent proposició.

**PROPOSICIÓ.** *Per a un valor de  $\mu$  fixat, l'existència d'un parell d'òrbites 1-heteroclíniques no degenerades, una de  $L_5$  a  $L_4$ , i l'altra de  $L_4$  a  $L_5$ , implica l'existència d'un nombre infinit d'òrbites  $2k$ -homoclíniques (de  $L_4$  a  $L_4$  i de  $L_5$  a  $L_5$ ), així com l'existència d'un nombre infinit d'òrbites  $(2k + 1)$ -heteroclíniques (de  $L_4$  a  $L_5$  i de  $L_5$  a  $L_4$ ) per a  $k = 1, 2, 3, \dots$*

*Demostració.* Considerem  $C_1$  i  $C_2$  dues circumferències de radi  $r$  al voltant dels punts d'equilibri  $L_4$  i  $L_5$ , parametritzades pels angles  $\theta_1$  i  $\theta_2$  respectivament.

Sigui  $\gamma$  una òrbita 1-heteroclínica de  $L_4$  a  $L_5$ , i  $\eta$  una òrbita 1-heteroclínica de  $L_5$  a  $L_4$ . Suposem que la primera intersecció entre  $\gamma$  i  $C_1$  té lloc per un valor del paràmetre igual a  $\theta_\gamma^1$ . Considerem l'interval  $(\theta_\gamma^1 - \varepsilon, \theta_\gamma^1 + \varepsilon)$ , i recordem que  $\dim W^u(L_i) = \dim W^s(L_i) = 2$  per a  $i = 4, 5$ . Per continuïtat respecte les condicions inicials, i degut al fet que  $\gamma$  espirala infinitament al voltant de  $L_5$ , podem trobar una òrbita,  $\gamma_n$ , a  $W^u(L_4)$  i propera a  $\gamma$  de tal manera que, dins de  $C_2$  i abans de sortir-ne, doni exactament  $n$  voltes al voltant de  $L_5$  en el sentit de les agulles del rellotge. Si denotem per  $\theta_{\gamma_n}^1$  al valor del paràmetre que correspon a la primera intersecció de l'òrbita  $\gamma_n$  amb la circumferència  $C_1$ , podem suposar que per un  $\varepsilon$  adequat tenim

$$-\varepsilon + \theta_\gamma^1 < \theta_{\gamma_n}^1 < \theta_\gamma^1.$$

De manera anàloga podem trobar una òrbita  $\gamma_{n+1}$  a  $W^u(L_4)$ , de tal manera que dintre de  $C_2$  doni exactament  $n + 1$  voltes al voltant de  $L_5$ , en el sentit de les agulles del rellotge, i amb

$$\theta_{\gamma_n}^1 < \theta_{\gamma_{n+1}}^1 < \theta_\gamma^1.$$

Per a valors de  $n$  prou grans, diguem  $n > n_0$ , les òrbites de  $W^u(L_4)$  que surten de  $L_4$  entre  $\theta_{\gamma_n}^1$  i  $\theta_{\gamma_{n+1}}^1$ , quan surten de  $C_2$ , cauen en un entorn de  $W^u(L_5)$  i per tant "reproduïxen"  $W^u(L_5)$ , en el sentit que aquestes òrbites formen una varietat dos dimensional que fora de  $C_2$  pot ser considerada com una petita pertorbació de  $W^u(L_5)$ . La notarem per  $W^{u,n}(L_5)$  (veure figura 2.26).

Com que  $\eta$  és no-degenerada,  $W^u(L_5) \cap W^s(L_4)$  és transversal, i per tant també ho serà  $W^{u,n}(L_5) \cap W^s(L_4)$  per a  $n > n_0$ , ja que quan  $n \rightarrow \infty$  llavors  $W^{u,n}(L_5)$  s'acosta a  $W^u(L_5)$ .

D'aquesta manera hem construït un conjunt d'òrbites,  $\gamma_n^2$ , 2-homoclíniques i no-degenerades  $L_4 \rightarrow (C_2) \rightarrow L_4$  per a  $n > n_0$ .

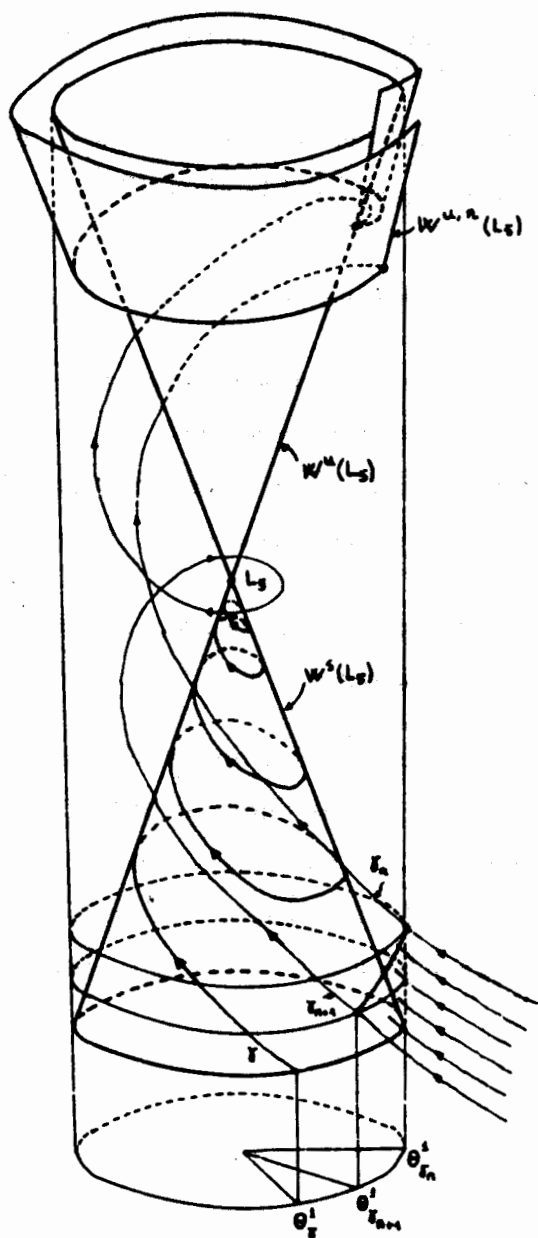


Figura 2.26. Procés de generació de  $W^{u,n}(L_5)$ .

Agafant una òrbita qualsevol,  $\gamma_k^2$ , entre aquestes òrbites 2-homoclíniques trobades, podem repetir els mateixos arguments considerant el valor del paràmetre  $\theta_{\gamma_k}^2$  corresponent a la primera intersecció de  $\gamma_k^2$  amb  $C_2$ , quan  $\gamma_k^2$  espirala al voltant de  $L_5$  en el sentit de les agulles del rellotge. Entre  $\theta_{\gamma_k}^2 - \varepsilon$ ,  $\theta_{\gamma_k}^2 + \varepsilon$ , podem trobar un nombre

infinet d'òrbites 3-heteroclíniques  $L_4 \rightarrow (C_2 \rightarrow C_1) \rightarrow L_5$  de la mateixa manera que hem vist anteriorment.

Començant amb una òrbita 1-heteroclínica de  $L_5$  a  $L_4$ , podríem obtenir famílies d'òrbites  $2k$ -homoclíniques ( $L_5 \rightarrow L_5$ ) i famílies d'òrbites  $(2k + 1)$ -heteroclíniques ( $L_5 \rightarrow L_4$ ).

Utilitzant els mateixos arguments es pot provar:

**PROPOSICIÓ** *Amb les mateixes hipòtesi que en la proposició anterior, l'existència d'una òrbita 0-homoclínica no degenerada ( $L_4 \rightarrow L_4$  o  $L_5 \rightarrow L_5$ ), implica l'existència d'un nombre infinit d'òrbites 0-homoclíniques ( $L_4 \rightarrow L_4$  o  $L_5 \rightarrow L_5$ ), i un nombre infinit d'òrbites 1-heteroclíniques ( $L_4 \rightarrow L_5$  o  $L_5 \rightarrow L_4$  respectivament).*

- 1) Aquesta darrera proposició explica la situació observada numèricament per valor del paràmetre de masses  $\mu = 0.1$ .
- 2) Hem observat numèricament que la primera òrbita 0-homoclínica no-degenerada apareix per un valor de  $\mu$  dins l'interval (0.1108, 0.1109). Per a valors del paràmetre de masses menors que aquest valor crític i més grans que el valor de Routh ( $\mu_R = 0.03852 \dots$ ), existeixen, d'acord amb la darrera proposició, un nombre infinit d'òrbites 0-homoclíniques i 1-homoclíniques.

## Capítol 3

# Transferència a òrbites halo

### 3.1 Introducció

El que segueix en aquesta memòria està dedicat a l'estudi de la transferència d'un satèl.lit artificial a les proximitats del punt  $L_1$ . Ara bé, el punt  $L_1$  no és un lloc adequat per a deixar-hi el satèl.lit ja que des de la Terra aquest emplaçament es veu sobre el Sol i resultaria que els senyals de ràdio que enviaria el satèl.lit quedarien emmascarats, i de fet desapareixerien, en mig del soroll causat per la radiació solar.

Sortosament resulta però, que el problema restringit té òrbites tridimensionals en llibració al voltant de  $L_1$  (i de fet al voltant de tots els punts d'equilibri colineals) que poden servir pel propòsit de l'observació solar ja que compleixen el que dèiem anteriorment: està lluny de la Terra, no molt lluny de  $L_1$  i la distància angular al Sol vista des de la Terra es pot escollir prou gran per a tal que la radiació solar no interfereixi el senyal de ràdio.

### 3.2 Disseny de la missió i òrbites halo

Ja hem comentat que el satèl.lit no pot deixar-se exactament en el punt  $L_1$  degut a les interferències causades per la radiació solar. Les restriccions tècniques imposen que el satèl.lit ha d'evitar una zona d'amplada angular aproximada de sis graus vista des de la Terra. D'altra banda, vista des de la Terra, l'òrbita tampoc pot separar-se



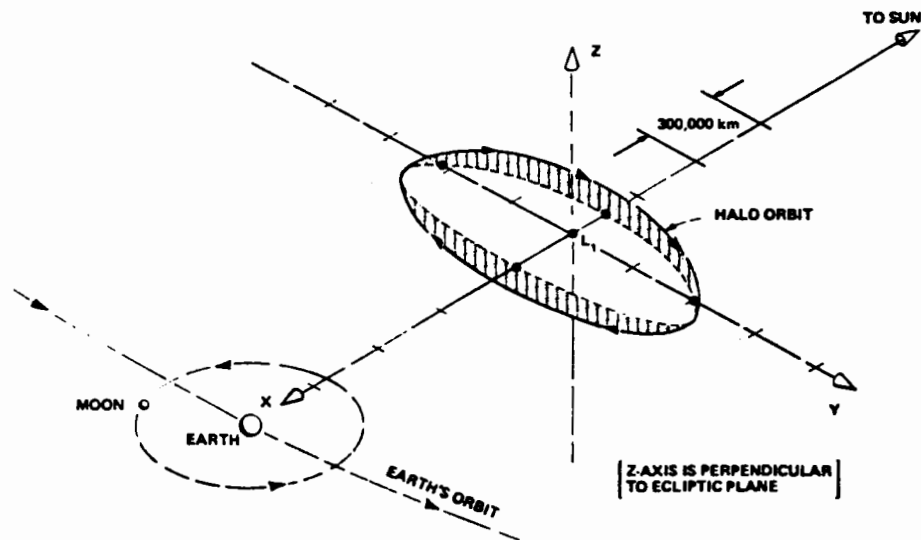


Figura 3.1. Òrbita halo al voltant de  $L_1$ . (Ref. [6]).

molt del disc solar, ja que si volem mantenir l'antena fixa, el seu con d'emissió, que ha de contenir òbviamt la Terra, és molt ampli i per tant l'energia necessària per a les comunicacions hauria de ser molt gran. Resulta així que l'angle format per la línia Terra-satèl·lit i el pla de l'eclíptica ha de ser sempre menor de sis graus. (veure figura 3.2).

Per a tal de complir aquestes constriccions, a [4] s'estudien dos tipus d'òrbites. Les òrbites de Lissajous i les òrbites halo.

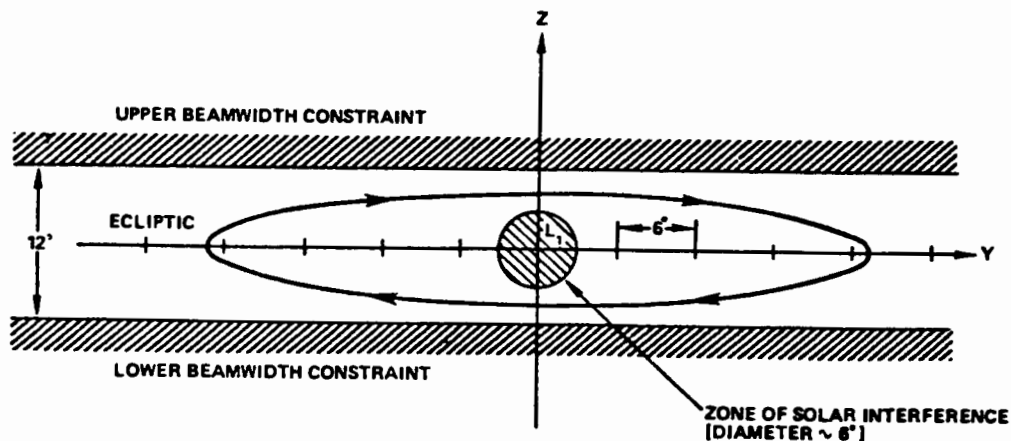


Figura 3.2. Òrbita halo vista des de la Terra. (Ref. [6]).

### 3.2.1 Òrbites de Lissajous

Com ja veurem més endavant, en la construcció analítica de les òrbites halo, en un sistema de coordenades centrat a  $L_1$ , es pot veure que les equacions linealitzades del moviment d'un satèl·lit artificial prop d'aquest punt en el sistema Terra-Sol són:

$$\ddot{x} - 2\dot{y} - (2B_{L_1} + 1)x = 0$$

$$\ddot{y} + 2\dot{x} + (B_{L_1} - 1)y = 0$$

$$\ddot{z} + B_{L_1}z = 0$$

on  $B_{L_1} = 4.06107$ .

D'aquestes equacions es veu que el moviment en el pla X-Y està acoblat, mentre que el moviment fora d'aquest pla és senzillament harmònic i desacoblat de l'anterior.

Si s'agafen les condicions inicials de manera que el moviment en el pla X-Y sigui oscil·latori, i per tant acotat, aleshores l'òrbita seguida a l'espai serà quasiperiòdica al voltant de  $L_1$ . D'òrbites d'aquest tipus n'hi ha tota una família i les seves equacions es poden posar com:

$$x = kA_y \sin(\omega_{xy}t + \Phi_{xy})$$

$$y = A_y \cos(\omega_{xy}t + \Phi_{xy})$$

$$z = A_z \sin(\omega_z t + \Phi_z)$$

amb  $k = 0.309668$ ,  $\omega_{xy} = 2.08645$  i  $\omega_z = 2.01521$ .

L'inconvenient principal d'aquestes òrbites és que degut a la diferència entre les freqüències d'oscil·lació en el pla X-Y i fora d'ell surten corbes de Lissajous en el pla Y-Z tal com es veu a la figura següent.

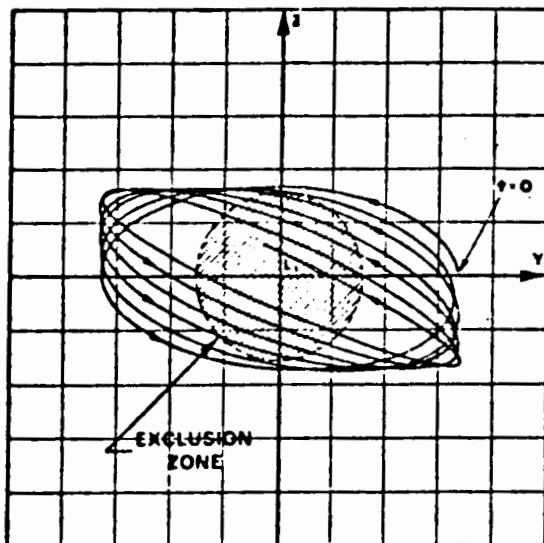


Figura 3.3. Òrbita de Lissajous vista des de la Terra.  $A_y = 200000km$ ,  
 $A_z = 100000km$ ,  $\Phi_{xy} = \Phi_z = 0$ . (Ref. [4]).

Encara que en aquest cas l'òrbita és inacceptable, ja que passa molts moments per la zona d'exclusió, es poden trobar òrbites de Lissajous que es mantinguin fora del disc, durant un cert temps, triant de manera adequada les amplituds  $A_y$  i  $A_z$ , així com les fases  $\Phi_{xy}$  i  $\Phi_z$ .

A les figures següents poden veure's gràfiques d'elongacions solars mínimes per volta versus temps a l'òrbita. Així per exemple, amb  $A_y = 500000$  km i  $A_z = 100000$  km, es poden trobar angles de fase que donen òrbites de Lissajous amb elongació

solar mínima més gran de quatre graus en un interval de temps d'uns tres anys. Es poden aconseguir òrbites que estiguin fora de la zona d'exclusió agafant amplituds  $z$ ,  $A_z$ , més grans. Però  $A_z$  no pot ser molt gran. Com ja hem dit degut a les constriccions d'antena la màxima elongació pot ser de sis graus.

