CAPÍTOL 1

Sistema complet d'invariants d'una terna de matrius

Introducció

Generalitzant de fornia natural la relació de semblança entre matrius quadrades i la semblança per blocs de parelles de matrius, es defineix, tal com s'ha dit a la Introducció, a $\mathcal{M}_{nmp}$ la relació d'equivalència següent: direm que dues ternes (A_1,B_1,C_1) i (A_2, B_2,C_2) són equivalents quan existeixen matrius $P \in Gl_n(\mathbb{C})$, $J \in M_{m\times m}(\mathbb{C})$, $K \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$, $V \in Gl_m(\mathbb{C})$ i $W \in Gl_p(\mathbb{C})$ tals que

$$(A_2, B_2, C_2) = (PA_1P^{-1} + PB_1J + KC_1P^{-1}, PB_1V, WC_1P^{-1}). \tag{1}$$

En aquest capítol es presenta un sistema complet d'invariants d'una terna de matrius de $\mathcal{M}_{nmp}$ per aquesta relació d'equivalència, definits tots ells (llevat dels valors propis) a través de rangs de matrius associades a la terna.

La secció §1 està dedicada a la forma reduïda canònica d'una terna de matrius, respecte de la relació d'equivalència (1). Aquesta relació d'equivalència entre ternes és, com s'ha dit en la Introducció, la que es correspon amb la relació d'equivalència entre sistemes dinàmics lineals a coeficients constants,

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) + BY(t) \\ Y(t) = CU(t) \end{cases}$$

a l'aplicar-los una o més de les transformacions elementals següents: canvis de base en l'espai d'estats, canvis de base en l'espai d'entrades, canvis de base en l'espai de sortides, realimentació i injecció externa.

Tal com s'indica a [Ho 90], s'obté, associant a cada terna un feix de matrius, una forma reduïda canònica de la terna, a partir de la forma canònica del feix, o, equivalentment, dels invariants de Kronecker del feix, vistos en la secció §4 del capítol 0: divisors elementals infinits, valors propis, divisors elementals finits, índexs minimals per files i índexs minimals per columnes. Donarem aquí una expressió d'aquesta forma reduïda, que serà la que utilitzem al llarg de tota la memòria, i que indicarem per (A_c, B_c, C_c).

Les seccions §2, §3, §4 i §5 estan dedicades, respectivament, a introduir les famílies d'invariants $\{ p_j^{co}\ (A, B, C)\}_{-1\leq j\leq n}$, $\{ p_j^{J}\ (\lambda)(A, B, C)\}_{-1\leq j\leq n}$ per a cada valor propi λ del feix de matrius associat a la terna, $\{ p_j^{c}\,(A,B,C)\}_{-1\leq j\leq n}$ i $\{ p_j^{o}\ (A, B, C)\}_{-1\leq j\leq n}\}$.

En primer lloc provarem que aquests escalars són invariants per la relació d'equivalència definida anteriorment a $\mathcal{M}_{nmp}$, i després veurem com a partir d'ells es poden obtenir els exponents dels divisors elementals infinits, els índexs minimals per columnes i per files, i la característica de Segre dels valors propis del feix associat a la terna. Així, doncs, el conjunt que consisteix en els escalars introduïts, junt amb els valors propis del feix, $\{\lambda_1,..., \lambda_u\}$,

$$\{\{\rho_j^{\mathrm{co}}(A,B,C)\},\{\lambda_i\},\{\rho_j^{\mathrm{J}}(\lambda_i)(A,B,C)\},\{\rho_j^{\mathrm{c}}(A,B,C)\},\{\rho_j^{\mathrm{o}}(A,B,C)\}\}_{-1\leq j\leq n,1\leq i\leq u},$$

és un sistema complet d'invariants de la terna, a partir dels quals podem deduir la seva forma reduïda canònica.

En la secció §3 donarem també una caracterització dels valors propis del feix associat a la terna en funció dels escalars anteriors.

Finalment, en la secció §6 es recopilen els resultats de les seccions anteriors, obtenint així que el conjunt

$$\{\{\rho_j^{\mathrm{co}}(A,B,C)\},\{\lambda_i\},\{\rho_j^{\mathrm{J}}(\lambda_i)(A,B,C)\},\{\rho_j^{\mathrm{c}}(A,B,C)\},\{\rho_j^{\mathrm{o}}(A,B,C)\}\}_{-1\leq j\leq n,1\leq i\leq u},$$

és, en efecte, un sistema complet d'invariants d'una terna de matrius.

§1. Forma reduïda canònica d'una terna de matrius

Com s'ha dit a la Introducció d'aquest capítol, aquesta secció està dedicada a recordar com és la que hem anomenat forma reduïda canònica d'una terna de matrius, que s'obté a partir de la forma reduïda del feix de matrius associat a la terna.

Considerem a $\mathcal{M}_{nmp} = \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{C})$ x $\mathcal{M}_{p\times n}(\mathbb{C})$ la relació d'equivalència següent:

Definició 1.1. Direm que dues ternes (A,B,C) i (A',B',C') de $\mathcal{M}_{nmp}$ són equivalents quan

$$\{A', B', C') = (PAP^{-1} + PBJ + KCP^{-1}, PBV, WCP^{-1})$$

per a unes certes matrius $P \in Gl_n(\mathbb{C})$, $J \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$, $K \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{C})$, $V \in Gl_m(\mathbb{C})$ i $W \in Gl_p(\mathbb{C})$.

Es a dir, quan una s'obté a partir de l'altra fent una o més de les transformacions elementals següents:

$$\begin{aligned}
&\text{i)} && (A,B,C) \sim (PAP^{-1}, PB, CP^{-1}) = (A',B',C'),\\
&\text{ii)} && (A,B,C) \sim (A, BV, C) = (A',B',C'),\\
&\text{iii)} && (A,B,C) \sim (A, B, WC) = (A',B',C'),\\
&\text{iv)} && (A,B,C) \sim (A+BK, B, C) = (A',B',C'),\\
&\text{v)} && (A,B,C) \sim (A+JC, B, C) = (A',B',C'),
\end{aligned}$$

amb P, J, K, V i W com abans.

Observem que aquesta relació d'equivalència generalitza la relació de semblança de matrius quadrades (si (A,B,C) i (A',B',C') són equivalents i $B = 0$, $C = 0$, aleshores $B' = 0$, $C' = 0$ i A i A' són equivalents), i la relació de semblança per blocs entre parelles de matrius (si (A,B,C) i (A',B',C') són equivalents i $C = 0$, aleshores $C' = 0$ i (A,B) i (A',B') són equivalents).

Sigui $(A,B,C) \in \mathcal{M}_{nmp}$. Seguint el procediment descrit a [**Ho 90**] pot trobar-se la forma reduïda canònica d'una terna de matrius fent el següent.

Associem a aquesta terna el feix de matrius

$$H(\lambda) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - \lambda I_n & B \\ C & 0 \end{pmatrix}.$$

Recordem que dos feixos de matrius $L(\lambda)$ i $M(\lambda)$ són estrictament equivalents quan existeixen matrius invertibles G i H, amb coeficients constants, tals que $G\,L(\lambda)\,H = M(\lambda)$ (secció §4, capítol 0).

Tenim aleshores el següent resultat,

Proposició 1.2. ([**Ho 90**]) *Dues ternes (A,B,C) i (A',B',C') són equivalents si i només si els feixos de matrius associats a elles són estrictament equivalents.*

Sigui $H_c(\lambda)$ la forma canònica del feix $H(\lambda)$ (secció §4, capítol 0). Llavors $H_c(\lambda)$ és de la forma

$$H_c(\lambda) = \begin{pmatrix} A_c & B_c \\ C_c & 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_c - \lambda I_n & B_c \\ C_c & 0 \end{pmatrix}.$$

Observació 1.3. El feix $H_c(\lambda)$ no té divisors elementals infinits d'exponent igual a 1.

Definició 1.4. Anomenarem forma reduïda canònica de la terna (A,B,C) a la terna (A_c,B_c,C_c).

La forma de les matrius A_c, B_c i C_c és coneguda. Pot trobar-se, per exemple, a [**Gan 67**], [**Mo 78**] i [**Ho 90**]. Aquí l'escriurem per a fixar les notacions.

Suposem que $\varepsilon = (ki \geq \dots \geq k_r \geq k_{r+1} = \dots = k_{r_o} = 0)$ són els índexs minimals per columnes del feix $H(\lambda)$, $\eta = (l_1 \geq \dots \geq l_s \geq l_{s+1} = \dots = l_{s_o} = 0)$ són els índexs minimals per files del feix, $d = (m_1 + 1 \geq \dots \geq m_t + 1)$ són els exponents dels divisors elementals infinits, $\lambda_1,\dots, \lambda_u$ són els valors propis i $\sigma(i)$ és el símbol de Segre del valor propi $\sigma(i) = (n_{i_1} \geq n_{i_2} \geq \ldots \geq n_{i_{\alpha_i}})$, per a $1 \leq i \leq u$. Aleshores es poden prendre les matrius A_c, B_c i C_c de la manera següent:

$$A_c = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_4 \end{pmatrix}, \quad B_c = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_c = \begin{pmatrix} 0 & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 & 0 \end{pmatrix},$$

essent

$$A_1 = \begin{pmatrix} N_1^1 & & \\ & \ddots & \\ & & N_r^1 \end{pmatrix}, \; N_i^1 = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{k_i}(\mathbb{C}), \quad 1 \leq i \leq r,$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} B_1^1 & & \\ & \ddots & \\ & & B_r^1 \end{pmatrix}, \; B_i^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{k_i \times 1}(\mathbb{C}), \quad 1 \leq i \leq r,$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} N_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & N_s^2 \end{pmatrix}, \; N_i^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{l_i}(\mathbb{C}), \quad 1 \leq i \leq s,$$

$$C_1 = \begin{pmatrix} C_1^1 & & \\ & \ddots & \\ & & C_s^1 \end{pmatrix}, \; C_i^1 = (\, 1 \quad 0 \ldots 0 \,) \in \mathcal{M}_{1 \times l_i}(\mathbb{C}), \quad 1 \leq i \leq s,$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} N_1^3 & & \\ & \ddots & \\ & & N_t^3 \end{pmatrix}, \; N_i^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m_i}(\mathbb{C}), \quad 1 \leq i \leq t,$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} B_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & B_t^2 \end{pmatrix}, \; B_i^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m_i \times 1}(\mathbb{C}) \quad 1 \leq i \leq t,$$

$$C_2 = \begin{pmatrix} C_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & C_t^2 \end{pmatrix}, \; C_i^2 = (\, 1 \quad 0 \ldots 0 \,) \in \mathcal{M}_{1 \times m_i}(\mathbb{C}), \quad 1 \leq i \leq t,$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_u \end{pmatrix}, \qquad J_i = \begin{pmatrix} J_i^1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_i^{\alpha_i} \end{pmatrix},$$

$$J_i^\nu = \begin{pmatrix} \lambda_i & & & \\ 1 & \lambda_i & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda_i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n_{i_\nu}}(\mathbb{C}), \quad 1 \le i \le u, 1 \le \nu \le \alpha_i.$$

Definició 1.5. Anomenarem exponents dels divisors elementals infinits de la terna als escalars $d = (m_1 + 1, \ldots, m_t + 1)$.

Anomenarem índexs minimals per columnes de la terna (A, B, C) als escalars $\varepsilon = (k_1, \ldots, k_r, 0, \overset{m-r-t}{\overbrace{\ldots}}, 0)$.

Anomenarem índexs minimals per files de la terna (A, B, C) als escalars $\eta = (l_1, \ldots, l_s, 0, \overset{p-s-t}{\overbrace{\ldots}}, 0)$.

Anomenarem valors propis de la terna (A, B, C) als escalars $\lambda_1, \ldots, \lambda_u$.

Anomenarem exponents dels divisors elementals finits de la terna (A, B, C) (per a cada valor propi λ_i) al conjunt d'escalars $\sigma(i) = \left(n_{i_1}, n_{i_2}, \ldots, n_{i_{\alpha_i}}\right)$.

Observació 1.6. (a) Es evident que els índexs minimals per columnes no nuls de la terna, $\{k_i, \ldots, k_r\}$ són els índexs de controlabilitat de la parella (A_1, B_1): $\{k_1^c, \ldots, k_r^c\}$amb

$$k_j^c = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} B_1 & A_1B_1 & \cdots & A_1^jB_1 \end{pmatrix} \text{ per a } 1 \le j \le r.$$

(b) Es evident també que els índexs minimals per files no nuls de la terna, $\{l_1, \ldots, l_s\}$

són els índexs d'observabilitat de la parella $\begin{pmatrix} \frac{A_2}{C_1} \end{pmatrix}$ o, equivalentment, amb els índexs de controlabilitat de la parella $\left(A_2^t, C_1^t\right)$: $\{k_1^o, \ldots, k_s^o\}$amb

$$k_j^o = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} C_1 & C_1A_2 & \cdots & C_1A_2^j \end{pmatrix}^t \text{ per a } 1 \le j \le s.$$

(c) Els valors propis de la terna (A, B, C) són els valors propis del bloc A_4 de la matriu A_c.

