CAPÍTOL 0

Preliminars

Introducció

Aquest capítol és un recull dels conceptes i resultats bàsics que es faran servir al llarg d'aquesta memòria, per tal de que aquest sigui un treball autocontingut. Així, doncs, aquí només es donaran les definicions relatives als objectes d'estudi en la memòria o bé als objectes que s'utilitzen de forma habitual com a eina per tal d'obtenir els diferents resultats.

La primera secció està dedicada als sistemes dinàmics lineals invariants en el temps (o amb coeficients constants), que són l'objecte d'estudi d'aquesta memòria.

En la secció segona es defineixen les deformacions versals i miniversals, per acabar enunciant el teorema (V.1.2) a [**Ta 81**] que relaciona els conceptes de versalitat i transver-salitat.

Com s'ha dit a la Introducció, els sistemes dinàmics lineals constants es corresponen amb ternes de matrius de $\mathcal{M}_{nmp}$. Un concepte que es fa servir al llarg de tota la memòria és el de forma reduïda canònica d'una terna de matrius, ja que molts dels càlculs realitzats es poden reduir a l'estudi del cas en que la terna està en forma reduïda canònica. Aquesta forma reduïda canònica d'una terna de matrius es pot obtenir a partir de la forma reduïda canònica del feix de matrius associat a la terna. En la secció tercera, es dóna el concepte de feix de matrius, i s'indica quin és el conjunt d'invariants de Kronecker que permeten obtenir la seva forma reduïda.

La secció quarta està dedicada a donar les definicions del producte de Kronecker de dues matrius, així com la de l'operador vectorialitzador. Aquests es fan servir en diferents punts de la memòria com a eina en l'obtenció d'alguns resultats. Així, també s'enuncien les seves propietats més importants, en especial aquelles que s'utilitzaran més endavant.

Finalment, la secció cinquena està dedicada a la definició i propietats més importants de la mètrica *gap* que s'utilitzen en el capítol tercer relatiu a l'estabilitat estructural.

Tots aquestes definicions i propietats bàsiques poden trobar-se en diferents texts. Així, per exemple, podem donar com a referència, entre molts d'altres, els següents:

- Per a la secció §1, [**Ta 81**] i [**Ka-Fa-Ar 79**].
- Per a la secció §2, [**Gri-Ha 78**], [**War 71**] i [**Ta 81**].
- Per a la secció §3, [**Gant 77**] i [**Mo 78**].
- Per a la secció §4, [**Lan-Tis 85**].
- Per a la secció §5, [**Gri-Ha 78**] i [**Fe-Gar-Pu 94**].

§1. Sistemes dinàmics lineals amb coeficients constants

Un sistema dinàmic, lineal invariant en el temps o amb coeficients constants es pot representar en la forma:

$$\left.\begin{array}{l} \dot{X}(t) = AX(t) + BU(t) \\ Y(t) = CX(t) \end{array}\right\}$$

amb $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $B \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{C})$ i $C \in \mathcal{M}_{p\times n}(\mathbb{C})$.

Aquests sistemes es poden identificar amb ternes de matrius (A,B,C) de mides adequades, amb coeficients a $\mathbb{C}$.

En la Teoria de Sistemes hi ha dos conceptes fonamentals que s'han considerat fonamentals: controlabilitat i observabilitat.

Donat un sistema dinàmic lineal a coeficients constants Σ, Σ és completament controlable si i només si

$$\text{rang}\,(B \quad AB \quad A^2B \quad \ldots \quad A^{n-1}B) = n.$$

D'altra banda, tenim que Σ és completament observable si i només si

$$\text{rang}\begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} = n.$$

En problemes de control es plantegen diferents transformacions, que donen lloc a diferents relacions d'equivalència entre sistemes. No totes elles conserven, per exemple, la controlabilitat ni l'observabilitat, però que sí conserven, com veurem en el capítol 1, el rang de la matriu

$$(CB \quad CAB \quad \ldots \quad CA^{n-1}B).$$

Al llarg de la memòria considerarem que dos sistemes són equivalents quan s'obté l'un a partir de l'altre fent una o més de les transformacions elementals següents:

- canvis de base en l'espai d'estats,
- canvis de base en l'espai d'entrades,
- canvis de base en l'espai de sortides,
- realimentació,
- injecció de sortides,