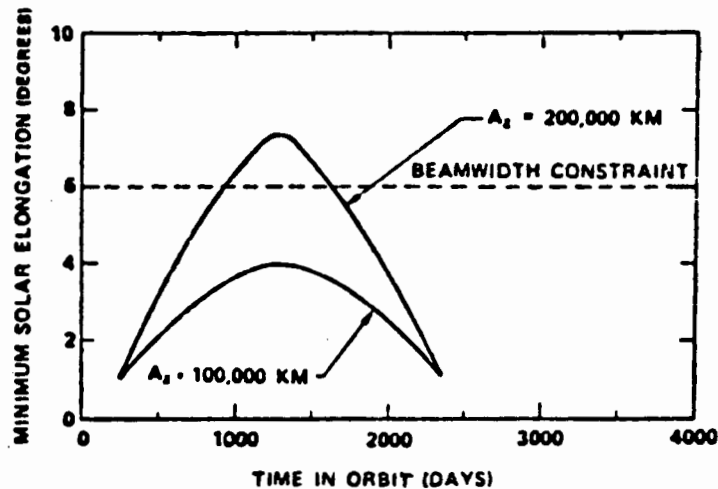


Figura 3.4. Elongació solar mínima per una òrbita Lissajous amb  $A_y = 200000$  km. (Ref. [4]).

Una altra manera d'evitar la zona d'exclusió seguint una òrbita Lissajous, seria fer maniobres en la direcció  $z$  a fi de variar el període d'oscil·lació en aquesta direcció i de manera que quedi sincronitzat amb el moviment respecte el pla X-Y. Segons els estudis de [5] això vindria a costar uns 20 m/s per any pel cas d'una òrbita amb  $A_y = 200000$  km i  $A_z = 115000$  km.

En el treball recent [9], s'ha construït un manipulador algebraic que permet obtenir qualsevol òrbita de Lissajous desenvolupada en una sèrie de potències semblant a la que veurem en una propera secció, en la construcció analítica de les òrbites halo. Com a resultat es mostra que no hi ha cap òrbita de Lissajous confinada en una distància angular adequada al voltant del Sol pels requeriments d'una antena fixa, per exemple uns  $9^\circ$ , sense que passi un moment o altre per la zona d'exclusió. En aquest cas cada 4.75 anys cal fer una maniobra d'uns 143 m/s en la direcció de

l'eix  $z$ . (Veure figura 3.5).

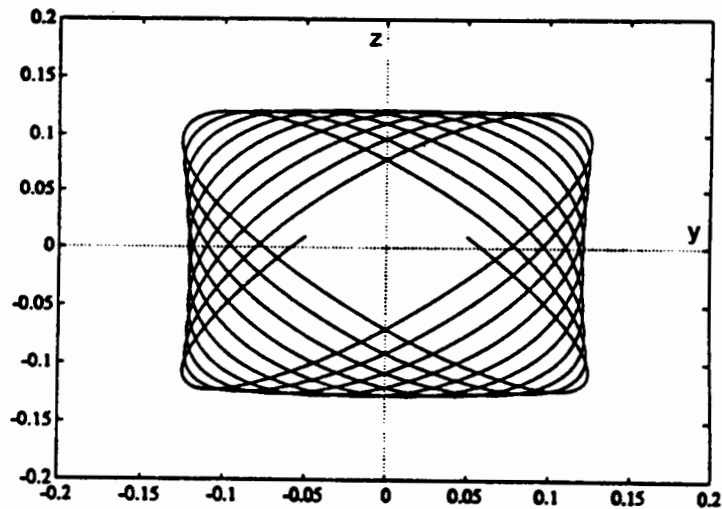


Figura 3.5. Òrbita de Lissajous excloent el disc solar i confinada en una distància angular d'uns  $9^\circ$  al voltant del Sol. Cal una maniobra d'uns 143 m/s cada 4.75 anys a fi d'evitar el disc solar.

### 3.2.2 Òrbites halo

Les òrbites halo s'obtenen agafant l'amplitud  $A_y$  prou gran, de manera que les pertorbacions degudes a la part no lineal produeixin freqüències d'oscil·lació en el pla X-Y i en la component Z iguals ( $w_{xy} = w_z$ ). El resultat és una òrbita periòdica espacial del problema restringit en coordenades sinòdiques  $x, y, z$  tal que la seva projecció en el pla Y-Z és homeomorfa a una circumferència amb l'origen contingut en la component acotada.

Apareixen també com a bifurcació de la família plana d'òrbites de Liapunov quan l'amplitud d'aquestes és prou gran. (Veure [8], [11] i [22]).

Degut a una constricció entre  $A_y$  i  $A_z$ , no poden existir òrbites halo a menys que  $A_y > 654276$  km.

Traçats típics d'òrbites halo es poden veure a les següents figures. Notem que degut a les simetries de les equacions (1.1) hi ha dues famílies d'halos, la projecció de les quals en el pla X-Y és idèntica, les altres projeccions són simètriques respecte

del pla X-Y.

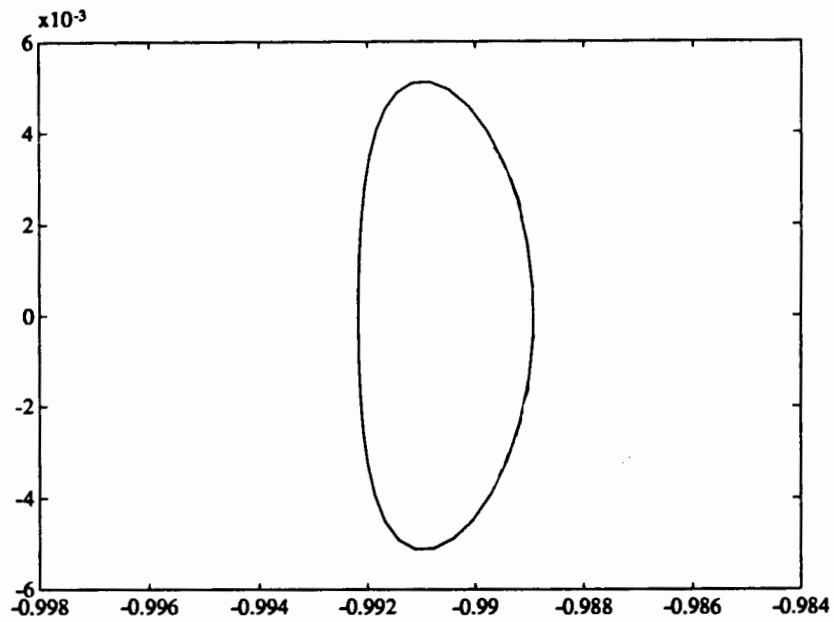


Figura 3.6. Òrbites halo classe 1 i 2. Projectió X-Y.

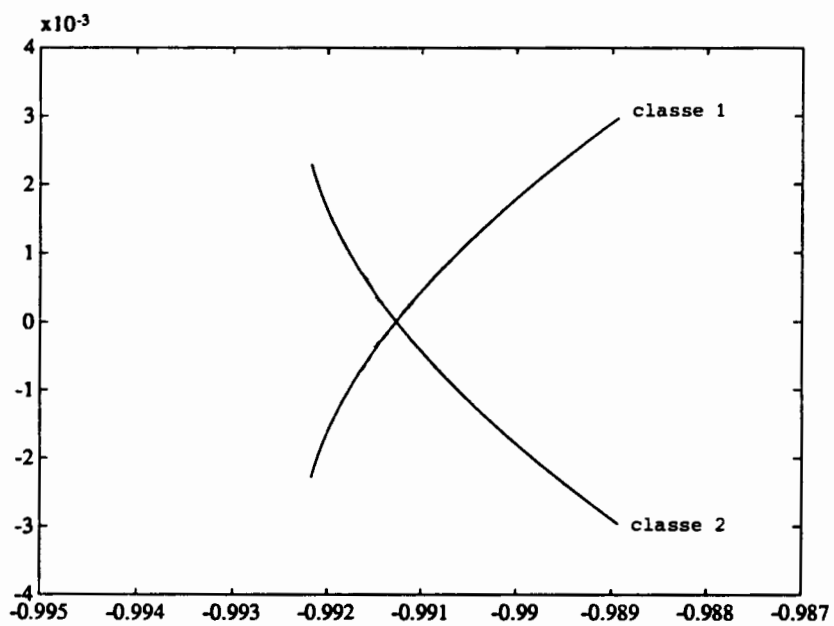


Figura 3.7. Òrbites halo classe 1 i 2. Projectió X-Z.

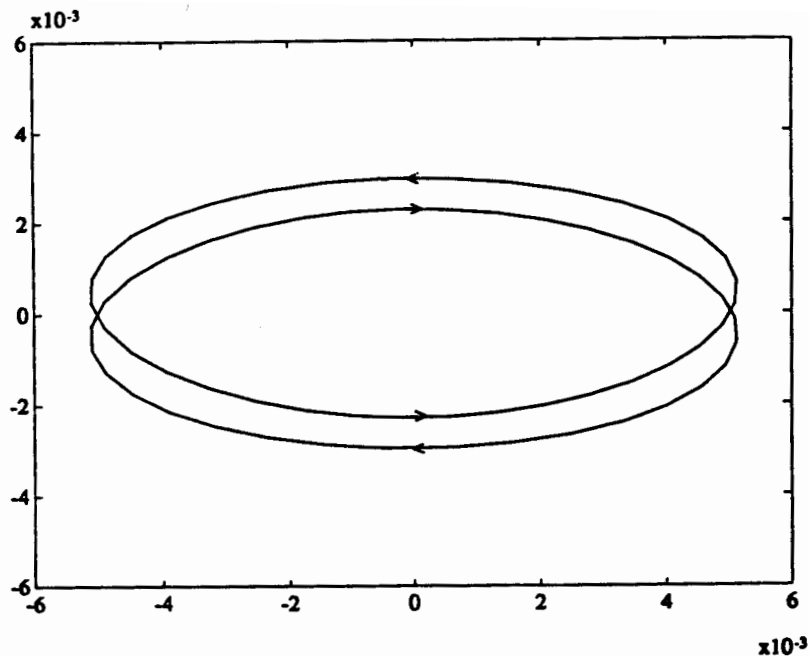


Figura 3.8. Òrbites halo classe 1 i 2. Projectió Y-Z.

L'òrbita nominal del ISEE-3 es va escollir amb  $A_x = 120000$  km i  $A_y = 666672$  km. En aquell moment, les raons principals d'elecció d'una òrbita halo en lloc d'una Lissajous d'amplitud menor varen ser:

- 1) Una òrbita d'amplitud  $A_y$  gran minimitza el temps passat al voltant de la zona d'exclusió.
- 2) Es pot evitar la zona d'exclusió sense necessitat de fer maniobres (malgrat que caldrà fer maniobres de manteniment del satèl.lit en l'òrbita nominal degut al seu caràcter inestable).
- 3) El cost d'inserció a l'òrbita disminueix si aquesta té amplitud-z gran. (Aixó es posarà de manifest i veurem la seva explicació en els següents apartats d'aquesta memòria).

### 3.2.3 Mètodes d'obtenció de la família d'òrbites halo

Per a obtenir la família d'òrbites halo, podem emprar un mètode analític, buscant les òrbites desenvolupades en sèrie de Fourier mitjançant un manipulador algebraic

(de fet el mètode és semianalític ja que els coeficients són numèrics) o bé podem obtenir les òrbites numèricament mitjançant un mètode de continuació.

### Construcció analítica de les òrbites halo

A fi d'obtenir un desenvolupament que es pugui generar de manera recursiva i d'aquesta manera poder utilitzar manipuladors algebraics, Richardson a [16] introdueix una formulació lagrangiana prenent com a origen de coordenades el punt  $L_i$  de la següent manera:

Sigui  $E$  qualsevol dels tres punts col·lineals ( $L_1, L_2$  o  $L_3$ ) localitzat respecte  $M_1$  (primari petit) pel vector  $r_E$ . Dirigim l'eix positiu de les  $X$  des de  $M_2$  (primari gran) a  $M_1$ , es a dir, orientat amb  $-r_{12}$ , l'eix  $Y$  el posem contingut en el pla del moviment sideral formant un angle de  $\frac{\pi}{2}$  respecte l'eix  $X$  en sentit contrari a les agulles del rellotge, i finalment, l'eix  $Z$  es tria perpendicular als anteriors de manera que formi un sistema de coordenades positivament orientat (veure figura 3.9).

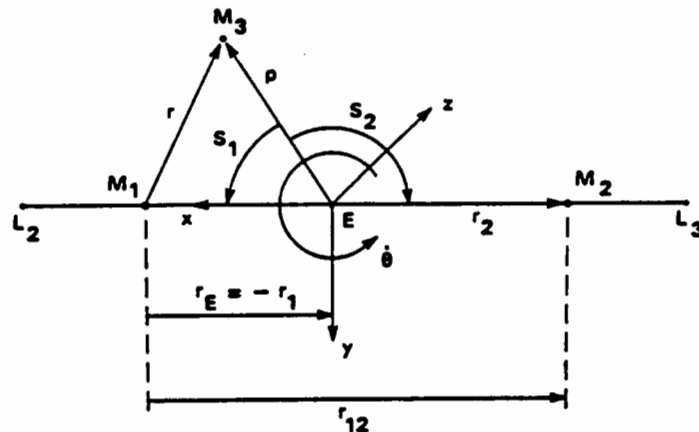


Figura 3.9. Sistema de referència centrat en un  $L_i$ . (Veure [16]).

Aleshores el Lagrangiana del problema de tres cossos que descriu el moviment d'un cos  $M_3$  respecte de  $M_1$  i pertorbat per  $M_2$ , es pot posar com:

$$L = \frac{1}{2} \dot{\rho} \cdot \dot{\rho} + \frac{r_1 \cdot \rho}{r_{12}^3} - r_1 \cdot \dot{\rho} + \mu \left( \frac{1}{|r_1 - \rho|} - \frac{r_1 \cdot \rho}{r_1^3} \right) + (1 - \mu) \left( \frac{1}{|r_2 - \rho|} - \frac{r_2 \cdot \rho}{r_2^3} \right) + t. \text{ ctants.}$$



D'aquí reconeix que els termes que porten els factors  $\mu$  i  $(1 - \mu)$  tenen la forma d'un potencial pertorbador, es a dir, el moviment al voltant del punt  $E$  és essencialment de libració, pertorbat pels primaris i com si aquests juguessin el paper d'un tercer cos pertorbador en el moviment keplerià d'un objecte, al voltant d'una massa central suposadament col·locada a  $E$ .

Això suggereix d'utilitzar polinomis de Legendre per a desenvolupar la pertorbació (veure [1]) quedant el Lagrangiana:

$$L = \frac{1}{2} \dot{\rho} \cdot \dot{\rho} + \frac{\mu}{r_1} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{\rho}{r_1}\right)^n P_n(\cos S_1) + \frac{1-\mu}{r_2} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{\rho}{r_2}\right)^n P_n(\cos S_2),$$

on  $S_1$  i  $S_2$  són els angles entre  $\rho$  i els vectors  $r_1$  i  $r_2$  respectivament, i  $P_n$  és el  $n$ -èssim polinomi de Legendre de primera espècie amb argument o bé  $\cos S_1$  o bé  $\cos S_2$ . Aquest desenvolupament és vàlid sempre que els quocients  $\frac{\rho}{r_1}$  i  $\frac{\rho}{r_2}$  siguin els dos menors que la unitat.

Prenent llavors com unitat de distància,  $\gamma$ , la que hi ha des del punt d'equilibri considerat al primari més proper, es a dir  $\gamma = d(M_1, L_i)$  per  $i = 1, 2$  o bé  $\gamma = d(M_2, L_3)$ , i el canvi de la variable independent donat per  $s = \gamma_L^{3/2} t$  on:

$$\gamma_L = \begin{cases} \frac{r_1}{r_{12}} & \text{per a } L_1 \text{ i } L_2, \\ \frac{r_2}{r_{12}} & \text{per a } L_3, \end{cases}$$

el Lagrangiana queda:

$$L = \frac{1}{2} \rho' \cdot \rho' + \sum_{n=2}^{\infty} c_n \rho^n P_n\left(\frac{x}{\rho}\right),$$

on les primes denoten derivació respecte de  $s$  i les  $c_n$  venen donades per:

$$c_n = \frac{1}{\gamma_L^3} [(\pm 1)^n \mu + (-1)^n \frac{(1-\mu)\gamma_L^{n+1}}{(1 \mp \gamma_L)^{n+1}}] \quad \text{signe superior } L_1, \text{ inferior } L_2,$$

$$c_n = \frac{1}{\gamma_L^3} [1 - \mu + \frac{\mu \gamma_L^{n+1}}{(1 + \gamma_L)^{n+1}}] \quad \text{pel cas } L_3.$$

Aleshores les equacions del moviment prenen la següent forma compacta:

$$x'' - 2y' - (1 + 2c_2)x = \sum_{n=2}^{\infty} (n+1)c_{n+1}\rho^n P_n\left(\frac{x}{\rho}\right),$$

$$y'' + 2x' + (c_2 - 1)y = \sum_{n=3}^{\infty} c_n y \rho^{n-2} \tilde{P}_n\left(\frac{x}{\rho}\right),$$

$$z'' + c_2 z = \sum_{n=3}^{\infty} c_n z \rho^{n-2} \tilde{P}_n\left(\frac{x}{\rho}\right),$$

on

$$\tilde{P}_n\left(\frac{x}{\rho}\right) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor} (3 + 4k - 2n) P_{n-2k-2}\left(\frac{x}{\rho}\right),$$

i essent  $\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor$  la part entera de  $\frac{n-2}{2}$ .

Un cop desenvolupada la formulació lagrangiana, el mateix Richardson en un altre article (veure [17]) indica la manera d'obtenir la construcció analítica de les òrbites periòdiques de la següent manera.