(d) Si rang (A, B, C) indica l'ordre màxim dels menors no idènticament nuls de la matriu $\begin{pmatrix} A-xI_n & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$ (a aquest ordre se li diu rang del feix), aleshores es té que λ és valor propi de la terna (A, B, C) si i només si es compleix que

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A-\lambda I & B \\ C & 0 \end{pmatrix} < \operatorname{rang}(A, B, C).$$

Aquests escalars, índexs minimals per columnes i per files, exponents dels divisors elementals infinits, així com els valors propis i els exponents dels divisors elementals finits formen un sistema complet d'invariants de la terna (per la relació d'equivalència definida anteriorment). Els valors propis de la terna s'anomenen invariants continus, i els altres invariants discrets.

Finalment, tenim unes definicions més que utilitzarem més endavant:

Definició 1.7. Direm que la terna (A, B, C) té part controlable i observable alhora quan $t \neq 0$.

Observació 1.8. Es immediat veure que la terna (A,B,C) no té part controlable i observable alhora si i només si $C_c A_c^j B_c = 0$ per a tot $j \geq 0$. En efecte. Si $t = 0$, llavors $C_c A_c^j B_c = 0$ per a tot $j \geq 0$. I, si $t \neq 0$, llavors $C_c A_c^{m_1-1} B_c \neq 0, \ldots, C_c A_c^{m_t-1} B_c \neq 0$ si $m_1 + 1, \ldots, m_t + 1$ són els esponents dels divisors elementals infinits.

Definició 1.9. Es diu que la terna (A, B, C) té part controlable, però no observable, quan $r \neq 0$.

Definició 1.10. Es diu que la terna (A,B,C) té part observable, però no controlable, quan $s \neq 0$.

§2. Càlcul dels exponents dels divisors elementals infinits

Trobarem en aquest apartat un mètode per a determinar els exponents dels divisors elementals infinits d'una terna de matrius, utilitzant només el càlcul dels rangs d'unes certes matrius.

Sigui $(A, B, C) \in \mathcal{M}_{nmp}$ una terna qualsevol.

Definició 2.1. Per a tot $j \in \mathbb{N}, j > 0$, definim

$$\rho_{-1}^{co}\,(A,B,C) = \operatorname{rang}(CB \quad CAB \quad CA^2B \quad \dots \quad CA^jB).$$

I posarem $\rho_{-1}^{co}(A, B, C) = 0$.

Proposició 2.2. *Per a tot $j \geq n$, $\rho_j^{co}(A,B,C) = \rho_{n-1}^{co}(A, B, C)$.*

DEMOSTRACIÓ. Pel teorema de Cayley-Hamilton, tenim que per a tot $j \geq n$ existeixen constants $a_o(j), a_1(j), \dots, a_{n-1}(j) \in \mathbb{C}$ tals que $A^j = a_o(j)I + a_1(j)A + \dots + a_{n-1}(j)A^{n-1}$. Llavors

$$CA^jB = a_o(j)CB + a_1(j)CAB + \dots + a_{n-1}(j)CA^{n-1}B,$$

i, per tant, $\rho_j^{co}(A,B,C) = \rho_{n-1}^{co}(A, B, C)$. ◇

Lema 2.3. *Siguin (A_1,B_1,C_1) i (A_2,B_2,C_2) dues ternes de $\mathcal{M}_{nmp}$ equivalents, és a dir, $(A_2,B_2,C_2) = (PA_1P^{-1} + PB_1J + KC_1P^{-1}, PB_1V, WC_1P^{-1})$ per a unes certes matrius $P \in Gl_n(\mathbb{C})$, $J \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$, $K \in M_{m\times p}(\mathbb{C})$, $V \in Gl_m(\mathbb{C})$ i $W \in Gl_p(\mathbb{C})$. Aleshores, si $C_1A_1^iB_1 = C_2A_2^iB_2 = 0$ per a tot $i \in \mathbb{N}$, $0 \leq i \leq \ell - 1$, es té*

$$C_2A_2^\ell B_2 = W\left(C_1A_1^\ell B_1\right)V.$$

Demostració. Per a tot $i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq \ell$,

$$\begin{aligned}
C_2A_2^{\ell-i+1}(PA_1^{i-1}P^{-1})B_2 &= C_2A_2^{\ell-i+1}PA_1^{i-1}P^{-1}PB_1V = \\
&= C_2A_2^{\ell-i+1}PA_1^{i-1}B_1V = \\
&= C_2A_2^{\ell-i}A_2PA_1^{i-1}B_1V = \\
&= C_2A_2^{\ell-i}(PA_1P^{-1} + KC_1P^{-1} + PB_1J)PA_1^{i-1}B_1V = \\
&= C_2A_2^{\ell-i}PA_1A_1^{i-1}B_1V + C_2A_2^{\ell-i}K(CA_1^{i-1}B_1)V + \\
&\qquad\qquad + C_2A_2^{\ell-i}PB_1JPA_1^{i-1}B_1V = \\
&= C_2A_2^{\ell-i}PA_1^{i}B_1V + (C_2A_2^{\ell-i}B_2)V^{-1}JPA_1^{i-1}B_1V = \\
&= C_2A_2^{\ell-i}PA_1^{i}B_1V = \\
&= C_2A_2^{\ell-i}PA_1^{i}P^{-1}PB_1V = \\
&= C_2A_2^{\ell-i}(PA_1^{i}P^{-1})B_2.
\end{aligned}$$

Així, doncs, en particular tenim

$$\begin{aligned}
C_2A_2^{\ell}B_2 &= C_2A_2^{\ell}(PP^{-1})B_2 = C_2(PA_1^{\ell}P^{-1})B_2 = \\
&= WC_1P^{-1}PA_1^{\ell}P^{-1}PB_1V = W(C_1A_1^{\ell}B_1)V,
\end{aligned}$$

com volíem provar. $\diamond$

Lema 2.4. *Siguin (A_1, B_1, C_1) i (A_2, B_2, C_2) dues ternes de $\mathcal{M}_{nmp}$ equivalents, és a dir, $(A_2, B_2, C_2) = (PA_1P^{-1} + PB_1J + KC_1P^{-1}, PB_1V, WC_1P^{-1})$ per a unes certes matrius $P \in Gl_n(\mathbb{C})$, $J \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$, $K \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{C})$, $V \in Gl_m(\mathbb{C})$ i $W \in Gl_p(\mathbb{C})$. Sigui $\ell \in \mathbb{N}$ tal que per a tot $i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq \ell - 1$, $C_1A_1^iB_1 = 0$ i $C_1A_1^{\ell}B_1 \neq 0$. Aleshores per a tot $i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq \ell - 1$, $C_2A_2^iB_2 = 0$ i $C_2A_2^{\ell}B_2 \neq 0$.*

Demostració. Observem en primer lloc que

$$C_2B_2 = W(C_1P^{-1}PB_1)V = W(C_1B_1)V.$$

Per tant, $C_2B_2 = 0$ si i només si $C_1B_1 = 0$.

Provarem per inducció que per a tot $\ell \geq 1$,

$$C_1B_1 = C_1A_1B_1 = \ldots = C_1A_1^{\ell-1}B_1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} C_2B_2 = C_2A_2B_2 = \ldots = C_2A_2^{\ell-1}B_2 = 0, \\ C_2A_2^{\ell}B_2 = 0 \iff C_1A_1^{\ell}B_1 = 0. \end{cases}$$

Per a $\ell = 1$, si $C_1B_1 = 0$ i $C_1A_1B_1 \neq 0$ llavors $C_2B_2 = 0$, per l'apartat anterior, i

$$\begin{aligned} C_2A_2B_2 &= WC_1P^{-1}(PA_1P^{-1} + PB_1J + KC_1P^{-1})PB_1V = \\ &= WC_1A_1B_1W + WC_1B_1KPB_1V + WC_1P^{-1}JC_1B_1V = \\ &= W(C_1A_1B_1)V \end{aligned}$$

i, per tant, $C_2A_2B_2 = 0$ si i només si $C_1A_1B_1 = 0$.

Suposem-ho ara cert fins ℓ - 1. Si $C_1B_1 == C_1A_1B_1 = ... = C_1A_1^{\ell-1}B_1 = 0$, aleshores, per hipòtesi d'inducció, tenim que

$$C_2B_2 = C_2A_2B_2 = \cdots = C_2A_2^{\ell-2}B_2 = 0$$
$$C_2A_2^{\ell-1}B_2 = 0, \text{ ja que } C_2A_2^{\ell-1}B_2 = 0 \text{ si i només si } C_1A_1^{\ell-1}B_1 = 0.$$

i que

Aplicant el lema 2.3, $C_2A_2^{\ell-1}B_2 = W(C_1A_1^{\ell}B_1)V$ i, per tant, $C_2A_2^{\ell}B_2 = 0$ si i només si $C_1A_1^{\ell}B_1 = 0$. ◇

D'aquest últim lema i de l'observació 1.12 podem deduir la següent

Proposició 2.5. *Si $CB = CAB = ... = CA^{n-1}B = 0$, aleshores la matriu A no té part controlable i observable alhora.*

DEMOSTRACIÓ. Pel lema anterior tenim que $CA^jB = C_cA_c^jB_c = 0$ per a $1 \leq j \leq n - 1$. Pel teorema de Cayley-Hamilton, també $C_cA_c^jB_c = 0$ per a tot $j \geq n$. El resultat és conseqüència ara d'aplicar l'observació 1.12. ◇

Per a veure que els escalars ρ_j^{co} són invariants per la relació d'equivalència de ternes definida en la secció anterior, necessitem el lema següent:

Lema 2.6. *Sigui $A' = A + BJ$. Aleshores*

$$CA'^{\ell}B = CA^{\ell}B + \sum_{0\le k\le \ell-1} CA^{\ell-k-1}BJA'^{k}B.$$

DEMOSTRACIÓ. Provarem $A'^{\ell} = A^{\ell} + \sum_{0\le k\le \ell-1} A^{\ell-k-1}BJA'^{k}$ per inducció sobre ℓ.

Per a $\ell = 1$, és obvi.

Suposem-ho cert fins a $\ell - 1$.

$$\begin{aligned}
A'^{\ell} &= A'A'^{\ell-1} = (A+BJ)A'^{\ell-1} = \\
&= AA'^{\ell-1} + BJA'^{\ell-1} = \\
&= A\Big(A^{\ell-1} + \sum_{0\le k\le \ell-2} A^{\ell-k-2}BJA'^{k}\Big) + BJA'^{\ell-1} = \\
&= A^{\ell} + \sum_{0\le k\le \ell-2} A^{\ell-k-2}BJA'^{k} + BJA'^{\ell-1} = \\
&= A^{\ell} + \sum_{0\le k\le \ell-1} A^{\ell-k-1}BJA'^{k},
\end{aligned}$$

com volíem provar, ◇

Ara ja podem provar que els escalars ρ_j^{co} són invariants per la relació d'equivalència de ternes.

Proposició 2.7. *Siguin (A_1,B_1,C_1) i (A_2,B_2,C_2) dues ternes de $\mathcal{M}_{nmp}$ equivalents. Aleshores per a tot $j \ge 0$, $\rho_j^{co}(A_1,B_1,C_1) = \rho_j^{co}(A_2,B_2,C_2)$.*

DEMOSTRACIÓ. N'hi ha prou amb veure que $p^{\wedge\circ}$ no varia al fer les transformacions següents:

i) $(A,B,C) \to (PAP^{-1},PB,CP^{-1})$,

ii) $(A,B,C) \to (A,BV,C)$,

iii) $(A,B,C) \to (A,B,WC)$,

iv) $(A,B,C) \to (A+BJ,B,C)$,

v) $(A,B,C)\to(A+KC,B,C)$,

ja que la seva composició dóna la relació entre (A_1, B_1, C_1) i (A_2, B_2, C_2).