Si Σ i Σ' són dos sistemes equivalents, i (A, B, C) i (A', B', C') són les ternes de matrius associades a aquests dos sistemes, aleshores cadascuna de les transformacions anteriors es correspon amb la següent relació entre les ternes de matrius:

$$(A', B', C') = (PAP^{-1}, PB, CP^{-1}), \quad P \in Gl_n(\mathbb{C}),$$
$$(A', B', C') = (A, BV, C), \quad V \in Gl_m(\mathbb{C}),$$
$$(A', B', C') = (A, B, WC), \quad W \in Gl_p(\mathbb{C}),$$
$$(A', B', C') = (A + BJ, B, C), \quad J \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C}),$$
$$(A', B', C') = (A + KC, B, C), \quad K \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{C}),$$

respectivament.

En general, doncs, si a un sistema se li efectua una o més d'aquestes transformacions, la terna de matrius (A, B, C) associada al sistema es transforma de la forma següent:

$$(A, B, C) \rightarrow (PAP^{-1} + PBJ + KCP^{-1}, PBV, WCP^{-1})$$

amb $(P, V, W, J, K) \in Gl_n(\mathbb{C}) \times Gl_m(\mathbb{C}) \times Gl_p(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{C})$.

La controlabilitat i l'observabilitat no són invariants per aquesta relació d'equivalència. Un sistema complet d'invariants és el constituït pels invariants de Kronecker del feix de matrius associat a la terna, i un altre sistema complet d'invariants és el presentat en el capítol 1.

§2. Versalitat i transversalitat

Les definicions relatives a varietats diferenciables i grups de Lie es poden trobar en molts texts, com per exemple, [**Gri-Ha 78**] i [**War 71**].

Per varietat diferenciable entendrem, si no es diu el contrari, una varietat diferenciable regular.

Sigui X una varietat diferenciable, i sigui $\mathcal{G}$ un grup de **Lie** que actua sobre X per una acció $\alpha : \mathcal{G} \times X \to X$. Tenim la definició següent de deformació versal.

Definició 2.1. Una deformació de $x \in X$ és una aplicació diferenciable $\varphi : U \to X$, amb U entorn obert de l'origen a $\mathbb{C}^d$, tal que $\varphi(0) = x$.

Una deformació $\varphi : U \to X$ de $x \in X$ es diu que és versal en el zero si per a tota altra deformació de x, ψ: $V \to X$, amb V un entorn obert de l'origen a $\mathbb{C}^l$, existeixen un obert $V' \subseteq V$ amb $0 \in V'$ una aplicació diferenciable $\beta : V \to U$ amb $\beta(0) = 0$ i una deformació de e $\in \mathcal{G}$ (e l'element identitat de $\mathcal{G}$), $\theta : V \to \mathcal{G}$ tals que:

$$\psi(\mu) = \alpha(\theta(\mu), \varphi(\beta(\mu))) \quad \forall \mu \in V'.$$

En particular, quan U és una varietat de dimensió mínima, es diu que la deformació és miniversal.

Anem a donar ara el concepte de transversalitat.

Sigui X una varietat diferenciable, i sigui Y una subvarietat de X. Considerem una aplicació diferenciable $f : X' \to X$, on X' és una altra varietat diferenciable.

Sigui P' un punt de X' amb $f(P') = P \in Y$.

Definició 2.2. Es diu que l'aplicació f és transversal a Y en el punt P' quan $T_PX = \mathrm{Im}\, df_{P'} + T_PY$.

Es diu que l'aplicació f és transversal a Y si ho és en tots els punts de $f^{-1}(Y)$.

Definició 2.3. Es diu que l'aplicació f és minitransversal a Y en el punt P' quan $T_PX = \mathrm{Im}\, df_{P'} \oplus T_PY$.

Es diu que l'aplicació f és minitransversal a Y si ho és en tots els punts de $f^{-1}(Y)$.

Observació 2.4. En particular, podem considerar $X' = Y$ i f la inclusió de Y en X. En aquest cas, tindrem que X *i* Y són transversals en el punt $P \in Y$ quan $T_PX = Y + T_PY$, i que X i Y són minitransversals en el punt P si $T_PX = Y \oplus T_PY$.

