Introducció

Els objectes bàsics d'estudi en la memòria són els sistemes dinàmics lineals invariants en el temps o amb coeficients constants. Un sistema d'aquest tipus es pot representar per

$$\left.\begin{array}{l} \dot{X}(t) = AX(t) + BU(t) \\ Y(t) = CX(t) \end{array}\right\} \ (*)$$

amb $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $B \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{C})$ i $C \in \mathcal{M}_{p\times n}(\mathbb{C})$. Aquesta representació es coneix habitualment com representació interna o per les variables d'estat. Una altra representació és la que dóna les sortides en funció de les entrades, anomenada externa o entrada/sortida. Aquesta relació s'estableix a partir de la matriu de transferència, la qual ve donada a partir de (*) per $T(s) = C(sI - A)^{-1}B$.

Moltes relacions d'equivalència entre sistemes dinàmics han estat estudiades pel seu interès en teoria de control. Entre elles hi ha les que conserven la matriu de transferència: H. H. Rosenbrock, 1974 ([**Ro 74**]); P. Fuhrmann, 1977 ([**Fuhr 77**]), aquelles que preserven només la seva estructura de zeros, però que no conserven l'estructura de pols: Kouvari-takis i MacFarlane, 1976 ([**Kou-MacFar 76**]); Owens, 1978 ([**Owens 78**]), i aquelles que accepten realimentació i injecció externa. El resultat clàssic de que els pols d'un sistema poden ser modificats arbitràriament per realimentació si i només si el sistema és completament controlable fa que s'introdueixin realimentacions en el sistema. A començaments dels anys 70, altres investigadors han introduït una nova relació d'equivalència, permetent realimentació: R. E. Kalman, 1972 ([**Kal 72**]); A.S. Morse, 1973 ([**Mor 73**]). A. S. Morse també ha estudiat l'equivalència per realimentació i injecció externa.

L'estudi dels sistemes dinàmics lineals invariants en el temps o amb coeficients constants es pot realitzar a través de l'estudi de les ternes de matrius $(A, B, C) \in \mathcal{M}_{nmp} = \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \times$

$\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{C}) \times M_{p\times n}(\mathbb{C})$, ja que aquests sistemes venen determinats per ternes de matrius d'aquesta forma.

Així, en particular, les relacions d'equivalència entre sistemes es corresponen amb relacions d'equivalència en l'espai de ternes de matrius.

Entre les relacions d'equivalència que conserven la matriu de transferència, la més comuna és la semblança. Es diu que dos sistemes que venen definits per ternes de matrius (A,B,C) i (A',B',C') són equivalents quan existeix una matriu $P \in Gl_n(\mathbb{C})$ tal que $A' = PAP^{-1}$, $B' = PB$ i $C' = CP^{-1}$.

Són invariants per aquesta relació d'equivalència, a més de la matriu de transferència, els valors propis de la matriu A, l'observabilitat i la controlabilitat.

El resultat clàssic de que els pols d'un sistema completament controlable es poden modificar arbitràriament per realimentació, fa que diferents autors introdueixin el concepte de semblança per blocs entre parelles de matrius.

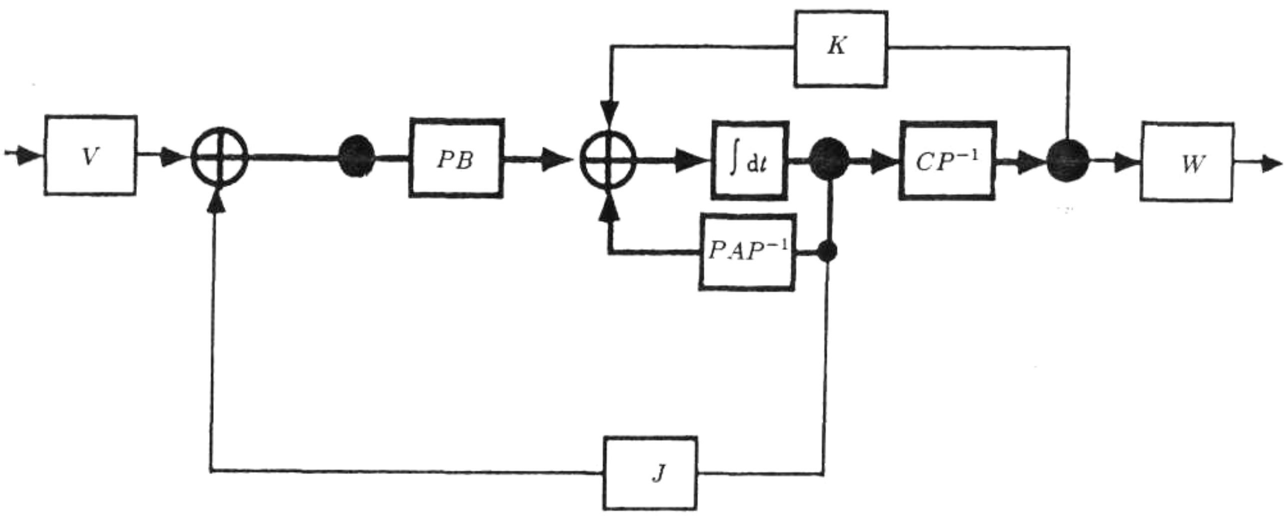
L'estudi de parelles controlables $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{C})$ porta entre altres resultats, a l'obtenció d'una forma reduïda, la forma reduïda de Brunovsky. Fent una descripció geomètrica de les parelles $(A, B)^t$ com aplicacions lineals definides sobre un subespai, J. Ferrer i F. Puerta a [**Fe-Pu 92**] retroben la forma reduïda de Brunovsky per al cas general. Aquesta forma s'obté també com a cas particular de la forma canònica dels (P, Q)-blocs.

En el cas de matrius quadrades, la forma reduïda de Jordan és la forma canònica clàssica per la relació d'equivalència semblança. La semblança de ternes de matrius generalitza de forma òbvia la relació de semblança entre matrius quadrades. També generalitza la relació de semblança per blocs entre parelles de matrius.