(i) Diem $A' = PAP^{-1}$, $B' = PB$ i $C' = CP^{-1}$. Llavors

$$\begin{aligned}\rho_j^{\mathrm{co}}(A',B',C') &= \operatorname{rang}\left(\, CP^{-1}PB \; CP^{-1}PAP^{-1}PB \;\ldots\; CP^{-1}PA^jP^{-1}PB \,\right) = \\ &= \operatorname{rang}\left(\, CB \quad CAB \quad \ldots \quad CA^jB \,\right) = \\ &= \rho_j^{\mathrm{co}}(A,B,C).\end{aligned}$$

(ii) Diem $B' = BV$. Llavors

$$\begin{aligned}\rho_j^{\mathrm{co}}(A,B',C) &= \operatorname{rang}\left(\, CBV \quad CABV \quad \ldots \quad CA^jBV \,\right) = \\ &= \operatorname{rang}\left(\, AB \quad CAB \quad \ldots \quad CA^jB \,\right)V = \\ &= \rho_j^{\mathrm{co}}(A,B,C).\end{aligned}$$

(iii) Diem $C' = WC$. Llavors

$$\begin{aligned}\rho_j^{\mathrm{co}}(A,B,C') &= \operatorname{rang}\left(\, WCB \quad WCAB \quad \ldots \quad WCA^jB \,\right) = \\ &= \operatorname{rang} W\left(\, CB \quad CAB \quad \ldots \quad CA^jB \,\right) = \\ &= \operatorname{rang}\left(\, CB \quad CAB \quad \ldots \quad CA^jB \,\right) \\ &= \rho_j^{\mathrm{co}}(A,B,C).\end{aligned}$$

(iv) Diem $A' = A + BJ$. Si apliquem a la matriu $(\, CB \quad CAB \quad CA^2B \quad \ldots \quad CA^jB \,)$ les transformacions elementals de blocs columna següents:

$$\begin{aligned} c_2' &= c_2 + c_1JB, \\ c_3' &= c_3 + c_2JB + c_1JA'B, \\ &\vdots \\ c_j' &= c_j + c_{j-1}JB + c_{j-2}JA'B + \cdots + c_1JA'^{j-2}B, \end{aligned}$$

es transforma, aplicant el lema 2.6, en la matriu $(CB \quad CA'B \quad CA'^2B \quad \ldots \quad CA'^jB)$. Per tant, $\rho_j^{co}(A, B, C) = \rho_j^{co}(A', B, C)$.

També podríem haver-ho provat a partir del lema 13.6 de [**Go-La-Ro 86**], pàg. 167, on es demostra que

$$\operatorname{Im} B + \operatorname{Im} AB + \cdots + \operatorname{Im} A^n B = \operatorname{Im} B + \operatorname{Im} A'B + \cdots + \operatorname{Im} A'^n B.$$

Per tant,

$$\operatorname{Im} CB + \operatorname{Im} CAB \cdots + \operatorname{Im} CA^n B = \operatorname{Im} CB + \operatorname{Im} CA'B \cdots + \operatorname{Im} CA'^n B,$$

i

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} CB & CAB & \dots & CA^j B \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} CB & CA'B & \dots & CA'^j B \end{pmatrix}.$$

(v) Diem $A'' = A + KC$.

$$\begin{aligned}
\rho_j^{co}(A'', B, C) &= \operatorname{rang}\begin{pmatrix} CB & CA''B & CA''^2 B & \dots & CA''^t B \end{pmatrix}, \\
&= \operatorname{rang}\begin{pmatrix} B^tC^t & B^tA''^tC^t & B^tA''^{t2}C^t & \dots & B^tA''^{tj}C^t \end{pmatrix} \\
&= \operatorname{rang}\begin{pmatrix} B^tC^t & B^tA^tC^t & B^tA^{t2}C^t & \dots & B^tA^{tj}C^t \end{pmatrix} = \\
&= \operatorname{rang}\begin{pmatrix} CB & CAB & CA^2B & \dots & CA^jB \end{pmatrix} = \\
&= \rho_j^{co}(A, B, C).
\end{aligned}$$

Amb això està provada la proposició, $\diamond$

Passem ara a veure com donada una terna $(A,B,C) \in \mathcal{M}_{mnp}$, a partir dels escalars $\rho_j^{co}(A, B,C)$ podem obtenir els exponents dels divisors elementals infinits de la terna.

Teorema 2.8. *Sigui* (A, B, C) *una terna qualsevol amb* $0 \leq \rho_0^{co}(A, B, C) \leq \rho_1^{co}(A, B, C) \leq \dots \leq \rho_{j_\tau}^{co}(A, B, C)$, *de manera que*

$$0 < \rho_{j_1}^{co}(A,B,C) < \rho_{j_2}^{co}(A,B,C) < \cdots < \rho_{j_\tau}^{co}(A,B,C),$$

amb $j_1 = \min\{i \mid \rho_i^{co}(A,B,C) > 0\}$, $j_k = \min\{i \mid \rho_i^{co}(A, B, C) > \rho_{j_{k-1}}^{co}(A,B,C)\}$ *per a tot* $k \geq 2$. *Aleshores els exponents (estrictament més grans que 1) dels divisors elementals infinits de la terna* (A,B,C) *són:*

$$\{j_1 + 2, \overset{\rho_0^{co}(A,B,C) - \rho_{-1}^{co}(A,B,C)}{\overbrace{\dots}}, j_1 + 2, \quad \dots \quad, j_\tau + 2, \overset{\rho_{j_\tau}^{co}(A,B,C) - \rho_{j_\tau - 1}^{co}(A,B,C)}{\overbrace{\dots}}, j_\tau + 2\}.$$

DEMOSTRACIÓ. Per la proposició 2.7 n'hi ha prou amb veure que els exponents dels divisors

$$\{j_1+2,\overset{\rho_0^{co}(A_c,B_c,C_c)-\rho_{-1}^{co}(A_c,B_c,C_c)}{\overbrace{\dots}},j_1+2,\quad\dots\quad,j_\tau+2,\overset{\rho_{j_\tau}^{co}(A_c,B_c,C_c)-\rho_{j_\tau-1}^{co}(A_c,B_c,C_c)}{\overbrace{\dots}},j_\tau+2\}.$$

Recordem que la terna (A_c, B_c, C_c) és de la forma

$$A_c=\begin{pmatrix}A_1&0&0&0\\0&A_2&0&0\\0&0&A_3&0\\0&0&0&A_4\end{pmatrix},\quad B_c=\begin{pmatrix}B_1&0&0\\0&0&0\\0&0&B_2\\0&0&0\end{pmatrix},\quad C_c=\begin{pmatrix}0&C_1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&C_2&0\end{pmatrix}.$$

Aleshores, per a tot $i\geq 0$,

$$C_cA_c^iB_c=\begin{pmatrix}0&0\\0&C_2A_3^iB_2\end{pmatrix}.$$

Si

$$A_3=\begin{pmatrix}N_3^1&&\\&\ddots&\\&&N_3^t\end{pmatrix},\qquad B_2=\begin{pmatrix}B_2^1&&\\&\ddots&\\&&B_2^t\end{pmatrix},\qquad C_2=\begin{pmatrix}C_2^1&&\\&\ddots&\\&&C_2^t\end{pmatrix}$$

llavors

$$C_2N_3^iB_2=\begin{pmatrix}C_2^1{N_3^1}^iB_2^1&&\\&\ddots&\\&&C_2^t{N_3^t}^iB_2^t\end{pmatrix}.$$

Observem que

elementals infinits de la terna (A, B, C) són

$$\operatorname{rang}C_2^k{N_3^k}^iB_2^k=0\quad\text{si}\quad i\neq m_k-1,\quad\text{i}\quad\operatorname{rang}C_2^k{N_3^k}^{m_i-1}B_2^k=1.$$

Per tant, tenim que

$$\begin{aligned}\rho_j^{co}(A_c,B_c,C_c)&=\operatorname{rang}\begin{pmatrix}C_cB_c&C_cA_cB_c&\dots&C_cA_c^jB_c\end{pmatrix}=\\&=\operatorname{rang}\begin{pmatrix}C_2B_2&C_2N_3B_2&\dots&C_2N_3^jB_2\end{pmatrix}=\\&=\operatorname{rang}\begin{pmatrix}C_2^1B_2^1&&&C_2^1N_3^1B_2^1&&&&C_2^1{N_3^1}^jB_2^1&&\\&\ddots&&&\ddots&&\dots&&\ddots&\\&&C_2^tB_2^t&&&C_2^tN_3^tB_2^t&&&&C_2^t{N_3^t}^jB_2^t\end{pmatrix}=\\&=\sum_{1\leq k\leq t}\operatorname{rang}\begin{pmatrix}C_2^kB_2^k&C_2^kN_3^kB_2^k&\dots&C_2^k{N_3^k}^jB_2^k\end{pmatrix}\quad\forall j\geq 0.\end{aligned}$$

Així, ρ_j^{co} (A_c, B_c, C_c) és igual al nombre de caixes de A_3 de mida més gran o igual que $j + 1$, i d'aquí es dedueix el resultat, ◇

Finalment donarem condicions equivalents per a una terna a no tenir part controlable i observable alhora.

Corol·lari 2.9. *Les següents condicions són equivalents:*

(a) *La terna* (A, B, C) *no té part controlable i observable alhora.*

(b) ρ_j^{co} $(A, B, C) = 0$ *per a tot* $j \in \mathbb{N}$.

(c) ρ_j^{co} $(A, B, C) = 0$ *per a tot* $j \in \mathbb{N}$, $1 \le j \le n - 1$.

(d) $CB = CAB = \ldots = CA^jB = 0$ *per a tot* $j \in \mathbb{N}$.

(e) $CB = CAB = \ldots = CA^jB = 0$ *per a tot* $j \in \mathbb{N}$, $1 \le j \le n - 1$.

DEMOSTRACIÓ. Es immediat a partir del teorema anterior, i tenint en compte les proposicions 2.2. i 2.5. ◇

§3. Càlcul dels exponents dels divisors elementals finits

Donarem en aquesta secció una forma de caracteritzar els valors propis d'una terna de matrius (A, B, C), i trobar aleshores la característica de Segre de cadascun dels valors propis d'aquesta terna. Aquests càlculs, a l'igual que els de la secció anterior, es basen només en el càlcul de rangs d'unes certes matrius .

En tot l'apartat utilitzarem el valor de t (nombre de divisors elementals infinits de la terna) obtingut en la secció anterior.

Sigui $(A,B,C) \in \mathcal{M}_{nmp}$ una terna qualsevol, i sigui $\lambda \in \mathbb{C}$.

Definició 3.1. Posarem, per a tot $j \in \mathbb{N}, j \geq 1$,

$$\rho_j^J(\lambda)(A,B,C) = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} (A-\lambda I)^j & (A-\lambda I)^{j-1}B & \dots & (A-\lambda I)B & B \\ C(A-\lambda I)^{j-1} & C(A-\lambda I)^{j-2}B & \dots & CB & \\ \vdots & \vdots & \iddots & & \\ C(A-\lambda I) & CB & & & \\ C & & & & \end{pmatrix}.$$

I posarem també $\rho_0^J(\lambda)(A, B, C) = n$, $\rho_{-1}^J(\lambda)(A, B, C) = 0$.

Observació 3.2. Si (A,B, C) és una terna que no té part controlable i observable alhora, llavors, pel corol·lari 2.9,

$$\rho_j^J(\lambda)(A,B,C) = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} (A-\lambda I)^j & (A-\lambda I)^{j-1}B & \dots & (A-\lambda I)B & B \\ C(A-\lambda I)^{j-1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ C(A-\lambda I) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ C & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \operatorname{rang}\begin{pmatrix} (A-\lambda I)^j & A^{j-1}B & \dots & AB & B \\ CA^{j-1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & 0 & 0 \\ CA & 0 & \dots & 0 & 0 \\ C & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Provarem ara que aquests escalars $\rho_j^J(\lambda)$ són invariants per la relació d'equivalència de ternes considerada en la secció 1 d'aquest capítol. Abans, però, necessitem provar el lema següent:

Lema 3.3. *Sigui $A' = A + BJ$. Aleshores*

$$(A'-\lambda I)^\ell = (A-\lambda I)^\ell + \sum_{1\leq k\leq \ell} (A-\lambda I)^{\ell-k}BJ(A'-\lambda I)^{k-1} \quad \forall \ell \geq 1.$$

DEMOSTRACIÓ. HO provarem per inducció sobre ℓ.

Per a $\ell = 1$, $A' - \lambda I = (A + BJ) - \lambda I = (A - \lambda I) + BJ$.

Suposem certa la igualtat fins a ℓ - 1.

$$
\begin{aligned}
(A' - \lambda I)^{\ell} &= (A' - \lambda I)(A' - \lambda I)^{\ell-1} = \\
&= ((A - \lambda I) + BJ)(A' - \lambda I)^{\ell-1} = \\
&= (A - \lambda I)(A' - \lambda I)^{\ell-1} + BJ(A' - \lambda I)^{\ell-1} = \\
&= (A - \lambda I)\Big((A - \lambda I)^{\ell-1} + \sum_{1\leq k\leq \ell-1} (A - \lambda I)^{\ell-1-k} BJ(A' - \lambda I)^{k-1}\Big) + \\
&\qquad\qquad + BJ(A' - \lambda I)^{\ell-1} = \\
&= (A - \lambda I)^{\ell} + \sum_{1\leq k\leq \ell-1} (A - \lambda I)^{\ell-k} BJ(A' - \lambda I)^{k-1} + BJ(A' - \lambda I)^{\ell-1} = \\
&= (A - \lambda I)^{\ell} + \sum_{1\leq k\leq \ell} (A - \lambda I)^{\ell-k} BJ(A' - \lambda I)^{k-1}.
\end{aligned}
$$

Amb això està provat el lema. $\diamond$

Proposició 3.4. *Si* (A_1,B_1,C_1) *i* (A_2,B_2,C_2) *són dues ternes equivalents, i* $\lambda \in \mathbb{C}$, *aleshores* $\rho_j^J(\lambda)(A_1,B_1,C_1) = \rho_j^J(\lambda)(A_2, B_2, C2)$ per a tot $j \geq 1$.