La relació entre els conceptes de versalitat i transversalitat ve donada pel teorema següent, que generalitza el lema 2.3 a [**Ar 71**].

Teorema 2.5. ([**Ta 81**] thm. V.1.2, p. 66) *Siguin X, Y dues varietats diferenciables i $\mathcal{G}$ un grup de Lie que actua sobre X. Una aplicació $\varphi : Y \to X$ diferenciable és versal en el punt $y \in Y$ si i només si φ és transversal a l'órbita de $\varphi(y)$ en y, per l'acció de $\mathcal{G}$, $\mathcal{O}(\varphi(y))$, és a dir,*

$$T_{\varphi(y)}X = \mathrm{d}\varphi T_yY + T_{\varphi(y)}\mathcal{O}(\varphi(y)).$$

Com a conseqüència tenim

Corol·lari 2.6. *Siguin X, Y dues varietats diferenciables i $\mathcal{G}$ un grup de Lie que actua sobre X. Una aplicació $\varphi : Y \to X$ diferenciable és miniversal en el punt $y \in Y$ si i només si φ és minitransversal a l'órbita de $\varphi(y)$ en y, per l'acció de $\mathcal{G}$, $\mathcal{O}(\varphi(y))$, és a dir,*

$$T_{\varphi(y)}X = \mathrm{d}\varphi T_yY \oplus T_{\varphi(y)}\mathcal{O}(\varphi(y)).$$

§3. Forma reduïda d'un feix de matrius

Un concepte fonamental en tota la memòria i constantment utilitzat serà el de la forma reduïda canònica d'una terna de matrius. Aquesta forma reduïda es pot definir a partir de la forma reduïda d'un feix de matrius. Es per això que introduirem aquest concepte.

Definició 3.1. Un feix de matrius és una matriu a coeficients en l'anell $\mathbb{C}[\lambda]$ de la forma

$$M(\lambda) = M_1 + \lambda M_2, \text{ amb } M_1, M_2 \in \mathcal{M}_{r\times s}(\mathbb{C}).$$

Definició 3.2. Es diu que dos feixos de matrius $L(\lambda) = L_1 + \lambda L_2$ amb $L_1, L_2 \in \mathcal{M}_{r\times s}(\mathbb{C})$ i $\mathcal{M}(\lambda) = \mathcal{M}_1 + \mathbb{C}\mathcal{M}_2$, amb $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 \in \mathcal{M}_{r\times s}(\mathbb{C})$ són estrictament equivalents quan existeixen matrius amb coeficients constants invertibles G i H tals que

$$GL(\lambda)H = M(\lambda).$$

Per a tot feix de matrius

$$M(\lambda) = M_1 + \lambda M_2, \text{ amb } M_1 M_2 \in \mathcal{M}_{r\times s}(\mathbb{C})$$

existeix un feix de matrius

$$\tilde{M}(\lambda) = \tilde{M}_1 + \lambda \tilde{M}_2, \text{ amb } \tilde{M}_1, \tilde{M}_2 \in \mathcal{M}_{r\times s}(\mathbb{C}),$$

estrictament equivalent a $M(\lambda)$, especialment simple, que s'anomena forma reduïda del feix i que representa la classe.

Kronecker va trobar aquesta forma reduïda per a un feix de matrius qualsevol. P. van Dooren va donar un algoritme per a determinar l'estructura dels divisors elementals infinits d'un feix de matrius regular i, en el cas d'un feix singular, aquest mètode permet també obtenir els índexs minimals per files i per columnes ([**van Doo 79**]).

Sigui $M(\lambda) = M_1 + \lambda M_2$ un feix de matrius tal que det $M(\lambda)$ no és idènticament nul. Podem considerar aleshores una base del submòdul format per les solucions del sistema homogeni $M(\lambda)X = 0$, Nuc $M(\lambda)$.

Definició 3.3. Els graus dels vectors (grau màxim de les seves components) de la base del submòdul Nuc $M(\lambda)$ són els índexs minimals per columnes del feix $M(\lambda)$.

Posarem $k_1, \ldots, k_r, 0, \ldots, 0$ a aquests índexs, que suposarem ordenats de forma decreixent.