A. S. Morse a [**Mor 73**], en el cas de la relació d'equivalència entre ternes de matrius que admet realimentació i injecció externa, considerant ternes de matrius (A, B, C) tals que les matrius B i C tenen rang màxim ha trobat una forma canònica. Al mateix temps, i de forma independent, J. S. Thorp a [**Thorp 73**] va estudiar la mateixa relació d'equivalència i va obtenir una forma canònica, que coincideix amb l'anterior quan es fan les restriccions necessàries.

D'altres autors han descrit interessants relacions d'equivalència tenint en compte el comportament extern del sistema. Així, per exemple, S. Beghelli i R. Guidorzi l'any 1976 ([**Be-Gui 76**]) defineixen una relació d'equivalència directament a partir d'una descripció del sistema purament en funció de les entrades i les sortides. Altres investigadors manipulen el sistema amb transformacions unimodulars, com per exemple, T. Kailath l'any 1980 ([**Kai 80**]).

Al llarg d'aquesta memòria, considerarem la relació d'equivalència entre sistemes dinàmics lineals invariants en el temps següent: direm que dos sistemes són equivalents quan s'obté l'un a partir de l'altre fent una o més de les transformacions elementals següents: canvis de base en l'espai d'estats, canvis de base en l'espai d'entrades, canvis de base en l'espai de sortides, realimentació i injecció externa. Aquesta és una relació d'equivalència que engloba totes les relacions d'equivalència anteriors. Evidentment, la matriu de transferència no es conserva, en general, però sí la seva estructura de zeros. En general, tampoc la controlabitat ni l'observabilitat no són invariants per aquesta relació d'equivalència.



Aquesta relació d'equivalència ha estat considerada per J. S. Thorp, 1972 ([**Thorp 72**]); A. S. Morse, 1973 ([**Mor 73**]); B. P. Molinari, 1978 ([**Mo 78**]) i I. de Hoyos, 1990 ([Ho2 90]), entre d'altres. En aquests casos, la teoria de Kronecker de feixos singulars de matrius s'aplica a l'estudi fet. Així, a cada sistema dinàmic lineal a coeficients constants se li associa un feix de matrius, i es comprova que la relació estricta de feixos es correspon amb l'equivalència de sistemes considerada.

En el nostre cas, es té que els sistemes que venen definits per les ternes de matrius *(A\,Bi,Ci)* i $\{A_2,B_2,C_2)$ son equivalents, respecte de la relació d'equivalència anterior, si i només si existeixen matrius $P \in Gl_n(\mathbb{C})$, $J \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$, $K \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{C})$, $V \in Gl_m(\mathbb{C})$ i $W \in Gl_p(\mathbb{C})$, tals que $(A_2,B_2,C_2) = \{PA_1P^{-1} + PB_1J + KC_1P^{-1}, PB_1V, WC_1P^{-1})$.

L'estudi de les classes d'equivalència es realitzarà a partir de l'estudi de les classes d'equivalència en l'espai de ternes de matrius $\mathcal{M}_{nmp} = \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}_{p\times n}(\mathbb{C})$ amb la relació d'equivalència que es correspon a l'anteriorment descrita per a sistemes: direm que dues ternes de matrius (A_1,B_1,C_1) i (A_2,B_2,C_2) són equivalents si i només si existeixen matrius *P, J, K, V i W* com abans de manera que

$$(A_2,B_2,C_2) = (PA_1P^{-1} + PB_1J + KC_1P^{-1}, PB_1V, WC_1P^{-1}). \tag{1}$$

L'organització de la memòria és la següent.

Capítol 0

Aquest capítol està dedicat a donar les definicions i resultats bàsics que es fan servir al llarg de la memòria, així com una referència dels texts en que aquests es poden trobar.

Capítol 1

Una forma reduïda canònica, que representa cada classe d'equivalència de ternes de matrius per la relació (1) es pot obtenir a l'associar a la terna *(A, B, C)* el feix de matrius

$H(\lambda) = \begin{pmatrix} A-\lambda I_n & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$ i considerar la relació d'equivalència estricta de feixos. Les ternes (*A, B, C*) i (*A', B', C'*) són equivalents si i només si els feixos $H(\lambda)$ i $H'(\lambda)$ associats a elles són estrictament equivalents.

Un sistema complet d'invariants dels feixos de matrius permet descriure una forma reduïda canònica per a les ternes de matrius. La forma en que la utilitzarem serà l'obtinguda per A. S. Morse, 1973 ([**Mor 73**]) i **J.** S. Thorp, 1973 ([**Thorp 73**]) de manera independent (i que és estrictament equivalent a la forma reduïda canònica clàssica Kronecker). Així, P. van Dooren ([**vanDoo 79**])) construeix un algoritme per a obtenir numèricament la forma reduïda canònica. L'ús de sistemes matricials i els feixos relacionats en teoria de control han estat extensivament estudiats per P. van Dooren (1981) a [**van Doo 81**].

Donada una terna de matrius, un sistema complet d'invariants clàssic per a la terna, respecte de la relació d'equivalència (1) considerada en l'espai de ternes de matrius $\mathcal{M}_{nmp}$, és el constituït per uns invariants continus, els valors propis, i quatre famílies d'invariants discrets: els índexs minimals per columnes, índexs minimals per files, divisors elementals infinits i divisors elementals finits (o característica de Segre) relatius a cada valor propi del feix de matrius associat a la terna. Aquest sistema complet d'invariants permet descriure una forma reduïda canònica per a les ternes de matrius.

El primer capítol de la memòria està dedicat a la presentació d'un nou sistema complet d'invariants d'una terna de matrius, format pels invariants continus (els valors propis: $\lambda_1,\ldots, \lambda_u \in \mathbb{C}$) i uns invariants discrets $\rho = \{\rho_j^{\mathrm{co}}, \rho_j^{\mathrm{J}}(\lambda_i), \rho_j^{\mathrm{c}}, \rho_j^{\mathrm{o}}\}_{1\le i\le u, -1\le j\le n}$.

