CAPÍTOL 2

Deformacions miniversals d'una terna de matrius

Introducció

En la secció §1 del capítol anterior hem considerat una relació d'equivalència en l'espai $\mathcal{M}_{nmp}$ de ternes de matrius. En la primera secció d'aquest capítol es veu aquesta relació d'equivalència com la induïda per l'acció d'un grup de Lie $\mathcal{G}$ que actua sobre la varietat diferenciable $\mathcal{M}_{nmp}$. Així, la classe d'equivalència d'una terna donada és igual a la seva òrbita per l'acció d'aquest grup. Això ens permet la utilització d'eines geomètriques.

A la secció segona s'adapta la definició general de deformacions versals i miniversals donada en la secció §2 del capítol 0 al nostre cas particular. A [**Ta 81**], A. Tannenbaum en el teorema V.1.2**,** p. 66, generalitza el lema 2.3 a [**Ar 71**] relatiu a l'acció de $Gl_n(\mathbb{C})$ sobre $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, al cas en que un grup de Lie actua sobre una varietat. Aquest resultat, aplicat al cas del grup de Lie $\mathcal{G}$ que actua sobre la varietat $\mathcal{M}_{nmp}$ permet obtenir, donat un producte hermític qualsevol a $\mathcal{M}_{nmp}$, per a tota terna de matrius, una deformació miniversal, que anomenarem *deformació miniversal ortogonal.* Aquesta deformació miniversal ortogonal, en el cas de matrius quadrades, va ser trobada per V. I. Arnold a [**Ar 71**].

En la secció tercera es fixa un producte escalar hermític a $\mathcal{M}_{nmp}$ i es determina de forma explícita la deformació miniversal ortogonal. Aquesta deformació ve donada per una varietat lineal, que té com a subespai director el conjunt de solucions d'un sistema lineal d'equacions. En el cas en que tinguem una terna en forma reduïda canònica, es troba la solució general d'aquest sistema, descomponent-lo en subsistències linealment independents.

En general, per a una terna de matrius qualsevol es dóna la relació entre la deformació miniversal ortogonal de la terna donada i la de la seva forma reduïda canònica, la qual cosa ens dóna, de fet, la deformació miniversal ortogonal per a una terna qualsevol.

Conseqüència d'aquest càlcul explícit és l'obtenció de la dimensió de la deformació miniversal, ja que aquesta és igual al nombre de paràmetres independents que apareixen en la solució del sistema anterior, és a dir, la suma del nombre de paràmetres que hi ha en la solució de cadascun dels subsistemes linealment independents en que aquest descompon, afegint-li el nombre de paràmetres de les matrius arbitràries. Així mateix, s'obté la dimensió de l'espai ortogonal a l'espai tangent a l'òrbita d'una terna per l'acció del grup de Lie $\mathcal{G}$ i la dimensió de l'estabilitzador de la terna per aquesta acció.

Finalment, en la secció §4 s'obté explícitament una altra deformació miniversal, que anomenarem *deformació miniversal minimal,* per a una terna de matrius en forma reduïda canònica, que té com a caracterísitica que els paràmetres apareixen només un sol cop. Es a dir, el subespai director admet una base formada per vectors de la base natural de l'espai de ternes de matrius.

El mètode utilitzat per a obtenir aquesta deformació miniversal minimal a partir de la deformació miniversal ortogonal, es pot aplicar a una terna de matrius qualsevol, i, en general, es poden donar diferents deformacions miniversals minimals. Aquesta deformació miniversal minimal per a ternes en forma reduïda canònica s'utilitza posteriorment en els Annexs A i B, així com en el capítol 4.

§1. L'acció de $\mathcal{G}$ sobre $\mathcal{M}_{nmp}$

Sigui $\mathcal{G} = Gl_n(\mathbb{C}) \times M_{m\times n}(\mathbb{C}) \times Mn_{n\times p}(\mathbb{C}) \times Gl_m(\mathbb{C}) \times Gl_p(\mathbb{C})$. $\mathcal{G}$ és un obert de la varietat diferenciable $\mathcal{M}_n\{\mathbb{C}) \times \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}_m(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$, i, per tant, $\mathcal{G}$ és una varietat diferenciable. Considerem a *Ç* l'estructura de grup que ve donada per l'operació

$$(P_1, J_1, K_1, V_1, W_1)\circ(P_2, J_2, K_2, V_2, W_2) = (P_1P_2, J_2P_1^{-1}+V_2J_1, P_1K_2+K_1W_2, V_2V_1, W_1W_2).$$

són diferenciables, i, per tant, $\mathcal{G}$ és un grup de Lie.

Llavors les operacions

$$\mathcal{G}\times\mathcal{G}\longrightarrow\mathcal{G}$$
$$((P_1,J_1,K_1,V_1,W_1),(P_2,J_2,K_2,V_2,W_2))\longrightarrow(P_1P_2,J_2P_1^{-1}+V_2J_1,P_1K_2+K_1W_2,V_2V_1,W_1W_2)$$

$$\mathcal{G}\longrightarrow\mathcal{G}$$
$$(P,J,K,V,W)\longrightarrow(P^{-1},-V^{-1}JP,-P^{-1}KW^{-1},V^{-1},W^{-1})$$

G és també una varietat algebraica, i com que aquestes dues aplicacions són també morfismes de varietats algebraiques, *G* és també un grup algebraic. Les definicions de varietat algebraica i morfisme entre varietats algebraiques es troben, entre molts altres texts, a [**Hum 75**].

G actua de forma diferenciable sobre $\mathcal{M}_{nmp}$ de la manera següent:

$$\alpha:\qquad \mathcal{G}\times\mathcal{M}_{nmp}\longrightarrow\mathcal{M}_{nmp}$$
$$((P,J,K,V,W),(A,B,C))\longrightarrow(PAP^{-1}+PBJ+KCP^{-1},PBV,WCP^{-1}).$$

Aquesta aplicació és també un morfisme entre varietats algebraiques.

Observació 1.1. L'òrbita de la terna *(A, B,C),* per aquesta acció *a,*

$$\mathcal{O}(A,B,C) = \{\alpha((P,J,K,V,W),(A,B,C)) \mid (P,J,K,V,W)\in\mathcal{G}\},$$

coincideix amb la classe d'equivalència de la terna *(A, B, C)* per la relació d'equivalència definida a la secció §1 del capítol 1, i que era, recordem, el resultat de fer una o més de les transformacions elementals següents:

i) $(A,B,C) \longrightarrow (PAP^{-1}, PB, CP^{-1})$,

ii) $(A,B,C) \longrightarrow (A+BJ, B, C)$,

iii) $(A,B,C) \longrightarrow (A+KC, B, C)$,

iv) $(A,B,C) \longrightarrow (A, BV, C)$,

v) $(A,B,C) \longrightarrow (A, B, WC)$,

Aquestes transformacions es corresponen amb l'acció dels elements $(P, 0,0, I_m, I_p)$, $(I_n,J,0,J_m,I_p)$, $(I_n,0,K,I_m J_p)$, $(/_n,0,0,V,I_p)$ i $(I_n,0,0,I_m,W)$ de $\mathcal{G}$, respectivament.

Al ser α un morfisme entre varietats algebraiques, es verifiquen les propietats següents.

Lema 1.2. ([**Hum 75**], p. 33). *Les òrbites són conjunts constructibles.*

Teorema 1.3. ([**Hum 75**], p. 60). (*Lema de l'òrbita tancada*). *Per a tota terna de matrius* (A,B,C), *la seva òrbita per l'acció a,* $\mathcal{O}(A,B,C)$, *és una subvarietat algebraica localment tancada de* $\mathcal{M}_{nmp}$, *i la seva frontera és reunió d'òrbites de dimensió més petita.*

A més, cal destacar que es verifica la següent propietat d'homogeneïtat al llarg de les òrbites.

Proposició 1.4. *Donades* (A_1,B_1,C_1) *i* (A_2,B_2,C_2) *pertanyents a la mateixa òrbita, existeix un difeomorfisme f de* $\mathcal{M}_{nmp}$ *en* $\mathcal{M}_{nmp}$ *que conserva les òrbites i tal que* $f(A_1,B_1,C_1) = (A_2,B_2,C_2)$.

DEMOSTRACIÓ. Si (A_1,B_1,C_1) i (A_2,B_2,C_2) pertanyen a una mateixa òrbita, aleshores existeix un element $(P,J,K,V,W) \in \mathcal{G}$ tal que $(A_2,B_2,C_2) = (PA_1P^{-1} + PB_1J +$

$KC_1P^{-1}, PB_1V, WC_1P^{-1})$. N'hi ha prou amb considerar l'aplicació

$$\begin{aligned} f : \mathcal{M}_{nmp} &\longrightarrow \mathcal{M}_{nmp} \\ (A, B, C) &\longrightarrow (PAP^{-1} + PBJ + KCP^{-1}, PBV, WCP^{-1}), \end{aligned}$$

ja que és evident que verifica les condicions de l'enunciat. ◇

Aquesta propietat es verifica en general en tota varietat diferenciable en al que actuï un grup de Lie.

§2. Deformacions versals de ternes de matrius

En aquesta secció es dóna la definició de deformació miniversal d'una terna de matrius, que és l'objecte d'estudi en aquest capítol, adaptant la definició general vista en el capítol 0, §2.

Definició 2.1. Una deformació de la terna (A,B,C) és una aplicació diferenciable

$$\begin{aligned} \varphi : U &\longrightarrow \mathcal{M}_{nmp} \\ \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_d) &\longrightarrow (A(\lambda), B(\lambda), C(\lambda)), \end{aligned}$$

amb U un entorn obert de l'origen a $\mathbb{C}^d$, tal que $\varphi(0) = (A, B, C)$.

Els λ_i s'anomenen paràmetres de la deformació i U es diu que és l'espai de paràmetres.