Observació 3.4. Aquests nombres no depenen de la base del submòdul Nuc $M(\lambda)$ escollida.

Anàlogament, podem considerar una base del submòdul format per les solucions del sistema homogeni $M(\lambda)^t X = 0$, Nuc $M(\lambda)^t$.

Definició 3.5. Els graus dels vectors (grau màxim de les seves components) de la base del submòdul Nuc $M(\lambda)^t$ són els índexs minimals per files del feix $M(\lambda)$.

Posarem $l_1, \ldots, l_s, 0, \ldots, 0$ a aquests índexs, que suposarem també ordenats de forma decreixent.

Observació 3.6. Aquests nombres no depenen de la base del submòdul Nuc $M(\lambda)$ escollida.

Posarem $\varepsilon = (k_1 \geq k_2 \geq \ldots \geq k_r > k_{r+1} = \ldots k_{ro} = 0)$ i $\eta = (l_1 \geq l_2 \geq \ldots \geq l_s > l_{s+1} = \ldots = l_{so} = 0)$ al conjunt d'índexs minimals per columnes i per files, respectivament, del feix $M(\lambda)$.

Definirem ara els divisors elementals finits i infinits d'un feix de matrius.

Definició 3.7. El rang d'un feix de matrius $M(\lambda)$ és l'ordre màxim dels menors no idènticament nuls. L'indicarem per rang $M(\lambda)$.

Definició 3.8. Els valors propis del feix de matrius $M(\lambda) = M_1 + \lambda M_2$ són els escalars x tals que

$$\text{rang}\,(M_1 + xM_2) < \text{rang}\, M(\lambda).$$

Si considerem, donat el feix $M(\lambda) = M_1 + \lambda M_2$ la matriu $\mu A + \lambda B$ i posem $D_j(\lambda,\mu)$ al màxim comú divisor dels menors d'ordre j de la matriu $\mu A + \lambda B,$ per a $1 \leq j \leq k = \min\{m,n\}$, i $D_0(\lambda,\mu) = 1$, aleshores podem escriure, per a $1 \leq j \leq k$,

$$\frac{D_{k-j+1}(\lambda,\mu)}{D_{k-j}(\lambda,\mu)} = i_j(\lambda,\mu) = \mu^{m_j+1}(\lambda-\lambda_1)^{n_{1_j}}\cdot\ldots\cdot(\lambda-\lambda_u)^{n_{u_j}}$$

amb $m_j, n_j \geq 0$ per a tot j, i

$$m_1+2 \geq m_2+2 \geq \ldots \geq m_t+2 > m_{t+1} = \ldots \geq m_{t_0} = 1 > m_{t_0+1} = \ldots = m_k = 0,$$

$$n_{1_1} \geq n_{1_2} \geq \ldots \geq n_{1_{\alpha_1}} > n_{1_{\alpha_1+1}} = \ldots = n_{1_k} = 0,$$

$$\vdots$$

$$n_{u_1} \geq n_{u_2} \geq \ldots \geq n_{u_{\alpha_u}} > n_{u_{\alpha_u+1}} = \ldots = n_{u_k} = 0.$$

Definició 3.9. S'anomenen divisors elementals infinits del feix M(À) a $\mu^{m_1+1},\ldots,\mu^{m_t+1},$, $\overbrace{\mu,\ldots,\mu}^{t_0-t}.$

Observació 3.10. $\lambda_1,\ldots,\lambda_u$ són els valors propis del feix $M(\lambda)$.

Definició 3.11. S'anomenen divisors elementals finits del feix $M(\lambda)$ relatius al valor propi λ_i a

λ_i a $\{n_{i_1},\ldots,n_{i_{\alpha_i}}\}$.