Aquests invariants discrets estan tots ells definits a través del rang d'unes matrius que es construeixen a partir de la terna (*A, B, C*). Això fa que ens resultion còmodes d'utilitzar, i és per això que aquest és el sistema complet d'invariants que utilitzarem al llarg dels capítols posteriors, tant en la demostració d'alguns resultats teòrics com en els exemples presentats en els annexs A i B. A més, es pot deduir una caracterització dels valors propis d'una terna de matrius a partir d'aquests escalars.

En primer lloc es prova que aquests escalars són invariants per la relació d'equivalència (1) considerada en l'espai de ternes de matrius (proposicions 2.7, 3.4, 4.3 i 5.3 del capítol 1), i després es veu de quina manera els invariants discrets clàssics de la terna es poden obtenir a partir del conjunt d'invariants ρ:

Teorema 2.8. *Sigui* (A,B,C) *una terna qualsevol amb* $0 \le \rho_0^{\mathrm{co}}(A,B,C) \le \rho_1^{\mathrm{co}}(A,B,C) \le \dots \le \rho_{n-1}^{\mathrm{co}}(A,B,C)$, *de manera que* $0 < \rho_{j_1}^{\mathrm{co}}(A,B,C) < \cdots < \rho_{j_\tau}^{\mathrm{co}}(A,B,C)$, *amb* $j_1 = \min\{i \mid \rho_i^{\mathrm{co}}(A,B,C) > 0\}$, $j_k = \min\{i \mid \rho_i^{\mathrm{co}}(A,B,C) > \rho_{j_k-1}^{\mathrm{co}}(A,B,C)\}$ *per a tot* $k \ge 2$. *Aleshores els exponents dels divisors elementals infinits de la terna* (A,B,C) *són:*

$$\{j_1+2, \overbrace{\dots}^{\rho_0^{\mathrm{co}}(A,B,C)-\rho_{-1}^{\mathrm{co}}(A,B,C)}, j_1+2, \dots, j_\tau+2, \overbrace{\dots}^{\rho_{j_\tau}^{\mathrm{co}}(A,B,C)-\rho_{j_{\tau-1}}^{\mathrm{co}}(A,B,C)}, j_\tau+2\}.$$

Si t indica el nombre de divisors elementals infinits de la terna (A,B,C), aleshores es tenen els resultats següents:

Teorema 3.9. *Els exponents dels divisors elementals finits de la terna* (A, B, C) *referits al valor propi* X *són la partició conjugada de* $\{\rho_i^J(\lambda)(A{:}B, C) - \rho_{i+1}^J(\lambda)(A, B, C) + t\}_{0\le i\le n}$.

Teorema 4.7. *Sigui* (A,B,C) *una terna qualsevol. Aleshores els índexs minimals per columnes no nuls de la terna* (A,B,C) *són la partició conjugada de* $\{\rho_i^C(A,B,C) - \rho_{i+1}^C\{A,B,C) - t\}_{0\le i\le n}$. *I el nombre d'índexs minimals per columnes nuls és igual a* $m - \operatorname{rang} B$.

Teorema 5.7. *Sigui* (A,B,C) *una terna qualsevol. Aleshores els índexs minimals per files no nuls de la terna* (A, B, C) *són la partició conjugada de* $\{\rho_i^{\circ}(A, B\} C) - \rho_{i-1}^{\circ}(A, B, C) - t\}_{0\le i\le n}$. *I el nombre d'índexs minimals per columnes nuls és igual a* $p - \operatorname{rang} C$.

A més, es té la caracterització següent dels valors propis d'una terna de matrius:

Proposició 3.5. λ *és valor propi de la terna* (A,B,C) *si i només si* $\rho_1^J(\lambda)(A,B,C) < n+t$.

Es conclou, per tant (teorema 6.1), que donada una terna de matrius (A,B,C), si

R(A, B, C) és el conjunt d'escalars

$$\{\{\rho_j^{\mathrm{co}}(A,B,C)\},\{\lambda_i\},\{\rho_j^{\mathrm{J}}(\lambda_i)(A,B,C)\},\{\rho_j^{\mathrm{c}}(A,B,C)\},\{\rho_j^{\mathrm{o}}(A,B,C)\}\}_{-1\le j\le n,1\le i\le u},$$

aleshores *R(A, B, C) és* un sistema complet d'invariants per a la terna *(A, B,C)*. A més, es verifica la relació següent:

Teorema 6.2. *Existeix una bijecció entre el conjunt de classes d'equivalència de ternes de matrius i els conjunts d'escalars* $R=\{\{\rho_j^{\mathrm{co}}\},\{\lambda_i\},\{\rho_j^{\mathrm{J}}(\lambda_i)\},\{\rho_j^{\mathrm{c}}\},\{\rho_j^{\mathrm{o}}\}\}_{-1\le j\le n,1\le i\le u}$ *tals que*

(i) $\rho_j^{\mathrm{co}},\ \rho_j^{\mathrm{J}}(\lambda_i),\ \rho_j^{\mathrm{c}},\ \rho_j^{\mathrm{o}}\in\mathbb{N}$ *i* $\lambda_i\in\mathbb{C},\ \rho_{-1}^{\mathrm{co}}=\rho_{-1}^{\mathrm{c}}=\rho_{-1}^{\mathrm{o}}=\rho_{-1}^{\mathrm{J}}(\lambda_i)=0,\ 1\le i\le u.$

(ii) $\rho_j^{\mathrm{co}}\le\rho_{j+1}^{\mathrm{co}},\ \rho_j^{\mathrm{J}}(\lambda_i)\le\rho_{j+1}^{\mathrm{J}}(\lambda_i),\ \rho_j^{\mathrm{c}}\le\rho_{j+1}^{\mathrm{c}}$ i $\rho_j^{\mathrm{o}}\le\rho_{j+1}^{\mathrm{o}}$ per a $0\le j\le n-1,\ 1\le i\le u.$