Si considerem les equacions linealitzades del moviment:

$$\begin{aligned}x'' - 2y' - (1 + 2c_2)x &= 0, \\y'' + 2x' + (c_2 - 1)y &= 0, \\z'' + c_2z &= 0,\end{aligned}$$

i busquem condicions inicials de tal manera que el moviment en el pla XY sigui acotat (la component Z sempre ho és, ja que és un moviment harmònic), la solució es pot expressar de la forma:

$$\begin{aligned}x &= \alpha \cos(\lambda t + \Phi), \\y &= -k\alpha \sin(\lambda t + \Phi), \\z &= \beta \cos(\nu t + \Psi),\end{aligned}$$

amb

$$\begin{aligned}k &= \frac{\lambda_1^2 + 2c_2 + 1}{2\lambda}, \\ \lambda &= \left(\frac{2 - c_2 + (9c_2^2 - 8c_2)^{1/2}}{2}\right)^{1/2}, \\ \nu &= c_2^{1/2},\end{aligned}$$

i les projeccions del moviment en els diferents plans coordenats produirà corbes de Lissajous. A més si no es té la precaució de que  $\frac{\lambda}{\nu}$  sigui racional, el moviment serà quasiperiòdic.

El moviment del tipus halo s'obté si l'amplitud en el pla XY és prou gran de manera que les contribucions no lineals al sistema anterior produeixin freqüències pròpies iguals. Tenint en compte les simetries de les equacions i utilitzant manipulació simbòlica pel mètode de Lindsted-Poincaré (veure [14]), podem buscar les òrbites halo desenvolupades en la forma:

$$\begin{aligned}x &= \sum a_{ijk} \alpha^i \beta^j \gamma^k, \\y &= \sqrt{-1} \sum b_{ijk} \alpha^i \beta^j \gamma^k, \\z &= \sum z_{ijk} \alpha^i \beta^j \gamma^k, \\ \gamma &= \exp(i\lambda\omega\tau), \quad k = 1, 2,\end{aligned}$$

on les variables  $\tau$  i  $\omega$  les introduïrem tot seguit.

Utilitzant la solució de la part lineal com a primera aproximació i el mètode de Lindsted-Poincaré, es va construir el desenvolupament de l'òrbita halo igualant termes en  $\alpha^i \beta^j \gamma^k$ . Per això es convenient partir de les equacions linealitzades següents:

$$\begin{aligned}x'' - 2y' - (1 + 2c_2)x &= 0, \\y'' + 2x' + (c_2 - 1)y &= 0, \\z'' + \lambda^2 z &= 0,\end{aligned}$$

on hem canviat el  $c_2$  que teníem per  $\lambda^2$ , introduint una correcció  $\Delta = \lambda^2 - c_2$ , que haurem d'afegir al costat dret de l'equació en  $z$ , quan construïrem aproximacions d'ordre superior. Es a dir, la nova equació per a la  $z$  serà:

$$z'' + \lambda^2 z = \sum_{n=3}^{\infty} c_n z \rho^{n-2} \tilde{P}_n\left(\frac{x}{\rho}\right) + \Delta z.$$

Se suposa clar, que aquesta correcció és de l'ordre de magnitud  $\Delta = O(\beta^2)$  i per tant apareixerà per primera vegada en les expressions per a les correccions de tercer ordre.

Finalment, a fi de treure els termes seculars que apareguin a l'hora d'aplicar el mètode de Lindsted-Poincaré cal introduir una nova variable  $\tau$  donada per  $\tau = w s$  amb

$$w = 1 + \sum_{n \geq 2} w_n \quad \text{i} \quad w_n < 1,$$

on  $w_n$  se suposa d'ordre  $O(\alpha^n)$ . Es va triant cada  $w_n$  durant el desenvolupament de la solució per anar anul·lant els termes seculars.

Richardson va aplicar aquest mètode manualment per a obtenir les òrbites halo fins a ordre 3. A l'any 1985, G. Gómez, J. Llibre, R. Martínez, i C. Simó a [7] van desenvolupar un manipulador algebraic i van obtenir les òrbites halo fins a ordre 15.

### Obtenció numèrica de les òrbites halo

En el treball [7] es descriu el mètode de continuació per a l'obtenció d'òrbites periòdiques del problema restringit simètriques respecte el pla X-Z i en particular doncs, òrbites halo. El seguiment i parametrització de la corba característica es fa pel paràmetre arc, la qual cosa evita les singularitats típiques del mètode de continuació.

Considerem  $P_0 = (x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0) = (x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})_0$  la condició inicial amb  $y_0 = 0$ ,  $\dot{x}_0 = 0$  i  $\dot{z}_0 = 0$ .

Considerem la primera intersecció de l'òrbita que passa per  $P_0$  amb el pla  $y = 0$  que la notem per  $P_f = (x_f, y_f, z_f, \dot{x}_f, \dot{y}_f, \dot{z}_f) = (x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})_f$  (amb  $y_f = 0$ ).

Si el que volem és una òrbita periòdica, degut a les simetries del problema només ens cal que

$$\begin{aligned} f^1(x, z, \dot{y})_0 &=: \dot{x}_f = 0, \\ f^2(x, z, \dot{y})_0 &=: \dot{z}_f = 0, \end{aligned}$$

o el que és el mateix, definint  $X = (x, z, \dot{y})$  i  $F = (f^1, f^2)^t$ , volem la solució del sistema no lineal  $F(X_0) = 0$ .

Si el rang de  $DF$  és dos, aleshores  $F(X_0)$  ens dóna una corba, anomenada característica a l'espai  $(x, z, \dot{y})_0$  (cada punt de la corba correspon a una òrbita halo).

Per a tal de seguir aquesta corba apliquem un mètode de continuació respecte del paràmetre arc que notarem per  $s$ , així, com que dir que una corba està parametritzada per l'arc és equivalent a que el vector tangent tingui norma 1, a més de  $F(X_0) = 0$ , cal imposar que

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\dot{y}}{ds}\right)^2 = 1,$$

llavors calculant les derivades parcials de  $F$  i aïllant  $\frac{dx}{ds}$ ,  $\frac{dz}{ds}$  i  $\frac{d\dot{y}}{ds}$  obtenim el sistema

d'equacions diferencials que ens dóna la corba:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{ds} &= \frac{A_1}{A_0} \\ \frac{dz}{ds} &= \frac{A_2}{A_0} \\ \frac{dy}{ds} &= \frac{A_3}{A_0}\end{aligned}$$

on

$$\begin{aligned}A_1 &= \frac{\partial f^1}{\partial z_0} \frac{\partial f^2}{\partial \dot{y}_0} - \frac{\partial f^1}{\partial \dot{y}_0} \frac{\partial f^2}{\partial z_0}, & A_2 &= \frac{\partial f^1}{\partial \dot{y}_0} \frac{\partial f^2}{\partial x_0} - \frac{\partial f^1}{\partial x_0} \frac{\partial f^2}{\partial \dot{y}_0}, \\ A_3 &= \frac{\partial f^1}{\partial x_0} \frac{\partial f^2}{\partial z_0} - \frac{\partial f^1}{\partial z_0} \frac{\partial f^2}{\partial x_0}, & A_0 &= (A_1^2 + A_2^2 + A_3^2)^{1/2}.\end{aligned}$$

Per a integrar aquest camp, com que no tenim explícitament l'expressió de  $f^1$  ni de  $f^2$ , sinó que només les podem avaluar numèricament, és convenient aplicar un mètode predictor-corrector per a poder aprofitar la informació que es va obtenint. Per això utilitzem un Adams-Bashford d'un, dos, tres o quatre passos depenent del nombre d'òrbites periòdiques que es tinguin en aquell moment.

D'aquesta manera, donats uns quants punts  $x_1, \dots, x_n$  amb  $n \geq 1$  de la corba característica, el mètode d'Adams-Bashford ens dóna un nou punt  $x_{n+1}^0$  proper a la corba i que caldrà refinar per a obtenir una nova òrbita halo.

Pel refinament utilitzarem bàsicament un Newton. Suposem que  $X^{k-1}$  sigui l'aproximació d'una òrbita halo, aleshores construïm el següent mètode iteratiu:

$$X^k = X^{k-1} + \Delta X^{k-1}$$

on imposem que  $\Delta X^{k-1}$  verifiqui  $DF(\Delta X^{k-1}) = -F(X^{k-1})$  i que es minimitzi la norma definida per  $\Delta X^t \Delta X$ . La solució d'aquest problema és:

$$\Delta X^{k-1} = -Q^{-1}G^t(GQ^{-1}G^t)^{-1}F(X^{k-1}),$$

on hem notat per  $G = DF(X^{k-1})$ .

### 3.3 Magnituds geomètriques associades a les òrbites halo

Entendre la geometria i el comportament local de les òrbites prop d'una òrbita halo és de vital importància ja sigui per a elaborar una estratègia de control del satèl·lit per a mantenir-lo en estació (veure [7]), o bé, tal com veurem en aquesta memòria, per a realitzar maniobres que el transfereixin d'una òrbita halo a una altra.

Considerem les equacions del moviment del problema restringit (1.1) que d'una manera compacta les podem escriure com

$$\dot{y} = f(y), \quad y \in \mathbb{R}^6. \quad (3.1)$$

L'estudi de l'entorn d'una òrbita el podem dur a terme, fins a primer ordre, mitjançant de les equacions variacionals:

$$\dot{A} = Df(y(t))A \text{ amb } A(0) = Id \text{ i } A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^6, \mathbb{R}^6), \quad (3.2)$$

ja que si  $\Phi$  és el flux associat a (3.1), i denotem per  $\Phi_\tau(y)$  el punt de l'òrbita per  $t = \tau$  que ha passat per  $y$  quan  $t = 0$ , aleshores la matriu  $A(\tau)$  de (3.2) és la diferencial de  $D\Phi_\tau$  respecte de les condicions inicials.

Es a dir, si  $h \in \mathbb{R}^6$  llavors

$$\Phi_\tau(y + h) = \Phi_\tau(y) + D\Phi_\tau(y)h + O(|h|^2)$$

i per tant  $\Phi_\tau(y) + A(\tau)h$  és una bona aproximació de  $\Phi_\tau(y + h)$  si  $h$  és petit.

Les equacions variacionals d'ordre superior es poden anar obtenint mitjançant la fórmula de Taylor, ara bé, en el nostre cas no han estat necessàries ja que la teoria de primer ordre ha donat un resultat satisfactori. La incorporació de les variacionals de segon ordre suposaria integrar 216 equacions a més de les 6 del camp i de les 36 de les variacionals de primer ordre. Es a dir, un total de 258 equacions.

#### 3.3.1 Teoria de Floquet per a les òrbites halo

Si integrem la matriu de variacionals sobre una òrbita halo, durant el seu període  $T$ , obtenim la matriu  $M = A(T)$  que s'anomena matriu de monodromia associada a l'òrbita.

Si s'analitzen els valors propis d'aquesta matriu resulten ser

$$\lambda_1 > 1, \lambda_2 < 1, \lambda_3 = \lambda_4 = 1 \text{ i } \lambda_5 = \bar{\lambda}_6 \text{ complexos de mòdul } 1.$$

Aquests sis valors propis es poden agrupar per parelles i tenen el següent significat geomètric:

- La primera parella  $(\lambda_1, \lambda_2)$  reals i tals que  $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 1$ , està associada a la varietat inestable i estable de l'òrbita respectivament. Aquests valors propis donen el caràcter hiperbòlic a l'òrbita. El valor propi  $\lambda_1$  és el dominant (el major en valor absolut) i el seu vector propi associat que notarem per  $e_1(0)$  dona la direcció més expansiva. Utilitzant  $D\Phi_\tau$  obtenim la imatge d'aquest vector transportada pel flux variacional

$$e_1(\tau) = D\Phi_\tau e_1(0),$$

aquest vector  $e_1(\tau)$ , juntament amb el vector tangent a l'òrbita dona, en cada punt d'aquesta, un pla que és tangent a la varietat inestable local  $W_{\text{loc}}^u$ .

D'una manera semblant  $\lambda_2$  junt amb el seu vector propi  $e_2(0)$  està associat a la varietat estable, és a dir, a la direcció de més contracció igualment

$$e_2(\tau) = D\Phi_\tau e_2(0),$$

és un vector que juntament amb el tangent a l'òrbita genera un pla tangent a la varietat estable local:  $W_{\text{loc}}^s$ .

A més per la simetria de les equacions, si  $(v_1, \dots, v_6)$  és el vector associat a  $\lambda_1$ , aleshores  $(v_1, -v_2, v_3, -v_4, v_5, -v_6)$  és el vector propi associat a  $\lambda_2$ , per la qual cosa, si tenim la matriu de monodromia, només cal calcular  $e_1(0)$ , pel mètode de la potència per exemple, i automàticament tenim la parella.

Els càlculs han demostrat que les òrbites halo són molt inestables, i que la inestabilitat decreix a mesura que augmenta l'amplitud  $z$ . Així per a una òrbita halo d'amplitud  $z$  normalitzada  $\beta = 0.08$  (120000 km),  $\lambda_1 \simeq 1727.96$ , mentre que per a  $\beta = 0.25$ ,  $\lambda_1 \simeq 1420.67$ .

- La segona parella  $(\lambda_3, \lambda_4)$ , està formada per valors propis iguals a 1 que estan associats a direccions neutres. Ara bé, malgrat que la seva multiplicitat algebraica és dos, la seva multiplicitat geomètrica és u. Es a dir, només hi ha un vector propi de  $M$  amb valor propi 1. Aquest és el vector tangent a l'òrbita que notarem per  $e_3(0)$  per  $t = 0$  i  $e_3(t)$  en general.

L'atre valor propi igual a 1, està associat a variacions de l'energia o a qualsevol altra variable equivalent que parametritzi la família en el nostre rang, per exemple l'amplitud  $z$ . El vector associat, que per a fixar-lo el triarem dins el subespai perpendicular a  $e_3(0)$ , dóna la direcció tangent a la família d'halos. La matriu de monodromia restringida a aquest pla té la forma de Jordan

$$\begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

i el fet de que  $\varepsilon$  no sigui zero, es degut a que el període de les halo, encara que molt lentament, varia al llarg de la família.

- La tercera parella  $(\lambda_5, \lambda_6)$  està formada per valors propis complexos de mòdul 1 i juntament amb la parella anterior completen els vectors associats a la varietat central de l'òrbita. La matriu de monodromia restringida al pla generat per les parts real i imaginària dels vectors propis associats a  $\lambda_5$  i a  $\lambda_6$  és una rotació i per tant té la forma

$$\begin{pmatrix} \cos \Gamma & -\sin \Gamma \\ \sin \Gamma & \cos \Gamma \end{pmatrix}.$$

Així doncs, en una base adequada, la matriu de monodromia es pot escriure com:

$$M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \lambda_1^{-1} & & & & \\ & & \boxed{\begin{matrix} 1 & \varepsilon \\ 0 & 1 \end{matrix}} & & & \\ & & & & & 0 \\ & & & & \boxed{\begin{matrix} \cos \Gamma & -\sin \Gamma \\ \sin \Gamma & \cos \Gamma \end{matrix}} & \\ & 0 & & & & \end{pmatrix}.$$

Tenint en compte aquesta geometria que té el problema, anem a definir els modes de Floquet.



Volem sis vectors  $T$ -periòdics,  $\bar{e}_i(\tau)$  per  $i = 1 \dots 6$ , de tal manera que a partir d'ells es pugui recuperar  $e_i(t)$  d'una manera fàcil.

Degut a que el ritme d'escapament local per la varietat inestable és exponencial, definim el primer mode de Floquet com

$$\bar{e}_1(\tau) = e_1(\tau) \exp\left(\frac{-\tau}{T} \ln \lambda_1\right).$$

El segon mode  $\bar{e}_2(\tau)$  el definim d'una manera anàloga tenint també en compte que el ritme local d'apropament per la varietat estable és exponencial

$$\bar{e}_2(\tau) = e_2(\tau) \exp\left(\frac{-\tau}{T} \ln \lambda_2\right).$$

o bé, degut a la simetria de les equacions, si

$$\bar{e}_1(\tau) = (v_1(\tau), v_2(\tau), v_3(\tau), v_4(\tau), v_5(\tau), v_6(\tau)),$$

llavors

$$\bar{e}_2(\tau) = (v_1(\tau), -v_2(\tau), v_3(\tau), -v_4(\tau), v_5(\tau), -v_6(\tau)).$$

El tercer mode és el vector tangent a l'òrbita que ja és una funció periòdica

$$\bar{e}_3(\tau) = e_3(\tau).$$

Pel quart mode, un cop calculem  $e_4(0)$ , i el seu transportat per  $D\Phi_\tau$ ,  $e_4(\tau)$ , el descomposem com

$$e_4(\tau) = \bar{e}_4(\tau) + \varepsilon(\tau)\bar{e}_3(\tau),$$

on  $\bar{e}_4(\tau)$  s'escull ortogonal a  $\bar{e}_3(\tau)$ .

Finalment el cinquè i sisè modes els obtenim de la manera següent.

Partint de  $e_5(0)$  i  $e_6(0)$  obtenim  $e_5(\tau)$  i  $e_6(\tau)$  aplicant la matriu  $D\Phi_\tau$ . Aleshores tenint en compte la rotació en el pla generat per les parts real i imaginària dels vectors propis associats a  $\lambda_5$  i a  $\lambda_6$  definim

$$\begin{aligned}\bar{e}_5(\tau) &= \cos\left(\frac{-\Gamma\tau}{T}\right)e_5(\tau) - \sin\left(\frac{-\Gamma\tau}{T}\right)e_6(\tau), \\ \bar{e}_6(\tau) &= \sin\left(\frac{-\Gamma\tau}{T}\right)e_5(\tau) + \cos\left(\frac{-\Gamma\tau}{T}\right)e_6(\tau),\end{aligned}$$

on  $\Gamma$  és l'angle de rotació dels vectors associats a  $\lambda_5$  i  $\lambda_6$  i essent  $\lambda_5 = a + bi$  ve donada per  $\Gamma = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$ .

Aquests modes de Floquet han estat calculats, equiespaïats en el temps, sobre les òrbites halo, en 512 punts a fi de fer anàlisi de Fourier. D'aquesta manera es poden generar en qualsevol moment sense gran esforç.