DEMOSTRACIÓ. Corn a la proposició 2.7, n'hi ha prou amb veure que $\rho_j^J(\lambda)$ no varia al fer cap de les següents transformacions:

i) $(A,B,C) \rightarrow (PAP^{-1},PB,CP^{-1})$,

ii) $(A,B,C) \rightarrow (A,BV,C)$,

iii) $(A,B,C)\rightarrow(A,B,WC)$,

iv) $(A,B,C)\rightarrow(A + BJ,B,C)$,

v) $(A,B,C) \rightarrow (A + KC,B,C)$,

ja que la seva composició dóna la relació entre (A_1,B_1,C_1) i (A_2, B_2, C_2).

(i) Diem $A' = PAP^{-1}$, $B' = PB$ i $C' = CP^{-1}$.

Sigui X la matriu

$$X = \begin{pmatrix} P & & & \\ & I & & \\ & & \ddots & \\ & & & I \end{pmatrix}.$$

X és una matriu invertible i

$$X^{-1} = \begin{pmatrix} P^{-1} & & & \\ & I & & \\ & & \ddots & \\ & & & I \end{pmatrix}.$$

Aleshores

$$X \begin{pmatrix} (A-\lambda I)^j & (A-\lambda I)^{j-1}B & \dots & B \\ C(A-\lambda I)^{j-1} & C(A-\lambda I)^{j-2}B & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} X^{-1} = \begin{pmatrix} (A'-\lambda I)^j & (A'-\lambda I)^{j-1}B' & \dots & B' \\ C'(A'-\lambda I)^{j-1} & C'(A'-\lambda I)^{j-2}B' & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C' & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Per tant,

$$\rho_j^{\mathrm{J}}(\lambda)(A,B,C) = \operatorname{rang} \begin{pmatrix} (A-\lambda I)^j & (A-\lambda I)^{j-1}B & \dots & (A-\lambda I)B & B \\ C(A-\lambda I)^{j-1} & C(A-\lambda I)^{j-2}B & \dots & CB & \\ \vdots & \vdots & \iddots & & \\ C(A-\lambda I) & CB & & & \\ C & & & & \end{pmatrix}$$

I posarem també $\rho_0^J(\lambda)(A, B, C) = n$, $\rho_{-1}^J(\lambda)(A, B, C) = 0$.

Observació 3.5. Si (*A, B, C*) és una terna que no té part controlable i observable alhora, llavors, pel corol·lari 2.9,

$$\rho_j^{\mathrm{J}}(\lambda)(A,B,C) = \operatorname{rang} \begin{pmatrix} (A-\lambda I)^j & (A-\lambda I)^{j-1}B & \dots & (A-\lambda I)B & B \\ C(A-\lambda I)^{j-1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ C(A-\lambda I) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ C & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \operatorname{rang} \begin{pmatrix} (A-\lambda I)^j & A^{j-1}B & \dots & AB & B \\ CA^{j-1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & 0 & 0 \\ CA & 0 & \dots & 0 & 0 \\ C & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Provarem ara que aquests escalars $\rho_j^J(\lambda)$ són invariants per la relació d'equivalència de ternes considerada en la secció 1 d'aquest capítol. Abans, però, necessitem provar el lema següent:

Lema 3.6. *Sigui $A' = A + BJ$. Aleshores*

$$(A' - \lambda I)^\ell = (A - \lambda I)^\ell + \sum_{1 \le k \le \ell} (A - \lambda I)^{\ell - k} BJ(A' - \lambda I)^{k-1} \quad \forall \ell \ge 1.$$

DEMOSTRACIÓ. Ho provarem per inducció sobre ℓ.

Per a $\ell = 1$, $A' - \lambda I = (A + BJ) - \lambda I = (A - \lambda I) + BJ$.

Suposem certa la igualtat fins a $\ell - 1$.

$$\begin{aligned}
(A' - \lambda I)^\ell &= (A' - \lambda I)(A' - \lambda I)^{\ell-1} = \\
&= ((A - \lambda I) + BJ)(A' - \lambda I)^{\ell-1} = \\
&= (A - \lambda I)(A' - \lambda I)^{\ell-1} + BJ(A' - \lambda I)^{\ell-1} = \\
&= (A - \lambda I)\Big((A - \lambda I)^{\ell-1} + \sum_{1 \le k \le \ell-1} (A - \lambda I)^{\ell-1-k} BJ(A' - \lambda I)^{k-1}\Big) + \\
&\qquad\qquad + BJ(A' - \lambda I)^{\ell-1} = \\
&= (A - \lambda I)^\ell + \sum_{1 \le k \le \ell-1} (A - \lambda I)^{\ell-k} BJ(A' - \lambda I)^{k-1} + BJ(A' - \lambda I)^{\ell-1} = \\
&= (A - \lambda I)^\ell + \sum_{1 \le k \le \ell} (A - \lambda I)^{\ell-k} BJ(A' - \lambda I)^{k-1}.
\end{aligned}$$

Amb això està provat el lema. ◇

Proposició 3.7. *Si (A_1,B_1,C_1) i (A_2,B_2,C_2) són dues ternes equivalents, i $\lambda \in \mathbb{C}$, aleshores $\rho_j^J(\lambda)(A_1,B_1,C_1) = \rho_j^J(\lambda)(A_2,B_2,C_2)$ per a tot $j \ge 1$.*

DEMOSTRACIÓ. Com a la proposició 2.7, n'hi ha prou amb veure que $\rho_j^J(\lambda)$ no varia al fer cap de les següents transformacions:

i) $(A, B, C) \to (PAP^{-1}, PB, CP^{-1})$,

ii) $(A,B,C) \rightarrow (A,BV,C)$,

iii) $(A,B,C) \rightarrow (A,B,WC)$,

iv) $(A,B,C) \rightarrow (A + BJ,B,C)$,

v) $(A,B,C) \rightarrow (A + KC,B,C)$,

ja que la seva composició dóna la relació entre (A_1,B_1,C_1) i (A_2,B_2, C_2).

(i) Diem $A' = PAP^{-1}$, $B' = PB$ i $C = CP^{-1}$.

Sigui X la matriu

$$X = \begin{pmatrix} P & & & \\ & I & & \\ & & \ddots & \\ & & & I \end{pmatrix}.$$

X és una matriu invertible i

$$X^{-1} = \begin{pmatrix} P^{-1} & & & \\ & I & & \\ & & \ddots & \\ & & & I \end{pmatrix}.$$

Aleshores

$$X \begin{pmatrix} (A-\lambda I)^j & (A-\lambda I)^{j-1}B & \dots & B \\ C(A-\lambda I)^{j-1} & C(A-\lambda I)^{j-2}B & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} X^{-1} = \begin{pmatrix} (A'-\lambda I)^j & (A'-\lambda I)^{j-1}B' & \dots & B' \\ C'(A'-\lambda I)^{j-1} & C'(A'-\lambda I)^{j-2}B' & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C' & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Per tant,

$$\rho_j^{\mathrm{J}}(\lambda)(A,B,C) = \mathrm{rang} \begin{pmatrix} (A-\lambda I)^j & (A-\lambda I)^{j-1}B & \dots & B \\ C(A-\lambda I)^{j-1} & C(A-\lambda I)^{j-2}B & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{i} \quad \rho_j^{\mathrm{J}}(\lambda)(A',B',C') = \mathrm{rang} \begin{pmatrix} (A'-\lambda I)^j & (A'-\lambda I)^{j-1}B' & \dots & B' \\ C'(A'-\lambda I)^{j-1} & C'(A'-\lambda I)^{j-2}B' & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C' & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

coincideixen.

(ii) Diem $B' = BV$. Sigui

$$Y = \begin{pmatrix} I & & & \\ & V & & \\ & & \ddots & \\ & & & V \end{pmatrix}.$$

Y és una matriu invertible. Aleshores

$$\begin{pmatrix} (A-\lambda I)^j & (A-\lambda I)^{j-1}B & \dots & B \\ C(A-\lambda I)^{j-1} & C(A-\lambda I)^{j-2}B & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} (A-\lambda I)^j & (A-\lambda I)^{j-1}B' & \dots & B' \\ C(A-\lambda I)^{j-1} & C(A-\lambda I)^{j-2}B' & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Per tant,

$$\rho_j^{\mathrm{J}}(\lambda)(A,B,C) = \operatorname{rang} \begin{pmatrix} (A-\lambda I)^j & (A-\lambda I)^{j-1}B & \dots & B \\ C(A-\lambda I)^{j-1} & C(A-\lambda I)^{j-2}B & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{i} \quad \rho_j^{\mathrm{J}}(\lambda)(A,B',C) = \operatorname{rang} \begin{pmatrix} (A-\lambda I)^j & (A-\lambda I)^{j-1}B' & \dots & B' \\ C(A-\lambda I)^{j-1} & C(A-\lambda I)^{j-2}B' & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

coincideixen.

(iii) Diem $C' = WC$. Sigui

$$Z = \begin{pmatrix} I & & & \\ & W & & \\ & & \ddots & \\ & & & W \end{pmatrix}.$$

Z és una matriu invertible. Aleshores

$$Z \begin{pmatrix} (A-\lambda I)^j & (A-\lambda I)^{j-1}B & \dots & B \\ C(A-\lambda I)^{j-1} & C(A-\lambda I)^{j-2}B & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (A-\lambda I)^j & (A-\lambda I)^{j-1}B & \dots & B \\ C'(A-\lambda I)^{j-1} & C'(A-\lambda I)^{j-2}B & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C' & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Per tant,

$$\rho_j^{\mathrm{J}}(\lambda)(A,B,C) = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} (A-\lambda I)^j & (A-\lambda I)^{j-1}B & \dots & B \\ C(A-\lambda I)^{j-1} & C(A-\lambda I)^{j-2}B & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{i} \quad \rho_j^{\mathrm{J}}(\lambda)(A,B,C') = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} (A-\lambda I)^j & (A-\lambda I)^{j-1}B & \dots & B \\ C'(A-\lambda I)^{j-1} & C'(A-\lambda I)^{j-2}B & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C' & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

coincideixen.

(iv) Diem $A' = A + BJ$. Fem, a la matriu

$$\begin{pmatrix} (A-\lambda I)^j & (A-\lambda I)^{j-1}B & \dots & B \\ C(A-\lambda I)^{j-1} & C(A-\lambda I)^{j-2}B & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

les transformacions elementals de blocs columna següents:

$$\begin{aligned} c_1' &= c_1 + \sum_{1\le k\le j} c_{k+1} J(A'-\lambda I)^{k-1}, \\ c_2' &= c_2 + \sum_{2\le k\le j} c_{k+1} J(A'-\lambda I)^{k-2}B, \\ c_3' &= c_3 + \sum_{3\le k\le j} c_{k+1} J(A'-\lambda I)^{k-3}B, \\ &\vdots \\ c_j' &= c_j + c_{j+1} J(A'-\lambda I)B. \end{aligned}$$

Aleshores la matriu es transforma, aplicant el lema anterior, en la matriu

$$\begin{pmatrix} (A'-\lambda I)^j & (A'-\lambda I)^{j-1}B & \dots & B \\ C(A'-\lambda I)^{j-1} & C(A'-\lambda I)^{j-2}B & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Per tant,

$$\rho_j^{\mathrm{J}}(\lambda)(A,B,C) = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} (A-\lambda I)^j & (A-\lambda I)^{j-1}B & \dots & B \\ C(A-\lambda I)^{j-1} & C(A-\lambda I)^{j-2}B & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{i} \quad \rho_j^{\mathrm{J}}(\lambda)(A',B,C) = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} (A'-\lambda I)^j & (A'-\lambda I)^{j-1}B & \dots & B \\ C(A'-\lambda I)^{j-1} & C(A'-\lambda I)^{j-2}B & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

coincideixen.

(v) Posem $A' = A + KC$. Llavors $A'^t = A^t + C^tK^t$. Tenim

$$\rho_j^{\mathrm{J}}(\lambda)(A',B,C) = \rho_j^{\mathrm{J}}(\lambda)(A'^t,C^t,B^t) = \rho_j^{\mathrm{J}}(\lambda)(A^t,C^t,B^t) = \rho_j^{\mathrm{J}}(\lambda)(A,B,C).$$

Amb això està provada la proposició, ◇

Podem ara donar un criteri en funció d'aquests invariants per a determinar si un valor $\lambda \in \mathbb{C}$ és, o no, valor propi de la terna (A, B,C). Aquest criteri fa que puguem caracteritzar els valors propis d'una terna (A, B, C) només a partir del rang d'una certa matriu.

Proposició 3.8. λ *és valor propi de la terna* (A,B,C) *si i només si* $\rho_j^J(\lambda)(A,B,C) < n+t$.