Definició 2.2. Una deformació $\varphi : U \to \mathcal{M}_{nmp}$ de la terna (A, B, C) es diu que és versal si per a tota altra deformació de la terna (A, B, C),

$$\begin{aligned} \psi : V &\longrightarrow \mathcal{M}_{nmp} \\ \mu = (\mu_1, \dots, \mu_m) &\longrightarrow (A(\mu), B(\mu), C(\mu)), \end{aligned}$$

amb V entorn obert de l'origen a $\mathbb{C}^m$ i $\psi(0) = (A,B,C)$, existeixen un obert $V' \subseteq V$ amb $0 \in V$, una aplicació diferenciable $\beta : V \to U$ amb $\beta(0) = 0$, i una deformació de

$I = (I_n, 0, 0, I_m, I_p) \in \mathcal{G}$ (l'element neutre de $\mathcal{G}$),

$$\theta : V' \longrightarrow \mathcal{G}$$

$$\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_m) \longrightarrow (P(\mu), J(\mu), K(\mu), V(\mu), W(\mu)),$$

amb $\theta(0) = I$, tals que

$$\psi(\mu) = \alpha(\theta(\mu), \varphi(\beta(\mu))) \quad \forall \mu \in V'.$$

Suposem a partir d'ara que la deformació φ és versal.

Recordem que la deformació φ és miniversal quan la dimensió de l'espai de paràmetres és la menor possible entre totes les deformacions versals de (A, B, C).

Com a cas particular del teorema 3.5 enunciat al capítol 0, tenim la següent

Proposició 2.3. *Una família diferenciable $\varphi : U \rightarrow \mathcal{M}_{nmp}$, on U és un entorn obert de l'origen de* C , *és una deformació versal de $\varphi(0) = (A,B,C)$, si, i només si, és transversal a l'òrbita $\mathcal{O}(A,B,C)$ en (A,B,C).*

De forma immediata es dedueixen d'aquí els següents corol·laris.

Corol·lari 2.4. *Una família diferenciable $\varphi : U \rightarrow \mathcal{M}_{nmp}$, on U és un entorn obert de l'origen a $\mathbb{C}^d$, és una deformació miniversal de $\varphi(0) = (A,B,C)$, si, i només si, és minitransversal a l'òrbita $\mathcal{O}(A,B,C)$ en (A,B,C).*

DEMOSTRACIÓ. Es evident per les definicions, $\diamond$

Corol·lari 2.5. *Considerem a $\mathcal{M}_{nmp}$ un producte escalar hermític qualsevol. Aleshores, per a tota terna de matrius $(A,B,C) \in \mathcal{M}_{nmp}$, si considerem una base $(u_1, \ldots ,u_d)$ de $T_{(A,B,C)}\mathcal{O}(A,B,C)^{\perp}$, l'aplicació*

$$\varphi : U \longrightarrow \mathcal{M}_{nmp}$$

$$(\lambda_1, \ldots, \lambda_d) \longrightarrow (A, B, C) + \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_d u_d$$

amb U entorn de l'origen a $\mathbb{C}^d$, *és una deformació miniversal de la terna* (A, B,C).

DEMOSTRACIÓ. Òbviament, $\mathcal{M}_{nmp} = T_{(A,B,C)}\,\mathcal{O}(A,B,C) \oplus T_{(A,B,C)}\,\mathcal{O}(A,B,\mathrm{C})^{\perp}$. ◇

Definició 2.6. A una deformació miniversal de la terna (A, B, C) com en el corol·lari 2.5 l'anomenarem *deformació miniversal ortogonal* de la terna (A,B,C).

§3. Càlcul explícit d'una deformació miniversal ortogonal

Sigui (A, B, C) una terna de matrius.

Podem caracteritzar $\mathrm{T}_{(A,B,C)}\,\mathcal{O}(A,B,C)^{\perp}$ de la forma següent:

Proposició 3.1. *Donada una terna de matrius* $(A,B,C) \in \mathcal{M}_{nmp}$ *l'espai tangent a l'òrbita* $\mathcal{O}(A,B,C)$, $T_{(A,B,C)}\,\mathcal{O}(A,B,C)$ *en el punt* (A,B,C) *és el conjunt de ternes:*

$$\{(AP - PA + BJ + KC,\ BV + PB,\ -CP + WC) \mid$$

$$P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), J \in \mathcal{M}m{\times}n(\mathbb{C}), K \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{C}), V \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C}), W \in \mathcal{M}_P(\mathbb{C})\}.$$

DEMOSTRACIÓ. Considerem l'aplicació definida a $\mathcal{G}$ i induïda per α,

$$\alpha_{(A,B,C)} : \mathcal{G} \to \mathcal{M}_{\boldsymbol{nmp}}$$
$$(P, J, K, V, W) \to (PAP^{-1} + PBJ + KCP^{-1}, PBV, WCP^{-1}).$$

Llavors, l'espai tangent a $\mathcal{O}(A, B,C)$ en (A,B,C) és la imatge de la diferencial de $\alpha_{(A,B,C)}$ en l'element unitat $I = (I_n,0,0, I_m, I_p)$ de $\mathcal{G}$,

$$T_{\{A,B,C)}\,\mathcal{O}(A,B,C) = d(\alpha_{\{A,B,C)})_I(T_I\mathcal{G}),$$

on $\mathrm{T}_I\mathcal{G}$ indica l'espai tangent a $\mathcal{G}$ en I. Òbviament,

$$\mathrm{T}_I\mathcal{G} = \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}_m(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}_p(\mathbb{C}).$$

N'hi ha prou amb veure que:

$d\{\alpha_{(A,B,C)})_I(P, J, K, V, W) = (AP - PA + BK + JC, BV + PB, -CP + WC)$,

on $(P, J, K, V, W) \in T_I\mathcal{G}$. Per a veure-ho, calculem $\alpha_{(A,B,C)}(I_n + \varepsilon P, \varepsilon J, \varepsilon K, I_m + \varepsilon V, I_p + \varepsilon W)$, que és igual a

$$((I_n+\varepsilon P)A(I_n+\varepsilon P)^{-1}+(I_n+\varepsilon P)(I_m+\varepsilon V)+(I_p+\varepsilon W)C(I_n+\varepsilon P)^{-1},(I_n+\varepsilon P)B\varepsilon J,\varepsilon KC(I_n+\varepsilon P)^{-1}))$$

Tenint en compte que $(I_n + \varepsilon P)^{-1} = I - \varepsilon P + \varepsilon^2 P^2 + \dots$, l'aproximació lineal és:

$$(A, B, C) + \varepsilon(AP - PA + BJ + KC, BV + PB, -CP + WC).$$

Al ser $\alpha_{(A,B,C)}$ diferenciable, està amb això demostrada la proposició, ◇

Considerarem a $\mathcal{M}_{nrnp}$ el producte escalar hermític següent:

Definició 3.2. Donades dues ternes (A, B, C), $(A',B',C') \in \mathcal{M}_{nmp}$ qualssevol, definim el producte escalar d'aquestes dues ternes com:

$$< (A,B,C), (A',B',C') >= \operatorname{tr}(AA'^*) + \operatorname{tr}(BB'^*) + \operatorname{tr}(CC'^*).$$

Tenim aleshores la següent descripció de l'espai $T_{(A,B,C)}(A, B, C)^\perp$:

Lema 3.3. *Suposem que tenim a $\mathcal{M}_{nmp}$ el producte escalar hermític definit abans. Aleshores:*

$$(A', B', C') \in T_{(A,B,C)}\mathcal{O}(A,B,C)^\perp \iff \left.\begin{aligned} AA'^* - A'^*A + BB'^* - C'^*C = 0 \\ A'^*B = 0 \\ B'^*B = 0 \\ CA'^* = 0 \\ CC'^* = 0 \end{aligned}\right\}$$

Demostració. Tenim que $(A', B', C') \in T_{(A,B,C)}\mathcal{O}(A,B,C)^{\perp}$ si i només si

$$\begin{aligned}
0 &=< ((AP - PA + BJ + KC, BV + PB, -CP + WC), (A', B', C') >= \\
&= \operatorname{tr}(PAA'^* - APA'^* + BJA'^* + KCA'^*) + \operatorname{tr}(BVB'^* + PBB'^*) + \\
&\qquad + \operatorname{tr}(-CPC'^* + WCC'^*) = \\
&= \operatorname{tr}(AA'^*P - A'^*AP) + \operatorname{tr}(A'^*BJ) + \operatorname{tr}(CA'^*J) + \operatorname{tr}(B'^*BV) + \operatorname{tr}(BB'^*P) + \\
&\qquad + \operatorname{tr}(-C'^*CP) + \operatorname{tr}(CC'^*W) = \\
&= \operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} [A,A'^*]+BB'^*-C'^*C & A'^*B & 0 \\ 0 & B'^*B & 0 \\ CA'^* & 0 & CC'^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P & 0 & J \\ K & V & 0 \\ 0 & 0 & W \end{pmatrix}\right) \quad \text{per a } P, J, K, V, W \text{ qualssevol.}
\end{aligned}$$

Com que les traces de les matrius

$$\begin{pmatrix} [A,A'^*]+BB'^*-C'^*C & A'^*B & 0 \\ 0 & B'^*B & 0 \\ CA'^* & 0 & CC'^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P & 0 & J \\ K & V & 0 \\ 0 & 0 & W \end{pmatrix}, \text{ i } \begin{pmatrix} [A,A'^*]+BB'^*-C'^*C & A'^*B & 0 \\ 0 & B'^*B & 0 \\ CA'^* & 0 & CC'^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P & X & J \\ K & V & Y \\ Z & T & W \end{pmatrix}$$

coincideixen, llavors, tenim que per a tota matriu $\begin{pmatrix} P & X & J \\ K & V & Y \\ Z & T & W \end{pmatrix}$ és

$$\operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} [A,A'^*]+BB'^*-C'^*C & A'^*B & 0 \\ 0 & B'^*B & 0 \\ CA'^* & 0 & CC'^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P & X & J \\ K & V & Y \\ Z & T & W \end{pmatrix}\right) = 0,$$

i, per tant,

$$\begin{pmatrix} [A,A'^*]+BB'^*-C'^*C & A'^*B & 0 \\ 0 & B'^*B & 0 \\ CA'^* & 0 & CC'^* \end{pmatrix} = 0,$$

la qual cosa és equivalent a

$$\left.\begin{aligned} AA'^* - A'^*A + BB'^* - C'^*C = 0 \\ A'^*B = 0 \\ B'^*B = 0 \\ CA'^* = 0 \\ CC'^* = 0 \end{aligned}\right\},$$

com volíem provar. $\diamond$

Podem donar ara ja explícitament una deformació miniversal d'una terna de matrius.