### 3.3.2 Posició nominal i factors de projecció

Suposem que en un cert moment  $\tau$  tenim un punt  $X \in \mathbb{R}^6$  (posicions i velocitats) que es troba en una òrbita propera a una halo. A aquest punt  $X$ , li associarem per algun procediment un altre punt  $XNO \in \mathbb{R}^6$  que es troba sobre una òrbita halo i que anomenarem posició nominal. Amb això voldrem indicar que  $XNO$  és l'estat en el qual s'hauria de trobar el satèl·lit, però degut al motiu que sigui, la diferència és un cert vector error no nul:

$$\delta = X - XNO = (\delta x, \delta y, \delta z, \delta \dot{x}, \delta \dot{y}, \delta \dot{z}).$$

Per a tenir una idea del tipus de separació entre la posició real i la nominal en el moment  $\tau$  necessitem expressar  $\delta$  com a combinació lineal dels modes de Floquet:

$$\delta = \sum_{i=1}^6 c_i \bar{e}_i(\tau) \quad (3.3)$$

Ja veurem m'es endavant que no seran necessàries totes les  $c_i$  sinó tant sols alguna d'elles. Per motius de càlcul, no resoldrem el sistema  $6 \times 6$  que imposa (3.3) cada vegada que voldrem els  $c_i$ ; ja que això implicaria a més guardar tots els  $\bar{e}_i(\tau)$ . Utilitzarem el que anomenarem factors de projecció.

Si apliquem la regla de Cràmer a (3.3) obtenim que

$$c_i = \frac{\det(\bar{e}_1(\tau), \dots, \overset{i}{\delta}, \dots, \bar{e}_6(\tau))}{\det(\bar{e}_1(\tau), \bar{e}_2(\tau), \dots, \bar{e}_1(\tau))}$$

Podem desenvolupar llavors el determinant del numerador per la columna i-essima i obtenim:

$$c_i = \pi_1^i(\tau)\delta x + \pi_2^i(\tau)\delta y + \pi_3^i(\tau)\delta z + \pi_4^i(\tau)\delta \dot{x} + \pi_5^i(\tau)\delta \dot{y} + \pi_6^i(\tau)\delta \dot{z},$$

on  $\pi_j^i(\tau)$  és l'adjunt del j-essim element de la columna i-essima dividit pel determinant de la base de Floquet.

Notem així, que podem obtenir les components  $c_i$  fent un producte escalar entre el vector error  $\delta$  i un cert vector  $\pi^i$ . A aquest vector l'anomenarem i-essim factor de projecció.

Com veiem, els factors de projecció només depenen dels  $\bar{e}_i(\tau)$ . Aleshores és convenient que quan es calculen els modes de Floquet calculem també els factors de projecció que siguin necessaris. D'aquests últims n'hem fet també l'anàlisi de Fourier.

A efectes tècnics, ja que  $\bar{e}_i(\tau)$  és un vector que varia en mòdul al llarg del temps, és millor utilitzar normalització i multiplicar  $\pi^i$  per  $|\bar{e}_i|$ , d'aquesta manera els  $c_i$  són sempre les components respecte d'un vector unitari i per tant comparables en qualsevol instant. Es a dir, expressant

$$\delta = \sum_{i=1}^6 c_i \frac{\bar{e}_i(\tau)}{\|\bar{e}_i(\tau)\|}$$

s'obté

$$c_i = \frac{\det(\bar{e}_1(\tau), \dots, \overset{i}{\delta}, \dots, \bar{e}_6(\tau))}{\frac{1}{\|\bar{e}_i(\tau)\|} \det(\bar{e}_1(\tau), \bar{e}_2(\tau), \dots, \bar{e}_1(\tau))} = \|\bar{e}_i(\tau)\| \langle \pi^i(\tau), \delta \rangle = \langle \pi^i | e_i |, \delta \rangle .$$

## 3.4 Estudi de la transferència utilitzant el problema restringit

### 3.4.1 Introducció

Els càlculs de les òrbites de transferència des de la Terra fins a una òrbita halo, es fan moltes vegades utilitzant mètodes de “prova i error”, canviant les condicions inicials de sortida de la Terra, gairebé de manera manual, fins que s’obtenen les transferències. D’altres vegades s’escull entre les diferents possibilitats en que es pot realitzar la sortida de la Terra, essencialment mitjançant una inserció directa del satèl·lit en l’òrbita de transferència, o mitjançant una empenta de sortida quan el satèl·lit es troba en una òrbita geostacionària de transferència. Un cop fet això, es fixen uns certs paràmetres, usualment alguns elements orbitals de l’òrbita geostacionària de transferència o bé algunes característiques de l’òrbita d’inserció directa, i se’n deixen altres de lliures, o dins uns marges, com poden ser el punt d’inserció a l’òrbita halo escollida i d’altres elements orbitals en l’òrbita de sortida o bé en l’òrbita geostacionària. Utilitzant llavors un programa optimitzador, es troba una òrbita de transferència que minimitza la suma de delta-v gastats per a realitzar la maniobra de sortida de la Terra i la maniobra d’inserció a l’òrbita halo. Un cop es té una òrbita candidata i s’ha refinat amb l’optimitzador, s’aplica un mètode de continuació respecte l’època de sortida i d’aquesta manera es van obtenint les òrbites de transferència durant el temps desitjat (veure [13]).

Aquests mètodes, malgrat que troben solucions al problema, no aprofiten de cap manera la geometria del problema de la qual la teoria general dels Sistemes Dinàmics en dona bona llum. El procés optimitzador dona un resultat que sembla que es queda curt quan al que realment es podria dir del problema i de les seves característiques.

L’objectiu d’aquesta part de la memòria, és aprofitar la geometria de la qual disposem en el problema per a aconseguir la transferència. Així doncs, degut al fort caràcter hiperbòlic de les òrbites halo, la varietat estable s’acosta a l’òrbita halo d’una manera bastant ràpida. Per tant, si fóssim capaços de posar el satèl·lit dins

la varietat estable d'una òrbita halo, arribaríem prop d'ella, a uns pocs kilòmetres de distància, tardant un temps de viatge raonable.

Si fos possible procedir d'aquesta manera, estalviariem la maniobra d'inserció que necessàriament cal fer en els mètodes que fins ara es venen utilitzant, ja que aquests mètodes "apunten" a un punt en concret de l'òrbita halo objectiu, i en canvi nosaltres ens hi acostaríem d'una manera asimptòtica. Caldria doncs només realitzar la maniobra d'inserció a la varietat estable al sortir de la Terra, i les maniobres de seguiment durant la transferència per a forçar al satèl·lit a seguir el camí establert. Aquestes darreres no es poden evitar ja que ens acostem a una òrbita hiperbòlica.

Per començar a estudiar si és possible la realització de la transferència d'aquesta manera, hem agafat el model del problema restringit, ja que en principi, degut a la seva simplicitat, podem obtenir els resultats més essencials i descobrir si existeix una manera d'abordar aquest problema, sense que les limitacions del temps de càlcul o altres complicacions tècniques dificultin la tasca. Aquest model ens permet fer un gran nombre d'exploracions en un temps raonable.

### 3.4.2 Model i òrbites halo

En aquest estudi preliminar utilitzarem les equacions del problema restringit. Agafarem el paràmetre de masses  $\mu = 3.04018792067404 \times 10^{-6}$  que és el que s'obté si considerem les masses del Sol, Terra i Lluna donades per les efemèrides del JPL de les quals en parlem a la secció (1.3.3).

En aquest model considerem que el primari gran és el Sol, mentre que el petit està format per la Terra+Lluna i situat en el baricentre Terra-Lluna (veure figura 3.10).

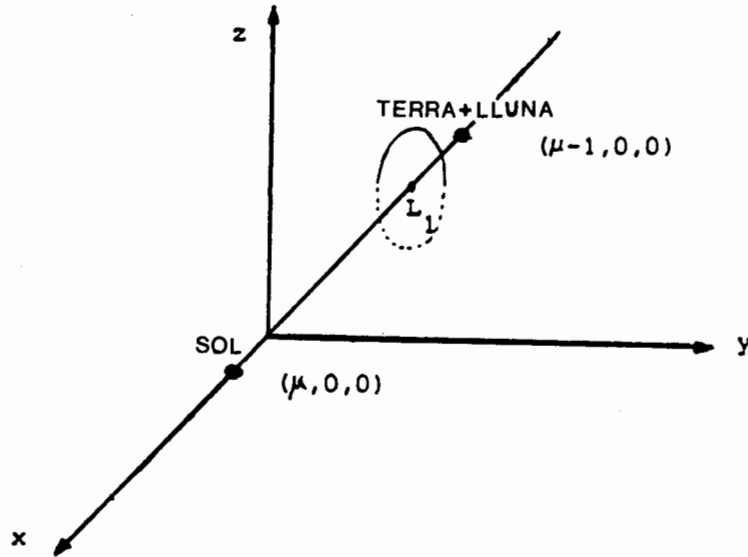


Figura 3.10. Situació considerada en el problema restringit.

El punt  $L_1$  s'obté com a solució de la quàntica d'Euler:

$$\gamma^5 + (3 - \mu)\gamma^4 + (3 - 2\mu)\gamma^3 - \mu\gamma^2 + 2\mu\gamma - \mu = 0$$

i es troba a  $(\mu - 1 + \gamma, 0, 0) = (-0.98998624016421, 0, 0)$ . Fent la conversió a unitats físiques, tenint en compte que la unitat de distància en el nostre model és la distància mitja del baricentre Terra-Lluna al Sol ( $1\text{AU}=149597870.66\text{ km}$ ), el punt  $L_1$  es troba a uns 1500000 km de la Terra.

Per a fer els càlculs d'aquest estudi, i especialment els de la propera secció, ha estat necessari generar la família d'òrbites halo al voltant de la d'amplitud-z normalitzada  $\beta = 0.08$  ( $\simeq 120000\text{ km}$ ). Per això hem calculat les òrbites halo de la classe 1 d'acord amb Richardson<sup>1</sup> utilitzant el procés analític d'ordre 15 descrit a la secció (3.2.3) pel rang d'amplitud en  $\beta$  des de  $\beta = 0.05$  fins a  $\beta = 0.26$  i equiespaiades amb un pas  $\Delta\beta = 0.001$ . Les hem refinat posteriorment de manera

<sup>1</sup>A [17], tenint en compte les simetries de les equacions del problema restringit, que fan que existeixin més d'una família d'òrbites halo, Richardson considera dues classes d'òrbites halo simètriques una de l'altra respecte del pla XY. Veure les figures 3.11, 3.12 i 3.13.

numèrica, utilitzant el procés corrector que expliquem per l'obtenció numèrica de les òrbites halo, dins la mateixa secció (3.2.3), essent les correccions l'ordre de  $10^{-8}$  en les coordenades d'espai ( $\simeq 1.5$  km) i de  $10^{-7}$  en les coordenades de velocitat ( $\simeq 2.9$  mm/s). Algunes de les condicions inicials obtingudes per a diferents amplituds- $z$  així com el seu període poden veure's a la taula 3.1. Per a obtenir les condicions inicials corresponents a les òrbites de la classe 2, només cal canviar el signe de  $z$ .

$\beta$	$\alpha$	$x$	$z$	$\dot{y}$	Període
0.05	0.1401468230	-0.9888342317	0.0005591021	-0.0088841665	3.0599266974
0.06	0.1405794627	-0.9888354742	0.0006711503	-0.0089062613	3.0598251236
0.07	0.1410907645	-0.9888369601	0.0007833414	-0.0089322747	3.0597046212
0.08	0.1416790512	-0.9888386980	0.0008956860	-0.0089621557	3.0595649713
0.09	0.1423436345	-0.9888406976	0.0010082059	-0.0089958485	3.0594059078
0.10	0.1430837542	-0.9888429698	0.0011209230	-0.0090332916	3.0592271258
0.11	0.1438985844	-0.9888455264	0.0012338589	-0.0090744175	3.0590282801
0.12	0.1447872404	-0.9888483805	0.0013470354	-0.0091191539	3.0588089838
0.13	0.1457487866	-0.9888515460	0.0014604741	-0.0091674235	3.0585688066
0.14	0.1467822433	-0.9888550377	0.0015741965	-0.0092191447	3.0583072731
0.15	0.1478865949	-0.9888588712	0.0016882242	-0.0092742325	3.0580238603
0.16	0.1490607970	-0.9888630630	0.0018025786	-0.0093325982	3.0577179958
0.17	0.1503037847	-0.9888676303	0.0019172811	-0.0093941507	3.0573890548
0.18	0.1516144791	-0.9888725909	0.0020323532	-0.0094587964	3.0570363574
0.19	0.1529917954	-0.9888779632	0.0021478164	-0.0095264396	3.0566591658
0.20	0.1544346495	-0.9888837662	0.0022636921	-0.0095969836	3.0562566801
0.21	0.1559419644	-0.9888900195	0.0023800020	-0.0096703302	3.0558280351
0.22	0.1575126772	-0.9888967431	0.0024967675	-0.0097463808	3.0553722959
0.23	0.1591457442	-0.9889039574	0.0026140107	-0.0098250363	3.0548884532
0.24	0.1608401473	-0.9889116835	0.0027317535	-0.0099061977	3.0543754180
0.25	0.1625948984	-0.9889199427	0.0028500181	-0.0099897661	3.0538320165
0.26	0.1644090445	-0.9889287566	0.0029688271	-0.0100756434	3.0532569833

Taula 3.1. Condicions inicials i períodes d'algunes òrbites halo, classe 1, del problema restringit.

Les projeccions en els plans coordenats d'algunes d'aquestes òrbites poden veure's

a les figures 3.11, 3.12 i 3.13.

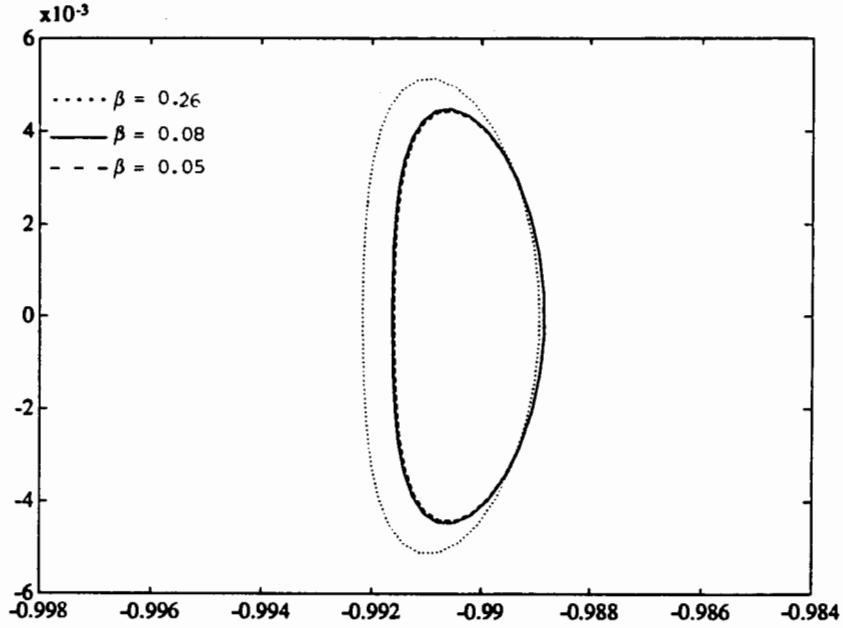


Figura 3.11. Projeccions en el pla XY de les òrbites halo amb  $\beta = 0.05$ ,  $\beta = 0.08$  i  $\beta = 0.26$ . Les classes 1 i 2 tenen la mateixa projecció XY.

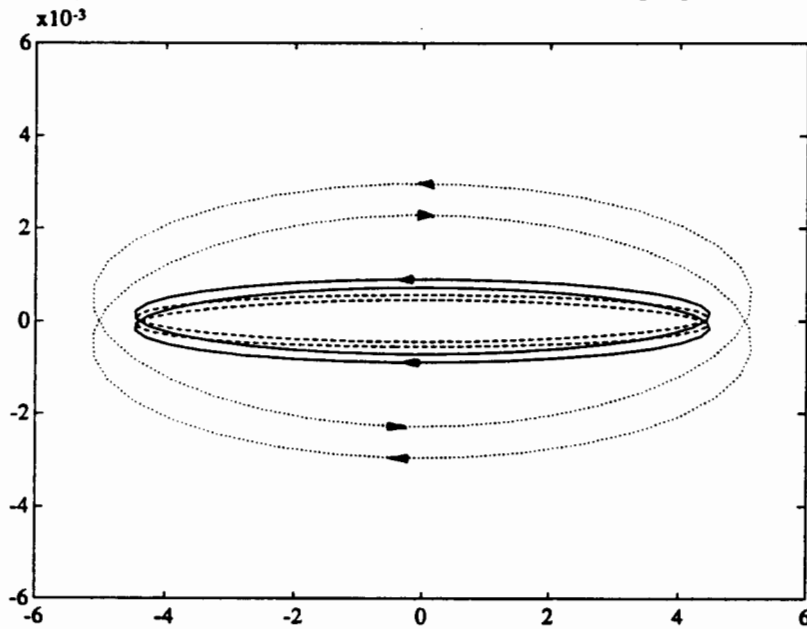


Figura 3.12. Projeccions en el pla YZ de les òrbites halo amb  $\beta = 0.05$ ,  $\beta = 0.08$  i  $\beta = 0.26$ . Les classes 1 i 2 apareixen simètriques respecte de l'eix Y però recorregudes en sentit contrari.