(iii) Si $0<\rho_{j_1}^{\mathrm{co}}<\ldots<\rho_{j_\tau}^{\mathrm{co}}$, amb $j_1=\min\{i\,|\,\rho_i^{\mathrm{co}}>0\}$, $j_k=\min\{l\,|\,\rho_l^{\mathrm{co}}>\rho_{j_{k-1}}^{\mathrm{co}}\}$ per a $2\le k\le\tau$, llavors es verifica:

$$n=\sum_{0\le k\le\tau}(\rho_{j_k}^{\mathrm{co}}-\rho_{j_{k-1}}^{\mathrm{co}})(j_k+1)+\sum_{1\le i\le u}\sum_{0\le k\le n}(\rho_k^{\mathrm{J}}(\lambda_i)-\rho_{k+1}^{\mathrm{J}}(\lambda_i)+t)+$$
$$\sum_{1\le k\le n}(\rho_k^{\mathrm{c}}-\rho_{k-1}^{\mathrm{c}}-\rho_{j_\tau}^{\mathrm{co}})+\sum_{1\le k\le n}(\rho_k^{\mathrm{o}}-\rho_{k-1}^{\mathrm{o}}-\rho_{j_\tau}^{\mathrm{co}}),$$

$$m\ge\rho_{j_\tau}^{\mathrm{co}}+\rho_0^{\mathrm{c}},\quad \text{i}$$

$$p\ge\rho_{j_\tau}^{\mathrm{co}}+\rho_0^{\mathrm{o}}.$$

Capítol 2

En aquest capítol, per tal d'utilitzar tècniques geomètriques, es veu la relació d'equivalència (1) anteriorment descrita en la varietat diferenciable M_{nmp} com la relació d'equivalència induïda per l'acció del grup de Lie $\mathcal{G}$,

$$\mathcal{G}=Gl_n(\mathbb{C})\times\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})\times\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{C})\times Gl_m(\mathbb{C})\times Gl_p(\mathbb{C})$$

sobre M_{nmp},

$$\alpha:\mathcal{G}\longrightarrow\mathcal{M}_{nmp}$$
$$((P,J,K,V,W),(A,B,C))\longrightarrow(PAP^{-1}+PBJ+KCP^{-1},PBV,WCP^{-1}).$$

Si tenim una família diferenciable de ternes de matrius, definida sobre una varietat de paràmetres, és a dir, si tenim una terna de matrius *(A, B, C)* en la qual els valors d'algunes entrades en les matrius *A, B* i *C* tenen un cert grau d'incertesa, aleshores, per a cada valor del paràmetre podem trobar la forma reduïda canònica de la terna, i un element de $\mathcal{G}$ que ens permet passar de la terna donada a la seva forma reduïda canònica. En general, però, i de forma anàloga al cas de les matrius quadrades, la forma reduïda canònica depèn de forma discontínua dels paràmetres. Així, per exemple, si considerem la família diferenciable de ternes de matrius

$$\left\{\left(\begin{pmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix}\right)\right\}_{t\in\Lambda}$$

es té que les formes reduïdes canòniques d'aquesta família de ternes, segons els diferents valors del paràmetre $t \in \Lambda$ són:

$$\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix}\right) \text{ si } t \neq 0, \text{ i } \quad \left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix}\right) \text{ si } t = 0.$$

L'estudi de l'existència d'una forma canònica que descriu la família podria fer-se estudiant l'existència de seccions del fibrat $\mathcal{M}_{nmp} \to \mathcal{M}_{nmp}/\mathcal{G}$. En general, aquest fibrat no té seccions globals, i, per tant, no poden existir formes canòniques globals. Localment, però, sí que té seccions, és a dir, existeixen formes canòniques locals. La descripció de seccions locals dóna, doncs, de forma explícita, formes canòniques locals.

Una referència bàsica és l'estudi, d'una banda, de M. Hazewinkel a [**Ha 77**], on construeix formes canòniques locals per a ternes completament controlables i completament observables, amb la relació d'equivalència que només admet canvis de base en l'espai d'estats. Aquest mètode no es generalitza per a sistemes qualssevol.

D'altra banda, els treballs de V.I Arnold que realitza a [**Ar 71**] per a matrius quadrades quan la relació d'equivalència considerada en aquest espai és la semblança de matrius, i els treballs de A. Tannenbaum a [**Ta 81**], que generalitza els treballs de V.I Arnold, on s'estudien formes canòniques per a parelles de matrius (i es donen explícitament en el cas d'una família definida en l'entorn d'una parella completament controlable) i per a ternes de matrius, admetent en ambdós casos només canvis de base en l'espai d'estats, representen els mòduls locals *coarse* (els espais de moduli *coarse* són un afebliment dels espais de moduli *fine),* que estudia M. Hazewinkel. De fet, és conegut que l'espai de matrius quadrades amb la relació d'equivalència semblança no admet cap espai de moduli *coarse* (una referència és, per exemple, [**News 78**]) i, per tant, en particular, tampoc cap espai de moduli *fine,* d'on es dedueix que tampoc no n'existeixen per a $\mathcal{M}_{nmp}/\mathcal{G}$. L'estudi que es realitza en aquest capítol és seguint aquest procediment, és a dir, el mètode de treball que farem servir serà el de V. I Arnold, i els seus resultats seran utilitzats sobre la part A_4 de la matriu A_c de la forma reduïda canònica (A_c, B_c, C_c) d'una terna donada.

Així, en aquest segon capítol s'obtenen, seguint els treballs de V. I. Arnold i A. Tannenbaum, formes canòniques locals (famílies versals de deformacions) i, en particular, famílies miniversals, és a dir, famílies versals amb nombre mínim de paràmetres, per a ternes de matrius.