Teorema 3.4. *Sigui* $(A,B,C) \in \mathcal{M}_{nmp}$. *Sigui F el subespai vectorial de* $\mathcal{M}_{nmp}$ *format per les matrius* (X,Y,Z) *tals que* $(X^*,Y^*,Z^*) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{C})$ *són solucions del sistema*

$$\left.\begin{aligned} AX - XA + BY - ZC &= 0 \\ XB &= 0 \\ YB &= 0 \\ CX &= 0 \\ CZ &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Sigui («i,... ,Ud) *una base de F. Aleshores l'aplicació*

$$\varphi : U \longrightarrow \mathcal{M}_{nmp}$$

$$(\lambda_1, \ldots, \lambda_d) \longrightarrow (A,B,C) + \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_d u_d$$

amb U un entorn obert de l'origen a $\mathbb{C}^d$ *és una deformació miniversal de la terna* (A, B, C).

DEMOSTRACIÓ. Es immmediat, a partir del lema anterior, i del corol·lari 2.5. $\diamond$

Segons la definició 2.6 de la secció §2, aquesta és la que hem anomenat deformació miniversal ortogonal.

Donada una terna (A, B, C) qualsevol, podem deduir la deformació miniversal ortogonal d'aquesta terna a partir de la de la seva forma reduïda canònica, (A_c, B_c, C_c), segons es veu en la proposició següent.

Proposició 3.5. *Sigui* $(A,B,C) \in \mathcal{M}_{nmp}$ *una terna de matrius, amb forma reduïda canònica* (A_c, B_c, C_c). *Sigui* $(P,V,W,J,K) \in \mathcal{G}$, *i siguin* (X,Y,Z), $(X_0, Y_0, Z_0) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{C})$ *tals que:*

(a) $\alpha((P,J,K,V,W),(A,B,C)) = (A_c, B_c, C_c)$, *i*

(b) $(X,Y,Z) = (P^{-1}X_0P, JX_0P + VY_0P, P^{-1}X_0K + P^{-1}Z_0W)$.

Aleshores

$$(X_0^*, Y_0^*, Z_0^*) \in T_{(A_c,B_c,C_c)}\mathcal{O}(A_c, B_c, C_c)^{\perp} \iff (X^*, Y^*, Z^*) \in T_{(A,B,C)}\mathcal{O}(A,B,C)^{\perp}.$$

DEMOSTRACIÓ. Tenim, a partir de (a),

$$(A_c, B_c, C_c) = (PAP^{-1} + PBJ + KCP^{-1}, PBV, WCP^{-1}).$$

Sigui $(X_0^*, Y_0^*, Z_0^*) \in T_{(A_c,B_c,C_c)}\mathcal{O}(A_c, B_c, C_c)^{\perp}$. Pel lema 3.3,

$$\left.\begin{aligned} A_cX_0 - X_0A_c + B_cY_0 - Z_0C_c &= 0 \\ X_0B_c &= 0 \\ Y_0B_c &= 0 \\ C_cX_0 &= 0 \\ C_cZ_0 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Com que per (b) tenim

$$\begin{aligned} X_0 &= PXP^{-1}, \\ Y_0 &= V^{-1}YP^{-1} - V^{-1}JPXP^{-1}, \\ Z_0 &= PZW^{-1} - PXP^{-1}KW^{-1}, \end{aligned}$$

aleshores

$$\begin{aligned} A_cX_0 &= (PAP^{-1} + PBJ + KCP^{-1})X_0 = PAP^{-1}X_0 + PBJX_0 + KCP^{-1}X_0 = \\ &= PAXP^{-1} + PBJPXP^{-1} = P(AX + BJPX)P^{-1}, \\ X_0A_c &= X_0(PAP^{-1} + PBJ + KCP^{-1}) = PXAP^{-1} + PXP^{-1}KCP^{-1} = \\ &= P(XA + XP^{-1}KC)P^{-1}, \\ B_cY_0 &= PBV(V^{-1}YP^{-1} - V^{-1}JPXP^{-1}) = PBYP^{-1} - PBJPXP^{-1} = \\ &= PBYP^{-1} - PBJPXP^{-1} = P(BY - BJPX)P^{-1}, \\ Z_0C_c &= (PZW^{-1} - PXP^{-1}KW^{-1})(WCP^{-1}) = PZCP^{-1} - PXP^{-1}KCP^{-1} = \\ &= PZCP^{-1} - PXP^{-1}KCP^{-1} = P(ZC - XP^{-1}KC)P^{-1}, \end{aligned}$$

i, per tant,

$$
\begin{aligned}
&X_0 B_c = P(XB)P^{-1} = 0 \quad \Rightarrow XB = 0,\\
&Y_0 B_c = (V^{-1}YP^{-1} - V^{-1}JPXP^{-1})PBV = V^{-1}YBV - V^{-1}JPXBV =\\
&\qquad\qquad = V^{-1}(YB)V = 0 \quad \Rightarrow YB = 0,\\
&C_c X_0 = W(CX)P^{-1} = 0 \quad \Rightarrow CX = 0,\\
&C_c Z_0 = WCP^{-1}(PZW^{-1} - PXP^{-1}KW^{-1}) = WCZW^{-1} - WCXP^{-1}KW^{-1} =\\
&\qquad\qquad = W(CZ)W^{-1} = 0 \quad \Rightarrow CZ = 0,\\
&A_c X_0 - X_0 A_c + B_c Y_0 - Z_0 C_c = P(AX - XA + BY - ZC)P^{-1} =\\
&\qquad\qquad = 0 \quad \Rightarrow AX - XA + BY - ZC = 0.
\end{aligned}
$$

Recíprocament. Sigui $(X^*, Y^*, Z^*) \in T_{(A,B,C)}\mathcal{O}(A,B,C)^{\perp}$. Pel lema 3.3,

$$
\left.\begin{aligned}
AX - XA + BY - ZC &= 0\\
XB &= 0\\
YB &= 0\\
CX &= 0\\
CZ &= 0
\end{aligned}\right\}
$$

Com que

$$
\begin{aligned}
A &= P^{-1}A_cP - P^{-1}B_cV^{-1}JP - P^{-1}KW^{-1}C_cP,\\
B &= P^{-1}B_cV^{-1},\\
C &= W^{-1}C_cP,\\
X &= P^{-1}X_0P,\\
Y &= JX_cP + VY_0P,\\
Z &= P^{-1}X_0K + P^{-1}Z_0W,
\end{aligned}
$$

tenim que

$$\begin{aligned}
AX &= (P^{-1}A_cP - P^{-1}B_cV^{-1}JP - P^{-1}KW^{-1}C_cP)P^{-1}X_0P = \\
&= P^{-1}A_cX_0P - P^{-1}B_cV^{-1}JX_0P = P^{-1}(A_cX_0)P \\
XA &= P^{-1}X_0P(P^{-1}A_cP - P^{-1}B_cV^{-1}JP - P^{-1}KW^{-1}C_cP) = \\
&= P^{-1}X_0A_cP - P^{-1}X_0KJW^{-1}C_cP = P^{-1}(X_0A_c - X_0KW^{-1}C_c)P, \\
BY &= P^{-1}B_cV^{-1}(JX_0P + VY_0P) = P^{-1}B_cV^{-1}JX_0P = \\
&= P^{-1}(B_cY_0)P \\
ZC &= (P^{-1}X_0K + P^{-1}Z_0W)W^{-1}C_cP = P^{-1}X_0KW^{-1}C_cP + P^{-1}(Z_0C_c)P = \\
&= P^{-1}(X_0KW^{-1}C_c - Z_cC_c)P
\end{aligned}$$

Per tant,

$$\begin{aligned}
&XB = P^{-1}(X_0B_c)V^{-1} = 0 \Rightarrow X_0B_c = 0, \\
&CX = W^{-1}(C_cX_0)P = 0 \Rightarrow C_cX_0 = 0, \\
&YB = (JX_0P + VY_0P)P^{-1}B_cV^{-1} = VY_0B_cV^{-1} = V(Y_0B_c)V^{-1} = 0 \Rightarrow Y_0B_c = 0, \\
&CZ = W^{-1}C_cP(P^{-1}X_0K + P^{-1}Z_0W) = W^{-1}(C_cZ_0)W = 0 \Rightarrow C_cZ_0 = 0, \\
&AX - XA + BY - ZC = P^{-1}(A_cX_0 - X_0A_c + B_cY_0 - Z_0C_c)P = 0.
\end{aligned}$$

Amb això està provada la proposició, $\diamond$

Cal notar que, en general, sempre que es té l'acció a d'un grup de Lie $\mathcal{G}$ sobre una varietat diferenciable X, si x_1 i x_2 són dos elements de X tals que $\alpha(g, x_1) = x_2$, aleshores existeix un difeomorfisme local f de X en X que conserva les òrbites i tal que $f(x_1) = x_2$ (de fet, n'hi ha prou amb considerar l'aplicació que ve donada per $f(x) = \alpha(g,x)$) i que indueix una aplicació entre els espais tangents $T_{x1}\mathcal{O}(x_1)$ i $T_{x2}\mathcal{O}(x_2)$. Evidentment, però, no es pot donar de forma explícita la relació entre els elements pertanyents als subespais $T_{x1}\mathcal{O}(x_1)^{\perp}$- i $T_{x2}\mathcal{O}(x_2)^{\perp}$. si no es té també de forma explícita el conjunt d'elements que pertanyen a aquests subespais.

Observació 3.6. Com a conseqüència d'aquesta proposició, tenim que per a trobar la deformació miniversal ortogonal d'una terna *(A, B, C)* qualsevol, n'hi ha prou amb conèixer la deformació miniversal ortogonal de (A_c, B_c, C_c), forma reduïda canònica de la terna *(A, B, C)*, és a dir, amb resoldre el sistema

$$\left.\begin{aligned} A_cX - XA_c + B_cY - ZC_c &= 0 \\ XB_c &= 0 \\ YB_c &= 0 \\ C_cX &= 0 \\ C_cZ &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (S)$$

Considerem, doncs, una terna (A_c, B_c, C_c) en forma reduïda canònica.