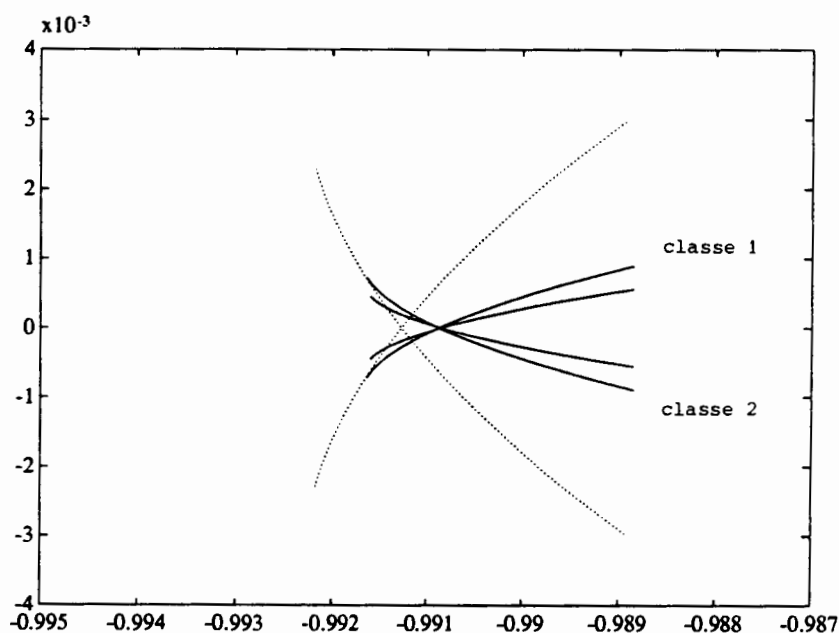


Figura 3.13. Projeccions en el pla XZ de les òrbites halo amb  $\beta = 0.05$ ,  $\beta = 0.08$  i  $\beta = 0.26$ . Les classes 1 i 2 apareixen simètriques respecte de l'eix X.

### 3.4.3 Generació de la varietat estable

Un cop disposem de les òrbites halo ens cal globalitzar les seves varietats estables per a buscar les possibles òrbites de transferència que passen prop de la Terra (en aquest cas el baricentre Terra-Lluna). Per això sabem que el vector propi associat al valor propi de mòdul mínim de la matriu de monodromia de l'òrbita halo dóna la direcció de la varietat estable. Aquesta direcció, transportada pel flux variacional dóna la direcció de la varietat estable en els altres punts de l'òrbita.

La taula 3.2 mostra quins són els vectors propis i valors propis de la matriu de monodromia associats a la varietat estable de les òrbites halo d'amplitud considerada. Degut a les simetries del problema restringit, canviant el signe a  $z$  i a  $\dot{z}$  s'obtenen els vectors propis associats a la varietat estable de les òrbites halo de la classe 2, mentre que canviant el signe de  $y$ ,  $\dot{x}$  i  $\dot{z}$ , i el vap  $\lambda$  per  $1/\lambda$  s'obtenen els vectors propis i els valors propis associats a la varietat inestable de les òrbites halo de la classe 1.

0.05	0.0005711158		
	0.3634509489	0.1223347372	0.0058923500
	-0.8365328900	-0.3899205824	-0.0328262610
0.06	0.0005732469		
	0.3636112700	0.1222422460	0.0070680992
	-0.8362130264	-0.3898607040	-0.0393716326
0.07	0.0005757787		
	0.3638005665	0.1221334543	0.0082425585
	-0.8358350443	-0.3897908667	-0.0459073658
0.08	0.0005787178		
	0.3640187341	0.1220086256	0.0094153708
	-0.8353990058	-0.3897115358	-0.0524311668
0.09	0.0005820718		
	0.3642656742	0.1218680479	0.0105862964
	-0.8349049459	-0.3896232355	-0.0589414416
0.10	0.0005858498		
	0.3645412810	0.1217120400	0.0117550931
	-0.8343529005	-0.3895265531	-0.0654366364
0.11	0.0005900619		
	0.3648454431	0.1215409491	0.0129215157
	-0.8337429059	-0.3894221359	-0.0719152399
0.12	0.0005947196		
	0.3651780457	0.1213551478	0.0140853154
	-0.8330749968	-0.3893106892	-0.0783757859
0.13	0.0005998356		
	0.3655389726	0.1211550312	0.0152462387
	-0.8323492059	-0.3891929737	-0.0848168547
0.14	0.0006054242		
	0.3659281083	0.1209410146	0.0164040269
	-0.8315655616	-0.3890698025	-0.0912370753
0.15	0.0006115011		
	0.3663453400	0.1207135297	0.0175584152
	-0.8307240876	-0.3889420395	-0.0976351257
0.16	0.0006180836		
	0.3667905599	0.1204730220	0.0187091315
	-0.8298248009	-0.3888105960	-0.1040097343

0.17	0.0006251908		
	0.3672636671	0.1202199479	0.0198558959
	-0.8288677103	-0.3886764288	-0.1103596797
0.18	0.0006328436		
	0.3677645697	0.1199547712	0.0209984189
	-0.8278528153	-0.3885405379	-0.1166837912
0.19	0.0006410647		
	0.3682931865	0.1196779606	0.0221364008
	-0.8267801043	-0.3884039644	-0.1229809486
0.20	0.0006498792		
	0.3688494495	0.1193899865	0.0232695301
	-0.8256495530	-0.3882677887	-0.1292500818
0.21	0.0006593142		
	0.3694333048	0.1190913177	0.0243974822
	-0.8244611226	-0.3881331284	-0.1354901701
0.22	0.0006693996		
	0.3700447148	0.1187824192	0.0255199179
	-0.8232147586	-0.3880011373	-0.1417002412
0.23	0.0006801675		
	0.3706836596	0.1184637487	0.0266364819
	-0.8219103888	-0.3878730039	-0.1478793704
0.24	0.0006916534		
	0.3713501385	0.1181357539	0.0277468008
	-0.8205479216	-0.3877499502	-0.1540266790
0.25	0.0007038956		
	0.3720441707	0.1177988697	0.0288504811
	-0.8191272443	-0.3876332312	-0.1601413336
0.26	0.0007169360		
	0.3727657972	0.1174535154	0.0299471075
	-0.8176482216	-0.3875241343	-0.1662225437

Taula 3.2. Valor propi i vector propi de la matriu de monodromia associats a les òrbites halo de la taula 3.1. Al costat de l'amplitud-z hi apareix el valor propi, les dues línies següents contenen el vector propi associat.

Seleccionada una òrbita halo, podem obtenir les condicions inicials que serviran per globalitzar la varietat estable dins l'aproximació lineal d'aquesta, agafant un punt  $X$  de l'òrbita (posicions i velocitats) i desplaçant-nos al llarg de la direcció estable en aquell punt. Una manera equivalent, que és la que prenem en aquest cas,

és fixar un valor del desplaçament,  $\lambda$ , (positiu o negatiu) i considerar diferents punts de l'òrbita halo afectats d'aquest desplaçament en la direcció estable d'aquell punt. Es a dir, si  $X$  és un punt de l'òrbita halo i  $V_x$  el vector unitari corresponent a la direcció de la varietat estable en aquell punt, llavors

$$X_\lambda^\omega = X + \lambda V_x$$

ens dóna un punt que es troba en l'aproximació lineal de la varietat estable de l'òrbita halo. Si anem variant el punt  $X$  al llarg de l'òrbita considerada, obtenim totes les condicions inicials que integrades temps enrera, ens permeten globalitzar numèricament la varietat estable.

En aquest procés només cal anar amb compte amb la tria de  $\lambda$ . D'una banda, cal escollir el signe de manera que la varietat estable integrada temps enrera s'acosti a la Terra. D'altra banda, quan al seu mòdul, també cal anar amb compte amb la tria. Si s'agafa gran, la varietat estable no quedarà ben aproximada pel desenvolupament fins a la part lineal que utilitzem. Si s'agafa massa petit poden entrar en joc errors d'arrodoniment i, a més, el temps d'integració s'allarga ja que ens costarà més "sortir" de l'òrbita halo, aquest darrer fet, malgrat que no és una dificultat gran pel problema restringit, pot ser-ho quan utilitzem models més complexos. Les proves que hem fet per la tria de  $\lambda$  indiquen que es disposa d'un bon rang de valors pels quals els resultats obtinguts concorden i per tant l'aproximació lineal és suficient pels propòsits que tenim. El valor seleccionat pels resultats presentats és  $\lambda = 1.336 \times 10^{-6}$ , ( $\simeq 200$  km de desplaçament respecte de l'òrbita halo mesurada en unitats físiques).

Procedint d'aquesta manera, triant un nombre de punts sobre l'òrbita halo, podem globalitzar la part de la varietat estable que s'acosta a la Terra. Les figures 3.14, 3.15 i 3.16 esquematitzen el tub d'òrbites que forma la part de varietat estable

que s'acosta a la Terra per l'òrbita halo d'amplitud  $\beta = 0.08$ .

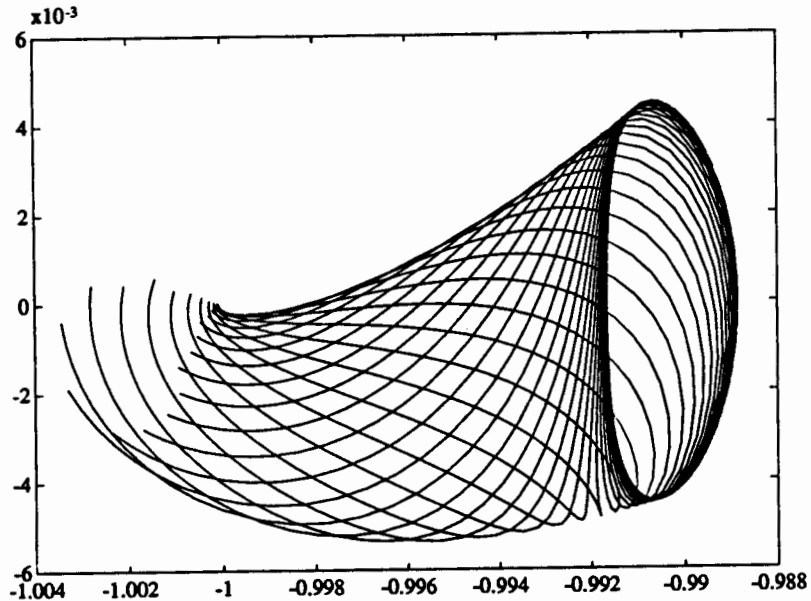


Figura 3.14. Esquematització de la globalització de la part de varietat estable

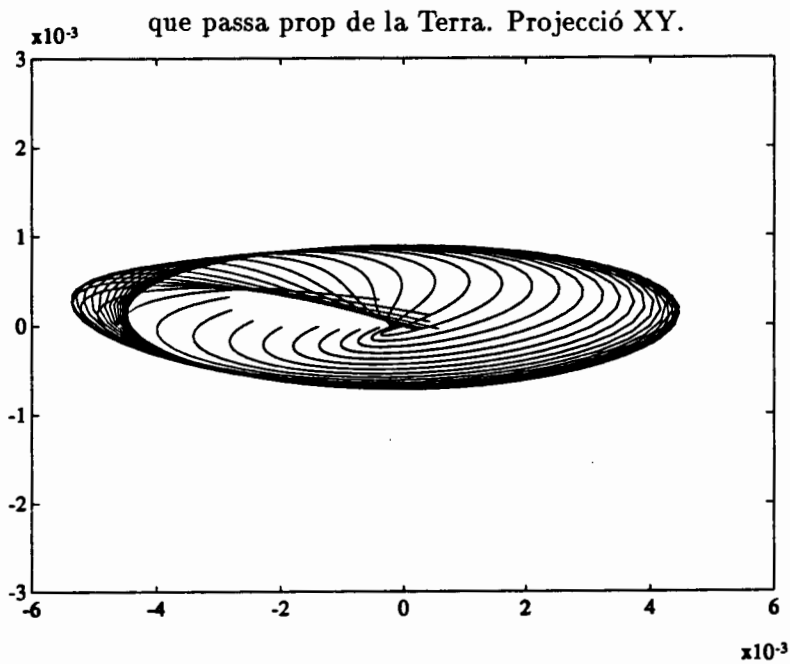


Figura 3.15. Esquematització de la globalització de la part de varietat estable  
que passa prop de la Terra. Projectió YZ.

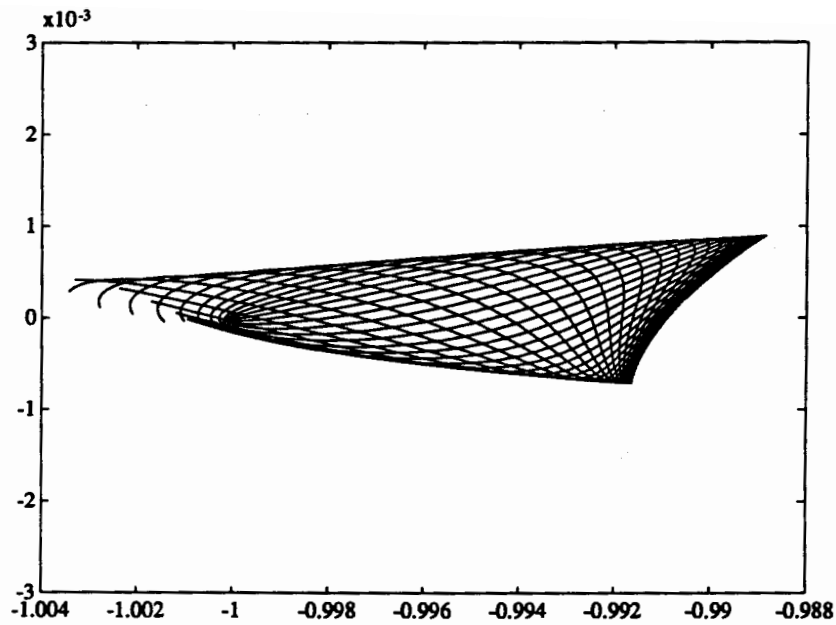


Figura 3.16. Esquematització de la globalització de la part de varietat estable que passa prop de la Terra. Projectió XZ.

Si considerem el pla  $x = -0.9999969598$  es a dir, el pla perpendicular a l'eix  $x$  i que passa pel punt on tenim la Terra, les varietats estables a l'intersecar-lo ho fan en les posicions representades a les figures 3.17 i 3.18.

Tal com veiem en aquestes figures, la distància física des de la varietat estable fins la Terra presenta un mínim que decreix a l'augmentar l'amplitud  $\beta$ . En la figura 3.19 tenim representada la gràfica formada per les distàncies de les òrbites de la varietat de l'òrbita halo d'amplitud- $z$   $\beta = 0.08$  a la Terra. Com anirem veient quan utilitzarem models més complexos, la forma que presenta essencialment es conservarà, però amb pertorbacions. A la figura 3.20 tenim la gràfica formada pels mínims de cada una de les gràfiques anàlogues a la de la figura 3.19 al variar l'amplitud  $\beta$ . En aquesta figura podem observar com decreix la distància de la varietat estable a la Terra a l'augmentar l'amplitud- $z$ .

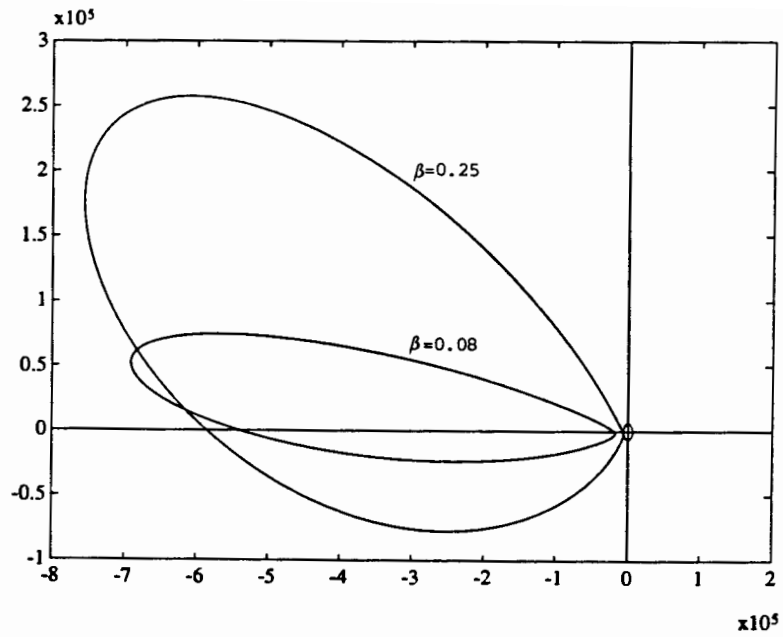


Figura 3.17. Representació de les posicions de tall de la varietat estable de les òrbites halo de la classe 1, (amplituds  $\beta = 0.08$  i  $\beta = 0.25$ ) per un pla perpendicular a l'eix  $x$  que conté la Terra. El cercle que es troba en la creuera dels eixos representa la secció de la Terra.

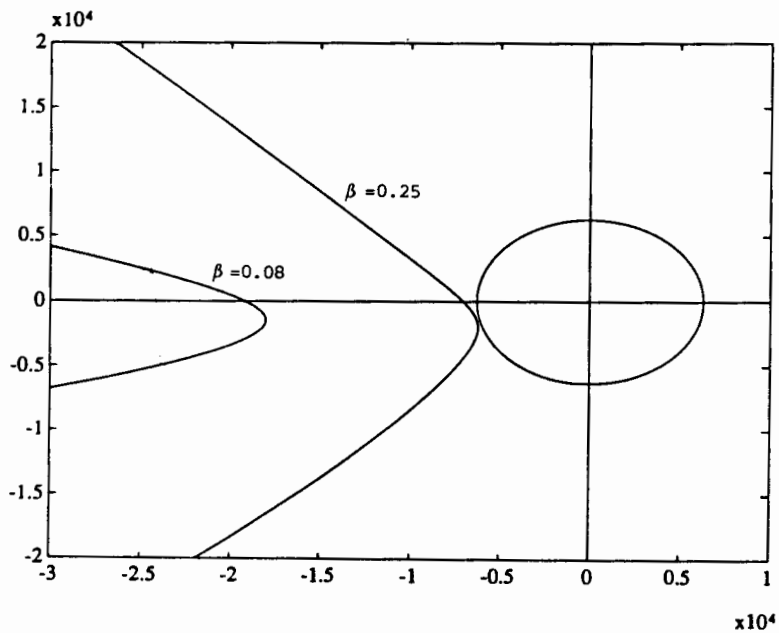


Figura 3.18. Detall de la figura 3.17 prop de la Terra.