Una forma canònica local no és única. En el capítol 2 es dóna explícitament una deformació miniversal: la *deformació rniniversal ortogonal,* que associa, a cada terna de matrius, una varietat minitransversal a l'òrbita d'aquesta terna, que és la varietat ortogonal a l'òrbita de la terna respecte d'un producte escalar prèviament introduït en l'espai de ternes de matrius. Així, en aquesta memòria considerem el producte escalar següent: donades dues ternes (A, B, C), $(A', B', C') \in \mathcal{M}_{nmp}$ qualssevol, definim el producte escalar d'aquestes dues ternes com:

$$< (A, B, C), (A',B', C') >= \operatorname{tr}(AA'^*) + \operatorname{tr}(BB'^*) + \operatorname{tr}(CC'^*).$$

Aleshores podem descriure la *deformació miniversal ortogonal* d'una terna de la forma següent:

Teorema 3.4. *Sigui (A,B,C) € M-nmp- Sigui F el subespai vectorial de* $\mathcal{M}_{nmp}$ *format per les matrius* (X,Y,Z) *tals que* $(X^*,Y^*,Z^*) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C}) \times M_{n\times p}(\mathbb{C})$

són solucions del sistema

$$\left.\begin{aligned} AX - XA + BY - ZC = 0 \\ XB = 0 \\ YB = 0 \\ CX = 0 \\ CZ = 0 \end{aligned}\right\}$$

Sigui ($u_1, \ldots, u_d$) *una base de F. Aleshores l'aplicació*

$$\begin{aligned} \varphi : U \subseteq \mathbb{C}^d &\longrightarrow \mathcal{M}_{nmp} \\ (\lambda_1, \ldots, \lambda_d) &\longrightarrow (A, B, C) + \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_d u_d \end{aligned}$$

amb U un entorn obert de Vorigen, defineix una deformació miniversal ortogonal de la terna (A,B,C).

Donada una terna (A, B, C) qualsevol, podem deduir la deformació miniversal ortogonal d'aquesta terna a partir de la de la seva forma reduïda canònica, (A_c, B_c, C_c) (proposició 3.5). Com a conseqüència d'aquesta proposició, tenim que per a trobar la deformació miniversal ortogonal d'una terna (A, B, C) qualsevol, n'hi ha prou amb conèixer la deformació miniversal ortogonal de la terna (A_c,B_c,C_c), forma reduïda canònica de la terna (A, B, C). La solució del sistema per al cas en que la terna (A, B, C) està en forma reduïda canònica es dóna de forma explícita en la secció §3 d'aquest capítol.

El càlcul explícit de la dimensió de la deformació miniversal ortogonal (és a dir, la dimensió de $T_{(A,B,C)}\,\mathcal{O}(A, B, C)^{\perp}$) permet obtenir la dimensió de l'òrbita i la de l'estabilitzador per l'acció ce, que estan relacionades de la manera següent:

$$\dim \mathcal{G} - \dim \mathcal{O}(A, B, C) = \dim \mathcal{E}st(A, B, C),$$

en funció dels invariants discrets de la terna.

Teorema 3.9. *La dimensió de* $T_{(A,B,C)}\mathcal{O}(A, B, C)^{\perp}$ *és:*

$$\begin{aligned} d = \dim T_{(A,B,C)}\mathcal{O}(A,B,C)^{\perp} = & \sum_{1\leq i,j\leq r} \max\{0, k_j - k_i - 1\} + 2\sum_{1\leq i\leq t}(m_i - 1) + \\ & + \sum_{1\leq i\leq r}\sum_{1\leq j\leq s}(k_i + l_j) + (r+s)\sum_{1\leq i\leq u}\sum_{1\leq \nu\leq \alpha_i} n_{i_\nu} + \\ & + \sum_{1\leq i,j\leq s} \max\{0, l_j - l_i - 1\} + + \sum_{1\leq i,j\leq t}(\min\{m_i, m_j\} - 1) + \\ & + \sum_{1\leq i\leq u}(n_{i_1} + 3n_{i_2} + 5n_{i_3} + \ldots + (2\alpha_i - 1)n_{i_{\alpha_i}}) + \\ & + (m - r - t)\left(n - \sum_{1\leq i\leq r} k_i - \sum_{1\leq i\leq t} m_i\right) + \\ & + (p - s - t)\left(n - \sum_{1\leq i\leq s} l_i - \sum_{1\leq i\leq t} m_i\right) + \\ & + (m - r - t)\left(\sum_{1\leq i\leq r}(k_i - 1) + \sum_{1\leq i\leq t}(m_i - 1)\right) + \\ & + (p - s - t)\left(\sum_{1\leq i\leq s}(l_i - 1) + \sum_{1\leq i\leq t}(m_i - 1)\right). \end{aligned}$$

Aquest càlcul generalitza l'obtingut per C. Byrnes a [**Byr 80**] per al cas de parelles de matrius completament controlables amb la relació de semblança per blocs. Més recentment, i de forma paral·lela a l'aquí presentada, J. Demmel i A. Edelman a [**Dem-Edel 96**] han calculat la dimensió d'alguns feixos de matrius, utilitzant mètodes d'Algebra Numèrica.

Finalment, per a una terna en forma reduïda canònica, podem donar la deformació miniversal següent, deduïda de l'anterior, i en que els paràmetres de les matrius no apareixen repetits, i, que, per tant, és una deformació que ve donada per matrius amb més entrades nul·les i és més còmoda d'utilitzar. A aquesta deformació miniversal li direm *deformació miniversal minimal.* Així, per exemple, serà la família minitransversal a l'òrbita de les ternes considerades en un entorn de la terna que escollirem en l'Annex A.

Teorema 4.3. *Donada una terna* $(A,B,C)\in \mathcal{M}_{nmp}$, *en forma reduïda canònica, si*

$d = \dim T_{(A,B,C)}\, \mathcal{O}(A,B,C)^{\perp}$, sigui φ l'aplicació

$$\varphi : U \subseteq \mathbb{C}^d \longrightarrow \mathcal{M}_{nmp}$$
$$\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_d) \longrightarrow (A,B,C) + (X(\lambda), Y(\lambda), Z(\lambda))$$

amb U un entorn de l'origen i

$$X(\lambda)=\begin{pmatrix} X_1^1 & X_1^2 & X_1^3 & X_1^4 \\ X_2^1 & X_2^2 & X_2^3 & X_2^4 \\ X_3^1 & X_3^2 & X_3^3 & X_3^4 \\ X_4^1 & X_4^2 & X_4^3 & X_4^4 \end{pmatrix}, Y(\lambda)=\begin{pmatrix} Y_1^1 & Y_1^2 & Y_1^3 \\ Y_2^1 & Y_2^2 & Y_2^3 \\ Y_3^1 & Y_3^2 & Y_3^3 \\ Y_3^1 & Y_4^2 & Y_4^3 \end{pmatrix}, Z(\lambda)=\begin{pmatrix} Z_1^1 & Z_1^2 & Z_1^3 & Z_1^4 \\ Z_2^1 & Z_2^2 & Z_2^3 & Z_2^4 \\ Z_3^1 & Z_3^2 & Z_3^3 & Z_3^4 \end{pmatrix},$$