Partim les matrius X, Y, Z del sistema anterior en blocs, segons els blocs de les matrius A_c, B_c i C_c,

$$A_c = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_4 \end{pmatrix}, \quad B_c = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_c = \begin{pmatrix} 0 & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 & 0 \end{pmatrix},$$

obtenim

$$X = \begin{pmatrix} X_1^1 & X_2^1 & X_3^1 & X_4^1 \\ X_1^2 & X_2^2 & X_3^2 & X_4^2 \\ X_1^3 & X_2^3 & X_3^3 & X_4^3 \\ X_1^4 & X_2^4 & X_3^4 & X_4^4 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} Y_1^1 & Y_2^1 & Y_3^1 & Y_4^1 \\ Y_1^2 & Y_2^2 & Y_3^2 & Y_4^2 \\ Y_1^3 & Y_2^3 & Y_3^3 & Y_4^3 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} Z_1^1 & Z_2^1 & Z_3^1 \\ Z_1^2 & Z_2^2 & Z_3^2 \\ Z_1^3 & Z_2^3 & Z_3^3 \\ Z_1^4 & Z_2^4 & Z_3^4 \end{pmatrix}$$

Aleshores el sistema (S) descompon en els següents subsistemes:

$$\left.\begin{aligned} A_1X_1^1 - X_1^1A_1 + B_1Y_1^1 &= 0 \\ X_1^1B_1 &= 0 \\ Y_1^1B_1 &= 0 \end{aligned}\right\} (1), \qquad \left.\begin{aligned} A_1X_3^1 - X_3^1A_3 + B_1Y_3^1 - Z_3^1C_2 &= 0 \\ X_3^1B_2 &= 0 \\ Y_3^1B_2 &= 0 \end{aligned}\right\} (2),$$

$$A_1X_2^1 - X_2^1A_2 + B_1Y_2^1 - Z_1^1C_1 = 0 \ (3), \ \ A_1X_4^1 - X_4^1A_4 + B_1Y_4^1 = 0 \ (4),$$

$$\left.\begin{aligned} A_2X_1^2 - X_1^2A_1 &= 0 \\ X_1^2B_1 &= 0 \\ C_1X_1^2 &= 0 \end{aligned}\right\} (5), \qquad \left.\begin{aligned} A_2X_2^2 - X_2^2A_2 - Z_1^2C_1 &= 0 \\ C_1Z_1^2 &= 0 \\ C_1X_2^2 &= 0 \end{aligned}\right\} (6),$$

$$\left.\begin{aligned} A_2X_3^2 - X_3^2A_3 - Z_3^2C_2 &= 0 \\ X_3^2B_2 &= 0 \\ C_1Z_3^2 &= 0 \\ C_1X_3^2 &= 0 \end{aligned}\right\} (7), \qquad \left.\begin{aligned} A_2X_4^2 - X_4^2A_4 &= 0 \\ C_1X_4^2 &= 0 \end{aligned}\right\} (8),$$

$$\left.\begin{aligned} A_3X_1^3 - X_1^3A_1 + B_2Y_1^3 &= 0 \\ X_1^3B_1 &= 0 \\ Y_1^3B_1 &= 0 \\ C_2X_1^3 &= 0 \end{aligned}\right\} (9), \qquad \left.\begin{aligned} A_3X_2^3 - X_2^3A_2 + B_2Y_2^3 - Z_1^3C_1 &= 0 \\ C_2Z_1^3 &= 0 \\ C_2X_2^3 &= 0 \end{aligned}\right\} (10),$$

$$\left.\begin{aligned} A_3X_3^3 - X_3^3A_3 + B_2Y_3^3 - Z_3^3C_2 &= 0 \\ C_2X_3^3 &= 0 \\ Y_3^3B_2 &= 0 \\ C_2Z_3^3 &= 0 \\ X_3^3B_2 &= 0 \end{aligned}\right\} (11), \qquad \left.\begin{aligned} A_3X_4^3 - X_4^3A_4 + B_2Y_4^3 &= 0 \\ C_2X_4^3 &= 0 \end{aligned}\right\} (12),$$

$$\left.\begin{aligned} A_4X_1^4 - X_1^4A_1 &= 0 \\ X_1^4B_1 &= 0 \end{aligned}\right\} (13), \quad A_4X_2^4 - X_2^4A_2 - Z_1^4C_1 = 0 \ (14),$$

$$\left.\begin{aligned} A_4X_3^4 - X_3^4A_3 - Z_3^4C_2 &= 0 \\ X_3^4B_2 &= 0 \end{aligned}\right\} (15), \quad A_4X_4^4 - X_4^4A_4 = 0 \ (16),$$

$$Y_1^2B_1 = 0 \ (17), \qquad Y_3^2B_2 = 0 \ (18),$$

$$C_1 Z_2^2 = 0 (19), \qquad C_2 Z_2^2 = 0 \ (20).$$

Remarquem que $Y_2^2, Y_4^2, Z_2^1, Z_2^4$ són qualssevol.

Passem ara a donar la solució dels diferents subsistemes, que és el que ens dóna explícitament la deformació miniversal ortogonal d'una terna.

Subsistema 1

Partim la matriu X_1^1 en blocs, d'acord amb els blocs de les matrius A_1 i B_1,

$$A_1 = \begin{pmatrix} N_1^1 & & \\ & \ddots & \\ & & N_r^1 \end{pmatrix}, \qquad B_1 = \begin{pmatrix} B_1^1 & & \\ & \ddots & \\ & & B_r^1 \end{pmatrix}.$$

Obtenim així $r \times r$ sistemes linealment independents, tots ells de la forma

$$\left.\begin{aligned} N_i^1 X - X N_j^1 + B_i^1 Y = 0 \\ X B_j^1 = 0 \\ Y B_j^1 = 0 \end{aligned}\right\} \quad (1_{ij})$$

on $N_i^1 \in \mathcal{M}_{k_i}(\mathbb{C})$, $N_j^1 \in \mathcal{M}_{k_j}(\mathbb{C})$, $B_i^1 \in \mathcal{M}_{k_i \times 1}(\mathbb{C})$ i $B_j^1 \in \mathcal{M}_{k_j \times 1}(\mathbb{C})$.

Linealitzant el sistema (1_{ij}) amb el producte de Kronecker i l'operador vectorialitzador, definits en la secció §4 del Capítol 0, tenim que X, Y són solucions del sistema (1_{ij}) si i només si $\begin{pmatrix} vec(X) \\ vec(Y) \end{pmatrix}$ és solució del sistema

$$\begin{pmatrix} I_{k_j} \otimes N_i^1 - {N_j^1}^t \otimes I_{k_i} & I_{k_j} \otimes B_i^1 \\ {B_j^1}^t \otimes I_{k_i} & 0 \\ 0 & {B_j^1}^t \otimes I_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} vec(X) \\ vec(Y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Per a simplificar les notacions diem $M(1_{ij}) \in \mathcal{M}_{(k_i k_j + k_i + 1) \times (k_i k_j + k_i)}(\mathbb{C})$ a la matriu del sistema anterior,

$$\mathbf{M}(1_{ij}) = \begin{pmatrix} I_{k_j} \otimes N_i^1 - {N_j^1}^t \otimes I_{k_i} & I_{k_j} \otimes B_i^1 \\ {B_j^1}^t \otimes I_{k_i} & 0 \\ 0 & {B_j^1}^t \otimes I_1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} N_i^1 & -I_{k_i} & & & & & B_i^1 & & & & \\ & N_i^1 & \ddots & & & & & B_i^1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & & & & \ddots & & \\ & & & N_i^1 & -I_{k_i} & & & & & B_i^1 & \\ & & & & N_i^1 & & & & & & B_i^1 \\ & & & & & I_1 & & & & & \\ I_{k_i} & & & & & & & & & & \end{pmatrix}$$

Aleshores la dimensió de l'espai $\mathbf{S}(1_{ij})$ de solucions del sistema (1_{ij}) és

$$\dim\mathbf{S}(1_{ij}) = k_ik_j + k_j - \operatorname{rang}\mathbf{M}(1_{ij}).$$

Com que fent transformacions elementals de blocs fila i blocs columna podem transformar la matriu $\mathbf{M}(1_{ij})$ en la forma

$$\mathbf{M}(1_{ij}) \sim \begin{pmatrix} 0 & I_{k_i} & & & & & & & & & \\ & 0 & I_{k_i} & & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & & & \\ & & & 0 & I_{k_i} & & & & & & \\ & & & & & & {N_i^1}^{k_j-2} B_i^1 & & \dots & N_i^1 B_i^1 & B_i \\ & & & & & I_1 & & & & & \\ I_{k_i} & & & & & & & & & & \end{pmatrix}$$

veiem que

$\operatorname{rang}\mathbf{M}(1_{,i}) = k_ik_j + k_j + rang\ ({N_i^1}^{K_j-2}\ Bi \ldots \quad N_i^1 B_i^1 \ \ B_i^1) \quad Bj) = k_ik_j + 1 + \min\{k_i, k_j - 1\}$,

i

$$\dim\mathbf{S}(1_{ij}) = k_j - 1 - \min\{k_i, k_j - 1\} = \max\ \{0, k_j - k_i - 1\}.$$

En el cas $k_j < k_i + 1$, l'única solució d'aquest sistema és la trivial.

En el cas $k_j > k_i + 1$, és fàcil comprovar, per càlcul directe, que les matrius X, Y tals que $\left(\frac{Y}{X}\right) \in \mathcal{M}_{(ki+1)\times k}(\mathbb{C})$ són matrius Toeplitz banda trapezoidals inferiors amb la primera entrada no nul.la en la posició (1,2) i l'última en la posició $(1, k_j - k_i)$, és a dir,

$$\left(\frac{Y}{X}\right) = \left(\begin{array}{cccccccccccc} 0 & x_1 & x_2 & \dots & \dots & x_{k_j-k_i-1} & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & x_1 & x_2 & \dots & \dots & x_{k_j-k_i-1} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & x_1 & x_2 & \dots & \dots & x_{k_j-k_i-1} & 0 & \dots & 0 \end{array}\right)$$

són solucions del subsistema, tenint en compte que

$$N_i^1 X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x_1 & \cdots & \cdots & \cdots & x_{k_j-k_i-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \ddots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & x_1 & \cdots & \cdots & \cdots & x_{k_j-k_i-1} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$XN_j^1 = \begin{pmatrix} 0 & x_1 & \cdots & \cdots & \cdots & x_{k_j-k_i-1} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & x_1 & \cdots & \cdots & \cdots & x_{k_j-k_i-1} & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_i^1 Y = \begin{pmatrix} 0 & x_1 & \cdots & x_{k_j-k_i-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad XB_j^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad YB_j^1 = (0).$$

Es evident que tots els paràmetres estan en direccions diferents, i el nombre de paràmetres és igual a la dimensió de l'espai de solucions. Per tant, aquestes matrius generen tot l'espai de solucions del sistema (1_{ij}). Concloem, doncs, que el nombre de paràmetres en la solució del sistema (1) és

$$\sum_{1\leq i,j\leq r} \max\{0, k_j - k_i - 1\}.$$

Observació 3.7. En particular, si els divisors elementals de columnes de la terna (A_c, B_c, C_c) no difereixen en més d'una unitat, tenim que el subsistema (1) té només la solució trivial.