DEMOSTRACIÓ. Per la proposició anterior, $\rho_j^J(\lambda)(A,B,C) = \rho_j^J(\lambda)(A_c,B_c,C_c)$. A l'observació 1.5 (c), hem vist que λ és valor propi de (A,B,C) si i només si ho és de A_4.

Teníem

$$A_c = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_4 \end{pmatrix}, \quad B_c = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_c = \begin{pmatrix} 0 & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Llavors,

$$\rho_1^{\mathrm{J}}(\lambda)(A_c,B_c,C_c)=\operatorname{rang}\begin{pmatrix}A_c-\lambda I & B_c\\ C_c & 0\end{pmatrix}=\operatorname{rang}\begin{pmatrix}A_1-\lambda I & & & & B_1 & \\ & A_2-\lambda I & & & & \\ & & A_3-\lambda I & & & B_2\\ & & & A_4-\lambda I & & \\ & C_1 & & & & \\ & & C_2 & & & \end{pmatrix}=$$

$$=\operatorname{rang}\begin{pmatrix}A_1-\lambda I & B_1\end{pmatrix}+\operatorname{rang}\begin{pmatrix}A_2-\lambda I\\ C_1\end{pmatrix}+\operatorname{rang}\begin{pmatrix}A_3-\lambda I & B_2\\ C_2 & 0\end{pmatrix}+\operatorname{rang}\begin{pmatrix}A_4-\lambda I\end{pmatrix}=$$

$$=\sum_{1\le i\le r}k_i+\sum_{1\le i\le s}l_i+\sum_{1\le i\le t}m_i+t+\operatorname{rang}(\,A_4-\lambda I\,)\,.$$

Tenim aleshores que

$$\begin{aligned}\lambda \text{ és valor propi de } (A,B,C) &\iff \operatorname{rang}(\,A_4-\lambda I\,)<n-\sum_{1\le i\le r}k_i-\sum_{1\le i\le s}l_i-\sum_{1\le it}m_i\\ &\iff \rho_1^{\mathrm{J}}(\lambda)(A_c,B_c,C_c)<n+t\\ &\iff \rho_1^{\mathrm{J}}(\lambda)(A,B,C)<n+t,\end{aligned}$$

com volíem provar. $\diamond$

Si la terna (*A, B, C*) no té part controlable i observable alhora, veiem que tots els valors propis de la terna (*A, B, C*) són també valors propis de la matriu *A*, com es veu en el següent

Corol·lari 3.9. *Si* (*A*, *B, C*) *és una terna que no té part controlable i observable alhora, i X és un valor propi de* (*A,B,C*)*, aleshores* rang(*A* — λ*I*) < *n.*

DEMOSTRACIÓ. Si la terna (*A,B,C*) no té part controlable i observable alhora, llavors $t = 0$ i, per la proposició 3.5,

$$\begin{aligned}\lambda \text{ és valor propi de } (A,B,C) &\iff \rho_1^{\mathrm{J}}(\lambda)(A,B,C)<n\\ &\iff \operatorname{rang}\begin{pmatrix}A-\lambda I & B\\ C & 0\end{pmatrix}<n\\ &\Rightarrow \operatorname{rang}(A-\lambda I)<n,\end{aligned}$$

com volíem provar, $\diamond$

Sigui $\lambda \in \mathbb{C}$ qualsevol. Podem interpretar els escalars $\rho_j^J(\lambda)(A, B, C)$ de la manera següent.

Proposició 3.10. *Sigui* (A_c, B_C, C_C) *la forma reduïda canònica de la terna* (A,B,C)*, amb* $A_c = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & A_3 & \\ & & & A_4 \end{pmatrix}$. *Aleshores per a tot* $j \geq 0$,

$$\rho_j^{\mathrm{J}}(\lambda)(A,B,C) = n + t(j+1) - \dim \operatorname{Ker}(A_4 - \lambda I)^j.$$

DEMOSTRACIÓ. Com que hem vist a la proposició 3.4 que

$$\rho_j^{\mathrm{J}}(\lambda)(A,B,C) = \rho_j^{\mathrm{J}}(\lambda)(A_c,B_c,C_c)$$

per a tot $j \geq 0$, n'hi ha prou amb provar que

$$\rho_j^{\mathrm{J}}(\lambda)(A_c,B_c,C_c) = \rho_n^{\mathrm{J}}(\lambda)(A_c,B_c,C_c) + t(j-n) \quad \forall j \geq n.$$

Recordem que

$$B_c = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_c = \begin{pmatrix} 0 & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Posem $M_j^1(\lambda)$, $M_j^2(\lambda)$ i $M_j^3(\lambda)$ a les matrius

$$M_j^1(\lambda) = \left((A_1 - \lambda I)^j \quad (A_1 - \lambda I)^{j-1} B_1 \quad \dots \quad (A_1 - \lambda I) B_1 \quad B_1 \right),$$

$$M_j^2(\lambda) = \begin{pmatrix} (A_2 - \lambda I)^j \\ C_1 (A_2 - \lambda I)^{j-1} \\ \vdots \\ C_1 (A_2 - \lambda I) \\ C_1 \end{pmatrix},$$

$$M_j^3(\lambda) = \begin{pmatrix} (A_3 - \lambda I)^j & (A_3 - \lambda I)^{j-1} B_2 & \dots & (A_3 - \lambda I) B_2 & B_2 \\ C_2 (A_3 - \lambda I)^{j-1} & C_2 (A_3 - \lambda I)^{j-2} B_2 & \dots & C_2 B_2 & \\ \vdots & \vdots & \iddots & & \\ C_2 (A_3 - \lambda I) & C_2 B_2 & & & \\ C_2 & & & & \end{pmatrix}.$$

Utilitzant que

$$A_1=\begin{pmatrix} N_1^1 & & \\ & \ddots & \\ & & N_1^r \end{pmatrix},\quad A_2=\begin{pmatrix} N_2^1 & & \\ & \ddots & \\ & & N_2^s \end{pmatrix},\quad A_3=\begin{pmatrix} N_3^1 & & \\ & \ddots & \\ & & N_3^t \end{pmatrix},$$

$$B_1=\begin{pmatrix} B_1^1 & & \\ & \ddots & \\ & & B_1^r \end{pmatrix},\quad B_2=\begin{pmatrix} B_2^1 & & \\ & \ddots & \\ & & B_2^t \end{pmatrix},\quad C_1=\begin{pmatrix} C_1^1 & & \\ & \ddots & \\ & & C_1^s \end{pmatrix},\quad C_2=\begin{pmatrix} C_2^1 & & \\ & \ddots & \\ & & C_2^t \end{pmatrix},$$

tenim que

$$\operatorname{rang} M_j^1(\lambda)=\operatorname{rang}\begin{pmatrix} (N_1^1-\lambda I)^j & & & (N_1^1-\lambda I)^{j-1}B_1^1 & & \dots & B_1^1 & \\ & \ddots & & & \ddots & & & \ddots & \\ & & (N_1^r-\lambda I)^j & & & (N_1^r-\lambda I)^{j-1} & \dots & & B_1^r \end{pmatrix}=$$

$$\begin{aligned} &=\sum_{1\leq i\leq r}\operatorname{rang}\left(\,(N_1^i-\lambda I)^j \quad (N_1^i-\lambda I)^{j-1}B_1^i \quad \dots \quad (N_1^i-\lambda I)B_1^i \quad B_1^i\,\right)=\\ &=\sum_{1\leq i\leq r}k_i, \end{aligned}$$

$$\operatorname{rang} M_j^2(\lambda)=\operatorname{rang}\begin{pmatrix} (N_2^1-\lambda I)^j & & \\ & \ddots & \\ & & (N_2^s-\lambda I)^j \\ C_1^1(N_1^2-\lambda I)^{j-1} & & \\ & \ddots & \\ & & C_1^s(N_2^s-\lambda I)^{j-1} \\ \vdots & & \vdots \\ C_1^1(N_2^1-\lambda I) & & \\ & \ddots & \\ & & C_1^s(N_2^s-\lambda I) \\ C_1^1 & & \\ & \ddots & \\ & & C_1^s \end{pmatrix}=$$

$$\begin{aligned} &\sum_{1\leq i\leq s}\operatorname{rang}\begin{pmatrix} (N_2^i-\lambda I)^j \\ C_1^i(N_2^i-\lambda I)^{j-1} \\ \vdots \\ C_1^i(N_2^i-\lambda I) \\ C_1^i \end{pmatrix}=\\ &=\sum_{1\leq i\leq s}l_i, \end{aligned}$$

$$
\operatorname{rang} M_j^3(\lambda) = \operatorname{rang}\begin{pmatrix}
(N_3^1-\lambda I)^j & & (N_3^1-\lambda I)^{j-1} & \cdots & B_2^1 & & & \\
& \ddots & & \ddots & & \cdots & \ddots & \\
& (N_3^t-\lambda I)^j & & (N_3^t-\lambda I)^{j-1}B_2^t & & & (N_3^t-\lambda I)B_2^t & B_2^t \\
C_2^1(N_3^1-\lambda I)^{j-1} & & C_2^1(N_3^1-\lambda I)^{j-2}B_2^1 & & & C_2^1B_2^1 & & \\
& \ddots & & \ddots & \cdots & & \ddots & \\
\vdots & & & \vdots & & & & \\
C_2^1(N_3^1-\lambda I) & & C_2^1B_2^1 & & & & & \\
& \ddots & & \ddots & & & & \\
& C_2^t(N_3^t-\lambda I) & & & C_2^tB_2^t & & & \\
C_2^1 & & & & & & & \\
& \ddots & & & & & & \\
& C_2^t & & & & & &
\end{pmatrix} =
$$

$$
= \sum_{1\le i\le t} \operatorname{rang}\begin{pmatrix}
(N_3^i-\lambda I)^j & (N_3^i-\lambda I)^{j-1}B_2^i & \dots & (N_3^i-\lambda I)B_2^i & B_2^i \\
C_2^i(N_3^i-\lambda I)^{j-1} & C_2^i(N_3^i-\lambda I)^{j-2} & \dots & C_2^iB_2^i & \\
\vdots & \vdots & & & \\
C_2^i(N_3^i-\lambda I) & C_2^iB_2^i & & & \\
C_2^i & & & &
\end{pmatrix} =
$$

$$
= \sum_{1\le i\le t} m_i + t(j+1).
$$

Llavors

$$
\rho_j^{\mathrm{J}}(\lambda)(A_c,B_c,C_c) = \operatorname{rang}\begin{pmatrix}
(A_c-\lambda I)^j & (A_c-\lambda I)^{j-1}B_c & \dots & (A_c-\lambda I)B_c & B_c \\
C_c(A_c-\lambda I)^{j-1} & C_c(A_c-\lambda I)^{j-2}B_c & \dots & C_cB_c & \\
\vdots & \vdots & .\cdot\cdot & & \\
C_c(A_c-\lambda I) & C_cB_c & & & \\
C_c & & & &
\end{pmatrix} =
$$

$$
= \operatorname{rang}\begin{pmatrix}
(A_1-\lambda I)^j & & & & (A_1-\lambda I)^{j-1}B_1 & & \cdots & (A_1-\lambda I)B_1 & & B_1 \\
& (A_2-\lambda I)^j & & & & & \cdots & & & \\
& & (A_3-\lambda I)^j & & & (A_3-\lambda I)^{j-1}B_2 & \cdots & & (A_3-\lambda I)B_2 & B_2 \\
& & & (A_4-\lambda I)^j & & & \cdots & & & \\
& C_1(A_1-\lambda I)^{j-1} & & & C_1(A_1-\lambda I)^{j-2}B_1 & & \cdots & C_1B_1 & & \\
& & C_2(A_3-\lambda I)^{j-1} & & & C_2(A_3-\lambda I)^{j-2}B_2 & \cdots & & C_2B_2 & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & & & & \\
& C_1(A_1-\lambda I) & & C_1B_1 & & & & & & \\
& & C_2(A_3-\lambda I) & & C_2B_2 & & & & & \\
& C_1 & & & & & & & & \\
& & C_2 & & & & & & &
\end{pmatrix} =
$$

$$
= \operatorname{rang}\begin{pmatrix}
M_j^1(\lambda) & & & \\
& M_j^2(\lambda) & & \\
& & M_j^3(\lambda) & \\
& & & (A_4-\lambda I)^j
\end{pmatrix} =
$$

$$
= \sum_{1\le j\le t} \operatorname{rang} M_j^1(\lambda) + \operatorname{rang} M_j^2(\lambda) + \operatorname{rang} M_j^3(\lambda) + \operatorname{rang}(A_4-\lambda I)^j =
$$

$$
= \sum_{1\le i\le r} k_i + \sum_{1\le i\le s} l_i + \sum_{1\le i\le t} m_i + t(j+1) + \operatorname{rang}(A_4-\lambda I)^j =
$$

$$
= n + t(j+1) - \dim \operatorname{Ker}(A_4-\lambda I)^j,
$$

com volíem provar, ◇

En la secció anterior hem vist que $\rho_j^{co}(A, B, C) = \rho_{n-1}^{co}(A, B, C)$ per a tot $j \ge n - 1$. En aquest cas, i com a conseqüència de la proposició anterior, tenim que per a $j \ge n$ els escalars $\rho_j^J(\lambda)(A, B,C)$ poden obtenir-se a partir dels escalars $\rho_1^J(\lambda)(A, B, C), \dots, \rho_n^J(\lambda)(A,B, C)$, segons es veu en el corol·lari següent.