tals que

(i) $X_1^1 = 0,\ X_1^2 = 0,\ X_1^3 = 0,\ X_1^4 = 0,\ X_2^2 = 0,\ X_2^3 = 0,\ X_3^1 = 0,\ X_3^2 = 0,\ X_3^3 = 0,\ X_3^4 = 0,\ X_4^2 = 0,\ X_4^3 = 0,\ Y_1^3 = 0,\ Y_2^1 = 0,\ Y_2^3 = 0,\ Y_3^3 = 0,\ Y_4^1 = 0,\ Y_4^3 = 0,\ Z_1^1 = 0,\ Z_1^4 = 0,\ Z_3^1 = 0,\ Z_3^4 = 0,\ Z_4^3 = 0.$

(ii) $Y_2^2,\ Y_3^1,\ Y_4^2,\ Z_1^3$ *són arbitràries.*

(iii) *Si* $X_2^1 = \begin{pmatrix} X_{11}^{21} & \ldots & X_{1r}^{21} \\ \vdots & & \vdots \\ X_{s1}^{21} & \ldots & X_{sr}^{21} \end{pmatrix}$, *llavors* $X_{ij}^{21} = \begin{pmatrix} \star & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \star & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$ *si* $k_j \le l_i$, *i* $X_{ij}^{21} = \begin{pmatrix} \star & \ldots & \star \\ 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$ *si* $k_j > l_i$.

(iv) *Tots els elements de* X_2^4 *són zero, excepte els de les files* $\{l_1, l_1 + l_2, \ldots, l_1 + l_2 + \ldots + l_s\}$, *que són arbitraris.*

(v) *Tots els elements de* X_4^1 *són zero, excepte els de les columnes* $\{k_1, k_1 + k_2, \ldots, k_1 + k_2 + \ldots + k_r\}$ *que són arbitraris.*

(vi) X_4^4 *és tal que tots els seus elements són nuls, excepte els de les files* $\{1, 1 + n_{i_1}, 1 + n_{i_2}, \ldots, 1 + n_{i_{\alpha_i - 2}}\}$ *que estan a les columnes a partir de* $n_{i_1}, \ldots, n_{i_{\alpha_i - 1}}$, *respectivament, i els de les columnes* $\{n_{i_1}, n_{i_2}, \ldots, n_{i_{\alpha_i}}\}$, *a partir de les files* $\{1, n_{i_1}, \ldots, n_{i_{\alpha_i - 1}}\}$, *respectivament.*

(vii) *Si* $Y_1^1 = \begin{pmatrix} Y_{11}^{11} & \ldots & Y_{1r}^{11} \\ \vdots & & \vdots \\ Y_{r1}^{11} & \ldots & Y_{rr}^{11} \end{pmatrix}$, *llavors* $Y_{ij}^{11} = 0$ *si* $k_i \le k_j + 1$, *i* $Y_{ij}^{11} = \begin{pmatrix} 0 \\ \star \\ \vdots \\ \star \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ *si* $k_i > k_j + 1$, *amb* $k_i - k_j - 1$ *elements no nuls.*

(viii) *Tots els elements de* Y_1^2 *són zero, excepte els de les files* $\{1, 1+k_1, \dots, 1+k_1+\dots+k_r\}$ *que són arbitraris.*

(ix) *Tots els elements de* Y_3^2 *són arbitraris, excepte els de les files* $\{m_1, m_1+m_2, \dots, m_1+m_2+\dots+m_t\}$ *que són zero.*

(x) *Si* $Z_1^2 = \begin{pmatrix} Z_{11}^{12} & \dots & Z_{1r}^{12} \\ \vdots & & \vdots \\ Z_{s1}^{12} & \dots & Z_{sr}^{12} \end{pmatrix}$, *llavors* $Z_{ij}^{12} = 0$ *si* $l_i + 1 \geq l_j$, *i* $Z_{ij}^{12} = \begin{pmatrix} 0 & \star & \dots & \star & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ *si* $l_i + 1 < l_j$, *amb* $l_j - l_i - 1$ *elements no nuls.*

(xi) *Tots els elements de* Z_2^2 *són arbitraris, excepte els de les columnes* $\{1, 1+l_1, \dots, 1+l_1+\dots+l_{s-1}\}$ *que són nuls.*

(xii) *Tots els elements de* Z_2^3 *són arbitraris, excepte els de les columnes* $\{1, 1+m_1, \dots, 1+m_1+\dots+m_t\}$ *que són nuls.*

(xiii) *Si* $Z_3^3 = \begin{pmatrix} Z_{11}^{33} & \cdots & Z_{1t}^{33} \\ \vdots & & \vdots \\ Z_{t1}^{33} & \cdots & Z_{tt}^{33} \end{pmatrix}$, *aleshores* $Z_{ij}^{33} = (0 \cdots 0 \star \cdots \star)$, *té els últims* $m_j - 1$ *elements no nuls.*

(El símbol $\star$ *indica un element arbitrari).*

Capítol 3

El capítol tercer de la memòria està dedicat a l'estudi de l'estabilitat estructural de les ternes (A,B,C). Es diu que una terna de matrius és estructuralment estable quan existeix un entorn d'aquesta terna de manera que tota altra terna d'aquest entorn és equivalent a la terna donada.

Si considerem, per exemple, la terna de matrius

$$\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right),$$

i se la perturba lleugerament,

$$\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}\right),$$

aleshores s'obté una terna essencialment diferent, que no té la mateixa forma reduïda canònica que la terna inicial, sinó que la seva forma reduïda canònica és:

$$\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right),$$

i no pertany, per tant, a la mateixa òrbita. Així, doncs, aquesta terna no és estructuralment estable.