Subsistema 2

Partim les matrius X_3^1, Y_3^1 i Z_3^1 en blocs, segons els blocs de les matrius A_1, A_3, B_1, B_2 i C_2,

$$A_1 = \begin{pmatrix} N_1^1 & & \\ & \ddots & \\ & & N_r^1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} N_1^3 & & \\ & \ddots & \\ & & N_t^3 \end{pmatrix},$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} B_1^1 & & \\ & \ddots & \\ & & B_r^1 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} B_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & B_t^2 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} C_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & C_t^2 \end{pmatrix}.$$

Obtenim així $r \times t$ sistemes linealment independents de la forma

$$\left.\begin{aligned} N_i^1 X - X N_j^2 + B_i^1 Y - Z C_j^2 &= 0 \\ X B_j^2 &= 0 \\ Y B_j^2 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (2_{ij})$$

on $N_i^1 \in \mathcal{M}_{k_i}(\mathbb{C})$, $N_j^3 \in \mathcal{M}_{m_j}(\mathbb{C})$, $B_i^1 \in \mathcal{M}_{k_i \times 1}(\mathbb{C})$ i $B_j^2 \in \mathcal{M}_{1 \times m_j}(\mathbb{C})$.

Si linealitzem el sistema (2_{ij}com en el cas anterior, tenim que X, Y i Z són solucions del sistema (2_{ij})si i només si $\begin{pmatrix} vec(X) \\ vec(Y) \\ vec(Z) \end{pmatrix}$ és solució del sistema

$$\begin{pmatrix} I_{m_j} \otimes N_i^1 - {N_j^3}^t \otimes I_{k_i} & I_{m_j} \otimes B_i^1 & {C_j^2}^t \otimes I_{k_i} \\ {B_j^2}^t \otimes I_{k_i} & 0 & 0 \\ 0 & {B_j^2}^t \otimes I_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} vec(X) \\ vec(Y) \\ vec(Z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Per a simplificar notacions, diem $\mathbf{M}(2_{ij}) \in \mathcal{M}_{(k_i m_j + k_i + 1) \times (k_i m_j + m_i + 1)}(\mathbb{C})$ a la matriu anterior,

$$\mathbf{M}(2_{ij}) = \begin{pmatrix} I_{m_j} \otimes N_i^1 - {N_j^3}^t \otimes I_{k_i} & I_{m_j} \otimes B_i^1 & {C_j^2}^t \otimes I_{k_i} \\ {B_j^2}^t \otimes I_{k_i} & 0 & 0 \\ 0 & {B_j^2}^t \otimes I_1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} N_i^1 & & & & B_i^1 & & & & I_{k_i} \\ -I_{k_i} & N_i^1 & & & & B_i^1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & & & \ddots & & \\ & & -I_{k_i} & N_i^1 & & & & B_i^1 & \\ I_{k_i} & & & & & & & & \\ & & & & I_1 & & & & \end{pmatrix}.$$

La dimensió de l'espai $\mathbf{S}(2_{ij})$ de solucions del sistema (2_{ij}) és

$$\dim \mathbf{S}(2_{ij}) = k_i m_j + m_j + k_i - \operatorname{rang} \mathbf{M}(2_{ij}).$$

Com que fent transformacions elementals de blocs fila i blocs columna podem transformar la matriu $\mathbf{M}(2_{ij})$ en la forma

$$\mathbf{M}(2_{ij}) \sim \begin{pmatrix} & & & & & & & & & I_{k_i} \\ & & & & & {N_i^1}^{m_j-1} B_i^2 & {N_i^1}^{m_j-2} B_i^2 & \dots & N_i^1 B_i^2 & \\ & I_{k_i} & & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & & \\ & & & I_{k_i} & & & & & & \\ I_{k_i} & & & & & & & & & \\ & & & & I_1 & & & & & \end{pmatrix},$$

tenim que

$$\operatorname{rang} \mathbf{M}(2_{ij}) = k_i m_j + k_i + 1,$$

i

$$\dim \mathbf{S}(2_{ij}) = m_j - 1.$$

Es fàcil veure, per comprovació directa, que les matrius X, Y i Z tals que la matriu $\begin{pmatrix} 0 & | & Y \\ - & \cdot & - \\ Z & | & X \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{(k_i+1)\times(m_j+1)}(\mathbb{C})$ és una matriu de Hankel banda trapezoidal superior amb l'última columna 0, i la primera entrada diagonal no nul·la en la posició (1,2), és a dir,

$$
\begin{pmatrix} 0 & | & Y \\ - & \cdot & - \\ Z & | & X \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|cccccc}
0 & x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_{m_j-1} & 0 \\
\hline
x_1 & x_2 & \cdots & \cdots & x_{m_j-1} & 0 & 0 \\
x_2 & \iddots & \iddots & \iddots & \iddots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \iddots & \iddots & \iddots & \iddots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \iddots & \iddots & \iddots & \iddots & \vdots & \vdots \\
x_{m_j-1} & \iddots & \iddots & \iddots & \iddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & & & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0
\end{array}\right) \quad \text{si } k_i \geq m_j, \text{ i}
$$

$$
\begin{pmatrix} 0 & | & Y \\ - & \cdot & - \\ Z & | & X \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|ccccccc}
0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_{m_j-k_i-1} & \cdots & x_{m_j-1} & 0 \\
\hline
x_1 & x_2 & \iddots & x_{m_j-k_i-1} & \iddots & \iddots & 0 & 0 \\
x_2 & \iddots & \iddots & \iddots & \iddots & \iddots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \iddots & \iddots & \iddots & \iddots & \iddots & \vdots & \vdots \\
x_{m_j-k_i-1} & \cdots & x_{m_j-1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0
\end{array}\right)
$$

si $k_i < m_j$, són solucions d'aquest subsistema, tenint en compte que, en el cas $k_j \geq m_j$,

$$
N_i^1 X = \begin{pmatrix}
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
x_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
x_{m_j-2} & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & \vdots & & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0
\end{pmatrix}, \quad
X N_j^3 = \begin{pmatrix}
0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_{m_j-1} \\
0 & x_2 & \iddots & \iddots & 0 \\
\vdots & \vdots & \iddots & \iddots & \vdots \\
0 & x_{m_j-1} & \iddots & & \vdots \\
0 & 0 & & & \vdots \\
\vdots & \vdots & & & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & \cdots & 0
\end{pmatrix},
$$

$$
B_i^1 Y = \begin{pmatrix}
x_1 & \cdots & x_{m_j-1} & 0 & 0 \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}, \quad
Z C_j^2 = \begin{pmatrix}
x_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & & & \vdots \\
x_{m_j-1} & \vdots & & & \vdots \\
0 & \vdots & & & \vdots \\
\vdots & \vdots & & & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & \cdots & 0
\end{pmatrix},
$$

$$XB_j^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad YB_j^2 = (0),$$

i, en el cas $k_j < m_j$,

$$N_i^1 X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_{m_j-2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad XN_j^3 = \begin{pmatrix} 0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_{m_j-1} \\ 0 & x_2 & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \vdots \\ 0 & x_{m_j-1} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_i^1 Y = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_{m_j-1} & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad ZC_j^2 = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ x_{m_j-1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

$$XB_j^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad YB_j^2 = (0).$$

Òbviament, tots els paràmetres apareixen en direccions independents, i el nombre de paràmetres és igual a la dimensió de l'espai de solucions. Per tant, aquestes matrius generen **S**(2_{ij}).

Concloem, doncs, que el nombre de paràmetres en la solució del sistema (2) és

$$\sum_{1 \le i \le t} (m_i - 1).$$

Subsistema 3

Si partim les matrius X_2^1, Y_2^1 i Z_1^1 en blocs, segons els blocs de les matrius A_1, A_2, B_1 i C_1,

$$A_1 = \begin{pmatrix} N_1^1 & & \\ & \ddots & \\ & & N_r^1 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} N_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & N_s^2 \end{pmatrix},$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} B_1^1 & & \\ & \ddots & \\ & & B_r^1 \end{pmatrix}, \qquad C_1 = \begin{pmatrix} C_1^1 & & \\ & \ddots & \\ & & C_s^1 \end{pmatrix},$$

obtenim $r \times s$ sistemes independents de la forma

$$N_i^1 X - X N_j^2 + B_i^1 Y - Z C_j^1 = 0 \qquad (3_{ij})$$

essent $N_i^1 \in \mathcal{M}_{k_i}(\mathbb{C})$, $N_j^2 \in \mathcal{M}_{l_j}(\mathbb{C})$, $B_i^1 \in \mathcal{M}_{k_i \times 1}(\mathbb{C})$ i $C_j^1 \in \mathcal{M}_{1 \times l_j}(\mathbb{C})$.