En aquestes condicions, la forma reduïda del feix $M(\lambda)$ és:

$$\widetilde{M}(\lambda) = \begin{pmatrix} \widetilde{M}_1(\lambda) & & & \\ & \widetilde{M}_2(\lambda) & & \\ & & \widetilde{M}_3(\lambda) & \\ & & & \widetilde{M}_4(\lambda) \end{pmatrix},$$

essent

$$\widetilde{M}_1(\lambda) = \left(\begin{array}{ccc|c} \widetilde{M}_1^1(\lambda) & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & \widetilde{M}_r^1(\lambda) & \end{array} \right), \quad \widetilde{M}_i^1(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & & & \\ & 1- & \lambda & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{k_i \times (k_i+1)}(\mathbb{C}),$$

$$\widetilde{M}_2(\lambda) = \left(\begin{array}{ccc} & 0 & \\ \hline \widetilde{M}_1^2(\lambda) & & \\ & \ddots & \\ & & \widetilde{M}_s^2(\lambda) \end{array} \right), \quad \widetilde{M}_i^2(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ -\lambda & 1 & & \\ & -\lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & -\lambda \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{(l_i+1) \times l_i}(\mathbb{C}),$$

$$\widetilde{M}_3(\lambda) = \begin{pmatrix} \widetilde{M}_1^3(\lambda) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \widetilde{M}_t^3(\lambda) & & & \\ & & & \widetilde{M}_{t+1}^3(\lambda) & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \widetilde{M}_{t_0}^3(\lambda) \end{pmatrix}, \quad \widetilde{M}_i^3(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ -\lambda & 1 & & & \\ & -\lambda & \ddots & & \\ & & \ddots & 1 & \\ & & & -\lambda & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m_i}(\mathbb{C}),$$

$$\widetilde{M}_4(\lambda) = \begin{pmatrix} \widetilde{M}^4(1) & & \\ & \ddots & \\ & & \widetilde{M}^4(u) \end{pmatrix}, \quad \widetilde{M}^4(j) = \begin{pmatrix} \widetilde{M}_1^4(j) & & \\ & \ddots & \\ & & \widetilde{M}_{\alpha_j}^4(j) \end{pmatrix},$$

amb

$$\widetilde{M}_i^4(j) = \begin{pmatrix} \lambda_j - \lambda & & & \\ 1 & \lambda_j - \lambda & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda_j - \lambda \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n_{j_i}}(\mathbb{C}), 1 \leq i \leq \alpha_j.$$

§4. El producte de Kronecker i l'operador vectorialitzador

Donarem en aquesta secció les nocions i propietats essencials de producte de Kronecker i d'operador vectorialitzador.

Siguin $M = \left(m_j^i\right) \in \mathcal{M}_{p \times q}(\mathbb{C})$ i $N \in M_{r \times s}(\mathbb{C})$ dues matrius.

Definició 4.1. El producte de Kronecker de les matrius M i N *és* la matriu

$$M \otimes N = \begin{pmatrix} m_1^1 N & m_2^1 N & \dots & m_q^1 N \\ m_1^2 N & m_2^2 N & \dots & m_q^2 N \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_1^p N & m_2^p N & \dots & m_q^p N \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{pr \times qs}(\mathbb{C}).$$

Proposició 4.2. (**[La-Tis 85**], ps. 406-411) *Es compleixen les següents propietats:*

1) $(A+B) \otimes C = (A \otimes C) + (B \otimes C)$,

2) $A \otimes (B+C) = (A \otimes B) + (A \otimes C)$,

3) $(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$,

4) $(A \otimes B)^t = A^t \otimes B^t$,

5) *Si* $A \in Gl_n(\mathbb{C})$ *i* $B \in Gl_p(\mathbb{C})$, *aleshores* $A \otimes B \in Gl_{np}(\mathbb{C})$ *i* $(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$,

6) *Si* $A \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{C})$ *i* $B \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{C})$, *aleshores existeix una matriu de permutacions* $P \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{C})$ *tal que* $B \otimes A = P^t (A \otimes B) P$,

7) $\operatorname{rang}(A \otimes B) = \operatorname{rang} A \cdot \operatorname{rang} B$.

Sigui $X = \left(X_j^i\right) \in \mathcal{M}_{p \times q}(\mathbb{C})$. Sigui $x_i = \left(x_1^i, \dots, x_p^i\right)$ per a $1 \leq i \leq p$ la fila i-èsima de la matriu X.

Definició 4.3. Definim l'operador vectorialitzador com l'isomorfisme

$$\begin{aligned} vec : \mathcal{M}_{p \times q}(\mathbb{C}) &\longrightarrow \mathcal{M}_{pq \times 1}(\mathbb{C}) \\ X &\longrightarrow (x_1 x_2 \dots x_p)^t. \end{aligned}$$

Aquest operador permet linealitzar sistemes matricials.