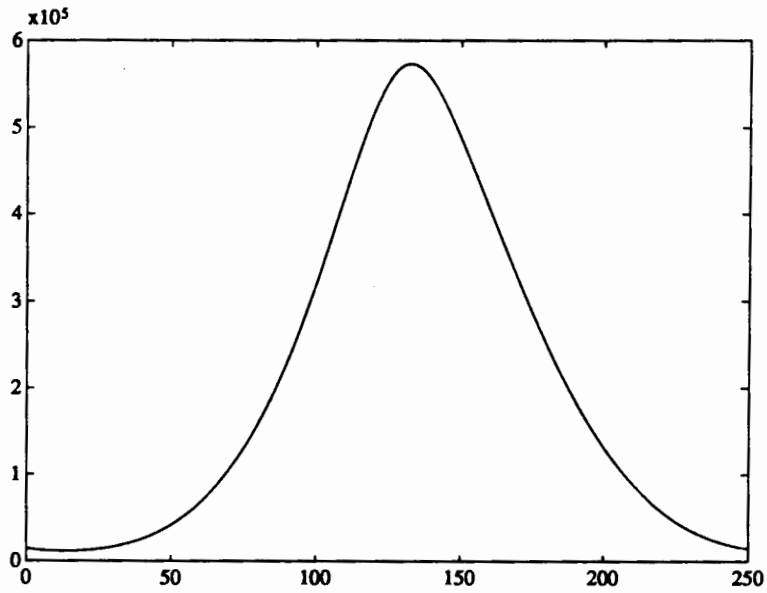


Figura 3.19. Distància en km de les òrbites que formen la varietat estable de l'òrbita halo d'amplitud  $\beta = 0.08$  a la Terra.

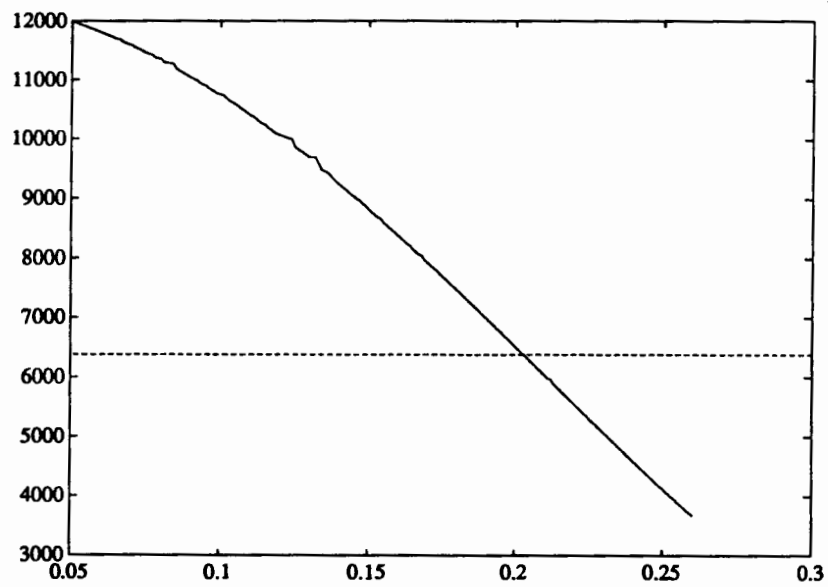


Figura 3.20. Distància en km de la varietat estable de les òrbites halo a la Terra al variar l'amplitud  $\beta$ .



### 3.4.4 Comparació dels resultats obtinguts amb els de la transferència del satèl.lit ISEE-3

Un cop feta la primera exploració usant el problema restringit, és convenient fer una comparació dels resultats obtinguts amb la informació que disposem sobre la transferència del satèl.lit nod-america ISEE-3.

Els articles que parlen de com es va dur a terme la missió d'aquest satèl.lit no són gens explicatius. Aixó, juntament amb el fet que els resultats dels quals disposem a partir del problema restringit encara es troben lluny de la realitat, fan que la comparació pugui ser poc més que qualitativa.

En primer lloc si mirem les projeccions de les òrbites de transferència sobre el pla XY, que obtenim pel nostre mètode (figura 3.21) i la seguida pel satèl.lit ISEE-3 (figura 3.22) veiem que essencialment segueixen el mateix camí. Per tant, d'alguna manera en la transferència del satèl.lit ISEE-3 es va seguir una òrbita propera a la varietat estable de l'òrbita halo objectiu.

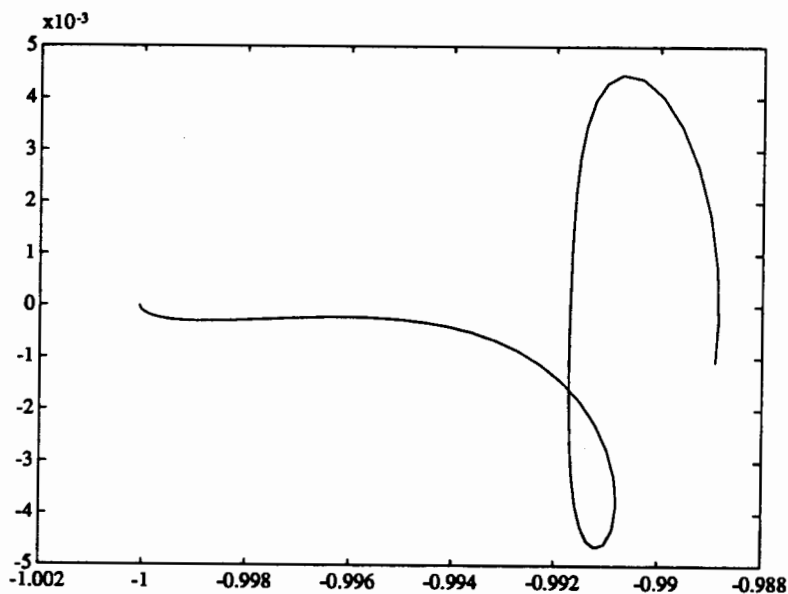


Figura 3.21. Òrbita de la varietat estable de l'òrbita halo d'amplitud  $\beta = 0.08$  que passa més propera a la Terra. Projecció XY.

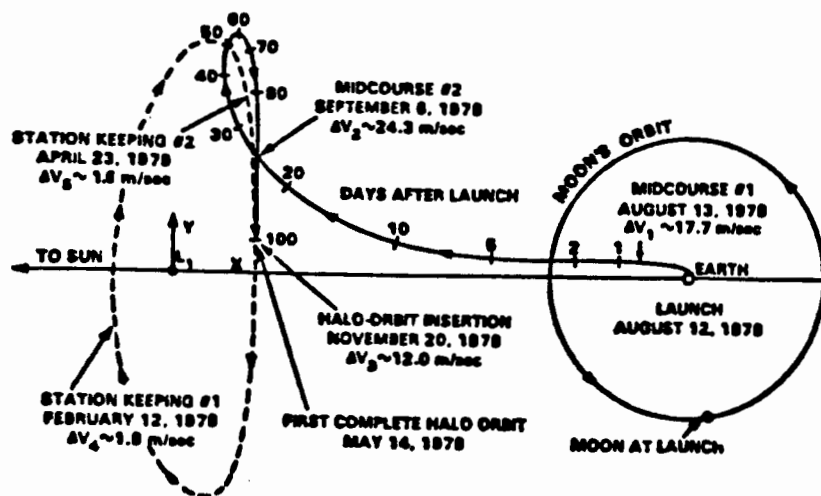


Figura 3.22. Òrbita de transferència i maniobres aplicades pel satèl.lit ISEE-3. (Ref. [6]).

La taula 3.3 conté alguns valors dels paràmetres nominals de la transferència del satèl.lit ISEE-3. Les figures 3.23 i 3.24 representen el temps de viatge i la velocitat relativa a la Terra en el moment de mínima distància de les òrbites de la varietat estable de l'òrbita halo d'amplitud  $\beta = 0.08$ . Notem que la velocitat relativa a la Terra, per l'òrbita de la varietat que més s'acosta a la Terra ve a ser de l'ordre de la que es té pel satèl.lit ISEE-3. El temps de viatge és molt més gran, però això no és indicatiu ja que de fet en el nostre temps de viatge hauria de ser infinit degut al comportament asimptòtic de la varietat vers l'òrbita. A efectes pràctics el satèl.lit el podem considerar ja operatiu força abans d'aquests 204 dies de viatge que el situen

a 200 km de l'òrbita halo.

#### Nominal Trajectory Parameters

<b>Launch Time (GMT):</b>	<b>15:12 Aug. 12, 1978</b>
<b>Injection Time (GMT):</b>	<b>16:10 Aug. 12, 1978</b>
<b>Injection Parameters:</b>	
<b>Radius:</b>	<b>6564.1 km</b>
<b>Velocity:</b>	<b>10.990 km/sec</b>
<b>Spin-Axis Sun Angle:</b>	<b>82.61°</b>
<b>Flight Time to Halo Orbit:</b>	<b>104.75 days</b>
<b><math>\Delta V</math> Requirement for Halo-Orbit Insertion:</b>	
<b>In-Plane Magnitude:</b>	<b>36.95 m/sec</b>
<b>Out-of-Plane Magnitude:</b>	<b>0.03 m/sec</b>

Taula 3.3. Paràmetres nominals de la transferència del satèl.lit ISEE-3. (Ref. [6]).

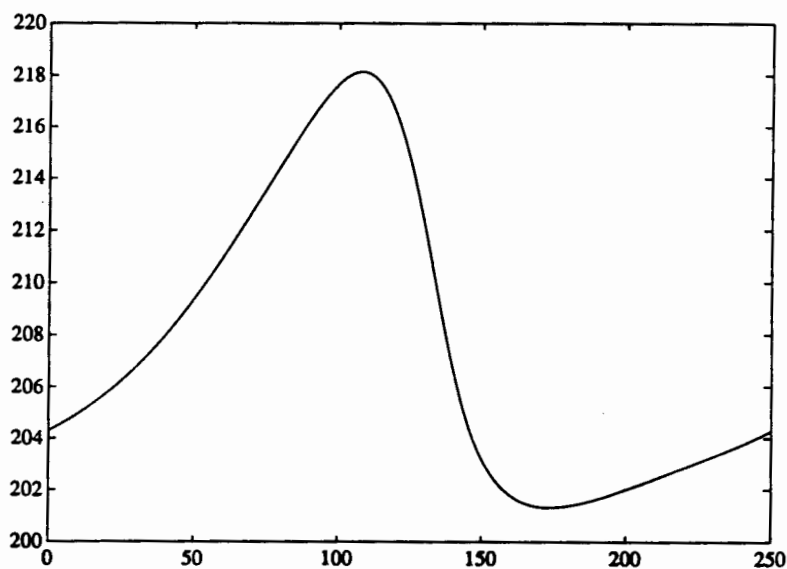


Figura 3.23. Temps de viatge, en dies, que es triga des de la condició inicial presa sobre la varietat, a 200 km de l'òrbita halo d'amplitud  $\beta = 0.08$ , fins arribar a la mínima distància a la Terra. (La integració es fa temps enrera però donem els resultats amb signe positiu).

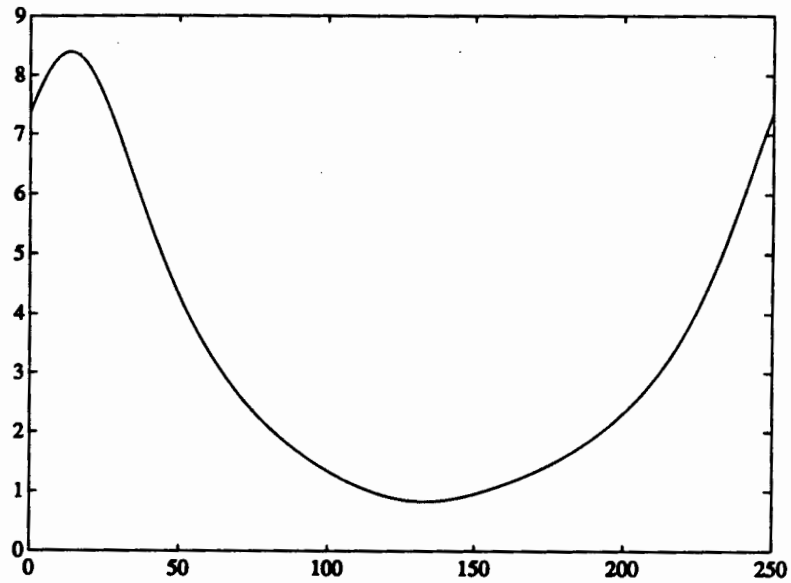


Figura 3.24 Velocitat relativa a la Terra, en km/s, que es té per les òrbites de la varietat de l'òrbita halo d'amplitud  $\beta = 0.08$  en el moment de mínima distància a la Terra.

### 3.5 Transferència entre òrbites halo del RTBP

Degut a que les òrbites de la varietat estable de les òrbites halo del problema restringit i de l'amplitud desitjada, passen relativament lluny de la Terra, i que s'obtenen col·lisions de la varietat amb la Terra per òrbites d'amplitud major, hem considerat que calia desenvolupar una tècnica que permeti la transferència entre les òrbites halo del problema restringit.

Com la geometria del problema la coneixem essencialment a l'entorn de les òrbites halo, va semblar que el millor seria desenvolupar una tècnica de "patinatge" que proporcionés aquest tipus de transferència.

Hem de tenir en compte que les maniobres que realitzarà el satèl·lit, es fan mitjançant uns motors que porta acoblats i que li permetran una variació en la seva velocitat. Se suposa que aquests impulsos són instantanis, i per tant, una maniobra o un control suposa que el satèl·lit passa d'un cert punt  $X = (x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3)$  de l'espai de fases a un altre punt  $X' = (x_1, x_2, x_3, \dot{x}'_1, \dot{x}'_2, \dot{x}'_3)$  amb un petit salt a les tres components de la velocitat,  $\dot{x}'_1$ ,  $\dot{x}'_2$  i  $\dot{x}'_3$ . Quan provoquem la variació d'aquest vector velocitat, mesurada amb una norma adequada, (usualment en els nostres càlculs farem servir la norma euclídea) direm que hem aplicat al satèl·lit una *Delta-v* ( $\Delta v$ ) de magnitud el valor de la norma. L'objectiu de molts problemes d'astrodinàmica, i també en el nostre cas, és dissenyar l'estratègia que ens ha de fer assolir l'objectiu desitjat d'una manera possible en el sentit tècnic i pràctic, i òptima en termes de minimització de la suma de  $\Delta v$  gastats durant les maniobres.

Comencem parlant del mètode de control proposat a [7], per a mantenir el satèl·lit en estació.

La idea essencial de l'estratègia està basada en el fet que el satèl·lit "s'escaparà" de l'òrbita halo seleccionada seguint la varietat inestable d'aquesta. Per tant el que es fa essencialment és mirar en quina mesura el satèl·lit s'ha situat en la varietat inestable, detectant-se això pel tipus d'allunyament exponencial en el temps respecte de l'òrbita halo. Un cop sabem que el satèl·lit comença a escapar-se, seleccionem un cert punt nominal sobre l'òrbita halo i tal com expliquem a la secció (3.3.2),

utilitzant el factor de projecció  $\pi^1$  per a calcular la component del vector error sobre la varietat inestable, aquesta es farà zero aplicant un Delta-v adequat. Per això, cal calcular primer el que anomenem controls unitaris de velocitat  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$  segons les direccions  $x, y$  i  $z$  respectivament, a fi d'anular la component inestable quan aquesta és unitària i de manera que el vector error resultant tingui només components centre-estables:

$$\frac{\bar{e}_1(\tau)}{\|\bar{e}_1(\tau)\|} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \end{pmatrix} = \sum_{j=2}^6 \alpha_j \bar{e}_j(\tau).$$

A partir d'aquí, agafant les tres primeres equacions es pot veure que el determinant que acompanya a  $\alpha_2, \alpha_3$  i  $\alpha_4$  és diferent de zero i per tant es poden aïllar en termes de  $\alpha_5$  i  $\alpha_6$ . Després, inserint-les a les tres últimes equacions i aïllant les  $\Delta_i$  s'obté

$$\begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{10} + a_{11}\alpha_5 + a_{12}\alpha_6 \\ a_{20} + a_{21}\alpha_5 + a_{22}\alpha_6 \\ a_{30} + a_{31}\alpha_5 + a_{32}\alpha_6 \end{pmatrix},$$

on les  $a_{ij}$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,  $j = 0, 1, 2$  són funcions del temps. (Veure [7] per més detalls).

La llibertat que tenim a l'hora de fer el control la fixem finalment triant  $\alpha_5$  i  $\alpha_6$  de manera que es minimitzi la norma  $\|\Delta\| = (\Delta_1^2 + \Delta_2^2)^{1/2} + |\Delta_3|$  que és l'adequada tenint en compte la situació que havien de tenir els motors del satèl·lit.

Així doncs la primera de les estratègies de transferència per la família d'òrbites halo que podria pensar-se, és la utilització d'aquesta tècnica de manteniment en estació per aconseguir canviar d'òrbita. Prenent posicions nominals en una òrbita halo d'amplitud més petita de la que realment tenim més propera.

Suposem que representem les components espacials de la família d'òrbites halo com la superfície d'un troc de con, de manera, que cada òrbita halo quedi representada per la circumferència que s'obté a l'intersecar aquesta superfície amb un pla perpendicular al seu eix. El diàmetre de la circumferència obtinguda el relacionem d'una manera directa amb l'amplitud de l'òrbita halo que considerem.