Si linealitzem el sistema (3_{ij}), tenim que X, Y i Z són solucions del sistema (3_{ij}) si i només si $\begin{pmatrix} vec(X) \\ vec(Y) \\ vec(Z) \end{pmatrix}$ és solució del sistema

$$\begin{pmatrix} I_{l_j} \otimes N_i^1 - {N_j^2}^t \otimes I_{k_i} & I_{l_j} \otimes B_i^1 & -{C_j^1}^t \otimes I_{k_i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} vec(X) \\ vec(Y) \\ vec(Z) \end{pmatrix} = 0.$$

Per a simplificar notacions, diem $\mathbf{M}(3_{ijj}) \in \mathcal{M}_{k_i l_j \times k_i l_j + l_i + k_j}(\mathbb{C})$ a la matriu anterior,

$$\mathbf{M}(3_{ij}) = \begin{pmatrix} I_{l_j} \otimes N_i^1 - {N_j^2}^t \otimes I_{k_i} & I_{l_j} \otimes B_i^1 & -{C_j^1}^t \otimes I_{k_i} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} N_i^1 & & & & B_i^1 & & & I_{l_j} \\ -I_{l_j} & N_i^1 & & & & B_i^1 & & \\ & \ddots & \ddots & & & & \ddots & \\ & & -I_{l_j} & N_i^1 & & & & B_i^1 \end{pmatrix}$$

Com que fent transformacions elementals de blocs fila i blocs columna la matriu $\mathbf{M}(3_{ij})$ es transforma en la forma

$$\mathbf{M}(3_{ij}) \sim \begin{pmatrix} & & & I_{l_j} \\ I_{l_j} & & & \\ & \ddots & & \\ & & I_{l_j} & \end{pmatrix},$$

tenim que

$$\operatorname{rang} \mathbf{M}(3_{ij}) = k_i l_j$$

i

$$\dim \mathbf{S}(3_{ij}) = k_i l_j + k_i + l_j — k_i f_j = k_i + l_j.$$

Les matrius X, Y i Z amb $\begin{pmatrix} 0 & | & Y \\ - & \cdot & - \\ Z & | & X \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{(k_i+1)\times(l_j+1)}(\mathbb{C})$ una matriu de Hankel densa amb el primer element diagonal no nul en la posició (1,1), és a dir,

$$\begin{pmatrix} 0 & | & Y \\ - & \cdot & - \\ Z & | & X \end{pmatrix} = \begin{cases} \left(\begin{array}{c|ccccccc} 0 & 0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_{k_i} & \cdots & x_{l_j} \\ \hline 0 & x_1 & x_2 & \iddots & \iddots & \iddots & \iddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & \iddots & \iddots & \iddots & \iddots & \iddots & \vdots \\ x_2 & \iddots & \iddots & \iddots & \iddots & \iddots & \iddots & \vdots \\ \vdots & \iddots & \iddots & \iddots & \iddots & \iddots & \iddots & \vdots \\ x_{k_i} & \cdots & x_{l_j} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & x_{k_i+l_j} \end{array}\right) & \text{si } k_i < l_j, \\[2ex] \left(\begin{array}{c|ccccc} 0 & 0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_{k_i} \\ \hline 0 & x_1 & x_2 & \iddots & x_{k_i} & x_{k_i+1} \\ x_1 & x_2 & \iddots & \iddots & \iddots & \vdots \\ x_2 & \iddots & \iddots & \iddots & & \vdots \\ \vdots & \iddots & \iddots & & & \vdots \\ x_{k_i} & x_{k_i+1} & \cdots & \cdots & \cdots & x_{k_i+l_j} \end{array}\right) & \text{si } k_i = l_j, \\[2ex] \left(\begin{array}{c|ccccc} 0 & 0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_{l_j} \\ \hline 0 & x_1 & x_2 & \iddots & \iddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & \iddots & \iddots & & \vdots \\ x_2 & \iddots & \iddots & & & x_{k_i} \\ \vdots & \iddots & & & \iddots & \vdots \\ x_{l_j} & \iddots & & \iddots & & \vdots \\ \vdots & & \iddots & & & \vdots \\ \vdots & \iddots & & & & \vdots \\ x_{k_i} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & x_{k_i+l_j} \end{array}\right) & \text{si } k_i > l_j, \end{cases}$$

són solucions d'aquest subsistema, com es veu fàcilment tenint en compte que

$$
N_i^1 X = \begin{cases}
\begin{pmatrix}
x_2 & x_3 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & x_{l_j+2} \\
x_3 & \iddots & \iddots & \iddots & \iddots & \iddots & \vdots \\
\vdots & \iddots & \iddots & \iddots & \iddots & \iddots & \vdots \\
x_{k_i+1} & \cdots & \cdots & x_{l_j+2} & \cdots & \cdots & x_{k_i+l_j+2}
\end{pmatrix} & \text{si } k_i < l_j, \\
\begin{pmatrix}
x_2 & x_3 & \cdots & x_{k_i+1} & x_{k_i+2} \\
x_3 & \iddots & \iddots & \iddots & \vdots \\
\vdots & \iddots & \iddots & \iddots & \vdots \\
x_{k_i+1} & \cdots & \cdots & \cdots & x_{k_i+l_j+1}
\end{pmatrix} & \text{si } k_i = l_j, \\
\begin{pmatrix}
x_2 & x_3 & \cdots & \cdots & x_{l_j+2} & \\
x_3 & \iddots & \iddots & \iddots & \iddots & \vdots \\
\vdots & \iddots & \iddots & \iddots & x_{k_i+1} & \\
\vdots & \iddots & \iddots & \iddots & \vdots & \\
x_{l_j+2} & \iddots & \iddots & \iddots & \vdots & \\
\vdots & \iddots & \iddots & \iddots & \vdots & \\
x_{k_i+1} & \cdots & \cdots & \cdots & x_{k_i+l_j+1} &
\end{pmatrix} & \text{si } k_i > l_j.
\end{cases}
$$

$$
N_j^2 X = \begin{cases}
\begin{pmatrix}
0 & x_2 & x_3 & \cdots & x_{k_i+2} & \cdots & x_{l_j+1} \\
0 & x_3 & \iddots & \iddots & \iddots & \iddots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \iddots & \iddots & \iddots & \iddots & \vdots \\
0 & x_{k_i+2} & \cdots & x_{l_j+1} & \cdots & \cdots & x_{k_i+l_j+1}
\end{pmatrix} & \text{si } k_i < l_j, \\
\begin{pmatrix}
0 & x_2 & x_3 & \cdots & x_{k_i+1} \\
0 & x_3 & \iddots & \iddots & x_{k_i+2} \\
\vdots & \vdots & \iddots & \iddots & \vdots \\
0 & x_{k_i+2} & \cdots & \cdots & x_{k_i+l_j+1}
\end{pmatrix} & \text{si } k_i = l_j, \\
\begin{pmatrix}
0 & x_2 & x_3 & \cdots & x_{l_j+1} \\
0 & x_3 & \iddots & \iddots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \iddots & \iddots & \vdots \\
\vdots & x_{l_j+1} & \iddots & \iddots & x_{k_i+2} \\
\vdots & \vdots & \iddots & \iddots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \iddots & \iddots & \vdots \\
0 & x_{k_i+2} & \cdots & \cdots & x_{k_i+l_j+1}
\end{pmatrix} & \text{si } k_i > l_j.
\end{cases}
$$

$$B_i^1 Y = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_{l_j+1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \qquad ZC_j^1 = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ x_2 & 0 & \cdots & 0 \\ x_3 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{k_i+1} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Tenint en compte que tots els paràmetres estan en direccions independents, la dimensió de l'espai de solucions és igual al nombre de paràmetres, veiem que el conjunt de solucions de (3_{ij}) és igual al conjunt de matrius d'aquesta forma.

El nombre de paràmetres en la solució del sistema (3) és, doncs,

$$\sum_{1\leq i\leq r}\ \sum_{1\leq j\leq s} (k_i + l_j).$$

Subsistema 4

Descomponem les matrius X_4^1 i Y_4^1 del subsistema (4) en blocs, segons els blocs de les matrius A_1, A_4 iB_1,

$$A_1 = \begin{pmatrix} N_1^1 & & \\ & \ddots & \\ & & N_r^1 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} B_1^1 & & \\ & \ddots & \\ & & B_r^1 \end{pmatrix},$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_u \end{pmatrix}, \quad J_i = \begin{pmatrix} J_i^1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_i^{\alpha_i} \end{pmatrix}, \ 1 \leq i \leq u.$$

El subsistema descompon en $r \times \sum_{1\leq i\leq u} \alpha_i$ subsistemes de la forma

$$N_i^1 X - X J_j^\nu + B_i^1 Y = 0 \quad (4_{ij\nu})$$

on $N_i^1 \in \mathcal{M}_{k_i}(\mathbb{C})$, $J_j^\nu \in \mathcal{M}_{n_{j_\nu}}(\mathbb{C})$ i $B_i^1 \in \mathcal{M}_{k_i\times 1}(\mathbb{C})$.

Linealitzant el sistema $(4_{ij\nu})$ tenim que X, Y són solucions del sistema $(4_{ij\nu})$ si i només si $\begin{pmatrix} vec(X) \\ vec(Y) \end{pmatrix}$ és solució del sistema

$$\begin{pmatrix} I_{n_{j_\nu}} \otimes N_i^1 - J_j^{\nu t} \otimes I_{k_i} & I_{n_{j_\nu}} \otimes B_i^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} vec(X) \\ vec(Y) \end{pmatrix} = (\,0\,).$$

Per a simplificar notacions, diem $\mathbf{M}(4_{ij\nu}) \in \mathcal{M}_{k_i n_{j_\nu} \times n_{j_\nu}(k_i+1)}(\mathbb{C})$ a la matriu del sistema anterior,

$$\mathbf{M}(4_{ij\nu}) = (\, I_{n_{j_\nu}} \otimes N_i^1 - J_j^{\nu\, t} \otimes I_{k_i} \quad I_{n_{j_\nu}} \otimes B_i^1 \,) =$$

$$= \begin{pmatrix} N_i^1 - \lambda_j I_{k_i} & & & & B_i^1 & & \\ -i_{k_i} & \ddots & \ddots & & & \ddots & \\ & \ddots & N_i^1 - \lambda_j I_{k_i} & & & & B_i^1 \\ & & -I_{k_i} & N_i^1 - \lambda_j I_{k_i} & & & & B_i^1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} N_i^1 - \lambda_j I_{k_i} & B_i^1 & & & & & \\ -I_{k_i} & 0 & N_i^1 - \lambda_j I_{k_i} & B_i^1 & & & \\ & & -I_{k_i} & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & & \\ & & & & & N_i^1 - \lambda_j I_{k_i} & B_i^1 \\ & & & & & -I_{k_i} & \end{pmatrix}.$$