Willems l'any 1978 a [**Will 78**] estudia l'estabilitat estructural dels sistemes lineals $\dot{X} = AX + BU$ i relaciona aquest concepte amb l'equivalència topològica i diferenciable dels sistemes, i prova que per a parelles (A, B) controlables aquests conceptes coincideixen.

L'equivalència diferenciable de sistemes $\dot{X} = AX$ havia estat ja estudiada per V. I. Arnold l'any 1973 i l'equivalència topològica d'aquest sistema per N. H. Kuiper i N. N. Ladis també l'any 1973 ([**Kui 73**] i [**La 73**], respectivament).

A partir de la deformació miniversal obtinguda en el capítol 2, es poden donar explícitament condicions necessàries i suficients per a determinar quan una terna de matrius és estructuralment estable. De la definició d'estabilitat estructural es dedueix que l'estabilitat estructural és equivalent a la no-existència de deformacions miniversals no nul.les. Al llarg del capítol es donen diferents criteris que caracteritzen l'estabilitat estructural. En particular, l'estabilitat estructural depèn de les diferents relacions entre n, m i p. Així, per exemple, per a $n > m = p$ no hi ha ternes estructuralment estables. Més concretament, s'obté:

Teorema 2.7. *Segons les diferents relacions entre n, m i p, l'estabilitat estructural d'una terna ve caracteritzada per les relacions següents.*

1) $n \leq \min\{m,p\}$. *Una terna de matrius* (A,B,C) *és estructuralment estable si i només si la forma reduïda* (A_c, B_c, C_c) *d'aquesta terna és:*

$$A_c = 0,\ B_c = \left(\, 0_{n\times(m-n)} \mid I_n \,\right) \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{C}),\ C_c = \begin{pmatrix} 0_{(p-n)\times n} \\ \hline I_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p\times n}(\mathbb{C}).$$

2) $m > p$, $n \geq p$. Una terna de matrius (A, B, C) és estructuralment estable si i només si la forma reduïda (A_c, B_c, C_c) d'aquesta terna és:

$$A_c = \begin{pmatrix} A_1 & \\ & 0 \end{pmatrix}, \quad B_c = \begin{pmatrix} B_1 & \\ & I_p \end{pmatrix}, \quad C_c = \begin{pmatrix} 0_{p\times(n-p)} \mid I_p \end{pmatrix},$$

i els índexs minimals per columnes de la terna no difereixen en més d'una unitat.

3) $p > m$, $n > m$. Una terna de matrius (A, B, C) és estructuralment estable si i només si la forma reduïda (A_c, B_c, C_c) d'aquesta terna és:

$$A_c = \begin{pmatrix} A_2 & \\ & 0 \end{pmatrix}, \quad B_c = \begin{pmatrix} 0_{(n-m)\times m} \\ \hline I_m \end{pmatrix}, \quad C_c = \begin{pmatrix} C_1 & \\ & I_m \end{pmatrix},$$

i els índexs minimals per files de la terna no difereixen en més d'una unitat.

4) $m = p < n$. No hi ha cap terna estructuralment estable.

Cal remarcar que l'estudi de l'estabilitat estructural de ternes de matrius no es pot deduir de l'estudi de l'estabilitat estructural de quaternes de matrius, realitzat per J. Ferrer i M. I. García a [**Fe-Gar 96**], i el realitzat amb tècniques completament diferents per I. de Hoyos a [**Ho2 90**]. De la mateixa manera, no es poden deduir d'aquest estudi condicions per a l'estabilitat estructural de parelles de matrius feta per diferents autors com J. C. Willems a [**Will 78**] i J. Ferrer, M. I. García i F. Puerta a [**Fe-Gar-Pu 96**].

Altres criteris per a determinar si una terna de matrius és estructuralment estable són els donats en la proposició 3.6 i el corol·lari 3.10.

Annex A

Al no ser totes les ternes de matrius estructuralment estables, interessa conèixer, donada una terna de matrius que no és estructuralment estable, els tipus de ternes de matrius que es poden trobar en tot entorn d'aquesta terna i la seva distribució, és a dir, l'anomenat diagrama de perturbacions locals. Per la propietat d'homogeneïtat al llarg de les òrbites, aquest estudi es pot reduir al cas de ternes de matrius en forma reduïda canònica. Així, en l'annex A es presenten diferents exemples de diagrames de perturbacions locals per a ternes fixades, que cobreixen tots els casos en que la dimensió de la deformació miniversal és igual a 1, 2 o 3.

En aquests diagrames es veu quines són les òrbites que talla tot entorn de la terna donada, i com es distribueixen. S'observa que moltes ternes de matrius són tals que tot entorn d'elles talla un nombre infinit d'òrbites. Això suggereix una nova partició de l'espai de ternes de matrius, tenint en compte només els invariants discrets, ja que el nombre d'òrbites amb invariants discrets diferents (sense tenir en compte els invariants continus) és sempre finit.

Capítol 4

Seguint les tècniques de V. I. Arnold a [**Ar 71**] per a matrius quadrades, s'introdueix en el capítol 4, una nova partició de l'espai de ternes de matrius, en conjunts, que anomenarem ρ-estrats, que estan formats per les ternes que tenen els mateixos ρ-nombres, és a dir, els mateixos invariants discrets del sistema complet d'invariants presentat en el capítol 1,

$$\rho = \{\rho_j^{\mathrm{co}}, \rho_j^{\mathrm{J}}(\lambda_i), \rho_j^{\mathrm{c}}, \rho_j^{\mathrm{o}}\}_{1\leq i\leq u, -1\leq j\leq n},$$

(o, equivalentment, els mateixos invariants discrets clàssics) sense que importi que puguin diferir en els invariants continus, és a dir, els valors propis. Aquesta partició es veu que constitueix una estratificació finita i constructible de l'espai de ternes de matrius, que s'anomenarà p-estratificació.

V. I. Arnold fa un estudi similar a [**Ar 71**], considerant una partició d'aquest tipus, en el cas de l'espai de matrius quadrades.

Veurem com utilitzant els resultats obtinguts al capítol 2 podem fer una descripció explícita dels estrats, així com calcular la seva dimensió.