Corol·lari 3.11. *Per a tot $j \geq n$,* $\rho_j^J(\lambda)(A, B, C) = \rho_n^J(\lambda)(A, B, C) + t(j - n)$.

DEMOSTRACIÓ. Com $\dim \operatorname{Ker}(A_4 - \lambda I)^j = \dim \operatorname{Ker}(A_4 - \lambda I)^n$ per a tot $j \geq n$, tenim que

$$\begin{aligned}\rho_j^{\mathrm{J}}(\lambda)(A_c, B_c, C_c) &= n + t(j+1) - \dim \operatorname{Ker}(A_4 - \lambda I)^j = \\ &= n + t(j+1) - \dim \operatorname{Ker}(A_4 - \lambda I)^n = \\ &= n + t(n+1) - \dim \operatorname{Ker}(A_4 - \lambda I)^n + t(j-n) = \\ &= \rho_n^{\mathrm{J}}(\lambda)(A_c, B_c, C_c) + t(j-n),\end{aligned}$$

com volíem provar, $\diamond$

Sigui $\lambda \in \mathbb{C}$ un valor propi de la terna (A,B,C). El teorema següent ens dóna la característica de Segre del valor propi A en funció dels escalars $\{ \rho_i^J(\lambda)(A, B,C)\}_{-1\leq i\leq n}$.

Teorema 3.12. *Els exponents dels divisors elementals finits de la terna* (A,B,C) *referits al valor propi* λ *són la partició conjugada de*

$$\{\rho_i^{\mathrm{J}}(\lambda)(A,B,C) - \rho_{i+1}^{\mathrm{J}}(\lambda)(A,B,C) + t\}_{0\leq i\leq n}.$$

DEMOSTRACIÓ. Per la proposició 3.4, n'hi ha prou amb veure que els exponents dels divisors elementals finits referits al valor propi λ de la terna (A, B, C) són la partició conjugada de

$$\{\rho_i^{\mathrm{J}}(\lambda)(A_c,B_c,C_c) - \rho_{i+1}^{\mathrm{J}}(\lambda)(A_c,B_c,C_c) + t\}_{0\leq i\leq n}.$$

Sabem que aquests exponents són la partició conjugada de

$$\{\delta_{i+1}(\lambda) - \delta_i(\lambda)\}_{0\leq i\leq n},$$

essent $\delta_i(\lambda) = \dim \operatorname{Ker}(A_4 \to \lambda I)^i$ per a tot $i \geq 0$ (on $\delta_0(\wedge) = 0$).

Així, doncs, n'hi ha prou amb que provem que per a tot $i \in \{0,..., n\}$,

$$\delta_{i+1}(\lambda) - \delta_i(\lambda) = \rho_i^{\mathrm{J}}(\lambda)(A_c, B_c, C_c) - \rho_{i+1}^{\mathrm{J}}(\lambda)(A_c, B_c, C_c) + t.$$

Per la proposició 3.7,

$$\rho_i^{\mathrm{J}}(A_c, B_c, C_c) = n + t(i+1) - \dim \operatorname{Ker}(A_4 - \lambda I)^i,$$

$$\rho_{i+1}^{\mathrm{J}}(A_c, B_c, C_c) = n + t(i+2) - \dim \operatorname{Ker}(A_4 - \lambda I)^{i+1}.$$

Per tant,

$$\rho_i^{\mathrm{J}}(\lambda)(A, B, C) - \rho_{i+1}^{\mathrm{J}}(\lambda)(A, B, C) + t = \dim \operatorname{Ker}(A_4 - \lambda I)^{i+1} - \dim \operatorname{Ker}(A_4 - \lambda I)^i =$$

$$= \delta_{i+1}(\lambda) - \delta_i(\lambda),$$

com volíem provar.

Observem que per a tot $i \geq n$, la proposició 3.7 ens diu que

$$\rho_i^{\mathrm{J}}(\lambda)(A_c, B_c, C_c) = \rho_n^{\mathrm{J}}(\lambda)(A, B, C) + t(i-n),$$

$$\rho_{i+1}^{\mathrm{J}}(\lambda)(A_c, B_c, C_c) = \rho_n^{\mathrm{J}}(\lambda)(A, B, C) + t(i+1-n).$$

Per tant,

$$\rho_i^{\mathrm{J}}(\lambda)(A, B, C) - \rho_{i+1}^{\mathrm{J}}(\lambda)(A, B, C) + t = 0.$$

Amb això està provat el teorema, $\diamond$

§4. Càlcul dels índexs minimals per columnes

Definirem en aquesta secció, a l'igual que en les seccions anteriors, uns escalars (que posteriorment provarem que són invariants per la relació d'equivalència de ternes de matrius definida a la secció 1), a partir dels quals, i junt amb la constant t calculada en la secció 2, obtindrem els índexs minimals per columnes de la terna.

Sigui (A, B, C) una terna de matrius. **Definició**

4.1. Posem, per a tot $j \in \mathbb{N}, j \geq 0$,

$$\rho_j^c(A,B,C) = \text{rang}\begin{pmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^jB \\ & CB & CAB & \dots & CA^{j-1}B \\ & & CB & \dots & CA^{j-2}B \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & CB \end{pmatrix}.$$

I posarem $\rho_{-1}^c(A,B,C) = 0$.

Observació 4.2. Si (A,B,C) és una terna que no té part controlable i observable alhora ($t = 0$), llavors, pel corol·lari 2.9, $\rho_j^c(A, B,C)$ és, simplement,

$$\rho_j^c(A,B,C) = ramg(B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^jB).$$

Es a dir, $\{\rho_j^c(A, B, C)\}_{0 \leq j \leq n}$ són els índexs de controlabilitat de la parella (A,B). En aquest cas, doncs, podem dir que els índexs minimals de columnes de la terna $(A, 5, C)$ són la partició conjugada de

$$\{\rho_j^c(A, B, C) - \rho_j^c(A, B, C) - t\}_{0 \leq j \leq n-1}.$$

Provarem que això és cert en general.

Veurem ara en primer lloc que els escalars $\rho_j^c(A,B,C)$ són invariants per la relació d'equivalència de ternes de matrius definida en la secció 1.

Proposició 4.3. *Siguin* (A_1,B_1,C_1), $(A_2,B_2,C_2) \in \mathcal{M}_{nmp}$ *dues ternes equivalents, és a dir,* $(A_2,B_2,C_2) = (PA_1P^{-1} + PB_1J + WdP^{-1}, PB_1V, WC_1P^{-1})$ *per a unes certes* *matrius* $P \in Gl_n(\mathbb{C})$, $J \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$, $K \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{C})$, $V \in Gl_m(\mathbb{C})$ *i* $W \in Gl_p(\mathbb{C})$. *Aleshores* $\rho_j^c\,(A_1, B_1, C_1) = \rho_j^c\,(A_2, B_2, C_2)$.

DEMOSTRACIÓ. Mitjançant transformacions elementals de blocs fila i blocs columna és immediat comprovar que

$$\rho_j^c(A_2,B_2,C_2) = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} I_n & & & & & & & & \\ & I_n & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & \\ & & & I_n & & & & & \\ & & & & B_2 & A_2B_2 & A_2^2B_2 & \dots & A_2^jB_2 \\ & & & & & C_2B_2 & C_2A_2B & \dots & C_2A_2^{j-1}B_2 \\ & & & & & & C_2B_2 & \dots & C_2A_2^{j-2}B_2 \\ & & & & & & & \dots & \dots\dots\dots \\ & & & & & & & & C_2B_2 \end{pmatrix} - n(j+1) =$$

$$= \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 & & & \\ C_2 & 0 & & & \\ I_n & 0 & A_2 & B_2 & \\ 0 & 0 & C_2 & 0 & \\ & & I_n & 0 & \\ & & 0 & 0 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} - n(j+1) =$$

$$= \operatorname{rang}\begin{pmatrix} P & K & & & \\ 0 & W & & & \\ & & P & K & \\ & & 0 & W & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & & & \\ C_1 & 0 & & & \\ I_n & 0 & A_1 & B_1 & \\ 0 & 0 & C_1 & 0 & \\ & & I_n & 0 & \\ & & 0 & 0 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P^{-1} & 0 & & & \\ J & V & & & \\ & & P^{-1} & 0 & \\ & & J & V & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} - n(j+1) =$$

$$= \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & & & \\ C_1 & 0 & & & \\ I_n & 0 & A_1 & B_1 & \\ 0 & 0 & C_1 & 0 & \\ & & I_n & 0 & \\ & & 0 & 0 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} - n(j+1) =$$

$$= \operatorname{rang}\begin{pmatrix} I_n & & & & & & & & \\ & I_n & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & \\ & & & I_n & & & & & \\ & & & & B_1 & A_1B_1 & A_1^2B_1 & \dots & A_1^jB_1 \\ & & & & & C_1B_1 & C_1A_1B_1 & \dots & C_1A_1^{j-1}B_1 \\ & & & & & & C_1B_1 & \dots & C_1A_1^{j-2}B_1 \\ & & & & & & & \dots & \dots\dots\dots \\ & & & & & & & & C_1B_1 \end{pmatrix} - n(j+1) =$$

$$= \rho_j^c(A_1,B_1,C_1),$$

com volíem provar, $\diamond$

Observació 4.4. A [Kar-Ka **88]** es veu que

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & & & \\ C_1 & 0 & & & \\ I_n & 0 & A_1 & B_1 & \\ 0 & 0 & C_1 & 0 & \\ & & I_n & 0 & \\ & & 0 & 0 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 & & & \\ C_2 & 0 & & & \\ I_n & 0 & A_2 & B_2 & \\ 0 & 0 & C_2 & 0 & \\ & & I_n & 0 & \\ & & 0 & 0 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

També en aquest cas tenim una formulació equivalent per als invariants ρ_j^c (A, B, C).

Proposició 4.5. *Siquí* (A,B,C) *una terna de matrius la forma reduïda canònica de la qual és* (A_c, B_c, C_c)*, amb* $A_c = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & A_3 & \\ & & & A_4 \end{pmatrix}$ *i* $B_c = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. *Si* $k_1^c, \dots, k_r^c$ *són els índexs de controlabilitat de la parella* (A_1, B_1)*, es compleix*

$$\forall j \geq 0 \qquad \rho_j^c(A,B,C) = k_j^c + t(j+1).$$

DEMOSTRACIÓ. Per la proposició 4.3, tenim que n'hi ha prou amb veure que

$$\rho_j^c(A_c, B_c, C_c) = k_j^c + t(j+1).$$

Tenim que

$$C_c = \begin{pmatrix} 0 & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Posem

$$M_{j,c}^1 = (\, B_1 \quad A_1 B_1 \quad \dots A_1^j B_1 \,), \qquad M_{j,c}^2 = \begin{pmatrix} B_2 & A_3 B_2 & \dots & A_3^j B_2 \\ & C_2 B_2 & \dots & C_2 A_3^{j-1} B_2 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & C_2 B_2 \end{pmatrix}$$

Llavors

$$
\begin{aligned}
\rho_j^{\mathrm{c}}(A_c, B_c, C_c) &= \operatorname{rang}\begin{pmatrix} B_c & A_cB_c & A_c^2B_c & \dots & A_c^jB_c \\ & C_cB_c & A_cB_c & \dots & C_cA_c^{j-1}B_c \\ & & C_cB_c & \dots & C_cA_c^{j-2}B_c \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & C_cB_c \end{pmatrix} = \\
&= \operatorname{rang}\begin{pmatrix} B_1 & & A_1B_1 & & \dots & \dots & \dots\ \dots\ A_1^jB_1 & \\ & B_2 & & A_3B_2 \ \dots & \dots & \dots\ \dots & & A_3^jB_2 \\ & & & C_2B_2 & C_2A_3B_2\ \dots\ \dots & & & C_2A_3^{j-1}B_2 \\ & & & & C_2B_2 & \dots\ \dots & & C_2A_3^{j-2}B_2 \\ & & & & & & & \vdots \\ & & & & & & & C_2B_2 \end{pmatrix} = \\
&= \operatorname{rang}\begin{pmatrix} B_1 & A_1B_1 & \dots A_1^jB_1 & & & & \\ & & & B_2 & A_3B_2 & \dots & A_3^jB_2 \\ & & & & C_2B_2 & \dots & C_2A_3^{j-1}B_2 \\ & & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & & C_2B_2 \end{pmatrix} = \\
&= \operatorname{rang} M_{j,c}^1 + +\operatorname{rang} M_{j,c}^2.
\end{aligned}
$$