Tenint en compte que les matrius $(\, N_i^1 - \lambda_j I_{k_i} \quad B_i^1 \,)$ tenen rang màxim, la dimensió de l'espai $\mathbf{S}(4_{ij\nu})$ de solucions del sistema $(4_{ij\nu})$ és

$$\dim \mathbf{S}(4_{ij\nu}) = n_{j_\nu}(k_i+1) - n_{j_\nu} k_i = n_{j_\nu}.$$

Es fàcil comprovar que les matrius X i Y tals que la matriu $\begin{pmatrix} Y \\ \hline X \end{pmatrix}$ és de la forma

$$\left(\begin{array}{cccc} \dots & \lambda_j^{k_i} x_3 + \binom{k_i}{1}\lambda_j^{k_i-1} x_2 + \binom{k_i}{2}\lambda_j^{k_i-2} x_1 & \lambda_j^{k_i} x_2 + \binom{k_i}{1}\lambda_j^{k_i-1} x_1 & \lambda_j^{k_i} x_1 \\ \hline \dots & \lambda_j^{k_i-1} x_3 + \binom{k_i-1}{1}\lambda_j^{k_i-2} x_2 + \binom{k_i-1}{2}\lambda_j^{k_i-3} x_1 & \lambda_j^{k_i-1} x_2 + \binom{k_i-1}{1}\lambda_j^{k_i-2} x_1 & \lambda_j^{k_i-1} x_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \lambda_j^2 x_3 + 2\lambda_j x_2 + x_1 & \lambda_j^2 x_2 + 2\lambda_j x_1 & \lambda_j^2 x_1 \\ \dots & \lambda_j x_3 + x_2 & \lambda_j x_2 + x_1 & \lambda_j x_1 \\ \dots & x_3 & x_2 & x_1 \end{array}\right)$$

són solucions del subsistema, tenint en compte que

$$N_i^1 X = \begin{pmatrix} \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \lambda_j^{k_i} x_3 + \binom{k_i}{1}\lambda_j^{k_i-1} x_2 + \binom{k_i}{2}\lambda_j^{k_i-2} x_1 & \lambda_j^{k_i} x_2 + \binom{k_i}{1}\lambda_j^{k_i-1} x_1 & \lambda_j^{k_i} x_1 \\ \cdots & \lambda_j^{k_i-1} x_3 + \binom{k_i-1}{1}\lambda_j^{k_i-2} x_2 + \binom{k_i-1}{2}\lambda_j^{k_i-3} x_1 & \lambda_j^{k_i-1} x_2 + \binom{k_i-1}{1}\lambda_j^{k_i-2} x_1 & \lambda_j^{k_i-1} x_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & \lambda_j^2 x_3 + 2\lambda_j x_2 + x_1 & \lambda_j^2 x_2 + 2\lambda_j x_1 & \lambda_j^2 x_1 \\ \cdots & \lambda_j x_3 + x_2 & \lambda_j x_2 + x_1 & \lambda_j x_1 \end{pmatrix}$$

$$X J_j^\nu = \begin{pmatrix} \cdots & \lambda_j^{k_i} x_3 + \binom{k_i}{1}\lambda_j^{k_i-1} x_2 + \binom{k_i}{2}\lambda_j^{k_i-2} x_1 & \lambda_j^{k_i} x_2 + \binom{k_i}{1}\lambda_j^{k_i-1} x_1 & \lambda_j^{k_i} x_1 \\ \cdots & \lambda_j^{k_i-1} x_3 + \binom{k_i-1}{1}\lambda_j^{k_i-2} x_2 + \binom{k_i-1}{2}\lambda_j^{k_i-3} x_1 & \lambda_j^{k_i-1} x_2 + \binom{k_i-1}{1}\lambda_j^{k_i-2} x_1 & \lambda_j^{k_i-1} x_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & \lambda_j^2 x_3 + 2\lambda_j x_2 + x_1 & \lambda_j^2 x_2 + 2\lambda_j x_1 & \lambda_j^2 x_1 \\ \cdots & \lambda_j x_3 + x_2 & \lambda_j x_2 + x_1 & \lambda_j x_1 \end{pmatrix}$$

$$\text{i} \quad B_i^1 Y = \begin{pmatrix} \cdots & \lambda_j^{k_i} x_3 + \binom{k_i}{1}\lambda_j^{k_i-1} x_2 + \binom{k_i}{2}\lambda_j^{k_i-2} x_1 & \lambda_j^{k_i} x_2 + \binom{k_i}{1}\lambda_j^{k_i-1} x_1 & \lambda_j^{k_i} x_1 \\ \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Òbviament, tots els paràmetres apareixen en direccions independents, i la dimensió de l'espai $\mathbf{S}(4_{ij})$ de solucions del sistema (4_{ij}) és igual al nombre de paràmetres. Per tant, aquestes són totes les solucions del sistema.

El nombre de paràmetres en la solució del subsistema (4) és

$$\sum_{1 \le i \le u} \sum_{1 \le \nu \le \alpha_i} n_{i_\nu}.$$

Subsistema 5

Partim la matriu X_2^1 en blocs, segons els blocs de les matrius A_1, A_2, B_1 i C_1,

$$A_1 = \begin{pmatrix} N_1^1 & & \\ & \ddots & \\ & & N_r^1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} N_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & N_s^2 \end{pmatrix},$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} B_1^1 & & \\ & \ddots & \\ & & B_r^1 \end{pmatrix}, \quad C_1 = \begin{pmatrix} C_1^1 & & \\ & \ddots & \\ & & C_s^1 \end{pmatrix}.$$

Obtenim llavors $r \times s$ sistemes linealment independents, tots ells de la forma

$$\left.\begin{aligned} N_i^2 X - X N_j^1 &= 0 \\ X B_j^1 &= 0 \\ C_i^1 X &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (5_{ij})$$

on $N_i^2 \in \mathcal{M}_{l_i}(\mathbb{C})$, $N_j^1 \in \mathcal{M}_{k_j}(\mathbb{C})$, $B_j^1 \in \mathcal{M}_{k_i \times 1}(\mathbb{C})$, $C_i^1 \in \mathcal{M}_{1 \times l_i}(\mathbb{C})$.

Linealitzant el sitema, tenim que X és solució d'aquest sistema si i només si $vec(X)$ és solució del sistema

$$\begin{pmatrix} I \otimes N_i^2 - {N_j^1}^t \otimes I \\ {B_j^1}^t \otimes I \\ I \otimes C_i^1 \end{pmatrix} (\, vec(X)\,) = 0.$$

Per a simplificar notacions, posem $\mathbf{M}(5_{ij})$ a la matriu

$$\mathbf{M}(5_{ij}) = \begin{pmatrix} I_{k_j} \otimes N_i^2 - {N_j^1}^t \otimes I_{l_i} \\ {B_j^1}^t \otimes I_{l_i} \\ I_{k_j} \otimes C_i^1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} N_i^2 & & & \\ -I_{l_i} & N_i^2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -I_{l_i} & N_i^2 \\ I_{l_i} & & & \\ C_i^1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & C_i^1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{(l_i k_j + l_i + k_j) \times l_i k_j}(\mathbb{C}).$$

Aleshores la dimensió de l'espai de solucions del sistema (5_{ij}) és

$$\dim \mathbf{S}(5_{ij}) = l_i k_j - \operatorname{rang} \mathbf{M}(5_{ij}).$$

Com que fent transformacions elementals de blocs fila i blocs columna podem transformar la matriu $\mathbf{M}(5_{ij})$ en la fornia

$$\mathbf{M}(5_{ij}) \sim \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ I_{l_i} & 0 & & & & \\ & I_{l_i} & 0 & & & \\ & & \ddots & & \ddots & \\ & & & & I_{l_i} & 0 \\ & & & & {N_i^2}^{k_j-2} C_i^1 & \\ & & & & \vdots & \\ & & & & N_i^2 C_i^1 & \\ & & & & C_i^1 & \end{pmatrix},$$

veiem que

$$\operatorname{rang} \mathbf{M}(5_{ij}) = l_i k_j,$$

i

$$\dim \mathbf{S}(5_{ij}) = 0.$$

L'única solució d'aquest sistema és, doncs, la trivial.

Subsistema 6

Partim les matrius X_2^2 i Z_2^1 en blocs, segons els blocs de les matrius A_2 i C_1,

$$A_2 = \begin{pmatrix} N_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & N_s^2 \end{pmatrix}, \qquad C_1 = \begin{pmatrix} C_1^1 & & \\ & \ddots & \\ & & C_s^1 \end{pmatrix}.$$

Obtenim aleshores $s \times s$ subsistemes independents, tots ells de la forma

$$\left.\begin{aligned} N_i^2 X - X N_j^2 - Z C_j^1 = 0 \\ C_i^1 Z = 0 \\ C_i^1 X = 0 \end{aligned}\right\} \quad (6_{ij})$$

on $N_i^2 \in \mathcal{M}_{l_i}(\mathbb{C})$ i $C_1 \in \mathcal{M}_{l_j \times 1}(\mathbb{C})$.

Podem observar que el transposat d'aquest subsistema és un sistema del mateix tipus que el sistema (1_{ij}). La forma de la seva solució és, doncs, de la forma transposada a la de la solució del subsistema (l_{ij}).

Si $l_i \leq l_j + 1$, aleshores l'única solució és la trivial. Si $l_i > l_j + 1$, aleshores són solució totes les matrius de la forma

$$
(\,Z \quad | \quad X\,) = \left(\begin{array}{c|cccc}
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
x_1 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\
x_2 & x_1 & 0 & \ddots & \vdots \\
\vdots & x_2 & \ddots & \ddots & \vdots \\
x_{l_i-l_j-1} & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\
0 & x_{l_i-l_j-1} & \ddots & \ddots & x_1 \\
0 & 0 & \ddots & \ddots & x_2 \\
\vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\
\vdots & \vdots & & \ddots & x_{l_i-l_j-1} \\
\vdots & \vdots & & & 0 \\
\vdots & \vdots & & & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & \cdots & 0
\end{array}\right).
$$

En particular, el nombre de paràmetres que hi ha a la solució del sistema (6) és

$$\sum_{1 \leq i,j \leq s} \max\{0, l_i - l_j - 1\}.$$

Observació 3.8. En el cas de que la terna sigui tal que els divisors elementals de files no difereixin en més d'una unitat, aleshores veiem que la solució del subsistema (6) és sempre la trivial.