El producte de Kronecker i l'operador vectorialitzador estan relacionats de la manera següent

Proposició 4.4. *Siguin $M \in \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{C})$ i $X \in \mathcal{M}_{q\times r}(\mathbb{C})$. Aleshores*

$$vec(MXN) = (N^t \otimes M)vec(X).$$

D'aquí es dedueix el següent

Corol·lari 4.5. *Amb les notacions de la proposició anterior,*

1) $vec(MX) = (I_p \otimes A)vec(X)$,

2) $vec(XN) = (B^t \otimes I_q)\mathrm{vec}(X)$,

3) $\mathrm{uec}(MX + XN) = ((I_p \otimes M) + (N^t \otimes I_q))\mathrm{vec}(X)$.

§5. La mètrica *gap*

Considerem l'espai $\mathbb{C}^l$ amb el producte escalar habitual. Denotem per $\mathbf{Gr}(\mathbb{C}^l)$ el conjunt de tots els subespais vectorials de $\mathbb{C}^l$.

Si $F_1, F_2 \in \mathbf{Gr}(\mathbb{C}^l)$ llavors la *distància gap* entre ells es defineix com

$$\Theta(F_1, F_2) = \sup_{x\neq 0} \frac{\|\Pi_1(x) - \Pi_2(x)\|}{\|x\|} = \sup_{x=1} \|\Pi_1(x) - \Pi_2(x)\|,$$

on Π_1,Π_2 són les projeccions ortogonals sobre F_1 i F_2, respectivament.

$\mathbf{Gr}(\mathbb{C}^l)$ és un espai mètric complet i compacte respecte d'aquesta mètrica i el conjunt $\mathbf{Gr}_k(\mathbb{C}^l)$ de tots els subespais de dimensió k de $\mathbf{Gr}(\mathbb{C}^l)$ és connex ([**Go-La-Ro 86**], thm. 13.4.1 i prop. 13.4.4, respectivament).

Si F_1 i F_2 són dos subespais vectorials de $\mathbb{C}^l$ tals que $\dim F_1 \neq \dim F_2$, aleshores $\Theta(F_1,F_2) = 1$.

Considerem a $\mathcal{M}_{l\times k}(\mathbb{C})$, $k \leq l$, la norma usual $\|\ \|_2$ tal que $\|M\|_2 = \sqrt{\sum_{i,j}(m_i^j)^2}$ si $M = (m_i^j)_{\substack{1\leq i\leq l\\ 1\leq j\leq k}} \in \mathcal{M}_{l\times k}(\mathbb{C})$. Denotem per $\mathcal{M}^*_{l\times k}$ el subconjunt obert de $\mathcal{M}_{l\times k}(\mathbb{C})$ format per les matrius M tals que rang $M = k$. Sigui π l'aplicació

$$\pi : \mathcal{M}^*_{l\times k} \longrightarrow \mathbf{Gr}_k(\mathbb{C}^l)$$

$$M = (m_i^j)_{\substack{1\leq i\leq l\\ 1\leq j\leq k}} \longrightarrow [m_1, \ldots, m_k]$$

on *rrij* és el vector columna $\left(m_j^1, \ldots, m_j^l\right)^t$ de $\mathbb{C}^l$, $1 \leq j \leq k$, i $[m_1, \ldots , m_k]$ el subespai vectorial generat pels vectors $m_1, \ldots, m_k$.

La topologia final a $\mathbf{Gr}_k(\mathbb{C}^l)$ respecte de π, s'anomena la topologia de Grassmann. Llavors $\mathcal{U}$ és un subconjunt obert de $\mathbf{Gr}_k(\mathbb{C}^l)$ si i només si $\pi^{-1}(\mathcal{U})$ és un subconjunt obert de $\mathcal{M}^*_{l\times k}$. Es ben conegut (i es pot trobar, per exemple, [**Gri-Ha 78**], cap. 1, §5), que l'espai $\mathbf{Gr}_k(\mathbb{C}^l)$ és una varietat diferenciable respecte de la topologia de Grassmann.

A ([**Fe-Gar-Pu 94**], thm. 1.2.6) es prova que ambdues topologies sobre $\mathbf{Gr}(\mathbb{C}^l)$ coincideixen.