Amb aquesta representació, la tècnica considerada es veu de la següent manera.

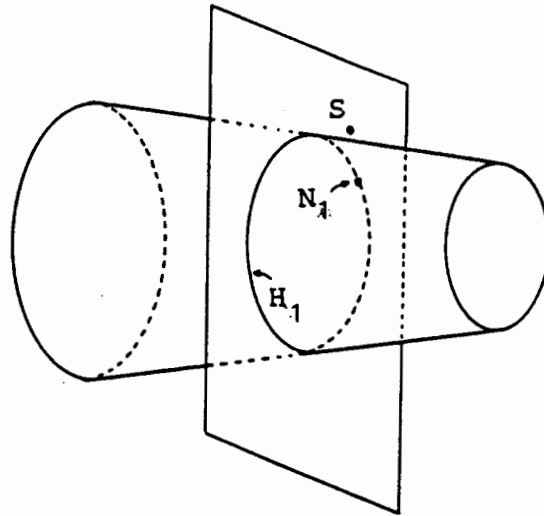


Figura 3.25. Representació qualitativa de la família d'òrbites halo.

Donat un estat del satèl·lit,  $S = (S^p, S^v)$  (posició i velocitat), busquem l'òrbita halo,  $H_1$ , que està a mínima distància espacial d'ell (tenint en compte només les tres components de posició  $S^p$ ). Obtenim així el que anomenarem òrbita nominal a mínima distància, i considerant el punt de l'òrbita  $H_1$  que dona aquest mínim,  $N_1 = (N_1^p, N_1^v)$ , obtenim el que per extensió anomenem punt nominal a mínima distància.

Considerant  $\delta_1 = \overrightarrow{N_1, S}$  el vector error, la tècnica de control per a mantenir el satèl·lit en estació consisteix en modificar  $S^v$  de manera que s'anul·li la component inestable de  $\delta_1$ . L'aplicació d'aquesta tècnica per la transferència consisteix en considerar un altre punt nominal,  $N_2$ , en una òrbita halo  $H_2$  d'amplitud més petita que  $H_1$ , i anul·lar la component inestable del vector "error"  $\delta_2 = \overrightarrow{N_2, S}$ , modificant adequadament  $S^v$ .

Aquest mètode, que resulta molt efectiu a l'hora de mantenir el satèl·lit en una òrbita donada, no funciona a l'hora d'utilitzar-lo per a canviar d'òrbita. La raó d'aquest fet és que aquest mètode manté el satèl·lit en una varietat centre-estable oscil·lant al voltant de l'òrbita nominal escollida. Per tant garanteix que no hi haurà escapament exponencial d'aquesta òrbita seleccionada, però en cap cas aquesta esdevindrà "absorvent" ja que ho impedeixen les components neutres, i especialment,

cal controlar la component tangent a la família, que és de fet qui mesura el desplaçament al llarg del tub i que el nostre cas no sabem el que li succeeix quan apliquem el control.

D'aquesta manera, sembla clar que si el que volem es "patinar" per sobre de la família d'òrbites halo, el que cal essencialment és donar una empenta al satèl·lit en la direcció tangent a la família, i en tot cas, si es necessari, anar aplicant petites maniobres de control prenent com a referència l'òrbita nominal a mínima distància, per anar anul·lant la component inestable que pugui aparèixer durant la baixada.

Tenint en compte que durant la transferència el nostre satèl·lit estarà molt proper del tub d'òrbites halo, si en principi prenem una posició nominal en una altra òrbita halo d'amplitud una mica més petita que la de la nominal a mínima distància, el que ens variarà en el vector error essencialment serà la component tangent a la família. La maniobra la podem calcular així de manera que cancel·li la component tangent a la família, deixant que aquest vector error, respecte d'una òrbita d'amplitud menor, tingui només components estable, tangent a l'òrbita i les neutres 5 i 6:

$$\frac{\bar{e}_4(\tau)}{\|\bar{e}_4(\tau)\|} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \end{pmatrix} = \alpha_2 \bar{e}_2(\tau) + \alpha_3 \bar{e}_3(\tau) + \alpha_5 \bar{e}_5(\tau) + \alpha_6 \bar{e}_6(\tau).$$

Aïllant  $\alpha_2$ ,  $\alpha_5$  i  $\alpha_6$  (que són les que donen el determinant diferent de zero), en funció de  $\alpha_3$ , de les tres primeres equacions i inserint-ho a les tres darreres d'una manera anàloga a quan anul·lavem la component inestable, s'obté  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$  i  $\Delta_3$  en funció de  $\alpha_3$ . Seguidament imposem que es minimitzi

$$|\Delta| = \sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2} \quad (3.4)$$

quedant així fixat  $\alpha_3$  i obtenint els  $\Delta_i$ .

A diferència del cas de control, pel manteniment en estació, l'òptim de (3.4) no s'obté necessàriament amb algun  $\Delta_i = 0$ , per la qual cosa el que fem és l'anàlisi de Fourier dels  $\Delta_i$  per a una xarxa d'òrbites, i llavors, usant interpolació, els obtenim



per les òrbites d'entremig que es desitgen. D'aquesta manera donada la projecció sobre la direcció tangent a la família, que obtenim mitjançant l'aplicació del factor de projecció discutit en la secció (3.3.2), només ens cal multiplicar-lo pel control unitari que hem calculat i que tenim emmagatzemat amb els coeficients de Fourier, per a obtenir l'empenta tangent.

Degut a que els valors de  $\Delta_i$ , i per tant el valor de  $\|\Delta\|$ , depèn fortament del lloc de l'òrbita, mirat respecte de l'angle<sup>2</sup>, on es dona l'empenta, i com ja veurem, el fet de donar una empenta tangent cap a una òrbita determinada no implica que aquesta darrera esdevingui "absorbent", en principi es fa molt difícil de triar quines serien les òrbites que han de fer de passos intermedis per a arribar a l'objectiu final. El que hem fet ha estat classificar les empentes tangents per la seva magnitud. Donada una certa posició i velocitat del satèl·lit,  $S$ , i un cert valor de  $\|\Delta\|$ , es calcula la maniobra  $(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3)$  que cal fer per a obtenir una empenta tangent d'aquesta magnitud, buscant un punt nominal en una òrbita halo de tal manera que la component tangent a la família s'anul·li. Durant aquest procés es varia l'amplitud- $z$ , mentre que l'angle es manté fixat en el valor que tenia el punt nominal a mínima distància corresponent a  $S$ . D'aquesta manera podem realitzar impulsos tangents de la mateixa magnitud des de diferents angles d'una òrbita halo seleccionada, de manera que poden ser comparats entre si.

La figura 3.26 mostra l'evolució de l'amplitud- $z$ , mesurada en termes del punt nominal a mínima distància, de l'òrbita que obtenim quan donem una empenta tangent de 3 m/s a l'angle 0 graus de l'òrbita halo d'amplitud- $z$  0.14. La integració ha estat realitzada aproximadament durant un temps igual al del període de l'òrbita halo.

La figura 3.27 mostra la distància del punt de l'òrbita al punt nominal a mínima

---

<sup>2</sup>Vista des de la Terra o considerant la projecció de sobre el pla YZ, les òrbites halo són homeomorfes a una circumferència. Associem un angle a cada punt de l'òrbita de la següent manera. Si  $P$  és el període de l'òrbita i considerem que per  $t = 0$  estem sobre l'òrbita, amb coordenades  $y = 0$  i amb  $z > 0$ , l'angle  $a$  associat a un temps  $t$  qualsevol ve donat per la relació:  $a = \frac{2\pi}{P} t$ .

distància pel mateix cas.

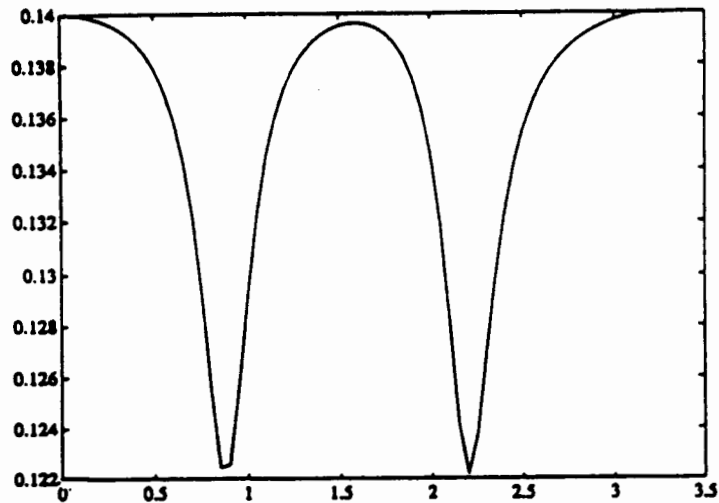


Figura 3.26. Evolució de l'amplitud-z quan donem un únic impuls tangent.

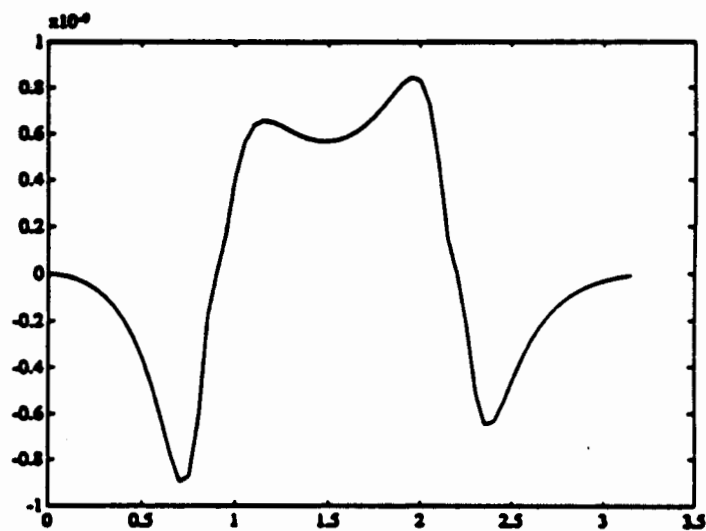


Figura 3.27. Evolució del quadrat de la distància al punt nominal a mínima distància pel mateix impuls que a la figura 3.26. El signe ve a indicar si el satèl.lit es troba per dins o per fora del tub d'òrbites halo.

Notem de les figures, que en cap cas passat el període hi ha hagut una disminució considerable de l'amplitud. Tant sols prop de les 0.8 i 2.3 unitats adimensionals de temps d'integració s'obté una baixada considerable d'amplitud, però aquesta disminució no es manté durant la volta completa. Podríem dir que escapem per la

tangent però mantenint la libració, la qual cosa no és anormal si pensem en el resultat de [16] on Richardson mostra que en el punt  $L_1$  es descriu un tipus de moviment al voltant d'ell que és essencialment una libració, pertorbada pels primaris. Per tant una empenta puntual feta dins la varietat central pot fer-lo desviar de la libració en la qual es trobava, però entrarà en una altra.

En la nostra representació qualitativa de la família d'òrbites halo, l'efecte d'una empenta tangent la podem veure a la figura 3.28.

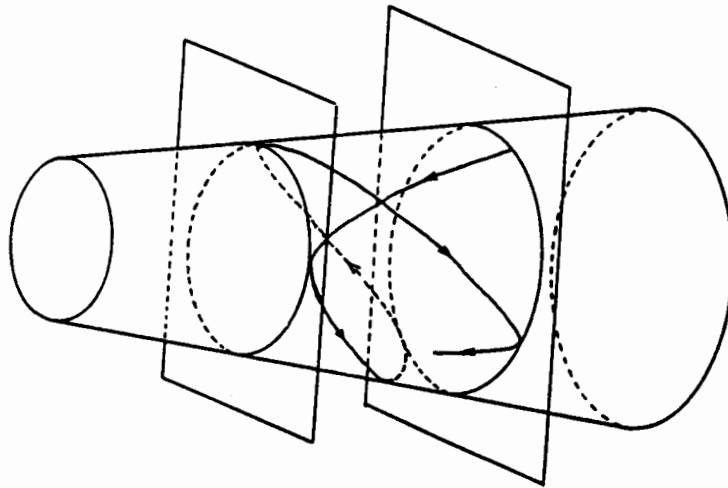


Figura 3.28. Representació qualitativa de l'efecte d'una empenta tangent.

Arribat a aquest punt cal preguntar-se si és possible obtenir la transferència encadenant les empentes tangents amb els controls sobre la varietat inestable. La resposta essencialment és que sí, però des del punt de vista pràctic no és gens recomanable i a més és un procediment molt insegur pels motius següents. Si baixem ràpidament d'amplitud, bé sigui realitzant empentes tangents de magnitud gran, bé sigui amb empentes petites però ressonants amb l'oscil·lació, la inserció dins l'òrbita objectiu utilitzant el procés d'anul·lació de la component inestable és del tot incontrolable. Si baixem d'una manera suau, cal realitzar moltes maniobres petites d'empenta tangent i moltes de control sobre la varietat inestable d'una manera que no es pot preveure a priori, la qual cosa fa que sigui inviable des del punt de vista pràctic. A més, en aquest darrer cas, el temps de transferència esdevé molt gran i la

inserció en l'òrbita objectiu no està del tot garantida, a menys que la baixada sigui molt lenta.

Comportaments típics que s'obtenen realitzant aquests tipus de maniobres els tenim a les figures 3.29 i 3.30:

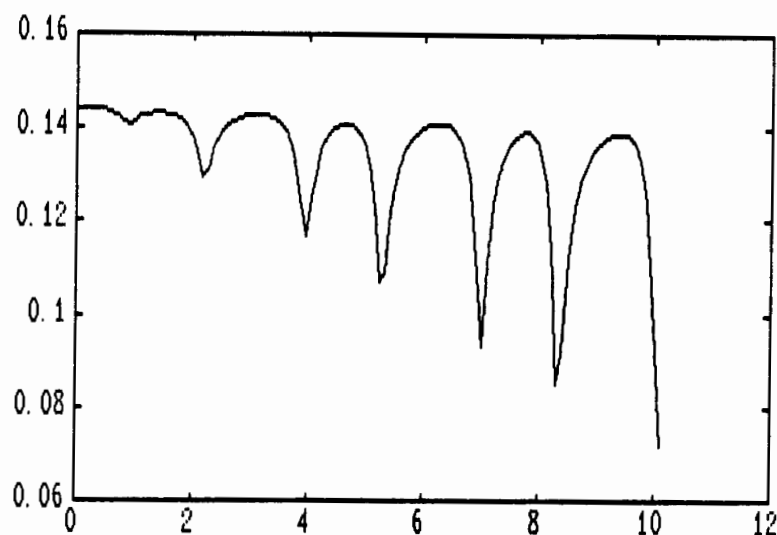


Figura 3.29. Baixada d'amplitud utilitzant maniobres d'empenta tangent que ressonen amb l'oscil·lació.

Amb aquestes experiències, veiem que la maniobra d'empenta tangent sembla bona per a fer moure el satèl·lit en la direcció adequada, però el seguiment del satèl·lit que hem fet fins ara, utilitzant el punt nominal a mínima distància, no sembla ser indicador de gran cosa, ja que d'una banda en els mínims d'amplitud que s'assoleixen durant el seguiment no està clar que estiguem prop d'aquest punt nominal i d'altra no disposem de cap procediment per a arribar a aquesta òrbita nominal en la qual diem que estem. Per a resoldre aquest problema definirem el que en direm l'òrbita nominal WS.

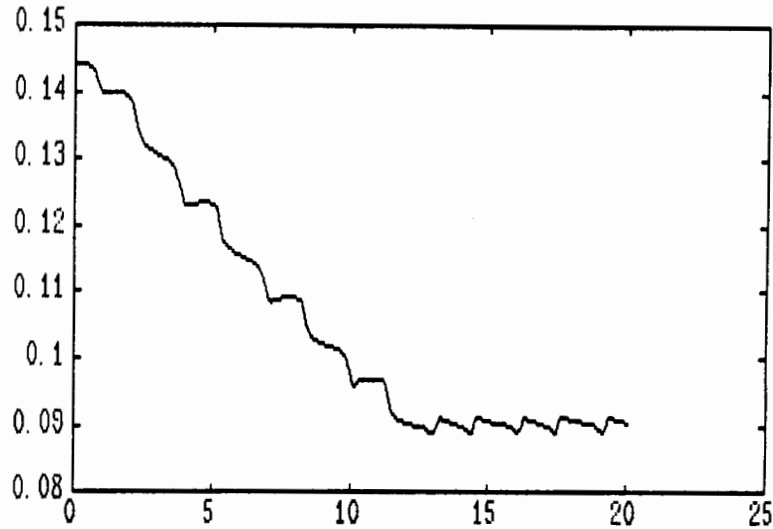


Figura 3.30. Baixada d'amplitud utilitzant moltes petites maniobres d'empenta tangent i de control de la varietat inestable.

### 3.5.1 Òrbita nominal WS

Donat un punt de l'espai de fase,  $X$ , (posició i velocitat) prop de la família d'òrbites halo, li associarem un punt nominal  $N_w$ , d'una òrbita halo  $H_w$ , de tal manera que el vector error  $\delta_w = X - N_w$  compleixi la següent condició:

$$(\delta_w)_i = \lambda(\bar{e}_2)_i, \quad \text{per } i = 1, 2, 3.$$

És a dir, busquem  $N_w$  sobre una òrbita halo  $H_w$  de tal manera que el producte vectorial dels vectors formats per les tres components espacials de  $\bar{e}_2$  i de  $\delta_w$  sigui zero. D'aquesta manera  $\bar{e}_2$  i  $\delta_w$  són col·lineals respecte les tres components relatives a l'espai i per tant les tres primeres components de  $\delta_w$  apunten en la mateixa direcció que la varietat estable de la òrbita halo  $H_w$  en el punt  $N_w$ .