Subsistema 7

Partim les matrius X_2^3 i Z_2^2 en blocs, segons els blocs de les matrius A_2, A_3, B_2, C_1 i C_2,

$$A_2 = \begin{pmatrix} N_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & N_s^2 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} N_1^3 & & \\ & \ddots & \\ & & N_t^3 \end{pmatrix},$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} B_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & B_t^2 \end{pmatrix}, \qquad C_1 = \begin{pmatrix} C_1^1 & & \\ & \ddots & \\ & & C_s^1 \end{pmatrix}, \qquad C_2 = \begin{pmatrix} C_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & C_t^2 \end{pmatrix}.$$

Obtenim aleshores $s\times t$ subsistemes independents, tots ells de la forma

$$\left.\begin{aligned} N_i^2X - XN_j^3 - ZC_j^2 &= 0 \\ XB_j^2 &= 0 \\ C_i^1Z &= 0 \\ C_i^1X &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (7_{ij})$$

on $N_i^2 \in \mathcal{M}_{l_i}(\mathbb{C})$, $N_j^3 \in \mathcal{M}_{m_j}(\mathbb{C})$, $C_j^2 \in \mathcal{M}_{1\times m_j}(\mathbb{C})$, $B_j^2 \in \mathcal{M}_{m_j\times 1}(\mathbb{C})$ i $C_i^1 \in \mathcal{M}_{1\times l_i}(\mathbb{C})$.

Si linealitzem el sistema, obtenim que X, Z són solucions d'aquest subsistema si i només si $\binom{vec(X)}{vec(Y)}$és solució del sistema

$$\begin{pmatrix} I_{m_j}\otimes N_i^2 - {N_j^3}^t\otimes I_{l_i} & -{C_j^2}^t\otimes I_{l_i} \\ {B_j^2}^t\otimes I_{l_i} & 0 \\ 0 & I_1\otimes C_i^1 \\ I_{m_j}\otimes C_i^1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} vec(X) \\ vec(Z)\end{pmatrix} = 0.$$

Per a simplificar notacions, posem $\mathbf{M}(7_{ij})$ a la matriu del sistema anterior,

$$\mathbf{M}(7_{ij}) = \begin{pmatrix} I_{m_j}\otimes N_i^2 - {N_j^3}^t\otimes I_{l_i} & -{C_j^2}^t\otimes I_{l_i} \\ {B_j^2}^t\otimes I_{l_i} & 0 \\ 0 & I_1\otimes C_i^1 \\ I_{m_j}\otimes C_i^1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} N_i^2 & & & & -I_{l_i} \\ -I_{l_i} & \ddots & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & -I_{l_i} & N_i^2 & \\ I_{l_i} & & & & \\ & & & & C_i^1 \\ C_i^1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & C_i^1 & \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{(2l_im_j+l_i+1)\times(l_im_j+l_i)}(\mathbb{C}).$$

La dimensió de l'espai $S(7_{ijj})$ de solucions del subsistema (7_{ij}) *és*

$$\dim\mathbf{S}(7_{ij}) = l_im_j + l_i - \operatorname{rang}\mathbf{M}(7_{ij}).$$

Com que fent transformacions elementals de blocs fila i blocs columna a la matriu $\mathbf{M}(7_{ij})$ es transforma en la matriu

$$\begin{pmatrix} & & & I_{l_i} \\ I_{l_i} & & & \\ & \ddots & & \\ & & I_{l_i} & \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

tenim que

$$\operatorname{rang}\mathbf{M}(7_{ij}) = l_i m_j + l_i$$

i, per tant,

$$\dim \mathbf{S}(7_{ij}) = 0.$$

Així, Túnica solució del subsistema (7_{ij}) és la trivial.

Subsistema 8

Partim la matriu X_2^4 en blocs, segons els blocs de les matrius A_2, A_4 i C_1,

$$A_2 = \begin{pmatrix} N_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & N_s^2 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_u \end{pmatrix},$$

$$J_i = \begin{pmatrix} J_i^1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_i^{\alpha_i} \end{pmatrix}, \; 1 \leq i \leq u, \quad C_1 = \begin{pmatrix} C_1^1 & & \\ & \ddots & \\ & & C_s^1 \end{pmatrix}.$$

Obtenim aleshores $s \times \sum_{1 \leq i \leq u} \alpha_i$ subsistemes independents, tots ells de la forma

$$\left.\begin{aligned} N_i^2 X - X J_j^\nu &= 0 \\ C_i^1 X &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (8_{ij})$$

on $N_i^2 \in \mathcal{M}_{l_i}(\mathbb{C})$, $J_j^\nu \in \mathcal{M}_{n_{i_\nu}}(\mathbb{C})$ i $C_i^1 \in \mathcal{M}_{1\times l_i}(\mathbb{C})$.

Si linealitzem el sistema, obtenim que X és solució d'aquest subsistema si i només si $vec(X)$ és solució del sistema

$$\begin{pmatrix} I_{n_{j_\nu}} \otimes N_i^2 - J_j^\nu \otimes I_{l_i} \\ I_{n_{j_\nu}} \otimes C_i^1 \end{pmatrix} (\, vec(X)\,) = 0.$$

Per a simplificar notacions, posem $\mathbf{M}(8_{ijj}) \in \mathcal{M}_{(l_i n_{j_\nu} + n_{j_\nu}) \times l_i n_{j_\nu}}(\mathbb{C})$ a la matriu del sistema anterior,

$$\mathbf{M}(8_{ij}) = \begin{pmatrix} I_{n_{j_\nu}} \otimes N_i^2 - J_j^\nu \otimes I_{l_i} \\ I_{n_{j_\nu}} \otimes C_i^1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} N_i^2 - \lambda I_{l_i} & & & & \\ -I_{l_i} & N_i^2 - \lambda I_{l_i} & & & \\ & -I_{l_i} & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & N_i^2 - \lambda I_{l_i} & \\ & & & -I_{l_i} & N_i^2 - \lambda I_{l_i} \\ C_i^1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & C_i^1 \end{pmatrix}.$$

La dimensió de l'espai $\mathbf{S}(8_{ij})$ de solucions del subsistema (8_{ij}) és

$$\dim \mathbf{S}(8_{ij}) = l_i n_{j_\nu} - \operatorname{rang} \mathbf{M}(8_{ij}).$$

Com que fent transformacions elementals de blocs fila i blocs columna a la matriu $\mathbf{M}(8_{ij})$ es transforma en la matriu

$$\mathbf{M}(8_{ij}) \sim \begin{pmatrix} I_{l_i} & & \\ & \ddots & \\ & & I_{l_i} \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

tenim que

$$\text{rang}\mathbf{M}(8_{ji}) = l_i n_{j_v}$$

i, per tant,

$$\dim\mathbf{S}(8_{ij}) = 0.$$

Així, l'única solució del subsistema és la trivial.

Subsistema 9

Partim les matrius X_3^1, X_2^1, Y_2^1 en blocs, segons els blocs de les matrius A_1, A_3, B_1, B_2 i C_2,

$$A_1 = \begin{pmatrix} N_1^1 & & \\ & \ddots & \\ & & N_r^1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} N_1^3 & & \\ & \ddots & \\ & & N_t^3 \end{pmatrix},$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} B_1^1 & & \\ & \ddots & \\ & & B_r^1 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} B_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & B_t^2 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} C_2^1 & & \\ & \ddots & \\ & & C_t^2 \end{pmatrix}$$

Obtenim així $t \times r$ subsistemes independents, tots ells de la forma

$$\left.\begin{aligned} N_i^3 X - X N_j^1 + B_i^2 Y &= 0 \\ X B_j^1 &= 0 \\ Y B_j^1 &= 0 \\ C_i^2 X &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (9_{ij})$$

on $N_i^3 \in \mathcal{M}_{m_i}(\mathbb{C})$, $N_j^1 \in \mathcal{M}_{k_j}(\mathbb{C})$, $B_i^2 \in \mathcal{M}_{m_i \times 1}(\mathbb{C})$, $B_j^1 \mathbb{C}\, \mathcal{M}_{k_j \times 1}(\mathbb{C})$ i $C_i^2 \in \mathcal{M}_{1 \times m_i}(\mathbb{C})$.

Si linealitzem el sistema, obtenim que X, Y són solucions d'aquest subsistema si i només si $\binom{vec(X)}{vec(Y)}$ es solució del sistema

$$\begin{pmatrix} I_{k_j} \otimes {N_j^1}^t \otimes I_{m_i} & I_{k_j} \otimes B_i^2 \\ {B_j^1}^t \otimes I_{m_i} & 0 \\ 0 & {B_j^1}^t \otimes I_1 \\ I_{k_j} \otimes C_i^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} vec(X) \\ vec(Y) \end{pmatrix} = 0.$$

Per a simplificar notacions, posem $\mathbf{M}(9_{ij})$ a la matriu del sistema anterior,

$$\mathbf{M}(9_{ij}) = \begin{pmatrix} I_{k_j} \otimes {N_j^1}^t \otimes I_{m_i} & I_{k_j} \otimes B_i^2 \\ {B_j^1}^t \otimes I_{m_i} & 0 \\ 0 & {B_j^1}^t \otimes I_1 \\ I_{k_j} \otimes C_i^2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} N_i^3 & -I_{m_i} & & & B_i^2 & & \\ & \ddots & \ddots & & & \ddots & \\ & & N_i^3 & -I_{m_i} & & & \ddots \\ & & & N_i^3 & & & B_i^2 \\ I_{m_i} & & & & & & \\ & & & & I_1 & & \\ C_i^2 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & C_i^2 & & & \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{(k_j m_i + m_i + k_j + 1) \times (k_j m_i)}(\mathbb{C}).$$

La dimensió de l'espai $\mathbf{S}(9_{ij})$ de solucions del subsistema (9_{ij}) és

$$\dim \mathbf{S}(9_{ij}) = k_j m_i + k_j - \operatorname{rang} \mathbf{M}(9_{ij}).$$

Com que fent transformacions elementals de blocs fila i blocs columna a la matriu $\mathbf{M}(9_{ij})$ es transforma en la matriu

$$\mathbf{M}(9_{ij}) \sim \begin{pmatrix} I_{m_i} & & & \\ & \ddots & & \\ & & I_{m_i} & \\ & & & I_{k_j} \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

tenim que

$$\operatorname{rang} \mathbf{M}(9_{ij}) = k_j m_i + k_j$$

i, per tant,

$$\dim \mathbf{S}(9_{ij}) = 0.$$