Teníem

$$
A_1 = \begin{pmatrix} N_1^1 & & \\ & \ddots & \\ & & N_1^r \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} N_3^1 & & \\ & \ddots & \\ & & N_3^t \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} B_1^1 & & \\ & \ddots & \\ & & B_1^r \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} C_2^1 & & \\ & \ddots & \\ & & C_2^t \end{pmatrix}.
$$

Aleshores

$$
\begin{aligned}
\operatorname{rang} M_{j,\mathrm{c}}^2 &= \operatorname{rang}\begin{pmatrix} B_2 & A_3B_2 & \dots & A_3^jB_2 \\ & C_2B_2 & \dots & C_2A_3^{j-1}B_2 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & C_2B_2 \end{pmatrix} = \\
&= \operatorname{rang}\begin{pmatrix}
B_2^1 & & & N_3^1B_2^1 & & {N_3^1}^2B_2^1 & & & & {N_3^1}^jB_2^1 & & \\
& \ddots & & & \ddots & & \ddots & & \cdots & & \ddots & \\
& & B_2^t & & N_3^tB_2^t & & & {N_3^t}^2B_2^t & & & & {N_3^t}^jB_2^t \\
& & C_2^1B_2^1 & & & C_2^1N_3^1B_2^1 & & & & C_2^1{N_3^1}^{j-1}B_2^1 & & \\
& & & \ddots & & & \ddots & & \cdots & & \ddots & \\
& & & & C_2^tB_2^t & & & C_2^tN_3^tB_2^t & & & & C_2^1{N_3^t}^{j-1}B_2^t \\
& & & & & C_2^1B_2^1 & & & & & & \\
& & & & & & \ddots & & \vdots & & \vdots & \\
& & & & & & & C_2^tB_2^t & & & & \\
& & & & & & & & \ddots & & \vdots & \\
& & & & & & & & & C_2^1B_2^1 & & \\
& & & & & & & & & & \ddots & \\
& & & & & & & & & & & C_2^tB_2^t
\end{pmatrix} = \\
&= t(j+1),
\end{aligned}
$$

i

$$\rho_j^c(A_c, B_c, C_c) = \operatorname{rang} M_{j,c}^1 + t(j+1) = k_j^c + t(j+1),$$

com volíem provar, $\diamond$

Hem vist a les dues seccions anteriors corn els invariants que hem definit per a $j \geq n$ són fàcilment calculables a partir dels anteriors. En aquest cas també passa això. Més exactament, tenim el següent

Corol·lari 4.6. *Per a tot $j \geq n$, es compleix que*

$$\rho_j^c(A, B, C) = \rho_{n-1}^c(A, B, C) + t(j - n + 1).$$

DEMOSTRACIÓ. Com que $k_j^c = k_{n-1}^c + t(j+1)$ per a tot $j \geq n - 1$ (aquests són els índexs de controlabilitat de la parella (A_1, B_1)), aleshores

$$\begin{aligned}\rho_j^c(A_c, B_c, C_c) &= k_{n-1}^c + t(j+1) = \\ &= k_{n-1}^c + tn + t(j - n + 1) = \\ &= \rho_{n-1}^c(A, B, C) + t(j - n + 1),\end{aligned}$$

com volíem provar, $\diamond$

Podem ara ja enunciar el teorema que ens dóna els índexs minimals per columnes de la terna (A,B,C) en funció dels escalars $\rho_j^c(A,B,C)$ trobats anteriorment.

Teorema 4.7. *Sigui (A,B,C) una terna qualsevol. Aleshores els índexs minimals per columnes no nuls de la terna (A, B, C) són la partició conjugada de*

$$\{\rho_i^c(A,B,C) - \rho_{i-1}^c(A,B,C) - t\}_{0 \leq i \leq n}.$$

I el nombre d'índexs minimals per columnes nuls és igual a m – rang B.

DEMOSTRACIÓ. Siguin $\{k_1, \ldots, k_r\}$ els índexs minimals per columnes no nuls de la terna (A, B, C), ordenats de forma que $k_1 \geq \ldots \geq k_r$. Per la proposició 4.3, n'hi ha prou amb provar que els índexs minimals per columnes no nuls de la terna (A, B, C) són la partició conjugada de

$$\{\rho_i^{\mathrm{c}}(A_c, B_c, C_c) - \rho_{i-1}^{\mathrm{c}}(A_c, B_c, C_c) - t\}_{0 \leq i \leq n}.$$

Amb les notacions de la proposició 4.4, $\{k_1 = k_1^c, \ldots, k_r = k_r^c\}$ són la partició conjugada de

$$\{\operatorname{rang} M_{0,\mathrm{c}}^1 - \operatorname{rang} M_{-1,\mathrm{c}}^1, \operatorname{rang} M_{1,\mathrm{c}}^1 - \operatorname{rang} M_{0,\mathrm{c}}^1, \ldots, \operatorname{rang} M_{n,\mathrm{c}}^1 - \operatorname{rang} M_{n-1,\mathrm{c}}^1\},$$

posant $M_{-1,c}^1 = 0$. Observem que $\operatorname{rang} M_{j+1,c}^1 - \operatorname{rang} M_{j,c}^1 = 0 \quad \forall j \geq r$.

Per la proposició 4.4, tenim que

$$\begin{aligned}\rho_i^{\mathrm{c}}(A_c, B_c, C_c) - \rho_{i-1}^{\mathrm{c}}(A_c, B_c, C_c) - t &= k_i^{\mathrm{c}} + t(i+1) - k_{i-1}^{\mathrm{c}} - ti - t = \\ &= k_i - k_{i-1},\end{aligned}$$

com volíem provar.

Observem que per a tot $j \geq n$,

$$\rho_j^{\mathrm{c}}(A_c, B_c, C_c) - \rho_{j-1}^{\mathrm{c}}(A_c, B_c, C_c) - t = 0.$$

A més, el nombre d'índexs minimals per columnes nuls és igual a

$$m - \operatorname{rang} B_c = m - \operatorname{rang} B,$$

i amb això està demostrat el teorema, $\diamond$

§5. Càlcul dels índexs minimals per files

Donarem uns certs escalars, que es calcularan com en els casos anteriors únicament a partir de rangs de matrius, i amb els quals es dedueixen els índexs minimals per files d'una terna.

Sigui $(A, B, C) \in \mathcal{M}_{nmp}$ una terna de matrius.

Definició 5.1. Posem, per a tot j G N, $j \geq 0$,

$$\rho_j^{\circ}(A,B,C) = \text{rang}\begin{pmatrix} C \\ CA & CB \\ CA^2 & CAB & CB \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ CA^j & CA^{j-1}B & CA^{j-2}B & \dots & CB \end{pmatrix}.$$

I posarem $\rho_{-1}^{o}(A, B, C) = \mathbf{0}$.

Observació 5.2. Si (A,B,C) és una terna que no té part controlable i observable alhora $(t = 0)$, llavors, pel corol·lari 2.9, $\rho_j^{o}(A,B,C)$ és, simplement,

$$\rho_j^{\circ}(A,B,C) = \text{rang}\begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^j \end{pmatrix} = \text{rang}\begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^j \end{pmatrix}^t = n - \dim \text{Ker}\begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^j \end{pmatrix},$$

és a dir, els nombres $\rho_j^{o}(A,B,C)$ són els índexs d'observabilitat de la parella $\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix}$. En aquest cas, els índexs minimals per files de la terna (A, B,C) són la partició conjugada de

$$\{\rho_j^{o}(A, B, C) - \rho_{j-1}^{o}(A, B, C) - t\}_{0\leq j\leq n-1}$$

Provarem aquest resultat en general, per a una terna de matrius qualsevol.

Els escalars $\rho_j^{o}(A, B, C)$ són invariants per la relació d'equivalència de ternes considerada en la secció 1, segons es prova en la següent

Proposició 5.3. *Siguin* (A_1,B_1,C_1), $(A_2, B_2, C_2) \in \mathcal{M}_{nmp}$ *dues ternes equivalents, és a dir,* $(A_2,B_2,C_2) = (PA_1P^{-1} + PB_1J + WC_1P^{-1}PB_1WC_1P^{-1})$, *per a unes certes matrius* $P \in Gl_n(\mathbb{C})$, $J \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$, $K \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$, $V \in Gl_{m\times n}(\mathbb{C})$ *i* $W \in Gl_p(\mathbb{C})$. Aleshores $\rho_j^{o}(A_1,B_1,C_1) = \rho_j^{o}(A_2,B_2,C_2)$.

DEMOSTRACIÓ. Mitjançant transformacions elementals de blocs fila i blocs columna és immediat comprovar que

$$
\begin{aligned}
\rho_j^{\circ}(A_2,B_2,C_2) &= \operatorname{rang}\begin{pmatrix}
I_n &&&&&&&& \\
& I_n &&&&&&& \\
&& \ddots &&&&&& \\
&&& I_n &&&&& \\
&&&& C_2 &&&& \\
&&&& C_2A_2 & C_2B_2 &&& \\
&&&& C_2A_2^2 & C_2A_2B_2 & C_2B_2 && \\
&&&& \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\
&&&& C_2A_2^j & C_2A_2^{j-1}B_2 & C_2A_2^{j-2}B_2 & \dots & C_2B_2
\end{pmatrix} - n(j+1) = \\
&= \operatorname{rang}\begin{pmatrix}
A_2 & B_2 &&& \\
C_2 & 0 &&& \\
I_n & 0 & A_2 & B_2 & \\
0 & 0 & C_2 & 0 & \\
&& I_n & 0 & \\
&& 0 & 0 & \\
&&&& \ddots
\end{pmatrix} - n(j+1) = \\
&= \begin{pmatrix}
P & K &&& \\
0 & W &&& \\
&& P & K & \\
&& 0 & W & \\
&&&& \ddots
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
A_1 & B_1 &&& \\
C_1 & 0 &&& \\
I_n & 0 & A_1 & B_1 & \\
0 & 0 & C_1 & 0 & \\
&& I_n & 0 & \\
&& 0 & 0 & \\
&&&& \ddots
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
P^{-1} & 0 &&& \\
J & V &&& \\
&& P^{-1} & 0 & \\
&& J & V & \\
&&&& \ddots
\end{pmatrix} - n(j+1) = \\
&= \operatorname{rang}\begin{pmatrix}
A_1 & B_1 &&& \\
C_1 & 0 &&& \\
I_n & 0 & A_1 & B_1 & \\
0 & 0 & C_1 & 0 & \\
&& I_n & 0 & \\
&& 0 & 0 & \\
&&&& \ddots
\end{pmatrix} - n(j+1) = \\
&= \operatorname{rang}\begin{pmatrix}
I_n &&&&&&&& \\
& I_n &&&&&&& \\
&& \ddots &&&&&& \\
&&& I_n &&&&& \\
&&&& C_1 &&&& \\
&&&& C_1A_1 & C_1B_1 &&& \\
&&&& C_1A_1^2 & C_1A_1B_1 & C_1B_1 && \\
&&&& \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\
&&&& C_1A_1^j & C_1A_1^{j-1}B_1 & C_1A_1^{j-2}B_1 & \dots & C_1B_1
\end{pmatrix} - n(j+1) = \\
&= \rho_j^{\circ}(A_1,B_1,C_1),
\end{aligned}
$$

com volíem provar, $\diamond$

Observació 5.4. A **[Kar-Ka 88]** també es pot trobar

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & & & \\ C_1 & 0 & & & \\ I_n & 0 & A_1 & B_1 & \\ 0 & 0 & C_1 & 0 & \\ & & I_n & 0 & \\ & & 0 & 0 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 & & & \\ C_2 & 0 & & & \\ I_n & 0 & A_2 & B_2 & \\ 0 & 0 & C_2 & 0 & \\ & & I_n & 0 & \\ & & 0 & 0 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}.$$

Veurem ara una altra forma de donar els escalars $\rho_j^o\,(A, B, C)$.