Anomenarem a  $N_w$  el punt nominal WS i a  $H_w$  l'òrbita nominal WS.

Donat el punt  $X$  i calculats el punt  $N_w$  i l'òrbita  $H_w$ , podem fer una maniobra que ens porti asimptòticament a  $H_w$  afegint a les tres components de velocitat de  $X$  les tres darreres components de  $\lambda\bar{e}_2 - \delta_w$ .

Aconsegüim d'aquesta manera que el vector error  $\delta_w$  es trobi dins l'aproximació lineal de la varietat estable de l'òrbita  $H_w$ , i si ens trobem prop de la família d'òrbites halo aixó garanteix la inserció. L'únic inconvenient que sembla que pot plantejar-se però, és que nosaltres no triem l'òrbita halo a la qual volem inserir-nos, sinó que aquesta ens ve donada.

A la figura 3.31 i a la taula 3.4 veiem el seguiment d'una òrbita a la qual s'ha donat una empenta tangent de 10 m/s sortint de l'angle  $\alpha_0 = 0$  i amplitud  $\beta = 0.20$ . Representem el seguiment donat pel punt nominal a mínima distància i el comparem amb el seguiment donat pel punt nominal WS que acabem de definir. Llevat de regions molt concretes, veiem que realment no s'apartem molt una gràfica de l'altra.

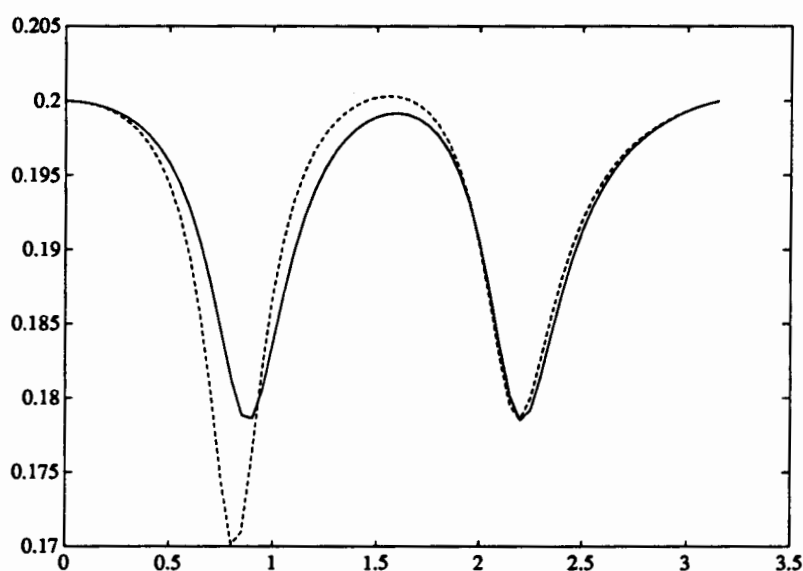


Figura 3.31. Comparació dels seguiments d'amplitud. Òrbita nominal a mínima distància (línia contínua) i òrbita nominal WS (línia puntejada).

Amb el seguiment nominal WS, a més de tenir l'avantatge de saber a quina òrbita podem anar a parar i que és el que ens costarà, fa que no sigui essencial apuntar a una òrbita concreta passant per sobre de la família d'halos, sinó que tenim tot un entorn al voltant d'aquesta família, en el qual canviant la velocitat de manera adequada arribem asimptòticament a una òrbita halo, i a més, l'apropament es produeix de forma exponencial.

$t$	Nominal mínima distància			Nominal WS			cost
	angle	amplitud	$D^2$	angle	amplitud	$D^2$	
0.00	0.000	0.2000000	0.000E+00	0.000	0.2000000	0.000E+00	10.000
0.10	11.384	0.1997882	0.105E-09	11.334	0.1997581	0.121E-09	10.389
0.20	22.756	0.1991065	0.427E-09	22.629	0.1989424	0.526E-09	11.185
0.30	34.107	0.1978002	0.102E-08	33.855	0.1973227	0.137E-08	12.544
0.40	45.443	0.1955714	0.199E-08	44.979	0.1944060	0.305E-08	14.732
0.50	56.796	0.1918773	0.351E-08	55.952	0.1892204	0.643E-08	18.281
0.60	68.286	0.1857613	0.559E-08	66.744	0.1797533	0.133E-07	24.153
0.70	80.238	0.1757395	0.726E-08	77.497	0.1620566	0.264E-07	33.966
0.80	93.211	0.1612456	0.498E-08	89.763	0.1338406	0.322E-07	46.342
0.90	106.813	0.1549169	0.117E-09	106.651	0.1513130	0.334E-09	30.600
1.00	119.648	0.1679383	0.178E-08	119.671	0.1749935	0.302E-08	19.082
1.10	131.619	0.1804965	0.434E-08	131.337	0.1871265	0.647E-08	14.473
1.20	143.175	0.1885422	0.557E-08	142.690	0.1936727	0.841E-08	12.438
1.30	154.575	0.1934357	0.604E-08	153.967	0.1973804	0.974E-08	11.588
1.40	165.918	0.1963374	0.626E-08	165.216	0.1994759	0.110E-07	11.435
1.50	177.237	0.1978816	0.652E-08	176.437	0.2004850	0.125E-07	11.803
1.60	188.538	0.1983176	0.693E-08	187.614	0.2005483	0.143E-07	12.661
1.70	199.822	0.1975815	0.752E-08	198.720	0.1995000	0.167E-07	14.084
1.80	211.097	0.1952514	0.819E-08	209.746	0.1967936	0.194E-07	16.231
1.90	222.406	0.1903722	0.856E-08	220.730	0.1912817	0.217E-07	19.348
2.00	233.893	0.1812205	0.761E-08	231.893	0.1810002	0.209E-07	23.674
2.10	245.940	0.1660604	0.385E-08	244.097	0.1643229	0.113E-07	28.637
2.20	259.036	0.1530431	0.526E-11	258.974	0.1528903	0.118E-10	29.205
2.30	272.625	0.1611948	0.246E-08	273.357	0.1636346	0.348E-08	23.212
2.40	285.366	0.1735698	0.348E-08	285.726	0.1755112	0.393E-08	18.397
2.50	297.298	0.1823733	0.245E-08	297.401	0.1835335	0.257E-08	15.309
2.60	308.883	0.1882522	0.124E-08	308.883	0.1888593	0.127E-08	13.341
2.70	320.347	0.1922556	0.404E-09	320.324	0.1925110	0.412E-09	12.176
2.80	331.777	0.1950728	0.231E-10	331.767	0.1951164	0.238E-10	11.666
2.90	343.200	0.1971168	0.122E-09	343.231	0.1970526	0.129E-09	11.802
3.00	354.619	0.1986325	0.801E-09	354.720	0.1985600	0.869E-09	12.635
3.05	0.325	0.1992403	0.142E-08	0.476	0.1992091	0.157E-08	13.339

Taula 3.4. Seguiment de l'òrbita de transferència segons les òrbites nominals a mínima distància i WS.  $t$  indica el temps adimensional contat des de la sortida,  $D^2$  refereix al quadrat de la distància a l'òrbita nominal (u. dimensionals), i el cost és

el cost d'inserció a l'òrbita nominal WS mesurat en m/s.

### 3.5.2 Rendiment de la maniobra de salt

En aquests moments estem en condició de donar una empenta al satèl·lit en la direcció tangent a la família d'òrbites halo, seguir el decreixement de l'amplitud nominal  $WS$ , i, en un moment donat, inserir-lo a una varietat estable que ens porta a una altra òrbita halo. A aquest procés li direm *maniobra de salt*.

Definirem el *cost d'una maniobra de salt* com el  $\Delta v$  gastat al donar l'empenta tangent de sortida més el  $\Delta v$  gastat al fer la maniobra d'inserció.

El nostre objectiu és optimitzar la suma de costos de les maniobres utilitzades per passar d'una òrbita halo a una altra. Per aixó comencem notant que una maniobra de salt ve determinada per tres paràmetres en principi lliures:

- L'època en la qual donem l'empenta tangent, o equivalentment, ja que els sistema d'equacions diferencials que regeix el moviment és autònom i l'òrbita halo periòdica, la posició (donada per l'angle) en l'òrbita de sortida on tenim localitzat el satèl·lit quan donem l'empenta tangent,  $\alpha_0$ .
- La magnitud de l'empenta tangent,  $TI$ .
- L'època,  $t$ , en la qual fem la maniobra d'inserció un cop s'ha donat l'empenta tangent. Notem que la magnitud de la maniobra d'inserció,  $II$ , depèn de l'època  $t$  en la qual es fa.

Definirem el *rendiment de la maniobra de salt*,  $RS$ , com:

$$RS = \frac{\Delta\beta}{TI + II}$$

on  $\Delta\beta$  és la diferència entre l'amplitud de l'òrbita halo en la qual donem l'empenta tangent i l'amplitud de l'òrbita halo  $H_w$  en la qual ens inserim en la seva varietat estable.

Primer hem fet exploracions numèriques de  $RS$  fixant el punt inicial, donant una certa empenta tangent i mirant el valor que va prenent  $RS$  al variar l'època d'inserció durant un temps aproximadament igual al període,  $T$ , de l'òrbita halo. Aquestes



exploracions s'han fet per a diferents valors de l'empenta tangent, i posteriorment variant el punt inicial. El resultat ha estat que per un punt inicial,  $\alpha_0$ , l'època d'inserció òptima,  $t$ , no depèn de la magnitud de l'empenta tangent  $TI$ . Un exemple d'aquest fenomen està representat a la figura 3.32 on hem dibuixat la funció  $RS$  al variar  $t$ , pels valors d'empentes tangents de 5 m/s i de 10 m/s donats al punt inicial  $\alpha_0 = 0^\circ$  d'una òrbita halo d'amplitud- $z$  0.2.

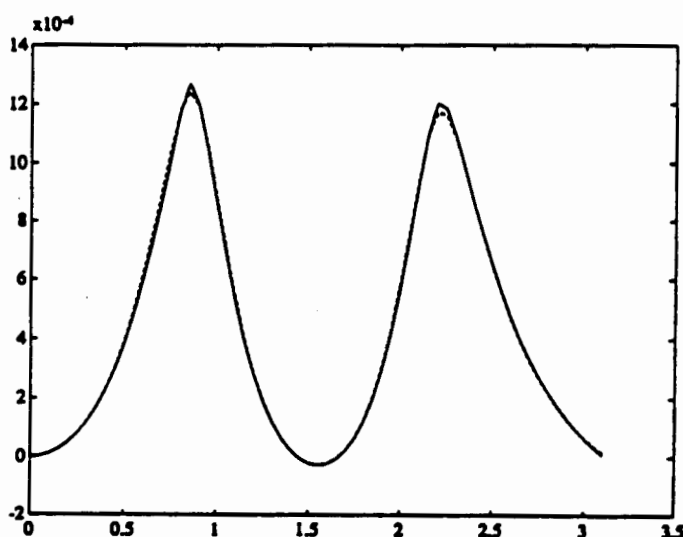


Figura 3.32. Gràfica del rendiment de la maniobra de salt. La línia puntejada correspon a l'empenta tangent de 5 m/s, i la contínua a la de 10 m/s.

Un cop sabem que l'època d'inserció òptima,  $t$ , és independent de la magnitud de l'empenta tangent hem d'estudiar la funció

$$\max_{0 \leq t \leq T} RS(TI, \alpha_0, t)$$

quan variem l'angle  $\alpha_0$ , i per a diferents valors de  $TI$ .

La figura 3.33 mostra els valors d'aquesta funció al variar  $\alpha_0$  pels valors de  $TI$

iguals a 5 m/s i 10 m/s.

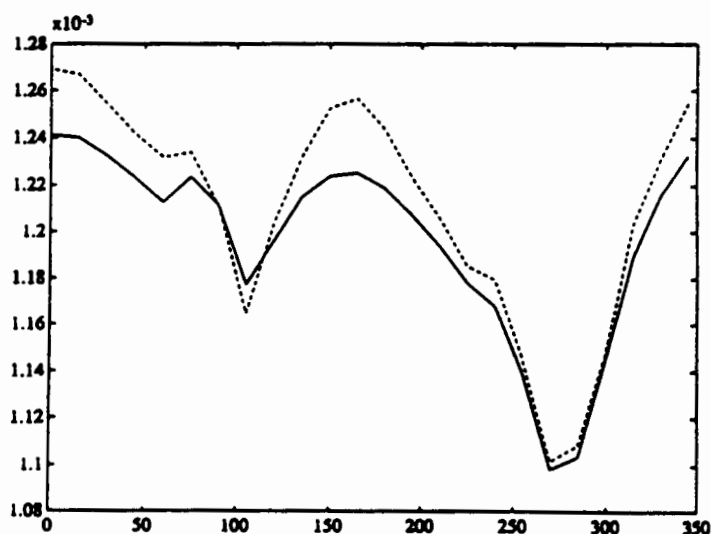


Figura 3.33. Valor màxim del rendiment de la maniobra de salt en funció de l'angle on es dona l'empenta tangent, pels valors de l'empenta tangent iguals a 5 m/s (línia contínua) i a 10 m/s (línia puntejada).

D'aquesta darrera figura veiem que per una empenta tangent donada a  $\alpha_0 = 0$ , el rendiment òptim del mètode ve a ser de  $784.40 \text{ m s}^{-1}/\Delta\beta$ . Per tant el cost per anar d'una òrbita halo d'amplitud 0.25 a una altra d'amplitud 0.08 és de 133.85 m/s. Hem observat també que quan l'empenta tangent es dona per  $\alpha_0 = 0$ , la inserció òptima en l'òrbita halo  $H_w$  s'ha de fer al cap de 0.8 unitats adimensionals de temps, el que ve a ser uns 40 dies, el que és molt bon temps d'es d'un punt de vista tècnic tant per veure si l'empenta tangent s'ha realitzat satisfactòriament com per preparar la maniobra d'inserció.

La figura 3.34 mostra les projeccions sobre els plans coordenats de l'òrbita de transferència que va des d'una òrbita halo d'amplitud  $\beta = 0.25$  fins a una altra d'amplitud  $\beta = 0.08$ . La primera empenta tangent l'hem donada amb  $\alpha_0 = 0$  però els altres han estat donats en altres llocs. Per aquest mateix exemple, la figura 3.35 mostra el decreixement de l'amplitud en front del temps de viatge mesurat en unitats adimensionals. El nombre total de maniobres ha estat sis (tres empentes

tangents i tres insercions a la varietat estable). El  $\Delta v$  total necessari ha estat de 142.15 m/s.

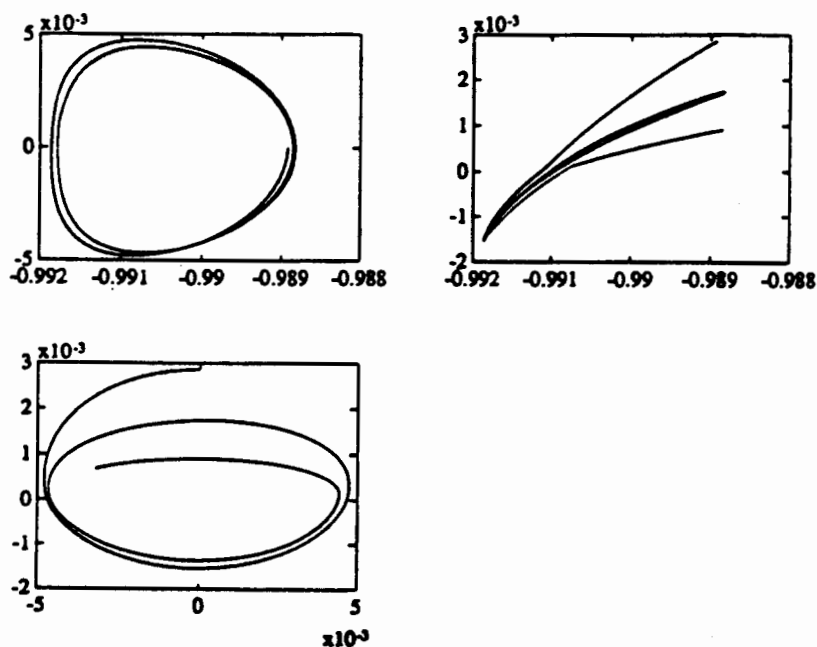


Figura 3.34. Projectió en els plans coordenats d'una òrbita de transferència que va de l'òrbita halo d'amplitud  $\beta = 0.25$  a la d'amplitud  $\beta = 0.08$ .

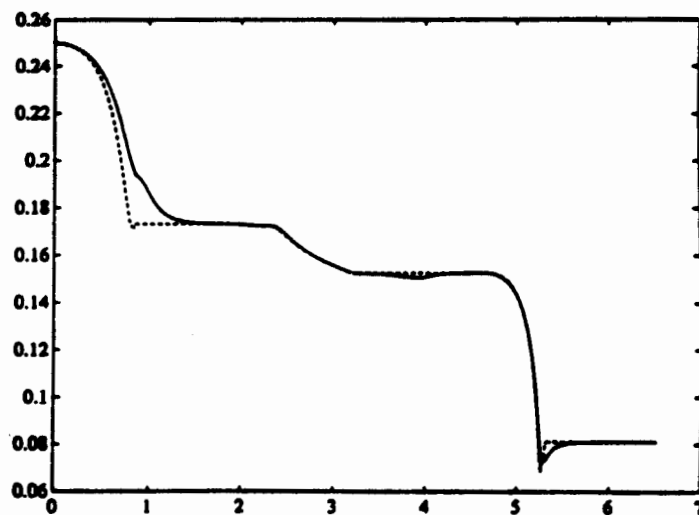


Figura 3.35. Evolució de l'amplitud-z de l'òrbita representada en la figura 3.34. Seguiments segons l'òrbita no lineal a mínima distància (línia puntejada) i segons l'òrbita nominal WS (línia contínua).