Proposició 2.9. *Sigui* $(A,B,C) \in \mathcal{M}_{nmp}$,, $\mathcal{O}(A,B,C)$ *la seva òrbita i* $E(A,B,C)$ *el* *seu estrat. Aleshores:*

$$\dim E(A,B,C) = u + \dim \mathcal{O}(A,B,C) =$$
$$= u + n^2 + nm + np - \dim T_{(A,B,C)}\mathcal{O}(A,B,C)^{\perp},$$

on u és el nombre de valors propis diferents de (A,B,C).

Per a la relació d'equivalència associada a aquesta partició (és a dir, direm que dues ternes són ρ-equivalents si i només si pertanyen al mateix estrat), obtenim una caracterització de les ternes de matrius estructuralment ρ-estables. De fet, en el cas de ternes de matrius que no estiguin en el cas $m = p < n$ es veu que les ternes de matrius estructuralment estables per la relació d'equivalència (1) coincideixen amb les ternes de matrius estructuralment ρ-estables. En aquest cas, però, hi ha ternes estructuralment ρ-estables que no són estructuralment estables per la relació d'equivalència (1).

Teorema 3.9 *Una terna de matrius és estructuralment ρ-estable si i només si estem* en *una de les situacions següents, segons les diferents relacions que pot haver-hi entre m, n i p:*

a) $n \leq \min\{m,p\}$. *Una terna de matrius (A,B,C) és estructuralment ρ-estable si i només si la seva forma reduïda és tal que*

$$A_c = 0, \quad B_c = \begin{pmatrix} I_n \mid 0_{n\times(m-n)} \end{pmatrix} \quad i \quad C_c = \begin{pmatrix} I_n \\ \hline 0_{(p-n)\times n} \end{pmatrix}.$$

b) $m > p$, $n \geq p$. *Una terna de matrius* (A,B,C) *és estructuralment ρ-estable si i només si la seva forma reduïda canònica és tal que*

$$A_c = \begin{pmatrix} A_1 & \\ & A_3 \end{pmatrix}, \quad amb \quad A_3 = 0, \quad B_c = \begin{pmatrix} B_1 & \\ & I_p \end{pmatrix}, \quad C_c = \begin{pmatrix} 0_{p\times(n-p)} \mid I_p \end{pmatrix},$$

i els divisors elementals de columnes de la terna no difereixen en més d'una unitat.

c) $p > m$, $n \geq m$. *Una terna de matrius (A,B,C) és estructuralment ρ-estable si i només si la seva forma reduïda canònica és tal que*

$$A_c = \begin{pmatrix} A_2 & \\ & A_3 \end{pmatrix}, \quad amb \quad A_3 = 0, \quad B_c = \begin{pmatrix} 0_{(n-m)\times m} \\ \hline I_m \end{pmatrix}, \quad C_c = \begin{pmatrix} C_1 & \\ & I_m \end{pmatrix},$$

i els divisors elementals de files de la terna no difereixen en més d'una unitat.

d) $m = p < n$. Una terna de matrius (A,B,C) és estructuralment ρ-estable si i només si la seva forma reduïda canònica és de la forma

$$A_c = \begin{pmatrix} A_3 & \\ & A_4 \end{pmatrix}, \; amb\ A_3 = 0, A_4 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_u \end{pmatrix}, B_c = \left(\frac{I_m}{0_{(m-n)\times m}}\right), \; i\ C_c = \left(I_p \mid 0_{p\times(p-n)} \right).$$

Cal observar també com abans que els resultats per a ternes no es poden deduir dels resultats obtinguts per M. I. García a [**Gar 94**]. S'acaba estudiant el caràcter genèric del conjunt format per les ternes estructuralment ρ-estables.

Aquesta nova relació d'equivalència introduïda en l'espai de ternes de matrius no la tenim descrita per l'acció d'un grup de Lie. Però, a través de l'estudi geomètric fet prèviament en el cas de la relació d'equivalència anterior podem determinar les famílies localment transversals als estrats.

Proposició 4.1. *Sigui (A,B,C) una terna de matrius. Sigui (A_c,B_c,C_c) la seva forma reduïda canònica i sigui T la deformació miniversal de la terna (A_c,B_c,C_c) donada en el teorema 4.2 del capítol 2. Posem*

$$\Lambda = \{(A_c, B_c, C_c) + (X, Y, Z) \mid tr\, X_{ij}^{44} = 0 \quad \forall i, j\}.$$

Aleshores Λ *és una família minitransversal a* $E(A,B,C)$ *en* (A,B,C).

Annex B

Utilitzant les famílies transversals als estrats obtingudes al final del capítol anterior, s'estudien en l'annex B els diagrames de bifurcacions per a ternes de matrius, concretament aquelles amb 1, 2 o 3 paràmetres en la família minitransversal localment a l'estrat de la terna considerada. Es a dir, s'estudia, per al cas d'aquestes ternes de matrius, quins són els estrats que talla tot entorn de la terna donada i la seva distribució. Evidentment, per la condició de finitud que verifica l'estratificació, el nombre d'estrats és sempre finit en tot entorn de la terna donada.

Finalment cloem la memòria realizant un estudi sobre la regularitat de la p-estratificació induïda sobre l'entorn en el qual està definida la deformació miniversal de les ternes estudiades, de manera anàloga a l'estudi realitzat l'any 1976 per C. G. Gibson, a [**Gi 76**] per a l'espai de matrius quadrades (essent cada estrat el conjunt de matrius amb mateix símbol de Segre).

Concretament, si considerem per a les ternes donades l'obert en el qual està definida la família minitransversal localment a l'estrat de la terna, aleshores demostrarem que l'estratificació induïda en aquests oberts, per intersecció dels ρ-estrats amb l'obert, és Whitney regular. Per tant, aplicant el teorema de transversalitat de Thom, es té que les famílies transverses a aquesta estratificació induïda són denses i podem parlar, doncs, del caràcter genèric d'aquestes famílies. Es a dir, donada una família de ternes de matrius definida en els entorns esmentats, podem dir quins tipus de ternes no ρ-estables poden ésser eliminades per petites perturbacions i quins tipus persisteixen.