Proposició 5.5. *Sigui (A_c, B_c, C_c) la forma reduïda canònica de la terna (A, B, C), amb $A_c = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & A_3 & \\ & & & A_4 \end{pmatrix}$ i $C_c = \begin{pmatrix} 0 & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 & 0 \end{pmatrix}$. Si $l_1^o, \dots, l_s^o$ són els índexs d'observabilitat de la parella $\begin{pmatrix} A_2 \\ C_1 \end{pmatrix}$, es compleix*

$$\forall j \geq 0 \qquad \rho_j^o(A, B, C) = l_j^o + t(j+1).$$

DEMOSTRACIÓ. Per la proposició 5.3, n'hi ha prou amb provar que

$$\rho_j^o\,(A_c, B_c, C_c) = \rho_j^o + t(j+1),$$

Tenim

$$B_c = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Posem

$$M_{j,o}^1 = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_1 A_2 \\ C_1 A_2^2 \\ \vdots \\ C_1 A_2^j \end{pmatrix}, \quad M_{j,o}^2 = \begin{pmatrix} C_2 & & & & \\ C_2 A_3 & C_2 B_2 & & & \\ C_2 A_3^2 & C_2 A_3 B_2 & C_2 B_2 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ C_2 A_3^j & C_2 A_3^{j-1} B_2 & C_2 A_3^{j-2} B_2 & \dots & C_2 B_2 \end{pmatrix}.$$

Llavors

$$\rho_j^{\circ}(A_c,B_c,C_c)=\operatorname{rang}\begin{pmatrix} C_c \\ C_cA_c & C_cB_c \\ C_cA_c^2 & C_cA_cB_c & C_cB_c \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ C_cA_c^j & C_cA_c^{j-1} & C_cA_c^{j-2}B_c & \dots & C_cB_c \end{pmatrix}=$$

$$=\operatorname{rang}\begin{pmatrix} C_1 \\ & C_2 \\ C_1A_2 \\ & C_2A_3 & C_2B_2 \\ C_1A_2^2 \\ & C_2A_3^2 & C_2A_3B_2 & C_2B_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ C_1A_2^j \\ & C_2A_3^j & C_2A_3^{j-1}B_2 & C_2A_3^{j-2}B_2 & \dots & C_2B_2 \end{pmatrix}=$$

$$=\operatorname{rang}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_1A_2 \\ C_1A_2^2 \\ \vdots \\ C_1A_2^j \\ & C_2 \\ & C_2A_3 & C_2B_2 \\ & \vdots & \vdots & \ddots \\ & C_2A_3^j & C_2A_3^{j-1}B_2 & \dots & C_2B_2 \end{pmatrix}=$$

$$=\operatorname{rang}M_{j,\mathrm{o}}^1+\operatorname{rang}M_{j,\mathrm{o}}^2.$$

Teníem

$$A_2=\begin{pmatrix} N_2^1 \\ & \ddots \\ & & N_2^s \end{pmatrix},\quad A_3=\begin{pmatrix} N_3^1 \\ & \ddots \\ & & N_3^t \end{pmatrix},$$

$$C_1=\begin{pmatrix} C_1^1 \\ & \ddots \\ & & C_1^s \end{pmatrix},\quad C_2=\begin{pmatrix} C_2^1 \\ & \ddots \\ & & C_2^t \end{pmatrix}.$$

Aleshores

$$
\begin{aligned}
\operatorname{rang} M^2_{j,\mathrm{o}} &= \operatorname{rang}\begin{pmatrix}
C_2 \\
C_2A_3 & C_2B_2 \\
C_2A_3^2 & C_2A_3B_2 & C_2B_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\
C_2A_3^j & C_2A_3^{j-1}B_2 & C_2A_3^{j-2}B_2 & \dots & C_2B_2
\end{pmatrix} = \\
&= \operatorname{rang}\begin{pmatrix}
C_2^1 \\
 & \ddots \\
 & & C_2^s \\
C_2^1N_2^1 & & & C_2^1B_2^1 & \ddots \\
 & \ddots \\
 & & C_2^sN_2^s & & & C_2^sB_2^s \\
C_2^1{N_2^1}^2 & & & C_2^1N_2^1B_2^1 & & & C_2^1B_2^1 \\
 & \ddots & & & \ddots & & & \ddots \\
 & & C_2^s{N_2^s}^2 & & & C_2^sN_2^sB_2^s & & & C_2^sB_2^s \\
\vdots & & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & \ddots \\
C_2^1{N_2^1}^j & & & C_2^1{N_2^1}^{j-1}B_2^1 & & & C_2^1{N_2^1}^{j-2}B_2^1 & & \cdots & & C_2^1B_2^1 \\
 & \ddots & & & \ddots & & & \ddots & & & & \ddots \\
 & & C_2^s{N_2^s}^j & & & C_2^s{N_2^s}^{j-1}B_2^s & & & C_2^s{N_2^s}^{j-2}B_2^s & & \cdots & & C_2^sB_2^s
\end{pmatrix} = \\
&= t(j+1),
\end{aligned}
$$

i

$$\rho_j^{\mathrm{o}}(A_c, B_c, C_c) = \operatorname{rang} M^1_{j,\mathrm{o}} + t(j+1) = l_j^{\mathrm{o}} + t(j+1),$$

com volíem provar. ◇

Com en tots els casos anteriors, també els escalars ρ_j^o (A, B, C) poden obtenir-se, per a $j \geq n - 1$, a partir de $\{\rho_0^o\,(A,B,C), \dots\dots\dots\dots, \rho_{n-1}^o\,(A,B,C)\}$, com es veuen el corol·lari següent.

$$\rho_j^{\mathrm{o}}(A, B, C) = \rho_{n-1}^{\mathrm{o}}(A, B, C) + t(j-n).$$

DEMOSTRACIÓ. Com per a tot $j \geq n - 1$ tenim que rang $M^1_{j,o}$ = rang $M^1_{n-1,o}$ (són els índexs dobservabilitat de la parella $\begin{pmatrix} A_2 \\ C_1 \end{pmatrix}$, aleshores

$$
\begin{aligned}
\rho_j^{\mathrm{o}}(A, B, C) &= \operatorname{rang} M^1_{j,\mathrm{o}} + t(j+1) = \\
&= \operatorname{rang} M^1_{n-1,\mathrm{o}} + tn + t(j-n) = \\
&= \rho_{n-1}^{\mathrm{o}}(A, B, C) + t(j-n),
\end{aligned}
$$

com volíem provar. ◇

com volíem provar. ◇

Podem ara ja demostrar que els índexs minimals per files de la terna (A, B,C) venen donats pels escalars { ρ_i^o (A, B, C)}$_{0\le i\le n-1}$.

Teorema 5.7. *Sigui* (A,B,C) *una terna qualsevol. Aleshores els índexs mínim als per files no nuls de la terna* ($A,B.C$) *són la partició conjugada de*

$$\{\rho_i^\circ(A,B,C) - \rho_{i-1}^\circ(A,B,C) - t\}_{0\le i\le n}.$$

El nombre d'índexs minimals per files nuls és p – rang C.

DEMOSTRACIÓ. Siguin $\{l_1 \ldots, l_3\}$ els índexs minimals per files no nuls de la terna (A, B, C), ordenats de forma que $l_1 \ge \ldots \ge l_s$. Per la proposició 5.3. n'hi ha prou amb provar que els índexs minimals per files no nuls de la terna (A. B, C) són la partició conjugada de

$$\{\rho_i^\circ(A_c, B_c, C_c) - \rho_{i-1}^\circ(A_c, B_c, C_c) - t\}_{0\le i\le n}.$$

Amb les notacions de la proposició 5.4, $\{l_1, \ldots, l_s\}$ són la partició conjugada de

{rang $M^1_{0,o}$ - rang $M^1_{-1,o}$, rang $M^1_{1,o}$ - rang $M^1_{0,o}$,...., rang $M^1_{n,o}$ - rang $M^1_{n-1.o}$},

posant $M^1_{-1,o}$ = 0. A més, rang $M^1_{j+1.o}$ - rang $M^1_{j,o}$ = 0 $\forall$ j ≥ 3. Per la proposició 5.4, tenim que

$$\begin{aligned}\rho_i^\circ(A_c, B_c, C_c) - \rho_{i-1}^\circ(A_c, B_c, C_c) - t &= l_i^\circ + t(i+1) - l_{i-1}^\circ - ti - t = \\ &= l_i - l_{i-1},\end{aligned}$$

com volíem provar.

Observem que per a tot $j \ge n$,

$$\rho_j^\circ(A_c, B_c, C_c) - \rho_{j-1}^\circ(A_c, B_c, C_c) - t = 0.$$

El nombre d'índexs minimals per files nuls és igual a

$$p \text{ - rang } C_c = p \text{ - rang C}.$$

Amb això està provat el teorema. ◇

§6. El sistema complet d'invariants *R* d'una terna de matrius

Sigui (.4. *B, C)* una terna de matrius. Posem *R(A, B, C)* al conjunt d'escalars

$$\{\{\rho_j^{co}(A.B,C)\},\{\lambda_i\},\{\rho_j^{J}(\lambda_i)(A,B,C)\},\{\rho_j^{c}(A,B,C)\},\{\rho_j^{o}(A,B,C)\}\}_{-1\leq j\leq n,1\leq i\leq u},$$

amb les notacions segons les definicions 2.1, 3.1, 4.1 i 5.1. Tenim aleshores el següent

Teorema 6.1. *El conjunt d'escalars R*(*A,B,C*) *és un sistema complet d'invariants per a la terna* (*A.B,C*).

DEMOSTRACIÓ. Hem vist a les seccions anteriors que aquests escalars són invariants per la relació d'equivalència definida en l'espai de ternes de matrius, i també que a partir d'aquests escalars es poden obtenir els invariants de Kronecker del feix de matrius associat a la terna: divisors elementals infinits, valors propis i divisors elementals finits (per a cada valor propi). índexs minimals per columnes i índexs minimals per files.

Per tant, aquest conjunt determina la forma reduïda canònica de la terna de matrius. ◇

A més, tenim

Teorema 6.2. *Existeix una bijecció entre el conjunt de classes d'equivalència de ternes de matrius i els conjunts d es calar s* $R = \{\{\rho_j^{co}\}, \{\lambda_i\}, \{\rho_j^{J}(\lambda_i)\}, \{\rho_j^{c}\}, \{\rho_j^{o}\}\}_{-1\leq j\leq n, 1\leq i\leq u}$ *tals que*

(i) ρ_j^{co}, $\rho_j^{J}(\lambda_i)$, ρ_j^{c}, $\rho_j^{o} \in \mathbb{N}$ i $\lambda_i \in \mathbb{C}$. $\rho_{-1}^{co} = \rho_{-1}^{c} = \rho_{-1}^{o} = \rho_{-1}(\lambda_i) = 0$, $1 \leq i \leq u$.

(ii) $\rho_j^{co} \leq \rho_{j+1}^{co}$, $\rho_j^{J}(\lambda_i) \leq \rho_{j+1}(\lambda_i)$, $\rho_j^{c} \leq \rho_{j+1}^{c}$ i $\rho_j^{o} \leq \rho_{j+1}^{o}$ per a $0 \leq j \leq n-1$, $1 \leq i \leq u$.

(iii) Si $0 < \rho_{j_1}^{co} < \ldots < \rho_{j_\tau}^{co}$, amb $j_1 = \min\{i \mid \rho_i^{co} > 0\}$, $j_k = \min\{l \mid \rho_l^{co} > \rho_{j_{k-1}}^{co}\}$ per a $2 \leq k \leq \tau$, llavors es verifica:

$$n = \sum_{0\leq k\leq\tau} (\rho_{j_k}^{co} - \rho_{j_{k-1}}^{co})(j_k+1) + \sum_{1\leq i\leq u}\sum_{0\leq k\leq n} (\rho_k^{J}(\lambda_i) - \rho_{k+1}^{J}(\lambda_i) + t) + \sum_{1\leq k\leq n} (\rho_k^{c} - \rho_{k-1}^{c} - \rho_{j_\tau}^{co}) + \sum_{1\leq k\leq n} (\rho_k^{o} - \rho_{k-1}^{o} - \rho_{j_\tau}^{co}).$$

$$m \geq \rho_{j_\tau}^{co} + \rho_0^{c}. \quad \text{i}$$

$$p \geq \rho_{j_\tau}^{co} + \rho_0^{o}.$$

DEMOSTRACIÓ. Donada una classe d'equivalència, **el** sistema complet d'invariants *R*(*A, B,C*) d'una terna qualsevol de la classe verifica les condicions (i), (ii) i (iii).

Recíprocament. Donat un tal conjunt d'escalars *R*, podem obtenir

$$(m_1+1,\ldots,m_t+1) = (j_1+2, \overset{\rho_0^{co}(A,B,C)-\rho_{-1}^{co}(A,B,C)}{\ldots}, j_1+2, \ldots, j_\tau+2, \overset{\rho_{j_\tau}^{co}(A,B,C)-\rho_{j_{\tau-1}}^{co}(A,B,C)}{\ldots}, j_\tau+2),$$

$(n_{i_1},\ldots,n_{i_{\alpha_i}})$ com la partició conjugada de $\{\rho_j^{J}(\lambda_i) - \rho_{j+1}^{c} + t\}_{0\leq j\leq n, 1\leq i\leq u}$,

$(k_1,\ldots,k_r)$ com la partició conjugada de $\{\rho_j^{c} - \rho_{j-1}^{c} - t\}_{0\leq j\leq n}$,

$(l_1,\ldots,l_s)$ com la partició conjugada de $\{\rho_j^{o} - \rho_{j-1}^{o} - t\}_{0\leq j\leq n}$,

Aleshores tenim una única terna en forma reduïda canònica els invariants de Kronecker de la qual són aquests escalars, i aquesta terna ens determina una classe d'equivalència. ◇